А.Р. Лакерник

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
КРАТКИЙ КУРС

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области телекоммуникаций в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов «Телекоммуникации»

Москва • Логос • 2008

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я.73
Л 19

Серия основана в 2003 году

Рецензенты

Л.М. Баскин, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского государственного университете информационных технологий им. профессора М.А. Бонч-Бруевича

В.Г. Данилов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Московского технического университета связи и информатики

Лакерник А.Р.

Л 19 Высшая математика. Краткий курс: учеб. пособие / А.Р. Лакерник. — М.: Университетская книга; Логос, 2008. — 528 с. — (Новая университетская библиотека).

ISBN 978-5-98704-323-9

В полном объеме изложен курс математического анализа и высшей математики, изучаемый в вузах по направлениям (специальностям) техники и технологии, включая теорию пределов, непрерывность функции, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, неопределенный и определенный интегралы, дифференциальные уравнения, ряды, кратные интегралы, теорию функций комплексного переменного и операционное исчисление. Изложение построено по модульному принципу, позволяющему варьировать объем и сложность освещения отдельных разделов с учетом задач подготовки специалистов и уровня знаний студентов. Методической основой учебного пособия является многолетний опыт преподавания математики в Московском техническом университете связи и информатики.

Для студентов высших учебных заведений, получающих образование по направлению «Телекоммуникации». Может использоваться при подготовке кадров по широкому кругу направлений и специальностей в области техники и технологии, естественных наук и прикладной математики.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я.73

ISBN 978-5-98704-323-9

Учебное издание

Лакерник Александр Рафаилович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КРАТКИЙ КУРС

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Комарова*
Корректор *Г.Б. Абудеева*
Компьютерная верстка *Т.В. Клейменовой*
Оформление *Т.Ю. Хрычевой*

Подписано в печать 09.06.2008. Формат 60x90/16.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 33
Тираж 4000 экз. (1-й з-д 1 – 1000 экз.). Заказ № 1362

Издательская группа «Логос»
105318, Москва, Измайловское ш., 4

По вопросам приобретения литературы обращаться по адресу:
105318, Москва, Измайловское ш., 4
Тел./факс: (495) 369-5819, 369-5668, 369-7727
Электронная почта: universitas@mail.ru
Дополнительная информация на сайте:
http:// www.logosbook.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ОАО «Марийский полиграфическо-издательский комбинат»
424002, г. Йошкар-Ола, ул. Комсомольская, 112

I

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

1. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1.1. Определение действительного числа

Определение 1.1. *Множеством действительных чисел* R называется множество элементов (называемых далее действительными числами или просто числами), содержащее более одного элемента и удовлетворяющее следующим условиям:

1. Для любых a, b, принадлежащих множеству R, существует единственное число c, принадлежащее множеству R, называемое суммой a и b и обозначаемое $c = a + b$, такое, что

$$a + b = b + a,\ \ a, b, c \in R \ \text{ и}$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c,\ \ a, b, c \in R.$$

2. Существует единственное число $b \in R$, называемое нулем и обозначаемое 0, такое, что $a + 0 = a$, $a \in R$.

3. Для любого a, принадлежащего R, существует единственное b, принадлежащее R, такое, что выполняется условие $a + b = 0$. Такое число называется противоположным числу a и обозначается $-a$.

Число $d = a + (-b)$, $a, b \in R$, называется разностью чисел a и b и обозначается $d = a - b$.

4. Для любых a, b, принадлежащих множеству R, существует единственное число c, принадлежащее множеству R, называемое произведением a и b и обозначаемое $c = ab$, такое, что

$$ab = ba,\ \ a, b \in R \ \text{ и}$$

$$a(bc) = (ab)c,\ \ a, b, c \in R.$$

Целая степень числа определяется как произведение этого числа само на себя: $a^2 = aa$; $a^3 = a^2a = aaa$;... .

5. Существует единственное число $b \in R$, называемое единицей и обозначаемое 1, такое, что $a \cdot 1 = a$, $a \in R$.

6. Для любого a, принадлежащего множеству R, $a \neq 0$, существует единственное число b, принадлежащее множеству R, такое, что $ab = 1$. Такое число называется обратным числу a и обозначается $\frac{1}{a}$.

Число $a\frac{1}{b}$, где $b \neq 0$, называется частным от деления a на b и обозначается $\frac{a}{b}$.

7. Справедливо равенство $(a + b)c = ac + bc$, $a,b,c \in R$.

8. Множество R является *упорядоченным*, т.е. для любых $a \neq b$, $a,b \in R$, вводятся так называемые неравенства: либо $a < b$ (a меньше b), или, что то же самое, $b > a$ (b больше a), либо $a > b$ (или, что то же самое, $b < a$), при этом должны выполняться следующие условия:

а) $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$;

б) $a < b$, $c \in R \Rightarrow a + c < b + c$;

в) $a < b$, $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.

(Запись $a \leq b$, равносильная записи $b \geq a$, означает, что либо $a = b$, либо $a < b$.)

Из пунктов а) и б) следует возможность сложения неравенств: если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + c$ и $c + b < d + b$, или $b + c < b + d$, тогда $a + c < b + d$.

Из пунктов б) и в) следует так называемая *плотность* множества R: пусть $a < b$, тогда существует $c \in R$, такое, что $a < c < b$ (ниже будет проверено, что, например, $c = 0{,}5\ (a + b)$).

Замечание. Условиям 1–8 удовлетворяет, например, Q – множество всех рациональных чисел (см. определение 1.2).

9. Множество R является *непрерывным*, т.е. если $X \subset R$, $Y \subset R$ – два любых непустых числовых множества, таких, что для всех элементов $x \in X$, $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$, то существует некоторое число $a \in R$, такое, что $x \leq a \leq y$, $x \in X$, $y \in Y$.

Определение 1.2. Множеством *натуральных* чисел N называется множество действительных чисел вида 1; 2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1;... Множеством *целых* чисел Z называется множество действительных

чисел вида 0; ±1; ±2;... Числа, удовлетворяющие неравенству $a > 0$ ($a < 0$), называются *положительными* (*отрицательными*). Множеством *рациональных* чисел называется множество действительных чисел вида $\frac{m}{n}$, где $m, n \in Z$, $n \neq 0$. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Определив $\sqrt{2}$ как положительное число, квадрат которого равен 2, и не вдаваясь в доказательство существования и единственности этого числа, проверим, что оно является иррациональным. Пусть это не так и $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где дробь предполагается несократимой. Тогда $n\sqrt{2} = m \Rightarrow 2n^2 = m^2$. Число $2n^2$ делится на 2, значит, на 2 делится число m^2. Тогда m делится на 2, т.е. m^2 делится на 4. Тогда и $2n^2$ делится на 4, т.е. n^2 делится на 2. Тогда n делится на 2, т.е. дробь $\frac{m}{n}$ сократима.

Теперь проверим, что $a < 0{,}5(a + b) < b$:

$$a < b \Rightarrow a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow 0{,}5 \cdot 2a < 0{,}5(a + b) \Rightarrow a < 0{,}5(a + b);$$

аналогично доказывается второе неравенство.

Числовая ось. Если рассмотреть направленную прямую (ось) и ввести на ней точку отсчета 0 и единицу масштаба, то естественным образом получим взаимно-однозначное соответствие между действительными числами и точками этой (числовой) оси. Поэтому множество R часто называют числовой осью (числовой прямой), а действительные числа – точками этой прямой.

Абсолютная величина (*модуль*) *действительного числа* (обозначение $|a|$). По определению, $|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$. Докажем следующие свойства модулей действительных чисел:

$$|a + b| \leq |a| + |b|; \ |a - b| \geq |a| - |b|.$$

$$\blacktriangle\ a \leq |a|,\ b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|;$$

$$-a \leq |a|,\ -b \leq |b| \Rightarrow -(a + b) \leq |a| + |b|;$$

так как $|a + b| = a + b$ или $|a + b| = -(a + b)$ то отсюда $|a + b| \leq |a| + |b|$. Теперь, используя первое свойство, докажем и второе:

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a - b| \geq |a| - |b|. \ \blacksquare$$

1.2. Ограниченные множества действительных чисел

Определение 1.3. Множество $X \subset R$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое b, принадлежащее R, что для любого x, принадлежащего множеству X, имеет место следующее утверждение: $x \le b$, т.е., проще говоря, все члены x множества X меньше или равны некоторому числу b. Коротко это можно записать следующим образом: $\exists b \in R: \forall x \in X\,(x \le b)$.

Множество $X \subset R$ называется *ограниченным снизу*, если существует такое a, принадлежащее R, что для любого x, принадлежащего множеству X, имеет место следующее утверждение: $x \ge a$, т.е. все члены x множества X больше или равны некоторому числу a, или $\exists a \in R: \forall x \in X\,(x \ge a)$.

Множество X, ограниченное сверху и снизу, называется просто *ограниченным*.

Определение 1.4. Пусть множество X ограничено сверху. Наименьшее из чисел, ограничивающих X сверху, называется *верхней гранью* множества X и обозначается $\sup X = \sup\limits_{x \in X} x$.

Аналогично: пусть множество X ограничено снизу. Наибольшее из чисел, ограничивающих X снизу, называется *нижней гранью* множества X и обозначается $\inf X = \inf\limits_{x \in X} x$.

Если верхнюю грань множества X уменьшить, то она уже не будет ограничивать X сверху; если нижнюю грань множества X увеличить, то она уже не будет ограничивать X снизу. Поэтому определение 1.4. равносильно следующему определению.

Определение 1.5.

Число b называется *верхней гранью* множества ($b = \sup X$), если выполняются условия:

а) $\forall x \in X$ верно неравенство: $x \le b$;

б) какое бы положительное число ε мы ни взяли, существует такое число $x \in X$, что $x > b - \varepsilon$. Или $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X: x > b - \varepsilon$.

Число a называется *нижней гранью* множества ($a = \inf X$), если выполняются условия:

а) $\forall x \in X$ всегда верно неравенство: $x \ge a$;

б) какое бы положительное число ε мы ни взяли, существует такое число $x \in X$, что $x < a + \varepsilon$. Или $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X: x < a + \varepsilon$.

Теорема 1.1. Всякое ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

▲ Пусть A ограничено сверху, $A \ne \varnothing$ (т.е. A не является пустым множеством), B – множество всех чисел, ограничивающих A сверху, следовательно, при $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ всегда будет верно следующее утверждение: $a \le b$. Тогда по свойству непрерывности множества R существует такое c, что $a \le c \le b$, $a \in A$, $b \in B$. Но это и означает, что c ограничивает A сверху ($c \ge a$) и является наименьшим среди всех чисел, ограничивающих A сверху ($c \le b$). Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. ■

Определение 1.6. Система числовых отрезков $[a_n, b_n]$, $a_n \in R$, $b_n \in R$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ называется *системой вложенных отрезков*, если

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1 \text{ (рис. 1).}$$

Рис. 1

Теорема 1.2 (принцип вложенных отрезков). Всякая система вложенных отрезков имеет хотя бы одну общую точку.

▲ Пусть $A = \{a_1\ a_2, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$, следовательно, $a_m \le b_n$ (рис. 2), $m, n \in N$. Тогда по свойству непрерывности множества R существует такое $c \in R$, что выполняется неравенство $a_m \le c \le b_n$, $m, n \in N$, в частности, $a_n \le c \le b_n$, $n \in N$, что и доказывает теорему. ■

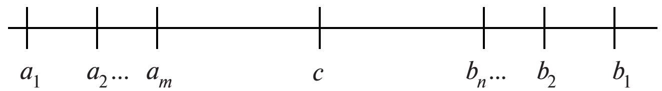


Рис. 2

Замечание. Для всякой системы вложенных отрезков, по длине стремящихся к 0, общая точка единственна. (Длины $b_n - a_n$ отрезков $[a_n, b_n]$ называются стремящимися к 0, если для каждого ε существует такой номер N, что длины всех отрезков с номерами, большими N, становятся меньше, чем ε.)

▲ Пусть c_1 и c_2 – две общие точки и $c_1 \neq c_2$, тогда длина любого отрезка системы будет не меньше, чем $|c_2 - c_1|$, что противоречит условию стремления к 0 длин отрезков. ■

1.3. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

Метод математической индукции. Этот метод состоит в следующем: для того чтобы доказать, что некоторое утверждение справедливо для $\forall\ n \in N$, достаточно доказать, что:

а) это утверждение справедливо для $n = 1$;

б) если предположить, что данное утверждение справедливо для некоторого номера $n \in N$, то отсюда будет следовать справедливость утверждения и для номера $(n + 1)$.

(Утверждение верно для $n = 1 \Rightarrow$ оно верно для $n = 2 \Rightarrow$ оно верно для $n = 3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ утверждение верно для $\forall\ n \in N$, так как, по определению, каждое натуральное число получается из 1 последовательным переходом от предыдущего натурального числа к последующему.)

Пусть теперь задано некоторое конечное множество элементов.

Определение 1.7. Рассмотрим n элементов. Группы всех этих элементов, отличающиеся друг от друга только порядком, называются *перестановками* элементов. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n.

Теорема 1.3. Число перестановок n элементов равно $n!$:

$$P_n = n!\,. \tag{1.1}$$

▲ Используем метод математической индукции:

а) $P_1 = 1! = 1$ – верно;

б) пусть формула верна для номера n: $P_n = n! \Rightarrow P_{n+1}$ будет равно числу способов, которыми можно выбрать первый элемент, умноженному на число способов, которыми после этого можно расставить остальные элементы, т.е. $P_{n+1} = (n + 1)\ P_n = (n + 1)\ n! = (n + 1)!$ $\Rightarrow$ формула верна для номера $(n + 1)$. ■

Определение 1.8. Рассмотрим n элементов. Группы из этих элементов, содержащие m элементов каждая, называются *сочетаниями* из n элементов по m (порядок элементов в каждой группе при этом не имеет значения). Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m.

Так как каждой выбранной группе из m элементов соответствует оставшаяся группа из $n - m$ элементов, то $C_n^m = C_n^{n-m}$. Положим также, что $C_n^0 = 1$.

Теорема 1.4. Число сочетаний из n элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m P_{n-m}}. \tag{1.2}$$

▲ Докажем, что $P_n = C_n^m P_m P_{n-m}$. Все перестановки из n элементов можно получить так: выбираем первые m элементов, это можно сделать C_n^m способами. При каждом таком способе существуют P_m вариантов расположения первых m элементов, а при каждом таком варианте существуют P_{n-m} вариантов расположения остальных $n - m$ элементов. ■

Следствие. Из теоремы 1.4. имеем

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots 1}{m!(n-m)(n-m-1)\ldots 1} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}.$$

Теорема 1.5 (формула бинома Ньютона). Для $\forall\ n \in N$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n. \tag{1.3}$$

▲ Представим выражение $(a + b)^n$ как произведение n сомножителей: $(a + b)(a + b)\ldots(a + b)$. При перемножении из каждой скобки берем либо a, либо b; например, при $n = 3$ будем иметь

$$(a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb =$$
$$= a^3 + a^2 b + a^2 b + ab^2 + a^2 b + ab^2 + ab^2 + b^3.$$

В итоге получаются члены вида $a^{n-k} b^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ с коэффициентами 1 при каждом члене. При приведении подобных членов коэффициент при $a^{n-k} b^k$ будет равен числу таких членов, т.е. числу способов, которыми из n скобок мы можем выбрать k раз b, т.е. C_n^k. ■

1.4. Функции

Определение 1.9. Пусть X и Y – два произвольных множества. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один элемент $y \in Y$, обозначаемый $f(x)$, и если каждый элемент $y \in Y$ при этом оказывается поставленным в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, то такое соответствие называется *функцией* и обозначается $y = f(x)$. Множество X называется *областью определения функции*, а множество Y – *областью ее значений*. Элемент y называется *образом элемента* x, а элемент x – *прообразом элемента* y (прообраз может быть и не один).

Примеры функций:

1) $X \subset R$, $Y \subset R$, т.е. X и Y – некоторые множества действительных чисел; это так называемые действительные функции действительного переменного; чаще всего мы будем рассматривать именно их;

2) X – некоторое множество точек плоскости $0xy$, $Y \subset R$; это так называемые функции двух переменных (название определяется тем, что каждая точка плоскости задается двумя координатами);

3) X, Y – некоторые множества комплексных чисел; это так называемые функции комплексного переменного;

4) $X = N$, $Y \subset R$ – такая функция называется последовательностью.

Определение 1.10. Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения X и областью значений Y. Пусть для $\forall y \in Y$ существует только один прообраз $x \in X$. Обозначим этот прообраз $f^{-1}(y)$. Тогда функция, определенная на Y и ставящая в соответствие $\forall y \in Y$ его прообраз $x = f^{-1}(y)$, называется *обратной функцией* к f и обозначается f^{-1}.

Определение 1.11. Пусть заданы функции $y = \varphi(x)$ и $z = f(y)$, и область определения функции f содержит область значений функции φ. Тогда $\forall x \in X$ из области определения функции φ соответствует некоторый элемент $y = \varphi(x)$, а этому y соответствует некоторый элемент $z = f(y)$. Таким образом, $\forall x$ из области определения функции φ соответствует один элемент z. Такое соответствие, или функция, называется *сложной функцией* или *суперпозицией функций* φ и f и обозначается $z = f(\varphi(x))$.

Далее будем рассматривать такие функции, что $X \subset R$, $Y \subset R$, и под словом «функция» (если не оговаривается что-либо другое) подразумевать именно их.

Определение 1.12. Основными элементарными функциями называются функции $y = c$, $y = x^{\alpha}$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$.

Определение 1.13. Всякая функция, которая может быть явным способом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется *элементарной*.

Арифметические операции над функциями определяются как соответствующие арифметические операции над значениями функции при каждом x; например, $f(x) + g(x)$ – это функция, которая каждому элементу x ставит в соответствие элемент $y = f(x) + g(x)$.

Среди элементарных функций выделим:

• *многочлены*, т.е. функции вида $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$. Число n называется *степенью многочлена*. Многочлены первой степени $y = ax + b$ называются также *линейными функциями*;

• *рациональные функции* (*рациональные дроби*), т.е. функции вида $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя $P(x)$ меньше степени знаменателя $Q(x)$.

2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

2.1. Определение предела последовательности и предела функции

Определение 2.1. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ (обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N, зависящий от ε, такой, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Или в краткой записи:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall n > N \ (|x_n - a| < \varepsilon).$$

Смысл этого определения в том, что члены последовательности $\{x_n\}$ сколь угодно близки к пределу a, т.е. отличаются от него меньше, чем на любое наперед заданное число ε, если номера n этих членов достаточно велики, т.е. больше, чем некоторый номер $N = N(\varepsilon)$.

Далее имеем $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Определение 2.2. Интервал $U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется ε-*окрестностью* точки a (или просто ее окрестностью) и обозначается тогда $U(a)$. Множество $U(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$ называется *проколотой* ε-*окрестностью* (или проколотой окрестностью) точки a и обозначается $\overset{o}{U}(a,\varepsilon)$ (или $\overset{o}{U}(a)$).

Определение 2.3 (равносильное определению 2.1).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon): \forall n > N\ \left(x_n \in U(a,\varepsilon)\right).$$

Определения 2.1 и 2.3 не дают метода нахождения предела последовательности, а только указывают метод проверки, что этот предел действительно равен a.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.

Доказательство. Проверим, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon): \forall n > N$ $\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Значит, в качестве N можно взять любой номер, такой, что $N \ge \frac{1}{\varepsilon}$: если $n > N$, а $N \ge \frac{1}{\varepsilon}$, то $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (также видно, что, чем меньше ε, тем больше N).

По аналогии с определением 2.1 даются определения бесконечных пределов последовательностей.

Определение 2.4.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists\ N = N(M) > 0: \forall n > N\ (x_n > M)$$

(смысл: члены последовательности сколь угодно велики, т.е. больше любого наперед заданного числа M, если номера n этих членов достаточно велики, т.е. при номерах n, больших некоторого номера N);

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0\ \exists\ N = N(M) > 0: \forall n > N\ (x_n < M);$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists\ N = N(M) > 0: \forall n > N\ (|x_n| > M).$$

Все последовательности трех таких типов называются *бесконечно большими*.

Определение 2.5 (определение предела функции в точке по Коши). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $\overset{o}{U}(a)$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\ \ (f(x) \in U(b,\varepsilon)).$$

Или

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon): \forall x, 0 < |x-a| < \delta\ \ (|f(x) - b| < \varepsilon)$$

(в этом определении x приближается к a, но не равен a).

Смысл этого определения состоит в том, что значения функции $f(x)$ сколь угодно близки к пределу b, т.е. отличаются от него меньше, чем на любое наперед заданное число ε, если x достаточно близок к a, т.е. отличается от него меньше, чем на некоторое число $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Согласно определению при $a - \delta < x < a + \delta$ график функции (рис. 3) лежит в полосе $b - \varepsilon < y < b + \varepsilon$. При определении δ отрезки $[c, a]$ и $[a, d]$, как правило, не равны друг другу. Чтобы не выйти за пределы полосы ($b-\varepsilon, b+\varepsilon$), надо исходить из ближайшего к a края отрезков c или d (из наименьшего из этих отрезков). При уменьшении ε соответственно уменьшается и δ.

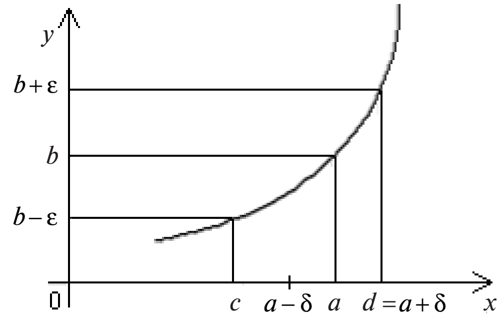


Рис. 3

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} 10^{|x|} = 1$.

Доказательство. Проверим, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon): \forall\ x,\ 0 < |x| < \delta$ $(|10^{|x|} - 1| < \varepsilon)$. Так как $10^{|x|} - 1 > 0$, то имеем, что

$$10^{|x|}-1<\varepsilon \Leftrightarrow 10^{|x|}<1+\varepsilon \Leftrightarrow |x|<\lg(1+\varepsilon).$$

Отсюда ясно, что в качестве δ можно взять любое число, такое, что $\delta \le \lg(1+\varepsilon)$. Тогда, если $|x|<\delta$, а $\delta \le \lg(1+\varepsilon)$, то $|x|<\lg(1+\varepsilon)$.

Обобщим определения предела функции на случай бесконечных *a* или *b*.

Определение 2.6. По аналогии с определением 2.5 запишем:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ M=M(\varepsilon)>0:\forall x>M\ (|f(x)-b|<\varepsilon);$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ \delta=\delta(M)>0:\forall x,\ 0<|x-a|<\delta\ (|f(x)|>M).$$

Такие функции называются *бесконечно большими* при $x\to a$;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N=N(M)<0:\forall x<N\ (f(x)>M)\ \text{и т.д.}$$

Односторонние пределы. Если $f(x)$ стремится к пределу *b* при $x\to a$ только с одной стороны (справа ($x>a$) или слева ($x<a$)), то *b* называется *пределом функции* $f(x)$ в точке *a* справа или слева и обозначается:

$$b=f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ или } b=f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ (рис. 4).}$$

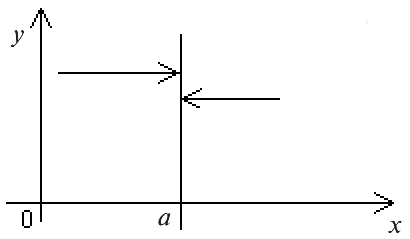


Рис. 4

Если существует $\lim_{x\to a} f(x)=b$, то существует и $f(a+0)=f(a-0)=b$. Однако из существования обоих односторонних пределов $f(a+0)=b_1$ и $f(a-0)=b_2$ существование предела функции $f(x)$ в точке *a* следует только при $b_1=b_2$. То есть функция имеет предел в некоторой точке тогда, и только тогда, когда ее односторонние пределы в этой точке совпадают.

Далее в силу однотипности построения теории пределов последовательностей и функций эти теории излагаются параллельно.

Единственность предела последовательности и функции

Теорема 2.1. Последовательность (функция) не может иметь более одного предела.

▲ 1. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n=a_1$ и $\lim_{n\to\infty} x_n=a_2$, $a_1\ne a_2$. Выберем непересекающиеся окрестности $U(a_1)$ и $U(a_2)$. Согласно определению 2.3 $\exists\ N_1$: $\forall n>N_1$ ($x_n\in U(a_1)$) и $\exists\ N_2$: $\forall n>N_2$ ($x_n\in U(a_2)$) $\Rightarrow \forall n>\max(N_1,N_2)$ ($x_n\in U(a_1)$ и $x_n\in U(a_2)$).

Это означает, что все члены последовательности, начиная с некоторого номера N_1, попадут в изображенную на чертеже окрестность точки a_1, а с некоторого номера N_2 попадут в изображенную на чертеже окрестность точки a_2 (рис. 5). Тогда, начиная с большего из этих номеров, все члены последовательности должны попасть в обе окрестности сразу, чего не может быть.

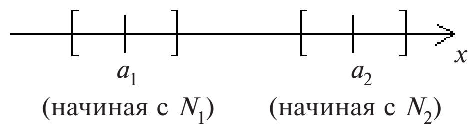


Рис. 5

2. Пусть $\lim_{x\to a} f(x)=b_1$ и $\lim_{x\to a} f(x)=b_2$, $b_1\ne b_2$. Выберем непересекающиеся окрестности $U(b_1)$ и $U(b_2)$. Согласно определению 2.5 $\exists\delta_1$: $\forall x\in \overset{0}{U}(a,\delta_1)$ ($f(x)\in U(b_1)$) и $\exists\delta_2$: $\forall x\in \overset{0}{U}(a,\delta_2)$ ($f(x)\in U(b_2)$) $\Rightarrow \forall x\in \overset{0}{U}(a,\min(\delta_1,\delta_2))$ ($f(x)\in U(b_1)$ и $f(x)\in U(b_2)$), чего не может быть. ■

Ограниченность последовательностей и функций, имеющих конечный предел

Определение 2.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если множество ее значений является ограниченным сверху (снизу). Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*сни-*

зу) на некотором множестве, если множество ее значений на этом множестве является ограниченным сверху (снизу).

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной при $x \to a$ сверху (снизу), если она ограничена сверху (снизу) в некоторой проколотой окрестности точки *a*.

Ограниченные сверху и снизу последовательности и функции называются просто ограниченными.

Таким образом, $\{x_n\}$ ограничена $\Leftrightarrow \exists M > 0 : \forall n \in N \ (|x_n| \le M)$.

Замечание. Покажем, что для этого достаточно, чтобы последнее неравенство выполнялось $\forall n > m$, где m – некоторое число. Если для $\forall n > m$ выполняется $|x_n| \le M$, то взяв в качестве M_1 максимальное из чисел $|x_1|$, $|x_2|, \ldots, |x_m|$, M, найдем, что $\forall n \in N \ (|x_n| \le M_1)$.

Функция $f(x)$ ограничена при $x \to a \Leftrightarrow \exists M > 0$ и $\delta > 0 : \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $(|f(x)| \le M)$.

Теорема 2.2. Если последовательность (функция) имеет конечный предел, то она ограничена (при $x \to a$).

▲ 1. Пусть существует $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a.$ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists N > 0 : \forall n > N \ (|x_n - a| < \varepsilon)$. Но $|x_n - a| \ge |x_n| - |a| \ \Rightarrow \ \forall n > N$ $(|x_n| - |a| < \varepsilon,\ |x_n| < |a| + \varepsilon)$. Взяв $M = |a| + \varepsilon$, получаем ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

2. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a.$ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \,(|f(x) - b| < \varepsilon)$. Но $|f(x) - b| \ge |f(x)| - |b| \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta \ (|f(x)| - |b| < \varepsilon,\ |f(x)| < |b| + \varepsilon)$, что (при $M = |b| + \varepsilon$) и означает ограниченность функции $y = f(x)$ при $x \to a$. ■

Задачи. Доказать, что:

1) если $x_n \le b$ и $\exists \lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, то $a \le b$ (или если $x_n \ge b$ и $\exists \lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, то $a \ge b$). То есть надо доказать, что если вся последовательность не превосходит *b* и имеет предел *a*, то этот предел тоже не превосходит *b*;

2) если в некоторой $\overset{0}{U}(a)$ $f(x) \le c$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $b \le c$ (или если в некоторой $\overset{0}{U}(a)$ $f(x) \ge c$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $b \ge c$);

3) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ и $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

▲1) $x_n \le b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Будем доказывать методом «от противного». Пусть $a > b$. Рассмотрим окрестность $U(a)$, такую, что $\forall x \in U(a)$ $(x \ge b)$. Согласно определению 2.3 $\exists N : \forall n > N \ (x_n \in U(a)) \Rightarrow x_n \ge b$, что противоречит условию (рис. 6). Аналогично рассматриваются остальные случаи примеров 1 и 2;

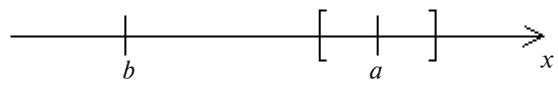


Рис. 6

3) здесь очевидно, что $N > 0$ и $\delta > 0$ можно взять любыми числами. ■

2.2. Бесконечно малые последовательности и функции и их свойства

Определение 2.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (б.м., $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. То есть

$$\{x_n\} \text{ – б.м. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \ (|x_n| < \varepsilon);$$

$$y = f(x) \text{ – б.м., } x \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta) \ (|f(x)| < \varepsilon).$$

Теорема 2.3. Сумма двух бесконечно малых последовательностей (функций при $x \to a$) есть последовательность (функция при $x \to a$) бесконечно малая.

▲ 1. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – б.м. Докажем, что $\{x_n + y_n\}$ – б.м., т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \ (|x_n + y_n| < \varepsilon).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \ (|x_n| < \varepsilon/2) \ \text{и} \ \exists N_2 : \forall n > N_2 \ (|y_n| < \varepsilon/2),$$

$$\Rightarrow \forall n > N = \max(N_1, N_2) \ (|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon).$$

2. Пусть $y = f(x)$, $y = g(x)$ — б.м., $x \to a$. Докажем, что $y = f(x) + g(x)$ — б.м., $x \to a$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta) \ (|f(x) + g(x)| < \varepsilon).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 : \forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta_1) \ (|f(x)| < \varepsilon/2) \ \text{и} \ \exists \delta_2 : \forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta_2) \ (|g(x)| < \varepsilon/2),$$

$$\Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a, \min(\delta_1, \delta_2)) \ (|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon). \blacksquare$$

Теорема 2.4. Произведение бесконечно малой последовательности (функции при $x \to a$) на ограниченную последовательность (функцию при $x \to a$) есть последовательность (функция при $x \to a$) бесконечно малая.

▲ 1. Пусть $\{x_n\}$ — б.м., $\{y_n\}$ — ограниченная, $|y_n| \le M$. Докажем, что $\{x_n y_n\}$ — б.м., т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \ (|x_n y_n| < \varepsilon).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists N : \forall n > N (|x_n| < \varepsilon / M) \Rightarrow \forall n > N \ (|x_n y_n| = |x_n| \, |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon).$$

2. Пусть $f(x)$ — б.м., $x \to a$, $g(x)$ — ограниченная при $x \to a$, т.е.

$$\exists \delta_1 : \forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta_1) \ (|g(x)| < M).$$

Докажем, что $f(x)g(x)$ — б.м., $x \to a$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$\forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta) \ (|f(x)g(x)| < \varepsilon).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_2$, такое, что

$$\forall x \in \overset{0}{U}(a, \delta_2) \ (|f(x)| < \varepsilon / M) \Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a, \min(\delta_1, \delta_2))$$

$$(|f(x)g(x)| = |f(x)| \, |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon). \ \blacksquare$$

Ниже приведены три следствия из теорем 2.3 и 2.4.

Следствие 1. Произведение двух б.м. последовательностей (или функций) есть последовательность (или функция) б.м. (так как бесконечно малая имеет конечным пределом 0, а любая последовательность или функция, имеющая конечный предел, ограничена, то можно применить теорему 2.4).

Следствие 2. Произведение б.м. последовательности (или функции) на постоянное число есть последовательность (или функция) б.м. (так как постоянное число можно рассматривать как ограниченную последовательность или функцию).

Следствие 3. Разность двух б.м. последовательностей (или функций) есть последовательность (или функция) б.м. (для последовательностей: $x_n - y_n = x_n + (-1)y_n$, здесь x_n — б.м. по условию, а $(-1)\,y_n$ — б.м. по следствию 2; значит, $x_n + (-1)y_n$ — б.м. по теореме 2.3; аналогично для функций: $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$ и т.д.).

Теорема 2.5. Частное от деления бесконечно малой последовательности (функции при $x \to a$) на последовательность (функцию), имеющую (при $x \to a$) конечный и отличный от 0 предел, есть последовательность (функция при $x \to a$) бесконечно малая.

$$▲ \ \frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}, \ \{x_n\} \ \text{— б.м. и} \ \exists \lim_{n \to \infty} y_n = b \ne 0;$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}, \ f(x) \ \text{— б.м. и} \ \exists \lim_{x \to a} g(x) = b \ne 0 \Rightarrow$$

в силу теоремы 2.4 для доказательства теоремы достаточно показать ограниченность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ или ограниченность при $x \to a$ функции $\frac{1}{g(x)}$.

1. В определении предела 2.1 возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2} \Rightarrow$

$\exists N : \forall n > N\left(|y_n - b| < \frac{|b|}{2}\right)$. Но $|y_n - b| = |b - y_n| \geq |b| - |y_n| \Rightarrow$

$\forall n > N\left(|b| - |y_n| < \frac{|b|}{2}\right)$.

Теперь, перенеся $|y_n|$ в правую, а $\frac{|b|}{2}$ – в левую часть неравенства, получим $|y_n| > \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \Rightarrow \left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – ограничена.

2. Теперь в определении предела 2.5 возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2} \Rightarrow$

$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\left(|g(x) - b| < \frac{|b|}{2}\right)$. Но $|g(x) - b| = |b - g(x)| \geq |b| - |g(x)|$

$\Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\left(|b| - |g(x)| < \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow |g(x)| > \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|b|}\right) \Rightarrow$

$\frac{1}{g(x)}$ ограничена. ■

2.3. Связь существования предела с бесконечно малыми. Основные теоремы о пределах

Теорема 2.6. Для того чтобы предел последовательности (функции при $x \to a$) был равен некоторому числу *b*, необходимо и достаточно, чтобы эту последовательность (функцию) можно было представить в виде суммы числа *b* и бесконечно малой последовательности (функции при $x \to a$). То есть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow x_n = b + \alpha_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ – последовательность б.м.;

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – функция б. м., $x \to a$.

▲ *Необходимость.*

1. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \ (|x_n - b| < \varepsilon)$.

Положим

$x_n - b = \alpha_n,\ x_n = b + \alpha_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N\ (|\alpha_n| < \varepsilon) \Rightarrow \{\alpha_n\}$ – б.м.

2. Пусть

$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\ (|f(x) - b| < \varepsilon)$.

Положим

$f(x) - b = \alpha(x),\ f(x) = b + \alpha(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$

$(|\alpha(x)| < \varepsilon) \Rightarrow \alpha(x)$ – б.м., $x \to a$.

Достаточность.

1. Пусть $x_n = b + \alpha_n$, $\{\alpha_n\}$ –б.м. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N\ (|\alpha_n| < \varepsilon)$. Но $\alpha_n = x_n - b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N\ (|x_n - b| < \varepsilon)$, но это и означает, что $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ (см. определение 2.1).

2. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ – б.м., $x \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)\ (|\alpha(x)| < \varepsilon)$. Но $\alpha(x) = f(x) - b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) :\ \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $(|f(x) - b| < \varepsilon)$, но это и означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (см. определение 2.5). ■

Теорема 2.7. Предел суммы двух последовательностей (функций) равен сумме пределов этих последовательностей (функций), если эти пределы существуют.

▲ 1. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow$ (по теореме 2.6 (необходимость) $x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – б.м. Сложим оба этих равенства: $x_n + y_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$. В этой формуле $a + b$ – число, $\alpha_n + \beta_n$ – б.м. по теореме 2.3 $\Rightarrow$ по теореме 2.6 (достаточность) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b.$

2. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b,\ \lim_{x\to a} g(x) = c \Rightarrow$ по теореме 2.6 (необходимость) $f(x) = b + \alpha(x),\ g(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м., $x \to a$. Сложим

оба этих равенства: $f(x)+g(x)=(b+c)+(\alpha(x)+\beta(x))$. В этой формуле $(b+c)$ – число, $\alpha(x)+\beta(x)$ – б.м. по теореме 2.3 $\Rightarrow$ по теореме 2.6 (достаточность) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=b+c$. ■

Теорема 2.8. Предел произведения двух последовательностей (функций) равен произведению пределов этих последовательностей (функций), если эти пределы существуют.

▲ 1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b \Rightarrow$ по теореме 2.6 (необходимость) $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=b+\beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – б.м. Перемножим эти равенства: $x_ny_n=ab+(a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n)$. В этой формуле ab – число, а выражение $a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n$ – б.м. по следствиям теоремы 2.4 и теореме 2.3 $\Rightarrow$ по теореме 2.6 (достаточность) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=ab$.

2. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c \Rightarrow$ по теореме 2.6 (необходимость) $f(x)=b+\alpha(x)$, $g(x)=c+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м., $x\to a \Rightarrow$ $f(x)g(x)=bc+(b\beta(x)+c\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x))$. В этой формуле bc – число, а выражение $b\beta(x)+c\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$ – б.м. по следствиям теоремы 2.4 и теореме 2.3 $\Rightarrow$ по теореме 2.6 (достаточность) $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=bc$. ■

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

▲ По теореме 2.8 $\lim\limits_{n\to\infty}cx_n=\lim\limits_{n\to\infty}c\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ (так как $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$ – см. задачу 3 разд. 2.1), если последний предел существует. Так же $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=\lim\limits_{x\to a}c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)$, если последний предел существует. ■

Следствие 2. Предел разности двух последовательностей (функций) равен разности пределов этих последовательностей (функций), если эти пределы существуют.

▲ Применяя теорему 2.7 и следствие 1, имеем:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+(-1)y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}(-1)y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+$

$+(-1)\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n-\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a}(f(x)+(-1)g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+$

$+\lim\limits_{x\to a}(-1)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+(-1)\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)$. ■

Теорема 2.9. Предел отношения двух последовательностей (функций) равен отношению пределов этих последовательностей (функций), если эти пределы существуют и предел знаменателя отличен от 0.

▲ 1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b \Rightarrow$ по теореме 2.6 (необходимость) $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=b+\beta_n$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. $\Rightarrow$

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}=\frac{a}{b}+\left(\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{ab+b\alpha_n-ab-a\beta_n}{b(b+\beta_n)}=\frac{a}{b}+\frac{b\alpha_n-a\beta_n}{b(b+\beta_n)}.$$

По теореме 2.5 последняя дробь есть б.м., так как ее числитель – б.м. по следствиям 2 и 3 из теорем 2.3 и 2.4 и

$$\exists\lim_{n\to\infty}b(b+\beta_n)=b\lim_{n\to\infty}(b+\beta_n)=b(b+0)=b^2\neq 0$$

(здесь были применены: следствие 1 теоремы 2.8, теорема 2.7 и свойства пределов $\lim\limits_{n\to\infty}b=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$); теперь по теореме 2.6 (достаточность, $\dfrac{a}{b}$ – число) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$.

2. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c \Rightarrow$ по теореме 2.6. (необходимость) $f(x)=b+\alpha(x)$, $g(x)=c+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м., $x\to a \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)}=\frac{b}{c}+\left(\frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)}-\frac{b}{c}\right)=\frac{b}{c}+\frac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c(c+\beta(x))}.$$

По теореме 2.5 последняя дробь есть б.м., так как ее числитель – б.м. и

$$\exists\lim_{x\to a}c(c+\beta(x))=c\lim_{x\to a}(c+\beta(x))=c^2\neq 0 \Rightarrow$$

по теореме 2.6 (достаточность, $\dfrac{b}{c}$ – число) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c}$. ■

Замечания.

1. Теоремы о пределах функций справедливы и при $a=\infty$.

2. В теоремах о пределах последовательностей и функций допускаются и бесконечные пределы, если это имеет смысл:

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty;\ \ (-\infty)+(-\infty)=-\infty;\ \ (+\infty)-(-\infty)=+\infty;\ \ \infty\cdot\infty=\infty;$$

$$b\cdot\infty=\infty\ (b\neq 0);\ \ \frac{b}{\infty}=0\ (b\neq\infty);\ \ \frac{b}{0}=\infty\ (b\neq 0).$$

3. $(+\infty)+(-\infty)$; $0\cdot\infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ и т.д. – это так называемые *неопределенности* (т.е. случаи, где основные теоремы о пределах сразу не применимы).

Примеры раскрытия неопределенностей. Найти пределы.

Решение

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+5}{3n^2+4n-7}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{3+\frac{4}{n}-\frac{7}{n^2}}=\frac{2}{3}$ (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$; числитель и знаменатель почленно поделены на n^2);

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2-9x+8}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+6)(x-1)}{(x-8)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+6}{x-8}=\frac{7}{-7}=-1$ (неопределенность вида $\frac{0}{0}$; в числителе и знаменателе выделен приводящий к ней множитель $x-1$).

2.4. Некоторые теоремы о пределах последовательностей и функций

Определение 2.9. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для всех $n\in N$ выполняется следующее условие: $x_{n+1}\geq x_n$ $(x_{n+1}\leq x_n)$; последовательность называется *монотонной*, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.

Теорема 2.10. Любая ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет конечный предел. Любая ограниченная снизу невозрастающая последовательность имеет конечный предел. Или, объединяя эти утверждения: любая ограниченная монотонная последовательность имеет конечный предел.

▲ Докажем, что любая ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет конечный предел. Нам дано, что $\{x_n\}$ – неубывающая ($x_{n+1}\geq x_n$) и ограниченная сверху последовательность ($x_n\leq M$, где M – некоторое число). Надо доказать, что существует конечный предел этой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. По теореме 1.1 существует верхняя

грань ограниченного сверху множества значений этой последовательности $\sup\{x_n\}=a$ (рис. 7).

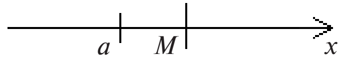


Рис. 7

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$ Зададим произвольную окрестность точки a $U(a,\varepsilon)$ и докажем, что, начиная с некоторого номера, все члены последовательности $\{x_n\}$ попадут в эту окрестность (рис. 8).

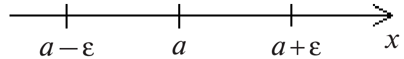


Рис. 8

По определению верхней грани имеем $x_n\leq a$ и существует n_0, такое, что $x_{n_0}>a-\varepsilon$. Тогда при $n>n_0$ имеем $x_n>x_{n_0}>a-\varepsilon$, а это и означает, что $x_n\in U(a,\varepsilon)$. ■

Определение 2.10. Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет конечный предел.

Определение 2.11. Подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ называется любое бесконечное подмножество членов этой последовательности $\{x_{n_k}\}$, $k=1,2,3,...$

Теорема 2.11 (Больцано—Вейерштрасса).

У любой ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

▲ Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Тогда существует отрезок $[\alpha,\beta]$, такой, что для любого номера $n\in N$ все x_n принадлежат этому отрезку (рис. 9). Разделим этот отрезок пополам. Пусть $[\alpha_1,\beta_1]$ – та половина, которая содержит бесконечное число членов исходной последовательности (если обе половины такие, то берем любую из них). Выберем произвольный $x_{n_1}\in[\alpha_1,\beta_1]$. Разделим отрезок $[\alpha_1,\beta_1]$ пополам. Пусть $[\alpha_2,\beta_2]$ – та половина, которая содержит бесконечное число членов исходной последовательности (если обе половины такие, то берем любую из них). Выберем произвольный $x_{n_2}\in[\alpha_2,\beta_2]$ с номером $n_2>n_1$. Разделим отрезок $[\alpha_2,\beta_2]$ пополам и т.д.

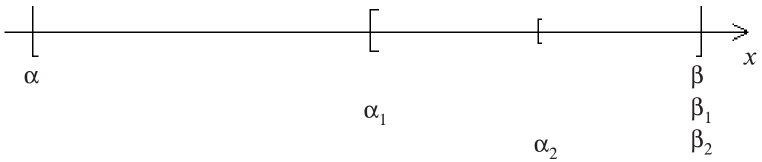


Рис. 9

Полученная система вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, согласно теореме 1.2 и замечания к ней имеет единственную общую точку $a \in [\alpha_n, \beta_n]$ для всех n. Теперь докажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Возьмем произвольную ε-окрестность точки a (на рис. 10 обозначена квадратными скобками). Тогда существует отрезок $[\alpha_{k_0}, \beta_{k_0}]$, целиком лежащий в нашей окрестности (на рис. 10 обозначен фигурными скобками). Тогда все следующие отрезки тоже будут лежать в этой окрестности. Значит, все точки x_{n_k}, у которых $k > k_0$, лежат в этой окрестности. Или: $\exists k_0 : \forall k > k_0 ([\alpha_k, \beta_k] \in U(a,\varepsilon)) \Rightarrow \forall k > k_0 \; (x_{n_k} \in U(a,\varepsilon))$. ■

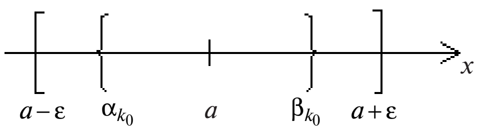


Рис. 10

Теорема 2.12 (о промежуточной последовательности / функции).

1. Пусть $\{x_n\}$, $\{t_n\}$, $\{y_n\}$ – три последовательности и $\forall n \in N$ $(x_n \le t_n \le y_n)$. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \Rightarrow$ существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$.

2. Пусть функции $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = g(x)$ определены в некоторой $\overset{0}{U}(a)$ и $\forall x \in \overset{0}{U}(a)$ $(f(x) \le \varphi(x) \le g(x))$. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \Rightarrow$ существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$.

▲ 1. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1 \colon \forall n > N_1 \; (x_n \in U(a,\varepsilon))$; $\exists N_2 \colon \; \forall n > N_2 \; (y_n \in U(a,\varepsilon)) \Rightarrow \forall n > N = \max(N_1, N_2) \; (x_n \in U(a,\varepsilon)$ и $y_n \in U(a,\varepsilon)) \Rightarrow \forall n \in N \; (t_n \in U(a,\varepsilon))$.

2. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 \colon \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta_1)$ $(f(x) \in U(b,\varepsilon))$; $\exists \delta_2 > 0 \colon \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta_2)$ $(g(x) \in U(b,\varepsilon)) \Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ $(f(x) \in U(b,\varepsilon)$ и $g(x) \in U(b,\varepsilon)) \Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $(\varphi(x) \in U(b,\varepsilon))$. ■

Теорему 2.12 иногда называют теоремой «о двух милиционерах».

Замечание. В случае функций теорема верна и при $a = +\infty$.

▲ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1 > 0 \colon \forall x > N_1 \; (f(x) \in U(b,\varepsilon))$; $\exists N_2 > 0 \colon \forall x > N_2 \; (g(x) \in U(b,\varepsilon)) \Rightarrow \forall x > N$, где $N = \max(N_1, N_2)$ $(f(x) \in U(b,\varepsilon)$ и $g(x) \in U(b,\varepsilon)) \Rightarrow \forall x > N \; (\varphi(x) \in U(b,\varepsilon))$. ■

Теорема 2.13 (о пределе сложной функции). Пусть дана сложная функция $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$, т.е. $z = f(\varphi(x))$. Пусть $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = c$ и $\lim\limits_{y\to c} f(y) = b$ и $\forall x \in \overset{0}{U}(a)$ $(y \ne c) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = b$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{y\to c} f(y)$ – формула замены переменной).

▲ Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \colon \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $(z \in U(b,\varepsilon))$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \sigma > 0 \colon \forall y \in \overset{0}{U}(c,\sigma)$ $(z \in U(b,\varepsilon))$. Далее $\exists \delta > 0 \colon \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $(y \in \overset{0}{U}(c,\sigma))$ (при достаточно малом δ $y \ne c$ по условию) $\Rightarrow \forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$ $(y \in \overset{0}{U}(c,\sigma) \Rightarrow z \in U(b,\varepsilon))$. ■

Определение 2.12. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *критерию Коши*, или, что то же самое, является *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \colon \forall n, m > N \; (|x_n - x_m| < \varepsilon)$.

Теорема 2.14. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла критерию Коши.

▲ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N\colon \forall n > N$ $(|x_n - a| < \varepsilon/2) \Rightarrow \forall n,m > N(|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_n)| \le |x_n - a| +$ $+|x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon) \Rightarrow \{x_n\}$ удовлетворяет критерию Коши.

Пусть, наоборот, $\{x_n\}$ удовлетворяет критерию Коши, т.е. $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)\colon \forall n,m > N\ (|x_n - x_m| < \varepsilon)$. Так как $|x_n - x_m| \ge |x_n| - |x_m|$, то $|x_n| - |x_m| < \varepsilon, |x_n| < |x_m| + \varepsilon$. Если в этом неравенстве m зафиксировать, то, по замечанию к определению 2.7, $\{x_n\}$ ограничена. Тогда по теореме 2.11 из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, где a – некоторое число. Докажем, что тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ $\exists k_0\colon \forall k > k_0 (|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2)$. По условию $\exists N\colon \forall n,m > N(|x_n - x_m| < \varepsilon/2)$. Пусть $n > N$ и $k > k_0$ таково, что $n_k > N$ (такое k существует, так как $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$) $\Rightarrow \forall n > N\ (|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \le |x_n - x_{n_k}| +$ $+|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \{x_n\}$ сходится. ■

2.5. Некоторые замечательные пределы

Теорема 2.15 (первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2.1}$$

▲ Пусть сначала $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Как видно из рис. 11, площадь треугольника OMA меньше площади сектора OMA, а последняя меньше площади треугольника OCA. Площадь сектора с углом x находится по формуле $S = \frac{S_{\text{круга}}}{2\pi}x = \frac{\pi r^2}{2\pi}x = \frac{1}{2}r^2 x$, значит, $\frac{1}{2}|OA||MB| < \frac{1}{2}|OA|^2 x < \frac{1}{2}|OA||CA|$. Здесь $|OA| = 1$, $|MB| = \sin x$, $|CA| = \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, или $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Разделим все части последнего неравенства на $\sin x > 0$ (угол x находится в первой четверти):

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

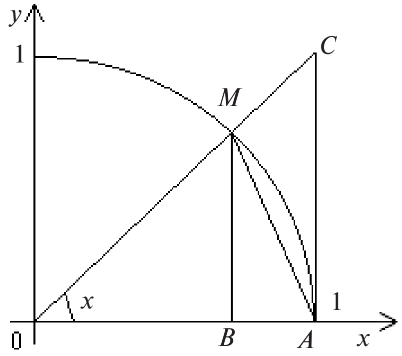


Рис. 11

Все функции в последней формуле четные, следовательно, она справедлива и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Теперь перейдем к пределу при $x \to 0$, применяя теорему 2.12: $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, значит, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ будет равен 1, если сумеем доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ или согласно определению предела функции

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta = \delta(\varepsilon)\colon \forall x, |x| < \delta\left(|\cos x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} < \varepsilon\right).$$

В этом определении x достаточно мало. Далее имеем в виду, что для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin^2\frac{x}{2} < 1$. Так как при $y < 1$ $y^2 < |y|$, то $2\sin^2\frac{x}{2} <$ $< 2\left|\sin\frac{x}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{|x|}{2}\right|$. Учитывая, что в первой четверти $\sin x < x$, имеем: $2\left|\sin\frac{|x|}{2}\right| < 2\frac{|x|}{2} = |x|$. Теперь вместо выполнения неравенства $2\sin^2\frac{x}{2} < \varepsilon$ нам достаточно потребовать, чтобы $|x| < \varepsilon$ (тогда $2\sin^2\frac{x}{2} < |x| < \varepsilon$), значит, в качестве δ годится любое число: $\delta \le \varepsilon$ (тогда $|x| < \delta \le \varepsilon \Rightarrow |x| < \varepsilon$). ■

Примеры. Найти пределы функций.

Р е ш е н и е

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1; \tag{2.2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}. \qquad (2.3)$$

Выражения (2.2) и (2.3) можно использовать для вычисления других пределов.

Теорема 2.16 (второй замечательный предел для последовательностей).

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \qquad (2.4)$$

▲ Рассмотрим последовательность $\{a_n\}=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$.

Согласно теореме 1.5 представим a_n в виде суммы $(n+1)$ слагаемых:

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

(в последнем преобразовании мы каждую скобку поделили на n).

При переходе от a_n к a_{n+1}, т.е. при замене n на $n+1$, знаменатели дробей возрастают, значит, каждая разность $1-\dfrac{i}{n}$ становится больше, т.е. в нашей сумме увеличивается каждое слагаемое и, кроме того, добавляется еще одно $(n+2)$-е неотрицательное слагаемое, значит, для $\forall n\in N$ $a_{n+1}>a_n\Rightarrow\{a_n\}$ возрастает (отсюда, кстати, $a_n>a_1=2$).

Далее проверим, что эта последовательность ограничена сверху; для этого заменим в последней сумме каждую скобку на 1 (от чего каждая скобка и вся сумма могут только вырасти). Так как первые два слагаемых в нашей сумме (при $k=0$ и $k=1$) равны 1, то

$$a_n<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot k}<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Последняя сумма является суммой геометрической прогрессии с $n-1$ членами, у которой $q=\dfrac{1}{2}$, а $b_1=\dfrac{1}{2}$, значит,

$$a_n<2+\frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q}=2+\frac{1/2(1-(1/2)^{n-1})}{1-1/2}=2+(1-(1/2)^{n-1})<2+1=3\Rightarrow$$

$\{a_n\}$ ограничена сверху.

Последовательность $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху, следовательно, по теореме 2.10 она имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Обозначая этот предел буквой e, получим нужное нам равенство. ■

Так как $2\le a_n\le 3$, то $2\le e\le 3$ (см. разд. 2.1, задача 1). Можно показать, что e — иррациональное число и $e\approx 2{,}71828$.

Теорема 2.17 (второй замечательный предел для функций).

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (2.5)$$

▲ Пусть сначала $x\to+\infty$. Для $\forall x>1$ возьмем такое $n=n(x)\in N$, что $n\le x<n+1$ (это так называемая целая часть числа x), тогда $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{n}\Rightarrow$

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le1+\frac{1}{n}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Теперь пусть $x\to+\infty\Rightarrow n\to\infty$. Согласно теореме 2.16,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot1=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}:\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=e:1=e.$$

Тогда по замечанию к теореме 2.12 существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

Пусть теперь $x\to-\infty$. В соответствии с теоремой 2.13 произведем замену $y=-x$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y=$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\overset{\text{т. 2.16}}{=} e\cdot 1 = e \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \ \blacksquare$$

Примеры. Найти пределы функций.

Решение

1. Покажем, что

$$\lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e, \ \alpha(x) \ \text{– б.м.}, \ x\to a. \qquad (2.6)$$

После замены $\alpha(x)=\dfrac{1}{y}$, имеем

$$\lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (2.7)$$

2. Покажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (2.8)$$

Используя непрерывность функции $y = \ln x$ (ниже будет показано, что именно для непрерывных функций символы предела и функции можно менять местами), имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{2.7}{=} \ln e = 1.$$

3. Покажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \qquad (2.9)$$

Произведя замену $y = e^x - 1$, $x = \ln(1+y)$ и используя непрерывность функции $y = e^x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+y)}{y}} \overset{2.8}{=} 1.$$

Формулы (2.6)–(2.9) можно использовать для вычисления других пределов.

2.6. Сравнение бесконечно малых

Определение 2.13. Пусть $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ – две б.м. функции, $x\to a$. Эти б.м. называются б.м. *одного порядка* при $x\to a$, если $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b$, $b\neq 0$, $b\neq\infty$. Если $b = 1$, то б.м. называются *эквивалентными* при $x\to a$ (обозначение: $\alpha\sim\beta$, $x\to a$). Если $b = 0$, то α называется б.м. *более высокого порядка*, чем β при $x\to a$ (обозначение: $\alpha = o(\beta)$, $x\to a$).

Примеры эквивалентных бесконечно малых приведены выше. Для нахождения ряда пределов бесконечно малые удобно заменять эквивалентными им. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2.18 (о пределе отношения бесконечно малых).

Пусть $f(x)\sim\alpha(x)$, $x\to a$, $g(x)\sim\beta(x)$, $x\to a$ и $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b \Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = b$, т.е. при вычислении пределов отношения бесконечно малые можно заменять эквивалентными им.

$$\blacktriangle \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\frac{\beta(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{g(x)} = 1\cdot b\cdot 1 = b. \ \blacksquare$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{e^{2x^2}-1}$.

Решение

Согласно предыдущим примерам $\ln(1+3x^2)\sim 3x^2$ и $e^{2x^2}-1\sim 2x^2$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{e^{2x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

3.1. Непрерывность функции в точке

Определение 3.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0, если предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке или если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (3.1)$$

По определению предела функции, это равенство равносильно тому, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):\ \forall x\in U(x_0,\delta)\ (f(x)\in U(f(x_0),\varepsilon))$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):\ \forall x,\ |x-x_0|<\delta\ (|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon).$$

По сравнению с определением предела функции здесь опущено условие $x\neq x_0$, так как при $x=x_0$ последнее неравенство заведомо верно.

Определение 3.1 равносильно условию $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0.$ Обозначим $x-x_0=\Delta x$ – приращение аргумента, $f(x)-f(x_0)=\Delta y$ – приращение функции, соответствующее данному приращению аргумента, тогда определение непрерывности 3.1 можно записать в виде $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$

Определение 3.2 (равносильное определению 3.1). Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ или если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Приведем основные свойства функций, непрерывных в точке.

Теорема 3.1 (**ограниченность**). Пусть $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда она ограничена при $x\to x_0$.

▲ Это есть частный случай теоремы 2.2 (функция, имеющая конечный предел в точке, ограничена в окрестности этой точки). ■

Теорема 3.2 (**сохранение знака**). Пусть $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0(<0)\Rightarrow f(x)>0(<0)$ и в некоторой окрестности точки x_0 (рис.12).

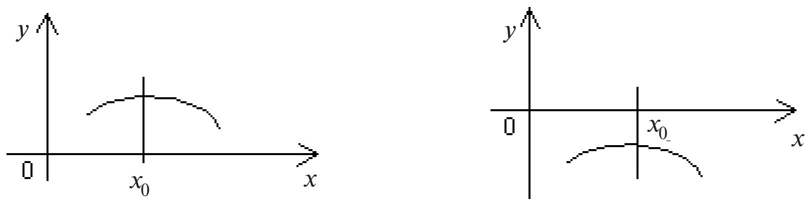


Рис. 12

▲ Возьмем в определении непрерывности функции $\varepsilon=\dfrac{|f(x_0)|}{2}\Rightarrow\exists\delta:$

$$\forall x\in U(x_0,\delta)\ \left(|f(x)-f(x_0)|<\frac{|f(x_0)|}{2}\Leftrightarrow\right.$$

$$\left.\Leftrightarrow -\frac{|f(x_0)|}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{|f(x_0)|}{2}\right).$$

Перенесем $f(x_0)$ в левую и правую части неравенства:

$$f(x_0)-\frac{|f(x_0)|}{2}<f(x)<f(x_0)+\frac{|f(x_0)|}{2}.$$

Из последнего неравенства имеем следующее:

$$\text{если } f(x_0)>0, \text{ то } \forall x\in U(x_0,\delta)\left(f(x)>f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}>0\right);$$

$$\text{если } f(x_0)<0, \text{ то } \forall x\in U(x_0,\delta)\left(f(x)<f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}<0\right).\ ■$$

Теорема 3.3 (арифметические операции над непрерывными функциями). Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке непрерывны функции $y=f(x)\pm g(x)$, $y=f(x)g(x)$ и (при $g(x_0)\neq 0$) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

▲ Поскольку все эти утверждения доказываются одинаково, то докажем только последнее из них. Согласно теореме 2.9 и определению 3.1,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\Rightarrow \text{ функция } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ непрерывна}$$

в точке x_0. ■

Теорема 3.4 (**непрерывность сложной функции**). Пусть $z=f(\varphi(x))$ – сложная функция. Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $z=f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $z=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 (проще говоря, если сложная функция составлена из двух непрерывных, то она сама непрерывна).

▲ $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=y_0;\ \lim\limits_{y\to y_0}f(y)=f(y_0)\overset{\text{т. 2.13}}{\Rightarrow}$ (здесь $\varphi(x)=\varphi(x_0)$ допустимо) $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim\limits_{y\to y_0}f(y)=f(y_0)=f(\varphi(x_0))$, что и означает непрерывность сложной функции $z=f(\varphi(x))$ в точке x_0. ■

Замечание. Полученное при доказательстве равенство

$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right)$ (оба этих предела равны $f(\varphi(x_0))$) было использовано в примерах в конце разд. 2.5.

Теорема 3.5 (непрерывность элементарных функций). Любая элементарная функция непрерывна во всех точках, где она определена.

▲ Так как все элементарные функции получаются из основных элементарных функций путем арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) и путем составления сложных функций, а эти действия, согласно теоремам 3.3 и 3.4, сохраняют непрерывность, то достаточно доказать непрерывность основных элементарных функций в точках их определения.

Проверим это только для некоторых из них, используя определение 3.2:

1) $y=c$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0;$

2) $y=x$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0;$

3) $y=\sin x$:

$$|\Delta y|=|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|=2\left|\sin\frac{|\Delta x|}{2}\right|;$$

$\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ последнее *выражение не превосходит* $2\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|\Rightarrow$ $0\le|\Delta y|\le|\Delta x|$. Применим теорему 2.12:

$$\lim_{\Delta x\to 0}0=0,\ \lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta y|=0\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0;$$

4) $y=\cos x$: $|\Delta y|=|\cos x-\cos x_0|=2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$ и далее аналогично предыдущему примеру. ■

Определение 3.3. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некотором интервале $(x_0-\delta,\ x_0)$ (или $(x_0,\ x_0+\delta)$). Эта функция называется непрерывной слева (или справа) в точке x_0, если

$$\exists\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)\left(\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)\right).$$

3.2. Классификация точек разрыва

С учетом введенного в разд. 2.1 понятия односторонних пределов непрерывность функции $y=f(x)$ в точке x_0 равносильна выполнению условия

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0).\tag{3.2}$$

Определение 3.4. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой этой точки (т.е. функция определена в проколотой окрестности точки x_0). Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y=f(x)$, если эта функция не является непрерывной в точке x_0.

В точке разрыва функции $y=f(x)$ условие (3.2) не выполняется.

Определение 3.5. Точка разрыва x_0 функции $y=f(x)$ называется точкой разрыва *первого рода*, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.

Определение 3.6. Точка разрыва первого рода x_0 функции $y=f(x)$ называется *устранимой*, если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

В такой точке либо $f(x_0)$ не определена, либо $f(x_0-0)=$ $=f(x_0+0)\ne f(x_0)$. Если положить $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то $f(x)$ станет непрерывной в точке x_0, т.е. разрыв можно устранить, изменив значение функции в одной точке.

Определение 3.7. Точка разрыва x_0 функции $y=f(x)$ называется точкой разрыва *второго рода*, если она не является точкой разрыва первого рода. В такой точке хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ бесконечен или не существует.

Исследовать функцию на непрерывность означает, что нужно указать все точки разрыва функции, дать их классификацию и нарисовать схему графика функции в окрестностях точек разрыва.

Примеры графиков функции $y=f(x)$ приведены на рис. 13.

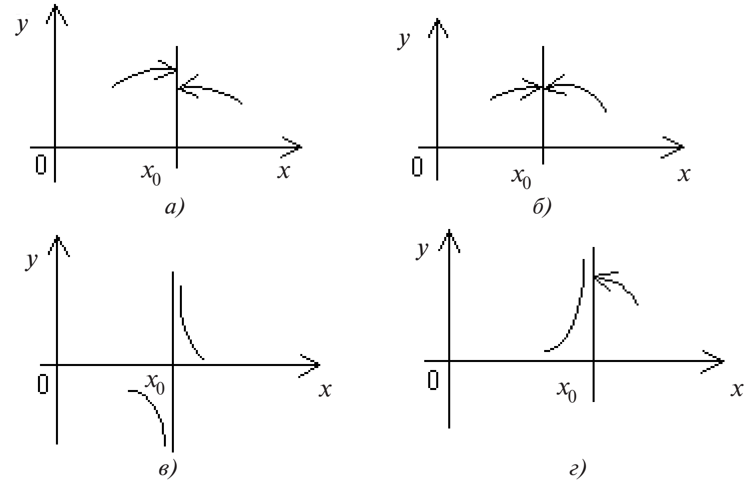


Рис. 13

На рис 13,*а* x_0 – точка разрыва первого рода, разрыв не устранимый; на рис. 13,*б*) x_0 – устранимая точка разрыва; на рис. 13,*в*, *г* x_0 – точка разрыва второго рода.

Также разрыв второго рода в точке 0 имеет функция $y=\sin\frac{1}{x}$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует.

Пример. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\frac{x}{\sin x}$.

Р е ш е н и е

Точки разрыва: $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in Z$ (в остальных точках функция непрерывна по теоремам 3.3 и 3.5); $f(-0)=f(+0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\Rightarrow x=0$ – устранимая точка разрыва; $f(\pi-0)=+\infty$, $f(\pi+0)=-\infty\Rightarrow x=\pi$ – точка разрыва второго рода; такими же будут все точки вида $x=\pi n$, $n\in Z$, $n\neq 0$. Схема графика функции в окрестностях точек разрыва приведена на рис. 14.

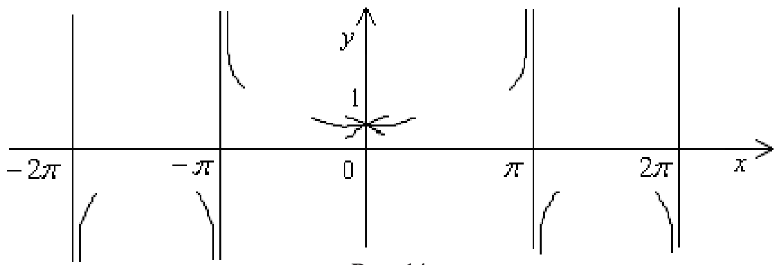


Рис. 14

3.3. Непрерывность функции на множестве

Определение 3.8. Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Далее речь будет идти о функциях, непрерывных на отрезке. При этом под непрерывностью на левом краю отрезка будет пониматься непрерывность справа, а под непрерывностью на правом краю отрезка будет пониматься непрерывность слева.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Сначала будет доказана следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Тогда $\forall\{x_n\}: x_n\neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ ($\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$).

(На самом деле, справедлива и обратная теорема, и мы получаем другое определение предела функции по Гейне, равносильное определению по Коши.)

▲ Пусть $x_n\neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): \forall n>N\ \ (|f(x_n)-b|<\varepsilon)$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$, тогда из определения того, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\exists\delta>0:\ \forall x$, $0<|x-a|<\delta\ \ (|f(x)-b|<\varepsilon)$; из определения того, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\exists N: \forall n>N\ (|x_n-a|<\delta\ (\text{и } x_n\neq a))\Rightarrow(|f(x_n)-b|<\varepsilon)$. ■

Теорема 3.6. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда $f(x)$ ограничена на этом отрезке.

▲ Функция $f(x)$ ограничена $\Leftrightarrow\exists M>0: |f(x)|\le M$. Предположим, что теорема не верна, т.е. $\forall n\in N\ \exists x_n\in[a,b]: |f(x_n)|>n$ (иначе $M=n$). Так как $x_n\in[a,b]$, то $\{x_n\}$ ограничена $\overset{\text{т. 2.11}}{\Rightarrow}$ из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0\in[a,b]$. Так как из непрерывности функции $y=f(x)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, то согласно лемме 3.1 $\exists\ \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0)$ (здесь условие $x_n\neq x_0$, естественно, не нужно).

С другой стороны, так как $\left|f(x_{n_k})\right|>n_k$, а $\lim\limits_{k\to\infty} n_k=\infty$, то очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\infty$. Так как последовательность не может иметь более одного предела, то мы получили противоречие, которое и доказывает теорему. ■

Таким образом, множество значений непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ ограничено $\overset{\text{т. 1.1}}{\Rightarrow}$ это множество имеет верхнюю и нижнюю грани $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Теорема 3.7. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b] \Rightarrow$ она достигает на этом отрезке верхней и нижней граней, т.е. $\exists x_0 \in [a,b]$ и $\bar{x}_0 \in [a,b]$: $f(x_0) = M$ и $f(\bar{x}_0) = m$.

▲ Для верхней грани (для нижней аналогично) рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\} \downarrow 0$, т.е. последовательность, которая убывает и стремится к 0, например $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$. Согласно определению 1.5 $\forall n \in N \; \exists x_n \in [a,b]: M - \varepsilon_n < f(x_n) < M$. Так как $x_n \in [a,b]$, то $\{x_n\}$ ограничена $\overset{\text{т. 2.11}}{\Rightarrow}$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}: \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,b]$. Отсюда, применяя лемму 3.1, точно так же, как при доказательстве теоремы 3.6, получаем, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$.

Теперь перейдем в неравенстве $M - \varepsilon_{n_k} < f(x_{n_k}) \le M$ к пределу при $k \to \infty$, используя теорему 2.12:

$$\lim_{k\to\infty} M = M;$$

$$\lim_{k\to\infty}(M - \varepsilon_{n_k}) = M - 0 = M \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M \Rightarrow f(x_0) = M. ■$$

Теорема 3.8. Функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b] \Rightarrow$ она принимает на этом отрезке любое промежуточное значение между m и M, т.е. если $c \in (m,M)$, то $\exists$ хотя бы одна точка $x \in [a,b]: f(x_0) = c$.

▲Согласно теореме 3.7 $\exists \alpha,\beta \in [a,b]: f(\alpha) = m,\ f(\beta) = M \Rightarrow f(\alpha) < c < f(\beta)$.

Разделим $[\alpha,\beta]$ пополам точкой $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Либо $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = c$, и тогда теорема доказана, либо $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \ne c$ (т.е. эта величина либо меньше c, либо больше c). В этом случае обозначим $[\alpha_1,\beta_1]$ ту половину отрезка $[\alpha,\beta]$, что $f(\alpha_1) < c,\ f(\beta_1) > c$ и повторим процедуру.

Разделим $[\alpha_1,\beta_1]$ пополам точкой $\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}$. Либо $f\left(\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) = c$, и тогда теорема доказана, либо $f\left(\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) \ne c$. В этом случае обозначим $[\alpha_2,\beta_2]$ ту половину отрезка $[\alpha_1,\beta_1]$, что $f(\alpha_2) < c,\ f(\beta_2) > c$ и т.д. (каждый раз не обязательно, чтобы $\alpha_n < \beta_n$, может быть и наоборот).

В итоге мы либо через конечное число шагов получим такую среднюю точку одного из отрезков x_0, что $f(x_0) = c$, и тогда теорема доказана, либо получим систему вложенных отрезков $[\alpha_n,\beta_n]$ с длинами $\dfrac{|\beta_n - \alpha_n|}{2^n} \to 0: f(\alpha_n) < c < f(\beta_n)$.

По теореме 1.2 и замечанию к ней эта система имеет единственную общую точку x_0. Легко понять, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = x_0$.

Теперь, применяя лемму 2.1, точно так же, как в двух предыдущих теоремах, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n) = f(x_0)$.

В соответствии с задачей в конце разд. 2.1 из неравенства $f(\alpha_n) < c$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = f(x_0) \le c$, а из неравенства $f(\beta_n) > c$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = f(x_0) \ge c \Rightarrow f(x_0) = c$. ■

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$ (т.е. на концах отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков), то существует хотя бы одна точка $x_0 \in (a,b)$: $f(x_0) = 0$.

▲ По условию $m < 0$, а $M > 0$, следовательно, в теореме 3.8 в качестве точки c можно взять $c = 0$. ■

Данное следствие может применяться для приближенного решения уравнений, которые точно решить невозможно.

Пример. Найти корни уравнения $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$.

Решение

$f(0) = -1 < 0,\ f(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет корень $\in [0,1]$;

$f(1/2) = 1/8 + 1/2 - 1 = -3/8 < 0 \Rightarrow$ уравнение имеет корень $\in [1/2,\ 1]$;

$f(3/4) = 27/64 + 3/4 - 1 = 11/64 > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет корень $\in [1/2,\ 3/4]$ и т.д.

Таким способом находится корень уравнения с любой нужной точностью.

3.4. Равномерная непрерывность функции

Определение 3.9. Функция $y = f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве D, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_1, x_2 \in D, |x_2 - x_1| < \delta$ $(|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon)$.

Смысл понятия равномерной непрерывности состоит в том, что если две точки множества D достаточно близки, то и функции в этих точках тоже близки. Главным в определении 3.9 является то, что δ зависит только от ε и годится для всех точек множества D сразу.

Зафиксируем в определении равномерной непрерывности одну из точек x_1 или x_2, тогда получим определение непрерывности функции в этой точке. Следовательно, если функция равномерно непрерывна на некотором множестве, то она непрерывна на всем множестве.

Обратное утверждение не является верным, например: $y = \dfrac{1}{x}$, $D = (0,1]$. Берем произвольное $\varepsilon > 0$ и ищем по графику $\delta = \delta(\varepsilon)$. При

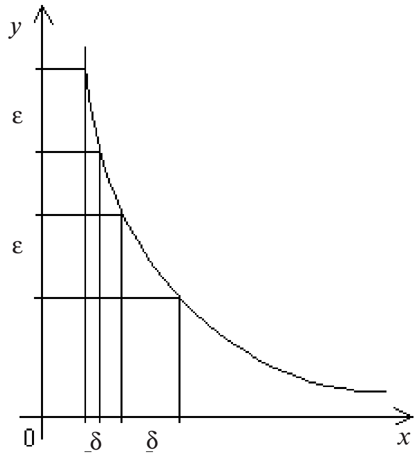


Рис. 15

движении отрезка фиксированной длины ε вверх по оси Oy δ уменьшается и стремится к 0 (рис. 15), значит, для $D = (0,1]$ единого $\delta > 0$ нет, следовательно, наша функция не является равномерно непрерывной на D, хотя она и непрерывна на этом множестве.

Для некоторых множеств обратное утверждение является верным.

Теорема 3.9 (**Кантора**). Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

▲ Предположим противное, а именно: не для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta$, указанное в определении 3.9 $\Leftrightarrow \exists\ \varepsilon_0$, для которого δ нет, т.е.

$$\forall\delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in [a,b] : |x_2 - x_1| < \delta, \text{ но } |f(x_2) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0 \Leftrightarrow$$

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall\delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in [a,b] : |x_2 - x_1| < \delta, \text{ но } |f(x_2) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$$

(таким образом, при отрицании символы $\forall$ и $\exists$ меняются местами).

Возьмем последовательность $\{\delta_n\} \downarrow 0$, например, $\delta_n = \dfrac{1}{n}$; указанные выше x_1 и x_2 обозначим x_n^1 и $x_n^2 \Rightarrow |x_n^2 - x_n^1| < \delta_n$, но $|f(x_n^2) - f(x_n^1)| \geq \varepsilon_0$, $n \in N$. Из ограниченной последовательности $\{x_n^1\}$ по теореме 2.11 выделим сходящуюся подпоследовательность. Для простоты обозначений будем считать, что сама последовательность $\{x_n^1\}$ сходится: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = x_0$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = x_0$, а именно

$$-\delta_n < x_n^2 - x_n^1 < \delta_n;\ x_n^1 - \delta_n < x_n^2 < x_n^1 + \delta_n;\ \lim_{n\to\infty}(x_n^1 \pm \delta_n) = x_0 \overset{\text{т. 2.12}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n^2 = x_0.$$

По лемме 3.1 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^1) = f(x_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^2) = f(x_0)$. Но это противоречит тому, что $\forall n \in N\ (|f(x_n^2) - f(x_n^1)| \geq \varepsilon_0)$:

$$\exists n_0 \in N:\ \forall n > n_0 \left(|f(x_n^1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2},\ |f(x_n^2) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \right)$$

(точнее, каждое из этих двух неравенств будет верно для всех n, начиная с некоторого, своего для каждого неравенства, номера; оба неравенства вместе будут верны для всех n, начиная с наибольшего из этих двух номеров), следовательно,

$$\forall n > n_0 \quad |f(x_n^2) - f(x_n^1)| = |[f(x_n^2) - f(x_0)] + [f(x_0) - f(x_n^1)]| \le$$

$$\le |f(x_n^2) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_n^1)| =$$

$$= |f(x_n^2) - f(x_0)| + |f(x_n^1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему. ■

II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4. ПРОИЗВОДНАЯ

4.1. Определение, физический и геометрический смысл производной

Определение 4.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Производной этой функции в точке x_0 называется число

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (4.1)$$

если этот предел существует и конечен (если предел бесконечен, то иногда говорят про бесконечную производную).

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием этой функции.

Примеры. Найдите производные функций.

Решение

1) $y = c \Rightarrow \Delta y = 0 \Rightarrow y'(x) = 0;$

2) $y = x^2 \Rightarrow y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x;$

3) $y = |x| \Rightarrow y'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ — не существует, так как последняя дробь равна 1 при $\Delta x > 0$ и -1 при $\Delta x < 0$.

Физический смысл производной

Пусть $s = s(t)$ — путь, пройденный некоторой точкой за время t, тогда $s'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t_0)$ — мгновенная скорость точки в момент времени t_0.

Геометрический смысл производной

Пусть M_0 – фиксированная точка непрерывной кривой $y = f(x)$; M – произвольная точка этой кривой. Проведем всевозможные секущие M_0M; предельное положение таких секущих при $\Delta x \to 0$ (или при $M \to M_0$), если такое существует, называется *касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 (рис. 16).

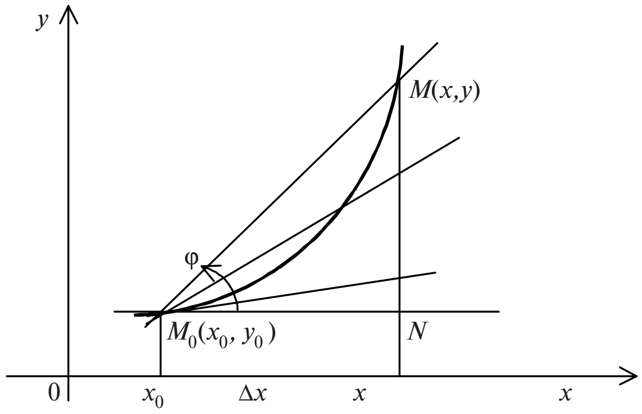


Рис. 16

Рассматривая треугольник M_0MN, видим, что угловой коэффициент секущей $k = \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$, если эта производная существует, значит, предельное положение секущей, т.е. касательная, в точке x_0 существует тогда, и только тогда, когда в этой точке существует производная $f'(x_0)$, которая и является угловым коэффициентом рассматриваемой касательной. Следовательно, используя уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту, мы можем записать уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$ в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (4.2)$$

Нормалью к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$ называется прямая, проведенная через эту точку перпендикулярно касательной в этой

точке. Используя условие перпендикулярности прямых $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, уравнение нормали можно записать в виде

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Отметим также, что если $f'(x_0) = \infty$, то касательная к кривой в данной точке вертикальна, а ее уравнение имеет вид $x = x_0$.

Необходимое условие существования производной

Теорема 4.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$. Тогда эта функция непрерывна в точке x_0.

$$▲ \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

а это равенство является одним из определений непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0. ■

Замечание. Пример 3) показывает, что обратная теорема неверна: функция $y = |x|$ не имеет производной в точке 0, хотя и является непрерывной в этой точке.

4.2. Вычисление производной функции

Теорема 4.2. Пусть в некоторой точке существуют производные u' и v', тогда в этой точке справедливы следующие равенства:

1) $c' = 0$;
2) $(u + v)' = u' + v'$;
3) $(u - v)' = u' - v'$;
4) $(uv)' = u'v + uv'$;
5) $(cu)' = cu'$;
6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ в любой точке, в которой v отлична от 0.

▲ 1) это пример 1 из разд. 4.1;

2) $(u+v)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u'+v';$$

3) аналогично п. 2;

4) $(uv)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) + u(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} =$$

$$= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

(здесь, в частности, учтена непрерывность функции v, которая следует из существования ее производной). Из доказанной формулы следует, что

$$(uvw)' = ((uv)w)' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v+uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'$$

(аналогично будет и для большего числа сомножителей);

5) согласно п. 4 $(cu)' = c'u + cu' = 0 + cu' = cu'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x)}\left[v(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

(здесь тоже учтена непрерывность v). ■

Теорема 4.3 (**производная обратной функции**). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 имеет конечную и отличную от 0 производную $f'(x_0)$; пусть для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда в точке y_0 эта обратная функция имеет производную, равную $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Это можно записать так: $x'_y(y_0) = \dfrac{1}{y'_x(x_0)}$ или, опуская аргументы, $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

▲ $x'_y(y_0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$ (из существования обратной функции следует, что при $\Delta y \neq 0$ Δx тоже отлично от 0); из непрерывности обратной функции следует, что при $\Delta y \to 0$ Δx тоже будет стремиться к 0, следовательно, $x'_y(y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{y'_x(x_0)}$. ■

Теорема 4.4 (**о производной сложной функции**). Пусть дана сложная функция $z = f(g(x))$. Пусть функция $y = g(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = f(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z = f(g(x))$ также имеет производную в точке x_0 и $z'_x(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$. Опуская аргументы, последнее равенство можно записать в виде $z'_x = z'_y y'_x$.

▲ Дадим x приращение $\Delta x = x - x_0$, тогда y получит приращение $\Delta y = y - y_0$, а z получит приращение $\Delta z = f(y) - f(y_0)$. Нам нужно найти $z'_x(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$. Так как $f'(y_0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta y}$ существует, то по теореме 2.6 $\dfrac{\Delta z}{\Delta y} = f'(y_0) + \alpha(\Delta y)$, где $\alpha(\Delta y)$ — бесконечно малая при $\Delta y \to 0$ функция. Отсюда $\Delta z = f'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\Delta y$ и $\dfrac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y_0)\dfrac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Перейдем в последней формуле к пределу при $\Delta x \to 0$: так как функция $y = g(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке, значит, при $\Delta x \to 0$ приращение Δy тоже стремится к 0: $\Delta y \to 0$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x}+\alpha(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=$$

$$=f'(y_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta y)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$=f'(y_0)g'(x_0)+\underbrace{\lim_{\Delta y\to 0}\alpha(\Delta y)}_{0}\cdot g'(x_0)=f'(y_0)g'(x_0).\ \blacksquare$$

Таблица производных

1) $c'=0$;

2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$, в частности $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$;

3) $(a^x)'=a^x\ln a$, в частности $(e^x)'=e^x$;

4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, в частности $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

5) $(\sin x)'=\cos x$;

6) $(\cos x)'=-\sin x$;

7) $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8) $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) $(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

12) $(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

13) $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$;

14) $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$;

15) $(\mathrm{th}x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$;

16) $(\mathrm{cth}x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$.

▲ 1) было доказано выше;

4) $y=\ln x\Rightarrow y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}x}=\frac{1}{x}\ \left(\text{так как }\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\right);$$

5) $y=\sin x$; $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{2\frac{\Delta x}{2}}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x\ \left(\text{так как }\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right);$$

6) $y=\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\overset{\text{т. 4.4}}{\Rightarrow}y'=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x(-1)=$

$=-\sin x$;

7) $(\mathrm{tg}x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8) аналогично;

9) пусть $y=\sin x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow$ существует обратная функция $x=\arcsin y$; по теореме о производной обратной функции

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

что, с заменой y на x и x на y, и доказывает нужное нам равенство;

10) так как $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$, то

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

11) пусть $y = \mathrm{tg}x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ существует обратная функция $x = \mathrm{arc\,tg}y$; по теореме о производной обратной функции $x'_y = \frac{1}{y'_x} =$ $= 1 : \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{y^2+1}$, что, с заменой y на x и x на y, и доказывает нужное нам равенство;

12) так как $\mathrm{arc\,tg}x + \mathrm{arcc\,tg}x = \frac{\pi}{2}$, то

$$(\mathrm{arcc\,tg}x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,tg}x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Дадим определение гиперболических функций: гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом называются соответственно функции

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x},\ \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}.$$

Как легко проверить, формулы для этих функций похожи на формулы для соответствующих тригонометрических функций, отличие может быть только в знаках, в частности, справедлива формула $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Из данных определений имеем:

13) $(\mathrm{sh}x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathrm{ch}x;$

14) $(\mathrm{ch}x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathrm{sh}x;$

15) $(\mathrm{th}x)' = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x};$

16) аналогично.

Теперь нам осталось доказать только формулы п. 2 и 3.

Логарифмическое дифференцирование

Пусть $y = f(x) > 0$ – некоторая функция, имеющая производную. Рассмотрим производную по x от $\ln y$. Согласно теореме 4.4 $(\ln y)'_x = \frac{1}{y} y'_x = \frac{1}{y} y'$. Такая производная называется логарифмической производной функции $y = f(x)$, а метод ее использования – логарифмическим дифференцированием.

Применим этот метод для доказательства оставшихся формул :

2) $y = x^\alpha \Rightarrow \ln y = \alpha \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} y' = \alpha \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1};$

3) $y = a^x \Rightarrow \ln y = x \ln a \Rightarrow \frac{1}{y} y' = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a = a^x \ln a.$ ■

В общем случае метод логарифмического дифференцирования применяется для нахождения производных функций вида $y = f(x)^{g(x)}$:

$$\ln y = g(x) \ln f(x) \Rightarrow \frac{1}{y} y' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \ln f(x) g'(x) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x),$$

т.е. получаем сумму производных показательной и степенной функций.

Пример. Найти производную функции $y = (\sin x)^{x^2}$.

Р е ш е н и е

$$y = (\sin x)^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln \sin x;\ \frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$y' = (\sin x)^{x^2} \left(2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

Производная неявной функции

Пусть значения переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением, которое, если все его члены перенести в левую часть, может быть записано в виде $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – некоторая функция двух переменных. Если для каждого значения x, принадлежащего некоторому множеству X, существует одно значение y, принадлежащее некоторому множеству Y, такое, что $F(x, y) = 0$, то этим определяется некоторая функция $y = y(x)$. Такая функция называется *неявной функцией*, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

Примеры неявных функций.

1) $x^2 + y^2 - a^2 = 0,\ x \in [-1,1],\ y \in [0,1]$; в этом примере y можно представить в виде $y = \sqrt{a^2 - x^2}$;

2) $y - x - 0,25\sin y = 0,\ x, y \in (-\infty, +\infty)$; в этом примере y выразить в явном виде через x нельзя.

Пусть неявная функция задана уравнением $F(x,y) = 0$. Укажем метод нахождения производной этой функции (считая, что эта производная существует). Пусть в нашем уравнении y является функцией от x: $y = y(x)$. Тогда уравнение превратится в тождество: $F(x, y(x)) \equiv 0\ (\forall x \in X) \Rightarrow F'_x(x, y(x)) = 0$ (производная по x берется в предположении, что y является функцией от x). Из последнего (линейного по y) уравнения можно выразить $y' = y'_x$.

Рассмотрим второй из приведенных выше примеров:

$$y' - 1 - 0,25\cos y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{1 - 0,25\cos y}.$$

Ответ, как видим, может зависеть не только от x, но и от y.

4.3. Дифференцируемые функции. Дифференциал

Определение 4.2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – соответствующее приращение функции. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение Δy может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{4.3}$$

где A не зависит от Δx (но зависит от точки x_0): $A = A(x_0)$, а α зависит от Δx и x_0, т.е. $\alpha = \alpha(x_0, \Delta x)$, и является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. В этом случае линейная относительно Δx функция $A\Delta x$ называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0) = dy(x_0)$ или просто dy.

Пример. Проверить, что функция $y = x^2$ дифференцируема, и найти ее дифференциал.

Р е ш е н и е

$$y = x^2;\ \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x\Delta x.$$

Здесь $A = 2x_0$, $\alpha = \Delta x$, следовательно, функция дифференцируема и $dy = 2x_0\Delta x$.

Так как при $\alpha \neq 0$ второй член в правой части формулы (4.3) является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx ($\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\,\Delta x}{\Delta x} = 0$), то эту формулу можно записать в виде $\Delta y = A\Delta x + {}$ $+ o(\Delta x)$. Таким образом, дифференциал функции (если он существует) представляет собой линейную функцию от Δx и отличается от приращения функции на величину $o(\Delta x)$. Поэтому говорят, что дифференциал функции – это главная линейная часть приращения этой функции. Смысл введения понятия дифференциала заключается в том, что приращение функции Δy, которое может иметь достаточно сложный вид, в главном характеризуется более простой линейной функцией $A\Delta x$.

Теорема 4.5. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела конечную производную. При этом в равенстве (4.3) $A = f'(x_0)$.

▲ *Необходимость.* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow$ $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$, где $A = A(x_0)$, $\alpha = \alpha(x_0, \Delta x)$ и α является бесконечно малой при $\Delta x \to 0 \Rightarrow$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha \Rightarrow \exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(A + \alpha) = A.$$

Достаточность. Пусть $\exists\ f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{\text{т. 2.6}}{\Rightarrow} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ функция $\Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x +$

$+\alpha(\Delta x)\Delta x \ \Rightarrow$ функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $A = f'(x_0)$.■

Таким образом, фраза «функция дифференцируема в точке x_0» означает то же самое, что «функция имеет в точке x_0 конечную производную» и

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x \ \text{или} \ dy = y'\Delta x. \qquad (4.4)$$

Если отождествить дифференциал независимой переменной и ее приращение, т.е. положить $dx = \Delta x$, то получим также формулу $dy = y'dx$ ($\Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$ – еще одно обозначение производной).

Пример. Найти дифференциал функции $y = x^2$.

Решение

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x\Delta x = 2xdx$, что мы уже видели выше.

Геометрический смысл дифференциала

На рис. 17 отрезок AB равен $\Delta x \cdot \mathrm{tg}\varphi = \Delta x \cdot y'(x_0) = dy(x_0)$. То есть если Δy – приращение ординаты кривой, то dy – приращение ординаты касательной к этой кривой.

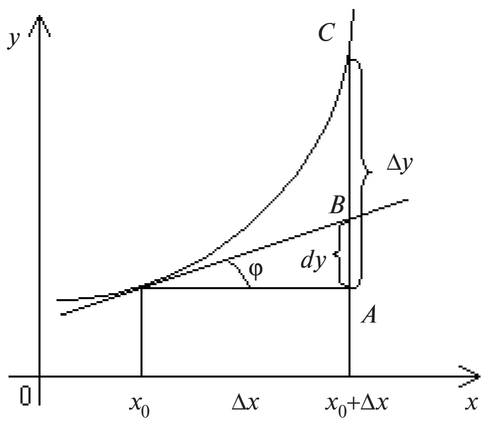


Рис. 17

Применение дифференциалов для приближенных вычислений

Для дифференцируемых функций $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. При приближенных вычислениях второй член в правой части этой формулы отбрасывают и полагают, что

$$\Delta y \approx dy \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{33}$.

Решение

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[5]{x}$ Положим $x_0 = 32$ и $\Delta x = 1 \Rightarrow$

$$\sqrt[5]{33} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x =$$

$$= \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x_0^4}}1 = 2 + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = 2 + \frac{1}{5}\frac{1}{2^4} = 2 + \frac{1}{80}.$$

Основные правила нахождения дифференциалов

1) $dc = c'dx = 0$;

пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, тогда в этой точке

2) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$;

3) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv$;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \left(\dfrac{u}{v}\right)'dx = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}dx = \dfrac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

(при $v(x) \neq 0$).

Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно выбора переменной

Пусть задана сложная функция $y = f(\varphi(t))$, где $x = \varphi(t)$, а $y = f(x)$. Пусть в некоторой точке t существует производная $x'_t = \varphi'(t)$, а в соответствующей точке $x = \varphi(t)$ существует производная $y'_x = f'(x)$, тогда по теореме 4.4 о производной сложной функции в точке t существует производная сложной функции $y'_t = y'_x x'_t$. По формуле $dy = y'dx$, которая пока справедлива только для независимой переменной,

$$dy = y'_t dt = (y'_x x'_t)dt = y'_x (x'_t dt) = y'_x dx \Rightarrow dy = y'_x dx.$$

Таким образом, формула для записи дифференциала $dy = y'_x dx$ справедлива не только для независимой переменной x, но и в том случае, когда x является зависимой переменной (зависит от t). Только при этом dx уже не произвольное приращение независимой переменной: $dx = \Delta x$, а дифференциал функции $x = \varphi(t)$. Это свойство называется *инвариантностью формы дифференциала относительно выбора переменной*.

4.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 4.3. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в каждой точке этой окрестности имеет конечную производную $y' = f'(x)$. Второй производной, или производной второго порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0, называется производная от ее первой производной в этой точке, если такая производная существует.

Таким образом, $f''(x_0) = [f'(x)]'_{x_0}$, или, опуская аргумент, $y'' = (y')'$.

Аналогично определяется производная функции $y = f(x)$ любого порядка, т.е. по определению $y''' = (y'')', \ldots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Обозначения:

$$f''(x_0) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ \ y''' = \frac{d^3y}{dx^3};\ y^{(4)} = y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots,\ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Под производной нулевого порядка функции понимается сама эта функция.

Замечание. Выше было показано, что если существует производная функции $f'(x_0)$, то функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0. Пусть существует $f^{(n)}(x_0) \Rightarrow$ $f^{(n-1)}(x)$ определена (т.е. существует) в окрестности точки x_0 (значит, и в самой точке x_0) и непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow f^{(n-2)}(x)$ определена (т.е. существует) в окрестности точки x_0 (значит, и в самой точке x_0) и непрерывна в точке x_0 и т.д. $\Rightarrow$ сама функция $y = f(x)$ и все ее производные до порядка $n - 1$ включительно существуют в окрестности точки x_0 и непрерывны в точке x_0.

Примеры. Найти n-ю производную функций.

Решение

1) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x, \ldots, y^{(n)} = e^x,\ x \in R;$

2) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}2\right) \Rightarrow y''' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}2\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}2 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}3\right) \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right),\ x \in R;$

3) аналогично для $y = \cos x,\ \ y^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2}n),\ x \in R;$

4) $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x},\ y'' = -\frac{1}{x^2},\ y''' = \frac{2}{x^3},$

$y^{IV} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \ldots,\ y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},\ x > 0.$

Общие правила

Если в некоторой точке существуют n-е производные функций u и v, то очевидно, что в этой точке верны следующие формулы п. 1 и 2:

1) $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$;

2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

3) *формула Лейбница* для нахождения производной любого порядка произведения двух функций $(uv)^{(n)}$:

$(uv)' = u'v + uv';$

$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + v'';$

$(uv)''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$

$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$

В общем случае из существования $u^{(n)}$ и $v^{(n)}$ следует, что:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(n-3)}v''' + \ldots$$

$$= u^{(n)}v + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}. \qquad (4.5)$$

Строгое доказательство этой формулы можно провести, например, методом математической индукции.

Пример. Найти производную $(xe^x)^{(100)}$.

Решение

$$(xe^x)^{(100)} = (e^x)^{(100)}x + 100(e^x)^{(99)}x' + \frac{100\cdot 99}{2!}(e^x)^{(98)}x'' + \ldots =$$
$$= e^x x + 100e^x + 0 = e^x(x+100).$$

Здесь было взято $u = e^x, v = x$.

Определение 4.4. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на некотором множестве, если она дифференцируема (т.е. имеет конечную производную) в каждой точке этого множества.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая на некотором множестве функция (x – независимая переменная). Тогда по формуле (4.4)

$$dy = f'(x)dx.$$

Здесь $f'(x)$ зависит от x, а произвольное приращение dx от x не зависит, т.е. правая часть формулы зависит от x и dx. Если dx зафиксировать, то правую часть этой формулы можно рассматривать как функцию только от x, значит, можно говорить о дифференциале этой функции.

Определение 4.5. Вторым дифференциалом, или дифференциалом 2-го порядка функции $y = f(x)$ в некоторой точке, называется дифференциал от ее первого дифференциала (если такой существует).

Обозначение: $d^2y = d^2 f(x)$.

Рассматривая dx в формуле $dy = f'(x)dx$ как постоянную, имеем

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = (f'(x))'dxdx = f''(x)(dx)^2.$$

Эта формула справедлива при существовании $f''(x)$. В правой части обычно скобки при dx опускают: $d^2y = f''(x)dx^2$.

Аналогично дается определение дифференциала любого порядка функции и выводится формула для его вычисления:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = d(f''(x))dx^2 = f'''(x)dxdx^2 = f'''(x)dx^3$$

(при существовании $f'''(x)$) и в общем случае при существовании $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \quad \text{или} \quad d^n y = y^{(n)}dx^n \tag{4.6}$$

(строгое доказательство легко провести методом математической индукции).

Замечание. Дифференциалы порядка выше 1-го не обладают свойством инвариантности формы относительно выбора переменной. Покажем, например, это для $n = 2$. Пусть дана сложная функция $y = f(\varphi(t))$, где $x = \varphi(t)$, а $y = f(x)$. Используя формулу для дифференциала произведения двух функций и свойство инвариантности первого дифференциала относительно выбора переменной, имеем:

$$d^2y = d(y'_x dx) = d(y')dx + y'd(dx) = y''_{x^2}dxdx + y'_x d^2x = y''_{x^2}dx^2 + y'_x d^2x.$$

Так как, вообще говоря, $d^2x \neq 0$, то эта формула не совпадает с формулой $d^2y = y''_{x^2}dx^2$ для независимой переменной.

4.5. Функции, заданные параметрически, и их производные

Определение 4.6. Пусть при $t \in [t_1, t_2]$

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{4.7}$$

Каждому значению $t \in [t_1, t_2]$ по формулам (4.7) соответствуют значения x и y, или точка на плоскости $0xy$ с такими координатами. При изменении t эта точка на плоскости описывает некоторую кривую. Уравнения (4.7) называются параметрическими уравнениями этой кривой, а число t называется параметром.

Если функция $x = \varphi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, то

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)). \tag{4.8}$$

То есть уравнения (4.7) в этом случае определяют y как функцию от x. Тогда говорят, что функция y от x задана параметрически.

Переход от системы (4.7) к непосредственной зависимости y от x (если такой возможен) может осуществляться путем исключения параметра t.

Примеры функций и кривых, заданных параметрически.

1) $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2.$

Здесь каждому значению $t \in [0, 2\pi]$ соответствует точка окружности. При $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ получаем часть окружности в 1-й четверти, при $t = 0$ – точку $(r, 0)$, при $t = \frac{\pi}{2}$ – точку $(0, r)$ и т.д.

Для некоторых задач параметрические уравнения окружности удобнее обычных, так как из последних y выражается через x иррациональным образом.

2) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ параметрически задается следующим образом: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, так как

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1;$$

3) $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $t \in R,\ a > 0.$

Выразить y через x из этих уравнений в явном виде нельзя (можно, правда, выразить x через y, но формула будет очень громоздкой). Построим график, учитывая, что $y \geq 0$ и y есть четная функция t, а x есть возрастающая (так как t растет быстрее, чем $\sin t$), нечетная функция t. При $t = 0$ получим точку (0,0), при $t = \pi$ – точку $(a\pi, 2a)$, при $t = 2\pi$ – точку $(2a\pi, 0)$ и т.д.

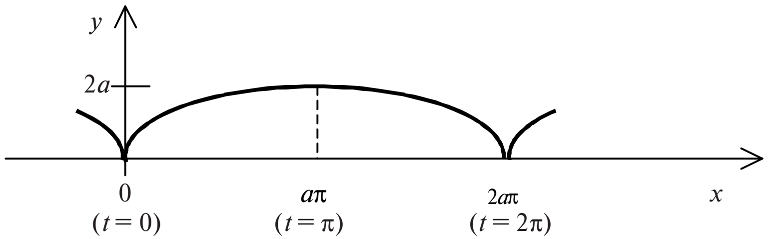


Рис. 18

Кривая на рис. 18 называется *циклоидой*. При $t \in [0, 2\pi]$ получаем одну арку циклоиды. Можно показать, что циклоида описывается точкой, лежащей на окружности, если эта окружность катится вдоль некоторой прямой (например, точкой двигающегося колеса). На рис. 19 показано, как перемещается нижняя точка колеса при его движении вдоль прямой.

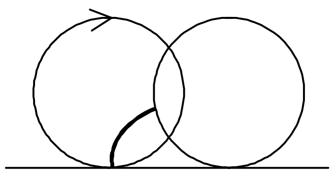


Рис. 19

Производные функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = y(t)$ задана параметрически, т.е. выполняются условия определения 4.6, и пусть $y = \psi(t)$ имеет производную $y' = \psi'(t)$, а для функции $x = \varphi(t)$ выполняются условия теоремы 4.3 о производной обратной функции. Тогда существует $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$. Отсюда согласно теореме 4.4 о производной сложной функции

$$y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таким образом, в точке (x, y), соответствующей некоторому значению параметра t,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим приведенную выше циклоиду:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Значение производной в примерах подобного типа зависит от t, но и это является полезной информацией о функции и ее графике. В нашем примере при $t = \dfrac{\pi}{2}$ $x = a\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$ $y = a,\ y'_x = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow$ угол касательной с осью 0x равен $\dfrac{\pi}{4}$; при $t = \pi$ $x = a\pi,\ y = 2a,\ y' = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow$ касательная горизонтальна; при $t = 0$ и $t = 2\pi$ получим точки (0;0) и $(2a\pi, 0)$. Так как $\lim\limits_{t\to 0}\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2} = \infty$ и $\lim\limits_{t\to 2\pi}\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2} = \infty$, то касательные в этих точках вертикальны.

Производные высших порядков функции, заданной параметрически

Аналогично при выполнении соответствующих условий имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y'''_{x^3} = (y''_{x^2})'_x = (y''_{x^2})'_t t'_x = \frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t} \text{ и т.д.}$$

В частности, для циклоиды, учитывая уже найденную первую производную y'_x, получаем:

$$y''_{x^2}=\frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'}{a(1-\cos t)}=\frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=\frac{-1}{2\sin^2\frac{t}{2}a\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}\text{ и т.д.}$$

5. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

5.1. Теоремы о среднем

Теорема 5.1 (**Ферма**). Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и во внутренней точке c этого отрезка (т.е. не на краю) принимает свое наибольшее (наименьшее) значение. Тогда если в этой точке существует конечная производная $f'(c)$, то $f'(c)=0$.

▲ $f'(c)=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. По условию теоремы этот предел существует и конечен.

Пусть для определенности в точке c функция принимает свое наибольшее значение $\Rightarrow f(c)\ge f(c+\Delta x)\Rightarrow$ числитель нашей дроби меньше или равен 0. Пусть $\Delta x>0$, т.е. мы подходим к точке c справа. Тогда вся дробь меньше или равна 0, и, согласно задаче из разд. 2.1, ее предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0$. Теперь пусть $\Delta x<0$, т.е. мы подходим к точке c слева. Тогда вся дробь больше или равна 0, и по той же причине ее предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0$.

Из этих двух неравенств и единственности предела функции наш предел может только равняться 0, т.е. $f'(c)=0$. ■

Геометрический смысл теоремы Ферма. При выполнении условий теоремы Ферма в точке, где функция принимает свое наибольшее (наименьшее) значение, касательная (если она существует) горизонтальна (рис. 20).

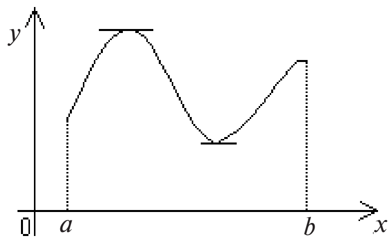


Рис. 20

Замечание. Все условия теоремы 5.1 существенны для ее справедливости: в точке, в которой функция принимает наибольшее или наименьшее значение, ее производная может не существовать (рис. 21) или равняться ∞ (рис. 22); то, что c – внутренняя точка отрезка, также существенно (рис. 23; здесь наибольшее значение функции принимается на краю b отрезка, а производная $f'(b)\ne 0$).

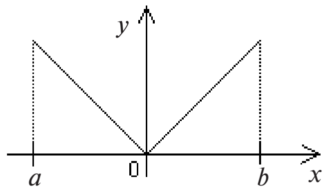


Рис. 21

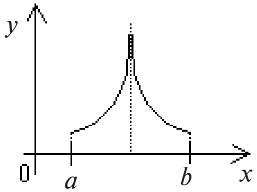


Рис. 22

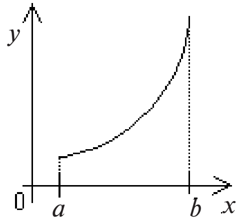


Рис. 23

Теорема 5.2 (**Ролля**). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную во всех внутренних точках этого отрезка. Пусть $f(a)=f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c\in(a, b)$, такая, что $f'(c)=0$.

▲ Функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, по теореме 3.7 она принимает на этом отрезке свои наибольшее M и наименьшее m значения. Возможны два случая:

1) $M=m$. Здесь функция является постоянной и $f'(x)=M'=0$ во всех точках интервала (a, b), т.е. в качестве точки c можно взять любую точку этого интервала;

2) $M\ne m$. Если бы оба этих значения принимались на краях отрезка, т.е. в точках a и b, то равенство $f(a)=f(b)$ не могло бы выполняться, значит, хотя бы одно из этих значений принимается во внутренней

точке c отрезка. Но тогда для этой точки выполняются все условия теоремы Ферма, значит, по этой теореме $f'(c)=0$.

Пример к теореме Ролля

$$y=1-\sqrt[3]{x^2};\quad y(-1)=y(1)=0, \text{ но } y'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\neq 0.$$

Кажущееся противоречие с теоремой Ролля объясняется тем, что для данного примера эта теорема неприменима, так как во внутренней точке 0 отрезка $[-1, 1]$ наша функция не имеет производной.

Теорема 5.3 (**Коши**). Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют конечные производные во всех внутренних точках этого отрезка, причем $g'(x)\neq 0$ при $x\in(a,b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c\in(a,b)$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{5.1}$$

(знаменатель дроби в левой части отличен от 0, так как в противном случае по теореме Ролля производная функции $g(x)$ в некоторой точке интервала (a, b) равна 0, что противоречит условию теоремы).

▲ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как на этом отрезке определены и непрерывны $f(x)$ и $g(x)$, а остальные величины в правой части последней формулы постоянны; во всех внутренних точках отрезка она имеет конечную производную

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x);$$

на концах отрезка эта функция принимает равные значения:

$$F(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(a)-g(a)]=0,$$

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)]=$$

$$=f(b)-f(a)-f(b)+f(a)=0.$$

Значит, по теореме Ролля существует точка $c\in(a,b)$, такая, что $F'(c)=0$, т.е.

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0,$$

откуда

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) \text{ и } \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \;\blacksquare$$

Замечание. Теорема верна и при $b < a$ (тогда $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, и для получения нужной нам формулы осталось числитель и знаменатель дроби в левой части последней формулы умножить на -1).

Теорема 5.4 (**Лагранжа**). Пусть функция $y=f(x)$ определена, непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную во всех внутренних точках этого отрезка. Тогда существует хотя бы одна точка $c\in(a,b)$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{ или } f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \tag{5.2}$$

▲ Положим в теореме Коши $g(x)=x$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы, в частности $g'(x)=x'=1\neq 0$. Тогда в формуле (5.1) $g(b)=b$, $g(a)=a$ и $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{1}$. ■

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

На рис. 24 угловой коэффициент прямой AB, т.е. $\operatorname{tg}\angle BAC=$ $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке c. Теорема Лагранжа утверждает, что на интервале

(a, b) существует хотя бы одна точка, в которой эти угловые коэффициенты равны, т.е. касательная параллельна прямой AB.

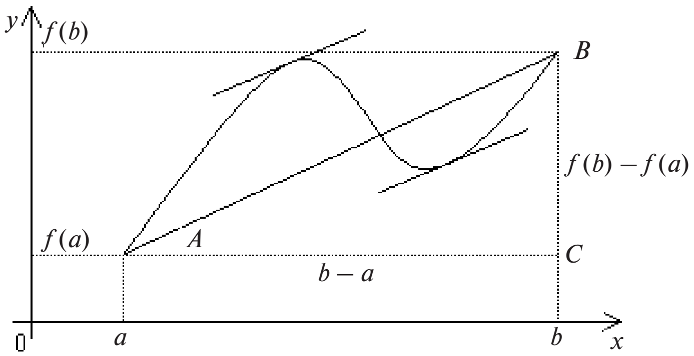


Рис. 24

5.2. Правило Лопиталя

Теорема 5.5 (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей). Пусть:

1) функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a $\overset{0}{U}(a)$;

2) существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

3) в нашей проколотой окрестности точки a функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$;

4) существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (5.3)$$

Замечания.

1. Теорема означает, что при выполнении условий 1 – 4 предел отношения функций равен пределу отношения производных.

2. В левой части формулы (5.3) неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, правило Лопиталя относится только к неопределенностям такого вида, другие неопределенности (способами, указанными ниже) нужно сводить к этим.

3. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, то правило Лопиталя не применимо, при этом $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ может и существовать.

4. Теорема верна и при $a = \infty$ (будет доказано ниже).

5. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ опять приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, а функции $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям, которые наложены на $f(x)$ и $g(x)$ в теореме 5.5, то можно применить правило Лопиталя еще раз.

▲ *Случай неопределенности вида* $\dfrac{0}{0}$.

Положим $f(a) = g(a) = 0$ (если функции в этой точке не определены, то доопределяем их; если они определены в точке a и не равны в ней 0, то меняем их значения в точке a, что не скажется на величине искомого $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, так как в определении предела функции при $x \to a$ $x \neq a$). Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Согласно определению 3.1 функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a);$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0,\ g(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Эти функции будут непрерывны и в нашей окрестности $\overset{0}{U}(a)$, так как в любой точке этой окрестности они имеют производную (см. теорему 4.1).

Пусть x – произвольная точка окрестности $\overset{0}{U}(a)$. Тогда для отрезка $[a, x]$ (или $[x, a]$ – в зависимости от того, лежит ли x правее или левее a) выполняются все условия теоремы Коши, и по формуле (5.1) (согласно замечанию к теореме Коши эта формула справедлива независимо от взаимного расположения точек a и b)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}, \tag{5.4}$$

где $c\in(a,x)$ или $c\in(x,a)$.

При $x\to a$ $c\to a$, и так как $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Значит, существует и предел левой части формулы (5.4) и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Случай неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ более сложен.

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$ и K конечно. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Согласно определению предела функции 2.5 существует $\delta>0$, такое, что при $x\in\overset{0}{U}(a,\delta)$

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}-K<\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow K-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<K+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.5}$$

Пусть $x\in\overset{0}{U}(a,\delta)$. В нашем случае применить теорему Коши к отрезку $[a,x]$ нельзя, так как функции $f(x)$ и $g(x)$ не будут непрерывными в точке a, ибо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Поэтому возьмем произвольный $x_0\in\overset{0}{U}(a,\delta)$ и применим теорему Коши к отрезку с краями x и x_0: $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, где c находится между точками x и x_0. Из (5.5) следует, что $K-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(c)}{g'(c)}<K+\frac{\varepsilon}{2}$, значит,

$$K-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}<K+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.6}$$

Нам надо доказать, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K$. Так как

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}},$$

то

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\,\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{5.7}$$

Зафиксируем в этой формуле x_0, оставляя x переменным. Тогда

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}=1,$$

и по теореме 2.6

$$\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}=1+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$ функция. Значит, формулу (5.7) можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}(1+\alpha(x)). \tag{5.8}$$

Теперь умножим все части формулы (5.6) на $1+\alpha(x)$:

$$\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\alpha(x))<\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}(1+\alpha(x))<\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\alpha(x)),$$

значит, формула (5.8) приводит к формуле

$$\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\alpha(x))<\frac{f(x)}{g(x)}<\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\alpha(x)),$$

или

$$K-\frac{\varepsilon}{2}+\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)<\frac{f(x)}{g(x)}<K+\frac{\varepsilon}{2}+\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x). \tag{5.9}$$

Так как $\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)$ и $\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)$, как произведения бесконечно малой на постоянную, есть величины бесконечно малые при $x \to a$, то существует $\delta_1 > 0$, такое, что при $x \in \overset{0}{U}(a,\delta_1)$ справедливы неравенства $\left|\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\left|\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x) > -\frac{\varepsilon}{2}$ и $\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Уменьшая левую и увеличивая правую части неравенства (5.9), находим, что при $x \in \overset{0}{U}(a,\min(\delta,\delta_1))$ выполняется неравенство $K-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < K+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$ или

$$K-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K+\varepsilon. \qquad (5.10)$$

Так как в последнем неравенстве $\varepsilon > 0$ — произвольно, то это неравенство и означает, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Теорема доказана для конечного K; если теперь $K=\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, тогда, по уже доказанному, $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$, но тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, т.е. опять $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Осталось разобрать случай $a=\infty$. В обоих случаях неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ для нахождения $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ произведем замену $x=\frac{1}{t}$. Обозначая $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}.$$

Легко видеть, что $F(t)$ и $G(t)$ удовлетворяют условиям правила Лопиталя при $t \to 0$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{F'_x x'_t}{G'_x x'_t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{F'_x}{G'_x} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)'_x}{g\left(\frac{1}{t}\right)'_x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \ ■$$

Примеры раскрытия неопределенностей. Найти пределы функций.

Решение

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}+1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{9}.$

Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$; все условия теоремы 5.5 выполнены: числитель и знаменатель дроби определены, непрерывны и дифференцируемы в проколотой окрестности точки -1, причем в этой окрестности производная знаменателя отлична от 0; предел отношения производных существует и равен $\frac{4}{9}$, значит, существует предел отношения функций, и этот предел тоже равен $\frac{4}{9}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = 2.$

Так как последний предел существует и равен 2, то предпоследний предел тоже существует и равен 2 и т.д.

3. При $x \to +\infty$ функции $x^k (k>0)$, $a^x (a>1)$, $\log_a x (a>1)$ являются бесконечно большими. Выясним, какая из них растет быстрее. Для этого вычислим два предела вида $\frac{\infty}{\infty}$:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\ln a\cdot kx^{k-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{k\ln a\cdot x^k} = 0.$

Как видим, при $x \to +\infty$ степенная функция растет быстрее логарифмической.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^x\ln^2 a}=\ldots$

В этом пределе все время получается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, но на каком-то шаге степень x в числителе дроби либо станет равной 0 (при целом k), либо станет отрицательной (при k не целом), тогда x из числителя «уйдет», и так как предел знаменателя равен ∞, то предел всей дроби будет равен 0. Таким образом, при $x\to+\infty$ показательная функция растет быстрее степенной.

4. Вышеприведенные примеры показывают, что во многих случаях правило Лопиталя существенно сокращает и упрощает раскрытие неопределенностей. Однако не следует думать, что оно является универсальным средством для этих целей и методы вычисления пределов, изложенные в гл. 2, больше не нужны. Для иллюстрации этого рассмотрим предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Так как при $x\to+\infty$ x растет, а $|\sin x|\le 1$, то наш предел является неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель на x, предел можно вычислить следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x\frac{1}{x}}{1+\sin x\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

(так как $\sin x\frac{1}{x}$ при $x\to+\infty$ – это произведение бесконечно малой $\frac{1}{x}$ на ограниченную $\sin x$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\frac{1}{x}=0$).

Ошибочный метод состоит в попытке применить правило Лопиталя без проверки справедливости условий теоремы 5.5:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{-\sin x}=-1.$$

Правильный ответ, естественно, равен 1, а из трех равенств в предыдущей строчке справедливо лишь последнее, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2},$$

а последний предел не существует.

5. $\lim\limits_{x\to+0}\sin x\cdot\ln x.$

Это уже неопределенность вида $0\cdot\infty$. Такие неопределенности сводятся к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ преобразованием произведения в дробь путем использования отрицательной степени:

$$\lim_{x\to+0}\sin x\cdot\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\sin^{-1}x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\sin^{-2}x\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}-\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

Заметим здесь, что при другом возможном преобразовании пример только усложняется:

$$\lim_{x\to+0}\sin x\cdot\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{\ln^{-1}x}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{-\ln^{-2}x\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+0}x\cos x\ln^2 x,$$

что опять является неопределенностью вида $0\cdot\infty$, только записанной в более сложной форме. На этом примере видно, что, как правило, логарифмическую и обратные тригонометрические функции переводить в знаменатель нецелесообразно.

6. $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Это неопределенность вида 1^∞, которая (как и неопределенности вида 0^0 и ∞^0) раскрывается путем логарифмирования выражения под знаком предела, которое обозначим y. А именно вместо исходного предела $\lim\limits_{x\to0}y$ рассмотрим

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x=3\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}3\lim_{x\to0}\frac{-\sin 2x\cdot 2}{\cos 2x\cdot 2x}=$$

$$=-6\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos 2x}=-6.$$

Тогда в силу непрерывности показательной функции $\lim\limits_{x\to0}e^{\ln y}=\lim\limits_{x\to0}y=e^{-6}$.

Введя обозначение $e^x=\exp(x)$, решение этого примера можно записать и по-другому:

$$\lim_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to0}\exp\left(\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right)=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}\right),$$

что, как показано выше, дает $\exp(-6)=e^{-6}$.

5.3. Формула Тейлора

Формула Тейлора для многочлена

Пусть $P_n(x)$ – многочлен степени n, т.е. $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Возьмем произвольную точку x_0 и преобразуем $P_n(x)$ следующим образом:

$$P_n(x) = a_0 + a_1((x - x_0) + x_0) + a_2((x - x_0) + x_0)^2 + \ldots + ((x - x_0) + x_0)^n.$$

Возводя в степень согласно формуле бинома Ньютона и собирая вместе члены с одинаковыми степенями $x - x_0$, запишем $P_n(x)$ следующим образом:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k. \quad (5.11)$$

Первый член правой части этой формулы (при $k = 0$) есть постоянная c_0. Возьмем производную от обеих частей формулы (5.11), учитывая, что производная постоянной равна 0:

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k k (x - x_0)^{k-1}.$$

Первый член правой части этой формулы (при $k = 1$) есть постоянная c_1. Снова дифференцируем равенство по x, учитывая, что производная постоянной равна 0:

$$P_n''(x) = \sum_{k=2}^{n} c_k k(k-1)(x - x_0)^{k-2}.$$

В общем виде получаем:

$$P_n^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} c_k k(k-1)\ldots(k-m+1)(x - x_0)^{k-m}.$$

Подставим в эту формулу $x = x_0$. При этом все члены правой части, кроме первого (при $k = m$), будут равны 0. В результате имеем

$$P_n^{(m)}(x_0) = c_m m(m-1)\ldots(m-m+1) = c_m m!,$$

откуда

$$c_m = \frac{P_n^{(m)}(x_0)}{m!}, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Заменяя здесь m на k, получаем равенства для коэффициентов формулы (5.11):

$$c_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \quad (5.12)$$

Подставим эти коэффициенты в формулу (5.11). Тогда

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \quad (5.13)$$

Формула (5.13) называется *формулой Тейлора* для многочлена.

Формула Тейлора для (n + 1) раз дифференцируемой функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема $(n + 1)$ раз в некоторой окрестности точки x_0, т.е. имеет в этой окрестности все производные до порядка $(n + 1)$ включительно. Тогда формула (5.13) не может быть верной, так как в левой ее части произвольная функция, а в правой – многочлен. Нужно эту формулу как-то «подправить». Возьмем некоторый x из нашей окрестности и положим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x), \quad (5.14)$$

где $r_n(x)$ – так называемый остаточный член формулы Тейлора,

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \quad (5.15)$$

Возможны различные формы записи остаточного члена, мы рассмотрим только две из них. Сначала будем искать остаточный член в виде, похожем на следующее слагаемое из правой части формулы (5.14):

$$r_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} q(x), \quad (5.16)$$

где $q(x)$ зависит от x, т.е. является некоторой функцией x, которую нужно определить $\left(\text{такое представление всегда возможно: } q(x) = \frac{r_n(x)(n+1)!}{(x - x_0)^{n+1}} \right)$. Тогда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}q(x). \qquad (5.17)$$

На отрезке $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$ – в зависимости от того, x правее или левее x_0) рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}. \qquad (5.18)$$

Проверим, удовлетворяет ли эта функция на нашем отрезке всем условиям теоремы Ролля.

• Как функция t она определена и непрерывна на отрезке, ибо из существования каждой производной функции следует непрерывность ее предыдущей производной $\Rightarrow$ из существования на нашем отрезке $f^{(k)}(t)$, $k=0,1,2,\ldots, n+1$, следует непрерывность $f^{(k)}(t)$, $k=0,1,2,\ldots, n$, на этом отрезке.

• Во всех внутренних точках отрезка $F(t)$ имеет конечную производную; для доказательства этого просто найдем эту производную из (5.18), учитывая правило нахождения производной произведения:

$$F'(t)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1)-$$

$$-\frac{q(x)}{(n+1)!}(n+1)(x-t)^n(-1)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}+\frac{q(x)}{n!}(x-t)^n.$$

При последнем переходе учтено, что во второй сумме первое слагаемое (при $k=0$) равно 0, а факториал числа $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n$.

Во второй сумме последней формулы обозначим $k-1=m$. Тогда эту формулу можно переписать в виде

$$F'(t)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m+1)}(t)}{m!}(x-t)^m+\frac{q(x)}{n!}(x-t)^n.$$

Теперь слагаемые второй суммы сокращаются с соответствующими слагаемыми первой суммы, в результате останется только первое слагаемое первой суммы и

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{q(x)}{n!}(x-t)^n. \qquad (5.19)$$

Последняя формула и доказывает существование $F'(t)$ во всех внутренних точках отрезка $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$).

• На краях отрезка функция $F(t)$ принимает одинаковые значения. Выделив первое слагаемое суммы, перепишем формулу (5.18) в виде

$$F(t)=f(x)-f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1},$$

откуда при $t=x$ получим $F(x)=0$.

Теперь подставим в (5.18) $t=x_0$:

$$F(x_0)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k-\frac{q(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Согласно (5.17) это выражение равно 0. Таким образом, $F(x)=F(x_0)=0$.

Условия теоремы Ролля выполняются, значит, существует $c\in(x_0,x)$ (или (x, x_0)), такая, что $F'(c)=0$, т.е. согласно (5.19)

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{q(x)}{n!}(x-c)^n=0\Rightarrow q(x)=f^{(n+1)}(c).$$

Из (5.16) теперь следует, что существует $c\in(x_0,x)$ (или (x, x_0)), такая, что

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (5.20)$$

Остаточный член (5.20) называют *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 5.6. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в некоторой окрестности точки x_0, то для всех x из этой окрестности

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=$$

$$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (5.21)$$

В этой формуле c – точка между x_0 и x, которую еще можно записать в виде $c=x_0+\theta(x-x_0)$, где $0<\theta<1$. Формулу (5.21) называют *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*.

Замечания.

1. Смысл формулы Тейлора состоит в том, что с точностью до остаточного члена функция в окрестности точки x_0 представляется в виде многочлена по степеням $x-x_0$, а многочлен изучать проще, чем произвольную функцию.

2. Остаточный член в форме Лагранжа имеет тот же вид, что и предыдущие члены формулы, но производная берется уже не в точке x_0, а в промежуточной точке c.

3. Отбросив в формуле (5.21) остаточный член, получаем формулу для приближенных вычислений: $f(x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Погрешность этой формулы равна остаточному члену

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где c – промежуточная точка между x_0 и x. Хотя точно значение c определить нельзя, можно оценить погрешность, т.е. указать, чего она, заведомо, не превосходит.

В качестве *примера* рассмотрим задачу приближенного вычисления $\sqrt[5]{33}$, которая уже решалась с помощью дифференциала в разд. 4.3. В нем был получен ответ $2+\frac{1}{80}$, причем погрешность вычислений оценить тогда не могли. Теперь можно продвинуться гораздо дальше:

Рассмотрим функцию $y=f(x)=\sqrt[5]{x}$ и возьмем $x_0=32\Rightarrow f(x_0)=\sqrt[5]{32}=2$. Тогда

$$f'(x)=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}};\quad f''(x)=-\frac{4}{25}x^{-\frac{9}{5}}=-\frac{4}{25\sqrt[5]{x^9}};$$

$$f'''(x)=\frac{36}{125}x^{-\frac{14}{5}}=\frac{36}{125\sqrt[5]{x^{14}}};\quad f'(32)=\frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}=\frac{1}{5\cdot 2^4}=\frac{1}{80};$$

$$f''(32)=-\frac{4}{25\cdot 2^9}=-\frac{1}{25\cdot 2^7}=-\frac{1}{3200};\quad f'''(c)=\frac{36}{125\sqrt[5]{c^{14}}}.$$

По формуле (5.21) находим:

$$\sqrt[5]{x}=f(32)+\frac{f'(32)}{1!}(x-32)+\frac{f''(32)}{2!}(x-32)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-32)^3.$$

При $x=33$ получаем $x-32=1$ и

$$\sqrt[5]{33}=2+\frac{1}{80}-\frac{1}{2\cdot 3200}+\frac{36}{6\cdot 125\sqrt[5]{c^{14}}}=2+\frac{1}{80}-\frac{1}{6400}+\frac{6}{125\sqrt[5]{c^{14}}}.$$

Отбрасывая остаточный член, получаем приближенно $\sqrt[5]{33}\approx 2+\frac{1}{80}-\frac{1}{6400}$. Погрешность при этом не превосходит отброшенного остаточного члена, в котором c находится между $x_0=32$ и $x=33$.

Наибольшее значение этой погрешности будет при наименьшем значении ее знаменателя, т.е. при $c=32$. Значит, погрешность наших вычислений не превосходит

$$\frac{6}{125\sqrt[5]{32^{14}}}=\frac{6}{125\cdot 2^{14}}=\frac{3}{1000\cdot 2^{10}}=\frac{3}{1024000}.$$

4. При $x_0=0$ формула (5.21) превращается в так называемую формулу Маклорена:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=$$

$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (5.22)$$

Здесь c – промежуточная точка между 0 и x, или $c=\theta x$, где $0<\theta<1$.

Теорема 5.7 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Тогда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$
$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \quad (5.23)$$

По сравнению с теоремой 5.6 здесь на функцию наложено меньше условий, зато и результат дает лишь порядок малости остаточного члена $r_n(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$

▲ Согласно замечанию в разд. 4.4 функция $y=f(x)$ и все ее производные до порядка $(n-1)$ включительно существуют в окрестности точки x_0 и непрерывны в точке x_0. Положим

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \quad (5.24)$$

$$r_n(x)=f(x)-P(x). \quad (5.25)$$

Аналогично предыдущему из формулы (5.24) получаем

$$P'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1},\ P''(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}$$

и т.д. В общем случае

$$P^{(m)}(x)=\sum_{k=m}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!}(x-x_0)^{k-m},\quad m=0,1,\ldots,\ n. \quad (5.26)$$

При подстановке $x=x_0$ в сумме останется только одно (первое) слагаемое и

$$P^{(m)}(x_0)=f^{(m)}(x_0),\quad m=0,1,\ldots,\ n. \quad (5.27)$$

Из формулы (5.27) следует, что

$$r_n^{(m)}(x_0)=f^{(m)}(x_0)-P^{(m)}(x_0)=0,\quad m=0,1,\ldots,\ n. \quad (5.28)$$

Теперь, используя (5.28), для доказательства нужного нам утверждения применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{r_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\ldots=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)-r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}=\frac{1}{n!}r_n^{(n)}(x_0)=0.$$

(На последнем шаге, добавив член $r_n^{(n-1)}(x_0)=0$, мы вместо правила Лопиталя применили определение производной, ибо непрерывность $r_n^{(n)}(x)$ в точке x_0 нам уже не дана, и переход к $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{1}{n!}r_n^{(n)}(x_0)=0$ был бы неверным.) ■

Для такой формы остаточного члена формула Маклорена принимает вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)=$$
$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n). \quad (5.29)$$

Разложения по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

Применим формулы (5.22) и (5.29) к некоторым функциям:

1. Функция $f(x)=e^x$. Для этой функции

$$f^{(k)}(x)=e^x\Rightarrow f^{(k)}(0)=e^0=1 \text{ и}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{n!}+r_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),$$

где $r_n(x)=o(x^n)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},\ c=\theta x,\ 0<\theta<1.$

Так как наша функция имеет производные всех порядков в любой точке, то формула справедлива для всех x. Применим эту формулу для приближенного вычисления числа e. Подставим в нее $x=1$, возьмем пять членов и отбросим остаточный член. Тогда

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{48+12+4+1}{24}=\frac{65}{24}(\approx 2{,}708).$$

Погрешность результата $\frac{65}{24}$ равна $\frac{e^c}{5!}$, где $c=\theta,\ 0<\theta<1$. Значит, эта погрешность не превосходит $\frac{e}{5!}$. Как доказывалось в разд. 2.5, $e\le 3$, поэтому наша погрешность не превосходит $\frac{3}{5!}=\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{40}$.

2. Функция $f(x)=\sin x$. Для этой функции

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,$$

$$f^{IV}(x)=\sin x,\ldots \overset{\substack{\text{пример 2}\\ \text{разд. 4.4}}}{\Rightarrow} f^{(k)}(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2}k);$$

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,$$

$$f^{IV}(0)=0,\ldots\Rightarrow f^{(k)}(0)=\sin\frac{\pi}{2}k.$$

Таким образом, в формулах (5.22) и (5.29) остаются только члены с нечетными степенями x и они принимают вид

$$\sin x=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+r(x),$$

где $r(x)$ – остаточный член в форме Лагранжа или Пеано. Так как функция имеет производные всех порядков в любой точке, то разложение справедливо для всех x.

3. Функция $f(x)=\cos x$.

Аналогично предыдущему примеру имеем

$$f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'''(x)=\sin x,$$

$$f^{IV}(x)=\cos x,\ldots \overset{\substack{\text{пример 3}\\ \text{разд. 4.4}}}{\Rightarrow} f^{(k)}(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2}k);$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,$$

$$f^{IV}(0)=1,\ldots\Rightarrow f^{(k)}(0)=\cos\frac{\pi}{2}k.$$

Теперь в формулах (5.22) и (5.29) остаются только члены с четными степенями x и они принимают вид

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+r(x),$$

где $r_n(x)$ – остаточный член в форме Лагранжа или Пеано. Так как функция имеет производные всех порядков в любой точке, то разложение справедливо для всех x.

4. Функция $f(x)=\ln(1+x)$. Для этой функции

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},f^{IV}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4},\ldots,$$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)}{(1+x)^k};$$

$$f'(0)=1,f''(0)=-1,f'''(0)=2,f^{IV}(0)=-2\cdot 3,\ \ldots,$$

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

Теперь формулы (5.22) и (5.29) выглядят так:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k+r_n(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+r_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+r_n(x).$$

Здесь $r_n(x)$ – остаточный член в форме Лагранжа или Пеано:

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n n!\,x^{n+1}}{(n+1)!(1+c)^{n+1}}=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},$$

где c – точка между 0 и x, $c=\theta x,\ 0<\theta<1,\ r_n(x)=o(x^n)$.

Наша функция имеет производные любого порядка на интервале $(-1, 1)$ (в точке -1 у функции разрыв), поэтому наше разложение справедливо на этом интервале.

5. Функция $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. Для этой функции

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},\ldots,$$

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k};$$

$$f(0)=1, f'(0)=\alpha, f''(0)=\alpha(\alpha-1), f'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2),\ldots,$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1).$$

Формулы (5.22) и (5.29) имеют вид

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+r_n(x)=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Заметим, что эта формула похожа на формулу бинома Ньютона (1.3) при $a=1$ и $b=x$. При натуральном α и $n=\alpha$ из нее как раз получаем (1.3) $(r_n(x)=0)$.

В частности, при $\alpha=-1$ и $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{1+x}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)(-2)\ldots(-k)}{k!}x^k+r_n(x)=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k!}{k!}x^k+r_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+r_n(x)=$$

$$=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+r_n(x).$$

Заменяя в обеих частях этой формулы x на $-x$, находим, что при $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-x)^k+r_n(-x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k}x^k+r_n(-x)=\sum_{k=0}^{n}x^k+r_n(-x)=$$

$$=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+r_n(-x).$$

Из приведенных выше формул можно получать разложения других функций.

Примеры

1. Разложить по формуле Маклорена функцию $y=\operatorname{sh}x$.

Решение

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k!}\right)+o(x^n)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(x^k-(-1)^k x^k)+o(x^n).$$

(Остаточный член в форме Пеано будет разностью двух бесконечно малых более высокого порядка, чем x^n, т.е. опять будет бесконечно малой более высокого порядка, чем x^n. Для получения разложения функции e^{-x} заменили x на $-x$.)

Выражение под знаком суммы равно 0 при четном k и 2 при k нечетном, $k=2m+1$. Отсюда

$$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{2x^{2m+1}}{(2m+1)!}+r(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+r(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r(x).$$

Аналогично

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{m=0}^{n}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+r(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r(x).$$

2. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Решение

Это есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применение к ней правила Лопиталя потребует взятия четырех производных числителя и знаменателя. Мы найдем этот предел по-другому, используя разложения функций по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4);\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2).$$

Заменим в обеих частях последней формулы x на $-\frac{x^2}{2}$:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + o(x^4).$$

Подставляя в исходный предел и учитывая, что разность двух бесконечно малых вида $o(x^4)$ есть такая же бесконечно малая, получаем, что искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4}{x^4} + \lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^4\right)}{x^4} =$$

$$\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)+0 = -\frac{1-3}{24} = -\frac{1}{12}.$$

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

6.1. Возрастание и убывание функций

Определение 6.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на отрезке $[a, b]$, если для любых точек $x_1, x_2 \in [a,b]$, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на отрезке $[a, b]$, если для любых точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонной* на отрезке $[a, b]$, если она является возрастающей или убывающей на отрезке $[a, b]$.

(При выполнении нестрогих неравенств $f(x_2) \geq f(x_1)$ и $f(x_2) \leq f(x_1)$ соответствующие функции называются неубывающими, невозрастающими и монотонными.)

Теорема 6.1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную во всех внутренних точках этого отрезка. Для того чтобы $f(x) = \text{const}$, $x \in [a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$, $x \in (a,b)$.

▲ *Необходимость.* $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$ (как производная постоянной).

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0$, $x \in (a,b) \Rightarrow$ для $x \in [a,b]$ по теореме Лагранжа (она применима) $\exists\, c \in (a,x)$:

$$f(x) - f(a) = f'(c)\ (x-a) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)$$

для всех $x \in [a,b] \Leftrightarrow f(x) = C.$ ■

Теорема 6.2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную во всех внутренних точках этого отрезка.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была возрастающей на отрезке $[a, b]$, необходимо, чтобы $f'(x) \geq 0$ для $x \in (a,b)$, и достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ для $x \in (a,b)$.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была убывающей на отрезке $[a, b]$, необходимо, чтобы $f'(x) \leq 0$ для $x \in (a,b)$, и достаточно, чтобы $f'(x) < 0$ для $x \in (a,b)$.

▲ *Необходимость.* Пусть $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ для определенности возрастает. Докажем, что тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0,\ x \in (a,b).$$

При $\Delta x > 0$ имеем $f(x+\Delta x) > f(x) \Rightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$ (числитель и знаменатель > 0);

При $\Delta x < 0$ имеем $f(x+\Delta x) < f(x) \Rightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$ (числитель и знаменатель < 0).

Значит, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0.$ Так как предел этой дроби при $\Delta x \to 0$ существует, то $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$ (см. задачу 2 в разд. 2.1).

Заметим, что из того, что функция больше нуля, вовсе не следует, что ее предел, если он существует, тоже больше нуля; он может быть и равен нулю.

Пример. Функция $y = x^3$ возрастает на $[-1,1]$, но $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$ (рис. 25).

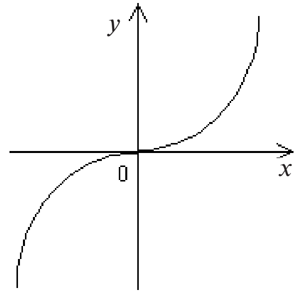


Рис. 25

Достаточность. Пусть для определенности $f'(x) > 0$, $x \in (a,b)$. Пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$ и $x_2 > x_1$. Согласно теореме Лагранжа (она применима) существует $c \in (x_1, x_2)$, такое, что

$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\substack{>0 \text{ по} \\ \text{условию}}}(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a, b]$. ■

6.2. Экстремумы функции

Определение 6.2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0. x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если $f(x) < f(x_0)$ для всех точек x, достаточно близких к x_0, т.е. для $x: 0 < |x - x_0| < \delta$, где δ достаточно мало. x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если $f(x) > f(x_0)$ для всех точек x, достаточно близких к x_0, т.е. для $x: 0 < |x - x_0| < \delta$, где δ достаточно мало. Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума* этой функции (рис. 26).

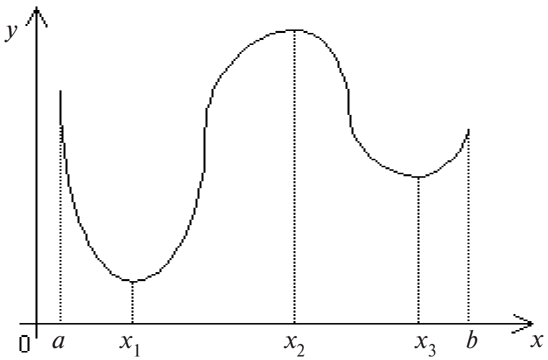


Рис. 26

При таком графике функция $y = f(x)$ будет иметь на отрезке $[a,b]$ одну точку максимума и две точки минимума.

Теорема 6.3 (необходимое условие экстремума). Пусть x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$. Тогда $f'(x_0) = 0$ или не существует (в частности, равна ∞).

▲ Пусть для определенности x_0 – точка максимума функции $\Rightarrow$ $f(x) < f(x_0)$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0. Возьмем любой отрезок, принадлежащий этой окрестности, у которого x_0 является внутренней точкой. Тогда на этом отрезке функция принимает наибольшее значение во внутренней точке x_0, значит, согласно теореме Ферма 5.1, если существует конечная производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$. ■

Замечание 1. Производная в точке экстремума может действительно не существовать (см. график функции $y = |x|$ на рис.21) и, как частный случай этого, может равняться ∞ (см. график функции на рис. 22, в котором касательная в точке 0 вертикальна, т.е. $f'(0) = \infty$).

Определение 6.3. Точки, в которых производная функции равна 0 или не существует, называются *критическими* точками этой функции.

Замечание 2. Пример функции $y = x^3$ (рис. 25) показывает, что теорема, обратная к теореме 6.3, неверна: производная этой функции в точке 0 равна 0, а экстремума у функции в этой точке нет.

Теорема 6.4 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в окрестности точки x_0 и пусть в этой окрестности, кроме, может быть, самой точки x_0, существует конечная производная $f'(x)$. Тогда:

1) если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак «+» на знак «–», то x_0 – точка максимума функции $y = f(x)$;

2) если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак «–» на знак «+», то x_0 – точка минимума функции $y = f(x)$;

3) если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ знака не меняет, то экстремума у функции в точке x_0 нет.

На рис. 27 и 28 изображены знаки производной $f'(x)$ и (стрелочками) интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$.

▲ 1. Для x, достаточно близких к x_0, по теореме Лагранжа имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \qquad (6.1)$$

где c лежит между x_0 и x. Рассмотрим два случая:

а) $x < x_0 \Rightarrow c < x_0 \Rightarrow f'(c) > 0$;

$$x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0);$$

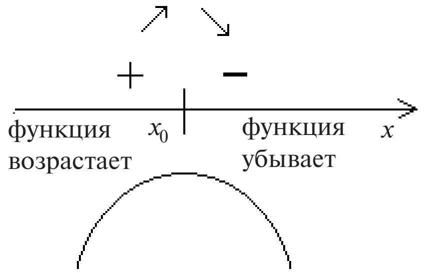


Рис. 27

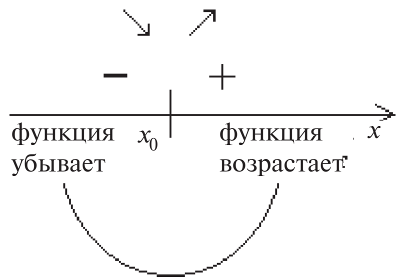


Рис. 28

б) $x > x_0 \Rightarrow c > x_0 \Rightarrow f'(c) < 0$;

$$x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

То есть $f(x) < f(x_0)$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0: $x \neq x_0 \Rightarrow x_0$ – точка максимума функции $y = f(x)$.

2. Аналогично пункту 1.

3. Если, например, $f'(x) > 0$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0: $x \neq x_0$, то в формуле (6.1) $f'(c) > 0$, значит,

при $x < x_0$ $f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$,

при $x > x_0$ $f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$,

т. е. экстремума у функции в точке x_0 нет. ■

Замечание. Условие непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 (без которого, кстати, нельзя применять теорему Лагранжа) существенно для справедливости теоремы, что показывает приведенный ниже пример (рис. 29).

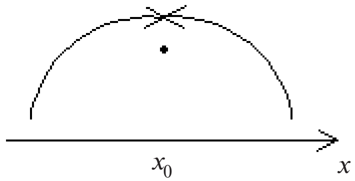


Рис. 29

В этом примере производная меняет знак при переходе через x_0 слева направо с «+» на «–», но в окрестности точки x_0 будем иметь $f(x) > f(x_0)$, т.е. x_0 – точка минимума функции.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

Решение

$$y' = 2 + 3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Согласно необходимому условию экстремума он может быть только в критических точках функции, т.е. в точках, где производная равна 0 ($\sqrt[3]{x} + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$) или не существует ($x = 0$; точнее, в этой точке $y' = \infty$, следовательно, касательная вертикальна).

Теперь проверим, выполняется ли достаточное условие экстремума. Знаки y' показаны на рис. 30.

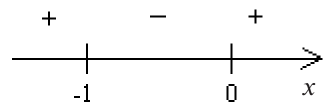


Рис. 30

Здесь $x = -1$ – точка максимума, а $x = 0$ – точка минимума функции: $f(-1) = -2 + 3 = 1$, $f(0) = 0$.

Найдем точки пересечения графика функции с осью $0x$ и построим (не исследуя пока поведение функции при $x \to \infty$) ее график (рис. 31):

$$2x + 3\sqrt[3]{x^2} = 0;\ \sqrt[3]{x^2}(2\sqrt[3]{x} + 3) = 0;\ x_1 = 0;\ \sqrt[3]{x_2} = -\frac{3}{2},\ x_2 = -\frac{27}{8}.$$

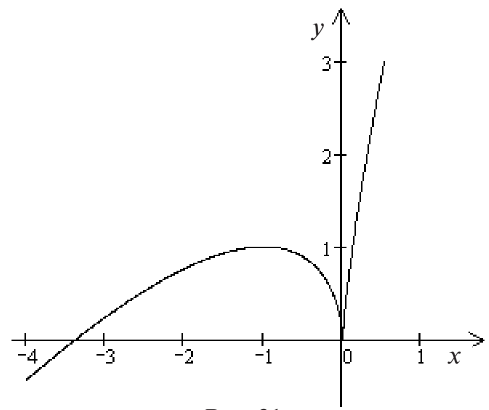


Рис. 31

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков

Теорема 6.5. Пусть в некоторой точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет все производные до порядка n, $n \geq 2$ включительно и

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0,\dots,\ f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда:

1) если n четно и $f^{(n)}(x_0)>0,$ то x_0 – точка минимума функции $y=f(x)$;

2) если n четно и $f^{(n)}(x_0)<0,$ то x_0 – точка максимума функции $y=f(x)$;

3) если n нечетно, то экстремума у функции в точке x_0 нет.

В окрестности точки x_0 разложим функцию по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (5.23), которую, выделив первый член, можно записать в виде

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

или

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

В этой формуле по условию теоремы лишь последнее слагаемое под знаком суммы отлично от 0. Поэтому можно записать:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \qquad (6.2)$$

Для доказательства теоремы надо определить знак левой, а значит, правой части этой формулы. Так как число $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\neq 0,$ то второй член правой части есть $o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)$ и при x, близких к x_0, не превосходит, например, половины первого члена. Отсюда следует, что знак правой части совпадает со знаком первого ее члена $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$

Теперь рассмотрим все три случая в условии теоремы:

1) n четно $\Rightarrow (x-x_0)^n>0$ для всех x;

$$f^{(n)}(x_0)>0\Rightarrow\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)>0\Rightarrow f(x)-f(x_0)>0\Rightarrow f(x)>f(x_0)\Rightarrow$$

x_0 – точка минимума функции $y=f(x)$;

2) аналогично $f(x)<f(x_0)\Rightarrow x_0$ – точка максимума функции $y=f(x)$;

3) знаки $(x-x_0)^n$ и $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ будут меняться при переходе x через точку x_0, следовательно, с одной стороны этой точки $f(x)>f(x_0)$, а с другой стороны– $f(x)<f(x_0)$, значит, экстремума у функции $f(x)$ в точке x_0 нет. ■

Следствие. При $n=2$ теорема принимает вид:

Пусть в некоторой точке x_0 функция $y=f(x)$ имеет первую $f'(x_0)$ и вторую $f''(x_0)$ производные и $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0.$ Тогда, если $f''(x_0)>0,$ то x_0 – точка минимума функции, а если $f''(x_0)<0,$ то x_0 – точка максимума функции.

Примеры. Исследовать функции на экстремум.

Решение

1. $f(x)=\sin x+\cos x\Rightarrow f'(x)=\cos x-\sin x=0;\ \sin x=\cos x;$

$\mathrm{tg}x=1;\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

Эту серию можно разбить на две:

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n \text{ и } x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ f''(x)=-\sin x-\cos x;$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}<0\overset{\text{следствие}}{\Rightarrow} \text{ это точки максимума функции;}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>0\overset{\text{следствие}}{\Rightarrow} \text{ это точки минимума функции.}$$

2. $f(x)=\mathrm{ch}x+\cos x\Rightarrow f'(x)=\mathrm{sh}x-\sin x=0;$ все решения этого уравнения найти невозможно, но очевидно, что одним из решений будет $x=0$. Исследуем функцию на экстремум в этой точке:

$$f''(x)=\mathrm{ch}x-\cos x;\ f''(0)=1-1=0,$$

т.е. следствие уже не применимо. Попробуем применить саму теорему:

$$f'''(x)=\mathrm{sh}x+\sin x,\ f'''(0)=0;\ f^{\mathrm{IV}}(x)=\mathrm{ch}x+\cos x,\ f^{\mathrm{IV}}(0)=1+1=2>0.$$

Значит ($n=4$ – четно и $f^{\mathrm{IV}}(0)>0$) $x=0$ – точка минимума функции.

6.3. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Как указано в теореме 3.7, любая непрерывная на отрезке функция $y = f(x)$ принимает в некоторых точках этого отрезка свои наибольшее и наименьшее значения. Пусть x_0 – одна из этих точек. Возможны два варианта: а) x_0 – край отрезка; б) x_0 – внутренняя точка отрезка, в этом случае по теореме Ферма 5.1 $f'(x_0) = 0$ или не существует, т.е. x_0 – критическая точка.

Таким образом, для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, нужно найти все критические точки функции, принадлежащие этому отрезку, вычислить значения функции в этих точках и на краях отрезка и взять наибольшее и наименьшее из этих значений.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $x \in [-2,0]$.

Решение

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0;\ x^2 - x - 2 = 0;\ x_1 = -1,\ x_2 = 2 \notin [-2,0];$$

$$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8;\ f(-2) = -16 - 12 + 24 + 1 = -3;\ f(0) = 1.$$

Значит, наибольшее значение функции на $[-2,0]$ равно 8, а наименьшее равно -3.

Заметим, что при таком решении даже не надо проверять достаточные условия экстремума функции.

Отметим, что если точка экстремума функции на отрезке единственна, то в точке максимума функция принимает наибольшее, а в точке минимума – наименьшее значение. В таких случаях проверка достаточных условий экстремума может оказаться полезной (заменяя вычисление значений функции на краях отрезка – см. рис. 32).

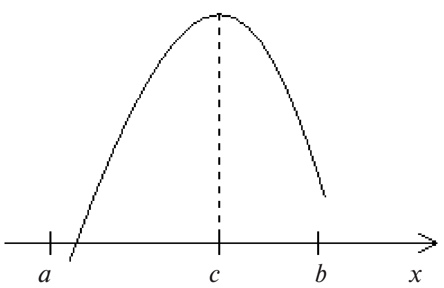


Рис. 32

6.4. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Определение 6.4. Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема (т.е. имеет конечную производную) в некоторой окрестности точки x_0. Рассмотрим график этой функции.

Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой* (или обращена выпуклостью вверх) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, если для x, близких к x_0, все точки кривой лежат под касательной, проведенной в точке M_0, или ординаты точек кривой меньше ординат точек касательной с той же абсциссой (рис. 33).

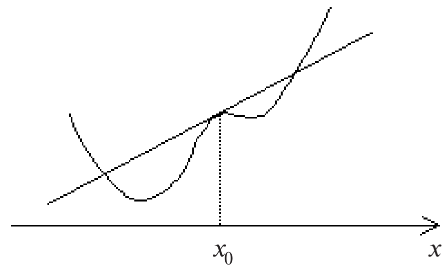


Рис. 33

Кривая $y = f(x)$ называется *вогнутой* (или обращена выпуклостью вниз) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, если для x, близких к x_0, все точки кривой лежат над касательной, проведенной в точке M_0, или ординаты точек кривой больше ординат точек касательной с той же абсциссой (рис. 34).

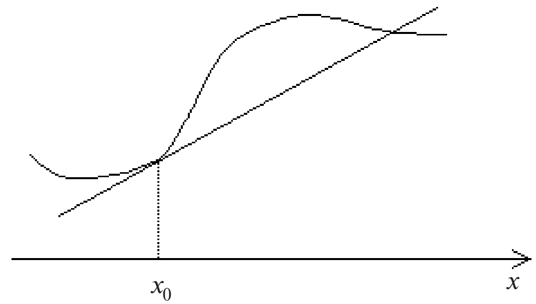


Рис. 34

Теорема 6.6. Пусть в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет конечную вторую производную $f''(x_0) \neq 0$. Тогда:

1) если $f''(x_0) > 0$, то кривая $y = f(x)$ вогнута в точке $M_0(x_0, f(x_0))$;

2) если $f''(x_0) < 0$, то кривая $y = f(x)$ выпукла в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

▲ $f''(x_0)$ существует и конечна, следовательно, $f(x)$ и $f'(x)$ существуют в окрестности точки x_0. Уравнение касательной к кривой в этой точке имеет вид

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.3}$$

В окрестности точки x_0 разложим функцию по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, записав три первых члена и остаточный член:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2). \tag{6.4}$$

Вычтем из равенства (6.4) равенство (6.3):

$$f(x) - y_{\text{кас}} = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2). \tag{6.5}$$

Для доказательства теоремы нам надо определить знак левой, а значит, правой части этого равенства. Будем рассуждать так же, как и при доказательстве теоремы 6.5: при $f''(x_0) \neq 0$ второй член правой части есть $o\left(\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2\right)$ и при x, близких к x_0, не превосходит, например, половины первого члена. Тогда знак правой части совпадает со знаком первого ее члена $\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$. В этом члене $(x - x_0)^2 > 0$ при $x \neq x_0$, значит, знак левой части $f(x) - y_{\text{кас}}$ совпадает со знаком $f''(x_0)$.

Если $f''(x_0) > 0$, то $f(x) - y_{\text{кас}} > 0 \Rightarrow f(x) > y_{\text{кас}}$ и кривая в окрестности x_0 лежит над касательной, значит, она вогнута в точке M_0.

Если $f''(x_0) < 0$, то $f(x) - y_{\text{кас}} < 0 \Rightarrow f(x) < y_{\text{кас}}$ и кривая в окрестности точки x_0 лежит под касательной, значит, она выпукла в точке M_0.

Определение 6.5. Кривая называется *выпуклой* (*вогнутой*) на некотором интервале, если она *выпукла* (*вогнута*) в каждой точке этого интервала.

Определение 6.6. Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* кривой $y = f(x)$, если в любой окрестности x_0

есть точки кривой, лежащие как над, так и под касательной к кривой, проведенной в точке M_0 (рис. 35).

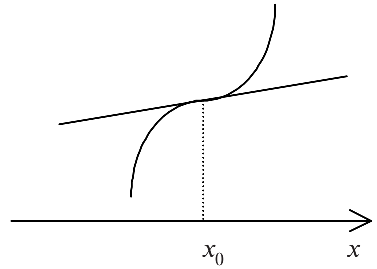


Рис. 35

В точке перегиба кривая пересекает касательную. Точка перегиба является границей между интервалами выпуклости и вогнутости графика функции.

Теорема 6.7 (необходимое условие перегиба). Пусть $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$ или не существует (в частности, равна ∞).

▲ Пусть существует конечная $f''(x_0) \neq 0$. Тогда по теореме 6.6 кривая $y = f(x)$ выпукла (при $f''(x_0) < 0$) или вогнута (при $f''(x_0) > 0$), что противоречит условию теоремы. ■

Замечание. Пример всюду вогнутой кривой $y = f(x) = x^4$ (рис. 36), у которой $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, показывает, что теорема, обратная к теореме 6.7 неверна.

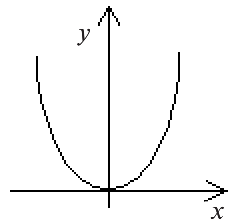


Рис. 36

Теорема 6.8 (достаточные условия перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Пусть в этой окрестности, кроме самой точки x_0, функция имеет вторую производную $f''(x)$. Если при переходе через точку x_0 эта вторая производная меняет знак, то $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$. Если при переходе через точку x_0 вторая производная знака не меняет, то перегиба у функции в точке M_0 нет.

▲ Используя уравнение касательной (4.2), имеем

$$f(x) - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применим к разности $f(x) - f(x_0)$ теорему Лагранжа (5.4):

$$f(x) - y_{\text{кас}} = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

где точка ξ лежит между x_0 и x. Вынесем $(x-x_0)$ за скобки:

$$f(x)-y_{\text{кас}}=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0).$$

Применим теорему Лагранжа еще раз, теперь к разности $f'(\xi)-f'(x_0)$:

$$f(x)-y_{\text{кас}}=f''(\eta)(\xi-x_0)(x-x_0), \tag{6.6}$$

где η лежит между x_0 и ξ.

В формуле (6.6) если $x>x_0$, то $\xi>x_0$ и $\eta>x_0$, а если $x<x_0$, то $\xi<x_0$ и $\eta<x_0$ $\Rightarrow(\xi-x_0)(x-x_0)>0$ при $x\neq x_0$ и знак левой части формулы (6.6) совпадает со знаком $f''(\eta)$.

Пусть при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, тогда при таком переходе меняет знак и $f''(\eta)$, а значит, и левая часть формулы (6.6). Таким образом, с одной стороны точки x_0 кривая лежит над касательной, а с другой стороны точки x_0 кривая лежит под касательной. Значит, $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба нашей кривой.

Если же при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ знака не меняет, то аналогичное рассуждение приводит к тому, что с обеих сторон точки x_0 кривая лежит либо над, либо под касательной, т.е. перегиба в точке M_0 не имеет. ■

Пример. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой $y=x+\sqrt[3]{(x-1)^5}$.

Решение

$y'=1+\frac{5}{3}\sqrt[3]{(x-1)^2}$; $y''=\frac{5\cdot 2}{3\cdot 3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$; $y''\neq 0$ и не существует в точке $x=1$; в этой точке $y=1$, а угловой коэффициент касательной $y'=1$; знаки y'' показаны на рис. 37.

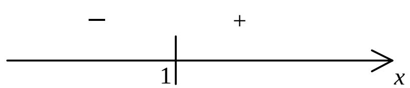


Рис. 37

Значит, на интервале $(-\infty,1)$ кривая выпукла, на интервале $(1,+\infty)$ — вогнута, а точка с координатами $(1,1)$ является точкой ее перегиба.

График функции в окрестности точки $x_0=1$ представлен на рис. 38.

Замечание. Теорема 6.8 справедлива и если $f'(x_0)=\infty$, т.е. касательная в этой точке вертикальна (рис. 39).

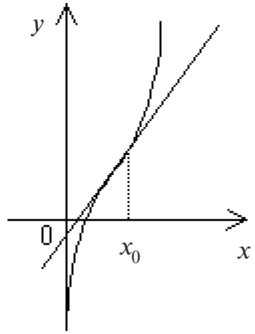


Рис. 38

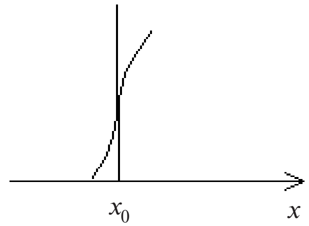


Рис. 39

6.5. Асимптоты графика функции

Пусть $y=f(x)$ — некоторая кривая и M — точка на этой кривой. Мы будем говорить, что точка M движется вдоль кривой в бесконечность, если расстояние от M до начала координат стремится к ∞ при движении M вдоль кривой.

Определение 6.7. Если расстояние d от точки M кривой до некоторой прямой стремится к 0 при движении точки M вдоль кривой в бесконечность, то такая прямая называется *асимптотой* данной кривой.

Асимптоты делятся на вертикальные и наклонные (в частности, горизонтальные).

1. *Вертикальные* асимптоты задаются уравнениями $x=a$ (рис. 40).

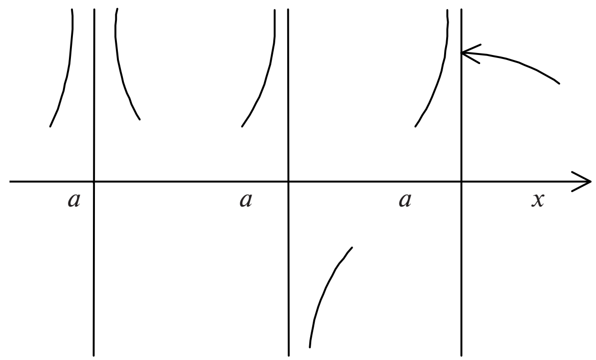


Рис. 40

Из рис. 40 очевидна следующая теорема.

Теорема 6.9. Прямая $x = a$ будет асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда, и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, или то и другое сразу.

2. *Наклонные* и *горизонтальные* асимптоты задаются уравнениями $y = kx + b$ и могут быть различными при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ ($k = 0$ – асимптота горизонтальна).

Теорема 6.10. Для того чтобы прямая $Y = kx + b$ являлась асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы k и b удовлетворяли условиям:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}; \tag{6.7}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx). \tag{6.8}$$

Аналогично при $x \to -\infty$.

▲ Обозначим ординату точки кривой M с абсциссой x как $y = f(x)$, ординату точки прямой с той же абсциссой – как $Y = kx + b$, расстояние от точки M до прямой – как $d = d(x)$. Тогда

$$d = |y - Y| \cos\varphi, \tag{6.9}$$

где φ – угол между осью y и перпендикуляром к прямой (рис. 41). Существование асимптоты равносильно выполнению условия

$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0. \tag{6.10}$$

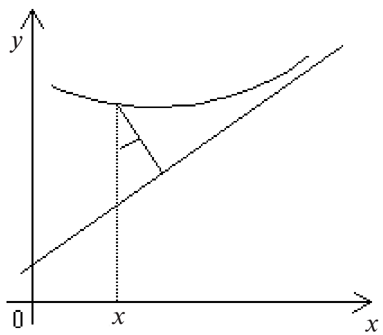


Рис. 41

В формуле (6.9) $\cos\varphi$ – постоянное, не зависящее от x число; так как наша прямая не вертикальна, то $\varphi \ne \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi \ne 0$. Значит, условие (6.10) равносильно условию $\lim\limits_{x\to+\infty} |y - Y| = 0$ или условию

$$\lim_{x\to+\infty} (y - Y) = 0. \tag{6.11}$$

Необходимость. Пусть прямая $Y = kx + b$ – асимптота графика функции $y = f(x)$, значит, выполняется условие (6.11), или, что то же самое,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0. \tag{6.12}$$

Отсюда

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) - \lim_{x\to+\infty} b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) - b =$$

$$= 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \Rightarrow (6.8) \text{ верно.}$$

Из формулы (6.12) также следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - kx - b}{x} \overset{\frac{0}{\infty}}{=} 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} k -$$

$$- \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \Rightarrow \text{верно (6.7).}$$

Достаточность. Пусть для некоторой прямой $Y = kx + b$ ее k и b удовлетворяют условиям (6.7) и (6.8), следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) - \lim_{x\to+\infty} b =$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) - b = 0 \Rightarrow \text{верно (6.12),}$$

т.е. прямая $Y = kx + b$ действительно является асимптотой графика $y = f(x)$. ■

Процедура нахождения наклонных и горизонтальных асимптот такова: по формуле (6.7) находим k, подставляем это k в формулу (6.8) и находим b. Если хоть один из пределов в (6.7) и (6.8) бесконечен или не существует, то асимптоты нет.

6.6. Примерная схема общего исследования функции и построения ее графика

1. Найти область определения функции и выяснить поведение функции на ее границе.

2. Выяснить, не является ли функция четной: $f(-x)=f(x)$ или нечетной: $f(-x)=-f(x)$. Для таких функций достаточно построить график для $x \geq 0$, а затем отразить: для четных функций – относительно оси $0y$, а для нечетных функций – относительно начала координат.

3. Выяснить, не является ли функция периодической: $f(x+T)=$ $=f(x)$. Для такой функции с периодом T достаточно построить график на любом интервале длиной в период, а затем продолжить периодически.

4. Найти точки пересечения графика с осями координат, взяв $x=0$ или $y=0$.

5. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов.

6. Найти асимптоты графика функции.

7. Установить интервалы возрастания и убывания функции. Найти точки экстремума, выяснить значения функции в этих точках.

8. Установить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Найти точки перегиба графика, выяснить значения функции и ее первой производной в этих точках.

9. Построить график функции.

При необходимости уточнить отдельные участки кривой, можно вычислить координаты нескольких ее дополнительных точек.

Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ и построить ее график.

Решение

1. Область определения функции

$$x \neq 2; \quad \lim_{x\to -2+0}\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2-0}\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}=+\infty.$$

2. Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция не является периодической.

4. Пусть $x=0 \;\Rightarrow\; y=\dfrac{27}{4}$; $\;y=0 \;\Rightarrow\; x=-3$.

5. В точке $x=-2$ – разрыв; из п. 1 следует, что этот разрыв – второго рода.

6. Из этого же пункта следует, что прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой графика функции. Найдем наклонные асимптоты, учитывая, что пределы при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ здесь ничем не отличаются:

$$k \overset{(6.7)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2 x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^3}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^2}=1$$

(числитель и знаменатель разделили на x^3);

$$b \overset{(6.8)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+9x^2+27x+27-x^3-4x^2-4x}{x^2+4x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+23x+27}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{23}{x}+\dfrac{27}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=5 \Rightarrow y=x+5 \text{ – асимптота при } x\to\pm\infty.$$

7. Найдем производную функции:

$$y'=\frac{3(x+3)^2(x+2)^2-(x+3)^3 2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{(x+3)^2(x+2)(3(x+2)-2(x+3))}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{(x+3)^2(3x+6-2x-6)}{(x+2)^3}=\frac{(x+3)^2 x}{(x+2)^3};$$

критические точки функции $x=0$, $x=-3$ (в этих двух точках производная равна 0) и $x=-2$ (это точка разрыва функции); знаки y' показаны на рис. 42.

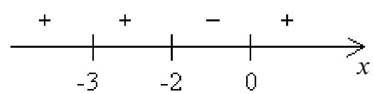


Рис. 42

Значит, на интервалах $(-\infty,-3),(-3,-2)$ и $(0,+\infty)$ функция возрастает, а на интервале $(-2,0)$ она убывает; точка $x=0$ является точкой минимума функции, $f(0)=\dfrac{27}{4}$; в точке разрыва $x=-2$ будет «бесконечный максимум», а в точке $x=-3$ экстремума нет, хотя и $f'(-3)=0$ (т.е. касательная в этой точке горизонтальна).

8. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{(2(x+3)x+(x+3)^2)(x+2)^3 - (x+3)^2 x 3(x+2)^2}{(x+2)^6} =$$

$$= \frac{(x+2)^2(x+3)((2x+x+3)(x+2)-(x+3)x3)}{(x+2)^6} = \frac{(x+3)(3(x+1)(x+2)-3x(x+3))}{(x+2)^4} =$$

$= \dfrac{3(x+3)(x^2+3x+2-x^2-3x)}{(x+2)^4} = \dfrac{6(x+3)}{(x+2)^4}$. Знаки y'' показаны на рис. 43.

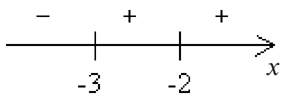


Рис. 43

Таким образом, наша кривая выпукла на интервале $(-\infty,-3)$ и вогнута на интервалах $(-3,-2),(-2,+\infty)$; $x=-3$ является абсциссой точки перегиба; в этой точке $y=0$ и $y'=0$.

9. Теперь построим график исходной функции (рис. 44).

Ответ на вопрос, сверху или снизу график приближается к асимптоте, зависит от наличия или отсутствия у графика соответствующих точек перегиба. Если бы график подходил к асимптоте при $x \to +\infty$ снизу или при $x \to -\infty$ сверху, то в дополнение к точке -3 кривая имела бы другие точки перегиба, что не было подтверждено нашими вычислениями.

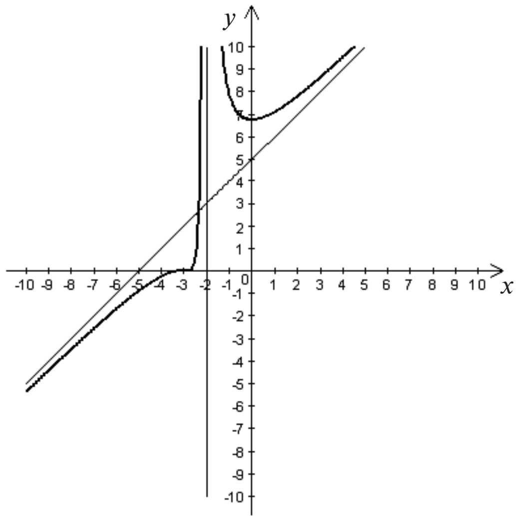


Рис. 44

7. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

7.1. Определение векторной функции скалярного аргумента

Уравнения линии в пространстве

Пусть A (x, y, z) — некоторая точка в пространстве. Вектор $\bar{r} = \overline{OA} = \{x, y, z\} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ называется радиусом-вектором точки A.

Пусть координаты точки A (или, что то же самое, координаты вектора $\bar{r}$) являются функциями некоторого параметра t:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases} \tag{7.1}$$

Тогда $\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$, или

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \tag{7.2}$$

т. е. вектор $\bar{r}$ зависит от t. При изменении t изменяются координаты x, y, z, и точка A — конец вектора $\bar{r}$ — опишет в пространстве некоторую линию.

Определение 7.1. Уравнения (7.1) называются *параметрическими уравнениями* линии в пространстве (задаются координаты точек линии как функции параметра t), уравнение (7.2) называется *векторным уравнением* линии в пространстве (задается радиус-вектор $\bar{r} = \bar{r}(t)$). Если $t \in [a, b]$, то этим задается начало и конец линии.

Уравнения (7.1) являются аналогом параметрических уравнений кривой на плоскости, разобранных в разд. 4.5.

Примеры векторных функций скалярного аргумента.

1. $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ — канонические уравнения прямой линии в пространстве. Напишем параметрические уравнения этой прямой:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = at \end{cases}$

– так называемая винтовая линия $\Rightarrow\ x^2 + y^2 = a^2$, т.е. x и y как бы «пробегают» окружность, а с увеличением t координата z все время растет. При $t = 0$ имеем $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 45).

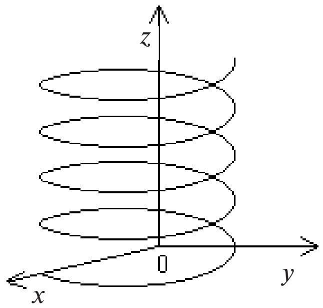


Рис. 45

Задание линии в пространстве параметрическими уравнениями наиболее удобный, но не единственный способ. Кривая может быть задана как линия пересечения двух поверхностей. Например, прямую линию можно задать как линию пересечения двух плоскостей.

Векторная функция скалярного аргумента

Вернемся к формуле (7.2)

$$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k},\ \text{или}\ \bar{r} = \bar{r}(t).$$

При изменении t изменяются координаты x, y, z вектора $\bar{r}$, т.е. изменяется сам вектор $\bar{r}$.

Определение 7.2. Пусть каждому значению t из некоторого множества чисел T соответствует определенный вектор трехмерного пространства $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Тогда говорят, что задана векторная функция (вектор-функция) скалярного аргумента с областью определения T.

Понятие векторной функции скалярного аргумента является частным случаем общего понятия функции, введенного в разд. 1.4.

Таким образом, формула (7.2) задает векторную функцию скалярного аргумента. Задание такой функции равносильно заданию трех скалярных функций: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Пример. Параметрические уравнения прямой линии

$$x = x_0 + lt,\quad y = y_0 + mt,\quad z = z_0 + nt$$

можно записать так:

$$\bar{r} = (x_0 + lt)\bar{i} + (y_0 + mt)\bar{j} + (z_0 + nt)\bar{k} = (x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}) + (l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k})t \Rightarrow$$

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{s}t,$$

где $\bar{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ – постоянный вектор, а $\bar{s} = \{l, m, n\}$ – направляющий вектор прямой линии.

7.2. Предел векторной функции скалярного аргумента

По аналогии с пределом скалярной функции дается следующее определение.

Определение 7.3. Пусть дана вектор-функция скалярного аргумента $\bar{r} = \bar{r}(t)$, т.е.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in T. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Пусть $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ – некоторый фиксированный вектор. Предел

$$\lim_{t\to a} \bar{r}(t) = \bar{b},\ \text{если}\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall t, 0 < |t - a| < \delta\ \left(\left|\bar{r}(t) - \bar{b}\right| < \varepsilon\right).$$

Здесь $\left|\bar{r}(t) - \bar{b}\right|$ – модуль разности двух векторов. То есть последнее неравенство можно записать в виде

$$\sqrt{\left[x(t) - b_x\right]^2 + \left[y(t) - b_y\right]^2 + \left[z(t) - b_z\right]^2} < \varepsilon. \tag{7.3}$$

Теорема 7.1. Для того чтобы $\lim\limits_{t\to a} \bar{r}(t) = \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{t\to a} x(t) = b_x$, $\lim\limits_{t\to a} y(t) = b_y$, $\lim\limits_{t\to a} z(t) = b_z$.

▲ *Необходимость.* Пусть

$$\lim_{t\to a} \bar{r}(t) = \bar{b} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall t, 0 < |t - a| < \delta$$

$$\left(\sqrt{\left[x(t) - b_x\right]^2 + \left[y(t) - b_y\right]^2 + \left[z(t) - b_z\right]^2} < \varepsilon \Rightarrow\right.$$

$$\sqrt{\left[x(t)-b_x\right]^2}<\varepsilon \Rightarrow |x(t)-b_x|<\varepsilon\Bigg) \Rightarrow \lim_{t\to a} x(t)=b_x.$$

Аналогично для двух других координат.

Достаточность. Для $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: \ 0<|t-a|<\delta$

$$\left(\left|x(t)-b_x\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \ \left|y(t)-b_y\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \ \left|z(t)-b_z\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)$$

(точнее, для каждой из переменных x, y и z будут свои δ_x, δ_y, δ_z, а в качестве δ берется наименьшее из этих чисел), тогда

$$\sqrt{\left[x(t)-b_x\right]^2+\left[y(t)-b_y\right]^2+\left[z(t)-b_z\right]^2}<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{\varepsilon^2}{3}}=\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon. \blacksquare$$

Используя эту теорему и аналогичные свойства пределов скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, можно доказать свойства пределов векторных функций:

1) $\lim\limits_{t\to a}\left[\overline{r}_1(t)\pm\overline{r}_2(t)\right]=\lim\limits_{t\to a}\overline{r}_1(t)\pm\lim\limits_{t\to a}\overline{r}_2(t)$, если пределы в правой части существуют;

2) $\lim\limits_{t\to a}\left[c\overline{r}(t)\right]=c\lim\limits_{t\to a}\overline{r}(t)$, если предел в правой части существует.

▲ Пусть, например,

$$\overline{r}_1(t)=\{x_1(t),y_1(t),z_1(t)\}, \quad \lim_{t\to a}\overline{r}_1(t)=\overline{b_1}=\{b_x^1,b_y^1,b_z^1\},$$

$$\overline{r}_2(t)=\{x_2(t),y_2(t),z_2(t)\}, \quad \lim_{t\to a}\overline{r}_2(t)=\overline{b_2}=\{b_x^2,b_y^2,b_z^2\},$$

тогда из необходимости условий теоремы 7.1 следует, что

$$\lim_{t\to a}x_1(t)=b_x^1, \quad \lim_{t\to a}y_1(t)=b_y^1, \quad \lim_{t\to a}z_1(t)=b_z^1,$$

$$\lim_{t\to a}x_2(t)=b_x^2, \quad \lim_{t\to a}y_2(t)=b_y^2, \quad \lim_{t\to a}z_2(t)=b_z^2.$$

Так как

$$\overline{r}_1(t)+\overline{r}_2(t)=\left\{x_1(t)+x_2(t),y_1(t)+y_2(t),z_1(t)+z_2(t)\right\}$$

и

$$\lim_{t\to a}[x_1(t)+x_2(t)]=\lim_{t\to a}x_1(t)+\lim_{t\to a}x_2(t)=b_x^1+b_x^2$$

(аналогично для y и z), то из достаточности условий теоремы 7.1 следует, что существует

$$\lim_{t\to a}[\overline{r}_1(t)+\overline{r}_2(t)]=\left\{b_x^1+b_x^2, \ b_y^1+b_y^2, \ b_z^1+b_z^2\right\}=\overline{b_1}+\overline{b_2}.$$

Аналогично проверяется второе свойство. ■

7.3. Непрерывность векторной функции скалярного аргумента

По аналогии с непрерывностью скалярной функции дается следующее определение.

Определение 7.4. Пусть имеется векторная функция скалярного аргумента $\overline{r}=\overline{r}(t)$, или

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

Она называется непрерывной в точке $t=t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r}(t)=\overline{r}(t_0)$.

В силу теоремы 7.1, это определение равносильно тому, что

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x(t_0), \quad \lim_{t\to t_0}y(t)=y(t_0), \quad \lim_{t\to t_0}z(t)=z(t_0).$$

То есть вектор-функция $\overline{r}=\overline{r}(t)$ непрерывна в точке $t=t_0$ тогда, и только тогда, когда в этой точке непрерывны скалярные функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

Из определения 7.4 и свойств пределов векторных функций скалярного аргумента точно так же, как для скалярных функций, следует, что:

1) сумма непрерывных (при $t=t_0$) вектор-функций есть непрерывная вектор-функция (при $t=t_0$);

2) произведение непрерывной (при $t=t_0$) вектор-функции на постоянное число есть непрерывная вектор-функция (при $t=t_0$).

7.4. Производная векторной функции скалярного аргумента

Определение 7.5. Пусть дана векторная функция скалярного аргумента $\overline{r}=\overline{r}(t)$, или

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Производной этой функции (в некоторой точке t) называется вектор

$$\bar{r}'(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}, \qquad (7.4)$$

если этот предел существует.

В формуле (7.4) $\dfrac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \underbrace{\dfrac{1}{\Delta t}}_{\text{число}} \left[\underbrace{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}_{\text{вектор}} \right]$ — некоторая вектор-функция скалярного аргумента Δt; рассматривается ее предел при $\Delta t \to 0$; $\bar{r}'(t)$ (если она существует) снова является вектор-функцией скалярного аргумента t.

Так как действиям над векторами соответствуют аналогичные действия над их координатами, то

$$\frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \left\{ \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right\}.$$

По теореме 7.1 о пределе вектор-функции $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ существует тогда, и только тогда, когда существуют

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t), \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = y'(t),$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = z'(t)$$

и при этом $\bar{r}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7.2. Производная вектор-функции скалярного аргумента $\bar{r}'(t) = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ в некоторой точке t существует тогда, и только тогда, когда в этой точке существуют три производных: $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, и при этом $\bar{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$, или $\dfrac{dr}{dt} = \left\{ \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt} \right\}$.

Отметим некоторые свойства производных вектор-функций скалярного аргумента:

1) $\dfrac{d\left[\bar{r}_1(t) \pm \bar{r}_2(t)\right]}{dt} = \dfrac{d\bar{r}_1(t)}{dt} \pm \dfrac{d\bar{r}_2(t)}{dt}$, если производные справа существуют;

2) $\dfrac{d\left[c\bar{r}(t)\right]}{dt} = c\dfrac{d\bar{r}(t)}{dt}$, где c — постоянная (если производная справа существует).

▲ Проверим, например, одну из этих формул:

$$\frac{d\left[\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)\right]}{dt} = \left\{ \frac{d\left[x_1(t) + x_2(t)\right]}{dt}, \frac{d\left[y_1(t) + y_2(t)\right]}{dt}, \frac{d\left[z_1(t) + z_2(t)\right]}{dt} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{dy_2(t)}{dt}, \frac{dz_1(t)}{dt} + \frac{dz_2(t)}{dt} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dy_1(t)}{dt}, \frac{dz_1(t)}{dt} \right\} + \left\{ \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dy_2(t)}{dt}, \frac{dz_2(t)}{dt} \right\} = \frac{d\bar{r}_1(t)}{dt} + \frac{d\bar{r}_2(t)}{dt}. \ \blacksquare$$

Геометрический смысл производной (рис. 46)

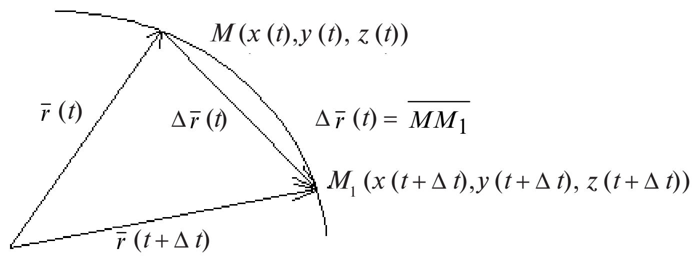


Рис. 46

По определению $\bar{r}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{r}(t)}{\Delta t}$; $\Delta \bar{r}(t) = \overline{MM_1}$; вектор $\dfrac{\Delta \bar{r}(t)}{\Delta t}$ направлен вдоль прямой MM_1. При $\Delta t \to 0$ точка M_1 приближается к точке M, так как из существования $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ следует непрерывность $x(t)$,

$y(t)$, $z(t)$, а значит, и непрерывность вектор-функции $\bar{r}(t)$ в соответствующей точке t.

Определение 7.6. Как и на плоскости, касательной к кривой в некоторой точке M называется предельное положение секущей MM_1 при $M_1 \to M$, если такое существует.

Из только что приведенных рассуждений следует, что если $\bar{r}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{r}(t)}{\Delta t}$ существует и отличен от нуля, то в соответствующей точке $M(x(t), y(t), z(t))$ кривая имеет касательную и вектор $\bar{r}'(t) = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ направлен по касательной к кривой в точке M.

Уравнения касательной к пространственной кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$, или $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$ (в предположении $\bar{r}'(t_0) \neq 0$) – это канонические уравнения прямой по точке M_0 и направляющему вектору $\bar{r}'(t_0)$:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{7.5}$$

Пример. Написать уравнение касательной к винтовой линии

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = at, \end{cases}$$

соответствующей точке $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение

$$x'(t) = -a\sin t,\ y'(t) = a\cos t,\ z'(t) = a \Rightarrow x'(t_0) = -a\frac{\sqrt{2}}{2},\ y'(t_0) = a\frac{\sqrt{2}}{2},\ z'(t_0) = a.$$

Уравнение касательной при $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, т. е. в точке $M_0\left(a\dfrac{\sqrt{2}}{2}, a\dfrac{\sqrt{2}}{2}, a\dfrac{\pi}{4}\right)$, имеет вид

$$\Rightarrow \frac{x - a\frac{\sqrt{2}}{2}}{-a\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - a\frac{\pi}{4}}{a} \Rightarrow \frac{x - a\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{y - a\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{z - \frac{\pi a}{4}}{\sqrt{2}}.$$

Определение 7.7. *Нормальной плоскостью* к пространственной кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$ (или $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$) в некоторой точке M_0 кривой называется плоскость, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная к касательной в этой точке (рис. 47).

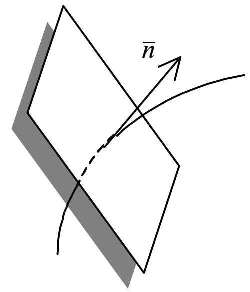


Рис. 47

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) = M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, тогда уравнение нормальной плоскости по точке M_0 и нормали $\bar{n} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ имеет вид

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \tag{7.6}$$

III

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

8.1. Комплексные числа

Определение и действия над комплексными числами

Определение 8.1. Комплексным числом *z* называется пара действительных чисел *x* и *y*, которая обычно записывается в виде

$$z = x + iy, \tag{8.1}$$

где *i* – некоторый символ. Число *x* называется действительной частью комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $x = \operatorname{Re} z$. Число *y* называется мнимой частью комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $y = \operatorname{Im} z$.

Определение 8.2. Два комплексных числа называются равными, если у них совпадают действительные и мнимые части.

Определение 8.3. Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным к числу $z = x + iy$.

Определение 8.4 (действия над комплексными числами). Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа, тогда результатом каждого действия будет новое комплексное число, определенное следующим образом:

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

2) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;

3) для определения произведения $z_1 z_2$ формально перемножим числа z_1 и z_2, используя обычные свойства действительных чисел и принимая, что $i^2 = i \cdot i = -1$:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Последнее комплексное число и берется за определение произведения $z_1 z_2$. Из этого определения, в частности, следует, что

$$i^2 = ii = -1 \ (x_1 = x_2 = 0,\ y_1 = y_2 = 1).$$

По определению $z^n = z \cdot z \ldots z$ (*n* раз), в частности

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1, \ldots;$$

4) для определения частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ также проведем формальные преобразования, домножая числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 - i^2 y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Это число и берется за определение частного $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Легко проверить, что введенные действия над комплексными числами обладают обычными свойствами аналогичных действий над действительными числами. Отметим также, что множество комплексных чисел не является упорядоченным (т.е. неравенств для комплексных чисел нет).

Выпишем свойства, связанные с операцией сопряжения:

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$;

2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$;

3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$;

▲ 1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)} = (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2)$,

$\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2 = (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) = (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2)$;

2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$,

$\overline{z}_1 \overline{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$;

3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}} = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} - i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$,

$$\frac{\bar z_1}{\bar z_2} = \frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2} = \frac{(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)}{(x_2-iy_2)(x_2+iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_1y_2-y_1x_2)}{x_2^2+y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} - i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \blacksquare$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

Сопоставив комплексному числу $z = x + iy$ точку плоскости $0xy$ с координатами (x, y), получим взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости $0xy$, которую будем при этом называть комплексной плоскостью, а произвольную точку (x, y) обозначать также числом $z = x + iy$.

Определение 8.5. Полярные координаты r и φ точки (x, y) называются соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначаются $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

На рис. 48 $r = |\overline{OM}|$, φ – угол от положительного направления оси $0x$ до вектора $\overline{OM}$, определяемый с точностью до числа, кратного 2π. Для $z \neq 0$ единственное значение аргумента, принадлежащее промежутку $(-\pi, \pi]$, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$. Из рисунка видно, что $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ и $\sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ ($\arg z$ находится по любой из этих трех формул с учетом четвер-

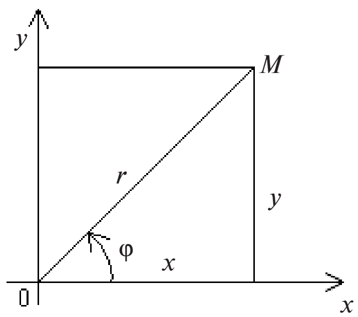


Рис. 48

ти комплексной плоскости, в которой лежит z). Если $z = 0$, то для этого числа $r = 0$, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$ – любой.

Замечание. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$|z_2 - z_1| = |x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1)| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2},$$

т.е. $|z_2 - z_1|$ – это расстояние на комплексной плоскости между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2), или между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

8.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Из рис. 48 видно, что для комплексного числа $z = x + iy$ имеем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, т.е.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{8.2}$$

Определение 8.6. Форма записи (8.2) называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда:

а) $z_1z_2 = r_1r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$$= r_1r_2\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] =$$

$$= r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right],$$

т.е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются;

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

т.е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются;

в) из свойства п. а следует, что если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = z\cdot z\cdot\ldots\cdot z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\ldots\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т.е. при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на эту степень;

г) извлекается корень из комплексного числа.

Определение 8.7. Корнем n-й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w, что $w^n = z$.

Пусть

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

тогда согласно свойству п. в

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Два комплексных числа равны тогда, и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на число, кратное 2π, т.е.

$$\rho^n = r,\ \rho = \sqrt[n]{r};\quad n\psi = \varphi + 2\pi k,\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k\text{— любое целое число.}$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \qquad (8.3)$$

В этой формуле достаточно брать $k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1,$ так как при следующих k значения корня начнут повторяться; например, при $k = n$ получим

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right],$$

т.е. то же самое число, что при $k = 0.$ Значит для любого комплексного числа $z \neq 0$ существует n различных корней n-й степени из этого числа.

8.3. Показательная форма комплексного числа

Введем понятие числа e в мнимой степени. Для этого положим

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (8.4)$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*.

Учитывая (8.4), формулу (8.2) можно переписать следующим образом:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \qquad (8.5)$$

Определение 8.8. Форма записи (8.5) называется *показательной формой комплексного числа*.

Действия над комплексными числами в показательной форме

Оказывается, что при записи комплексных чисел в показательной форме сохраняются обычные свойства показательной функции действительного переменного. А именно пусть $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, тогда, используя результаты разд. 8.2, имеем

а) $z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] =$
$= \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$

в) при $z = re^{i\varphi}$

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^ne^{in\varphi};$$

г) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1.$$

8.4. Многочлены

Многочленом степени n называется функция вида

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

причем $a_0 \neq 0,\ a_j$ – пока любое число (даже комплексное).

Корнем многочлена называется любое (комплексное) число x, такое, что $P(x) = 0.$

Теорема 8.1 (**Безу**). При делении многочлена $P(x)$ на $(x-a)$ получается остаток, равный $P(a)$.

▲ Из процесса деления «углом» получаем: $\dfrac{P(x)}{x-a}=P_1(x)+\dfrac{R}{x-a}$, где $P_1(x)$ – частное – многочлен степени $(n-1)$; R – остаток (число) $\Rightarrow P(x)=P_1(x)(x-a)+R.$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $x\to a$:

$$\lim_{x\to a}P(x)=\lim_{x\to a}\left[P_1(x)(x-a)+R\right]=\lim_{x\to a}P_1(x)\lim_{x\to a}(x-a)+\lim_{x\to a}R.$$

Так как многочлен – функция непрерывная, то

$$\lim_{x\to a}P(x)=P(a),\quad \lim_{x\to a}P_1(x)=P_1(a).$$

Значит, $P(a)=0+R=R.$ ■

Следствие. Если a – корень многочлена $P(x)$, то $R=P(a)=0$, следовательно, многочлен делится на $(x-a)$ без остатка, т.е.

$$P(x)=(x-a)P_1(x). \qquad (8.6)$$

В этой формуле $P(x)$ – многочлен степени n, $P_1(x)$ – многочлен степени $(n-1)$.

Теорема 8.2 (**основная теорема алгебры**). Всякий многочлен имеет по крайней мере один корень – действительный или комплексный.

Эта теорема приводится без доказательства (в силу его сложности).

Разложение многочлена на множители

Пусть: $P(x)$ – многочлен степени n; x_1 – его корень (он существует по основной теореме алгебры), следовательно, $P(x)=(x-x_1)P_1(x)$;

$P_1(x)$ – многочлен степени $n-1$; x_2 – его корень (существует по той же теореме), следовательно,

$$P_1(x)=(x-x_2)P_2(x)\Rightarrow P(x)=(x-x_1)(x-x_2)P_2(x);$$

$P_2(x)$ – многочлен степени $(n-2)$ и т.д., следовательно,

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)A.$$

Здесь A – многочлен степени 0, т.е. число.

Для нахождения A раскроем скобки в правой части этого равенства. Получим тождественное (т.е. верное для всех $x\in R$) равенство

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\equiv Ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots,$$

где $b, c,\ldots$ – некоторые коэффициенты. Продифференцируем обе части этого равенства n раз:

$a_0n!=An!\Rightarrow A=a_0\Rightarrow$

$$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n). \qquad (8.7)$$

Среди скобок могут быть одинаковые, объединяя которые, имеем

$$P(x)=a_0(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{r_m}. \qquad (8.8)$$

Определение 8.9. Число r_i называется *кратностью* корня x_i.

Так как в формуле (8.8) ровно n скобок, то $r_1+r_2+\ldots+r_m=n$, значит, каждый многочлен степени n имеет ровно n корней с учетом кратности.

Объединив в формуле (8.8) все скобки, кроме i-й, мы можем переписать определение 8.9 корня кратности r в виде

$$P(x)=(x-x_i)^{r_i}Q(x), \qquad (8.9)$$

где $Q(x_i)\neq 0$.

Теорема 8.3 (**о тождественно равных многочленах**). Если два многочлена тождественно (т.е. для всех x) равны, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

▲ $P_1(x)\equiv P_2(x)\Rightarrow P_1(x)-P_2(x)\equiv 0\Rightarrow P(x)\equiv 0,$

где $P(x)=P_1(x)-P_2(x)$ – многочлен степени, не превосходящей наибольшую из степеней P_1 и P_2. Но, по доказанному, если степень $P(x)$ равна k, то $P(x)$ имеет лишь k корней, а у нас все x – корни. Это возможно лишь в том случае, если все коэффициенты $P(x)$ равны 0, т.е. все коэффициенты $P_1(x)$ и $P_2(x)$ совпадают. ■

Пусть теперь коэффициенты многочлена $P(x)$ – действительные числа.

Теорема 8.4. Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены, т.е. если $(a+bi)$ – корень многочлена, то $(a-bi)$ – тоже его корень.

▲ Пусть $P(a+bi)=0 \Rightarrow$

$$a_0(a+bi)^n + a_1(a+bi)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(a+bi) + a_n = 0.$$

Тогда комплексно сопряженное к левой части этого равенства число тоже равно 0:

$$\overline{a_0(a+bi)^n + a_1(a+bi)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(a+bi) + a_n} = 0.$$

Учитывая свойства операции сопряжения, имеем

$$\overline{a_0}\,\overline{(a+bi)^n} + \overline{a_1}\,\overline{(a+bi)^{n-1}} + \ldots + \overline{a_{n-1}}\,\overline{(a+bi)} + \overline{a_n} = 0.$$

Так как коэффициенты a_i – действительные, то $\overline{a_i} = a_i \Rightarrow$

$$a_0\overline{(a+bi)^n} + a_1\overline{(a+bi)^n} + \ldots + a_{n-1}\overline{(a+bi)} + a_n = 0.$$

Опять используем свойство операции сопряжения:

$$a_0\overline{(a+bi)}^n + a_1\overline{(a+bi)}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\overline{(a+bi)} + a_n = 0 \Rightarrow$$

$$a_0(a-bi)^n + a_1(a-bi)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(a-bi) + a_n = 0,$$

что и означает, что $(a-bi)$ – корень многочлена: $P(a-bi)=0.$ ■

Замечание. По этой теореме в разложении $P(x)$ на множители (8.7) будет выражение

$$[x-(a+ib)][x-(a-ib)] = (x-a-ib)(x-a+ib) = (x-a)^2 + b^2 =$$

$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

где $-2a = p$ и $a^2 + b^2 = q$, значит, $P(x)$ делится на $x^2 + px + q$:

$$P(x) = (x^2 + px + q)P_1(x).$$

Здесь $P_1(x)$ – многочлен с действительными коэффициентами (если при действительных коэффициентах $P(x)$ и действительных числах p и q делить $P(x)$ на (x^2+px+q) «углом», то полученные коэффициенты $P_1(x)$, естественно, тоже будут действительными числами). К многочлену $P_1(x)$ применимы все наши рассуждения: если он опять имеет корень $(a+bi)$, то будет иметь и корень $(a-bi)$ и т.д., следовательно, *кратности корней* $(a+bi)$ и $(a-bi)$ *совпадают.*

Теперь разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители можно записать в виде

$$P(x) = a_0(x-x_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{r_k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_lx + q_l)^{t_l}. \quad (8.10)$$

В этой формуле $x_1, \ldots, x_k$ – действительные корни многочлена $P(x)$, а $x^2 + p_jx + q_j$ – квадратные трехчлены с действительными коэффициентами и комплексными корнями $a_j \pm b_ji$ (т.е. у этих трехчленов $D<0$) и $r_1 + \ldots + r_k + 2t_1 + \ldots + 2t_l = n.$

Теорема 8.5 (**о кратных корнях многочлена**). Для того чтобы $x = x_0$ являлось корнем многочлена $P(x)$ кратности r, необходимо и достаточно, чтобы $P(x_0)=0,\ P'(x_0)=0, \ldots,\ P^{(r-1)}(x_0)=0,\ P^{(r)}(x_0)\neq 0.$

▲ *Необходимость.* Пусть $x = x_0$ – корень многочлена $P(x)$ кратности r. Согласно определению 8.9

$$P(x) = (x-x_0)^r Q(x),$$

где $Q(x)$ – многочлен и $Q(x_0)\neq 0.$
Отсюда

$$P'(x) = r(x-x_0)^{r-1}Q(x) + (x-x_0)^r Q'(x) =$$

$$= (x-x_0)^{r-1}\left(rQ(x) + (x-x_0)Q'(x)\right).$$

Обозначим многочлен во второй скобке $Q_1(x)$, тогда

$$P'(x) = (x-x_0)^{r-1}Q_1(x),$$

где $Q_1(x_0) = rQ(x_0)\neq 0.$
Аналогично

$$P''(x) = (x-x_0)^{r-2}Q_2(x_0),\ \text{где}\ Q_2(x_0)\neq 0, \ldots;$$

$$P^{(r-1)}(x) = (x-x_0)Q_{r-1}(x),\ \text{где}\ Q_{r-1}(x_0)\neq 0;$$

$$P^{(r)}(x) = Q_r(x),\ \text{где}\ Q_r(x_0)\neq 0.$$

Подставляя в полученные равенства $x = x_0$, получим нужный нам результат:

$$P(x_0)=0,\ P'(x_0)=0, \ldots,\ P^{(r-1)}(x_0)=0,\ P^{(r)}(x_0)\neq 0.$$

Достаточность. Пусть

$$P(x_0)=0,\ P'(x_0)=0, \ldots,\ P^{(r-1)}(x_0)=0,\ P^{(r)}(x_0)\neq 0$$

и пусть степень многочлена $P(x)$ равна n. Разложим этот многочлен по формуле Тейлора:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Из условий теоремы первые r слагаемых в этой сумме равны нулю, т.е.

$$P(x) = \sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Тогда можно вынести за скобки $(x - x_0)^r$, и наше равенство примет вид

$$P(x) = (x - x_0)^r \sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{k-r}.$$

Обозначая сумму в этом выражении $Q(x)$, получим

$$P(x) = (x - x_0)^r Q(x),$$

где $$Q(x) = \frac{P^{(r)}(x_0)}{r!} + \frac{P^{(r+1)}(x_0)}{(r+1)!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-r};$$

$$Q(x_0) = \frac{P^{(r)}(x_0)}{r!} \neq 0.$$

Тем самым выполняются условия определения кратности корня многочлена 8.9 (см. формулу (8.9)), и x_0 является корнем многочлена $P(x)$ кратности r. ■

8.5. Рациональные функции

Определение 8.10. *Рациональной функцией, или рациональной дробью*, называется функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены (мы будем предполагать, что они с действительными коэффициентами).

Определение 8.11. Рациональная функция (дробь) называется *правильной*, если степень числителя $P(x)$ меньше степени знаменателя $Q(x)$.

Пусть дробь не является правильной, т.е. степень $P(x)$ больше или равна степени $Q(x)$. Тогда мы можем разделить числитель на знаменатель «углом»:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}. \tag{8.11}$$

Здесь $P_1(x)$ — частное — некоторый многочлен; $R(x)$ — остаток — тоже многочлен степени, меньшей, чем степень $Q(x)$ (иначе можно делить дальше), т.е. дробь в правой части формулы (8.11) правильная.

Определение 8.12. *Простыми дробями* называются правильные дроби одного из нижеследующих четырех типов:

1. $\frac{A}{x-a}$, где A, a — некоторые действительные числа.

2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где $k = 2, 3, 4,\ldots$ и A, a — некоторые действительные числа.

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где A, B, p, q — действительные числа; x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е.

$$D = p^2 - 4q < 0 \Rightarrow \frac{p^2}{4} - q < 0. \tag{8.12}$$

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k = 2, 3, 4,\ldots$ и A, B, p, q — действительные числа; корни знаменателя — комплексные.

Теорема 8.6. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы простых дробей.

▲ 1. Пусть $x = a$ — действительный корень знаменателя кратности k, т.е. $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ — многочлен и $Q_1(a) \neq 0$. При любом A, прибавив к числителю и вычтя из него $AQ_1(x)$, перепишем дробь в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{AQ_1(x) + (P(x) - AQ_1(x))}{(x-a)^k Q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}. \tag{8.13}$$

Вторая дробь правильная: ее знаменатель равен $Q(x)$, а степень числителя меньше степени $Q(x)$, так как степень $P(x)$ и степень $Q_1(x)$ меньше степени $Q(x)$.

Пока A было любым числом, теперь выберем A таким, чтобы $x = a$ являлся корнем числителя 2-й дроби:

$$P(a)-AQ_1(a)=0 \Leftrightarrow A=\frac{P(a)}{Q_1(a)},$$

где $Q_1(a)\neq 0$ по условию.

При таком A, согласно следствию из теоремы Безу 8.1,

$$P(x)-AQ_1(x)=(x-a)P_1(x), \tag{8.14}$$

где $P_1(x)$ — некоторый многочлен.

Подставляя (8.14) в (8.13), имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}. \tag{8.15}$$

К правильной дроби $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ можно применить аналогичные рассуждения ($x=a$ — корень знаменателя кратности $k-1$). В результате получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-2}}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}, \tag{8.16}$$

где $\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$ — правильная рациональная дробь, которую можно аналогичным образом разложить дальше, если $Q_1(x)$, а значит, и $Q(x)$ имеют другие действительные корни.

2. Пусть теперь $x=a\pm bi$ — комплексные корни знаменателя кратности k ($P(x)$ и $Q(x)$ предполагаются с действительными коэффициентами). Как и выше,

$$[x-(a+bi)][x-(a-bi)]=(x-a+bi)(x-a-bi)=(x-a)^2+b^2=$$

$$=x^2-2ax+a^2+b^2,$$

и при $-2a=p,\ a^2+b^2=q,$ знаменатель дроби можно записать в виде

$$Q(x)=(x^2+px+q)^k Q_1(x),$$

где $Q_1(a\pm bi)\neq 0.$

При любых A и B, добавив к числителю и вычтя из него выражение $(Ax+B)Q_1(x)$, перепишем дробь в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(Ax+B)Q_1(x)+(P(x)-(Ax+B)Q_1(x))}{(x^2+px+q)^k Q_1(x)}=$$

$$=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\frac{P(x)-(Ax+B)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^k Q_1(x)}. \tag{8.17}$$

Здесь вторая дробь правильная: ее знаменатель равен $Q(x)$, а степень числителя меньше степени $Q(x)$, так как степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$, а степень $Q_1(x)$ хотя бы на 2 меньше степени $Q(x)$, следовательно, степень $(Ax+B)Q_1(x)$ тоже меньше степени $Q(x)$.

До сих пор A и B являлись любыми числами, теперь же подберем их так, чтобы $x=a+bi$ являлся корнем числителя второй дроби, т.е.

$$P(a+bi)-(A(a+bi)+B)Q_1(a+bi)=0 \Leftrightarrow A(a+bi)+B=\frac{P(a+bi)}{Q_1(a+bi)},$$

где $Q_1(a+bi)\neq 0.$

Здесь $\frac{P(a+bi)}{Q_1(a+bi)}$ — некоторое данное комплексное число; записав его в виде $M+Ni$, получим

$$A(a+bi)+B=Aa+Abi+B=M+Ni \Leftrightarrow Aa+B=M,\ Ab=N \Leftrightarrow$$

$A=\frac{N}{b},\ b\neq 0,$ так как корень комплексный, и $B=M-Aa=M-\frac{Na}{b}.$

Раз $x=a+bi$ — корень числителя (с действительными коэффициентами) $P(x)-(Ax+B)Q_1(x)$, то $x=a-bi$ — тоже его корень, тогда аналогично (8.14)

$$P(x)-(Ax+B)Q_1(x)=[x-(a+bi)][x-(a-bi)]P_1(x)=$$

$$=(x^2+px+q)P_1(x). \tag{8.18}$$

Подставляя (8.18) в (8.17), имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\frac{(x^2+px+q)P_1(x)}{(x^2+px+q)^k Q_1(x)}=$$

$$=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}. \tag{8.19}$$

Вторую правильную дробь в правой части формулы (8.19) можно аналогично раскладывать дальше, получая в результате формулу

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_{k-1}x+B_{k-1}}{x^2+px+q}+\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}. \quad (8.20)$$

Последнюю правильную дробь можно точно так же раскладывать на простые в зависимости от наличия у ее знаменателя действительных или комплексных корней.

Формулы (8.16) и (8.20) доказывают нашу теорему, так как все выделяемые в них дроби – простые. ■

Применим указанную в пунктах 1 и 2 процедуру ко всем корням $Q(x)$. Пусть

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^m(x^2+rx+t)^n\cdot\ldots$$

Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^l}+\frac{B_1}{(x-b)^{l-1}}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{l-1}}{x-b}+\ldots+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^m}+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\ldots+\frac{C_{m-1}x+D_{m-1}}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{Ex+F}{(x^2+rx+t)^n}+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+rx+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{E_{n-1}x+F_{n-1}}{x^2+rx+t}+\ldots \quad (8.21)$$

Все коэффициенты в этой формуле – действительные числа.

На практике коэффициенты разложения правильной дроби на простые находят следующими способами, разобранными на примерах.

Пример 1. Разложить дробь $\frac{2x+1}{(x^2+2)x^2}$ на простые дроби.

Р е ш е н и е

Разложим дробь на простые с неопределенными коэффициентами A, B, C, D:

$$\frac{2x+1}{(x^2+2)x^2}=\frac{A^{\backslash\, x^2+2}}{x^2}+\frac{B^{\backslash\, x(x^2+2)}}{x}+\frac{Cx+D^{\backslash\, x^2}}{x^2+2}.$$

Теперь надо найти эти коэффициенты.

Приведя дроби к общему знаменателю и отбросив его, получим

$$2x+1=Ax^2+2A+Bx^3+2Bx+Cx^3+Dx^2.$$

Это равенство верно для всех x, т.е. является тождеством. Тогда по теореме о тождественно равных многочленах коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа должны совпадать:

$$\begin{array}{ll} x^3: & B+C=0 \\ x^2: & A+D=0 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{2},\ B=1,\ D=-\frac{1}{2},\ C=-1. \\ x^1: & 2B=2 \\ x^0: & 2A=1 \end{array}$$

В общем случае система может быть более сложной, но так как по теореме 8.6 коэффициенты разложения существуют, то эта система всегда разрешима (можно доказать, что она имеет единственное решение). Таким образом,

$$\frac{2x+1}{(x^2+2)x^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+2}.$$

Перед решением задачи знаменатель должен быть разложен на множители. Отметим также, что квадратный трехчлен в знаменателе (с комплексными корнями) может иметь и более общий вид: x^2+px+q.

Пример 2. Разложить дробь $\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}$ на простые дроби.

Р е ш е н и е

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}.$$

Аналогично предыдущему примеру

$$x^2+x+1=A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1).$$

Это равенство верно для всех x, в частности для x, равных корням знаменателя. Для этих x большинство скобок обратится в 0 ,и мы получим

$$x=-1\Rightarrow 1-1+1=A(-2)(-3)\Rightarrow A=\frac{1}{6};$$

$$x=1\Rightarrow 1+1+1=B\cdot 2\cdot(-1)\Rightarrow B=-\frac{3}{2};$$

$$x=2\Rightarrow 4+2+1=C\cdot 3\cdot 1\Rightarrow C=\frac{7}{3}.$$

В итоге $\quad\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{7}{3}\frac{1}{x-2}.$

Как правило, целесообразно комбинировать эти два способа: сначала при помощи второго найти все коэффициенты, какие возможно, а потом для нахождения остальных коэффициентов написать систему уравнений по первому способу (можно уже не всю, а лишь некоторые из уравнений).

9. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

9.1. Понятие неопределенного интеграла

Определение 9.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ в некотором конечном или бесконечном промежутке (т.е. отрезке, интервале или полуинтервале) E, если для $\forall x \in E$ существует $F'(x) = f(x)$.

Теорема 9.1. Выражение $F(x)+C$, где $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$, а C – произвольная постоянная, представляет собой общий вид первообразной для $f(x)$ (в некотором промежутке E). То есть все первообразные для $f(x)$, и только они, выражаются формулой $F(x)+C$.

▲ 1. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ в промежутке E, а C – постоянная, тогда $F(x)+C$ тоже первообразная для $f(x)$ в E:

$$\left[F(x)+C\right]' = F'(x)+C' = f(x)+0 = f(x), \;\; x \in E.$$

2. И обратно, каждая функция $\Phi(x)$, которая является первообразной для $f(x)$ (в промежутке E), может быть представлена в виде $\Phi(x) = F(x)+C$, где $F(x)$ – фиксированная первообразная, а C – некоторая постоянная.

Положим, $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Для любых точек $x_1, x_2 \in E$ по теореме Лагранжа 5.4

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1) = \varphi'(c)(x_2-x_1) = [\Phi'(c)-F'(c)](x_2-x_1) =$$

$$= [f(c)-f(c)](x_2-x_1) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = C \Rightarrow \Phi(x)-F(x) = C \Rightarrow \Phi(x) = F(x)+C, \;\; x \in E. \blacksquare$$

Определение 9.2. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ в промежутке E, то выражение $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \tag{9.1}$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ – это семейство всех первообразных для $f(x)$.

Замечание. Не для любой функции существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл. Но, например, ниже будет доказано, что если функция непрерывна в промежутке E, то у нее в этом промежутке первообразная существует.

9.2. Свойства неопределенного интеграла

1. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$.

▲ Равенство верно по определению неопределенного интеграла; в левой части – множество функций; равенство верно для любого элемента этого множества. ■

2. $d\int f(x)dx = f(x)\,dx$.

▲ $d\int f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]'dx \overset{1.}{=} f(x)dx.$ ■

3. $\int F'(x)dx = F(x)+C \;\Rightarrow\; \int dF(x) = F(x)+C$ (символическая запись).

▲ Доказательство первой из этих формул следует из того, что одной из первообразных для $F'(x)$ является $F(x)$. ■

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, $a \neq 0$ – постоянная, при условии существования интеграла справа (это равенство представляет собой совпадение двух множеств функций).

▲ Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$. Так как $\left[aF(x)\right]' = aF'(x) = af(x)$, то $aF(x)$ – первообразная для $af(x)$. Тогда из формулы (9.1) следует, что $\int af(x)dx = aF(x)+C$, где C – произвольная постоянная. Но $a\int f(x)dx \overset{(9.1)}{=} a\left[F(x)+C_1\right] = aF(x)+aC_1$, где C_1 – произвольная постоянная, $a \neq 0 \Rightarrow aC_1$ – тоже произвольная постоянная.

Теперь ясно, что оба этих множества функций совпадают. ■

5. $\int\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)\,dx$ при условии существования интегралов справа (это опять совпадение двух множеств функций).

▲ Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – некоторые первообразные для $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Так как

$$\left[F_1(x) + F_2(x)\right]' = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то $F_1(x) + F_2(x)$ – первообразная для $f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow$

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx \overset{(9.1)}{=} F_1(x) + F_2(x) + C.$$

Но

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2 = F_1(x) + F_2(x) + (C_1 + C_2).$$

Так как здесь $(C_1 + C_2)$ – произвольная постоянная, то ясно, что множества $\int\left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx$ и $\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$ совпадают.

Аналогично доказывается, что

$$\int\left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx. \ \blacksquare$$

Замечание. Не следует пытаться искать какие-то общие формулы для интеграла от произведения или частного, так как таких формул просто не существует.

9.3. Таблица основных интегралов

Каждая формула из таблицы производных $F'(x) = f(x)$ сразу приводит к формуле $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ из таблицы интегралов, т.е. из таблицы производных следует таблица основных интегралов:

1) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \ne -1;$

2) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\ \{0\} \notin E;$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

4) $\int e^x dx = e^x + C;$

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

9) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$

10) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$

11) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

12) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

13) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,\ a > 0,$ в частности при $a = 1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$$

14) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C,$ в частности при $a = 1$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

15) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ – так называемый «длинный логарифм»;

16) $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a + x}{a - x}\right| + C$ – так называемый «высокий логарифм»;

17) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C.$

▲

1) $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \dfrac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^\alpha = x^\alpha;$

2) $x>0 \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

$x<0 \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$;

3) $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a} a^x \ln a = a^x$;

4) частный случай предыдущего;

5) $(\sin x)' = \cos x$;

6) $(-\cos x)' = \sin x$;

7) $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8) $(-\mathrm{ctg} x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9– 12) доказываются аналогично;

13) $\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}\dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

14) $\left(\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{a^2}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a^2+x^2}$;

15) в п. 2 было проверено, что $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, поэтому

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left[1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

16) аналогично:

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \left(\frac{1}{2a}\left[\ln|a+x| - \ln|a-x|\right]\right)' = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\cdot\frac{a-x+a+x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a^2-x^2};$$

17) так же:

$$\left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|\right)' = \frac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}. \ \blacksquare$$

Следует заметить, что задача интегрирования существенно сложнее задачи дифференцирования. При дифференцировании мы должны сводить функцию к наиболее простым функциям, а при интегрировании – к тем функциям, которые есть в таблице, а они совсем не обязательно самые простые. Продифференцировать мы можем любую элементарную функцию, но при интегрировании может встретиться следующая ситуация: $f(x)$ – непрерывная в некотором промежутке E элементарная функция; ниже будет показано, что неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ от непрерывных функций существует ($x \in E$). Но этот интеграл не выражается через элементарные функции (т.е. представляет собой некоторую новую функцию). Такие интегралы называются *неберущимися*.

Приведем примеры некоторых неберущихся интегралов: $\int e^{-x^2}dx$ (т.е. нет элементарной функции, производная которой равна e^{-x^2}), $\int \dfrac{\sin x}{x}dx$, $\int \dfrac{dx}{\ln x}$ и т.п.

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

Решение

1) $\int \dfrac{x^2\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}-5}{x}dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}}-3+2x^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{5}{x}\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int dx +$

$+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 5\int\dfrac{dx}{x} = \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3x + 2\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 5\ln|x| + C = \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 3x + 4\sqrt{x} - 5\ln|x| + C$;

2) $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int\dfrac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$

$= \mathrm{tg}\, x - x + C.$

9.4. Замена переменной в неопределенном интеграле

Теорема 9.2. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Тогда в предположении непрерывности f, φ, φ' имеем

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C. \quad (9.2)$$

Или, учитывая, что $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$, символически:

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C. \quad (9.3)$$

Символическое равенство (9.3) надо понимать в смысле равенства (9.2). Оно означает, что в обеих частях формулы $\int f(x)dx = F(x) + C$ можно x заменить на $\varphi(x)$.

▲ Применяя формулу производной сложной функции и обозначая $\varphi(x) = t$, имеем

$$[F(\varphi(x)) + C]' = [F(\varphi(x))]'_x + C' = F'(t) \cdot t'_x = f(t) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

что и доказывает формулу (9.2). ■

Эта теорема позволяет существенно расширить круг функций, которые мы можем проинтегрировать.

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

Решение

1. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^{-1} x}{-1} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$ (во втором переходе использовался интеграл $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$).

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C.$

3. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(e^{3x}+1)}{e^{3x}+1} = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+1) + C$ ($e^{3x}+1>0$ для всех x).

4. $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{(x-1)+2}{(x-1)^2+4}dx = \int \frac{x-1}{(x-1)^2+4}dx + 2\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+4} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d((x-1)^2+4)}{(x-1)^2+4} + 2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{(x-1)}{2} + C = \frac{1}{2}\ln|(x-1)^2+4| + \mathrm{arctg}\frac{x-1}{2} + C =$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \mathrm{arctg}\frac{x-1}{2} + C$ (так как $(x-1)^2+4>0$, $x \in R$).

Аналогично можно брать любые интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ с комплексными корнями знаменателя.

5. Было бы глубоким заблуждением считать, что $\int \sin^3 x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$, на самом деле этот ответ дает $\int \sin^3 x \cos x dx$:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Правильное решение нашего примера таково:

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)d\cos x =$$

$$= -\int d\cos x + \int \cos^2 x d\cos x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Таким методом можно проинтегрировать $\sin x$ и $\cos x$ в любой нечетной степени.

6. Теперь вычислим $\int \sin^2 x dx$. Применим формулы понижения степени и перехода к двойному углу: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Тогда получим

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 2}\int \cos 2x d2x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Так интегрируют $\sin x$ и $\cos x$ в четных степенях.

Перепишем опять формулы (9.1) и (9.3), поменяв в (9.3) x на t: если $f(x)$ непрерывна, а $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема(т. е. имеет непрерывную производную), то из формулы $\int f(x)dx = F(x) + C$ следует формула $\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$. Положим теперь $x = \varphi(t)$. Тогда правые части этих формул совпадают, а значит, совпадают и их левые части:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (9.4)$$

При этом интеграл в правой части этого равенства, может быть, легче взять, чем интеграл в левой его части.

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

Решение

1. $\int \frac{dx}{e^x+1}$; сделаем замену $t=e^{-x}$: $x=-\ln t \Rightarrow dx = d(-\ln t) = -\frac{1}{t}dt$, тогда

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{-\frac{1}{t}dt}{\frac{1}{t}+1} = -\int \frac{dt}{1+t} = -\int \frac{d(t+1)}{t+1} = -\ln|t+1| + C = -\ln(e^{-x}+1)+C.$$

2. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\int \frac{t\cdot t dt}{t^2\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+C =$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+C.$$

Здесь $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt,\ t=\frac{1}{x}$; предполагается, что $t>0$, и учитывается, что $t+\sqrt{1+t^2}>0,\ t\in R.$

9.5. Интегрирование по частям

Теорема 9.3. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы в некотором промежутке E, тогда $\forall \in E$

$$\int u dv = uv - \int v du, \tag{9.5}$$

или, учитывая, что $du = u'dx,\ dv = v'dx$,

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx. \tag{9.6}$$

▲ $\left[uv - \int vu'dx\right]' = (uv)' - \left(\int vu'dx\right)' = u'v + uv' - vu' = uv'$, значит, любая функция из множества $\left\{uv - \int vu'dx\right\}$ является первообразной для uv', что, согласно (9.1), и доказывает равенство (9.6) (произвольная постоянная в правой части содержится в $\int vu'dx$). ■

Функции u и v надо выбирать так, чтобы интеграл упростился.

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

Решение

1. $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x dx}_{dv}$

$u = x \quad dv = \sin x dx$

$du = dx \quad v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x + C.$

Постоянную C в последней формуле писать не обязательно, так как нам достаточно взять одну из функций v ; тогда по формуле (9.5)

$$\int x\sin x dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C,$$

или

$$\int x\sin x dx = -\int x d\cos x = -\left[x\cos x - \int \cos x dx\right] = -x\cos x + \sin x + C.$$

Так всегда берутся интегралы вида

$$\int \underbrace{P(x)}_{u}\underbrace{a^{\alpha x}dx}_{dv},\ \int \underbrace{P(x)}_{u}\underbrace{\sin\alpha x dx}_{dv},\ \int \underbrace{P(x)}_{u}\underbrace{\cos\alpha x dx}_{dv},$$

где $P(x)$ – многочлен, который принимается за функцию u (интегрировать по частям придется столько раз, сколько указывает степень многочлена $P(x)$).

2. $\int x\ln x dx$; пусть $u=\ln x,\ dv = xdx,\ du = \frac{1}{x}dx,\ \ v=\int xdx = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$

$$\int x\underbrace{\ln x}_{u} dx = \ln x \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C,$$

или, в более короткой записи,

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 = \frac{1}{2}\left(\ln x\cdot x^2 - \int x^2 d\ln x\right) = \frac{1}{2}\left(x^2\ln x - \int x^2\frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2\ln x - \int xdx) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Таким способом можно взять интегралы, в которые входят логарифмическая или обратные тригонометрические функции, причем эти функции принимаются за u.

3. $\int e^x \cos x dx = \int e^x d\sin x = e^x \sin x - \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx =$

$$= e^x \sin x + \int e^x d\cos x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x de^x =$$

$$= e^x(\sin x + \cos x) - \int \cos x e^x dx.$$

Полученное равенство является уравнением для нужного нам интеграла. Из него находим, что

$$2\int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) + C \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + C$$

(постоянная C в правой части была прибавлена согласно формуле (9.1)).

Аналогично вычисляются $\int a^{\alpha x} \cos\beta x$ и $\int a^{\alpha x} \sin\beta x dx$ причем за u надо брать либо два раза показательную, либо два раза тригонометрическую функцию.

4. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx =$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}}_{dv}.$$

Теперь вычислим $v = \int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2}\frac{(x^2+a^2)^{-n+1}}{n-1}.$

Тогда по формуле интегрирования по частям (9.5) можно продолжить:

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left[-x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}(n-1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}(n-1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} I_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[1 - \frac{1}{2(n-1)}\right] I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Мы получили так называемую рекуррентную формулу:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[1 - \frac{1}{2(n-1)}\right] I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}. \quad (9.7)$$

По этой формуле интеграл I_n выражается через I_{n-1}, где степень знаменателя уже на единицу меньше. По такой же формуле, где n заменено на $(n-1)$, I_{n-1} будет выражаться через I_{n-2}. И т. д. На последнем шаге I_2 бу-

дет выражаться через I_1, где $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$, следовательно, интеграл I_n берется и выражается через рациональную функцию (отношение двух многочленов) и арктангенс.

9.6. Интегрирование рациональных дробей

Как указано в разд. 8.5, любую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int P_1(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx,$$

где $\frac{R(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь.

Таким образом, интегрирование любой рациональной дроби сводится к интегрированию правильной дроби (путем деления числителя на знаменатель).

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

Решение

1. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{x^2+1}dx = \int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \text{arctg}\, x + C.$$

2. $\int \frac{x^4}{x^3+1}dx = \int\left(x - \frac{x}{x^3+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{xdx}{x^3+1}.$

Здесь деление числителя на знаменатель было выполнено «углом»:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & x^3+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+x} & x \\ -x & \end{array}.$$

В результате остался интеграл $\int \frac{xdx}{x^3+1}$ от правильной дроби.

Интегрирование простых дробей

В соответствии с определением 8.12 рассмотрим интегралы от простых дробей всех четырех типов:

1. $\dfrac{A}{x-a}$, A, a – некоторые действительные числа;

$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3, 4,...$; A, a – некоторые действительные числа;

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, A, B, p, q – действительные числа; x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $D = p^2 - 4q < 0 \Rightarrow \dfrac{p^2}{4} - q < 0 \quad \Rightarrow$ $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$. Обозначим $q - \dfrac{p^2}{4} = m^2$. Выделяя в знаменателе полный квадрат, имеем:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{A\left(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx = A\int\frac{x+\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\times$$

$$\times\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2} = \frac{A}{2}\int\frac{d\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{m} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{m} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{m} + C.$$

Аналогично можно вычислять и некоторые другие интегралы, содержащие квадратный трехчлен, например $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}dx.$

4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k = 2,3,4,...$; A, B, p, q – действительные числа; корни знаменателя – комплексные. Как и выше, обозначая $q - \dfrac{p^2}{4} = m^2$, имеем

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int\frac{A\left(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)+B}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^2}dx = \int\frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right)+B-\frac{Ap}{2}}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2\right]^k}d\left(x+\frac{p}{2}\right).$$

Сделаем замену $x + \dfrac{p}{2} = t$, тогда наш интеграл

$$\int\frac{Atdt}{(t^2+m^2)^k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{A}{2}\cdot\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k} =$$

$$= \frac{A}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_k,$$

где интеграл I_k вычислялся в разд. 9.5 с помощью рекуррентной формулы (9.7).

Вывод. Интегралы от простых дробей всегда берутся и выражаются через рациональную функцию, логарифм и арктангенс.

Так как по теореме 8.6 любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простых дробей, то отсюда следует, что интеграл от любой рациональной функции берется и выражается через рациональную функцию, логарифм и арктангенс. Для вычисления интеграла надо сначала поделить числитель на знаменатель (если степень числителя больше или равна степени знаменателя), потом полученную правильную дробь представить в виде суммы простых дробей и затем проинтегрировать эти дроби.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx.$

Решение

Подынтегральная дробь здесь уже является правильной, поэтому сразу разложим ее на простые

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1};$$

$$x^2=A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)^2.$$

Положим, что $x=-1$: $1=B(1-1+1)\Rightarrow B=1$. Далее имеем:

$$x^2=A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+1).$$

Приравняем коэффициенты при x^3, x^2 и x^0 слева и справа, при этом скобки можно даже полностью не раскрывать:

$$\begin{cases}0=A+C\\1=2A+B+2C+D;\\0=A+B+D\end{cases}\quad B=1\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\2A+2C+D=0\\A+D=-1\end{cases}$$

Во втором уравнении $2A+2C=0\Rightarrow D=0\Rightarrow A=-1\Rightarrow C=1$.

Подставим найденные коэффициенты в разложение на простые дроби и проинтегрируем результат:

$$\int\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx=-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{x}{x^2+x+1}dx=$$

$$=-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|-\frac{2}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

9.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Пусть $R(x_1,...,x_n)$ – рациональная функция, т.е. функция, над аргументами которой проводятся только сложение, вычитание, умножение на постоянные числа, умножение и деление. Рассмотрим

$$I=\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{m}{n}}\right]dx,$$

где a, b, c, e – действительные постоянные коэффициенты; m, n – натуральные числа.

Сделаем замену $\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{1}{n}}=t$, тогда

$$\frac{ax+b}{cx+e}=t^n\Rightarrow ax+b=cxt^n+et^n;\quad x=\frac{et^n-b}{a-ct^n}\Rightarrow dx=\left(\frac{et^n-b}{a-ct^n}\right)'_t dt.$$

Значит, $I=\int\underbrace{R\left(\frac{et^n-b}{a-ct^n},t^m\right)\left(\frac{et^n-b}{a-ct^n}\right)'_t}_{\text{рациональная функция } t}dt$, т.е. получили интеграл от рациональной функции, который всегда берется.

Аналогично вычисляются интегралы вида

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right]dx,$$

только теперь нужна замена: $t=\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{1}{n}}$, где n – наименьшее общее кратное чисел $n_1,n_2,...,n_k$, или наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},...,\frac{m_k}{n_k}$.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx.$

Решение

Сделаем замену $\sqrt[6]{1+x}=t$, $1+x=t^6$, $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$, тогда можно продолжить: $\int\frac{(t^6-1)^2+t^3}{t^2}\cdot 6t^5dt=6\int\left[(t^6-1)^2+t^3\right]t^3dt$ – такой интеграл легко берется.

2. Некоторые интегралы от иррациональных функций, например интегралы вида $I=\int\frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x^2+px+q}}$, берутся при помощи замены $\frac{1}{ax+b}=t$, $ax+b=\frac{1}{t}$, $x=\frac{1}{at}-\frac{b}{a}$, $dx=-\frac{1}{at^2}dt$:

$$I=\int\frac{t\left(-\frac{1}{at^2}\right)dt}{\left(\frac{1}{at}-\frac{b}{a}\right)^2+p\left(\frac{1}{at}-\frac{b}{a}\right)-qt^2}=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\left(\frac{1}{a}-\frac{b}{a}t\right)^2+p\left(\frac{t}{a}-\frac{b}{a}t^2\right)-qt^2}=$$

$$=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}},$$

где a_1, b_1, c_1 — некоторые коэффициенты. Далее выделяем в знаменателе квадрат:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}\overset{a_1>0}{=}\frac{1}{\sqrt{a_1}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{b_1}{a_1}t+\frac{c_1}{a_1}}}=\frac{1}{\sqrt{a_1}}\int\frac{d\left(t+\frac{b_1}{2a_1}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{b_1}{2a_1}\right)^2+\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1^2}{4a_1^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a_1}}\ln\left|t+\frac{b_1}{2a_1}+\sqrt{\left(t+\frac{b_1}{2a_1}\right)^2+\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1}{4a_1^2}}\right|+C,\ t=\frac{1}{ax+b}.$$

При $a_1<0$ все выполняется аналогично.

Такого типа пример уже разбирался ранее: $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ (замена $x=1/t$).

3. Для вычисления интегралов бывает полезна следующая формула:

$$\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\underbrace{P_1(x)}_{\substack{\text{многочлен степени}\\ \text{на 1 меньше степени}\\ P \text{ с неопределенными}\\ \text{коэффициентами}}}\sqrt{ax^2+bx+c}+\underbrace{k}_{\text{число}}\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}_{\text{посчитан в п.2}}. \tag{9.8}$$

Дифференцируем обе части этого равенства по x:

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=P_1'(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+P_1(x)\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=P_1'(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+P_1(x)\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

$$P(x)=P_1'(x)(ax^2+bx+c)+P_1(x)\left(ax+\frac{b}{2}\right)+k.$$

Здесь корней уже нет. Равенство верно для всех x. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, находим коэффициенты многочлена $P_1(x)$ и число k. Можно показать, что коэффициенты многочлена $P_1(x)$ и k всегда находятся однозначно.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt{x^2-1}\,dx.$

Решение

$$\int\sqrt{x^2-1}dx=\int\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}dx=(Ax+B)\sqrt{x^2-1}+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Дифференцируем обе части уравнения по x:

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}=A\sqrt{x^2-1}+(Ax+B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}+\frac{k}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$x^2-1=A(x^2-1)+(Ax+B)x+k;\ \ 2A=1,\ \ A=\frac{1}{2};\ B=0;\ -1=-A+k,\ k=-\frac{1}{2}.$$

В итоге получим:

$$\int\sqrt{x^2-1}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

9.8. Интегрирование тригонометрических функций

1. Рассмотрим интеграл вида $I=\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$, где m и n — целые числа, в следующих случаях:

а) Если хотя бы одно из этих чисел нечетно, например $m=2k+1$, k — целое, то

$$I=\int\sin^{2k+1}x\cdot\cos^n xdx=-\int\sin^{2k}x\cdot\cos^n xd\cos x=$$

$$=-\int(1-\cos^2x)^k\cdot\cos^n xd\underbrace{\cos x}_{t}=-\int(1-t^2)^k t^n dt.$$

Это есть интеграл от многочлена при неотрицательных k и n или, если $k<0$ или $n<0$, — интеграл от рациональной дроби.

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

Решение

1) Как уже разбиралось в разд. 9.4,

$$\int \sin^3 x dx = -\int (1-\cos^2 x) d\cos x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C;$$

2) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\sin x}{\cos^2 x} = \int \frac{d\overbrace{\sin x}^{t}}{1-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

Аналогично берутся интегралы вида $\int R(\sin x)\cos x dx$ и $\int R(\cos x)\sin x dx$, где R – рациональная функция. Например,

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(\sin x) d\overbrace{\sin x}^{t} = \int R(t)dt.$$

б) Если оба числа m и n – четные и неотрицательные: $m = 2k$, $n = 2l$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, используем уже упоминавшиеся формулы понижения степени и перехода к двойному углу:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow$$

$I = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^{2l} x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l dx$ – интеграл с вдвое меньшей степенью тригонометрической функции.

Примеры. Найти неопределенные интегралы.

Решение

1) В разд. 9.4. уже показывалось, что

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

2) $$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}[x + \sin 2x] + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

в) Если оба числа m и n – четные и хотя бы одно из них отрицательное, рекомендуется замена $\operatorname{tg} x = t$ (см. п. 3).

2. Теперь рассмотрим $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция.

Здесь используется так называемая *универсальная тригонометрическая подстановка* $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Функции $\sin x$ и $\cos x$ рационально выражаются через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2+1}; \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(числитель и знаменатель были поделены на $\cos^2\frac{x}{2}$);

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \Rightarrow$$

$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx \overset{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}{=} \int \underbrace{R\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}}_{\text{рациональная функция } t} dt$ – интеграл всегда берется.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение

Хотя этот интеграл есть в таблице, вычислим его еще раз:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \overset{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t}{=} \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Метод универсальной тригонометрической подстановки – самый общий, но многие примеры можно решить другими методами.

3. Пусть, например, $I = \int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$, где R – рациональная функция. Здесь более удобна подстановка: $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$x = \operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{1}{1+t^2} dt;$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{1+t^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{1+t^2}$$

(числитель и знаменатель были разделены на $\cos^2 x$). Тогда

$$I = \int \underbrace{R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right)\frac{1}{1+t^2}}_{\text{рациональная функции } t} dt.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\frac{1}{t^2+1}dt}{\frac{1}{(t^2+1)^2}} = \int (t^2+1)dt = t^3 + t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C.$$

Этот пример также иллюстрирует упомянутый выше случай $I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ при четных m и n, из которых хотя бы одно отрицательно.

На практике иногда удобны и другие подстановки: $\operatorname{ctg} x = t$, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = t$ и т.д.

9.9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений при помощи тригонометрических подстановок

Рассмотрим интегралы вида $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,\ a \neq 0,$ где R – рациональная функция. Выделяем полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Если $a > 0$, то $I = \int R\left(x, \sqrt{a}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}_{m}}\right)dx \overset{x+\frac{b}{2a}=t}{=} \int R_1(t, \sqrt{t^2+m})\,dt;$

Если $a < 0$, то $I = \int R\left(x, \sqrt{-a}\sqrt{-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}_{k>0}}\right)dx \overset{x+\frac{b}{2a}=t}{=} \int R_2(t, \sqrt{k-t^2})\,dt.$

Здесь R_1, R_2 – рациональные функции своих аргументов. В случае $a < 0$ обязательно $k > 0$, так как иначе подкоренное выражение отрицательно.

Иногда после такой замены интеграл берется сразу. В общем же случае он преобразуется к интегралу одного из следующих трех видов:

1. $\int R(t, \sqrt{a^2 - t^2})dt;$
2. $\int R(t, \sqrt{a^2 + t^2})dt;$
3. $\int R(t, \sqrt{t^2 - a^2})dt$ (всюду $a > 0$).

Теперь сделаем в этих интегралах тригонометрические подстановки.

1. Подставим $t = a\sin u,\ dt = a\cos u du,\ u = \arcsin\frac{t}{a}$. Тогда

$$\int R(t, \sqrt{a^2-t^2})dt = \int R(a\sin u, \sqrt{a^2(1-\sin^2 u)})a\cos u du =$$

$$= \int \underbrace{R(a\sin u, a\cos u)a\cos u}_{\text{рациональная функция от } \sin u \text{ и } \cos u} du.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left[-(x^2-4x+4)+4\right]^3}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left[4-(x-2)^2\right]^3}} \overset{x-2=t}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{(4-t^2)^3}} \overset{\substack{t=2\sin u\\ u=\arcsin\frac{t}{2}}}{=} \int \frac{2\cos u du}{(2\cos u)^3} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg} u + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{t}{2}\right) + C = \frac{1}{4}\frac{\sin\left(\arcsin\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\arcsin\frac{t}{2}\right)} + C = \frac{1}{4}\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{t}{\sqrt{4-t^2}} + C = \frac{1}{4}\frac{x-2}{\sqrt{4-(x-2)^2}} + C = \frac{1}{4}\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} + C.$$

2. Подставим $t = a\operatorname{tg}u,\ dt = \dfrac{a}{\cos^2 u}du,\ u = \operatorname{arctg}\dfrac{t}{a}$. Тогда

$$\int R(t, \sqrt{a^2+t^2})dt = \int R\left(a\cdot \operatorname{tg}u, \sqrt{a^2(\operatorname{tg}^2 u + 1)}\right)\frac{a}{\cos^2 u}du =$$

$$= \int \overbrace{R\left(a\cdot\operatorname{tg}u, \frac{a}{\cos u}\right)\frac{a}{\cos^2 u}}^{\text{рациональная функция } \sin u \text{ и } \cos u}du.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}dx$.

Р е ш е н и е

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}dx \overset{\substack{x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}}}{\overbrace{\quad=\quad}} \int \frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^4 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int \frac{\cos^4 t dt}{\cos t \cdot \sin^4 t \cdot \cos^2 t} = \int \frac{\cos t\, dt}{\sin^4 t} =$$

$$= \int \frac{d\sin t}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3\sin^3 t} + C = -\frac{1}{3\sin^3(\operatorname{arctg}x)} + C.$$

3. Подставим $t = a\sec u = \dfrac{a}{\cos u},\quad dt = \dfrac{a\sin u}{\cos^2 u}du,\quad u = \arccos\dfrac{a}{t}$. Тогда

$$\int R\left(t, \sqrt{t^2-a^2}\right)dt = \int R\left(\frac{a}{\cos u}, \sqrt{a^2\left(\left(\frac{1}{\cos u}\right)^2 - 1\right)}\right)\frac{a\sin u}{\cos^2 u}du =$$

$$= \int \underbrace{R\left(\frac{a}{\cos u}, a\operatorname{tg}u\right)\frac{a\sin u}{\cos^2 u}}_{\text{рациональная функция } \sin u \text{ и } \cos u}du.$$

В случаях 2 и 3 иногда удобнее использовать гиперболические подстановки $t = a\operatorname{sh}z$ и $t = a\operatorname{ch}z$, основанные на формуле $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$. Интегралы от гиперболических функций берутся так же, как и от тригонометрических.

10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1. Понятие определенного интеграла

Определение 10.1. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем $[a, b]$ на части точками x_i. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$; $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$ — так называемая норма разбиения. В каждом отрезке разбиения выберем произвольную точку ξ_i : $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Рассмотрим интегральную сумму $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Если существует предел такой интегральной суммы при $\lambda \to 0$, не зависящий от выбора точек x_i и ξ_i, то этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{10.1}$$

если этот предел существует и не зависит от выбора точек x_i и ξ_i.

Или

$$\int_a^b f(x)dx = I \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\lambda < \delta\ (|\sigma - I| < \varepsilon)$$

при любых x_i и ξ_i.

Замечание. Если $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ (т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует), то она ограничена на этом отрезке (в противном случае при любом разбиении $[a, b]$ на конечное число частей функция не будет ограниченной на одной из частей; тогда за счет выбора точки ξ в этой части σ можно сделать сколь угодно большой). Поэтому далее $y = f(x)$ будет предполагаться ограниченной на отрезке $[a, b]$.

Геометрический смысл определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$

Пусть $f(x) \geq 0$ для $x \in [a, b]$. Рассмотрим график этой функции (рис. 49).

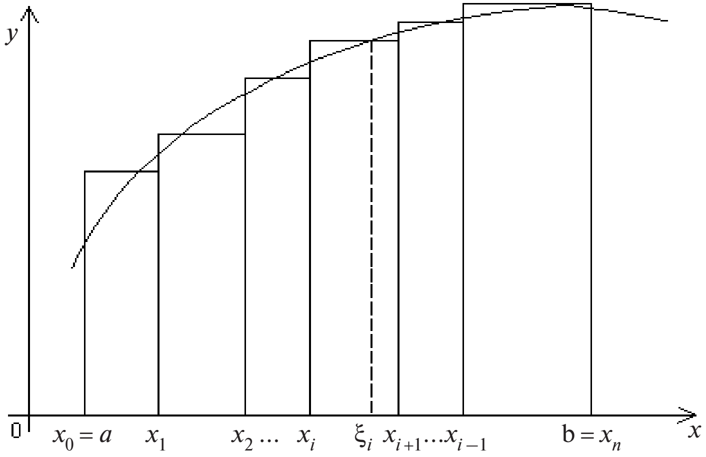


Рис. 49

Произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника, ограниченного прямыми $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = 0$, $y = f(\xi_i)$, поэтому интегральная сумма $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ равна площади изображенной на рисунке ступенчатой фигуры.

Фигуру, ограниченную осью $0x$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, назовем криволинейной трапецией. Под площадью этой криволинейной трапеции мы будем понимать предел площадей наших ступенчатых фигур при норме разбиения $\lambda \to 0$, если этот предел существует и не зависит от выбора точек x_i и ξ_i (при $\lambda \to 0$ ступенчатая фигура все более «приближается» к криволинейной трапеции). Но этот предел (если он существует) равен $\int\limits_a^b f(x)dx$ следовательно, $\int\limits_a^b f(x)dx$ (если он существует) равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью $0x$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $y = f(x) \geq 0$.

10.2. Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx$, если интеграл справа существует (т.е. если существует интеграл справа, то существует интеграл слева, и справедливо наше равенство).

$$▲ \int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha f(\xi_i)]\Delta x_i}_{\substack{\text{произвольная} \\ \text{интегральная сумма} \\ \text{для интеграла слева}}} = \alpha \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i}_{\substack{\text{интегральная сумма} \\ \text{для интеграла справа}}} = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

2. $\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$, если интегралы справа существуют.

$$▲ \int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)]\Delta x_i}_{\substack{\text{произвольная интегральная} \\ \text{сумма для интеграла слева}}} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f_1(\xi_i)\Delta x_i}_{\substack{\text{интегральная сумма} \\ \text{для первого} \\ \text{интеграла справа}}} + \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i)\Delta x_i}_{\substack{\text{интегральная сумма} \\ \text{для второго} \\ \text{интеграла справа}}} = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx. \blacksquare$$

3. $\int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int\limits_a^b [f_1(x) + (-1)f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx +$

$+\int\limits_a^b (-1)f_2(x)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx - \int\limits_a^b f_2(x)dx$, если интегралы справа существуют.

4. $f(x) \geq 0,\ x \in [a,b] \Rightarrow \int\limits_b^a f(x)dx \geq 0$, если этот интеграл существует.

$$▲ \int\limits_b^a f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f(\xi_i)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{> 0}}_{\geq 0} \geq 0 \text{ (из свойств пределов функции).} \blacksquare$$

5. $f(x) \ge g(x),\ x \in [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx,$ если эти интегралы существуют.

▲ $f(x) - g(x) \ge 0 \Rightarrow \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]dx \ge 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx \ge 0 \Rightarrow$

$\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx.$ ■

6. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$, если оба этих интеграла существуют.

▲ $f(x) \le |f(x)| \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$;

$$-f(x) \le |f(x)| \Rightarrow \int\limits_a^b [-f(x)]dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx \Rightarrow -\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Но $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$ равен $\int\limits_a^b f(x)dx$ или $-\int\limits_a^b f(x)dx$, а обе эти величины, как получено, не превосходят $\int\limits_a^b |f(x)|dx.$ ■

7. $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \le f(x) \le M$, $x \in [a,b]$. Тогда $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

$$▲\, m \le f(x) \le M \Rightarrow \int\limits_a^b mdx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b Mdx \Rightarrow m\int\limits_a^b dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M\int\limits_a^b dx$$

$$\text{и } \int\limits_b^a dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f(\xi_i)}_{=1}\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i}_{b-a} = b - a \Rightarrow m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le$$

$\le M(b-a).$ ■

8. **Теорема 10.1 (о среднем)**. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

▲ Как будет показано далее, интеграл от функции, непрерывной на отрезке, всегда существует. В свойстве 7 числа m и M — любые. Теперь пусть m и M — наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, следовательно, по свойству 7 можно записать:

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le M.$$

Мы видим отсюда, что число $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ заключено между m и M. Но функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке все промежуточные значения между m и M, следовательно, существует точка $\xi \in [a, b]$, такая, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow f(\xi)(b-a) = \int\limits_a^b f(x)dx. \ ■$$

9. $a < c < b \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, если все эти интегралы существуют.

▲ $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$; так как интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует, то можно рассмотреть только удобные для нас разбиения отрезка $[a, b]$, а именно такие, в которых точка c является одной из точек разбиения: $c = x_k$ (рис. 50). Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0}\left[\sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right] =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=k}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

(на самом деле для справедливости теоремы достаточно существования двух интегралов в правой части равенства). ■

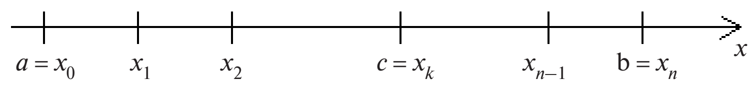


Рис. 50

10. До сих пор $\int_a^b f(x)dx$ был определен только для случая $a < b$. Положим теперь, что при $a > b$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (если интеграл $\int_b^a f(x)dx$ существует) и $\int_a^a f(x)dx = 0$. Легко проверить, что все свойства определенного интеграла, которые выражаются знаком равенства (1, 2, 3, 8, 9), верны и в этом случае. Свойство 9 справедливо независимо от взаимного расположения точек a, b и c.

10.3. Существование определенного интеграла

Ниже будут изучаться условия, которые надо наложить на функцию $y = f(x)$, чтобы интеграл от нее, т.е. предел (10.1), заведомо существовал.

Верхние и нижние интегральные суммы и их свойства

Выше функция $y = f(x)$ предполагалась ограниченной, а так как по теореме 1.1 у всякого ограниченного множества существуют верхняя и нижняя грани, то существуют числа $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$. Рассмотрим так называемые нижние и верхние интегральные суммы (или суммы Дарбу) $s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$, $S = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$. Для данного разбиения отрезка $[a, b]$

$$s \le \sigma \le S. \qquad (10.2)$$

Суммы Дарбу характеризуются следующими свойствами.

Теорема 10.2. Если к имеющимся точкам деления добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу не уменьшится, а верхняя не увеличится.

▲ Достаточно проанализировать случай добавления одной точки $x' \in (x_k, x_{k+1})$. Тогда новые суммы Дарбу будут отличаться от старых только тем, что вместо слагаемых $m_k \Delta x_k$ и $M_k \Delta x_k$ появятся слагаемые

$$\inf_{x\in[x_k,x']} f(x)(x'-x_k) + \inf_{x\in[x',x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1}-x') \ge$$

$$\ge m_k(x'-x_k) + m_k(x_{k+1}-x') = m_k(x'-x_k+x_{k+1}-x') = m_k\Delta x_k,$$

$$\sup_{x\in[x_k,x']} f(x)(x'-x_k) + \sup_{x\in[x',x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1}-x') \le$$

$$\le M_k(x'-x_k) + M_k(x_{k+1}-x') = M_k(x'-x_k+x_{k+1}-x') = M_k\Delta x_k. \ ■$$

Теорема 10.3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы Дарбу (эти суммы могут отвечать разным разбиениям отрезка $[a, b]$).

▲ Пусть имеются два разбиения отрезка $[a, b]$ с нижними и верхними суммами Дарбу – s_1, S_1 и s_2, S_2 соответственно. Объединим те и другие точки деления, тогда получим новое разбиение $[a, b]$ с нижней и верхней суммами Дарбу – s и S. Используя формулу (10.2) и теорему 10.2, имеем $s_1 \le s \le S \le S_2 \Rightarrow s_1 \le S_2$. ■

Из теоремы 10.3 следует, что множество всех нижних сумм Дарбу ограничено сверху (любой верхней суммой Дарбу), а множество всех верхних сумм Дарбу ограничено снизу (любой нижней суммой Дарбу), тогда по теореме 1.1 эти множества имеют соответственно верхнюю и нижнюю грань: $I_* = \sup s$, $I^* = \inf S$. Легко понять, что $I_* \le I^*$; в противном случае из определения верхней и нижней граней следует, что существует нижняя сумма $s > \frac{I_* + I^*}{2}$ и верхняя сумма $S < \frac{I_* + I^*}{2} \Rightarrow s > S$, что противоречит теореме 10.3 (рис. 51).

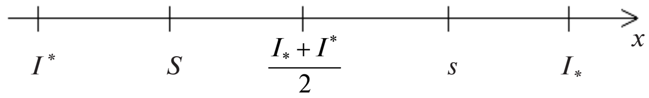


Рис. 51

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 10.4. Для любых нижней s и верхней S сумм Дарбу (в принципе отвечающих разным разбиениям отрезка $[a, b]$)

$$s \le I_* \le I^* \le S. \qquad (10.3)$$

Теорема 10.5. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.

▲ По теореме 3.7 непрерывная функция $y = f(x)$ принимает на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ свои наименьшее и наибольшее значения, которые как раз и будут равны введенным выше числам m_i и M_i. Таким образом, суммы Дарбу для непрерывной функции будут являться одними из интегральных сумм.

По теореме Кантора 3.9 непрерывная функция $y = f(x)$ будет равномерно непрерывной на отрезке $[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ |x_2 - x_1| < \delta \left(|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right).$$

Так как m_i и M_i являются одними из значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, то отсюда следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall \lambda < \delta \left(M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a},\quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \right),$$

Значит, для s и S, отвечающих одному разбиению отрезка $[a, b]$, такому, что $\lambda < \delta$, имеем

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow S - s < \varepsilon.$$

Так как ε здесь сколь угодно мало, то из формулы (10.3) для такого разбиения следует, что $I_* = I^*$. Обозначим общее значение этих чисел через I. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \lambda < \delta\ (|S - s| < \varepsilon \Rightarrow |s - I| < \varepsilon, |S - I| < \varepsilon).$$

Но так как $s \le \sigma \le S$, то тогда $|\sigma - I| < \varepsilon$, следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \lambda < \delta\ (|\sigma - I| < \varepsilon),$$

что и означает существование определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. ■

Определение 10.2. Функция $y = f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке она имеет только конечное число разрывов и все эти разрывы первого рода.

Для такой функции отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число частей (от одной точки разрыва до другой), на каждой из которых

функция будет непрерывной. Тогда по теореме 10.5 интеграл от функции по каждой части существует, а интеграл по всему отрезку, согласно свойству 9 определенных интегралов, тоже существует и считается как сумма интегралов по частям.

10.4. Вычисление определенного интеграла

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда она непрерывна, а значит, интегрируема на любом отрезке $[a, x]$, где $x \in [a, b]$. Положим, что $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ – это так называемый интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 10.6 (о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу). Пусть $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x),\quad x \in [a, b], \tag{10.4}$$

или производная интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в этом верхнем пределе.

$$▲\quad F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right] \overset{\substack{\text{свойство 9.} \\ \text{определенного} \\ \text{интеграла}}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt \overset{\text{т.10.1}}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} f(\underset{\xi \in [x, x+\Delta x]}{\xi})(x + \Delta x - x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$$

в силу непрерывности функции $y = f(x)$. ■

Замечание. Из теорем 10.5 и 10.6 следует, что для непрерывной функции $y = f(x)$ существует первообразная. Этой первообразной будет $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ (так как, как только что доказано, $F'(x) = f(x)$).

Следствия

1) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_x^a f(t)dt = -\dfrac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = -f(x);$

2) используя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt \underset{a\text{ – любое}}{=} \frac{d}{dx}\left[\int\limits_{\varphi(x)}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{\psi(x)} f(t)dt\right]_{\psi(x)=z}^{\varphi(x)=y} =$$

$$= \left(\frac{d}{dy}\int\limits_{y}^{a} f(t)dt\right)\cdot\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d}{dz}\int\limits_{a}^{z} f(t)dt\right)\cdot\frac{dz}{dx} = -f(y)\cdot\varphi'(x) + f(z)\cdot\psi'(x) =$$

$$= f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Теорема 10.7 (**формула Ньютона–Лейбница**). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для этой функции. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (10.5)$$

▲ По теореме 10.6 $\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ является первообразной функцией для $f(x),\ x \in [a,b] \Rightarrow$ по теореме 9.1 любая первообразная для $f(x)$ может быть записана в виде

$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt + \underbrace{C}_{\text{постоянная}},\ x \in [a,b]. \qquad (10.6)$$

Положим в формуле (10.6) $x = a \Rightarrow F(a) = 0 + C \Rightarrow C = F(a)$. Подставляя это значение в (10.6) и полагая $x = b$, имеем

$$F(b) = \int\limits_{a}^{b} f(t)dt + C = \int\limits_{a}^{b} f(t)dt + F(a) \Rightarrow F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(t)dt = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

(переменную интегрирования можно обозначить любой буквой). ■

Пример. Найти определенный интеграл $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$.

Решение

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{4}.$$

10.5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Замена переменной

Теорема 10.8. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, т.е. имеет на этом отрезке непрерывную производную $\varphi'(t)$. Пусть $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$ и при $t \in (\alpha,\beta)\ \ \varphi(t) \in (a,b)$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt. \qquad (10.7)$$

Интеграл слева существует как интеграл от непрерывной функции; интеграл справа также существует, так как по условию сложная функция $f(\varphi(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $\varphi'(t)$ также непрерывна на этом отрезке.

▲ По формуле Ньютона–Лейбница $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$.

Функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, так как

$$\Big[F(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\Big]_t' = F'(x)\cdot\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow$$

по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx. \blacksquare$$

Заметим, что при использовании формулы (10.7) не нужно возвращаться к старой переменной x, нужно просто вычислить интеграл в правой части и подставить пределы по t. Однако не следует забывать, что при переходе от одной переменной к другой обязательно меняются пределы интегрирования.

Пример. Найти определенный интеграл $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

Решение

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} \overset{x=\frac{1}{\cos t}}{=} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^4 t\cdot\cos t}{\sin t}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^3 t dt.$$

Здесь $dx = d\dfrac{1}{\cos t} = -\cos^{-2} t(-\sin t) = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$, а пределы по новой переменной t определяются следующим образом: $x = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos t} = 2,\ \cos t = \dfrac{1}{2},\ t = \dfrac{\pi}{3}$;
$x = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos t} = \sqrt{2},\ \cos t = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ t = \dfrac{\pi}{4}$; отметим, что $x \in [\sqrt{2}, 2]$ при $t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Продолжаем пример:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \sin^2 t) d\sin t \overset{\sin t = u}{=} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1 - u^2) du = \left(u - \frac{u^3}{3} \right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\left[\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{2\sqrt{2}}{8}\right] = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{24} = \frac{9\sqrt{3} - 10\sqrt{2}}{24}.$$

Интеграл от четной и нечетной функции в симметричных пределах

$$\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{нечетная}\\ \text{функция}}} dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)dx}_{x=-t,\ dx=-dt} + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

Следовательно, интеграл от нечетной (непрерывной) функции в симметричных пределах равен нулю.

Аналогично при такой же замене

$$\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{четная}\\ \text{функция}}} dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Интегрирование по частям

Теорема 10.9. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b uv' dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v dx. \qquad (10.8)$$

Или, обозначая $v'dx = dv,\ u'dx = du$,

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (10.9)$$

▲ $(uv)' = u'v + uv'$; интегрируем обе части от a до b:

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx.$$

Но $\int_a^b (uv)' dx = uv\Big|_a^b \Rightarrow (uv)\Big|_a^b = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx \Rightarrow \int_a^b uv' dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v dx.$ ■

Пример. Найти определенный интеграл $\int_0^1 xe^x dx.$

Решение

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

Здесь $u = x,\ \ du = dx,\ \ dv = e^x dx,\ \ v = \int e^x dx = e^x.$

Или, более коротко,

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x de^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

10.6. Вычисление площадей плоских фигур

Вычисление площадей в декартовой системе координат

1. Как было показано в разд. 10.1, площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью $0x$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком непрерывной (или кусочно-непрерывной) функции $f(x) \geq 0$ (рис. 52), равна $S(x) = \int_a^b f(x)dx.$

2. Пусть теперь $y = f(x) \leq 0,\ x \in [a, b]$ (рис. 53), следовательно, $-f(x) \geq 0.$

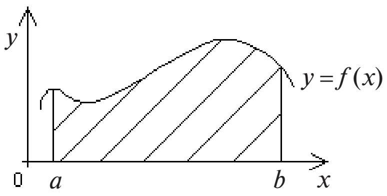


Рис. 52

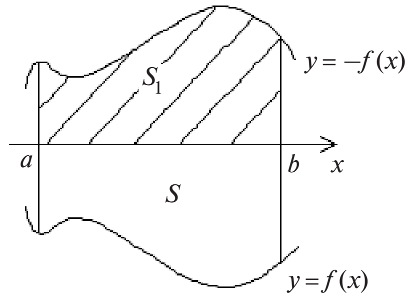


Рис. 53

Тогда площадь криволинейной трапеции

$$S = S_1 = \int_a^b [-f(x)]dx = -\int_a^b f(x)dx \Rightarrow S = -\int_a^b f(x)dx.$$

3. Теперь рассмотрим общий случай.

Теорема 10.10. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиками двух непрерывных (или кусочно-непрерывных) функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \ge f_1(x)$ (рис. 54),

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx. \qquad (10.10)$$

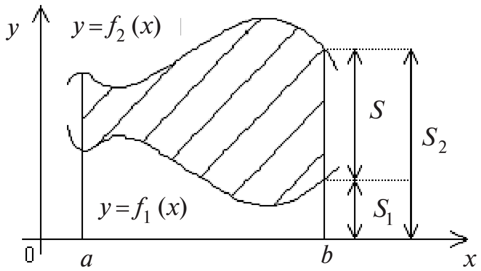


Рис. 54

▲ $S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx$, что и доказывает формулу (10.10) при $f_1(x) \ge 0$.

Теперь докажем, что формула (10.10) справедлива и без этого дополнительного предположения.

Пусть $f_1(x) \ge C$, $x \in [a,b]$ ($C < 0$ любое). Сдвинем графики обеих функций вверх на $-C$. При этом искомая площадь не изменится: $S = S_1$, где S_1 – площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиками неотрицательных функций $y = f_1(x) - C$ и $y = f_2(x) - C$, $f_2(x) - C \ge f_1(x) - C$. Следовательно,

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - C - f_1(x) + C \right] dx = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx. \blacksquare$$

Вычисление площади при параметрическом задании границы области

Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью $0x$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривой заданной параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t) \ge 0$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (рис. 55); функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$.

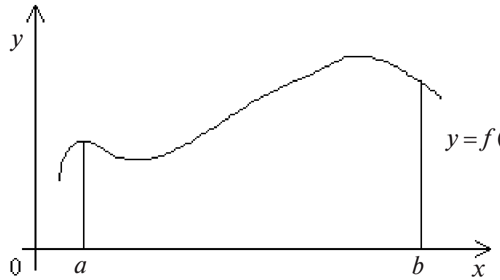


Рис. 55

Пусть уравнения $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ определяют некоторую непрерывную (или кусочно-непрерывную) функцию $y = f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$. Сделав замену $x = \varphi(t)$, получим

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\varphi(t))}_{y = \psi(t)} \varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \Rightarrow$$

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)dx(t) = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)dt. \qquad (10.11)$$

Замечание. Здесь α соответствует левому краю отрезка, а β – правому, поэтому не обязательно, что $\alpha < \beta$.

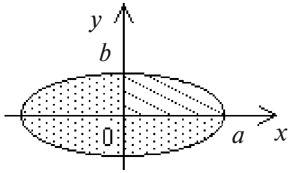


Рис. 56

Пример. Найдем площадь, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 56).

Решение

Запишем уравнения эллипса параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

Тогда искомая площадь

$$S = 4S_1 = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt =$$

$$= -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = -2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -2ab\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi ab.$$

Здесь $t=\dfrac{\pi}{2}$ соответствует левому краю криволинейной трапеции $(x=0, y=b)$, $t=0$ соответствует правому краю трапеции $(x=a, y=0)$.

Площадь в полярных координатах

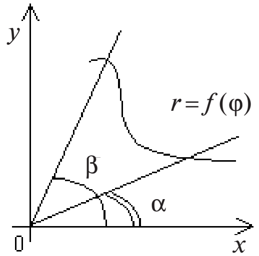


Рис. 57

Теорема 10.11. Площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ и кривой, заданной уравнением $r=f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ непрерывна при $\varphi\in[\alpha,\beta]$ (рис. 57),

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi. \qquad (10.12)$$

▲ Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$ (рис. 58).

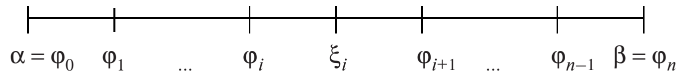


Рис. 58

На каждом отрезке $[\varphi_i,\varphi_{i+1}]$ выберем произвольную точку ξ_i. Обозначим $r_i=f(\xi_i)$. Рассмотрим так называемую «ступенчатую»

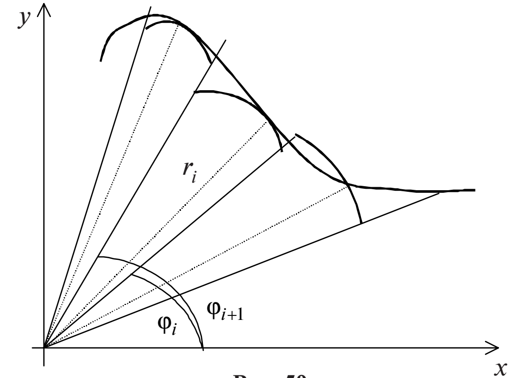


Рис. 59

фигуру (рис. 59), ограниченную лучами $\varphi=\varphi_i$ и дугами окружностей радиуса r_i.

Как и в случае площадей в декартовых координатах, площадь криволинейного сектора вычисляется путем сведения к известным нам площадям фигур. Под площадью криволинейного сектора будем понимать предел площадей ступенчатых фигур при $\lambda\to 0$, где $\lambda=\max_i\Delta\varphi_i$, $\Delta\varphi_i=\varphi_{i+1}-\varphi_i$, если этот предел существует и не зависит от выбора точек φ_i и ξ_i. Тогда

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}S_i \underset{\substack{\text{площадь сектора}\\ \text{радиуса } r \text{ с углом } \alpha\\ \text{равна } \frac{1}{2}r^2\alpha}}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}r_i^2\cdot\Delta\varphi_i =$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f^2(\xi_i)\Delta\varphi_i \underset{\substack{f^2(\varphi)\,-\\ \text{непрерывная}\\ \text{функция}}}{=} \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\varphi)d\varphi. \;\blacksquare$$

Пример. Найти площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ (рис. 60).

Решение

Перейдем к полярным координатам: $r^4=r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi=r^2\cos 2\varphi$, $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$. Именно эта формула удобна для построения нашей кривой.

Если S_1 – площадь части фигуры, находящейся в 1-й четверти, то искомая площадь

$$S=4S_1=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d2\varphi=\sin 2\varphi=1.$$

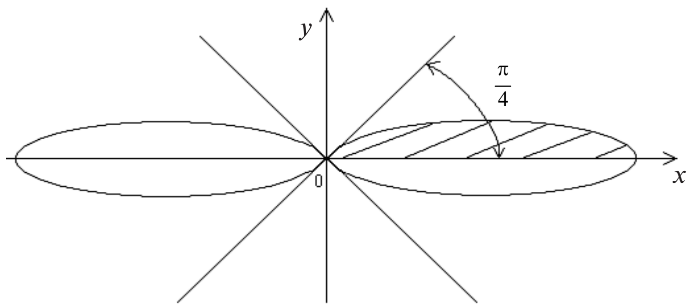


Рис. 60

10.7. Длина дуги плоской кривой

Длина дуги в декартовых координатах

Пусть дана кривая $y = f(x)$. Разобьем ее на части точками и соединим эти точки прямыми. Получим так называемую вписанную ломаную (рис. 61).

Под длиной дуги M_0M_n понимается предел длин вписанной ломаной $M_0M_1...M_{n-1}M_n$ при длине ее наибольшего звена *s*, стремящейся к 0, если этот предел существует и не зависит от выбора точек M_i.

Теорема 10.12. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда длина дуги M_0M_n

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx. \qquad (10.13)$$

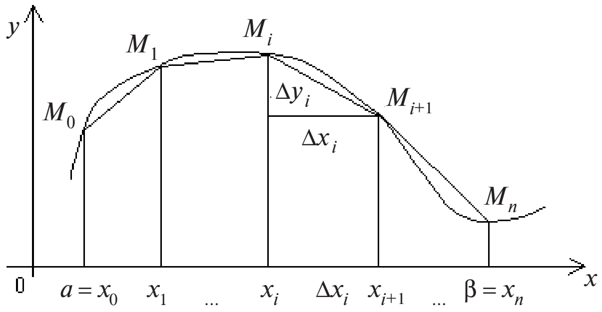


Рис. 61

▲ $$l = \lim_{s\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1} = \lim_{s\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2} = \lim_{s\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Применим теорему 5.4:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f'(c_i)(x_{i+1}-x_i) = f'(c_i)\Delta x_i \Rightarrow \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i),\ c_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

тогда

$$l = \lim_{s\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot\Delta x_i.$$

Так как при $s \to 0$ $\max_i \Delta x_i \to 0,$ то это есть интегральная сумма, которая в пределе дает интеграл:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx. \quad ■$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически

Теорема 10.13. Пусть уравнение кривой задано в параметрической форме: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in [\alpha,\beta]$. Тогда длина дуги

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt. \qquad (10.14)$$

▲ По условию теоремы либо всюду $\varphi'(t) > 0$, либо всюду $\varphi'(t) < 0$. Значит, $\varphi(t)$ всюду либо возрастает, либо убывает, и существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x) \Rightarrow y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \Rightarrow$ уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определяют некоторую функцию $y = f(x)$, имеющую производную $y' = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

1. Пусть $\varphi'(t) > 0,\ t \in [\alpha,\beta] \Rightarrow \varphi(t)$ возрастает на $[\alpha,\beta] \Rightarrow x =$

$$= \varphi(t) \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] \Rightarrow l = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \sqrt{1+(y')^2}\,dx \overset{x=\varphi(t)}{=}$$

$$\overset{x=\varphi(t)}{=}\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)dt \overset{\varphi'(t)>0}{=} \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt.$$

2. Пусть $\varphi'(t)<0,\ t\in[\alpha,\beta]\Rightarrow\varphi(t)$ убывает на $[\alpha,\beta]\Rightarrow x=$

$$=\varphi(t)\in[\varphi(\beta),\varphi(\alpha)]\Rightarrow l=\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)}\sqrt{1+(y')^2}dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int_\beta^\alpha \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)dt \overset{\varphi'(t)<0}{=}$$

$$=-\int_\beta^\alpha \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt. \quad \blacksquare$$

Замечания.

1. На самом деле формула (10.14) верна только при условии непрерывности φ' и ψ' без дополнительного предположения $\varphi'(t)\neq 0$.
2. В формуле (10.14) обязательно $\alpha<\beta$.

Пример. Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $a>0$ (рис. 62).

Решение

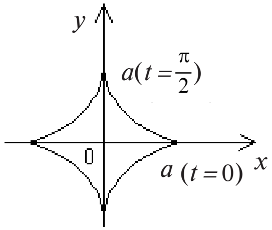


Рис. 62

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}dt=$$

$$=4\cdot 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t d\sin t=6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a(1-0)=6a.$$

Длина дуги в полярных координатах

Теорема 10.14. Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой $r=f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда длина дуги

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(r')^2+r^2}d\varphi. \qquad (10.15)$$

▲ $\left.\begin{matrix} x=r\cos\varphi=f(\varphi)\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi=f(\varphi)\sin\varphi \end{matrix}\right\}$ — параметрические уравнения кривой (φ — параметр). Для нахождения длины дуги можно применить формулу (10.14):

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{[f'(\varphi)\cos\varphi-f(\varphi)\sin\varphi]^2+[f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi]^2}d\varphi=$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{(f')^2\cos^2\varphi+f^2\sin^2\varphi-2f'f\cos\varphi\sin\varphi+(f')^2\sin^2\varphi+f^2\cos^2\varphi+\overline{+2f'f\sin\varphi\cos\varphi}}\,d\varphi=$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{(f')^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+(f)^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}d\varphi=\sqrt{(f')^2+f^2}d\varphi. \blacksquare$$

10.8. Вычисление объемов тел

Хотя для вычисления объемов более удобны двойные и тройные интегралы (которые будут рассмотрены позже), объемы в принципе можно вычислять и при помощи обычного определенного интеграла.

Вычисление объемов по площадям параллельных (поперечных) сечений

Пусть имеем некоторое тело T, $x\in[a,b]$ и пусть для каждого $x\in[a,b]$ нам известна $S=S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси $0x$ в точке с абсциссой x (рис. 63). Такие сечения называются параллельными или поперечными.

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. На каждом отрезке разбиения возьмем произвольную точку $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ и рассмотрим ступенчатое цилиндрическое тело, составленное из цилиндров, изображенных на рис. 64 (ос-

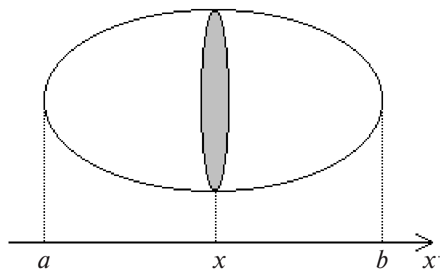


Рис. 63

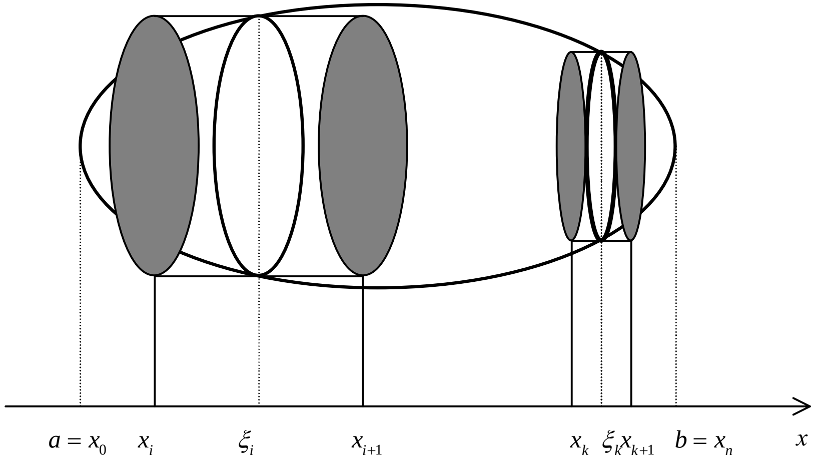


Рис. 64

нованием цилиндра, у которого $x \in [x_i, x_{i+1}]$, будет сечение, полученное при $x = \xi_i$).

Под объемом тела V будем понимать предел объемов ступенчатых цилиндрических тел при $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i \to 0,$ если этот предел существует и не зависит от выбора точек x_i и ξ_i. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 10.15. Если функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{10.16}$$

▲ $V = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \underbrace{V_i}_{\text{объем } i\text{-го цилиндра}} = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \underbrace{S_i}_{\text{площадь основания}} \underbrace{\Delta x_i}_{\text{высота}} = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} S(\xi_i)\Delta x_i.$

Последняя сумма есть интегральная сумма для интеграла $\int_a^b S(x)dx,$ которая в силу непрерывности подынтегральной функции в пределе дает этот интеграл: $V = \int_a^b S(x)dx.$ ■

Пример. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (рис. 65).}$$

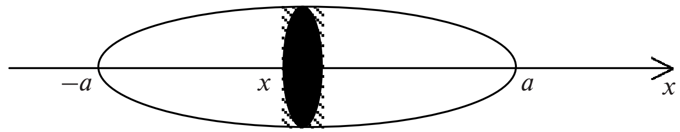


Рис. 65

Решение

В сечении плоскостью $x = \text{const}$ получим эллипс:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Площадь, ограниченная этим эллипсом (см. пример в разд. 10.6),

$$S = S(x) = \pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc \underbrace{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}_{\text{четная функция}} dx = 2\pi bc\int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 2\pi bc\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Объем тела вращения

Найдем объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью $0x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a \le b$) (рис. 66).

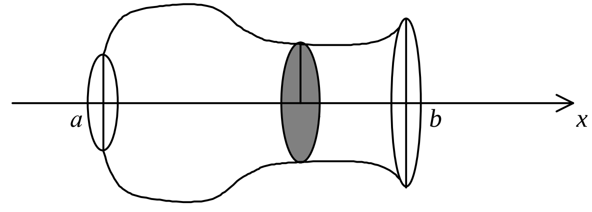


Рис. 66

Исходя из формулы (10.16) имеем

$$V=\int_a^b \underbrace{S(x)}_{\substack{\text{площадь круга}\\ \text{радиуса } y=|f(x)|}} dx=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Итак,

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (10.17)$$

11. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

11.1. Определение несобственного интеграла

Нахождение определенного интеграла как предела интегральных сумм теряет смысл в случаях бесконечных пределов интегрирования (так как тогда интегральная сумма содержит бесконечное число слагаемых) или неограниченной подынтегральной функции (так как интегрируемая функция обязательно ограничена). Для таких случаев дается определение несобственного интеграла. Вначале дадим его в случае, когда так называемая особенность (это бесконечный предел интегрирования или точка бесконечного разрыва подынтегральной функции) – одна и находится на правом краю промежутка интегрирования.

Определение 11.1. Пусть функция $y=f(x)$ определена на полуинтервале $[a,b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,c]$, где $a<c<b\le\infty$ (т.е. $\int_a^c f(x)dx$ существует). По определению

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx, \qquad (11.1)$$

если этот предел существует и конечен. В этом случае несобственный интеграл называется *сходящимся*. В противном случае (предел не существует или бесконечен) несобственный интеграл называется *расходящимся*.

В частности, $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ для неограниченной при $x\to b-0$ функции.

Аналогично по определению $\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a}\int_c^b f(x)dx$, если $f(x)$ интегрируема в любом $[c,\,b]$, где $-\infty\le a<c<b$.

Если интеграл имеет несколько особенностей, то по определению он представляется в виде суммы интегралов с одной особенностью на краю в каждом и называется сходящимся, если сходится каждый из этих интегралов. В этом случае значение всего интеграла, т.е. суммы слагаемых, не зависит от расположения точек деления: пусть, например, a и b – две особенности для $\int_a^b f(x)dx$ и $c,d\in(a,b)$. Тогда

$$\int_a^c+\int_c^b=\lim_{a'\to a}\int_{a'}^c+\lim_{b'\to b}\int_c^{b'}=\lim_{a'\to a}\left(\int_{a'}^d+\int_d^c\right)+\lim_{b'\to b}\left(\int_c^d+\int_d^{b'}\right)=\int_a^d+\int_d^c+\int_c^d+\int_d^b=\int_a^d+\int_d^b$$

$$(a'>a,\ b'<b).$$

11.2. Геометрический смысл, свойства и вычисление несобственных интегралов

Всюду для определенности будет предполагаться, что интеграл имеет только одну особенность в точке b.

Геометрический смысл

Пусть $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на $[a,b)\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{c\to b\\ c<b}}\int_a^c f(x)dx,$$

что по определению будем считать площадью изображенной на рис. 67 и 68 бесконечной области.

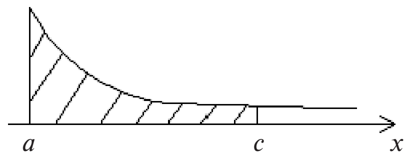


Рис. 67

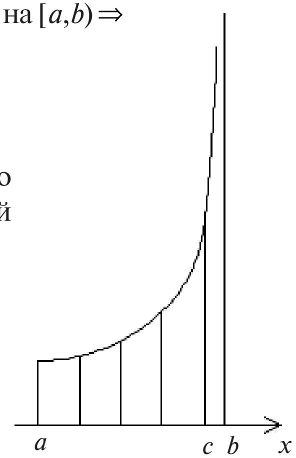


Рис. 68

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,b)$ и $F(x)$ — ее первообразная на этом полуинтервале, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)dx = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} F(x)\Big|_a^c =$$

$$= \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} F(c) - F(a) \overset{\text{опр.}}{=} F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(b) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$. При этом левая и правая части этой формулы конечны или бесконечны одновременно.

Примеры. Исследовать на сходимость несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ и $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$.

Решение

1. При $\alpha \neq 1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(-\alpha+1)x^{\alpha-1}}\Bigg|_a^{+\infty}.$$

Этот предел существует и конечен при $\alpha - 1 > 0$ и бесконечен при $\alpha - 1 < 0$.

При $\alpha = 1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^{\infty} = \infty.$$

То есть $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

2. При $\alpha \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\int_a^b \frac{d(b-x)}{(b-x)^\alpha} = -\frac{1}{(-\alpha+1)(b-x)^{\alpha-1}}\Bigg|_a^b.$$

Этот предел существует и конечен при $\alpha - 1 < 0$ и бесконечен при $\alpha - 1 > 0$.

При $\alpha = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\int_a^b \frac{d(b-x)}{b-x} = -\ln(b-x)\Big|_a^b = \infty.$$

То есть $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

Эти выводы верны и для $\int_{-\infty}^b \frac{dx}{x^\alpha}$ $(b<0)$, и для $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

Линейность

Если сходятся несобственные интегралы $\int_a^b f_1(x)dx$ и $\int_a^b f_2(x)dx$, то сходится и

$$\int_a^b \left[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\right] dx = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c \left[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\right] dx =$$

$$= \alpha_1 \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f_1(x)dx + \alpha_2 \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f_2(x)dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

Аддитивность

Если сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и $d \in (a,b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)dx = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \left(\int_a^d f(x)dx + \int_d^c f(x)dx\right) =$$

$$= \int_a^d f(x)dx + \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_d^c f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

Интегрирование неравенств

Пусть несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и для $\forall x \in [a,b)$ $f(x) \le g(x)$. Так как для $\forall x \in [a,b)$ $\int_a^c f(x)dx \le \int_a^c g(x)dx$, то, переходя в этом неравенстве к пределу при $c \to b$, имеем

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b)$ и сходятся несобственные интегралы

$$\int_a^b u(x)dv(x) = \int_a^b u(x)v'(x)dx \text{ и } \int_a^b v(x)\,du(x) = \int_a^b v(x)u'(x)\,dx,$$

то

$$\int_a^b u(x)dv(x) = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c u(x)dv(x) = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} u(c)v(c) - u(a)v(a) - \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c v(x)\,du(x)$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x),$$

где по определению $u(b)v(b) = \lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} u(c)v(c)$.

Замена переменной

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$; $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta)$; $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = b$; при $t \in [\alpha,\beta)$ $\varphi(t) \in [a,b)$; существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, непрерывно дифференцируемая при $x \in [a,b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)dx = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_\alpha^{\varphi^{-1}(c)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi(t)\,dt$$

(так как при $c \to b$ $\varphi^{-1}(c) \to \beta$ и $\varphi^{-1}(c) < \beta$). При этом интегралы в левой и правой частях этой формулы (если они являются несобственными) сходятся или расходятся одновременно.

11.3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Рассмотрим два несобственных интеграла, каждый из которых имеет одну особенность в точке b: 1) $\int_a^b f(x)dx$ и 2) $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема 11.1 (сравнения). Пусть для $\forall x \in [a,b)$ $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда если интеграл 2 сходится, то сходится и интеграл 1, а если интеграл 1 расходится, то расходится и интеграл 2.

▲ Пусть интеграл 2 сходится и $\int_a^b g(x)dx = G$. Рассмотрим функцию $\varphi(c) = \int_a^c f(x)dx$, где $c \in [a,b)$. Эта функция не убывает и ограничена сверху на $[a,b)$, так как при $c_1 < c_2$

$$\varphi(c_2) = \int_a^{c_2} f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \ge \int_a^{c_1} f(x)dx = \varphi(c_1) \quad \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \ge 0\right);$$

$$\varphi(c) = \int_a^c f(x)dx \le \int_a^c g(x)dx \le \int_a^b g(x)dx = G.$$

Но (аналогично теореме 2.10) всякая неубывающая, ограниченная сверху функция имеет конечный предел, следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \varphi(c) = \lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)dx$, т.е. интеграл 1 сходится.

Если же интеграл 1 расходится, то расходится и интеграл 2, так как если бы этот интеграл сходился, то по уже доказанному утверждению сходился бы и интеграл 1, что противоречит условию теоремы. ■

Замечание. На самом деле для справедливости теоремы достаточно выполнения неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$ только для x, достаточно близких к b: если $0 \le f(x) \le g(x)$ для $\forall x > a_0$, то $\int_a^b = \int_a^{a_0} + \int_{a_0}^b$. В правой части этой формулы первый интеграл является некоторым числом, а ко второму применима теорема 11.1.

Возможность применения теоремы сравнения зависит от справедливости неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$, которое во многих случаях не является существенным для результата. Поэтому для исследования несобственных интегралов на сходимость часто более удобной оказывается следующая теорема.

Теорема 11.2 (сравнения в предельной форме). Пусть для $\forall x \in [a,b)$ $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ и существует $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, где $K \neq 0$, $K \neq \infty$. Тогда интегралы 1 и 2 сходятся или расходятся одновременно (что обозначается как $\int\limits_a^b f(x)dx \sim \int\limits_a^b g(x)dx$). При $K=0$ из сходимости интеграла 2 следует сходимость интеграла 1, а при $K=\infty$ из расходимости интеграла 2 следует расходимость интеграла 1.

▲ Пусть интеграл 2 сходится. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, то для x, достаточно близких к b,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - K < \varepsilon \Rightarrow f(x) < (K+\varepsilon)g(x),$$

и так как $\int\limits_a^b (K+\varepsilon)g(x)dx$ тоже сходится, то по замечанию к теореме 11.1 сходится и интеграл 1. Эта часть доказательства справедлива и при $K=0$.

Пусть теперь сходится интеграл 1. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{K}$, то по уже доказанной первой части теоремы интеграл 2 тоже сходится.

Если $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, то $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, тогда из сходимости интеграла 1 следует сходимость интеграла 2, а значит, из расходимости интеграла 2 следует расходимость интеграла 1 (доказательство методом от противного: пусть интеграл 1 сходится, тогда, как только что было отмечено, сходится интеграл 2, а это не так). ■

В примерах в качестве одного из интегралов 1 и 2 берется исследуемый на сходимость интеграл, а в качестве другого часто берется один из интегралов, рассмотренных в разд. 11.2: $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$; $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Пример 1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

Решение

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} + \int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}.$$

Используем теорему 11.2, тогда $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}} \sim$ $\sim \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$, а этот интеграл сходится $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$; $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} \sim \int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$, а этот интеграл сходится $\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$. То есть исходный интеграл сходится $\left(\text{строгое обоснование: } \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^3-1}} = 1\right)$.

Пример 2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Решение

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ расходится, так как в силу первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ имеем $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x} \sim \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$, а последний интеграл расходится ($\alpha = 1$).

11.4. Несобственные интегралы от функций произвольного знака

Определение 11.2. Рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ с одной особенностью в точке b. Этот интеграл называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 11.3. Если $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ тоже сходится, т.е. если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он сходится в обычном смысле.

▲ Представим функцию $f(x)$ в виде $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, где

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \ge 0; \\ 0, & \text{если } f(x) < 0; \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \ge 0; \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Так как $0 \le f_+(x) \le |f(x)|$, $0 \le f_-(x) \le |f(x)|$ и сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то по теореме 11.1 сходятся интегралы $\int_a^b f_+(x)dx$ и $\int_a^b f_-(x)dx$. Отсюда из свойства линейности (см. разд. 11.2) следует сходимость интеграла $\int_a^b [f_+(x) - f_-(x)]dx = \int_a^b f(x)dx$. ■

Замечание. Пусть $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится. Так как при $c < b$ $\left|\int_a^c f(x)dx\right| \le \int_a^c |f(x)|dx$, то, переходя в этом неравенстве к пределу при $c \to b$, получаем $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Приведем теперь два признака сходимости интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$.

Теорема 11.4 (признак Дирихле). Пусть при $x \ge a$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x)$, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, не возрастает и $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

▲ Интегрируя по частям, имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c g(x)dF(x) =$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\left[g(c)F(c) - g(a)F(a) - \int_a^c F(x)g'(x)dx\right].$$

Здесь $\lim_{c\to+\infty} g(c)F(c) = 0$ — предел произведения бесконечно малой при $c \to +\infty$ функции на функцию, ограниченную при $c \to +\infty$.

Теперь осталось доказать существование конечного $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c F(x)g'(x)dx$, т.е. сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$. Для этого докажем более сильное утверждение: $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$ абсолютно сходится, т.е. сходится $\int_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|dx$. Функция $g(x)$ не возрастает, поэтому $g'(x) \le 0 \Rightarrow |g'(x)| = -g'(x)$. Так как при этом $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то $g(x) \ge 0$. $F(x)$ ограничена $\Rightarrow \exists M > 0: |F(x)| \le M \Rightarrow \forall c \ge a$

$$\int_a^c |F(x)||g'(x)|dx \le M\int_a^c |g'(x)|dx = -M\int_a^c g'(x)dx =$$

$$= M[g(a) - g(c)] \le Mg(a).$$

Таким образом, при $c \ge a$ функция $\varphi(c) = \int_a^c |F(x)||g'(x)|dx$ ограничена сверху. Но, как и для любого интеграла от неотрицательной функции, $\varphi(c)$ не убывает (см. доказательство теоремы 11.1), поэтому существует конечный $\lim_{c\to+\infty} \varphi(c)$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} |F(x)||g'(x)|dx$ сходится. ■

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ ($\alpha > 0$ и $a > 0$).

Решение

Интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится $\left(f(x) = \sin x,\ g(x) = \frac{1}{x^\alpha}\right)$.

Теорема 11.5 (признак Абеля). Пусть при $x \ge a$ функция $f(x)$ непрерывна и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна (т.е. не возрастает или не убывает). Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

▲ Покажем, что эта теорема вытекает из предыдущей. Интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)[-g(x)]\,dx$ сходятся или расходятся одновременно, и одна из функций $g(x)$ или $-g(x)$ не возрастает. Пусть для определенности не возрастает $g(x)$. Тогда в силу ограниченности она имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-b]=0.$

Рассмотрим для $f(x)$ первообразную $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,\ x\ge a$ и докажем, что она ограничена. Так как $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \Rightarrow F(x)$ ограничена в окрестности точки $+\infty$, т. е. при $x\ge c$, где $c\ge a$ – некоторое число. Но $F(x)$ ограничена и при $x\in[a,c]$, так как она непрерывна на этом отрезке, следовательно, $F(x)$ ограничена при $x\ge a$.

Теперь по теореме 11.4, примененной к функциям $f(x)$ и $g(x)-b$, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)[g(x)-b]dx$ сходится, а значит, сходится и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx=\int\limits_a^{+\infty} f(x)[g(x)-b+b]\,dx=$$

$$=\int\limits_a^{+\infty} f(x)[g(x)-b]\,dx+b\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx. \ ■$$

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\operatorname{arctg}x}{x^\alpha}dx$ $(\alpha>0, a>0)$.

Решение

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\operatorname{arctg}x}{x^\alpha}dx$ сходится $\Bigg(f(x)=\frac{\sin x}{x^\alpha}$ непрерывна, $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится по признаку Дирихле – см. предыдущий пример; $g(x)=\operatorname{arctg}x$ непрерывно дифференцируема, ограничена, так как $|\operatorname{arctg}x|\le\frac{\pi}{2}$, и возрастает$\Bigg)$.

Определение 11.3. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ расходится.

Пример. Показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ условно сходится.

Решение

Выше было показано, что этот интеграл сходится. Осталось доказать расходимость интеграла от модуля функции.

Учитывая, что $\frac{|\sin x|}{x}\ge\frac{\sin^2 x}{x}$, применим теорему сравнения 11.1 к интегралам от этих функций. Рассмотрим

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\lim_{c\to+\infty}\int\limits_1^c\frac{\sin^2 x}{x}dx.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_1^c\frac{\sin^2 x}{x}dx=\int\limits_1^c\frac{1-\cos 2x}{2x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^c\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\limits_1^c\frac{1}{x}d\sin 2x=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^c-\frac{1}{4x}\sin 2x\Big|_1^c+\frac{1}{4}\int\limits_1^c\sin 2x\,d\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\ln c-\frac{1}{4}\frac{1}{c}\sin 2c+\frac{1}{4}\sin 2-\frac{1}{4}\int\limits_1^c\frac{\sin 2x}{x^2}\,dx.$$

Теперь перейдем к пределу при $c\to+\infty$.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$ абсолютно сходится, так как $\frac{|\sin 2x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, следовательно, этот интеграл сходится в обычном смысле, и знчит, существует конечный $\lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_1^c\frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$. Предел $\lim\limits_{c\to+\infty}\frac{1}{c}\sin 2c=0$ – произведение бесконечно малой при $c\to+\infty$ функции $\frac{1}{c}$ на ограниченную функцию $\sin 2c$; $\frac{1}{4}\sin 2$ – постоянная величина. Предел $\lim\limits_{c\to+\infty}\ln c=+\infty \Rightarrow$ $\lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_1^c\frac{\sin^2 x}{x}\,dx=+\infty$, т.е. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится. Тогда по теореме сравнения расходится и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx.$

11.5. Главное значение несобственного интеграла

Как известно, для интеграла с двумя особенностями в точках $+\infty$ и $-\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{+\infty} = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{a} + \lim_{d\to+\infty}\int_{a}^{d} = \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}}\int_{c}^{d} f(x)dx,$$

а для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с одной особенностью во внутренней точке $c\in(a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c + \int_c^b = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to+0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

Главное значение несобственного интеграла обозначается буквами $v.p.$

Определение 11.4. По определению

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c} f(x)dx; \qquad (11.2)$$

$$v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right], \qquad (11.3)$$

если эти пределы существуют и конечны. В таком случае интеграл называется сходящимся в смысле главного значения.

Так как определение главного значения несобственного интеграла является частным случаем общего определения несобственного интеграла, то если несобственный интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения, и его главное значение равно самому интегралу. Но возможны случаи, когда расходящийся несобственный интеграл сходится в смысле главного значения.

Пример. Найти главное значение несобственного интеграла $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$.

Решение

Известно, что $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ расходится: $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x}$, и в этих интегралах $\alpha = 1$ (см. пример в разд. 11.2), но

$$v.p.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln|x|\,\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\,\Big|_{\varepsilon}^{1}\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\varepsilon - \ln\varepsilon\right] = 0.$$

IV

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

12. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. Многомерные пространства

Определение 12.1. Точечным n-мерным арифметическим евклидовым пространством R^n называется множество всех упорядоченных систем n действительных чисел $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которых определено расстояние по следующей формуле: если $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y=(y_1, y_2, ..., y_n)$, то расстояние

$$\rho(x, y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+...+(y_n-x_n)^2}. \qquad (12.1)$$

Элементы $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ называются точками пространства R^n, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются координатами этих точек. Точка $0(0,0,...,0)$ называется началом координат этого пространства.

Расстояние $\rho(x, y)$ между точками x и y, определенное формулой (12.1), обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x,y)\geq 0$ и $\rho(x,y)=0$ тогда, и только тогда, когда $x=y$ (т.е. точки, или все их координаты, совпадают);

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) если x, y, z — три произвольные точки R^n, то справедливо так называемое неравенство треугольника: $\rho(x, y)\leq\rho(x, z)+\rho(z, y)$.

Первые два свойства очевидны, третье следует из неравенства треугольника для элементов линейного евклидова пространства векторов: $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\leq\left|\bar{a}\right|+\left|\bar{b}\right|$. А именно, если ввести элементы такого пространства (вектора) $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ с такими же координатами, как у точек x, y, z соответственно, то очевидно, что $\rho(x,y)=|\overline{y}-\overline{x}|$. Тогда

$$\rho(x,y)=|\overline{y}-\overline{x}|=|(\overline{y}-\overline{z})+(\overline{z}-\overline{x})|\le|\overline{y}-\overline{z}|+|\overline{z}-\overline{x}|=\rho(z,y)+\rho(x,z).$$

Определение 12.2. Пусть $x\in R^n$ и $\varepsilon>0$. Множество точек $y\in R^n$, таких, что $\rho(x,y)<\varepsilon$, называется n-мерным открытым шаром радиуса ε с центром в точке x или ε-окрестностью точки x и обозначается $U(x;\varepsilon)$ (или $U(x)$). Множество $U(x;\varepsilon)\setminus\{x\}$ называется проколотой ε-окрестностью точки x и обозначается $\overset{0}{U}(x;\varepsilon)$ или $\overset{0}{U}(x)$.

Определение 12.3. Точка $x\in R^n$ называется пределом последовательности $\{x^{(k)}\}$, если $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},x)=0$. В этом случае также говорят, что $\{x^{(k)}\}$ сходится к точке x, и пишут $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$. В соответствии с определениями 12.2 и 12.3 равенство $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$ равносильно тому, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\ K=K(\varepsilon):\ \forall k>K\ (x^{(k)}\in U(x,\varepsilon))$.

Теорема 12.1. Для того чтобы последовательность

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)})\in R^n$$

имела своим пределом точку $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i$, $i=1,2,\dots,n$.

▲ Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists\ K=K(\varepsilon):\forall k>K$

$$\left(\sqrt{(x_1^{(k)}-x_1)^2+(x_2^{(k)}-x_2)^2+\dots+(x_n^{(k)}-x_n)^2}<\varepsilon\right)\Rightarrow\forall k>K$$

$$\text{и }\forall i=1,2,\dots,n\ \left(\sqrt{(x_i^{(k)}-x_i)^2}=|x_i^{(k)}-x_i|<\varepsilon\right),$$

что и означает, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i$, $i=1,2,\dots,n$.

Пусть теперь, наоборот, $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i$, $i=1,2,\dots,n$. Нам нужно доказать, что в этом случае $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. По условию существуют номера K_i, такие, что $\forall k>K_i\ \left(\left|x_i^{(k)}-x_i\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$. Пусть $K=\max\limits_{i=1,2,\dots,n}K_i$. Тогда при $k>K$

$$\rho(x^{(k)},x)=\sqrt{(x_1^{(k)}-x_1)^2+\dots+(x_n^{(k)}-x_n)^2}<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}+\dots+\frac{\varepsilon^2}{n}}=\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon.\ \blacksquare$$

Определение 12.4. Множество точек в n-мерном пространстве R^n называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором n-мерном шаре.

Определение 12.5. Точка множества называется его *внутренней точкой*, если у нее существует окрестность, целиком принадлежащая этому множеству.

Определение 12.6. Множество точек в R^n называется *открытым*, если все точки этого множества являются внутренними.

Определение 12.7. Точка пространства R^n называется *предельной точкой* некоторого множества, если в любой ее окрестности содержится точка этого множества, отличная от исходной точки. (Здесь под исходной точкой множества можно понимать и бесконечно удаленную точку, считая за ее окрестность множество точек , таких, что $\rho(x,0)>r$, где $r>0$ – произвольное число.)

Определение 12.8. Точка пространства R^n называется *граничной точкой* некоторого множества, если в любой ее окрестности есть как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, этому множеству не принадлежащие. Совокупность всех граничных точек множества X называется его границей и обозначается ∂X.

Определение 12.9. Множество точек в R^n называется *замкнутым*, если оно содержит все точки своей границы.

Определение 12.10. Пусть $[a,b]$ – некоторый отрезок числовой прямой. Всякое отображение $x\,(t)$ этого отрезка в пространство R^n (т.е. соответствие точкам отрезка точек пространства R^n) можно описать при помощи n числовых функций $x_i=x_i(t)$, $t\in[a,b]$, $i=1,2,\dots,n$. Такое отображение называется *непрерывным на* $[a,b]$, если на этом отрезке непрерывны все функции $x_i(t)$. Любое непрерывное отображение отрезка в n-мерное пространство называется непрерывной кривой в этом пространстве (вместо отрезка $[a,b]$ можно рассматривать и другие множества точек числовой прямой).

Определение 12.11. Множество точек в R^n называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей множеству.

Определение 12.12. Открытое связное множество точек пространства R^n называется *областью*.

12.2. Определение, предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение 12.13. Говорят, что задана функция n переменных

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

если каждому значению $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$, где X — некоторое множество точек пространства R^n, соответствует одно действительное число y. Множество X при этом называется *областью определения функции f*, а точка x и ее координаты $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называются *аргументами* этой функции.

Определение 12.14. Множество точек в $(n+1)$-мерном пространстве $\{(x_1, x_2, ..., x_n, y) : (x_1, x_2, ..., x_n) \in X,\ y = f(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ называют графиком функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

При $n = 2$ областью определения функции $z = f(x, y)$ является некоторое множество пар (x, y), т.е. некоторое множество точек на плоскости $0xy$, а ее графиком является некоторая поверхность, которая проектируется на плоскость $0xy$ в область определения функции.

Определение 12.15. Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве $X \subset R^n$ и $x^{(0)}$ – предельная точка этого множества. Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x^{(0)}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in X$, для которой $0 < \rho(x, x^{(0)}) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Коротко это определение можно записать следующим образом:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in X, 0 < \rho(x, x^{(0)}) < \delta$$

$$(|f(x) - b| < \varepsilon).$$

В терминах окрестностей определение предела функции в точке можно записать следующим образом.

Определение 12.16. Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве $X \subset R^n$ и $x^{(0)}$ – предельная точка этого множества. Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x^{(0)}$, если для любой окрестности $U(b)$ точки b существует такая проколотая окрестность $\overset{0}{U}(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in X \cap \overset{0}{U}(x^{(0)})$ выполняется условие $f(x) \in U(b)$.

То есть:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall U(b)\ \exists \overset{0}{U}(x^{(0)}) : \forall x \in X \cap \overset{0}{U}(x^{(0)})\ (f(x) \in U(b)).$$

В отличие от определения 12.15 определение 12.16 имеет смысл и для бесконечно удаленной точки $x^{(0)}$.

Определение 12.17. Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве $X \subset R^n$ и в точке $x^{(0)}$, которая является предельной для этого множества. Эта функция называется *непрерывной* в точке $x^{(0)}$, если $\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x_0)$ (т.е. предел функции в точке равен значению функции в этой точке). Обозначив

$$\Delta y = f(x) - f(x_0),\ x = (x_1, ..., x_n),\ x_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}),$$

последнее равенство можно также записать в виде

$$\lim_{x \to x^{(0)}} \Delta y = 0 \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

где $\Delta x = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2}$, $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Поскольку определения предела и непрерывности функции нескольких переменных по форме дословно совпадают с соответствующими определениями для функции одного переменного, то для функций нескольких переменных сохраняются (и аналогично доказываются) обычные свойства пределов функций и непрерывных функций (кроме, естественно, тех, для которых существенна упорядоченность точек числовой прямой, типа пределов слева и справа и пределов монотонных функций).

Возникает вопрос: можно ли для вычисления пределов функций нескольких переменных переходить к пределу по аргументам по очереди, т.е. вычислять так называемые повторные пределы? Приведенный ниже пример показывает, что в общем случае этого делать нельзя.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Решение

Повторные пределы в этом случае будут равны:

$$\lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y \to 0} 0 = 0 \text{ и } \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0;$$

сам же исходный предел вообще не существует. Рассмотрим частный случай, а именно будем приближать точку (x, y) к точке $(0, 0)$ по прямой $y = kx$, тогда наш предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$. Но так как это выражение зависит от k (т.е. от прямой), а предел функции, если он существует, единственен, то это и означает, что данного предела вообще нет.

Отсюда, в частности, следует, что правило Лопиталя к функциям нескольких переменных применять нельзя.

Рассмотрим еще два примера неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$.

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Решение

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=2.$$

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0;\\ 0 & \text{при } x=y=0.\end{cases}$$

Решение

Во всех точках, кроме начала координат, наша функция непрерывна согласно теоремам о непрерывных функциях. Докажем, что эта функция непрерывна и в точке (0,0), т.е. что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$ Для этого оценим и преобразуем нашу функцию следующим образом: $0\le\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}y^2.$ Так как $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\le 1$, то $0\le\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le y^2.$

Теперь перейдем в последнем неравенстве к пределу при $(x,y)\to(0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}0=0,\ \ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y^2=0,$$

откуда по теореме «о двух милиционерах» для функций нескольких переменных получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0,$$

что и требовалось доказать.

Определение 12.18. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* на некотором множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Определение 12.19. Функция $y=f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на некотором множестве $X\subset R^n$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x,x'\in X,\ \rho(x',x)<\delta\ (|f(x')-f(x)|<\varepsilon).$$

Справедливы следующие утверждения (теоремы 12.2—12.4), аналогичные свойствам функций одного переменного, непрерывных на отрезке (эти утверждения либо доказываются аналогично соответствующим теоремам для функций одного переменного, либо сводятся к таким теоремам).

Теорема 12.2. Всякая непрерывная на замкнутом ограниченном множестве X функция $y=f(x)$ ограничена на этом множестве и в некоторых точках этого множества принимает свои наибольшее $M=\sup\limits_{x\in X}f(x)$ и наименьшее $m=\inf\limits_{x\in X}f(x)$ значения.

Теорема 12.3. Всякая непрерывная на связном множестве X функция, принимая два каких-либо значения, принимает и любое промежуточное значение между ними, т.е. если $x^{(1)},x^{(2)}\in X$ и C: $f(x^{(1)})<C<f(x^{(2)})$, то $\exists x^{(0)}\in X: f(x^{(0)})=C.$

Теорема 12.4 (Кантора). Всякая непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.

12.3. Частные производные. Дифференциал функции

Определение 12.20. Пусть функция $y=f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ определена в окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$. *Частной производной* $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ этой функции по переменной x_i в точке $x^{(0)}$ называется

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(x^{(0)})}{\Delta x_i} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(x_1^{(0)},\ldots,x_i^{(0)} + \Delta x_i,\ldots,x_n^{(0)}\right) - f(x_1^{(0)},\ldots,x_i^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})}{\Delta x_i},$$

если этот предел существует и конечен.

Так как в определении 12.20 все переменные, кроме x_i, постоянны, то частная производная функции по некоторому аргументу — это ее производная по этому аргументу, вычисленная в предположении, что остальные аргументы функции постоянны.

Пример 1. Вычислить частные производные функции $z = x^2 \sin(xy)$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin(xy) + x^2\cos(xy)\cdot y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos(xy)\cdot x = x^3\cos(xy).$$

Пример 2. Вычислить частные производные функции $u = x^{y^z}$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z}\cdot \ln x \cdot z y^{z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z}\cdot \ln x \cdot y^z \cdot \ln y.$$

Пример 3. Вычислить в точке (0, 0) частные производные функции

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ при } xy \neq 0 \Leftrightarrow \text{ точка}(x,y) \text{ не лежит ни на одной из осей координат;} \\ 0 \text{ при } xy = 0 \Leftrightarrow \text{ точка}(x,y) \text{ лежит хотя бы на одной из осей координат.} \end{cases}$$

Решение

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$ Отметим, что в точке (0,0) наша функция не является непрерывной, так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует (положим $y = 0$: если предел существует, то он равен нулю; положим $y = x$: если предел существует, то он равен единице).

Таким образом, из существования у функции в некоторой точке частных производных следует только ее непрерывность по каждому аргументу в отдельности, но не следует ее непрерывность как функции нескольких переменных (т.е. в смысле определения 12.17).

Далее при сохранении термина «функция нескольких переменных» исключительно для простоты записи будем предполагать, что число этих переменных $n = 2$, т.е. будет рассматриваться функция $z = f(x,y)$. Случаи, где количество переменных существенно для результата или его доказательства, будут оговариваться особо.

Определение 12.21. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в окрестности точки $M(x,y)$ и $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$, где Δx и Δy достаточно малы (с тем, чтобы точка $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ попадала в вышеупомянутую окрестность). Пусть приращение функции Δz можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y, \tag{12.2}$$

где $A = A(x,y)$ и $B = B(x,y)$ зависят от точки (x,y), но не зависят от приращений Δx и Δy; $\alpha = \alpha(x,\, y,\, \Delta x,\, \Delta y)$, $\beta = \beta(x,\, y,\, \Delta x,\, \Delta y)$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0,$ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0.$

Тогда эта функция называется *дифференцируемой* в точке $M(x,y)$, а выражение $A\Delta x + B\Delta y$ — *дифференциалом* функции и обозначается как $dz = df(x,y)$.

Пример. Найти дифференциал функции $z = x^2 y$.

Решение

$$\Delta z = (x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - x^2 y = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)(y+\Delta y) - x^2 y =$$

$$= x^2 y + 2xy\Delta x + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + y\Delta x^2 + \Delta x^2\Delta y - x^2 y =$$

$$= 2xy\Delta x + x^2\Delta y + (2x\Delta y + y\Delta x)\Delta x + \Delta x^2\Delta y.$$

Из этой записи видно, что функция дифференцируема в любой точке $(x,\, y)$:

$$A = 2xy,\ B = x^2,\ \alpha = 2x\Delta y + y\Delta x,\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0,\ \beta = \Delta x^2,\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0,\ dz = 2xy\Delta x + x^2 dy.$$

Как говорят, дифференциал функции — это главная линейная часть приращения этой функции; «линейная» — так как дифференциал является линейной функцией Δx и Δy, «главная» – так как при $A(x,y)\cdot B(x,y)\neq 0$ и фиксированных x и y в первых двух слагаемых правой части формулы (12.2) Δx и Δy умножаются на постоянные (отличные от 0), а во вторых двух слагаемых – на бесконечно малые α и β.

Теорема 12.5 (**необходимое условие дифференцируемости функции**). Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$. Тогда эта функция непрерывна в точке $M(x,y)$.

▲ Так как функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, то по формуле (12.2) $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y$, откуда

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=A\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta x+B\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta y+\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta x+\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta y=0,$$

что согласно определению 12.17 и означает непрерывность $z=f(x,y)$ в точке M. ■

Теорема 12.6 (**необходимое условие дифференцируемости функции**). Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$. Тогда эта функция имеет в точке $M(x,y)$ частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}=A=A(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=B=B(x,y)$.

▲ Положим в формуле (12.2) $\Delta y=0$, тогда эта формула примет вид $\Delta_x z=A\Delta x+\alpha\Delta x$, откуда $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A+\alpha$ и $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=A.$

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial z}{\partial y}=B$. ■

Пример 3 на нахождение частных производных показывает, что в отличие от функций одного переменного из существования частных производных функции в некоторой точке еще не следует дифференцируемость функции в этой точке (функция в этом примере имеет в начале координат частные производные, равные 0, но не является дифференцируемой, так как не является непрерывной в этой точке – см. теорему 12.5).

Теорема 12.7 (**достаточные условия дифференцируемости функции**). Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет в окрестности точки $M(x,y)$ частные производные и эти частные производные непрерывны в точке M (как функции нескольких переменных). Тогда функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке M.

▲ Докажем возможность представления приращения функции $z=f(x,y)$ по формуле (12.2), где $A=\frac{\partial f}{\partial x}$, $B=\frac{\partial f}{\partial y}$ и Δx и Δy достаточно малы. Для этого преобразуем Δz следующим образом:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=$$

$$=\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\right]+\left[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right].$$

Функцию в первой скобке можно рассматривать как функцию только от x (y – фиксирован), а функцию во второй скобке – как функцию только от y (x – фиксирован). Поэтому к двум этим функциям можем применить теорему 5.4 ($f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, где c находится между a и b) по x и y соответственно (все условия теоремы выполнены):

$$\Delta z=f'_x(\bar{x},y+\Delta y)(x+\Delta x-x)+f'_y(x,\bar{y})(y+\Delta y-y)=$$

$$=f'_x(\bar{x},y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x,\bar{y})\Delta y,$$

где $\bar{x}$ находится между x и $x+\Delta x$; $\bar{y}$ – между y и $y+\Delta y$; $f'_x=\frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y=\frac{\partial f}{\partial y}\Rightarrow$

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+$$

$$+\underbrace{\left[f'_x(\bar{x},y+\Delta y)-f'_x(x,y)\right]}_{\alpha(x,y,\Delta x,\Delta y)}\Delta x+\underbrace{\left[f'_y(x,\bar{y})-f'_y(x,y)\right]}_{\beta(x,y,\Delta x,\Delta y)}\Delta y.$$

Осталось доказать, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta=0$:

Из непрерывности f'_x в точке $M(x,y)$ следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f'_x(\bar{x},y+\Delta y)-f'_x(x,y)\right]=0$$

(при $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0\ \bar{x}\to x, y+\Delta y\to y\Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f'_x(\bar{x},y+\Delta y)=f'_x(x,y)$).

Аналогично из непрерывности f'_y в точке $M(x,y)$ следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f'_y(x,\bar{y})-f'_y(x,y)\right]=0.\ ■$$

Итак, для существования $dz(x,y)$ достаточно непрерывности частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в соответствующей точке, и тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (12.3)$$

Вернемся к примеру $z = x^2 y$: $dz = (x^2 y)'_x \Delta x + (x^2 y)'_y \Delta y = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y$, что уже получили выше.

Ранее мы имели дело только с дифференциалами функции, теперь, по определению, дифференциалами независимых переменных x и y назовем их (произвольные) приращения Δx и Δy: $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$. Тогда предыдущую формулу можно записать так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (12.4)$$

Пример. Пусть $z = \sin(xy)$. Найти дифференциал dz (если он существует).

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy)\cdot y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(xy)\cdot x.$$

Обе эти функции непрерывны в любой точке (x, y), следовательно, по теореме (12.7) наша функция дифференцируема в любой точке (x, y) и

$$dz = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy.$$

Аналогично при числе переменных $n > 2$, например, для $u = u(x,y,z)$ $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$, если этот дифференциал существует (а для этого достаточно существования $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ в окрестности точки (x, y, z) и непрерывности этих частных производных в самой точке (x, y, z)).

Определение 12.22. Функция называется дифференцируемой в некоторой области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Вернемся к формуле (12.2), которую перепишем в виде

$$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\ \Delta x + \beta\ \Delta y.$$

Отбрасывая здесь члены более высокого, чем Δx и Δy, порядка малости, получим формулу для приближенных вычислений:

$$\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y) \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \Rightarrow$$

$$z(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx z(x,y) + \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\Delta y. \qquad (12.5)$$

Пример. Вычислить приближенно $1{,}1^{1{,}02}$.

Решение

Пусть $z = x^y,\ x = 1,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}02,\ \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x \Rightarrow$

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial z(1,1)}{\partial y} = 0 \Rightarrow 1{,}1^{1{,}02} \approx 1 + 1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}02 = 1{,}1.$$

Здесь пока остаются открытыми вопросы о возможности уточнения полученного результата и об оценке погрешности. Эти вопросы будут обсуждаться ниже.

12.4. Производные сложной функции

Определение 12.23. По аналогии с функциями одной переменной пусть $z = f(u,v),\ u = \varphi(x,y),\ v = \psi(x,y) \Rightarrow z = f(\varphi(x,y), \psi(x,y))$. Такая функция $z(x, y)$ называется *сложной функцией*.

Теорема 12.8. Пусть функции $u = \varphi(x,y)$ и $v = \psi(x,y)$ имеют в точке $M(x,y)$ частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, а функция $z = f(u,v)$ дифференцируема в соответствующей точке $(\varphi(x,y), \psi(x,y))$. Тогда сложная функция $z = f(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ имеет в точке $M(x,y)$ частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (12.6)$$

(т.е. сначала дифференцируем функцию z по всем ее аргументам, а потом каждый из них дифференцируем по той переменной, по которой ищется производная).

▲ По определению $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Дадим x произвольное приращение Δx $(\Delta y = 0)$, тогда функции $u = \varphi(x,y)$ и $v = \psi(x,y)$ получат приращения

$$\Delta_x u = \varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y) \text{ и } \Delta_x v = \psi(x+\Delta x, y) - \psi(x,y),$$

а функция $z = f(u,v)$ получит приращение $\Delta z = \Delta_x z$. Так как функция $z = f(u,v)$ дифференцируема, то

$$\Delta z = \Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\,\Delta_x u + \beta\,\Delta_x v,$$

где $\alpha, \beta \to 0$ при $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$. Тогда

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Значит,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\alpha\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\beta\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}. \quad (12.7)$$

Отметим, что в (12.7) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\alpha = 0$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\beta = 0$ (из существования $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ следует непрерывность u и v как функций от x, следовательно, при $\Delta x \to 0$ $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$, откуда следует, что при $\Delta x \to 0$ $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$). Тогда из формулы (12.7) $\exists\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$.

Аналогично для второй формулы. ■

Замечание. На примерах можно показать, что для справедливости формул (12.5) недостаточно просто существования $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, нужна именно дифференцируемость функции $z = f(u,v)$ (для этого, например, достаточно непрерывности $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ в соответствующей точке).

Пример. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2u\cdot\ln v\cdot\frac{1}{y} + \frac{u^2}{v}\cdot 3 = 2\frac{x}{y^2}\ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2u\cdot\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v}(-2) = -2\frac{x^2}{y^3}\ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

Конечно, тот же результат можно получить, подставляя в формулу, определяющую z, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$: $z = \frac{x^2}{y^2}\ln(3x-2y)$ и вычисляя после этого нужные нам производные.

Мы получили формулу производных сложной функции для случая, когда z зависит от двух аргументов — u и v, а эти аргументы в свою очередь являются функциями двух других аргументов — x и y. Но такие формулы имеют место и при ином количестве переменных.

Пусть $z = f(u_1,\ldots,u_n)$, $u_i = \varphi_i(x_1,\ldots,x_m)$, $i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial x_k},\ k = 1,2,\ldots,m \qquad (12.8)$$

(сначала дифференцируем z по всем ее аргументам, а потом каждый из них дифференцируем по той переменной, по которой ищется производная).

Формула (12.8) доказывается точно так же, как формула (12.6). В частности:

1. Пусть $z = f(x,y)$, $x = \varphi(t), y = \psi(t) \Rightarrow z = f(\varphi(t),\psi(t))$.

Если $z = f(x,y)$ – дифференцируемая функция x и y и существуют $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, то существует и $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (12.9)$$

«Прямое» d в отличие от ∂ «круглого» указывает на то, что в данном случае x, y, z – функции одной переменной t.

2. Пусть $z = f(x,y)$ – дифференцируемая функция x и y, при этом $y = \varphi(x)$ (т.е. второй аргумент функции f зависит от первого) имеет про-

изводную (т.е. дифференцируема). Следовательно, $z = f(x, \varphi(x))$. Найдем $\dfrac{dz}{dx}$.

Этот случай получается из предыдущего при $t = x$. Положим в формуле (12.9), что $t = x$. Тогда $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \underbrace{\dfrac{dx}{dx}}_{1} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \qquad (12.10)$$

Данная формула называется формулой для вычисления *полной производной*, в ней полная производная $\dfrac{dz}{dx}$ – это производная функции, вычисленная после подстановки $y = \varphi(x)$, а $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная, вычисленная до такой подстановки, т.е. при условии $y = \text{const}$.

Пример. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $z = \operatorname{arctg}(xy)$, $y = e^x$.

Р е ш е н и е

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2 y^2} \cdot y + \frac{1}{1 + x^2 y^2} \cdot x \cdot e^x = \frac{y + xe^x}{1 + x^2 y^2} = \frac{e^x (1 + x)}{1 + x^2 e^{2x}}.$$

Естественно, к тому же результату придем после подстановки в выражение функции $y = e^x$ и последующего нахождения производной по z:

$$z = \operatorname{arctg}(xe^x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{(xe^x)'}{1 + x^2 e^{2x}} = \frac{e^x + xe^x}{1 + x^2 e^{2x}} = \frac{e^x (1 + x)}{1 + x^2 e^{2x}}.$$

Однако в ряде случаев без формул для производных сложной функции обойтись нельзя.

Пример. Пусть $z = \varphi(x^2 + y^2)$, где $\varphi(u)$ – дифференцируемая функция. Доказать, что эта функция удовлетворяет уравнению $y\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Р е ш е н и е

По аналогии с предыдущими формулами при $u = x^2 + y^2$ имеем

$$y\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{d\varphi}{du} 2x = 2xy\frac{d\varphi}{du}; \quad x\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{d\varphi}{du} 2y = 2xy\frac{d\varphi}{du}.$$

Два полученных выражения равны, что и доказывает нужное нам утверждение.

Инвариантность формы (полного) дифференциала

Для функций одной переменной свойство инвариантности формы дифференциала (относительно выбора переменных) заключалось в том, что формула $dy = y'dx$ верна не только тогда, когда x является независимой переменной, но и тогда, когда x является функцией какой-нибудь другой переменной t. При этом $dx = dx(t)$.

Аналогичное свойство справедливо и для функций нескольких переменных.

Пусть $z = f(x, y)$, $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v) \Rightarrow z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ и пусть выполнены условия теоремы 12.8 о производных сложной функции (т.е. функция $z = f(x, y)$ дифференцируема и существуют $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$). Тогда аналогично формулам (12.6) существуют

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (12.11)$$

Так как u и v – независимые переменные, то согласно формуле (12.4) можем записать dz в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)}_{dx = dx(u,v)} + \frac{\partial z}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)}_{dy = dy(u,v)} = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

(для существования dz и справедливости этих преобразований достаточно непрерывности $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, что и надо дополнительно потребовать; на самом деле достаточно требовать непрерывности всех производных в правых частях формул (12.11)).

Таким образом, формула $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$ верна не только тогда, когда x и y являются независимыми переменными, но и тогда, когда x и y являются функциями каких-то других переменных (например, u и v). При этом $dx = dx(u, v)$, $dy = dy(u, v)$. Это свойство называется инвариантностью формы (полного) дифференциала (относительно выбора переменных).

Отметим, что формула $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ верна, только если x и y независимые переменные (только в этом случае $\Delta x = dx,\ \Delta y = dy$).

Неявная функция и ее производные

1. В разд. 4.2 разбирался случай функции $y = y(x)$, заданной уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{12.12}$$

Укажем еще один способ нахождения y'_x (если эта производная существует).

Предположим, что $\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = F'_y$ непрерывны и $F'_y \neq 0$. Подставим в формулу (12.12) $y = y(x)$. Тогда для всех x из области определения этой функции $F(x, y) \equiv 0$, следовательно, в этой области $dF = 0$.

У функции F один из аргументов (y) является функцией другого аргумента (x), но свойство инвариантности формы дифференциала позволяет нам записать dF в виде

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = F'_x(x,y)dx + F'_y(x,y)\underbrace{dy}_{=dy(x)}$$

(непрерывность $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ нужна для выполнения достаточных условий дифференцируемости функции F).

Следовательно, $F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$. Итак,

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{12.13}$$

Пример. Найти производную функции, заданной уравнением $2y\ln y = x^2$.

Решение

$$\underbrace{2y\ln y - x^2}_{F(x,y)} = 0;\ F'_x(x,y) = -2x;\ F'_y(x,y) = 2\ln y + 2y\frac{1}{y} = 2(\ln y + 1) \Rightarrow$$

$$y'_x = \frac{2x}{2(\ln y + 1)} = \frac{x}{\ln y + 1}.$$

2. Рассмотрим теперь уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \tag{12.14}$$

Определение 12.24. Пусть каждой паре (x, y) из некоторой области D соответствует одно значение z из некоторой области Z такое, что $F(x, y, z) = 0$. Тогда этим определяется некоторая функция $z = z(x, y)$ с областью определения D, которая называется *неявной функцией*, заданной уравнением (12.14).

Как найти $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x,\ \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$ (в предположении, что эти производные существуют)?

Подставим в (12.14) $z = z(x, y) \Rightarrow \forall (x, y) \in D\ \ F(x, y, z(x, y)) \equiv 0 \Rightarrow$ $dF \equiv 0$. Но в силу инвариантности формы дифференциала (z зависит от x и y)

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy + F'_z(x, y, z)dz = 0$$

($\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ предполагаются непрерывными). Если $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то отсюда $dz = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}dx - \frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}dy$. Но теорема 12.6, в частности, утверждает, что если $dz = Adx + Bdy$, то $A = \frac{\partial z}{\partial x}, B = \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow$

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)};\quad z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{12.15}$$

Пример. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции, заданной уравнением $\underbrace{e^z - xyz}_{F(x,y,z)} = 0$.

Решение

$$z = z(x,y) \Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \Rightarrow -yzdx - xzdy + (e^z - xy)\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$dz = \underbrace{\frac{yz}{e^z - xy}}_{\frac{\partial z}{\partial x}} dx + \underbrace{\frac{xz}{e^z - xy}}_{\frac{\partial z}{\partial y}} dy \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{z}{x(z-1)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{xyz - xy} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

В данном примере мы не воспользовались готовыми формулами (12.15) (что, конечно, возможно), а просто повторили всю процедуру их вывода, найдя при этом сразу обе производные.

12.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть $z = f(x, y)$ и существуют $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Эти частные производные снова являются функциями x и y, поэтому можно пытаться найти частные производные этих функций.

Определение 12.25. Второй производной функции по x или по y называется $\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}$ или $\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}$ соответственно; эти производные обозначаются как $z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ или $z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Таким образом,

$$z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}, \quad z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}, \tag{12.16}$$

если эти производные существуют.

Дадим определения и обозначения так называемых смешанных вторых производных:

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}, \quad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}, \tag{12.17}$$

если эти производные существуют. Запись $\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ и $\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ оправдывает порядок производных «справа налево»; для записей z''_{xy} и z''_{yx} сохраним более естественный порядок дифференцирования.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{xy}$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} \cdot y; \; \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} \cdot x; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ye^{xy} \cdot y = y^2 e^{xy}; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^{xy} \cdot x = x^2 e^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(ye^{xy})}{\partial y} = e^{xy} + ye^{xy} \cdot x = e^{xy}(1 + xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(xe^{xy})}{\partial x} = e^{xy} + xe^{xy} \cdot y = e^{xy}(1 + xy).$$

Возникает вопрос: случайно ли равенство двух последних производных? То есть зависит ли смешанная производная от порядка дифференцирования?

Теорема 12.9 (о смешанных производных). Пусть функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ существуют в окрестности точки $M(x, y)$, причем смешанные производные $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)$ непрерывны в точке $M(x, y)$. Тогда в этой точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \tag{12.18}$$

▲ Рассмотрим выражение ($\Delta x, \Delta y$ достаточно малы)

$$W = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$W = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} - \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right].$$

Введя функцию $\varphi(x)=\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$, последнее выражение можно записать в виде $W=\dfrac{1}{\Delta x}[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]$. Теперь используем теорему Лагранжа 5.4:

$$W=\frac{1}{\Delta x}\varphi'(\underset{\substack{\text{между}\\ x \text{ и } x+\Delta x}}{\bar{x}})(x+\Delta x-x)=\varphi'(\bar{x})=\frac{f'_x(\bar{x},y+\Delta y)-f'_x(\bar{x},y)}{\Delta y}.$$

К этому выражению опять применим теорему Лагранжа, только теперь по переменной y:

$$W=f''_{xy}(\bar{x},\underset{\substack{\text{между}\\ y \text{ и } y+\Delta y}}{\bar{y}})=\frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial y\partial x}.$$

Введя функцию ψ, аналогично преобразуем W еще раз:

$$W=\frac{1}{\Delta y}\left[\underbrace{\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}}_{\psi(y+\Delta y)}-\underbrace{\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}}_{\psi(y)}\right]=\psi'(\bar{\bar{y}})=$$

$$=\frac{f'_y(x+\Delta x,\bar{\bar{y}})-f'_y(x,\bar{\bar{y}})}{\Delta x}=\frac{\partial^2 f(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})}{\partial x\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})}{\partial x\partial y}$$

(здесь $\bar{\bar{x}}$ лежит между x и $x+\Delta x$; $\bar{\bar{y}}$ — между y и $y+\Delta y$).

Пусть теперь $\Delta x,\Delta y\to 0\Rightarrow \bar{x},\bar{\bar{x}}\to x,\ \bar{y},\bar{\bar{y}}\to y$, следовательно, из непрерывности смешанных производных

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{y})}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x};\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial^2 f(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y},$$

т.е. получаем равенство (12.18). ■

Примеры показывают, что условие непрерывности смешанных производных второго порядка существенно для их равенства, в точках разрыва смешанные производные могут и не быть равны.

Итак, при выполнении условий теоремы 12.9 существуют три различных производных второго порядка: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{y^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$. Для нахождения последней производной нужно найти частную производную z по одной из переменных, а результат продифференцировать по другой переменной.

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и других порядков от функций любого числа переменных. Можно показать, что значение смешанной производной k-го порядка в некоторой точке не зависит от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования, если, например, все производные функции до порядка k включительно непрерывны в окрестности нашей точки. Например, при выполнении таких условий функция $z=f(x,y)$ имеет четыре различных производных третьего порядка:

$$z'''_{x^3}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ z'''_{y^3}=\frac{\partial^3 z}{\partial y^3},\ z'''_{x^2y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\ z'''_{xy^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2},$$

и значения смешанных производных не зависят от порядка дифференцирования. Это справедливо и для производных более высокого порядка.

Пример. $u=x^3y^2z^4$. Найти $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y\partial z^3}$.

Решение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6xy^2z^4;\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=12xyz^4;\quad \frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y\partial z^3}=12xy\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot z=288xyz$$

(можно дифференцировать и в другом порядке).

Дифференциалы высших порядков

Пусть $z=f(x,y)$, где x и y — независимые переменные, есть дифференцируемая функция. Тогда $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ $\left(\text{для этого, например, достаточно непрерывности } \dfrac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ $\Rightarrow dz$ зависит от x, y, dx, dy $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x};\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)$, т.е. является некоторой функцией от этих четырех аргументов. Если dx и dy зафиксировать, то этот дифференциал можно рассматривать как функцию только от x и y, при этом dx и dy от x и y не зависят (они есть произвольные приращения Δx и Δy и являются постоянными относительно x и y). Теперь можно говорить о дифференциале этой функции.

Определение 12.26. Вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) функции $z = f(x,y)$ называется дифференциал от ее (первого) дифференциала, если он существует:

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy \underset{\substack{dx \text{ и } dy\\ \text{постоянны}}}{=}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy \underset{\text{теорема 12.9}}{=}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

(здесь для удобства записи опущены скобки: $dx^2 = (dx)^2, dy^2 = (dy)^2$) $\Rightarrow$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \qquad (12.19)$$

Для справедливости равенства (12.19) достаточно, чтобы функция $z = f(x,y)$ имела непрерывные частные производные до второго порядка включительно (тогда $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, следовательно, d^2z существует, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, и справедлива вся цепочка предыдущих равенств).

Аналогично если $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, то по определению третий дифференциал, или дифференциал третьего порядка, — это дифференциал от второго дифференциала и

$$d^3z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2\right)'_x dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2\right)'_y dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^2 + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dxdy + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dy^2\right)dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^2\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3.$$

Для удобства записи в последнем выражении опускаем скобки:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \qquad (12.20)$$

Аналогично выводятся формулы для $d^4z = d(d^3z), \ldots, d^nz = d(d^{n-1}z)$.

Замечание. Дифференциалы порядка больше первого не обладают свойством инвариантности формы, т.е. в случае, когда x и y — не независимые переменные, а являются функциями других переменных (u и v), формулы (12.19) и (12.20), вообще говоря, не верны.

Символические формулы

Перепишем формулы для дифференциалов следующим образом:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \overset{\text{формально}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial x}dx\right)z\,;$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \overset{\text{формально}}{=}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right)z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z\,;$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3\right)z \overset{\text{формально}}{=}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Аналогично если функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно, то справедливы следующие символические формулы:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z, \quad n \in Z \qquad (12.21)$$

(доказательство можно провести методом математической индукции).

Это формула не для вычисления $d^n z$, а для запоминания развернутой формулы для $d^n z$. Формула (12.21) понимается так: формально возводим в степень n по формуле бинома Ньютона (1.3), формально умножаем на z, и умножение каждого члена на z понимаем как взятие соответствующей частной производной.

Пример. Вывести формулу для дифференциала четвертого порядка.

Решение

$$d^4 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^4 z =$$

$$= \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}dx^4 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}dx^3 dy + 6\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}dx^2 dy^2 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3}dx dy^3 + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}dy^4.$$

Такие же символические формулы справедливы, если переменных больше, чем две. Например, если $u = f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 u =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz.$$

12.6. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Как было показано в разд. 5.3, формула Тейлора для $(n+1)$ раз дифференцируемой функции одной переменной (5.21) имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где c — промежуточная точка между x_0 и x.

Положим в этой формуле $x - x_0 = \Delta x = dx,\ x = x_0 + \Delta x \Rightarrow$

$$f(x_0 + \Delta x) =$$

$$= f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(c),$$

где c — точка между x_0 и $x = x_0 + \Delta x$, т.е. $c = x_0 + \theta\Delta x,\ 0 < \theta < 1$.

В таком виде формула Тейлора обобщается на функции нескольких переменных.

Теорема 12.10. Если в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков до $(n+1)$ включительно, то для всех точек $(\underbrace{x_0 + \Delta x}_{x}, \underbrace{y_0 + \Delta y}_{y})$ из этой окрестности

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) =$$

$$= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),\ 0 < \theta < 1,\ \Delta x = dx, \Delta y = dy. \quad (12.22)$$

Проверим, что точка $C(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)$ — это некоторая точка отрезка, соединяющего точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$:

$$\overline{M_0 C} = \left\{\theta\Delta x,\ \underbrace{\theta}_{>0}\Delta y\right\}, \overline{CM} = \left\{(1-\theta)\Delta x, \underbrace{(1-\theta)}_{>0}\Delta y\right\} \Rightarrow$$

$$\overline{CM} = \frac{1-\theta}{\theta}\overline{M_0 C}, \quad \frac{1-\theta}{\theta} > 0,$$

значит, векторы $\overline{CM}$ и $\overline{M_0 C}$ коллинеарны и одинаково направлены (рис. 69).

▲ Положим, что в функции $z = f(x, y)$ $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$, $t \in [0,1]$. Согласно последнему рассуждению это соответствует рассмотрению нашей функции на отрезке $\left[M_0, M\right]$ (рис. 69). При $t = 0$ получаем точку M_0, при $t = 1$ — точку M.

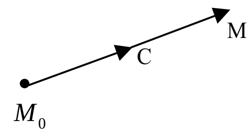


Рис. 69

Тогда $z = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = F(t)$ — некоторая функция одной переменной t,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(1), \quad f(x_0, y_0) = F(0).$$

Функция $F(t)$ – функция одной переменной, имеющая, как следует из правила дифференцирования сложной функции, $(n+1)$ непрерывную производную, следовательно, по формуле Тейлора для функции одной переменной

$$F(t) = F(0) + F'(0)\,t + \frac{1}{2!}F''(0)\,t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)\,t^n +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta\, t)\,t^{n+1},\ 0<\theta<1 \Rightarrow$$

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta),\ 0<\theta<1. \qquad (12.23)$$

Как было отмечено, $F(0) = f(x_0, y_0)$. Далее, используя формулу для нахождения производной сложной функции (12.9), имеем

$$F'(t) = \Big[f(\underbrace{x_0 + t\Delta x}_{x}, \underbrace{y_0 + t\Delta y}_{y})\Big]'_t =$$

$$= f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\cdot x'_t + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\cdot y'_t =$$

$$= f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y \ \Rightarrow$$

$$F'(0) = f'_x(x_0, y_0)\underbrace{\Delta x}_{dx} + f'_y(x_0, y_0)\underbrace{\Delta y}_{dy} = df(x_0, y_0);$$

$$F''(t) = \Big[f'_x(\underbrace{x_0 + t\Delta x}_{x}, \underbrace{y_0 + t\Delta y}_{y})\Delta x + f'_y(\underbrace{x_0 + t\Delta x}_{x}, \underbrace{y_0 + t\Delta y}_{y})\Delta y\Big]'_t =$$

$$= \Big[f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y\Big]'_x x'_t +$$

$$+\Big[f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y\Big]'_y y'_t =$$

$$= \Big[f''_{x^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f''_{xy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y\Big]\Delta x +$$

$$+\Big[f''_{xy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f''_{y^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y\Big]\Delta y =$$

$$= f''_{x^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x\Delta y +$$

$$+ f''_{y^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y^2 \Rightarrow$$

$$F''(0) = f''_{x^2}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(x_0, y_0)\Delta y^2 \overset{\substack{\Delta x = dx\\ \Delta y = dy}}{=} d^2 f(x_0, y_0).$$

Используя метод математической индукции, можно доказать, что

$$F^{(k)}(0) = d^k f(x_0, y_0),\ k = 1, 2, \ldots, n;\ F^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta\,\Delta x, y_0 + \theta\,\Delta y).$$

Подставляя эти производные в формулу (12.23), получаем нужную нам формулу

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),\ 0<\theta<1. \ \blacksquare$$

Пример. Разложить по формуле Тейлора при $(x_0, y_0) = (1, 1)$ функцию $z = x^y$.

Решение

$$f(x_0, y_0) = 1;\ df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\Delta y \Rightarrow$$

$$df(1,1) = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y = \Delta x;$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 =$$

$$= y(y-1)x^{y-2}\Delta x^2 + 2(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x)\Delta x\Delta y + x^y \ln^2 x\Delta y^2 \Rightarrow$$

$$d^2 f(1,1) = 0\cdot\Delta x^2 + 2(1+0)\,\Delta x\Delta y + 0\cdot\Delta y^2 = 2\Delta x\Delta y.$$

Значит, $(1+\Delta x)^{1+\Delta y}=1+\Delta x+\Delta x\Delta y+r$ или $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+r$, где r – остаточный член. Если его отбросить, то можно получить формулу для приближенных вычислений.

По этой формуле находим:

$$1{,}1^{1{,}02}\overset{\substack{\Delta x=0{,}1\\ \Delta y=0{,}02}}{\approx}1+0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}02=1{,}1+0{,}002=1{,}102,$$

что уточняет результат, полученный в конце разд. 12.3. Погрешности обоих результатов равны соответствующим остаточным членам формулы Тейлора и могут быть определены путем оценки этих членов.

Читателю предоставляется возможность уточнить полученный результат, добавив члены формулы Тейлора, входящие в $d^3 f(x_0,y_0)$.

Ответ: 1,1021.

12.7. Экстремумы функции нескольких переменных

Определение 12.27. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, которая называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $z=f(x,y)$, если $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ $\left(f(x_0,y_0)<f(x,y)\right)$ для всех точек $M(x,y)$, достаточно близких к M_0 (т.е. для всех M, таких, что $0<\left|\overline{M_0M}\right|<\delta$, где δ достаточно мало). Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции.

Теорема 12.11 (**необходимые условия экстремума**). Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – точка экстремума функции $z=f(x,y)$ и пусть в точке M_0 существуют конечные частные производные $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$. Тогда $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$ и $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$

▲ Пусть M_0, например, – точка максимума функции $z=f(x,y)$. Фиксируем $y=y_0\Rightarrow z=f(x,y)$ – функция одной переменной x и $f(x_0,y_0)>f(x,y_0)$ для всех x, достаточно близких к x_0, следовательно, x_0 – точка максимума функции одной переменной $f(x,y_0)$. Тогда по необходимому условию экстремума такой функции

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0.$$

Аналогично $f'_y(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$ ■

Определение 12.28. Точки, в которых частные производные функции $z=f(x,y)$ равны нулю или не существуют, называются *критическими* для этой функции.

Теорема 12.11 утверждает, что функция может иметь экстремумы только в таких точках.

Пример. Найти экстремумы функции $z=x^2-y^2$.

Решение

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$. Так как частные производные существуют всюду, то функция может иметь экстремум только в тех точках, где

$$\begin{cases}2x=0\\ -2y=0\end{cases}\Rightarrow x_0=y_0=0.$$

Но экстремума в точке (0, 0) нет; положим, что $y=0\Rightarrow z=x^2\Rightarrow x=0$ – точка минимума, $x=0\Rightarrow z=-y^2\Rightarrow y=0$ – точка максимума. Следовательно, если экстремум есть, то (0, 0) – и максимум, и минимум, чего быть не может (рис. 70).

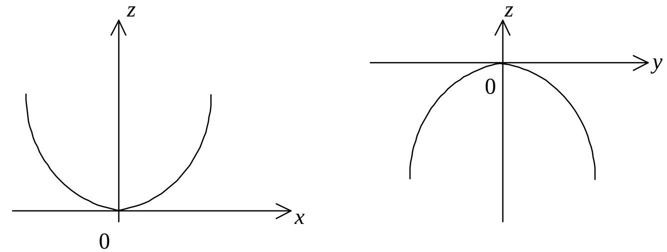


Рис. 70

Тот же вывод следует и из вида поверхности, определяемой уравнением $z=x^2-y^2$ (рис. 71).

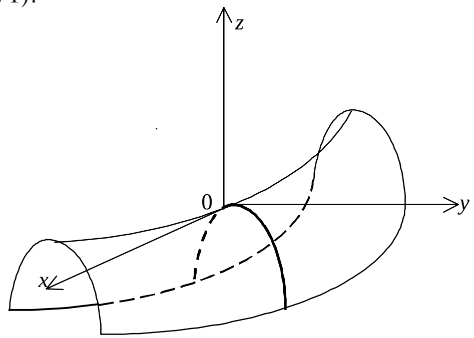


Рис. 71

Это гиперболический параболоид («седло»), и очевидно, что экстремума в точке (0;0) у нашей функции нет.

Таким образом, *необходимые условия экстремума функции не являются достаточными*.

Необходимые условия экстремума функции с числом переменных больше двух абсолютно аналогичны условиям теоремы 12.11.

Формулировка же достаточных условий экстремума функции нескольких переменных требует введения и рассмотрения некоторых объектов курса линейной алгебры, поэтому для простоты ограничимся функциями *двух* переменных.

Теорема 12.12 (достаточные условия экстремума функции двух переменных). Пусть в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть $\dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y}=0$ и пусть $A=\dfrac{\partial^2 z(x_0,y_0)}{\partial x^2}$, $B=\dfrac{\partial^2 z(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}$, $C=\dfrac{\partial^2 z(x_0,y_0)}{\partial y^2}$. Тогда

1) $AC-B^2>0,\ A>0\Rightarrow M_0(x_0,y_0)$ — точка минимума функции $z=f(x,y)$;

2) $AC-B^2>0,\ A<0\Rightarrow M_0(x_0,y_0)$ — точка максимума функции $z=f(x,y)$;

3) $AC-B^2<0\Rightarrow$ экстремума у функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ нет.

▲ Разложим функцию $z=f(x,y)$ по формуле Тейлора (12.22) при $n=1$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2}d^2f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y),$$

где $0<\theta<1$.

Учитывая, что $df(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y=0,$ и обозначая $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$, из этой формулы имеем

$$\Delta z=\frac{1}{2}d^2f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=$$

$$=\frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left[d^2f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)-d^2f(x_0,y_0)\right].$$

Обозначая второй член в правой части этой формулы через r, получаем

$$\Delta z=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2+r\Rightarrow$$

$$\Delta z=\frac{1}{2}A\Delta x^2+B\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}C\Delta y^2+r=K+r, \qquad (12.24)$$

где

$$K=\frac{1}{2}A\Delta x^2+B\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}C\Delta y^2; \qquad (12.25)$$

$$r=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\right]\Delta x^2+$$

$$+\left[\frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right]\Delta x\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\right]\Delta y^2. \qquad (12.26)$$

Обозначая выражения в квадратных скобках через $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ соответственно, перепишем (12.26) в виде

$$r=\frac{1}{2}\tilde{A}\Delta x^2+\tilde{B}\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}\tilde{C}\Delta y^2. \qquad (12.27)$$

Идея доказательства теоремы состоит в том, что в силу непрерывности вторых частных производных функции $f(x, y)$ в формуле (12.24) r – это бесконечно малая более высокого порядка, чем K, поэтому членом r можно пренебречь.

Тогда интересующий нас знак Δz будет совпадать со знаком при

$$K=\frac{1}{2}\Delta y^2\left[A\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2+2B\frac{\Delta x}{\Delta y}+C\right].$$

В случаях 1 и 2 по условию теоремы дискриминант квадратного трехчлена в скобках $D = 4B^2 - 4AC = 4(B^2 - AC) < 0$, значит, знак этого трехчлена совпадает со знаком первого коэффициента *A*, а так как $\Delta y^2 \geq 0$, то так же ведет себя и K:

$A > 0 \Rightarrow K > 0 \Rightarrow \Delta z > 0 \Rightarrow M_0$ – точка минимума,

$A < 0 \Rightarrow K < 0 \Rightarrow \Delta z < 0 \Rightarrow M_0$ – точка максимума нашей функции.

В случае 3 $D > 0$, следовательно, квадратный трехчлен в скобках, а значит, и K меняет знак (он бывает положительным и отрицательным при сколь угодно малых Δx и Δy), соответственно так же меняет знак и Δz, т.е. экстремума у нашей функции в точке M_0 нет.

Строгое доказательство теоремы 12.12 требует более аккуратных рассуждений, которые приведены ниже.

Рассмотрим случаи 1 и 2 теоремы. Положим, что $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, и введем угол φ:

$$\cos\varphi = \frac{\Delta x}{\rho},\ \sin\varphi = \frac{\Delta y}{\rho}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \frac{\Delta x^2}{\rho^2} + \frac{\Delta y^2}{\rho^2} = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\rho^2} = 1\right).$$

Тогда $\Delta x = \rho\cos\varphi,\quad \Delta y = \rho\sin\varphi \overset{(12.25)}{\Rightarrow}$

$$K = \frac{1}{2}A\rho^2\cos^2\varphi + B\rho^2\cos\varphi\ \sin\varphi + \frac{1}{2}C\rho^2\sin^2\varphi. \tag{12.28}$$

Далее имеем

$$K = \frac{1}{2A}\rho^2(A^2\cos^2\varphi + 2AB\cos\varphi\sin\varphi + AC\sin^2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2A}\rho^2\left[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + AC\sin^2\varphi - B^2\sin^2\varphi\right] \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2A}\rho^2\left[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi\right]. \tag{12.29}$$

Так как по условию $AC - B^2 > 0$, то при $\varphi \neq 0$ выражение в квадратной скобке положительно; если же $\varphi = 0$, то $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, а выражение в квадратной скобке равно A^2, значит, это выражение положительно.

Так как выражение в квадратной скобке есть непрерывная функция φ, которая всегда положительна, то, обозначая наименьшее по φ значение этой функции через m, имеем

$$\left|(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi\right| \geq m > 0$$

(если бы $m = 0$, то в силу непрерывности функции существовала бы точка φ, в которой функция была бы равна 0, что не так), значит,

$$|K| \geq \frac{\rho^2}{2|A|}m. \tag{12.30}$$

Теперь аналогично (12.28) из (12.27) получаем, что

$$r = \frac{1}{2}\tilde{A}\rho^2\cos^2\varphi + \tilde{B}\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\tilde{C}\rho^2\sin^2\varphi. \tag{12.31}$$

Отсюда

$$|r| = \frac{1}{2}\rho^2\left|\tilde{A}\cos^2\varphi + 2\tilde{B}\cos\varphi\sin\varphi + \tilde{C}\sin^2\varphi\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\rho^2\left(\left|\tilde{A}\right|\cos^2\varphi + 2\left|\tilde{B}\right|\left|\cos\varphi\right|\left|\sin\varphi\right| + \left|\tilde{C}\right|\sin^2\varphi\right) \leq \frac{1}{2}\rho^2\left(\left|\tilde{A}\right| + 2\left|\tilde{B}\right| + \left|\tilde{C}\right|\right),$$

т.е.

$$|r| \leq \frac{1}{2}\rho^2\left(\left|\tilde{A}\right| + 2\left|\tilde{B}\right| + \left|\tilde{C}\right|\right). \tag{12.32}$$

Из непрерывности вторых частных производных функции $f(x, y)$ следует, что выражение в скобках можно сделать сколь угодно малым за счет выбора Δx и Δy. В частности, при достаточно малых Δx и Δy это выражение меньше $\dfrac{m}{|A|}$ и, следовательно,

$$|r| < \frac{\rho^2}{2|A|}m. \tag{12.33}$$

Из неравенств (12.30) и (12.33) следует, что в формуле (12.24) знак $\Delta z = K + r$ будет совпадать со знаком K.

1. Для того чтобы доказать, что $M_0(x_0, y_0)$ – точка минимума функции $z = f(x, y)$, нам нужно доказать, что $\Delta z > 0$, если Δx и Δy достаточно малы. Но в этом случае в формуле (12.29) $A > 0 \Rightarrow\ K > 0 \Rightarrow \Delta z > 0$ при достаточно малых Δx и Δy и $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \neq 0$ (т.е. при Δx и Δy, не равных 0 одновременно, т.е. не в самой точке (x_0, y_0), что является естественным условием).

2. Аналогично, для того чтобы доказать, что $M_0(x_0,y_0)$ – точка максимума функции $z = f(x,y)$, нам нужно доказать, что $\Delta z < 0$, если

Δx и Δy достаточно малы. Но в этом случае в формуле (12.29) $A<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow K<0 \Rightarrow \Delta z<0$ при достаточно малых Δx и Δy и $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \neq 0$.

Теперь рассмотрим случай 3 теоремы. Сначала разберем вариант $A \neq 0$, для которого по-прежнему справедлива формула (12.29). Возьмем в ней $\varphi=0 \Rightarrow K=\frac{1}{2A}\rho^2 A^2>0$, где $A^2>0$. Теперь возьмем в (12.29) φ таким, что

$$A\cos\varphi+B\sin\varphi=0\left(\operatorname{ctg}\varphi=-\frac{B}{A}\right) \Rightarrow K=\frac{1}{2A}\rho^2(AC-B^2)\sin^2\varphi,$$

где по условию теоремы $(AC-B^2)\sin^2\varphi<0$. Значит, при этих двух значениях φ знаки K будут различными.

Теперь рассмотрим вариант $AC-B^2<0$, $A=0$ ($\Rightarrow B\neq 0$). В этом случае $K \overset{(12.28)}{=} \frac{1}{2}\rho^2\sin\varphi(2B\cos\varphi+C\sin\varphi)$.

Возьмем здесь φ таким, что $|C\sin\varphi|<|2B\cos\varphi|$, т.е. $|\operatorname{ctg}\varphi|>\left|\frac{C}{2B}\right|$. При таких φ знак выражения в скобке $2B\cos\varphi+C\sin\varphi$ будет совпадать со знаком его первого члена $2B\cos\varphi$. Если теперь любой такой φ заменить на $-\varphi$, то четная функция $\cos\varphi$ знак не изменит, а значит, не изменит знак и вся скобка. Но нечетная функция $\sin\varphi$ перед скобкой изменит знак: $\sin(-\varphi)=-\sin\varphi$, следовательно, при двух таких углах φ и $-\varphi$ знаки K будут различными.

В обоих вариантах, согласно оценке (12.32), для обоих взятых углов можем сделать r сколь угодно малым за счет малости Δx и Δy, тогда знак $\Delta z \overset{(12.24)}{=} K+r$ будет совпадать со знаком K и для двух указанных выше значений φ знаки Δz тоже будут различными. Значит, наша функция экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$ не имеет. ■

Пример. Найти экстремумы функции $z=x^3+y^3-3xy$.

Решение

Экстремум может быть только в тех точках, где $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases}x^2=y\\ y^2=x\end{cases} \Rightarrow x^4=x;\ x(x^3-1)=0;\ x_1=0,\ x_2=1 \Rightarrow M_1(0,0),\ M_2(1,1).$$

Теперь в точках M_1 и M_2 проверяем достаточные условия экстремума:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y;$$

$M_1(0,0): A=0, B=-3, C=0 \Rightarrow AC-B^2=-9<0 \Rightarrow$ экстремума в точке M_1 нет.

$M_2(1,1): A=6, B=-3, C=6 \Rightarrow AC-B^2=27>0,\ A>0 \Rightarrow M_2$ – точка минимума.

12.8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением

$$F(x,y,z)=0 \qquad (12.34)$$

(поверхности можно задавать не только уравнениями $z=f(x,y)$, но и более общими уравнениями такого вида).

Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка на поверхности. Предположим, что в точке M_0 все три производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них отлична от нуля. Такая точка M_0 называется обыкновенной точкой поверхности (в отличие от особых точек поверхности, в которых все указанные производные одновременно обращаются в 0).

Проведем через точку M_0 всевозможные кривые, лежащие на нашей поверхности $\bar r=\bar r(t)$, или $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$. Кривые рассматриваются только гладкие, т.е. предполагается, что существует $\bar r'(t)$. К каждой из этих кривых в точке M_0 проведем касательную (рис. 72).

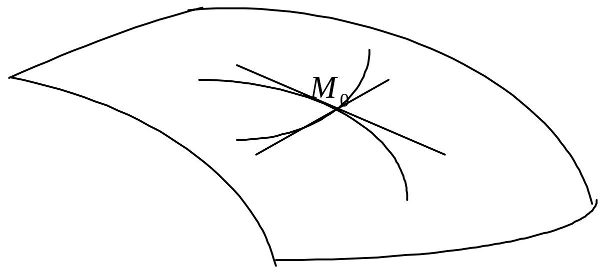


Рис. 72

Теорема 12.13. Все эти касательные лежат в одной плоскости. Или, точнее, все касательные к гладким линиям на поверхности, проходящим через обыкновенную точку поверхности M_0, лежат в одной плоскости.

▲ Рассмотрим одну из наших кривых на поверхности $\bar{r} = \bar{r}(t)$, или $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow F(x(t),\ y(t),\ z(t)) \equiv 0$ для всех t из некоторого интервала $\Rightarrow$

$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ (в каждой точке кривой).

Но по правилу дифференцирования сложной функции в точке M_0 (см. (12.9))

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0 \qquad (12.35)$$

$\Bigg($ правило применимо, так как $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ непрерывны в точке M_0 $\Rightarrow$ $F(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0 и существуют производные $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\Bigg)$.

Введем векторы $\bar{N} = \left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\} \neq 0$ и $\frac{d\bar{r}}{dt} = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\}$ (все производные берутся в точке M_0). Формула (12.35) означает, что скалярное произведение $\bar{N}\frac{d\bar{r}}{dt} = 0$, следовательно, $\bar{N} \perp \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Но, как мы видели ранее (см. разд. 7.4), вектор $\frac{d\bar{r}}{dt}$ направлен по касательной к кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Значит, в обыкновенной точке поверхности M_0 касательные ко всем кривым на поверхности, проведенным через эту точку, перпендикулярны одному и тому же вектору $\bar{N} \neq 0$, следовательно, эти касательные лежат в одной плоскости, которая проходит через точку M_0 и перпендикулярна вектору $\bar{N}$. ■

Определение 12.29. Плоскость, в которой расположены касательные ко всем гладким кривым на поверхности, проходящим через ее обыкновенную точку M_0, называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке M_0.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – это уравнение плоскости по точке M_0 и нормали $\bar{N} = \left\{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{y}, \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\right\}$:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$

$$+\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0. \qquad (12.36)$$

Определение 12.30. Прямая, проведенная через обыкновенную точку поверхности $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к касательной плоскости в этой точке, называется *нормалью* к поверхности в точке M_0 (рис. 73).

Уравнения нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это уравнения прямой по точке M_0 и направляющему вектору $\bar{s} = \bar{N}$:

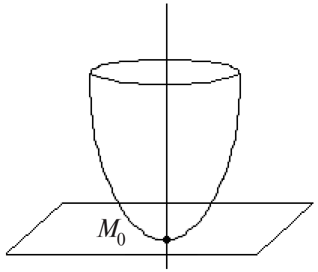


Рис. 73

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}}. \qquad (12.37)$$

Пример. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$ в точке $M_0(1, 2, -1)$.

Р е ш е н и е

Перепишем уравнение поверхности в виде $\underbrace{x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6}_{F(x,y,z)} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + yz;\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + xz;\ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + xy \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F(1, 2, -1)}{\partial x} = 3 - 2 = 1;\quad \frac{\partial F(1, 2, -1)}{\partial y} = 12 - 1 = 11;\quad \frac{\partial F(1, 2, -1)}{\partial z} = 3 + 2 = 5 \Rightarrow$$

$(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0$, $x + 11y + 5z - 18 = 0$ — касательная плоскость,

$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}$ — нормаль.

Геометрический смысл (полного) дифференциала функции двух переменных

Пусть теперь поверхность задана в виде $z = f(x,y)$. Напишем уравнение касательной плоскости:

$$\underbrace{z - f(x,y)}_{F(x,y,z)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x},\ \ \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y},\ \ \frac{\partial F}{\partial z} = 1 \Rightarrow$$

уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + (z-z_0) = 0$$

или

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0). \qquad (12.38)$$

Положим, что $x - x_0 = \Delta x,\ y - y_0 = \Delta y \Rightarrow$

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = df(x_0,y_0).$$

Таким образом, уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$z - z_0 = df(x_0,y_0). \qquad (12.39)$$

Следовательно (аналогично функциям одной переменной, для которых дифференциал равен приращению ординаты касательной), полный дифференциал функции двух переменных $z = f(x,y)$ в точке (x_0,y_0), соответствующий приращениям Δx и Δy независимых переменных x и y, равен соответствующему приращению аппликаты z касательной плоскости в точке (x_0,y_0) к поверхности, которая определяется данной функцией (или к поверхности, которая является графиком данной функции).

12.9. Производная по направлению. Градиент

В этом разделе будем рассматривать функцию u трех переменных. Будем предполагать, что эта функция определена на некотором множестве T трехмерного пространства и во всех точках $M \in T$ имеет непрерывные частные производные. Если $M(x,y,z)$, то $u(x,y,z)$ будем обозначать также $u(M)$.

Определение 12.31. Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0,y_0,z_0) \in T$. Проведем через эту точку направленную прямую (ось) l. Пусть $M(x,y,z) \in l$ – произвольная точка оси. Обозначим M_0M расстояние от M_0 до M со знаком «+» при смещении M от M_0 в сторону направления оси и «–» при смещении M от M_0 в противоположном направлении (рис. 74). Производной функции $u = u(M) = u(x,y,z)$ в точке M_0 по направлению l $\left(\text{обозначим } \dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)\right)$ называется

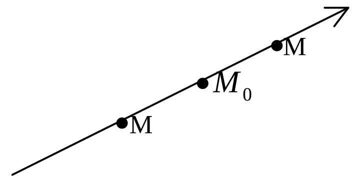


Рис. 74

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \lim_{M_0M \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0M} = \lim_{M_0M \to 0} \frac{u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0)}{M_0M}, \qquad (12.40)$$

если этот предел существует.

Понятие производной по направлению обобщает понятие частных производных функции: если в качестве оси l взять прямые, проходящие через точку M_0 параллельно осям координат $0x$, $0y$, $0z$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$, определенное формулой (12.40), как раз даст $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0)$ соответственно.

Пусть ось l составляет с положительными направлениями осей координат $0x$, $0y$, $0z$ углы α, β, γ соответственно. Обозначим $M_0M = t$. Так как координаты любого вектора – это длины его проекций на оси координат со знаком, то $\overline{M_0M} = \{t\cos\alpha, t\cos\beta, t\cos\gamma\}$ (горизонтальная прямая на рис. 75 – это прямая, параллельная одной из осей координат, а отмеченный угол равен α, β или γ соответственно).

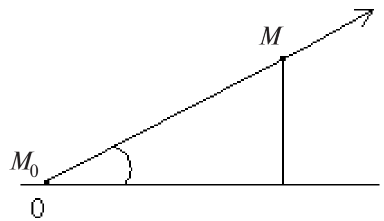


Рис. 75

Но координаты вектора – это разность координат его конца и начала:

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\} \Rightarrow$$

$$x-x_0=t\cos\alpha,\ \ y-y_0=t\cos\beta,\ \ z-z_0=t\cos\gamma,$$

откуда $x=x_0+t\cos\alpha,\ \ y=y_0+t\cos\beta,\ \ z=z_0+t\cos\gamma$, т.е. x, y, и z есть некоторые функции t.

Теперь $u=u(x,y,z)=u(x(t),y(t),z(t))=\varphi(t)$ — некоторая функция от t, $\varphi(0)=u(x_0,y_0,z_0)$ и

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\lim_{M_0M\to 0}\frac{u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)}{M_0M}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0).$$

По правилу дифференцирования сложной функции (см. (12.9))

$$\varphi'(t)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

При $t=0$ частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ берутся в точке M_0 и

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma.$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 12.14. Если на множестве T функция $u(M)=u(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные, то в любой точке $M_0\in T$ эта функция имеет производную по любому направлению l:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma,\qquad(12.41)$$

где α, β, γ — углы l с осями координат $0x$, $0y$, $0z$ соответственно.

Как известно, производная функции — это скорость изменения этой функции. Производная функции по направлению l — это скорость изменения функции по этому направлению. По какому направлению функция изменяется быстрее всего, т.е. по какому направлению производная будет наибольшей?

Для ответа на этот вопрос сначала заметим, что вектор $\overline{e}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ — это единичный вектор (т.е. вектор длины 1), направленный вдоль оси l (координаты такого вектора как раз и равны косинусам его углов с положительными направлениями осей координат). Введем еще один вектор.

Определение 12.32. *Градиентом* функции $u(M)=u(x,y,z)$ в точке M_0 называется вектор $\overline{\text{grad}\ u}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ (все производные берутся в точке M_0).

Правая часть формулы (12.41) равна скалярному произведению этих двух векторов; так как скалярное произведение $\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$, где φ — угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\overline{\text{grad}\ u}\cdot\overline{e}=\left|\overline{\text{grad}\ u}\right|\underbrace{|\overline{e}|}_{1}\cos\varphi=\left|\overline{\text{grad}\ u}\right|\cos\varphi,$$

где φ — угол между $\overline{\text{grad}\ u}$ и осью l. Последнее выражение будет наибольшим при $\cos\varphi=1$, т.е. $\varphi=0$.

Таким образом, производная функции в точке M_0 будет наибольшей по направлению вектора $\overline{\text{grad}\ u}$ в данной точке и эта наибольшая производная по направлению равна $\left|\overline{\text{grad}\ u(M_0)}\right|$.

Замечание. Из формулы (12.40) следует, что значение производной по направлению не зависит от выбора системы координат xyz. Тогда вектор $\overline{\text{grad}\ u(M_0)}$ тоже не зависит от выбора системы координат: он направлен по тому направлению, производная по которому наибольшая, и длина его равна этой наибольшей производной по направлению.

Пример. Найти производную функции $u=xyz$ в точке $M_0\,(1,\,2,\,3)$ по направлению M_0M к точке $M\,(2,\,4,\,6)$ и наибольшую производную по направлению в точке M_0.

Решение

$$\overline{M_0M}=\{2-1,4-2,6-3\}=\{1,2,3\};\ \ \left|\overline{M_0M}\right|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

Из рис. 75 видно, что $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=xz,\ \ \frac{\partial u}{\partial z}=xy;\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)=6,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)=3,\ \ \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)=2;$$

$$\overline{\text{grad}\ u(M_0)}=\{6,3,2\}\overset{(12.41)}{\Rightarrow}\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=6\frac{1}{\sqrt{14}}+3\frac{2}{\sqrt{14}}+2\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{18}{\sqrt{14}}\approx 4{,}81.$$

Наибольшая производная по направлению в точке M_0

$$\left|\overline{\text{grad}\ u(M_0)}\right|=|\{6,3,2,\}|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\sqrt{49}=7.$$

13. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

13.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 13.1. Рассмотрим функцию, которая задается в виде интеграла

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx, \tag{13.1}$$

где $f(x,\alpha)$ – некоторая функция двух переменных. Такой интеграл называется *интегралом, зависящим от параметра*, а переменная α называется *параметром*.

При различных значениях α правая часть формулы (13.1) дает различные значения интеграла (если он вообще существует), поэтому этот интеграл действительно является функцией параметра α.

Свойства интегралов, зависящих от параметра

Обозначим через P замкнутый прямоугольник на плоскости $x\alpha$: $\{-\infty<a\le x\le b<+\infty,\ -\infty<\beta\le\alpha\le\gamma<+\infty\}$.

Теорема 13.1. Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике P. Тогда функция $I(\alpha)$ непрерывна на отрезке $[\beta,\gamma]$.

▲ Пусть $\alpha_0\in[\beta,\ \gamma]$. Надо доказать, что $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} I(\alpha)=I(\alpha_0)$, т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall\alpha,|\alpha-\alpha_0|<\delta\ \ |I(\alpha)-I(\alpha_0)|<\varepsilon$, т.е. в силу (13.1):

$$\left|\int_a^b f(x,\alpha)dx-\int_a^b f(x,\alpha_0)dx\right|=\left|\int_a^b\left[f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)\right]dx\right|<\varepsilon.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Так как функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на замкнутом прямоугольнике P, то согласно теореме 12.4 она равномерно непрерывна на этом прямоугольнике. Значит, $\exists\delta>0$: для $\forall M_1,M_2\in P$, $\rho(M_1,M_2)<\delta$ будет выполняться неравенство $|f(M_2)-f(M_1)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Но если $|\alpha-\alpha_0|<\delta$, то

$$(\rho(M(x,\alpha),M_0(x,\alpha_0))=\sqrt{(x-x)^2+(\alpha-\alpha_0)^2}=|\alpha-\alpha_0|<\delta\Rightarrow$$

$$|I(\alpha)-I(\alpha_0)|\le\left|\int_a^b\left[f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)\right]dx\right|\le\int_a^b|f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)|dx\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.\ ■$$

Теорема 13.2. Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике P. Тогда

$$\int_\beta^\gamma I(\alpha)\,d\alpha=\int_\beta^\gamma\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]d\alpha=\int_a^b\left[\int_\beta^\gamma f(x,\alpha)d\alpha\right]dx.$$

▲ Равенство следует из того, что оба повторных интеграла в левой и правой его частях равны двойному интегралу $\iint\limits_P f(x,\alpha)dxd\alpha$ (см. гл. 19). ■

Теорема 13.3. Пусть функции $f(x,\alpha)$ и $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны на прямоугольнике P. Тогда при $\alpha\in[\beta,\gamma]$ существует

$$I'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx.$$

▲ Согласно определению производной, применяя теорему Лагранжа 5.4 и обозначая промежуточную точку между α и $\alpha+\Delta\alpha$ через $c=\alpha+\theta\Delta\alpha,\ 0<\theta<1$, имеем

$$I'(\alpha)=\lim_{\Delta\alpha\to0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]=$$

$$=\lim_{\Delta\alpha\to0}\int_a^b\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx=\lim_{\Delta\alpha\to0}\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}dx.$$

Нам надо доказать, что последний предел равен $\int_a^b\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall\Delta\alpha,|\Delta\alpha|<\delta$ будет выполняться равенство

$$\left|\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}dx-\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|=\left|\int_a^b\left[\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right]dx\right|<\varepsilon.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывна на замкнутом прямоугольнике P, то она равномерно непрерывна на этом прямоугольнике, значит, $\exists\delta > 0 : \forall M_1, M_2 \in P, \rho(M_1, M_2) < \delta$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(M_2) - \frac{\partial f}{\partial\alpha}(M_1)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Но если $|\Delta\alpha| < \delta$, то $|\theta\Delta\alpha| < \delta$, тогда, как при доказательстве теоремы 13.1,

$$(\rho(M(x,\alpha+\theta\Delta\alpha), M_0(x,\alpha)) < \delta \Rightarrow \left|\int_a^b \left[\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha} - \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right]dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b \left|\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha} - \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right| dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \blacksquare$$

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

Решение

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\Big|_0^b = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}.$$

Дифференцируем обе части по α, используя теорему 13.3:

$$-\int_0^b \frac{2\alpha}{(x^2+\alpha^2)^2}dx = -\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1+\dfrac{b^2}{\alpha^2}}\left(-\frac{b}{\alpha^2}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} + \frac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}.$$

13.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Теоремы 13.1–13.3 применять к несобственным интегралам возможно только при определенных условиях. Для формулировки этих условий нужно ввести понятие равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Рассмотрим несобственный интеграл $I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ с одной особенностью в точке b. В этом и следующем разделах через P обозначим прямоугольник $\{-\infty < a \le x \le b \le +\infty, -\infty < \beta \le \alpha \le \gamma < +\infty\}$.

Как известно, $I(\alpha)$ сходится при $\alpha \in [\beta,\gamma]$, если существует конечный $\lim\limits_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x,\alpha)dx$ или $\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta = \eta(\varepsilon,\alpha) \in [a,b) : \forall c \in (\eta, b)$ выполняется условие $\left|\int_a^c f(x,\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon$. По свойству аддитивности несобственных интегралов последнее неравенство можно переписать в виде $\left|\int_c^b f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon$. Существенным здесь является то, что η выбирается при каждом α, т.е. зависит не только от ε, но и от α.

Определение 13.2. Интеграл $I(\alpha)$ называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[\beta,\gamma]$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta = \eta(\varepsilon) \in [a,b) : \forall c \in (\eta, b)$ и $\forall\alpha \in [\beta,\gamma]$ $\left(\left|\int_c^b f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon\right)$.

В отличие от предыдущего в этом определении η зависит от ε, но не зависит от α, т.е. годится сразу для всех $\alpha \in [\beta,\gamma]$.

Определять равномерную сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра, по приведенному определению сложно. Обычно для этого используют следующий достаточный признак равномерной сходимости.

Теорема 13.4 (**признак Вейерштрасс**а). Пусть существует функция $g(x) \ge 0$, $x \in [a,b)$, такая, что для каждого $x \in [a,b)$ и каждого $\alpha \in [\beta,\gamma]$ выполняется неравенство $|f(x,\alpha)| \le g(x)$, причем интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится. Тогда $I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ равномерно сходится на отрезке $[\beta,\gamma]$.

▲ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то

$$\exists\eta \in [a,b) : \forall c \in (\eta,b)\ (\int_c^b g(x)dx < \varepsilon) \Rightarrow \forall c \in (\eta,b),\ \forall\alpha \in [\beta,\gamma]$$

$$\left(\left|\int_c^b f(x,\alpha)dx\right| \le \int_c^b |f(x,\alpha)|dx \le \int_c^b g(x)dx < \varepsilon\right)$$

(при доказательстве были использованы замечание к теореме 11.3 и свойство 5. из разд. 11.2). ■

13.3. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 13.5. Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике *P*, и интеграл $I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$ равномерно сходится на отрезке $[\beta,\gamma]$. Тогда функция $I(\alpha)$ непрерывна на отрезке $[\beta,\gamma]$.

▲ Пусть $\alpha_0\in[\beta,\gamma]$. Надо доказать, что $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} I(\alpha)=I(\alpha_0)$, т.е. что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall\alpha,|\alpha-\alpha_0|<\delta\ \ (|I(\alpha)-I(\alpha_0)|<\varepsilon)$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Так как интеграл $I(\alpha)$ равномерно сходится на отрезке $[\beta,\gamma]$, то $\exists\eta\in[a,b):\forall c\in(\eta,b)$ и $\forall\alpha\in[\beta,\gamma]$ $\left(\left|\int_c^b f(x,\alpha)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\right)$. Фиксируем одно такое *c*.

Так как по теореме 13.1 функция $\int_a^c f(x,\alpha)dx$ непрерывна на отрезке $[\beta,\gamma]$, а значит, и в точке α_0, то $\exists\delta>0:\forall\alpha,|\alpha-\alpha_0|<\delta$

$$\left(\left|\int_a^c f(x,\alpha)dx-\int_a^c f(x,\alpha_0)dx\right|=\left|\int_a^c\left[f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)\right]dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\forall\alpha,|\alpha-\alpha_0|<\delta\ \ |I(\alpha)-I(\alpha_0)|=\left|\int_a^b\left[f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)\right]dx\right|=$$

$$=\left|\int_a^c\left[f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)\right]dx+\int_c^b f(x,\alpha)dx-\int_c^b f(x,\alpha_0)dx\right|\le$$

$$\le\left|\int_a^c\left[f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)\right]dx\right|+\left|\int_c^b f(x,\alpha)dx\right|+\left|\int_c^b f(x,\alpha_0)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\ ■$$

Теорема 13.6. Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике *P* и интеграл $I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$ равномерно сходится на отрезке $[\beta,\gamma]$. Тогда

$$\int_\beta^\gamma I(\alpha)d\alpha=\int_\beta^\gamma\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]d\alpha=\int_a^b\left[\int_\beta^\gamma f(x,\alpha)d\alpha\right]dx.$$

▲ Интеграл $\int_\beta^\gamma\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]d\alpha$ в левой части последней формулы существует, так как по теореме 13.5 функция $I(\alpha)$ непрерывна на $[\beta,\gamma]$. Нам надо доказать, что существует и равен интегралу слева следующий интеграл:

$$\int_a^b\left[\int_\beta^\gamma f(x,\alpha)d\alpha\right]dx \underset{\substack{c\to b\\ c<b}}{=} \int_a^c\left[\int_\beta^\gamma f(x,\alpha)d\alpha\right]dx,$$

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\eta=\eta(\varepsilon)\in[a,b):\forall c\in(\eta,b)$

$$\left|\int_a^c\left[\int_\beta^\gamma f(x,\alpha)d\alpha\right]dx-\int_\beta^\gamma\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]d\alpha\right|<\varepsilon.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Так как $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ равномерно сходится на $[\beta,\gamma]$, то $\exists\eta\in[a,b):\forall c\in(\eta,b),\forall\alpha\in[\beta,\gamma]$

$$\left(\left|\int_c^b f(x,\alpha)dx\right|<\frac{\varepsilon}{\gamma-\beta}\right)\Rightarrow$$

$\forall c\in(\eta,b)$ по теореме 13.2 имеем:

$$\left|\int_a^c\left[\int_\beta^\gamma f(x,\alpha)d\alpha\right]dx-\int_\beta^\gamma\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]d\alpha\right|=$$

$$=\left|\int_\beta^\gamma\left[\int_a^c f(x,\alpha)dx\right]d\alpha-\int_\beta^\gamma\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]d\alpha\right|=$$

$$=\left|\int_\beta^\gamma\left[-\int_c^b f(x,\alpha)dx\right]d\alpha\right|\le\int_\beta^\gamma\left|\int_c^b f(x,\alpha)dx\right|d\alpha<\frac{\varepsilon}{\gamma-\beta}(\gamma-\beta)=\varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 13.7. Пусть функции $f(x,\alpha)$ и $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны на прямоугольнике P, интеграл $I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$ сходится при $\alpha\in[\beta,\gamma]$, а интеграл $\Phi(\alpha)=\int_a^b\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ равномерно сходится на отрезке $[\beta,\gamma]$. Тогда функция $I(\alpha)$ дифференцируема на отрезке $[\beta,\gamma]$ и

$$I'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx.$$

▲ Надо доказать, что

$$I'(\alpha)=\lim_{\Delta\alpha\to0}\frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]=$$

$$=\lim_{\Delta\alpha\to0}\int_a^b\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx\overset{\text{т. 5.4}}{=}\lim_{\Delta\alpha\to0}\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}dx,$$

где $0<\theta<1$, действительно равен $\int_a^b\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$, т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall\Delta\alpha,\ |\Delta\alpha|<\delta$

$$\left(\left|\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}dx-\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|<\varepsilon\right).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Так как $\int_a^b\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ равномерно сходится на $[\beta,\gamma]$, то $\exists\eta\in[a,b):\forall c\in(\eta,b),\forall\alpha\in[\beta,\gamma]$ $\left(\left|\int_c^b\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$. Фиксируем такое c. Так же как при доказательстве теоремы 13.3, $\exists\delta>0:\forall\Delta\alpha,|\Delta\alpha|<\delta$ и $\forall x\in[a,c]$ будет выполняться неравенство

$$\left(\left|\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|<\frac{\varepsilon}{3(c-a)}\right)\Rightarrow$$

$\forall\Delta\alpha,\ |\Delta\alpha|<\delta$ будет справедливо, что

$$\left|\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}dx-\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|=$$

$$=\left|\int_a^c\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}dx-\int_a^c\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+\int_c^b\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}dx-\int_c^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|\le$$

$$\le\left|\int_a^c\left[\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right]dx\right|+\left|\int_c^b\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|+\left|\int_c^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|\le$$

$$\le\int_a^c\left|\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|dx+\left|\int_c^b\frac{\partial f(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|+\left|\int_c^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{3(c-a)}(c-a)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\quad\blacksquare$$

Пример. Вычислить несобственный интеграл $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx.$

Решение

Этот интеграл имеет одну особенность $+\infty$, так как в точке 0 функция имеет конечный предел по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}\lim_{x\to0}\frac{\alpha e^{\alpha x}}{1}=\alpha.$$

Далее имеем $I(\alpha)=\int_0^1\dfrac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx.$ Первый из этих интегралов не является несобственным, т.е. равен некоторому числу, а второй есть разность сходящегося интеграла $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{xe^x}\left(\dfrac{1}{xe^x}\le\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}\text{ и }\int_1^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_1^{+\infty}=e^{-1}\right)$ и интеграла $\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{-\alpha x}}{xe^x}dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{xe^{(\alpha+1)x}}$, который сходится при $\alpha+1>0,\alpha>-1$ $\left(\dfrac{1}{xe^{(\alpha+1)x}}\le\dfrac{1}{e^{(\alpha+1)x}}\text{ и }\int_1^{\infty}e^{-(\alpha+1)x}dx\text{ сходится — см. ниже}\right)$, значит, $I(\alpha)$ сходится при $\alpha>-1$:

$$I'(\alpha) \overset{\text{т. 13.7}}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\right)'_\alpha dx = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-\alpha x}}{xe^x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+1)x} dx = -\frac{1}{\alpha+1} e^{-(\alpha+1)x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow$$

$$I(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \ln(\alpha+1) + c,$$

а так как $I(0) = 0 = \ln 1 + c$, то $c = 0$ и $I(\alpha) = \ln(\alpha+1)$.

Для правомерности применения теоремы 13.7 достаточно проверить равномерную сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+1)x} dx$ при $\alpha \geq -1+\delta$, где $\delta \geq 0$ – произвольное фиксированное число. Тогда равенство $I(\alpha) = \ln(\alpha+1)$ будет верно при $\alpha \geq -1+\delta$, а значит, и при $\alpha > -1$. Эта равномерная сходимость следует из признака Вейерштрасса 13.4: $e^{-(\alpha+1)x} \leq e^{-\delta x}$, и сходится интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\delta x} dx = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\delta}$.

13.4. Гамма-функция

Существует ряд функций, которые задаются (сходящимися) несобственными интегралами. В этом разделе мы рассмотрим одну из таких функций.

Определение 13.3. *Гамма-функцией* называется функция $\Gamma(\alpha)$, которая задается следующим несобственным интегралом:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \qquad (13.2)$$

Данный интеграл является несобственным. У него две «особенности»: бесконечный предел ($+\infty$) и разрыв подынтегральной функции при $x = 0$ (если $\alpha - 1 < 0 \Rightarrow \alpha < 1$). Докажем, что этот интеграл сходится при всех $\alpha > 0$ (т.е. формула (13.2) определяет гамма-функцию при $\alpha > 0$). По определению интеграла с несколькими «особенностями» (см. разд. 11.1), его надо представить в виде суммы интегралов с одной «особенностью» в каждом:

$$\Gamma(\alpha) = \underbrace{\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx}_{I_1(\alpha)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx}_{I_2(\alpha)}.$$

1. Согласно теореме сравнения в предельной форме 11.2 сравним $I_1(\alpha)$ с $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$: $\lim\limits_{x\to+0} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to+0} e^{-x} = 1$ и $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ сходится при $1-\alpha < 1$, $\alpha > 0$. Следовательно $I_1(\alpha)$ сходится при $\alpha > 0$ (и расходится при $\alpha \leq 0$).

2. Докажем, что $I_2(\alpha)$ сходится при всех α (фактически это следует из того, что при $x \to +\infty$ величина e^{-x} стремится к нулю быстрее, чем x в любой степени). Сравним, например, $I_2(\alpha)$ со сходящимся интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} = 0$ (если $\alpha + 1 \leq 0$, то последнее равенство очевидно; если же $\alpha + 1 > 0$, то нужно достаточное количество раз применить правило Лопиталя (см. теорему 5.5), при этом знаменатель не меняется, а из числителя x в конце концов «уйдет», что и даст нужный нам результат). Следовательно, по теореме сравнения в предельной форме 11.2 (случай $K = 0$), $I_2(\alpha)$ сходится при всех α.

3. То есть интеграл (13.2) сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha \leq 0$.

Нахождение значений гамма-функции ($\alpha > 0$ ***)***

1. Формула приведения имеет вид

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \qquad (13.3)$$

▲ Применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\Gamma(\alpha) = \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \Rightarrow \Gamma(\alpha+1) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{x^\alpha}_{u} \underbrace{e^{-x} dx}_{dv} = \underbrace{-x^\alpha e^{-x}\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x} \alpha x^{\alpha-1} dx}_{\alpha\Gamma(\alpha)} = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Здесь

$u = x^\alpha$ $\qquad dv = e^{-x} dx$

$du = \alpha x^{\alpha-1} dx$ $\qquad v = -e^{-x}$

$$x^\alpha e^{-x}\Big|_{x=0} = 0; x^\alpha e^{-x}\Big|_{x=+\infty} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^x} = \ldots = 0. \ \blacksquare$$

2. Гамма-функция от 1:

$$\Gamma(1) = 1. \tag{13.4}$$

▲ $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - 1\right) = -(0-1) = 1.$ ■

3. Гамма-функция натурального аргумента:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{13.5}$$

▲ Пусть $\alpha = n$ — натуральное число, тогда по формуле приведения

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) =$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) = \ldots =$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 1\cdot\underbrace{\Gamma(1)}_{1} \Rightarrow \Gamma(n) = \Gamma(n-1)! \ \blacksquare$$

В частности, $\Gamma(2) = 1! = 1; \Gamma(3) = 2! = 2; \Gamma(4) = 3! = 6; \Gamma(5) = 4! = 24.$

4. Гамма-функция от $\frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{13.6}$$

▲ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$ Сделаем замену $x = t^2$, $dx = 2tdt$, $\sqrt{x} = t$. Тогда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\cdot 2tdt = 2\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

Замечание. При доказательстве было использовано равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{13.7}$$

Это так называемый интеграл Эйлера–Пуассона; вычислить его в данный момент достаточно сложно. Формула (13.7) будет доказана в гл. 19, где она

будет получена путем перехода к полярным координатам в двойном интеграле. ■

5. Гамма-функция полуцелого аргумента.

Введем следующие обозначения:

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n); \ \ (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$$

Тогда справедлива следующая формула:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \ n\in Z. \tag{13.8}$$

$$\blacktriangle \ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \overset{(13.3)}{=} \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = \ldots =$$

$$= \underbrace{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{n \text{ сомножителей}}\cdot\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot\ldots\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}. \ \blacksquare$$

Примеры. Вычислить значения $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$.

Решение

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right) \overset{n=3}{=} \frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{8}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(4+\frac{1}{2}\right) \overset{n=4}{=} \frac{7!!}{2^4}\sqrt{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{16}\sqrt{\pi} = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}.$$

6. Гамма-функция отрицательного аргумента.

До сих пор мы определяли гамма-функцию для положительных α (лишь для них сходится $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$). Формула приведения $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ может служить определением гамма-функции отрицательного аргумента. Из этой формулы

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}. \tag{13.9}$$

Теперь, зная $\Gamma(\alpha+1)$, находим $\Gamma(\alpha)$. Если $\alpha\in(-1,0)$, то $\alpha+1\in(0,1)$, а на этом интервале гамма-функция уже известна.

Таким же методом определим гамма-функцию для $\alpha\in(-1,0)$. Точно так же, зная гамма-функцию при $\alpha\in(-1,0)$, по формуле (13.9) найдем гамма-функцию для $\alpha\in(-2,-1)$ и т.д. В итоге мы определим гамма-функцию во всех отрицательных нецелых точках.

Получим также формулу для гамма-функции в отрицательных полуцелых точках:

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-n+\frac{3}{2}\right)}{-n+\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\left(-n+\frac{5}{2}\right)}{\left(-n+\frac{1}{2}\right)\left(-n+\frac{3}{2}\right)}=\ldots=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-n+\frac{1}{2}\right)\left(-n+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot 2^n}{(-2n+1)(-2n+3)\ldots(-2n+(2n-1))}=$$

$$=\frac{2^n\sqrt{\pi}}{(-1)^n(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1}=\frac{(-1)^n 2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}\Rightarrow$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^n 2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!},\quad n\in Z. \tag{13.10}$$

Примеры. Найти значение гамма-функции в отрицательных полуцелых точках.

Решение

1. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\overset{n=1}{=}\frac{(-1)2\sqrt{\pi}}{(2-1)!!}=-2\sqrt{\pi};$

2. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\overset{n=2}{=}\frac{2^2\sqrt{\pi}}{3!!}=\frac{4\sqrt{\pi}}{3};$

3. $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)\overset{n=3}{=}\frac{-2^3\sqrt{\pi}}{5!!}=-\frac{8\sqrt{\pi}}{15};$

4. $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)\overset{n=4}{=}\frac{2^4\sqrt{\pi}}{7!!}=\frac{16\sqrt{\pi}}{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}=\frac{16\sqrt{\pi}}{105}.$

График гамма-функции

Можно показать, что гамма-функция $\Gamma(\alpha)$ непрерывна при $\alpha>0$ и $\alpha<0$, $\alpha\neq -n$, где $n\in Z$.

Исходя из формулы приведения $\Gamma(\alpha)=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, имеем

$$\Gamma(+0)=\lim_{\alpha\to+0}\Gamma(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(1)}{\lim\limits_{\alpha\to+0}\alpha}=\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to+0}\alpha}=+\infty;$$

$$\Gamma(-0)=\lim_{\alpha\to-0}\Gamma(\alpha)=\lim_{\alpha\to-0}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(1)}{\lim\limits_{\alpha\to-0}\alpha}=\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to-0}\alpha}=-\infty;$$

$$\Gamma(-1+0)=\lim_{\alpha\to-1+0}\Gamma(\alpha)=\lim_{\alpha\to-1+0}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(+0)}{-1}=-\infty;$$

$$\Gamma(-1-0)=\lim_{\alpha\to-1-0}\Gamma(\alpha)=\lim_{\alpha\to-1-0}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(-0)}{-1}=+\infty \text{ и т.д.}$$

Теперь, учитывая эти пределы и посчитанные значения гамма-функции в некоторых точках, можем изобразить график гамма-функции (рис. 76). При этом отметим, что мы не искали точки экстремума функции (что совсем не так легко).

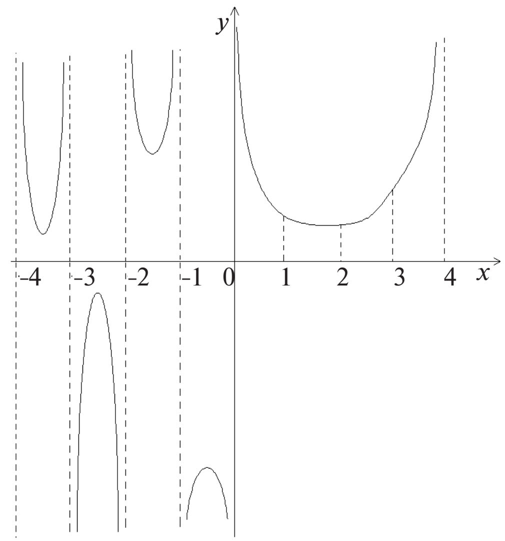


Рис. 76

V

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

14.1. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям

Задача 1. Найти все кривые, обладающие следующим свойством: если в любой точке кривой провести касательную, то отрезок касательной, заключенный между осями координат, будет делиться в точке касания пополам (рис. 77).

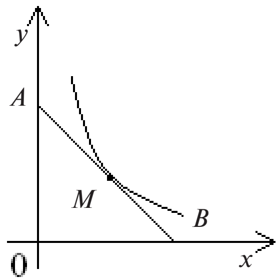


Рис. 77

Решение

Пусть $y = f(x)$ искомая кривая. Обозначая через X и Y координаты касательной к этой кривой, запишем уравнение этой касательной в точке (x, y): $Y - y = y'(X - x)$.

Найдем точки пересечения касательной с осями координат:

$$A: X = 0 \Rightarrow Y = y - y'x;\ B: Y = 0 \Rightarrow X - x = -\frac{y}{y'},\ X = x - \frac{y}{y'}.$$

Так как точка касания M должна являться серединой отрезка $[A, B]$, то ее координаты должны быть средними арифметическими соответствующих координат точек A и B, т.е. $x = \dfrac{0 + x - \frac{y}{y'}}{2}$, или $-\dfrac{y}{y'} = x$, $y' = -\dfrac{y}{x}$ и $y = \dfrac{y - y'x + 0}{2}$, или $-y'x = y$, $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Таким образом, наша кривая должна удовлетворять соотношению $y' = -\dfrac{y}{x}$. Такого типа соотношения, куда входят производные искомой функции, называются *дифференциальными уравнениями* (или, более строго, обыкновенными дифференциальными уравнениями).

Убедимся, что нашему соотношению удовлетворяют все функции вида $y = \dfrac{c}{x}$, где c — произвольная постоянная: $y' = \dfrac{-c}{x^2}$, $-\dfrac{c}{x^2} = -\dfrac{c/x}{x}$. Ниже будет показано, что других функций, удовлетворяющих данному уравнению, нет, т.е. функция $y = \dfrac{c}{x}$ дает все решения уравнения $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Задача 2. Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна имеющемуся количеству радия. Пусть в момент времени $x = x_0$ имелся y_0 г радия. Найти $y(x)$ — количество радия в любой момент времени $x > x_0$.

Решение

По условию задачи $y'(x) = ky(x)$ ($k < 0$ — коэффициент пропорциональности) и $y(x_0) = y_0$. Это есть дифференциальное уравнение и так называемое начальное условие, т.е. задается значение функции при некотором значении аргумента.

Убедимся, что нашему уравнению удовлетворяют все функции вида $y = ce^{kx}: y' = cke^{kx}$, $cke^{kx} = kce^{kx}$ (c — произвольная постоянная). Ниже будет показано, что других решений у данного уравнения нет.

Теперь используем начальное условие $y(x_0) = y_0$: $ce^{kx_0} = y_0$, т.е. $c = y_0 e^{-kx_0}$ и $y = y_0 e^{-kx_0} e^{kx} = y_0^{k(x-x_0)}$ — единственное решение нашей задачи.

В обоих рассмотренных задачах дифференциальные уравнения имеют бесконечное множество решений, которые зависят от произвольной постоянной. Для ее нахождения, т.е. для единственности решения задачи, нужно к уравнению добавить начальное условие (в примере 1, если $y(x_0) = y_0$, то из формулы $y = \dfrac{c}{x}$ при $x = x_0$ имеем $y_0 = \dfrac{c}{x_0}$, $c = x_0 y_0$).

14.2. Дифференциальные уравнения произвольного и первого порядков

Определение 14.1. *Дифференциальным уравнением* называется соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и производные этой функции $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. В общем случае это соотношение можно записать в виде

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (14.1)$$

где F – некоторая функция $(n+2)x$ переменных.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение (т.е. формула (14.1) задает дифференциальное уравнение n-го порядка).

Решением (или частным решением) дифференциального уравнения (на некотором множестве) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество (на этом множестве).

Если решение уравнения задано в неявной форме $\hat{O}\,(x, y) = 0$, то такое равенство называют *интегралом дифференциального уравнения*.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Решить дифференциальное уравнение – значит найти все его решения.

Определение 14.2. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (14.2)$$

где F – некоторая функция трех переменных. Если из этого уравнения можно выразить y', то оно примет вид

$$y' = f(x, y), \qquad (14.3)$$

где $f(x, y)$ – некоторая функция двух переменных. Уравнение (14.3) называется уравнением, разрешенным относительно производной.

Мы будем в основном рассматривать именно такие уравнения.

Определение 14.3. Задачей Коши для уравнения (14.3) называется задача

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (14.4)$$

Здесь x_0 и y_0 – некоторые числа.

Требуется найти решение дифференциального уравнения (14.3), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Теорема 14.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D на плоскости $0xy$ и точка $(x_0, y_0) \in D$. Тогда задача Коши (14.4) имеет решение, и притом единственное. Это решение определено в некоторой окрестности точки x_0.

Доказательство этой теоремы достаточно сложно и требует введения ряда дополнительных понятий, поэтому оставим его за пределами данного пособия.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что через точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая.

Определение 14.4. Пусть в области D выполняются условия теоремы 14.1. Функция

$$f = \varphi(x, c), \qquad (14.5)$$

где c – постоянная, называется общим решением уравнения первого порядка (14.3) в некоторой окрестности точки x_0 $U(x_0)$, если:

1) при $\forall x \in U(x_0)$ и $\forall c \in C$, где C – некоторое множество (в простых случаях c вообще любое) функция (14.5) является решением уравнения (14.3);

2) любое решение уравнения (14.3), график которого лежит в области D ($x \in U(x_0)$), получается из формулы (14.5) при некотором значении $c \in C$.

Покажем, что условие 2 в этом определении можно заменить на условие 2′. Для любого начального условия $y(x_0) = y_0$, где $(x_0, y_0) \in D$, существует значение постоянной $c_0 \in C$, при котором функция (14.5) удовлетворяет этому начальному условию: $\varphi(x_0, c_0) = y_0$.

▲ Пусть функция (14.5) удовлетворяет условию 2. Зададим произвольное начальное условие $y(x_0) = y_0$, где $(x_0, y_0) \in D$. Тогда по теореме 14.1 существует единственное решение уравнения (14.3), удовлетворяющее данному начальному условию. Согласно условию 2, это решение получается из (14.5) при некотором $c_0 \in C$. Отсюда $\varphi(x_0, c_0) = y_0$, т.е. функция (14.5) удовлетворяет условию 2′.

Пусть, наоборот, функция (14.5) удовлетворяет условию 2′. Пусть $y(x)$, $x \in U(x_0)$ – произвольное решение (14.3), график которого лежит в области D, и пусть в точке x_0 это решение принимает некоторое значение y_0: $y(x_0) = y_0$ ($(x_0, y_0) \in D$). Согласно условию 2′, существует значение постоянной $c_0 \in C$, при котором функция (14.5) удовлетворяет условию $\varphi(x_0, c_0) = y_0$. Но так как по теореме 14.1 данному начальному условию может удовлетворять только одно решение уравнения (14.3), то функция $\varphi(x, c_0)$, $x \in U(x_0)$, и является решением (14.3), т.е. функция (14.5) удовлетворяет условию 2. ■

Определение 14.5. Равенство вида $\Phi(x,y,c) = 0$, неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка (14.3).

14.3. Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решений

В этом разделе будут рассмотрены некоторые уравнения вида $y' = f(x,y)$ и указаны методы решения таких уравнений (функция $f(x,y)$ будет предполагаться удовлетворяющей условиям теоремы 14.1).

1. *Уравнения с разделяющимися переменными*

Такими уравнениями называются уравнения вида

$$y' = f(x)g(y) \text{ или } \frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \quad (14.6)$$

Решение

Предполагая, что $g(y) \neq 0$, запишем последнее равенство в виде $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ (таким образом, мы сумели «разделить переменные» в уравнении (14.6)). Считая, что $y = y(x)$ есть решение исходного уравнения, мы видим, что последнее равенство есть равенство дифференциалов двух функций от x, которое может выполняться тогда, и только тогда, когда сами эти функции, или интегралы от их дифференциалов, отличаются на произвольную постоянную:

$$\int \frac{dy(x)}{g(y(x))} = \int f(x)dx + c, \text{ или } \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c. \quad (14.7)$$

Равенство (14.7), имеющее вид $\Phi(x,y,c) = 0$, на самом деле и является общим интегралом исходного дифференциального уравнения (14.6).

В качестве примеров рассмотрим уравнения с разделяющимися переменными (см. разд. 14.1).

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' = -\frac{y}{x}$.

Решение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x};\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x};\ \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} + c;\ \ln|y| = -\ln|x| + c.$$

Из полученного равенства вида (14.7) в данном примере можно выразить y. Заменяя в формуле c на $\ln|c|$ (то и другое – произвольные постоянные), имеем:

$\ln|y| = \ln|c| - \ln|x|$; $\ln|y| = \ln\frac{|c|}{|x|}$; $|y| = \left|\frac{c}{x}\right|$; $y = \pm\frac{c}{x}$, или ($\pm c$ можно заменить на c) $y = \frac{c}{x}$. В этой формуле c – произвольное число (мы решали уравнение при условии $y \neq 0$, т.е. $c \neq 0$, но получаемая при $c = 0$ функция $y = 0$ тоже, очевидно, является решением исходного уравнения).

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $y' = ky$.

Решение

$$\frac{dy}{dx} = ky;\ \frac{dy}{y} = kdx;\ \int\frac{dy}{y} = k\int dx + c;\ \ln|y| = kx + c.$$

Из последнего равенства вида (14.7) выражаем y: $|y| = e^{kx+c} = e^{kx} \cdot e^c$; $y = \pm e^c e^{kx}$.

Так как e^c – произвольное положительное число, то, заменяя в последнем равенстве $\pm e^c$ на c, имеем $y = ce^{kx}$. В этом равенстве c – произвольное число (получаемая при $c = 0$ функция $y = 0$ тоже является решением исходного уравнения).

Таким образом, в обоих примерах получили те самые решения, которые уже обсуждались в разд. 14.1. Вернувшись к определению 14.4 разд. 14.2 (условия 1 и 2′), мы видим, что в разд. 14.1 уже было установлено, что функции $y = \frac{c}{x}$ и $y = ce^{kx}$ являются общими решениями рассмотренных дифференциальных уравнений.

Уравнениями с разделяющимися переменными являются также уравнения вида

$$P(x)Q(y)dx + R(x)T(y)dy = 0, \tag{14.8}$$

в которых переменные разделяются после деления на $R(x)$ и $Q(y)$ (предполагается, что такое деление возможно, т.е. знаменатели отличны от 0):

$$\frac{T(y)}{Q(y)}dy = -\frac{P(x)}{R(x)}dx.$$

Уравнения, сводящиеся к уравнениям
с разделяющимися переменными

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c), \tag{14.9}$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, c — некоторые постоянные (при a или b, равном 0, правая часть уравнения зависит только от одной переменной, т.е. (14.9) уже является уравнением с разделяющимися переменными).

Решение

Сделаем в уравнении (14.9) замену $u = ax + by + c$, где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y = \frac{1}{b}(u - ax - c)$, $y' = \frac{1}{b}(u' - a)$, и (14.9) принимает вид $\frac{1}{b}(u' - a) = f(u)$; $u' = bf(u) + a$, что является уравнением с разделяющимися переменными: $\frac{du}{bf(u) + a} = dx$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = 3x - 2y + 5$.

Решение

$$u = 3x - 2y + 5;\ y = \frac{1}{2}(3x - u + 5);\ y' = \frac{1}{2}(3 - u');\ \frac{1}{2}(3 - u') = u;\ 3 - 2u = u';$$

$$\frac{du}{dx} = 3 - 2u;\ \frac{du}{3 - 2u} = dx;\ \int\frac{du}{3 - 2u} = \int dx + c;\ -\frac{1}{2}\int\frac{d(3 - 2u)}{3 - 2u} = x + c;$$

$$-\frac{1}{2}\ln|3 - 2u| = x + c;\ \ln|3 - 2u| = -2x - 2c;\ |3 - 2u| = e^{-2x-2c};\ 3 - 2u = \pm e^{-2x}e^{-2c};$$

$$u = \pm\frac{1}{2}e^{-2c}e^{-2x} + \frac{3}{2}.$$

Заменяя здесь $\pm\frac{1}{2}e^{-2c}$ на c, имеем: $u = ce^{-2x} + \frac{3}{2}$, откуда

$$y = \frac{1}{2}\left(3x - ce^{-2x} - \frac{3}{2} + 5\right) = -\frac{c}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4},$$

или, заменяя $-\frac{c}{2}$ на c,

$$y = ce^{-2x} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

2. *Однородные уравнения первого порядка*

Такими уравнениями называются уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{14.10}$$

(в этих уравнениях правая часть зависит только от отношения $\frac{y}{x}$).

Решение

Сделаем в этом уравнении замену $\frac{y}{x} = u$, где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция: $y = ux$; $y' = u'x + u$. Тогда уравнение примет вид $u'x + u = f(u)$, или $u'x = f(u) - u$. Но последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx}x = f(u) - u$; $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$ и решается так же, как все такие уравнения:

$$\int\frac{du}{f(u) - u} = \int\frac{dx}{x} + c.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

Решение

Переписав это уравнение в виде $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, видим, что оно является однородным. После замены $\frac{y}{x} = u$, $y = ux$; $y' = u'x + u$ уравнение принимает вид $u'x + u = \frac{1}{u} + u$; $u'x = \frac{1}{u}$. Разделяем переменные в последнем уравнении: $\frac{du}{dx}x = \frac{1}{u}$; $udu = \frac{dx}{x}$. Далее имеем: $\int udu = \int \frac{dx}{x} + c$; $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln|c|$;

$$u^2 = 2\ln|cx|;\ \ u^2 = \ln c^2x^2;\ \ u^2 = \ln cx^2;\ \ u = \pm\sqrt{\ln cx^2};\ \ y = ux = \pm x\sqrt{\ln cx^2}.$$

Нетрудно проверить, что последняя функция дает общее решение исходного дифференциального уравнения: непосредственной подстановкой ее в уравнение проверяем, что при любом $c > 0$ она является решением этого уравнения. Задавая произвольное начальное условие $y(x_0) = y_0$ для чисел x_0 и y_0 одного или разных знаков, определяем знак «+» или «–» и значение c: $\ln cx_0^2 = \frac{y_0^2}{x_0^2}$; $cx_0^2 = e^{y_0^2/x_0^2}$; $c = \frac{1}{x_0^2}e^{y_0^2/x_0^2}$.

Уравнения, сводящиеся к однородным

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),\ \ \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}. \qquad (14.11)$$

Заметим, что если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, то $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, и (14.11) примет вид

$$y' = f\left(\frac{ka_2x + kb_2y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = g(a_2x + b_2y),$$

где g – некоторая функция, т.е. примет вид (14.9) и тем самым будет приводиться к уравнению с разделяющимися переменными.

Если бы в уравнении (14.11) $c_1 = c_2 = 0$, то это уравнение имело бы вид

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right),$$

т.е. вид (14.10), и являлось бы однородным. Поэтому будем пытаться путем некоторой замены (аргумента x и искомой функции y) обратить эти коэффициенты в 0. Положим, что

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + \alpha; \\ y = \tilde{y} + \beta, \end{cases}$$

где α и β – некоторые числа. Тогда

$$dx = d\tilde{x},\ dy = d\tilde{y} \text{ и } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \tilde{y}',$$

где $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$. Уравнение (14.11) теперь принимает вид

$$y' = f\left(\frac{a_1(\tilde{x}+\alpha) + b_1(\tilde{y}+\beta) + c_1}{a_2(\tilde{x}+\alpha) + b_2(\tilde{y}+\beta) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y} + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y} + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right).$$

Теперь подберем α и β так, чтобы $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0; \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$ Эта система имеет единственное решение, так как ее определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, ибо по условию строки этого определителя не пропорциональны. При таких α и β наше уравнение, как было показано выше, становится однородным.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$.

Решение

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + \alpha \\ y = \tilde{y} + \beta \end{cases} \Rightarrow \tilde{y}' = \frac{\tilde{x} + \alpha + \tilde{y} + \beta - 3}{\tilde{x} + \alpha - \tilde{y} - \beta - 1} = \frac{\tilde{x} + \tilde{y} + \alpha + \beta - 3}{\tilde{x} - \tilde{y} + \alpha - \beta - 1};$$

α и β должны удовлетворять системе $\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0; \\ \alpha - \beta - 1 = 0. \end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, имеем

$$2\alpha - 4 = 0;\ \alpha = 2;\ 2\beta - 2 = 0;\ \beta = 1, \text{ т.е. } x = \tilde{x} + 2,\ y = \tilde{y} + 1.$$

При такой замене

$$\tilde{y}' = \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{\tilde{x} - \tilde{y}};\ \tilde{y}' = \frac{1 + \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{1 - \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}.$$

В последнем однородном уравнении сделаем замену $\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = u,\ \tilde{y} = u\tilde{x}$, $\tilde{y}' = u'\tilde{x} + u$. Тогда

$$u'\tilde{x}+u=\frac{1+u}{1-u};\ u'\tilde{x}=\frac{1+u}{1-u}-u=\frac{1+u-u+u^2}{1-u}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{d\tilde{x}}\tilde{x}=\frac{1+u^2}{1-u}, \frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}}$ и интегрируем:

$$\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}}+c; \int\frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}=\ln|\tilde{x}|+\ln|c|;$$

$$\operatorname{arctg} u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|c\tilde{x}|; \operatorname{arctg} u=\ln\sqrt{1+u^2}+\ln|c\tilde{x}|=\ln|c\tilde{x}|\sqrt{1+u^2}.$$

Теперь вернемся к переменным x и y; подставляя в эту формулу

$$\tilde{x}=x-2,\ \tilde{y}=y-1,\ u=\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}=\frac{y-1}{x-2},$$

имеем

$$\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}=\ln|c(x-2)|\sqrt{1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2} \text{ или } \operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}=\ln c\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}.$$

Последнее равенство есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

3. *Линейные уравнения первого порядка*

Уравнение $y'=f(x,y)$ называется линейным, если его правая часть $f(x,y)$ является линейной функцией y. Обычно линейные уравнения записывают в виде

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{14.12}$$

Существуют два метода решения линейных уравнений, которые отличаются друг от друга лишь формой записи.

Первый способ (*метод Бернулли*). Будем искать решение уравнения (14.12) в виде $y=uv$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ — некоторые функции. Тогда $y'=u'v+uv'$ и (14.12) принимает вид $u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$. Перепишем последнюю формулу следующим образом:

$$u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x). \tag{14.13}$$

Теперь выберем функцию $v(x)$ такой, чтобы

$$v'+P(x)v=0, \tag{14.14}$$

а затем найдем все функции $u(x)$, при которых справедливо равенство (14.13) (т.е. при нахождении решения в виде произведения двух сомножителей выбираем один из этих сомножителей так, как нам удобно, а затем находим второй сомножитель так, чтобы их произведение было решением).

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dv}{dx}=-P(x)v;\ \frac{dv}{v}=-P(x)dx;\ \int\frac{dv}{v}=-\int P(x)dx+c;\ \ln|v|=-\int P(x)dx+c;$$

$$|v|=e^{-\int P(x)dx+c}=e^{-\int P(x)dx}e^c;\ v=\pm e^c e^{-\int P(x)dx} \text{ или } v=ce^{-\int P(x)dx}.$$

Так как нам достаточно найти лишь одно решение уравнения (14.14), то возьмем в последней формуле $c=1$. Тогда

$$v=e^{-\int P(x)dx}. \tag{14.15}$$

Далее из (14.13) и (14.15) имеем: $u'v=Q(x)$; $u'=\frac{Q(x)}{v(x)}$ ($v(x)\neq 0$)

$$u=\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx+c=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c;$$

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right]e^{-\int P(x)dx}. \tag{14.16}$$

Ниже будет проверено, что функция (14.16) и есть общее решение исходного линейного уравнения (14.12).

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'-\frac{3}{x}y+x=0$.

Решение

Обычно в примерах используют не готовую формулу (14.16), а проводят для каждого конкретного уравнения те действия, которые к ней привели.

Будем искать решение уравнения в виде $y=uv$. Тогда $y'=u'v+uv'$ и уравнение принимает вид $u'v+uv'-\frac{3}{x}uv+x=0$; $u'v+u\left(v'-\frac{3}{x}v\right)+x=0$. Потребуем, чтобы $v'-\frac{3}{x}v=0$. Тогда $\frac{dv}{dx}=\frac{3}{x}v$; $\frac{dv}{v}=\frac{3dx}{x}$; $\int\frac{dv}{v}=3\int\frac{dx}{x}+c$;

$\ln|v| = 3\ln|x| + \ln|c|$; $\ln|v| = \ln|cx^3|$; $|v| = |cx^3|$; $v = \pm cx^3$, или $v = cx^3$. Принимая здесь $c = 1$, получаем, что $v = x^3$.

Теперь $u'x^3 + x = 0$, $u' = -\dfrac{1}{x^2}$, откуда $u = -\int \dfrac{dx}{x^2} + c = \dfrac{1}{x} + c$ и

$$y = \left(\frac{1}{x} + c\right)x^3 = cx^3 + x^2.$$

Второй способ (*метод вариации произвольной постоянной*). Рассмотрим так называемое линейное однородное уравнение, соответствующее данному уравнению (14.12):

$$y' + P(x)y = 0. \tag{14.17}$$

Решаем это уравнение (с разделяющимися переменными):

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y;\quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx;\quad \int\frac{dy}{y} = -\int P(x)dx + c;\quad \ln|y| = -\int P(x)dx + c;$$

$$|y| = e^{-\int P(x)dx + c} = e^{-\int P(x)dx}e^c;\quad y = \pm e^c e^{-\int P(x)dx} \text{ или}$$

$$y = ce^{-\int P(x)dx}. \tag{14.18}$$

Теперь будем искать решение уравнения (14.12) по той же формуле (14.18), считая, что в ней $c = c(x)$ (отсюда и название метода). Тогда

$$y' = c'e^{-\int P(x)dx} + c\left(e^{-\int P(x)dx}\right)' = c'e^{-\int P(x)dx} + ce^{-\int P(x)dx}\left(-\int P(x)dx\right)' =$$

$$= c'e^{-\int P(x)dx} - ce^{-\int P(x)dx}P(x).$$

Подставляя эту производную в формулу (14.12), имеем

$$c'e^{-\int P(x)dx} - cP(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)ce^{-\int P(x)dx} = Q(x), \text{ или } c'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

(т.е. члены, содержащие c, всегда сокращаются, остается только член, содержащий c').

Отсюда $c' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$; $c = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + \tilde{c}$ и ($\tilde{c}$ заменяем на c) $y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]e^{-\int P(x)dx}$, т.е. мы опять получили формулу (14.16).

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$$

Решение

Переписав это уравнение в виде $y' - \dfrac{2x}{1 + x^2}y = 1 + x^2$, видим, что оно действительно является линейным. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y' - \dfrac{2x}{1 + x^2}y = 0$. Решаем это уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + x^2}y;\quad \frac{dy}{y} = \frac{2x}{1 + x^2}dx;\quad \int\frac{dy}{y} = \int\frac{2x}{1 + x^2}dx + c;$$

$$\ln|y| = \int\frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} + \ln|c| = \ln|1 + x^2| + \ln|c| = \ln|c(1 + x^2)|$$

$$|y| = |c(1 + x^2)|;\quad y = \pm c(1 + x^2) \text{ или } y = c(1 + x^2).$$

Теперь ищем решение исходного уравнения по этой же формуле, считая, что в ней $c = c(x)$:

$c'(1 + x^2) + c\cdot 2x - \dfrac{2x}{1 + x^2}c(1 + x^2) = 1 + x^2$; $c' = 1$; $c = \int dx + \tilde{c} = x + \tilde{c}$ и ($\tilde{c}$ заменяем на c) $y = (x + c)(1 + x^2)$.

Теперь проверим, что функция (14.16) действительно является общим решением уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$.

Во-первых, при каждом значении c эта функция будет решением уравнения:

$$y' + P(x)y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]' e^{-\int P(x)dx} + \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]\times$$

$$\times\left(e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x)\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]e^{-\int P(x)dx} =$$

$$= Q(x)e^{\int P(x)dx}e^{-\int P(x)dx} - \left[Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]e^{-\int P(x)dx}P(x) +$$

$$+ P(x)\left[Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Во-вторых, зададим произвольное начальное условие $y(x_0) = y_0$ и покажем, что существует значение c, при котором функция (14.16) удовлетворяет этому начальному условию:

$$\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx\Big|_{x=x_0}+c\right]e^{-\int P(x)dx}\Big|_{x=x_0}=y_0;$$

$$c=y_0\,e^{\int P(x)dx}\Big|_{x=x_0}-\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx\Big|_{x=x_0}.$$

4. *Уравнения Бернулли*

Такими уравнениями называются уравнения вида

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}, \tag{14.19}$$

где $\alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1$ (при $\alpha=0$ получаем линейное уравнение, при $\alpha=1$ — уравнение с разделяющимися переменными).

Легко убедиться, что к уравнениям Бернулли применим любой из описанных выше методов решения линейных уравнений.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$.

Решение

1-й способ.

$$y=uv;\ u'v+uv'-\frac{4}{x}uv=x\sqrt{uv};\ u'v+u\left(v'-\frac{4}{x}v\right)=x\sqrt{uv}.$$

Потребуем, чтобы $v'-\dfrac{4}{x}v=0$, тогда

$$\frac{dv}{v}=4\frac{dx}{x};\ \int\frac{dv}{v}=4\int\frac{dx}{x}+c;\ \ln|v|=4\ln|x|+c;\ \ln|x|=\ln|cx^4|;\ v=\pm cx^4;\ v=cx^4.$$

При $c=1\ \ v=x^4$. Тогда

$$u'x^4=x\sqrt{u}x^2;\ u'x=\sqrt{u};\ \frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{dx}{x};\ \int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int\frac{dx}{x}+c;\ 2\sqrt{u}=\ln|x|+\ln|c|=\ln|cx|;$$

$$u=\frac{1}{4}\ln^2|cx|;\ \ y=uv=\frac{1}{4}x^4\ln^2|cx|.$$

2-й способ.

Решаем соответствующее однородное уравнение $y'=\dfrac{4}{x}y.$ Имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{x}y;\ \ \frac{dy}{y}=\frac{4}{x}dx;\ \ \int\frac{dy}{y}=4\int\frac{dx}{x}+c;\ \ \ln|y|=4\ln|x|+\ln|c|;$$

$$\ln|y|=\ln|cx^4|;\ \ y=\pm cx^4;\ \ y=cx^4.$$

Теперь ищем решение исходного уравнения по этой формуле, считая, что в ней $c=c(x)$:

$$c'x^4+c4x^3-\frac{4}{x}cx^4=x\sqrt{cx^4};\ c'x=\sqrt{c};\ \frac{dc}{\sqrt{c}}=\frac{dx}{x};\ \int\frac{dc}{\sqrt{c}}=\int\frac{dx}{x}+\tilde{c};$$

$$2\sqrt{c}=\ln|x|+\ln|\tilde{c}|=\ln|\tilde{c}x|;\ c=\frac{1}{4}\ln^2|\tilde{c}x|;\ y=c(x)x^4=\frac{1}{4}x^4\ln^2|cx|.$$

5. *Уравнения в полных дифференциалах*

Уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{14.20}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является (полным) дифференциалом некоторой функции двух переменных, т.е. существует функция $u(x,y)$, такая, что

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

В этом случае уравнение (14.20) имеет вид $du(x,y)=0$, что выполняется в том, и только в том случае, когда $u(x,y)=c$, где c — некоторая (произвольная) постоянная. Последнее равенство является общим интегралом уравнения (14.20).

Учитывая изложенное выше, найдем условия, при которых уравнение (14.20) будет уравнением в полных дифференциалах, и при выполнении этих условий укажем способ нахождения функции $u(x,y)$.

Будем предполагать, что $(x,y)\in D$, где D — некоторая область на плоскости $0xy$. Напомним некоторые определения, приведенные в разд. 12.1. Под словом «область» понимается открытое связное множество. Множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую окрестность этой точки. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей множеству.

Область D называется односвязной, если вместе с каждым замкнутым самонепересекающимся контуром она содержит и область, ограниченную этим контуром (т.е. односвязная область — это область без «дырок»). Область, изображенная на рис. 78, не является односвязной.

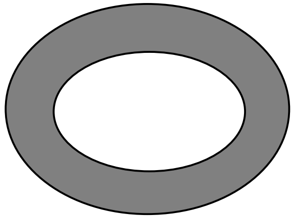


Рис. 78

Теорема 14.2. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в области *D*. Тогда, для того чтобы в этой области выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, необходимо, а в предположении односвязности области и достаточно, чтобы при $(x,y)\in D$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (14.21)$$

▲ *Необходимость.* Пусть существует функция $u(x,y)$, такая, что для $(x,y)\in D$ $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Тогда согласно свойствам дифференциала функции двух переменных,

$$P(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\quad Q(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x};\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Но по теореме 12.9 $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}$ (две эти смешанные производные непрерывны в области *D* по условию теоремы), значит,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Достаточность. Для простоты проведем доказательство для случая открытого прямоугольника (т.е. прямоугольника без границы).

Пусть $(x_0,y_0)\in D$ – произвольная фиксированная точка; $(x,y)\in D$ – произвольная точка. Предположим, что нужная нам функция $u(x,y)$ (т.е. такая, что $du=Pdx+Qdy$) существует. Тогда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y).$$

Проинтегрируем это равенство от x_0 до x (для удобства переменную интегрирования тоже будем обозначать через x):

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx;\ u(x,y)\big|_{x_0}^{x}=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx;$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+u(x_0,y).$$

Положим, что $u(x_0,y)=\varphi(y)$, и используем второе равенство $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$: $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\left(\displaystyle\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx\right)'_y+\varphi'(y)=Q(x,y)$. Так как $P(x,y)$ и $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ непрерывны, то в этой формуле символы интегрирования и дифференцирования можно поменять местами (см. теорему 13.3.), тогда

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)=Q\,(x,y).$$

Последнюю формулу в силу условия (14.21) можно переписать в виде

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx+\varphi'(y)=Q(x,y);Q(x,y)\big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=Q(x,y).$$

Отсюда $Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y)=Q(x,y);\ \ \varphi'(y)=Q\,(x,y)$.

Интегрируем это неравенство по y от y_0 до y (для удобства переменную интегрирования тоже будем обозначать через y):

$$\int_{y_0}^{y}\varphi'(y)dy=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy;\ \varphi(y)\big|_{y_0}^{y}=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy;$$

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy+\varphi(y_0).$$

Так как здесь $\varphi(y_0)=u(x_0,y_0)$ – постоянная, то $\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy+C$ и

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy+C. \qquad (14.22)$$

Таким образом, если нужная нам функция $u(x,y)$ существует, то она задается формулой (14.22). Теперь проверим, что эта формула действительно дает функцию $u(x,y)$, такую, что $du=Pdx+Qdy$, или $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q.$

В соответствии с теоремой 10.6

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\left(\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx\right)'_x=P(x,y).$$

По той же теореме и по теореме 13.3

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\left(\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx\right)'_y+\left(\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy\right)'_y=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx+Q(x_0,y).$$

Отсюда, в силу условия (14.21)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx+Q(x_0,y)=Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x}+Q(x_0,y)=$$

$$=Q(x,y)-Q(x_0,y)+Q(x_0,y)=Q(x,y).\ \blacksquare$$

Формула (14.22) соответствует следующему принадлежащему прямоугольнику D пути от точки (x_0,y_0) до точки (x,y) (рис. 79).

Аналогично, начиная с равенства $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$, можем получить другую формулу для $u(x,y)$:

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C, \qquad (14.23)$$

соответствующую пути, указанному на рис. 80.

Для областей D более сложного вида (чем прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат) формулы (14.22) и (14.23) дают

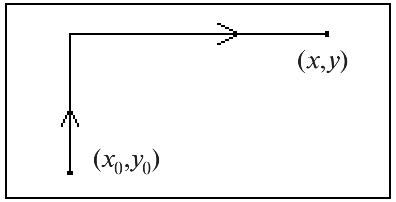


Рис. 79

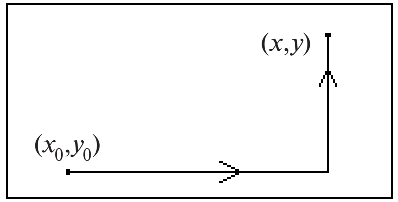


Рис. 80

$u(x,y)$ во всех точках (x,y), которые можно соединить с точкой (x_0,y_0) ломаной такой формы.

Теорема 14.2 и формулы (14.22) и (14.23) являются ответами на задачи, сформулированные в начале этого пункта.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$(x^3-y^2x)dx+(y^3-x^2y)dy=0.$$

Решение

В этом примере $P(x,y)=x^3-y^2x,\ Q(x,y)=y^3-x^2y$ непрерывны вместе со своими частными производными на всей плоскости $0xy$.

$\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-2yx,\ \ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-2xy$, т.е. $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Значит, это уравнение является уравнением в полных дифференциалах (кстати, отметим, что оно также является однородным).

Взяв $x_0=y_0=0$, из формулы (14.22) получаем (достаточно знать одну функцию $u(x,y)$, поэтому берем $C=0$):

$$u(x,y)=\int\limits_0^x\left(x^3-y^2x\right)dx+\int\limits_0^y\left(y^3-0\right)dy=\frac{x^4}{4}\Big|_0^x-y^2\frac{x^2}{2}\Big|_0^x+\frac{y^4}{4}\Big|_0^y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{y^4}{4}=C$, или

$$x^4-2x^2y^2+y^4=C.$$

14.4. Дифференциальные уравнения высших порядков

Рассмотрим следующую задачу: пусть точка движется вдоль оси $0x$ с постоянным ускорением a. Найти $x(t)$ – положение точки в произвольный момент времени t.

По условию примера $x''(t)=a$, что является дифференциальным уравнением второго порядка. Далее имеем $x'(t)=\int a\,dt+c_1=at+c_1$;

$x(t)=\int(at+c_1)dt+c_2=a\dfrac{t^2}{2}+c_1t+c_2$ — любое решение нашего уравнения.

Это решение зависит от двух произвольных постоянных c_1 и c_2. Для того чтобы решение было единственным, нужно задать положение точки $x(t)$ и ее скорость $x'(t)$ в некоторый момент времени t_0: $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=x_0'$, где x_0 и x_0' — некоторые числа. Тогда

$$x'(t_0)=at_0+c_1=x_0'\Rightarrow c_1=x_0'-at_0 \text{ и } x(t_0)=a\frac{t_0^2}{2}+c_1t_0+c_2=x_0\Rightarrow$$

$$c_2=x_0-a\frac{t_0^2}{2}-c_1t_0=x_0-a\frac{t_0^2}{2}-(x_0'-at_0)t_0=x_0-x_0't_0+a\frac{t_0^2}{2}.$$

Отталкиваясь от этого примера, по аналогии с разд. 14.2 приведем следующие определения и формулировки.

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0.$$

Если из этого уравнения можно выразить старшую производную $y^{(n)}$, то мы получим так называемое уравнение, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}), \tag{14.24}$$

где f — некоторая функция $(n+1)$-й переменной.

Определение 14.6. *Задачей Коши* для уравнения 14.24 называется задача

$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}); \\ y(x_0)=y_0; \\ y'(x_0)=y_0'; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{14.25}$$

где $x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$ — некоторые числа.

Теорема 14.3 (существования и единственности решения задачи Коши). Пусть функция f и ее частные производные первого порядка по всем аргументам, кроме x, непрерывны в некоторой области D

$(n+1)$-мерного пространства и точка $(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)})\in D$. Тогда задача Коши (14.25) имеет решение, и притом единственное. Это решение определено в некоторой окрестности точки x_0.

Доказательство этой теоремы (как и теоремы 14.1) здесь не приводится.

Замечание. В следующей главе будут рассмотрены так называемые линейные уравнения высших порядков, т.е. уравнения вида

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+P_2(x)y^{(n-2)}+\dots+P_n(x)y=f(x),$$

где все коэффициенты $P_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$, и правая часть $f(x)$ определены и непрерывны на некотором интервале (a, b). Такие уравнения могут быть записаны в виде

$$y^{(n)}=f(x)-P_1(x)y^{(n-1)}-P_2(x)y^{(n-2)}-\dots-P_n(x)y$$

и, естественно, удовлетворяют всем условиям теоремы 14.3 в области D, в которой $x\in(a,b)$, а остальные переменные — любые. Особенностью данного случая является то, что (как можно доказать) единственное решение задачи Коши (14.25) будет при этом определено на всем интервале (a, b) (а не только в окрестности точки x_0).

Определение 14.7. Пусть выполняются условия теоремы 14.3. Функция

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\dots,c_n), \tag{14.26}$$

где $c_1, c_2,\dots, c_n$ — постоянные, называется *общим решением* уравнения (14.24) в некоторой окрестности точки x_0 $U(x_0)$, если:

1. При $\forall x\in U(x_0)$ и $\forall$ наборе $(c_1,c_2,\dots,c_n)\in C$, где C — некоторое множество (в простых случаях $c_1, c_2,\dots, c_n$ будут любыми числами), функция (14.26) является решением уравнения (14.24).

2. Любое решение уравнения (14.24), такое, что $x\in U(x_0)$ и $(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})\in D$, получается из формулы (14.26) при некотором наборе $(c_1,c_2,\dots,c_n)\in C$.

Точно так же, как в разд. 14.2, показывается, что в этом определении условие 2 можно заменить на условие 2′. Какие бы начальные условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, ... , $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где точка

$(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$, ни задались, существует набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in C$, при котором функция (14.26) удовлетворяет этим начальным условиям.

Ниже будем проверять именно это условие.

Определение 14.8. Равенство вида $\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$, неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения (14.24).

14.5. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов решения дифференциальных уравнений высших порядков является сведение их к дифференциальным уравнениям меньшего (лучше всего – первого) порядка.

Рассмотрим два основных типа уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение не содержит явным образом искомую функцию y и, может быть, несколько ее первых производных, т.е. имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{14.27}$$

Сделаем в этом уравнении замену $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция (т.е. за новую неизвестную функцию берется производная наименьшего порядка, входящая в это уравнение). Тогда $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+2)} = z''$, $\ldots$, $y^{(n)} = z^{(n-k)}$ и (14.27) принимает вид $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$. Таким образом, мы сумели уменьшить (или понизить) порядок уравнения.

Пример. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} x^2 y'' = y'^2; \\ y(1) = 1; \\ y'(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение

Обозначая $y' = z,\ z = z(x)$, имеем $x^2 z' = z^2$. Это уравнение первого порядка является уравнением с разделяющимися переменными: $x^2 \dfrac{dz}{dx} = z^2;\ \dfrac{dz}{z^2} = \dfrac{dx}{x^2}$. Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} + c_1; \quad -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + c_1; \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + c_1 = \frac{1 + c_1 x}{x}; \quad z = \frac{x}{1 + c_1 x},$$

т.е. $y' = \dfrac{x}{1 + c_1 x}$.

Прежде чем интегрировать еще раз, найдем c_1 из второго начального условия. При $x = 1$ имеем $\dfrac{1}{1 + c_1} = \dfrac{1}{2}$; $1 + c_1 = 2;\ c_1 = 1$. Значит, $y' = \dfrac{x}{1 + x}$. Отсюда

$$y = \int \frac{x}{1+x} dx + c_2 = \int \frac{x + 1 - 1}{1 + x} dx + c_2 = \int dx - \int \frac{dx}{1+x} + c_2 = x - \ln|1 + x| + c_2.$$

Подставляя сюда $x = 1$, из первого начального условия находим постоянную c_2: $1 - \ln 2 + c_2 = 1;\ c_2 = \ln 2$. Таким образом,

$$y = x - \ln|1 + x| + \ln 2 = x - \ln\left|\frac{1+x}{2}\right|.$$

Если бы нужно было найти общее решение исходного уравнения, то

$$y = \int \frac{x}{1 + c_1 x} dx + c_2 = \frac{1}{c_1} \int \frac{1 + c_1 x - 1}{1 + c_1 x} dx + c_2 = \frac{1}{c_1} \int dx - \frac{1}{c_1} \int \frac{dx}{1 + c_1 x} + c_2 =$$

$$= \frac{1}{c_1} x - \frac{1}{c_1^2} \int \frac{d(1 + c_1 x)}{1 + c_1 x} + c_2 = \frac{1}{c_1} x - \frac{1}{c_1^2} \ln|1 + c_1 x| + c_2,$$

что при $c_1 \neq 0$ дает общее решение; если же $c_1 = 0$, то $y' = x$ и

$$y = \int x dx + c = \frac{x^2}{2} + c.$$

2. Уравнение не содержит явным образом независимую переменную x, т.е. имеет вид

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{14.28}$$

Сделаем в этом уравнении замену $y' = z$, где $z = z(y)$, т.е. за новую независимую переменную возьмем y, а за новую независимую функцию – $y' = z(y)$. Покажем, что при такой замене порядок уравнения понижается на единицу:

$$y'' = (y')'_x = z'_x = z'_y \cdot y'_x = z'z, \text{ т.е. } y'' = z'z,$$

$$y''' = (y'')'_x = (z'z)'_x = (z'z)'_y \cdot y'_x = (z''z + z'^2)z = z''z^2 + z'^2 z,$$

$$y^{\mathrm{IV}} = (y''')'_x = (z''z^2 + z'^2 z)'_y y'_x = (z'''z^2 + z'' 2zz' + 2z'z''z + z'^3)z =$$

$$= z'''z^3 + 4z''z'z^2 + z'^3 z$$

и так далее, т.е. порядок каждой производной становится на единицу меньше.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $2yy'' = y'^2 + 1$.

Решение

Обозначая $y' = z;\ z = z(y),\ \ y'' = z'z$, имеем $2yz'z = z^2 + 1$. Это уравнение первого порядка является уравнением с разделяющимися переменными: $2yz\dfrac{dz}{dy} = z^2 + 1;\ \ \dfrac{2z}{z^2+1}dz = \dfrac{dy}{y}$. Интегрируя, получаем

$$\int\frac{2z}{z^2+1}dz = \int\frac{dy}{y} + c_1;\ \ \int\frac{d(z^2+1)}{z^2+1} = \ln|y| + c_1;\ \ \ln(z^2+1) = \ln|c_1 y|;$$

$$z^2 + 1 = c_1 y;\ z = \pm\sqrt{c_1 y - 1}\text{, т.е. } y' = \pm\sqrt{c_1 y - 1}.$$

Для того чтобы проинтегрировать второй раз, нужно сначала еще раз разделить переменные: $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_1 y - 1};\ \ \dfrac{dy}{\sqrt{c_1 y - 1}} = \pm dx$.

Далее имеем (так как подкоренное выражение не может быть отрицательным, то $c_1 \neq 0$):

$$\frac{1}{c_1}\int\frac{d(c_1 y - 1)}{\sqrt{c_1 y - 1}} = \pm\int dx + c_2;\ \ \ \frac{2}{c_1}\sqrt{c_1 y - 1} = \pm(x + c_2).$$

Это общий интеграл исходного уравнения. Возводя в квадрат обе части равенства, находим общее решение y:

$$\frac{4}{c_1^2}(c_1 y - 1) = (x + c_2)^2;\ \ \ c_1 y - 1 = \frac{c_1^2}{4}(x + c_2)^2;\ \ \ y = \frac{c_1}{4}(x + c_2)^2 + \frac{1}{c_1}.$$

Если бы мы решали задачу Коши для нашего уравнения, т.е. добавили бы к нему начальные условия, например $y(2) = 1,\ \ y'(2) = 3$, то постоянные тоже проще было бы находить «по дороге»: считая, что в равенстве $y' = \pm\sqrt{c_1 y - 1}$ $x = 2$, получаем $3 = \pm\sqrt{c_1 - 1}$. Значит, знак нужно брать «+», тогда $c_1 - 1 = 9,\ c_1 = 10$. Аналогично изложенному выше $y = \dfrac{5}{2}(x + c_2)^2 + \dfrac{1}{10}$. При $x = 2$ имеем $1 = \dfrac{5}{2}(2 + c_2)^2 + \dfrac{1}{10}$; $\dfrac{5}{2}(2 + c_2)^2 = \dfrac{9}{10}$; $(2 + c_2)^2 = \dfrac{9}{25}$; $2 + c_2 = \pm\dfrac{3}{5}$; $c_2 = -\dfrac{7}{5}$ или $c_2 = -\dfrac{13}{5}$.

Таким образом, для того чтобы решить уравнение высшего порядка такими методами, нужно, чтобы оно допускало понижение порядка до первого, а полученное уравнение первого порядка имело один из видов, рассмотренных в разд. 14.3.

15. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

15.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения

Определение 15.1. Линейным дифференциальным оператором называется оператор вида

$$L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y, \tag{15.1}$$

где все коэффициенты $p_i = p_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$, определены и непрерывны на некотором интервале (a, b).

Линейный дифференциальный оператор ставит в соответствие функции $y = f(x)$ новую функцию $L(y)$, определенную по формуле (15.1).

Свойства линейного дифференциального оператора:

1. $L(\alpha y) = \alpha L(y)$, где α – постоянная.

$$\blacktriangle\ L(\alpha y) = (\alpha y)^{(n)} + p_1(\alpha y)^{(n-1)} + \ldots + p_n(\alpha y) =$$

$$= \alpha(y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y) = \alpha L(y).\ \blacksquare$$

2. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

$$\blacktriangle\ L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_n(y_1 + y_2) =$$

$$= y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y_1 + y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + p_n y_2 = L(y_1) + L(y_2).\ \blacksquare$$

Определение 15.2. *Линейным однородным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида $L(y) = 0$, или

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x) y = 0. \tag{15.2}$$

Свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения.

1. Если $y = f(x)$ – решение уравнения (15.2), а c – произвольная постоянная, то cy – тоже решение уравнения (15.2).

▲ Согласно свойству 1 линейного дифференциального оператора $L(cy) = cL(y) = c \cdot 0 = 0$. ■

2. Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения уравнения (15.2), то $y_1 + y_2$ – тоже решение уравнения (15.2).

▲ Согласно свойству 2 линейного дифференциального оператора $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0 + 0 = 0$. ■

3. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ – решения уравнения (15.2), а $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные, то $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$ – тоже решение уравнения (15.2).

▲ Это свойство является очевидным следствием свойств 1 и 2. ■

Функция $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$ зависит от x и от n произвольных постоянных. При любых значениях этих постоянных она является решением уравнения (15.2). Ниже будут изучаться условия, при которых эта функция является общим решением уравнения (15.2). т.е. условия, при которых она удовлетворяет определению 14.7.

15.2. Линейная зависимость и независимость функций

Определение 15.3. Функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ называются линейно зависимыми на некотором множестве M, если существуют постоянные $c_1, c_2, ..., c_k$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, такие, что

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ky_k(x) \equiv 0 \tag{15.3}$$

(здесь знак тождества «$\equiv$» означает выполнение равенства (15.3) для $\forall x \in M$).

Функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ называются линейно независимыми на множестве M, если тождество (15.3) выполняется только при всех коэффициентах $c_i = 0$ ($i = 1, 2, ..., k$).

Пример 1. Покажем, что функции $y_0 = 1,\ y_1 = x,\ y_2 = x^2, ..., y_k = x^k$ линейно независимы на любом конечном или бесконечном промежутке M.

▲ Из равенства

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_kx^k \equiv 0 \tag{15.4}$$

следует, что любой $x \in M$ является корнем уравнения (15.4). Но, с другой стороны, любой многочлен степени k имеет только k корней, откуда следует, что единственным возможным является случай $c_0 = c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$. ■

Пример 2. Покажем, что функции $y_1 = e^{k_1x},\ y_2 = e^{k_2x}, ..., y_n = e^{k_nx}$, где $k_i \ne k_j$ при $i \ne j$, линейно независимы на любом конечном или бесконечном промежутке M.

▲ Пусть

$$c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + c_3e^{k_3x} + ... + c_ne^{k_nx} \equiv 0. \tag{15.5}$$

Докажем, что в равенстве (15.5) все коэффициенты c_i обязательно равны 0. Например, докажем, что $c_n = 0$.

Разделим выражение (15.5) на e^{k_1x}:

$$c_1 + c_2e^{(k_2-k_1)x} + c_3e^{(k_3-k_1)x} + ... + c_ne^{(k_n-k_1)x} \equiv 0.$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$c_2(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} + c_3(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_1)x} + ... + c_n(k_n - k_1)e^{(k_n-k_1)x} \equiv 0.$$

Разделим последнее равенство на $e^{(k_2-k_1)x}$, с учетом того, что $k_i - k_1 - (k_2 - k_1) = k_i - k_2$, $i = 3, 4, ..., n$:

$$c_2(k_2 - k_1) + c_3(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_2)x} + ... + c_n(k_n - k_1)e^{(k_n-k_2)x} \equiv 0.$$

Теперь дифференцируем это равенство по x и т. д. В итоге получим

$$c_n(k_n - k_1)(k_n - k_2) \cdot ... \cdot (k_n - k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x} \equiv 0.$$

Так как в этом равенстве все сомножители, кроме первого, отличны от 0, то отсюда имеем $c_n = 0$. ■

Линейно зависимые и линейно независимые функции обладают обычными свойствами линейно зависимых и линейно независимых элементов линейного пространства, в частности свойствами линейно зависимых и линейно независимых векторов.

Кроме того, оказывается, что линейная зависимость и линейная независимость функций тесно связаны с так называемым определителем Вронского.

Определение 15.4. Пусть даны ($k - 1$) раз дифференцируемые функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$. *Определителем Вронского* этих функций называется следующий определитель k-го порядка:

$$W = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_k \\ y_1' & y_2' & ... & y_k' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_k'' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & ... & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

(все функции в этом определителе берутся в некоторой точке x).

Теорема 15.1 (первая теорема об определителе Вронского). Пусть функции $y_1(x), y_2(x),..., y_k(x)$ линейно зависимы на некотором множестве M. Тогда на данном множестве определитель Вронского этих функций тождественно равен 0: $W(x) \equiv 0$.

▲ По условию теоремы существуют постоянные $c_1, c_2,..., c_k$, хотя бы одна из которых отлична от 0, такие, что $c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ky_k \equiv 0$. Пусть, например, $c_k \neq 0$. Тогда, разделив это равенство на c_k и обозначив $-\dfrac{c_i}{c_k} = \alpha_i$, $i = 1, 2,..., k-1$, его можно переписать в виде

$$y_k = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_{k-1} y_{k-1}.$$

Отсюда $y_k^{(i)} = \alpha_1 y_1^{(i)} + \alpha_2 y_2^{(i)} + ... + \alpha_{k-1} y_{k-1}^{(i)}$, $i = 1, 2,..., k-1$, и

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_{k-1} & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_{k-1} y_{k-1} \\ y_1' & y_2' & ... & y_{k-1}' & \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + ... + \alpha_{k-1} y_{k-1}' \\ ... & ... & ... & ... & .... \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & ... & y_{k-1}^{(k-1)} & \alpha_1 y_1^{(k-1)} + \alpha_2 y_2^{(k-1)} + ... + \alpha_{k-1} y_{k-1}^{(k-1)} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

так как последний столбец этого определителя является линейной комбинацией остальных его столбцов. ■

Покажем, что теорема, обратная данной, не верна.

Пусть

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & x < 0; \end{cases} \quad x \in (-1;1) \text{ (рис. 81).}$$

Обе функции дифференцируемы на интервале $(-1, 1)$, их определитель Вронского на этом интервале тождественно равен 0:

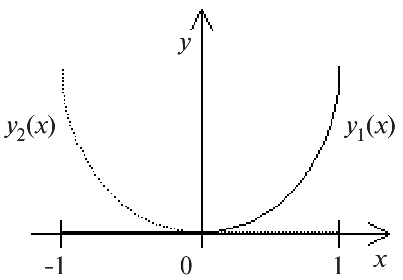


Рис. 81

$$\text{при } x \geq 0 \;\; W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ при } x < 0 \;\; W(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0,$$

однако эти функции линейно независимы на интервале $(-1, 1)$: пусть $c_1y_1 + c_2y_2 \equiv 0$. Беря в этом равенстве $x \geq 0$ и $x < 0$, соответственно имеем:

$$c_1x^2 + c_2 0 \equiv 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad \text{и} \quad c_1 0 + c_2x^2 \equiv 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Теорема 15.2 (вторая теорема об определителе Вронского). Пусть n решений $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка $L(y) = 0$ линейно независимы на интервале (a, b). Тогда определитель Вронского этих функций не обращается в 0 ни в одной точке интервала (a, b): $W(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$.

(Первая и вторая теоремы об определителе Вронского относятся к разным объектам: первая – к произвольным функциям, вторая – к решениям линейных однородных дифференциальных уравнений; для последних либо определитель Вронского тождественно равен 0, либо он не обращается в 0 ни в одной точке рассматриваемого интервала.)

▲ Пусть $\exists x_0 \in (a,b)$: $W(x_0) = 0$.

Рассмотрим функцию $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$. Согласно свойству 3 решений линейного однородного дифференциального уравнения, при любых значениях постоянных c_i, $i = 1, 2,..., n$, функция $y(x)$ является решением уравнения $L(y) = 0$. Теперь подберем постоянные c_i так, чтобы эта функция в точке x_0 удовлетворяла нулевым начальным условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) = 0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Получаем систему n линейных однородных уравнений с n неизвестными $c_1, c_2,..., c_n$:

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + ... + c_ny_n(x_0) = 0; \\ y'(x_0) = c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + ... + c_ny_n'(x_0) = 0; \\ y''(x_0) = c_1y_1''(x_0) + c_2y_2''(x_0) + ... + c_ny_n''(x_0) = 0; \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{15.6}$$

Определитель этой системы – это определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных c_i, т.е. определитель Вронского

$W(x_0)=0$. Но тогда система (15.6), как система n линейных однородных уравнений с n неизвестными и определителем, равным 0, имеет ненулевые решения.

Пусть $c_1^*, c_2^*, ..., c_n^*$ – одно из таких решений. Тогда функция $y = c_1^* y_1 + c_2^* y_2 + ... + c_n^* y_n$ удовлетворяет на интервале (a, b) уравнению $L(y)=0$ и нулевым начальным условиям $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$, $y''(x_0)=0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)=0$. Но этому же уравнению и этим же начальным условиям удовлетворяет и функция $y \equiv 0$. В силу единственности решения задачи Коши эти два решения должны совпадать:

$$y = c_1^* y_1 + c_2^* y_2 + ... + c_n^* y_n \equiv 0, \ x \in (a,b). \tag{15.7}$$

Так как в тождестве (15.7) хотя бы один из коэффициентов c_i^* отличен от 0, то это тождество означает линейную зависимость на интервале (a, b) функций $y_1, y_2, ..., y_n$, что противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение $W(x_0)=0$ не верно. ■

15.3. Структура общего решения линейного однородного уравнения

Определение 15.5. *Фундаментальной системой* решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка $L(y)=0$ называется любая система n линейно независимых решений этого уравнения.

Покажем, что у любого такого уравнения существует бесконечное множество фундаментальных систем решений. Например, пусть в некоторой точке x_0 решения $y_1, y_2, ..., y_n$ удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\begin{array}{lllll}
y_1(x_0)=1, & y_2(x_0)=0, & y_3(x_0)=0, & ... & y_n(x_0)=0, \\
y_1'(x_0)=0, & y_2'(x_0)=1, & y_3'(x_0)=0, & ... & y_n'(x_0)=0, \\
y_1''(x_0)=0, & y_2''(x_0)=0, & y_3''(x_0)=1, & ... & y_n''(x_0)=0, \\
... & ... & ... & ... & ... \\
y_1^{(n-1)}(x_0)=0, & y_2^{(n-1)}(x_0)=0, & y_3^{(n-1)}(x_0)=0, & ... & y_n^{(n-1)}(x_0)=1.
\end{array}$$

Эти решения существуют по теореме существования решения задачи Коши. Эти решения линейно независимы, так как их определитель Вронского

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Значит, они образуют фундаментальную систему решений.

При других начальных условиях, таких, что $W(x_0) \neq 0$, получим другие фундаментальные системы решений нашего уравнения.

Теорема 15.3 (структура общего решения линейного однородного уравнения). Пусть функции $y_1, y_2, ..., y_n$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка $L(y)=0$. Тогда функция

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n, \tag{15.8}$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

▲ Нужно проверить, что функция (15.8) удовлетворяет определению общего решения дифференциального уравнения 14.7. При любых значениях постоянных c_i, $i=1, 2, ..., n$, эта функция согласно свойству 3 решений линейного однородного дифференциального уравнения является решением уравнения $L(y)=0$.

Теперь проверим условие 2′ определения 14.7: зададим в точке $x_0 \in (a,b)$ произвольные начальные условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ и покажем, что постоянные c_i можно подобрать так, чтобы функция (15.8) удовлетворяла этим начальным условиям. Получаем систему n линейных уравнений с n неизвестными $c_1, c_2, ..., c_n$.

$$\begin{cases} y(x_0)=c_1 y_1(x_0)+c_2 y_2(x_0)+...+c_n y_n(x_0)=y_0; \\ y'(x_0)=c_1 y_1'(x_0)+c_2 y_2'(x_0)+...+c_n y_n'(x_0)=y_0'; \\ y''(x_0)=c_1 y_1''(x_0)+c_2 y_2''(x_0)+...+c_n y_n''(x_0)=y_0''; \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0)=c_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2 y_2^{(n-1)}(x_0)+...+c_n y_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{15.9}$$

Определитель этой системы – это определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных c_i, т.е. определитель Вронского

$W(x_0)$, который отличен от 0 в силу линейной независимости функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Но тогда система (15.9), как система n линейных уравнений с n неизвестными и определителем, не равным 0, имеет единственное решение. ■

Таким образом, для нахождения общего решения уравнения (15.2) нужно знать фундаментальную систему его решений. Однако в общем случае методов нахождения такой фундаментальной системы не существует.

Ниже будет описан способ нахождения фундаментальной системы решений для одного класса уравнений вида $L(y)=0$.

15.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

В этом разделе будут рассматриваться оператор вида

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y, \tag{15.10}$$

где $a_0 \neq 0,\ a_1, a_2, \ldots, a_n$ – постоянные действительные числа, и уравнение вида $L(y)=0,\ x \in R$ или

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{15.11}$$

Уравнение (15.11) можно разделить на a_0, поэтому к нему применимы предыдущие рассуждения и общее решение (15.11) ищется по формуле (15.8): $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений.

Для нахождения последней будем искать решения (15.11) в виде $y = e^{kx}$, где k – некоторое число. Подставляя $y = e^{kx}$ в (15.11) и учитывая, что $(e^{kx})^{(m)} = k^m e^{kx}$, имеем

$$a_0 k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \ldots + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} = 0 \text{, или}$$

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{15.12}$$

т.е. функция $y = e^{kx}$ является решением уравнения (15.11) тогда, и только тогда, когда число k является корнем уравнения (15.12).

Определение 15.6. Равенство (15.12) называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (15.11).

Характеристическое уравнение (15.12) получается из дифференциального уравнения (15.11) заменой производной $y^{(i)}$ на k^i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ (под нулевой производной функции понимается сама эта функция).

Определение 15.7. Левую часть характеристического уравнения (15.12) назовем *характеристическим многочленом* и обозначим $\Phi(k)$.

Уравнение (15.12), как и всякое алгебраическое уравнение степени n, имеет ровно n корней с учетом их кратности. Рассмотрим следующие четыре случая:

1. *Все корни характеристического уравнения действительные и различные.*

Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – эти корни. Этим корням соответствуют n решений уравнения (15.11): $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, ..., $y_n = e^{k_n x}$. Эти функции линейно независимы (см. пример 2 в разд. 15.2). Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения (15.11) и общее решение этого уравнения задается формулой (15.8).

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y''' - 2y'' - 8y' = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид $k^3 - 2k^2 - 8k = 0$. Решаем это уравнение: $k(k^2 - 2k - 8) = 0$; $k_1 = 0$, $k_2 = 4$, $k_3 = -2$. Этим трем действительным различным корням соответствуют три решения из фундаментальной системы решений: $y_1 = 1$, $y_2 = e^{4x}$, $y_3 = e^{-2x}$, и общее рашение исходного уравнения имеет вид

$$y = c_1 1 + c_2 e^{4x} + c_3 e^{-2x} = c_1 + c_2 e^{4x} + c_3 e^{-2x}.$$

2. *Все корни характеристического уравнения различные, но среди них имеются комплексные.*

Так как в предыдущих рассуждениях нигде не использовалось, что корни характеристического уравнения и коэффициенты k в решениях вида $y = e^{kx}$ – действительные числа, то все результаты пункта 1 справедливы и в случае таких комплексных чисел, однако в фундаментальной системе решений часть функций окажется тогда комплекснозначной. Чтобы от таких функций перейти к функциям с действительными значениями, поступим следующим образом.

Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$ – корень характеристического уравнения (15.12) кратности 1. Так как это уравнение с действительными коэффициентами, то $k_2 = \alpha - i\beta$ – тоже корень уравнения (15.12) кратности 1. Этим корням соответствуют следующие решения уравнения (15.11):

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Так как любая линейная комбинация (даже с комплексными коэффициентами) решений линейного однородного уравнения тоже является решением этого уравнения, то решениями (15.11) будут и функции

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x; \ \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Покажем, что если в фундаментальной системе решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ заменить y_1 и y_2 на такие их линейные комбинации, то система останется фундаментальной. Для этого согласно определению фундаментальной системы решений 15.5, достаточно доказать, что функции новой системы будут линейно независимыми. Приравняем к 0 линейную комбинацию таких функций:

$$c_1\frac{y_1 + y_2}{2} + c_2\frac{y_1 - y_2}{2i} + c_3 y_3 + \ldots + c_n y_n \equiv 0.$$

Тогда

$$\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i}\right)y_1 + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i}\right)y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_n y_n \equiv 0.$$

Так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы, то все коэффициенты их линейной комбинации, равной 0, будут равны 0, т.е. $\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i} = 0$; $\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i} = 0$; $c_3 = 0$;... ; $c_n = 0$. Складывая и вычитая два первых равенства, имеем $c_1 = 0$ и $\frac{c_2}{i} = 0$, $c_2 = 0$, что и требовалось доказать.

Так же можно поступить с любой другой парой комплексно сопряженных корней кратности 1 уравнения (15.12).

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Решение

Запишем характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 2 = 0$.

Комплексные корни $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$ этого уравнения кратности 1, и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x.$$

3. *Среди корней характеристического уравнения имеются действительные кратные.*

Пусть k_1 – действительный корень характеристического уравнения (15.12) кратности r_1. Согласно предыдущему, ему соответствует решение уравнения (15.11) $y_1 = e^{k_1 x}$. Но чтобы сохранить количество решений (n) в фундаментальной системе, этому корню должно соответствовать r_1 решений. Покажем, что такими решениями будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = xe^{k_1 x},\ y_3 = x^2 e^{k_1 x}, \ldots,\ y_{r_1} = x^{r_1 - 1}e^{k_1 x}.$$

Сначала докажем, что все эти функции являются решениями уравнения (15.11). Для этого рассмотрим два случая:

а) $k_1 = 0$, значит, $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2, \ldots,\ y_{r_1} = x^{r_1 - 1}$.

В этом случае характеристическое уравнение (15.12) имеет вид

$$\Phi(k) = k^{r_1}F(k) = 0,$$

где $F(0) \neq 0$, или

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-r_1}k^{r_1} = 0,$$

где $a_{n-r_1} \neq 0$.

Тогда соответствующее дифференциальное уравнение (15.11) имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-r_1}y^{(r_1)} = 0,\ a_{n-r_1} \neq 0,$$

и, очевидно, что все наши функции удовлетворяют этому уравнению, так как все встречающиеся в нем производные этих функций равны 0;

б) $k_1 \neq 0$; в этом случае характеристическое уравнение (15.12) имеет вид

$$\Phi(k) = (k - k_1)^{r_1}F(k),$$

где $F(k_1) \neq 0$.

Сделаем в дифференциальном уравнении (15.11) замену $y = ue^{k_1 x}$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция:

$$a_0(ue^{k_1 x})^{(n)} + a_1(ue^{k_1 x})^{(n-1)} + \ldots + a_n ue^{k_1 x} = 0. \qquad (15.13)$$

Согласно формуле Лейбница $(uv)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i u^{(i)} v^{(k-i)}$, учитывая, что $v^{(m)} = (e^{k_1 x})^{(m)} = k_1^m e^{k_1 x}$, уравнение (15.13) можно переписать в виде

$$a_0\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}k_1^{n-i}e^{k_1x}+a_1\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i u^{(i)}k_1^{n-1-i}e^{k_1x}+\ldots+a_n u e^{k_1x}=0, \text{ или}$$

$$a_0\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}k_1^{n-i}+a_1\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i u^{(i)}k_1^{n-1-i}+\ldots+a_n u=0. \qquad (15.14)$$

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (15.14) имеет вид

$$a_0\sum_{i=0}^{n}C_n^i k^i k_1^{n-i}+a_1\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i k^i k_1^{n-1-i}+\ldots+a_n=0. \qquad (15.15)$$

Используя формулу бинома Ньютона $(a+b)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i a^i b^{k-i}$, формулу (15.15) можно записать в виде

$$a_0(k+k_1)^n+a_1(k+k_1)^{n-1}+\ldots+a_n=0, \text{ или}$$

$$\Phi(k+k_1)=0. \qquad (15.16)$$

Но так как $\Phi(k)=(k-k_1)^{r_1}F(k)$, где $F(k_1)\neq 0$, то

$$\Phi(k+k_1)=(k+k_1-k_1)^{r_1}F(k+k_1)=k^{r_1}F(k+k_1).$$

Обозначим $F(k+k_1)=\tilde F(k)$ (это новый многочлен той же степени, что F). Тогда (15.16) – характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (15.14) – примет вид

$$k^{r_1}\tilde F(k)=0, \qquad (15.17)$$

где $\tilde F(0)=F(k_1)\neq 0$.

Но такой случай уже был разобран в п. а, значит, решениями (15.14) будут функции $u_1=1, u_2=x,\ u_3=x^2,\ldots,\ u_{r_1}=x^{r_1-1}$, откуда решениями (15.11) будут функции

$$y_1=e^{k_1x},\ y_2=xe^{k_1x},\ y_3=x^2e^{k_1x},\ldots,\ y_{r_1}=x^{r_1-1}e^{k_1x}.$$

Так же можно поступить с любым другим действительным кратным корнем характеристического уравнения.

Пусть $k_i,\ i=0,1,2,\ldots,l$, – корни характеристического уравнения (15.12) кратности $r_i\geq 1$. Этим корням будут соответствовать n решений дифференциального уравнения (15.11):

$$y=e^{k_1x},\quad y=xe^{k_1x},\quad y=x^2e^{k_1x},\quad \ldots,\quad y=x^{r_1-1}e^{k_1x},$$
$$y=e^{k_2x},\quad y=xe^{k_2x},\quad y=x^2e^{k_2x},\quad \ldots,\quad y=x^{r_2-1}e^{k_2x},\ldots,$$
$$y=e^{k_lx},\quad y=xe^{k_lx},\quad y=x^2e^{k_lx},\quad \ldots,\quad y=x^{r_l-1}e^{k_lx}$$
$$(r_1+r_2+\ldots+r_l=n).$$

Покажем, что все эти решения линейно независимы на любом промежутке, т.е. составляют фундаментальную систему решений уравнения (15.11). Приравняем к 0 произвольную линейную комбинацию этих решений и докажем, что все коэффициенты этой линейной комбинации обязательно равны 0. Имеем

$$\sum_{i=0}^{r_1-1}c_i^{(1)}x^ie^{k_1x}+\sum_{i=0}^{r_2-1}c_i^{(2)}x^ie^{k_2x}+\ldots+\sum_{i=0}^{r_l-1}c_i^{(l)}x^ie^{k_lx}\equiv 0$$

Вынося в каждой сумме e^{k_mx} за скобки и обозначая $\sum_{i=0}^{r_m-1}c_i^{(m)}x^i=$ $=P_m(x),\ m=1,2,\ldots,l$, получим

$$P_1(x)e^{k_1x}+P_2(x)e^{k_2x}+\ldots+P_l(x)e^{k_lx}\equiv 0. \qquad (15.18)$$

Здесь $P_m(x)$ – многочлен степени, меньшей или равной r_m-1, с коэффициентами $c_i^{(m)}$.

Нужно доказать, что все такие коэффициенты равны 0. Докажем, например, что все коэффициенты многочлена $P_l(x)$ равны 0. Будем действовать аналогично примеру 2 в разд. 15.2.

Для любого многочлена $P(x)$ степени n

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

где $a_0\neq 0$, и любого порядка производной по формуле Лейбница

$$\left(P(x)e^{kx}\right)^{(r)}=\sum_{i=0}^{r}C_r^iP^{(i)}(x)k^{r-i}e^{kx}=Q(x)\ e^{kx},$$

где многочлен $Q(x)=\sum_{i=0}^{r}C_r^ik^{r-i}P^{(i)}(x)$.

Так как во всех слагаемых этой суммы, кроме первого, степень многочлена $P^{(i)}(x)$ меньше, чем n, а степень первого слагаемого $k^rP(x)=k^ra_0x^n+\ldots+k^ra_n$ при $k\neq 0$ равна n $(k^ra_0\neq 0)$, то при $k\neq 0$ степень многочлена $Q(x)$ равна n.

Исходя из этого, разделим (15.18) на $e^{k_1 x}$:

$$P_1(x)+P_2(x)\,e^{(k_2-k_1)x}+\ldots+P_l(x)\,e^{(k_l-k_1)x}\equiv 0.$$

Продифференцируем полученное равенство r_1 раз по x (степень $P_1(x)$ меньше r_1):

$$Q_2(x)\,e^{(k_2-k_1)x}+\ldots+Q_l(x)\,e^{(k_l-k_1)x}\equiv 0, \qquad (15.19)$$

где в силу условий $k_m-k_1\neq 0$, $Q_m(x)$, $m=2,3,\ldots,l$, — новые многочлены тех же степеней, что и $P_m(x)$.

Разделим (15.19) на $e^{(k_2-k_1)x}$:

$$Q_2(x)+Q_3(x)\,e^{(k_3-k_2)x}+\ldots+Q_l(x)\,e^{(k_l-k_2)x}\equiv 0.$$

Дифференцируем это равенство r_2 раз по x (степень $Q_2(x)$ меньше r_2) и т. д. В итоге получим

$$R_l(x)e^{(k_l-k_{l-1})x}\equiv 0,$$

где $R_l(x)$ — многочлен той же степени, что $P_l(x)$. Отсюда

$$R_l(x)\equiv 0. \qquad (15.20)$$

Из (15.20) следует, что степень и все коэффициенты многочлена $R_l(x)$ равны 0. Но степень многочлена $P_l(x)$ равна степени многочлена $R_l(x)$, а значит, равна 0. Все коэффициенты многочлена $P_l(x)$ тоже равны 0: если бы $P_l(x)\equiv a_0\neq 0$, то

$$R_l(x)=a_0(k_l-k_1)^{r_1}(k_l-k_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(k_l-k_{l-1})^{r_{l-1}}\neq 0.\blacksquare$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'''-y''-y'+y=0$.

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид $k^3-k^2-k+1=0$. Решаем это уравнение: $k^2(k-1)-(k-1)=0$; $(k-1)(k^2-1)=0$; $(k-1)^2(k+1)=0$; $k_{1,2}=1$, $k_3=-1$. В соответствии с изложенным выше общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-x}.$$

4. *Среди корней характеристического уравнения имеются комплексные кратные.*

Так как в рассуждениях п. 3 не использовалась действительность корней характеристического уравнения и коэффициентов k в решениях вида $y=x^re^{kx}$, то все результаты этого пункта справедливы и в случае комплексных чисел, однако при этом в фундаментальной системе решений часть функций окажется комплекснозначными. Чтобы от них перейти к функциям с действительными значениями, поступим аналогично п. 2.

Пусть $k_1=\alpha+i\beta$ — корень характеристического уравнения (15.12) кратности r. Так как это уравнение с действительными коэффициентами, то $k_2=\alpha-i\beta$ — тоже корень уравнения (15.12) кратности r. Этим корням согласно п. 3 соответствует $2r$ решений уравнения (15.11):

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},\ y_2=xe^{(\alpha+i\beta)x},\ldots,\ y_r=x^{r-1}e^{(\alpha+i\beta)x};$$

$$y_{1'}=e^{(\alpha-i\beta)x},\ y_{2'}=xe^{(\alpha-i\beta)x},\ldots,\ y_{r'}=x^{r-1}e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Теперь заменим эти решения на их линейные комбинации (которые тоже являются решениями уравнения (15.11)). Получим новые $2r$ решений:

$$\frac{y_k+y_{k'}}{2}=x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } \frac{y_k-y_{k'}}{2i}=x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad k=1,2,\ldots,r.$$

Поступив так с каждой парой комплексных кратных корней, получим новую систему из n решений, которые, как уже показано в п. 2, являются линейно независимыми. Значит, эти решения образуют фундаментальную систему решений уравнения (15.11).

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=0$.

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид $k^4+2k^2+1=0$, или $(k^2+1)^2=0$. Корни этого уравнения: $k^2=-1$, $k_{1,2}=i$, $k_{3,4}=-i$. В соответствии с результатами п. 4 общим решением дифференциального уравнения будет функция

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x.$$

Подведем итог: общее решение уравнения

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

имеет вид

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n,$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные, $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения, которая ищется следующим образом. Составляем характеристическое уравнение:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Это уравнение имеет ровно n корней (с учетом кратности). Этим корням соответствуют следующие n функций в фундаментальной системе решений:

1. Каждому действительному корню k кратности 1 соответствует решение $y = e^{kx}$.

2. Каждой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$, кратности 1 каждый, соответствуют два решения: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

3. Каждому действительному корню k кратности r соответствуют r решений: $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, $y_3 = x^2 e^{kx}, \dots,$ $y_r = x^{r-1}e^{kx}$.

4. Каждой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$, кратности r каждый, соответствует $2r$ решений:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{1'} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_{2'} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots,\ y_r = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{r'} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

15.5. Неоднородные линейные уравнения высших порядков

В этом разделе, как и в разд. 15.1 и 15.3, под $L(y)$ понимается линейный дифференциальный оператор вида

$$L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y, \tag{15.21}$$

где все коэффициенты $p_i = p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, определены и непрерывны на некотором интервале (a, b), и рассматривается так называемое неоднородное уравнение $L(y) = f(x)$, где $f(x)$ также определена и непрерывна на интервале (a, b), или

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x). \tag{15.22}$$

Уравнение вида $L(y) = 0$, или

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0 \tag{15.23}$$

называется однородным линейным уравнением, соответствующим уравнению (15.22). Общее решение (15.23) находится в соответствии с теоремой 15.3.

Теорема 15.4 (структура общего решения линейного неоднородного уравнения). Пусть $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ — общее решение однородного уравнения (15.23) (здесь $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальная система решений этого уравнения, $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные), а y^* — частное решение неоднородного уравнения (15.22), т.е. одно из решений этого уравнения. Тогда функция

$$y = \bar{y} + y^* \tag{15.24}$$

является общим решением уравнения (15.22). То есть общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения исходного неоднородного уравнения.

▲ Нужно проверить, что функция (15.24) удовлетворяет определению общего решения дифференциального уравнения (14.7).

Как и $\bar{y}$, эта функция зависит от x и n произвольных постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$. При любых значениях этих постоянных функция (15.24) является решением уравнения (15.22), так как

$$L(y) = L(\bar{y} + y^*) = L(\bar{y}) + L(y^*) = 0 + f(x) = f(x).$$

Теперь в точке $x_0 \in (a, b)$ зададим произвольные начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \dots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ и покажем, что постоянные c_i можно подобрать так, чтобы функция (15.24) удовлетворяла этим начальным условиям. Имеем

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) + y^*(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) + \dots + c_n y'_n(x_0) + y^{*\prime}(x_0) = y'_0; \\ y''(x_0) = c_1 y''_1(x_0) + c_2 y''_2(x_0) + \dots + c_n y''_n(x_0) + y^{*\prime\prime}(x_0) = y''_0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) + \\ \qquad + y^{*(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{15.25}$$

Система (15.25) является системой n линейных уравнений с n неизвестными $c_1, c_2, \dots, c_n$ и правыми частями $y_0 - y^*(x_0)$, $y'_0 - y^{*\prime}(x_0)$, ...,

$y_0^{(n-1)} - y^{*(n-1)}(x_0)$. Определитель этой системы — это определитель Вронского $W(x_0)$, который отличен от 0 в силу линейной независимости функций $y_1, y_2, ..., y_n$. Значит, система (15.25) имеет единственное решение. ■

Приведем здесь еще одну теорему, которая в некоторых случаях облегчает нахождение частного решения неоднородного уравнения.

Теорема 15.5. Пусть y_1 — частное решение уравнения $L(y) = f_1(x)$, а y_2 — частное решение уравнения $L(y) = f_2(x)$. Тогда $y_1 + y_2$ — частное решение уравнения $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$.

$$▲ \quad L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f_1(x) + f_2(x). \quad ■$$

В соответствии с теоремой 15.4 для нахождения общего решения уравнения (15.22) нужно знать фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения (15.23) (а такую систему мы умеем находить для уравнений с постоянными коэффициентами — см. разд. 15.4) и частное решение данного неоднородного уравнения.

15.6. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

В этом разделе коэффициенты линейного оператора $L(y)$ — постоянные действительные числа:

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y, \quad a_0 \neq 0.$$

Тогда неоднородное $L(y) = f(x)$ и соответствующее однородное $L(y) = 0$ уравнения из предыдущего раздела будут иметь вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{15.26}$$

и

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad x \in R. \tag{15.27}$$

Эти уравнения можно разделить на a_0, поэтому сюда применимы все результаты разд. 15.5, и общее решение (15.26) будет иметь вид (15.24): $y = \bar{y} + y^*$.

Частное решение неоднородного уравнения (15.26) будем искать при следующих двух правых частях $f(x)$, которые называются *правыми частями специального вида*:

1) $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}$, где $P_k(x)$ — многочлен степени k.

Пусть число α является корнем характеристического уравнения для однородного уравнения (15.27) кратности r (если α не является корнем этого уравнения, то будем считать, что $r = 0$).

а). Сначала рассмотрим случай $\alpha = 0$, т.е. $f(x) = P_k(x)$. В этом случае вполне естественно искать частное решение неоднородного уравнения (15.26) y^* в виде $y^* = R(x)$, где $R(x)$ — многочлен некоторой степени m.

Подставим такую функцию в уравнение (15.26), которое в данном случае (см. случай 3, п. а разд. 15.4) имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-r} y^{(r)} = f(x), \quad a_{n-r} \neq 0.$$

Тогда

$$a_0 R^{(n)}(x) + a_1 R^{(n-1)}(x) + ... + a_{n-r} R^{(r)}(x) = P_k(x). \tag{15.28}$$

В этой формуле $R^{(n)}(x)$ — многочлен степени $m - n$; $R^{(n-1)}(x)$ — многочлен степени $m - (n-1) = m - n + 1$, ..., $R^{(r)}(x)$ — многочлен степени $m - r$. Тогда ($a_{n-r} \neq 0$) левая часть формулы (15.28) есть многочлен степени ($m - r$). Но правая часть этой формулы есть многочлен степени k, значит, $m - r = k$, $m = k + r$.

В левую часть формулы (15.28) не войдут коэффициенты многочлена $R(x)$ при $x^0, x^1, x^2, ..., x^{r-1}$ (так как эти коэффициенты «пропадут» при нахождении производных $R(x)$ порядка r и выше), значит, эти коэффициенты можно взять любыми. Взяв их равными 0, имеем

$$y^* = b_0 x^{k+r} + b_1 x^{k+r-1} + ... + b_k x^r = x^r (b_0^{\ k} + b_1 x^{k-1} + ... + b_k) = x^r Q_k(x),$$

где $Q_k(x)$ — многочлен степени k с неопределенными коэффициентами, т.е. коэффициентами, которые нам еще надо найти.

б). Теперь рассмотрим случай произвольного α. Характеристическое уравнение для однородного уравнения (15.27) при этом имеет вид $\Phi(k) = (k - \alpha)^r F(k) = 0$, где $F(\alpha) \neq 0$. Сделаем в уравнении (15.26) замену $y = ue^{\alpha x}$, где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция. Получим следующее дифференциальное уравнение для $u(x)$ (см. 3, п. б разд. 15.4):

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} \alpha^{n-i} e^{\alpha x} + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i u^{(i)} \alpha^{n-1-i} e^{\alpha x} + ... + a_n u e^{\alpha x} = P_k(x) e^{\alpha x}, \text{ или}$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^{n-i} u^{(i)} + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \alpha^{n-1-i} u^{(i)} + ... + a_n u = P_k(x). \tag{15.29}$$

Как было показано там же, характеристическое уравнение для соответствующего (15.29) однородного уравнения имеет вид $\Phi(k+\alpha)=0$, или $k^r F(k+\alpha)=0$. Введя новый многочлен $\widetilde{F}(k)=F(k+\alpha)$, последнее уравнение можно записать в виде

$$k^r \widetilde{F}(k)=0, \tag{15.30}$$

где $\widetilde{F}(0)=F(\alpha)\neq 0$.

Значит, 0 является корнем характеристического уравнения (15.30) кратности *r*, и в соответствии с п. а, частное решение (15.29) можно искать в виде $u^*=x^rQ_k(x)$, где $Q_k(x)$ — многочлен степени *k* с неопределенными коэффициентами. Отсюда частное решение (15.26) можно искать в виде

$$y^*=x^rQ_k(x)e^{\alpha x}. \tag{15.31}$$

Подставляя функцию (15.31) в уравнение (15.26) и сокращая это уравнение на $e^{\alpha x}$, получим тождественное равенство (на *R*) двух многочленов степени *k*. Необходимым и достаточным условием такого равенства является совпадение коэффициентов этих многочленов при одинаковых степенях *x*. Приравнивая эти коэффициенты, получим систему $(k+1)$ уравнений с $(k+1)$ неизвестными, которая, как можно доказать, всегда имеет единственное решение.

Таким образом, *если* $f(x)=P_k(x)e^{\alpha x}$, *то частное решение неоднородного уравнения* (15.26) *ищется по формуле* (15.31), *в которой* $Q_k(x)$ — *многочлен степени k с неопределенными коэффициентами, r кратность* α *как корня характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения* (15.27), *или сколько раз* α, *взятое из правой части уравнения* (15.26), *встречается среди корней характеристического уравнения.*

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y''+y'-2y=(6x-1)e^x$.

Р е ш е н и е

Характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения имеет вид $k^2+k-2=0$. Корни этого уравнения $k_1=-2$, $k_2=+1$, и общее решение однородного уравнения $\overline{y}=c_1e^{-2x}+c_2e^x$. Теперь ищем частное решение исходного уравнения: $\alpha=1$, $r=1$, $k=1$ и $y^*=x(Ax+B)e^x=(Ax^2+Bx)e^x$.

Находим производные этой функции и подставляем в исходное уравнение (для удобства записи опускаем символ *):

$$y'=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x=(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x;$$

$$y''=(2Ax+2A+B)e^x+(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x=(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x;$$

$$(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x+(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x-2(Ax^2+Bx)e^x= \\ =(6x-1)e^x;$$

$$Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B+Ax^2+2Ax+Bx+B-2Ax^2-2Bx=6x-1;$$

$$6Ax+2A+3B=6x-1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях этой формулы, имеем

$$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix}\begin{cases} 6A=6; \\ 2A+3B=-1. \end{cases}$$

Из этой системы $A=1;\ 3B=-1-2=-3;\ B=-1.$ В итоге,

$$y=\overline{y}+y^*=c_1e^{-2x}+c_2e^x+x(x-1)e^x.$$

2) $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_k(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$, где $P_k(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени *k* и *m* соответственно с действительными коэффициентами (это обобщение случая 1, который получается отсюда при $\beta=0$).

Покажем, что *в этом случае частное решение неоднородного уравнения* (15.26) *следует искать по формуле*

$$y^*=x^re^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x+T_l(x)\sin\beta x\right], \tag{15.32}$$

где $R_l(x)$ *и* $T_l(x)$ — *многочлены степени l с неопределенными* (*действительными*) *коэффициентами,* $l=\max\{k,m\}$, *r — кратность* $(\alpha+i\beta)$ *как корня характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения* (15.27), *или сколько раз* $(\alpha+i\beta)$, *взятое из правой части уравнения* (15.26), *встречается среди корней характеристического уравнения.*

Для этого заменим в функции $f(x)$ $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ на их выражения через показательные функции:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_k(x)\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+Q_m(x)\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}\right]=$$

$$=e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{P_k(x)}{2}+\frac{Q_m(x)}{2i}\right]+e^{(\alpha-i\beta)x}\left[\frac{P_k(x)}{2}-\frac{Q_m(x)}{2i}\right].$$

Обозначим в этой формуле $\frac{P_k(x)}{2}+\frac{Q_m(x)}{2i}=F(x)$, тогда $\frac{P_k(x)}{2}-\frac{Q_m(x)}{2i}=\overline{F(x)}$, где $\overline{F(x)}$ — комплексно сопряженное число к $F(x)$; оба многочлена (с комплексными коэффициентами) $F(x)$ и $\overline{F(x)}$ имеют степень l. Отсюда

$$f(x)=F(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{F(x)}e^{(\alpha-i\beta)x}. \qquad (15.33)$$

К этой правой части применимы рассуждения разд. 15.5 и п. 1 этого раздела (они справедливы и для комплексных коэффициентов многочленов и показателей степеней числа e).

В соответствии с теоремой 15.5 частное решение уравнения $L(y)=f(x)$, где $f(x)$ — задана формулой (15.33), есть сумма частных решений двух уравнений:

$$L(y)=F(x)e^{(\alpha+i\beta)x} \text{ и } L(y)=\overline{F(x)}e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Пусть y_1 — частное решение первого из них, т.е.

$$a_0y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y_1'+a_ny_1=F(x)e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Применим к обеим частям этого равенства операцию сопряжения. Учитывая действительность коэффициентов a_i, то, что $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, а значит,

$$\overline{e^{(\alpha+i\beta)x}}=e^{\alpha x}\cdot\overline{e^{i\beta x}}=e^{\alpha x}\overline{(\cos\beta x+i\sin\beta x)}=$$

$$=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{(\alpha-i\beta)x}$$

и

$$\overline{y'}=\overline{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\overline{\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{y(x+\Delta x)}-\overline{y(x)}}{\Delta x}=\overline{y}',$$

имеем

$$a_0\overline{y}_1^{(n)}+a_1\overline{y}_1^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\overline{y}_1'+a_n\overline{y}_1=\overline{F(x)}e^{(\alpha-i\beta)x},$$

т. е. $\overline{y}_1$ является частным решением второго из этих уравнений.

Согласно выводам п. 1, y_1 следует искать в виде $y_1=x^rU_l(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$, где $U_l(x)$ — многочлен степени l, r — кратность ($\alpha+i\beta$) как корня характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения (15.27). Тогда

$$\overline{y}_1=x^r\overline{U_l(x)}\overline{e^{(\alpha+i\beta)x}}=x^r\overline{U_l(x)}e^{(\alpha-i\beta)x},$$

и частное решение уравнения $L(y)=f(x)$ с правой частью (15.33) следует искать в виде

$$y^*=y_1+\overline{y}_1=x^rU_l(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+x^r\overline{U_l(x)}e^{(\alpha-i\beta)x}=$$

$$=x^rU_l(x)e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+x^r\overline{U_l(x)}e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)=$$

$$=x^re^{\alpha x}\left[(U_l(x)+\overline{U_l(x)})\cos\beta x+i((U_l(x)-\overline{U_l(x)})\sin\beta x\right]. \qquad (15.34)$$

Пусть

$$U_l(x)=\sum_{k=0}^{l}b_kx^{l-k}=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\ldots+b_l,$$

где коэффициенты $b_0\neq 0, b_1,\ldots, b_l$ — некоторые (комплексные) числа, тогда $\overline{U_l(x)}=\sum_{k=0}^{l}\overline{b_k}x^{l-k}$. Введем многочлены

$$R_l(x)=U_l(x)+\overline{U_l(x)}=\sum_{k=0}^{l}(b_k+\overline{b_k})x^{l-k};$$

$$T_l(x)=i(U_l(x)-\overline{U_l(x)})=\sum_{k=0}^{l}i(b_k-\overline{b_k})x^{l-k}.$$

Так как $z+\overline{z}=x+iy+x-iy=2x$ и $i(z-\overline{z})=i(x+iy-x+iy)=-2y$, то оба этих многочлена имеют действительные коэффициенты и степени, не превышающие l, причем степень хотя бы одного из этих многочленов равна l (если в обоих многочленах x в старшей степени l сокращается, то $b_0+\overline{b_0}=0$ и $i(b_0-\overline{b_0})=0$, откуда следует: $b_0+\overline{b_0}=0$, $b_0-\overline{b_0}=0$, значит, $b_0=0$, что противоречит условию).

Подставляя $R_l(x)$ и $T_l(x)$ в формулу (15.34), получаем

$$y^*=x^re^{\alpha x}[R_l(x)\cos\beta x+T_l(x)\sin\beta x],$$

т.е. формулу (15.32).

При подстановке решения вида (15.32) в уравнение (15.26) после сокращения на $e^{\alpha x}$ получаем тождественное равенство (на R) двух функций. Приравнивая коэффициенты при $x^i \cos\beta x$ и $x^j \sin\beta x$ в обеих частях этого равенства (такие функции линейно независимы), получаем систему уравнений, из которой единственным образом находим коэффициенты многочленов $R_l(x)$ и $T_l(x)$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y''' + y' = \sin 2x$.

Решение

Соответствующее однородное уравнение $y''' + y' = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $k^3 + k = 0$, или $k(k^2+1) = 0$. Отсюда $k_1 = 0$ и $k_{2,3} = \pm i$. Общее решение исходного уравнения: $\bar{y} = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

Частное решение исходного уравнения: $P_k(x) = 0$, $Q_m(x) = 1$, $k = m = 0$; $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\alpha + \beta i = 2i$; это число не является корнем характеристического уравнения, поэтому $r = 0$ и $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$. Отсюда (символ * для удобства записи опускаем)

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \quad y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x,$$

$$y''' = 8A\sin 2x - 8B\cos 2x.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$8A\sin 2x - 8B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x = \sin 2x;$$

$$6A\sin 2x - 6B\cos 2x = \sin 2x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$: $\begin{cases} -6B = 0; \\ 6A = 1. \end{cases}$ Отсюда $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$ и $y = \bar{y} + y^* = c_1 + c_2\cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{6}\cos 2x.$

Этот пример еще раз подтверждает, что независимо от наличия в правой части линейного дифференциального уравнения обеих функций — $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ или только одной из них, в решении вида (15.32) должны присутствовать обе эти функции.

Замечание. Если правая часть уравнения (15.26) является суммой двух или большего числа функций специального вида, то для нахождения частного решения этого уравнения удобно использовать упомянутую выше теорему 15.5.

15.7. Метод вариации произвольных постоянных

Теперь вернемся к общему виду линейного неоднородного дифференциального уравнения. Пусть

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y, \qquad (15.34)$$

а неоднородное и соответствующее однородное уравнения имеют вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \; x \in (a,b) \qquad (15.35)$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \; x \in (a,b). \qquad (15.36)$$

Общее решение уравнения (15.35) имеет вид

$$y = \bar{y} + y^*, \qquad (15.37)$$

где

$$\bar{y} = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n - \qquad (15.38)$$

общее решение уравнения (15.36) ($y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений этого уравнения), а y^* — частное решение уравнения (15.35).

Метод вариации произвольных постоянных заключается в нахождении y^* по той же формуле (15.38), считая, что в ней коэффициенты c_i являются функциями x: $c_i = c_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n.$

При подстановке такой функции в уравнение (15.35) получим одно уравнение с n неизвестными: $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Остальные $n-1$ уравнения мы допишем наиболее удобным для нас способом. Имеем

$$p_n(x) \;\big|\; y = c_1y_1 + \ldots + c_n y_n$$
$$p_{n-1}(x) \;\big|\; y' = c_1y_1' + \ldots + c_n y_n' + c_1'y_1 + \ldots + c_n'y_n.$$

Потребуем, чтобы $c_1'y_1 + \ldots + c_n'y_n = 0$ — это 1-е уравнение.

$$p_{n-2}(x) \;\big|\; y'' = c_1y_1'' + \ldots + c_n y_n'' + c_1'y_1' + \ldots + c_n'y_n'.$$

Потребуем, чтобы $c_1'y_1' + \ldots + c_n'y_n' = 0$ — это 2-е уравнение. И т.д.

$$p_1(x) \;\big|\; y^{(n-1)} = c_1y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n y_n^{(n-1)} + c_1'y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-2)}. \qquad (15.39)$$

Потребуем, чтобы $c_1'y_1^{(n-2)}+\ldots+c_n'y_n^{(n-2)}=0$ — это $(n-1)$-е уравнение:

$$y^{(n)}=c_1y_1^{(n)}+\ldots+c_ny_n^{(n)}+c_1'y_1^{(n-1)}+\ldots+c_n'y_n^{(n-1)}.$$

Последнее n-е уравнение получается после подстановки всех этих функций в формулу (15.35). Для этого надо умножить последнее из равенств (15.39) на 1, предпоследнее – на $p_1(x)$, ..., второе – на $p_{n-1}(x)$, первое – на $p_n(x)$ (все эти множители приведены в столбце слева) и все полученные новые равенства сложить. Собрав вместе члены с $c_1, c_2, \ldots, c_n$, получим

$$L(y)=c_1L(y_1)+c_2L(y_2)+\ldots+c_nL(y_n)+$$

$$+c_1'\,y_1^{(n-1)}+c_2'\,y_2^{(n-1)}+c_n'\,y_n^{(n-1)}=f(x). \qquad (15.40)$$

Так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ решения (15.36), то $L(y_1)=0$, $L(y_2)=0$, ..., $L(y_n)=0$, и уравнение (15.40) приобретает вид

$$c_1'y_1^{(n-1)}+c_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+c_n'y_n^{(n-1)}=f(x). \qquad (15.41)$$

Теперь выпишем систему уравнений для $c_i'=c_i'(x)$:

$$\begin{cases} c_1'y_1+c_2'y_2+\ldots+c_n'y_n=0; \\ c_1'y_1'+c_2'y_2+\ldots+c_n'y_n'=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'y_1^{(n-2)}+c_2'y_2^{(n-2)}+\ldots+c_n'y_n^{(n-2)}=0; \\ c_1'y_1^{(n-1)}+c_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+c_n'y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases} \qquad (15.42)$$

Система (15.42) – это система n линейных уравнений с n неизвестными $c_1', c_2', \ldots, c_n'$. Систему легко запомнить, ее коэффициентами являются: в 1-м уравнении – $y_1, y_2, \ldots, y_n$, во 2-м – $y_1', y_2', \ldots, y_n'$, в 3-м – $y_1'', y_2'', \ldots, y_n''$ и т. д.; правые части всех уравнений, кроме последнего (n-го), равны 0, а правая часть последнего уравнения равна $f(x)$.

Определитель системы (15.42) есть определитель Вронского $W(x)$ функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, который отличен от 0 во всех точках интервала (a, b), так как функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы на этом интервале. Значит, система (15.42) имеет единственное решение $c_1'=c_1'(x), c_2'=c_2'(x), \ldots, c_n'=c_n'(x)$.

Первообразные для этих функций и являются нужными нам коэффициентами в формуле (15.38).

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'''+3y''+2y'=\dfrac{1}{e^x+1}$.

Решение

Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'''+3y''+2y'=0$. Характеристическое уравнение для этого дифференциального уравнения $k^3+3k^2+2k=0$ имеет корни $k_1=0$, $k_2=-1$, $k_3=-2$, а общее решение однородного уравнения – $\bar{y}=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}$.

Теперь ищем частное решение y^* исходного уравнения по той же формуле, считая, что в ней $c_i=c_i(x)$, $i=1, 2, 3$. Система (15.42) в данном примере выглядит так:

$$\begin{cases} c_1'+c_2'e^{-x}+\ c_3'e^{-2x}=0; \\ -c_2'e^{-x}-2c_3'e^{-2x}=0; \\ c_2'e^{-x}+4c_3'e^{-2x}=\dfrac{1}{e^x+1}. \end{cases}$$

Складывая 2-е и 3-е уравнения, имеем $2c_3'e^{-2x}=\dfrac{1}{e^x+1}$; $c_3'=\dfrac{e^{2x}}{2(e^x+1)}$. Подставляя это выражение во 2-е уравнение, получаем

$$-c_2'e^{-x}-\frac{1}{e^x+1}=0;\ \ c_2'=-\frac{e^x}{e^x+1}.$$

Подставляя c_2' и c_3' в 1-е уравнение, получаем:

$$c_1'=\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2(e^x+1)}=\frac{1}{2(e^x+1)}.$$

Теперь находим сами коэффициенты $c_i(x)$ (при нахождении первообразных произвольные постоянные не пишем, так как определяем лишь одно частное решение неоднородного уравнения):

$$c_2=-\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=-\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}=-\ln(e^x+1);$$

$$c_3=\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{e^xde^x}{e^x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(e^x+1)-1}{e^x+1}de^x=$$

$$=\frac{1}{2}\int de^x-\frac{1}{2}\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\ln(e^x+1);$$

$$c_1=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{e^x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(e^x+1)-e^x}{e^x+1}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(e^x+1).$$

Значит, $y^* = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) - e^{-x}\ln(e^x+1) + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(e^x+1)$ и

$$y = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) - e^{-x}\ln(e^x+1) + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(e^x+1).$$

Легко понять, что если при нахождении первообразных будем прибавлять произвольные постоянные, то формула (15.38) при $c_i = c_i(x)$ сразу даст *общее* решение исходного неоднородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных в принципе применим для любых линейных неоднородных уравнений (даже с коэффициентами, зависящими от *x*). Однако для произвольных таких уравнений нет общего метода решения соответствующих однородных уравнений, поэтому *этот метод применяется для решения уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью, не являющейся функцией специального вида*. При правых же частях специального вида применяется более простой (в частности, не содержащий операции интегрирования) метод, изложенный в разд. 15.6.

VI

РЯДЫ

16. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

16.1. Свойства сходящихся рядов

Определение 16.1. Пусть дана последовательность чисел $\{a_n\}$. Составленный из этих чисел символ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется числовым рядом, а числа a_n называются членами этого ряда. Сумма n первых членов ряда называется n-й частичной суммой ряда и обозначается S_n. Если существует конечный $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется *сходящимся* (или *ряд сходится*), а число S – суммой ряда. В таком случае часто пишут $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. В противном случае ($\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует) ряд называется *расходящимся* (или *ряд расходится*).

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если

$$\exists S : \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N\ (|S_n - S| < \varepsilon).$$

Пример. Найти сумму геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} b_1 q^n$.

Решение

Как известно из курса средней школы, $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ и конечный $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{b_1}{1-q}$ существует при $|q| < 1$; при $|q| > 1$ этот предел бесконечен; при $q = 1$ ряд имеет вид $b_1 + b_1 + b_1 + \ldots$, следовательно, $S_n = nb_1$ и $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, при $q = -1$ ряд имеет вид $b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \ldots$, следовательно, $S_n = b_1$ при n нечетном и $S_n = 0$ при n четном и $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует $(b_1 \neq 0)$. Значит, геометрическая прогрессия сходится при $|q| < 1$ и при этом

$S = \dfrac{b_1}{1-q}$ (это формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Укажем ряд свойств числовых рядов.

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{16.1}$$

Рассмотрим ряд, полученный из ряда (16.1) путем отбрасывания конечного числа его первых членов:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n. \tag{16.2}$$

Ряд (16.2) называется остатком ряда (16.1) после k-го члена.

Теорема 16.1. Ряды (16.1) и (16.2) сходятся или расходятся одновременно (т.е. сходимость ряда не зависит от поведения конечного числа его первых членов).

▲ Пусть, как обычно, S_n – n-я частичная сумма ряда (16.1), σ_n – n-я частичная сумма ряда (16.2). Тогда при $n > k$

$$S_n = S_k + \sigma_{n-k}. \tag{16.3}$$

В этой формуле k – число фиксированное, т.е. S_k – постоянная величина. Если теперь устремить n к бесконечности, то существование конечного $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (т.е. сходимость ряда (16.1)) равносильно существованию конечного $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ (т.е. сходимости ряда (16.2)). ■

Теорема 16.2. Пусть ряд (16.1) сходится и S – его сумма. Сумму (сходящегося) ряда (16.2) обозначим R_k. Тогда сумму ряда можно представить в виде суммы k-й частичной суммы ряда и суммы остатка после k-го члена.

▲ Переходя в обеих частях формулы (16.3) к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$S = S_k + R_k, \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n. \blacksquare$$

В силу этого равенства определение сходимости ряда можно записать так: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \left(\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Здесь же отметим, что согласно критерию Коши сходимости последовательностей существование конечного $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ равносильно выполнению условия

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N,\ \forall p = 1, 2, \ldots \left(\left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon \right).$$

Или ряд (16.1) сходится

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N,\ \forall p = 1, 2, \ldots \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Теорема 16.3. Пусть сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, а суммы их равны S и $\tilde{S}$ соответственно. Тогда сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$, где α и β – постоянные, а сумма его равна $\alpha\, S + \beta\, \tilde{S}$.

▲ Пусть σ_n – n-я частичная сумма этого ряда, а S_n и $\tilde{S}_n$ – n-е частичные суммы исходных рядов. Тогда $\sigma_n = \alpha\, S_n + \beta \tilde{S}_n$, следовательно существует конечный

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n + \beta \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \alpha S + \beta \tilde{S}. \blacksquare$$

Теорема 16.4 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд (16.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

▲ $a_n = S_n - S_{n-1}$. Если ряд (16.1) сходится и сумма его равна S, то из этого равенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. ■

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (16.1) расходится (так как если бы он сходился, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

Ниже будет доказано, что так называемый *гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, т.е. необходимый признак сходимости не является достаточным.

16.2. Ряды с неотрицательными членами

В этом разделе рассматриваются ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Для таких рядов $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$, т.е. последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм не убывает.

Теорема 16.5 (сравнения). Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (16.1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{16.4}$$

и $0 \leq a_n \leq b_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда если ряд (16.4) сходится, то сходится и ряд (16.1), а если ряд (16.1) расходится, то расходится и ряд (16.4).

▲ Пусть сходится ряд (16.4) и $\widetilde{S}$ – его сумма. Пусть S_n и $\widetilde{S}_n$ – n-е частичные суммы рядов (16.1) и (16.4) соответственно. Тогда по условию $S_n \leq \widetilde{S}_n$. Но $\{\widetilde{S}_n\}$ не убывает и $\exists \lim_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \widetilde{S} \Rightarrow \widetilde{S}_n \leq \widetilde{S} \Rightarrow \{S_n\}$ ограничена сверху: $S_n \leq \widetilde{S}$. Но по теореме 2.10 всякая неубывающая, ограниченная сверху последовательность имеет конечный предел, следовательно, $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$, т.е. ряд (16.1) сходится.

Если же теперь расходится ряд (16.1), то расходится и ряд (16.4), так как если бы он сходился, то по уже доказанной первой части теоремы, сходился бы и ряд (16.1), что противоречит условию. ■

Замечание. Так как по теореме 16.1 сходимость ряда не зависит от поведения конечного числа его первых членов, то для справедливости теоремы сравнения достаточно, чтобы условие $0 \leq a_n \leq b_n$ выполнялось для всех n, начиная с некоторого номера.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Решение

Так как $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ и, как было отмечено выше, гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то исходный ряд тоже расходится.

Выполнение условия $0 \leq a_n \leq b_n$ часто зависит от не слишком существенных причин, поэтому вместо теоремы 16.5, как правило, удобнее следующая теорема.

Теорема 16.6 (сравнения в предельной форме). Пусть даны ряды с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (16.1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (16.4) и пусть существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, где $K \neq 0$, $K \neq \infty$. Тогда ряды (16.1) и (16.4) сходятся или расходятся одновременно (что обозначается как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$). При $K = 0$ из сходимости ряда (16.4) следует сходимость ряда (16.1), а при $K = \infty$ из расходимости ряда (16.4) следует расходимость ряда (16.1).

▲ Пусть ряд (16.4) сходится. Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, то для достаточно больших n $\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} - K < \varepsilon \Rightarrow a_n < (K+\varepsilon) b_n$, и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (K+\varepsilon) b_n$ тоже сходится (см. теорему 16.3), то (см. замечание к теореме 16.5), сходится и ряд (16.1). Эта часть доказательства справедлива и при $K = 0$.

Пусть теперь сходится ряд (16.1). Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{K}$, то по уже доказанной первой части теоремы ряд (16.4) тоже сходится.

Если же $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, тогда из сходимости ряда (16.1) следует сходимость ряда (16.4), а значит, из расходимости ряда (16.4) следует расходимость ряда (16.1) (доказательство методом от противного: если бы (16.1) сходился, то по уже доказанному сходился бы и (16.4), что не так). ■

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$.

Решение

Сравним этот ряд со сходящейся $\left(q = \frac{2}{3} < 1\right)$ геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Так как при $n \to \infty$ бесконечно малая $\operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$ эквивалентна бесконечно малой $\frac{1}{3^n}$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}}{2^n \frac{1}{3^n}} = 1 \Rightarrow$ по теореме 16.6 исходный ряд сходится.

Теорема 16.7 (**признак Коши**). Пусть дан ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (16.1) и пусть существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда при $l<1$ ряд (16.1) сходится, а при $l>1$ ряд (16.1) расходится.

▲ Пусть $l<1$. Возьмем произвольное число $q \in (l,\, 1)$ (рис. 82).

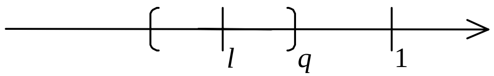


Рис. 82

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то $\exists N: \forall n > N$ все члены последовательности $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ попадут в изображенную на рис. 82 окрестность точки l, значит, $\forall n > N \left(\sqrt[n]{a_n} < q\right) \Rightarrow a_n < q^n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится (это геометрическая прогрессия со знаменателем q, $0<q<1$), следовательно (см. замечание к теореме 16.5), ряд (16.1) сходится.

Пусть $l>1$; начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, т.е. ряд (16.1) расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости (см. следствие теоремы 16.4). ■

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$.

Решение

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\arcsin^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

Теорема 16.8 (**признак Даламбера**). Пусть дан ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (16.1) и пусть существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда при $l<1$ ряд (16.1) сходится, а при $l>1$ ряд (16.1) расходится.

▲ Пусть $l<1$. Возьмем такое же произвольное число $q \in (l,\, 1)$, как при доказательстве теоремы 16.7 (см. рис. 82). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то

$\exists N: \forall n > N$ все члены последовательности $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ попадут в изображенную на чертеже окрестность точки $l \Rightarrow \forall n > N \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < q\right)$. В частности, $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q$, $\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < q$, $\frac{a_{N+4}}{a_{N+3}} < q, \ldots,$ $\frac{a_{N+n+1}}{a_{N+n}} < q$. Перемножим левые и правые части этих неравенств:

$$\frac{a_{N+n+1}}{a_{N+1}} < q^n \Rightarrow a_{N+n+1} < a_{N+1} q^n.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+1} q^n$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q \in (0,1)$, тогда по теореме сравнения 16.5 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+n+1}$, а значит, по теореме 16.1 ряд (16.1) сходится.

Пусть $l>1$; начиная с некоторого номера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

следовательно, ряд (16.1) расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости (см. следствие теоремы 16.4). ■

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Решение

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\, n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{(2.7)}{=} e > 1 \Rightarrow \text{ ряд расходится.}$$

Теорема 16.9 (**интегральный признак сходимости**). Пусть дан ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (16.1) и пусть $a_n = f(n)$, где функция $y = f(x)$ определена, непрерывна, неотрицательна и не возрастает при $x \geq 1$. Тогда ряд (16.1) сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx. \qquad (16.5)$$

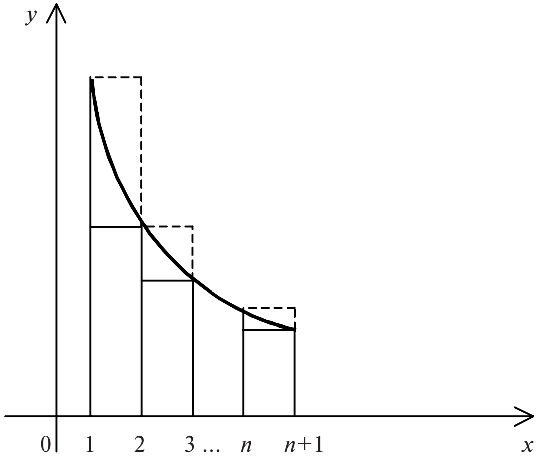


Рис. 83

▲ Как видно из рис. 83, площадь криволинейной трапеции, т.е. $\int_1^{n+1} f(x)dx$, заключена между площадями «большой» и «маленькой» ступенчатых фигур, которые (как сумма площадей прямоугольников) соответственно равны

$$1\cdot f(1)+1\cdot f(2)+\ldots+1\cdot f(n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=S_n;$$

$$1\cdot f(2)+1\cdot f(3)+\ldots+1\cdot f(n+1)=f(2)+f(3)+\ldots+f(n+1)=S_{n+1}-a_1.$$

Таким образом, $S_{n+1}-a_1\le\int_1^{n+1} f(x)dx\le S_n$.

Пусть интеграл (16.5) сходится. Так как $f(x)\ge 0$, то

$$\int_1^{n+1} f(x)dx\le\int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Значит,

$$S_{n+1}\le\int_1^{n+1} f(x)dx+a_1\le\int_1^{+\infty} f(x)dx+a_1,$$

т.е. последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, а так как для любого ряда с неотрицательными членами эта последовательность не убывает, то по теореме 2.10 существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, следовательно, ряд (16.1) сходится.

Пусть интеграл (16.5) расходится. Так как $f(x)\ge 0$, то последовательность $\left\{\int_1^{n+1} f(x)dx\right\}$ не убывает. Эта последовательность не может быть ограниченной сверху (если бы $\int_1^{n+1} f(x)dx\le M$, то $\varphi(c)=\int_1^{c} f(x)dx\le M$ для $\forall c\ge 2$, и, аналогично доказательству теоремы сравнения для несобственных интегралов 11.1, интеграл (16.5) сходится). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{n+1} f(x)dx=+\infty$. Но так как $S_n\ge\int_1^{n+1} f(x)dx$, то отсюда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=+\infty$, а значит, ряд (16.1) расходится. ■

Пример. Исследовать на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$. Такие ряды называются рядами Дирихле.

Решение

При $\alpha\le 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\ne 0\Rightarrow$ ряд расходится. При $\alpha>0$ функция $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 16.6. Но $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$ (см. разд. 11.2), следовательно, ряды Дирихле сходятся при $\alpha>1$ и расходятся при $\alpha\le 1$. В частности, расходится и гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Ряды Дирихле часто берутся в качестве одного из рядов при исследовании рядов на сходимость с использованием теорем 16.5 и 16.6.

Замечание. Применение к рядам Дирихле признака Даламбера приводит к равенству $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}=1$, т.е. при $l=1$ ряд (16.1) может сходиться, а может и расходиться. Аналогичный результат справедлив и для признака Коши.

16.3. Ряды с членами произвольного знака

Рассмотрим ряд с членами произвольного знака $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (16.1), а также ряд из модулей членов ряда (16.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{16.6}$$

Определение 16.2. Ряд (16.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (16.6).

Теорема 16.10. Если ряд (16.6) сходится, то ряд (16.1) тоже сходится, т.е. из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость в обычном смысле.

▲ Представим члены ряда (16.1) в виде $a_n = a_n^+ - a_n^-$, где

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n \ge 0; \\ 0, & \text{если } a_n < 0; \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n \ge 0; \\ -a_n, & \text{если } a_n < 0. \end{cases}$$

Так как $0 \le a_n^+ \le |a_n|$, $0 \le a_n^- \le |a_n|$, то по теореме 16.5 из сходимости ряда (16.6) следует сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, а отсюда согласно теореме 16.3 сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (16.1). ■

Замечание. К ряду (16.6), как к ряду с неотрицательными членами, можно применить теоремы 16.5–16.9 о сходимости таких рядов. Остановимся подробнее на применении признаков Коши и Даламбера.

Пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ или $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$. Тогда при $l < 1$ ряд (16.6) сходится, значит, ряд (16.1) абсолютно сходится, а при $l > 1$ расходится не только ряд (16.6), но и ряд (16.1), так как из доказательств признаков Коши и Даламбера следует, что в этом случае $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$.

Определение 16.3. Ряд (16.1) называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд из модулей (16.6) расходится.

Рассмотрим ряд теорем о сходимости рядов с членами произвольного знака.

Начнем с так называемых *знакочередующихся рядов*:

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + c_5 - c_6 + \ldots,$$

где $c_n \ge 0$.

Теорема 16.11 (признак Лейбница). Пусть члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине не возрастают: $c_{n+1} \le c_n$ и $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Тогда этот ряд сходится и его сумма S удовлетворяет условию $c_1 - c_2 \le S \le c_1$.

▲ Надо доказать существование конечного предела частичных сумм ряда $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Рассмотрим сначала сумму четного числа членов $\{S_{2n}\}$:

$$S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = S_{2n} + (c_{2n+1} - c_{2n+2}).$$

Так как $c_{n+1} \le c_n$, то $c_{2n+2} \le c_{2n+1}$, следовательно последовательность $\{S_{2n}\}$ не убывает: $S_{2(n+1)} \ge S_{2n}$ и $S_{2n} \ge S_2 = c_1 - c_2$. Эта последовательность к тому же ограничена сверху:

$$S_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \ldots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n} \le c_1$$

в силу условий теоремы $c_{n+1} \le c_n$ и $c_n \ge 0$. Значит, по теореме 2.10 существует конечный $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$ и $c_1 - c_2 \le S \le c_1$.

Теперь рассмотрим сумму нечетного числа членов $\{S_{2n+1}\}$. Так как $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + c_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$, то существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и $c_1 - c_2 \le S \le c_1$. ■

Примеры. Исследовать на сходимость ряды.

Решение

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Ряд удовлетворяет всем условиям признака Лейбница: он знакочередующийся, его члены по абсолютной величине убывают и при $n \to \infty$ стремятся к 0 $\Rightarrow$ по теореме 16.11 ряд сходится. Ряд из абсолютных величин – гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится $\Rightarrow$ исходный ряд сходится условно.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^3}{2^n}$. Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ сходится по признаку Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^3}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ исходный ряд абсолютно сходится.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4n+1}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$. Применение признака Коши к ряду из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$ приводит к: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n+1}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{3n-1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}>1\Rightarrow$ исходный ряд расходится (см. замечание после теоремы 16.10).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$. Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$ согласно теореме сравнения в предельной форме сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}\right)$, последний ряд расходится $\left(\alpha=\frac{2}{3}<1\right.$ – см. ряды Дирихле $\left.\right)$. Сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$ является знакочередующимся и сходится по признаку Лейбница, так как его члены по абсолютной величине убывают и при $n\to\infty$ стремятся к 0, следовательно, исходный ряд условно сходится.

Далее рассматрим *ряды вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n. \tag{16.7}$$

Пусть через B_n обозначена n-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Тогда n-я частичная сумма ряда (16.7)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_1B_1+a_2(B_2-B_1)+a_3(B_3-B_2)+\ldots+a_n(B_n-B_{n-1})=$$

$$=(a_1-a_2)B_1+(a_2-a_3)B_2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)B_{n-1}+a_nB_n=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_nB_n.$$

Это равенство называется *преобразованием Абеля* суммы $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$. Если его переписать в виде

$$\sum_{k=2}^{n}a_k(B_k-B_{k-1})=a_nB_n-a_1B_1-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k,$$

то видно, что преобразование Абеля является дискретным аналогом интегрирования по частям.

Теорема 16.12 (признак Дирихле). Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, а последовательность $\{B_n\}$ ограничена, т.е. для всех n $|B_n|\le B$, где B – некоторое число. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится.

▲ Согласно критерию Коши нам надо доказать, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists N=N(\varepsilon):\forall n>N,\forall p=1,2,\ldots\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|<\varepsilon\right)$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Так как $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то $\exists N:\forall n>N\left(|a_n|<\frac{\varepsilon}{6B}\right)$. Докажем, что это N можно взять в качестве интересующего нас $N=N(\varepsilon)$.

Пусть $n>N$. Используя преобразование Абеля, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})\tilde{B}_k+a_{n+p}\tilde{B}_{n+p}\right|,$$

где

$$\tilde{B}_k=b_{n+1}+b_{n+2}+\ldots b_{n+k}=B_{n+k}-B_n;$$

$$\left|\tilde{B}_k\right|\le\left|B_{n+k}-B_n\right|\le\left|B_{n+k}\right|+\left|B_n\right|\le 2B,\quad k=n+1,n+2,\ldots,n+p,$$

откуда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|a_k-a_{k+1}\right|\left|\tilde{B}_k\right|+\left|a_{n+p}\right|\left|\tilde{B}_{n+p}\right|\le 2B\left[\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|a_k-a_{k+1}\right|+\left|a_{n+p}\right|\right].$$

Так как последовательность $\{a_n\}$ монотонна, то все выражения a_k-a_{k+1}, $k=n+1,n+2,\ldots,n+p-1$, имеют один и тот же знак и последнее неравенство можно переписать в виде

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|\le 2B\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})\right|+\left|a_{n+p}\right|\right]=$$

$$= 2B\left[\left|a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \ldots + a_{n+p-1} - a_{n+p}\right| + \left|a_{n+p}\right|\right] =$$

$$= 2B\left[\left|a_{n+1} - a_{n+p}\right| + \left|a_{n+p}\right|\right] \le 2B\left[\left|a_{n+1}\right| + 2\left|a_{n+p}\right|\right] < 2B\left(\frac{\varepsilon}{6B} + 2\frac{\varepsilon}{6B}\right) =$$

$$= 2B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon. \blacksquare$$

Пример. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ сходится при любых x и $\alpha > 0$.

Решение

Применим признак Дирихле: последовательность $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$ убывает и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, а последовательность $\{B_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right\}$ ограничена, так как при $\sin\frac{x}{2} \ne 0$, т.е. $\frac{x}{2} \ne \pi m,\ x \ne 2\pi m$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin kx \cdot \sin\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right]\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \ldots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]\right| \le \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right|\right) \le$$

$$\le \left|\frac{2}{2\sin\frac{x}{2}}\right| = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Последнее число можно взять за B из формулировки теоремы 16.12; если же $\sin\frac{x}{2} = 0$, т.е. $x = 2\pi m$, то $\sin kx = 0 \Rightarrow B_n = 0.$

Теорема 16.13 (признак Абеля). Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена и монотонна и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

▲ Так как последовательность $\{a_n\}$ ограничена и монотонна, то она имеет конечный предел $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда члены этой последовательности можно представить в виде $a_n = a + \alpha_n$, где последовательность $\{\alpha_n\} = \{a_n - a\}$ бесконечно малая и по-прежнему монотонная. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то существует конечный предел его n частичных сумм B_n, следовательно последовательность $\{B_n\}$ ограничена. Тогда по теореме 16.12 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n$, следовательно, по теореме 16.3 сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, так как члены его можно представить в виде линейной комбинации членов сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n$: $a_n b_n = (a + \alpha_n) b_n = ab_n + \alpha_n b_n$. ■

Пример. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}} \cos\frac{\pi}{n}$ сходится при любых x и $\alpha > 0$.

Решение

Применим признак Абеля: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ сходится (см. предыдущий пример), а последовательность $\left\{\cos\frac{\pi}{n}\right\}$ возрастает и ограничена:

$$\frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{n+1} > \cos\frac{\pi}{n} \text{ и } \cos\frac{\pi}{n} < 1.$$

17. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

17.1. Область сходимости функционального ряда

Определение 17.1. *Функциональным рядом* называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{17.1}$$

где функции $u_n(x)$ определены на некотором множестве X. При $\forall x \in X$ функциональный ряд (17.1) превращается в обычный числовой ряд, который может сходиться, а может и расходиться. Множество тех x, для которых ряд (17.1) сходится, называется областью сходимости функционального ряда. В области сходимости функционального ряда его сумма является функцией x, т.е. $S = S(x)$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n-1)(x+1)^n}$.

Решение

Применим к ряду из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n-1)\,|\,x+1\,|^n}$ признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(3n-1)\,|\,x+1\,|^n}{(3n+2)\,|\,x+1\,|^{n+1}\,2^n}=\frac{2}{|\,x+1\,|}\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{3n+2}=\frac{2}{|x+1|}.$$

Значит, исходный ряд абсолютно сходится при

$$\frac{2}{|\,x+1\,|}<1\Leftrightarrow|\,x+1\,|>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1>2\\ x+1<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\ \ 1\\ x<-3\end{array}\right.$$

и расходится (не только ряд из модулей, но и сам ряд) при

$$\frac{2}{|\,x+1\,|}>1\Leftrightarrow -3<x<1.$$

При $x=1$ ряд превращается в $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n-1)2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится; при $x=-3$ ряд превращается в $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n-1)(-2)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$ – условно сходится (ряд из модулей, как только что было отмечено, ведет себя как гармонический ряд, т.е. расходится, а сам ряд сходится по признаку Лейбница: он знакочередующийся, его члены по абсолютной величине убывают и при $n\to\infty$ стремятся к 0).

Таким образом, область сходимости данного ряда есть $(-\infty,-3]\cup(1,+\infty)$, причем в точке $x=-3$ ряд сходится условно, а в остальных точках – абсолютно.

17.2. Равномерная сходимость функционального ряда

Пусть $S_n(x)$ – n-я частичная сумма, а $S(x)$ – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ (17.1). В соответствии с определением сходимости 16.1 этот ряд сходится при $x\in E$, если $\forall\varepsilon>0,\ \forall x\in E\ \exists N=N(\varepsilon,x):\forall n>N$

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon,$$

или, как отмечено в п. 2 разд. 16.1, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|<\varepsilon$.

Отметим, что здесь N зависит не только от ε, но и от x. Далее изучается вопрос: в каких случаях N можно выбрать не зависящим от x, т.е. единым для всех $x\in E$?

Определение 17.2. Функциональный ряд (17.1) называется *равномерно сходящимся* на множестве E, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\ \forall n>N$, $\forall x\in E$ выполняется неравенство

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon,\ \text{или}\ \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

Пример. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ на равномерную сходимость на интервале $(-1,\,1)$.

Решение

Этот ряд является геометрической прогрессией со знаменателем x и, следовательно, сходится при $x\in E=(-1,1)$. Если бы сходимость ряда на этом интервале была равномерной, то $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N=N(\varepsilon):\ \ \forall n>N$ и $\forall x\in(-1,1)$ $\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}x^k\right|<\varepsilon$ или, согласно формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, $\left|\frac{x^n}{1-x}\right|<\varepsilon$. Но это противоречит тому, что при фиксированном n предел $\lim\limits_{x\to1}\left|\frac{x^n}{1-x}\right|=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to-1}\left|\frac{x^n}{1-x}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow$ сходимость нашего ряда на интервале $(-1,\,1)$ не является равномерной.

Теорема 17.1 (**признак Вейерштрасса**). Пусть для $\forall x\in E$ и $n=1,2,\ldots$ $|\,u_n(x)\,|\le c_n$, где c_n – некоторые неотрицательные числа, причем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n \tag{17.2}$$

сходится. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ (17.1) сходится на множестве E равномерно.

▲ Из неравенства $|\,u_n(x)\,|\le c_n$ и сходимости ряда (17.2) следует (см. теорему сравнения 16.5) абсолютная сходимость ряда (17.1) для $\forall x\in E$.

Переходя в неравенстве $\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} c_k$ к пределу при $m \to \infty$, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k.$$

Нам надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N, \forall x \in E$ $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд (17.2) сходится, то согласно определению сходимости 16.1 $\exists N : \forall n > N$ $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \varepsilon$. Тогда $\forall n > N, \ \forall x \in E$ $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon$. ■

Пример. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ равномерно сходится на любом отрезке $[-1+\delta, 1-\delta]$, где $\delta \in (0,1)$.

Решение

$\forall x \in [-1+\delta, 1-\delta]$ выполняется неравенство ($|x^n| \le (1-\delta)^n$), ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^n$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $(1-\delta) \in (0,1)$ и нужный нам факт сразу следует из теоремы 17.1.

17.3. Свойства равномерно сходящихся рядов

Для конечных сумм, если каждое слагаемое — непрерывная функция (в точке или на некотором множестве), то сумма этих слагаемых также непрерывная (в точке или на множестве) функция, интеграл от суммы (интегрируемых слагаемых) равен сумме интегралов, а производная суммы (дифференцируемых слагаемых) равна сумме производных. Перенесение этих свойств на ряды, т.е. на бесконечные суммы, возможно только при определенных условиях.

Пример. Исследовать на непрерывность сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

Решение

Каждый член этого ряда непрерывен для всех *x*. При $x \ne 0$ ряд сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{1+x^2} < 1$, и сумма его

$S(x) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$. При $x = 0$ все члены ряда равны 0 и, следовательно, $S(0) = 0$. Таким образом, сумма ряда

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{при } x \ne 0; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Но эта функция имеет разрыв в точке 0: $\lim_{x \to 0} S(x) = 1 \ne S(0)$.

Теорема 17.2 (о непрерывности суммы ряда). Пусть функции $u_n(x)$ непрерывны на некотором множестве *E* (таком, что для функций, заданных на *E*, определено понятие непрерывности $\lim_{x \to x_0} u_n(x) = u_n(x_0)$), и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (17.1) сходится на множестве *E* равномерно. Тогда сумма этого ряда $S(x)$ непрерывна на множестве *E*.

▲ Пусть $x_0 \in E$. Надо доказать, что $\lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$, т.е. что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall x, |x - x_0| < \delta \ (|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд (17.1) равномерно сходится на *E*, то $\exists N$: $\forall n > N, \ \forall x \in E$ будет выполняться неравенство

$$\left(|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\right) \tag{17.3}$$

(здесь, как обычно, $S_n(x)$ — *n*-я частичная сумма ряда (17.1)). Зафиксируем произвольное $n > N$. Функция $S_n(x)$ непрерывна в точке x_0 (как конечная сумма непрерывных в этой точке слагаемых), поэтому $\exists \delta > 0: \ \forall x, |x - x_0| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\left(|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\right). \tag{17.4}$$

Тогда $\forall x, |x - x_0| < \delta$ имеем

$$|S(x) - S(x_0)| = \left|[S(x) - S_n(x)] + [S_n(x) - S_n(x_0)] + [S_n(x_0) - S(x_0)]\right| \le$$

$$\le |S_n(x) - S(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|.$$

Первое и третье слагаемые в последней сумме будут меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, в силу условия (17.3) (для третьего слагаемого — в точке $x = x_0$), а второе слагаемое в этой сумме будет меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, в силу условия (17.4), поэтому $\forall x, |x - x_0| < \delta \ \left(|S(x) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\right)$. ■

Пример. Показать, что при $\alpha > 1$ функция $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ непрерывна на всей прямой.

Решение

Утверждение следует из того, что члены этого ряда непрерывны для всех x, и ряд на всей прямой равномерно сходится по признаку Вейерштрасса: $\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{n^{\alpha}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ сходится.

Теорема 17.3 (**о почленном интегрировании ряда**). Пусть функции $u_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (17.1) сходится на отрезке $[a, b]$ равномерно, и его сумма равна $S(x)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx \tag{17.5}$$

сходится, и его сумма равна $\int\limits_a^b S(x)dx$ (интегралы $\int\limits_a^b u_n(x)dx$ и $\int\limits_a^b S(x)dx$ существуют в силу непрерывности $u_n(x)$ и $S(x)$, последнее следует из теоремы 17.2).

Если использовать запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$, то теорема означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx,$$

т.е. действительно дает законность почленного интегрирования ряда.

▲ Если $S_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда (17.1), то n-я частичная сумма ряда (17.5)

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)dx = \int_a^b S_n(x)dx.$$

Надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b S_n(x)dx = \int\limits_a^b S(x)\,dx$, т.е. что

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N$ будут выполняться

$$\left(\left|\int_a^b S_n(x)dx - \int_a^b S(x)dx\right| = \left|\int_a^b \left[S_n(x) - S(x)\right]dx\right| < \varepsilon\right).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд (17.1) равномерно сходится на $[a, b]$, то $\exists N: \forall n > N,\ \forall x \in [a,b]\ \left(|S_n(x) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$, тогда $\forall n > N\ \left(\left|\int\limits_a^b \left[S_n(x) - S(x)\right]dx\right| \le \int\limits_a^b |S_n(x) - S(x)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon\right)$. ■

Теорема 17.4 (**о почленном дифференцировании ряда**). Пусть функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (17.1) сходится для $\forall x \in [a,b]$, сумма его равна $S(x)$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \tag{17.6}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $S(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и сумма ряда (17.6) равна $S'(x)$.

При использовании записи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ теорема означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = S'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]',$$

т.е. действительно дает законность почленного дифференцирования ряда.

▲ Сумму ряда (17.6) обозначим $f(x)$. По теореме 17.2 функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Нам надо доказать, что $f(x) = S'(x)$.

Ряд (17.6) равномерно сходится на $[a, b]$, значит, он равномерно сходится на любом отрезке $[a, x]$, где $x \in [a, b]$. Тогда согласно теореме 17.3 из равенства $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) = f(t)$ следует равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt = \int_a^x f(t)dt,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(x) - u_n(a)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a) = \int_a^x f(t)dt.$$

Значит, $S(x) = S(a) + \int_a^x f(t)dt$. Отсюда на основании теоремы о производной определенного интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу 10.6 имеем

$$\exists S'(x) = 0 + \left(\int_a^x f(t)dt\right)_x' = 0 + f(x) = f(x). \quad \blacksquare$$

17.4. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда

Определение 17.3. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \tag{17.7}$$

где a_n – некоторые (в данной главе – действительные) коэффициенты. Степенным рядом также называют функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, который сводится к ряду (17.7) заменой $x - x_0 = t$.

Теорема 17.5 (Абеля). Если степенной ряд (17.7) сходится (не обязательно абсолютно) при некотором $x = x_0$, то он абсолютно сходится при любом x, таком, что $|x| < |x_0|$.

▲ Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, следовательно, по теореме 16.1 $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Но любая последовательность, имеющая конечный предел, ограничена, т.е. $\exists M > 0: \left|a_n x_0^n\right| \le M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Теперь рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $|x| < |x_0|$, и докажем, что он абсолютно сходится, т.е. что сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|. \tag{17.8}$$

Так как $\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ сходится (как геометрическая прогрессия со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$), то в соответствии с теоремой сравнения 16.5 ряд (17.8) сходится. ■

Следствие 1. Если степенной ряд (17.7) расходится при некотором $x = x_0$, то он расходится и при любом x, таком, что $|x| > |x_0|$ (так как если бы он сходился при одном таком x, то по теореме Абеля 17.5 он сходился бы при $x = x_0$, что противоречит условию).

Следствие 2. Существует число R, $0 \le R \le \infty$, такое, что ряд (17.7) абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$ (рис. 84).

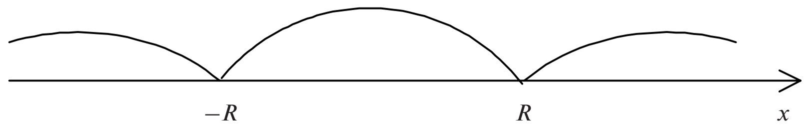


Рис. 84

▲ Рассмотрим множество $\left\{x : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ (17.7) сходится}\right\}$. Если это множество не является ограниченным сверху, то существуют сколь угодно большие x, при которых ряд (17.7) сходится, но тогда по теореме Абеля ряд (17.7) абсолютно сходится при всех x, т.е. $R = \infty$. Если же это множество ограничено сверху, то оно имеет верхнюю грань. Обозначим ее R.

Ряд (17.7) расходится при $\forall x : |x| > R$, так как если бы он сходился при одном таком x, то по теореме Абеля он сходился бы на отрезке $\left[-|x|, |x|\right]$, что противоречит определению верхней грани множества.

Ряд (17.7) абсолютно сходится при $\forall x : |x| < R$, так как согласно определению верхней грани множества $\exists x_0 \in (|x|, R)$: в точке x_0 ряд (17.7) сходится, значит, в соответствии с теоремой Абеля он абсолютно сходится в точке x. ■

Определение 17.4. Число R, определенное в следствии 2 называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Теорема 17.6 (нахождение радиуса сходимости). Пусть дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (17.7) с радиусом сходимости R. Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \tag{17.9}$$

если этот предел (конечный или бесконечный) существует, и

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{17.10}$$

если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

▲ Применим к ряду из абсолютных величин $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x|^n$ признак Даламбера или признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x|^{n+1}}{|a_n|\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x|.$$

При пределах (17.9) или (17.10), отличных от 0 и ∞, это означает, что ряд (17.7) абсолютно сходится при

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| < 1,\ |x| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| < 1,\ |x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

и расходится при

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| > 1,\ |x| > \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| > 1,\ |x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

а это и дают формулы (17.9) и (17.10) для радиуса сходимости.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \infty$ или $\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x|^{n+1}}{|a_n|\,|x|^n} = 0 < 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x|^n} = 0 < 1 \Rightarrow$ ряд абсолютно сходится для всех x, т.е. $R = \infty$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 0$ или $\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x|^{n+1}}{|a_n|\,|x|^n} = \infty > 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x|^n} = \infty > 1 \Rightarrow$ ряд расходится для всех $x \neq 0$, т.е. $R = 0$. ■

Примеры. Исследовать на сходимость степенные ряды.

Решение

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$.

Радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\,2^{n+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ряд абсолютно сходится при $|x| < \frac{1}{2}$ и расходится при $|x| > \frac{1}{2}$. При $x = \frac{1}{2}$ ряд превращается в $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, а этот ряд расходится $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$. При $x = -\frac{1}{2}$ ряд превращается в $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, а этот ряд условно сходится (ряд из модулей расходится, а сам ряд сходится по признаку Лейбница).

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{9^{n+1}}$.

Считать радиус сходимости по формуле (17.9) или (17.10) нельзя, так как $a_{2n+1} = 0,\ n = 0,1,2,\ldots$, т.е. пределы (17.9) и (17.10) не существуют. Применим к ряду признак Коши (можно применить и признак Даламбера):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{9^{n+1}}} = \frac{x^2}{\lim\limits_{n\to\infty} 9^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{x^2}{9} \Rightarrow$$

ряд абсолютно сходится при $\frac{x^2}{9} < 1$, $x^2 < 9$, $|x| < 3$ и расходится при $\frac{x^2}{9} > 1$, $|x| > 3 \Rightarrow R = 3$.

Тот же результат можно получить, произведя замену $x^2 = t$, найдя по формулам (17.9) и (17.10) радиус сходимости $\widetilde{R}$ полученного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{9^{n+1}}$: $\widetilde{R} = 9$ и найдя область сходимости $|t| < 9$, или $x^2 < 9$.

При $x = \pm 3$ ряд, естественно, расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости.

17.5. Равномерная сходимость степенного ряда

Теорема 17.7. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (17.7) равномерно сходится на любом отрезке $[-r, r]$ внутри интервала сходимости (т.е. при $r < R$).

▲ Пусть $r < R$. Для $\forall x \in [-r, r]$ выполняется неравенство $(|a_n x^n| \le |a_n| r^n)$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится, так как точка $x = r$ принадлежит интервалу сходимости ряда (17.7). Тогда на основании признака Вейерштрасса (см. теорему 17.1) ряд (17.7) равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$. ■

Следствие 1 (***непрерывность суммы степенного ряда***). Так как каждый член степенного ряда (17.7) является непрерывной функцией x и ряд (17.7) равномерно сходится на любом отрезке $[-r, r]$, где $r < R$, то сумма этого ряда $S(x)$ по теореме 17.2 непрерывна на любом отрезке $[-r, r]$, $r < R \Rightarrow S(x)$ непрерывна на интервале $(-R, R)$ (так как каждую точку этого интервала можно заключить в некоторый отрезок $[-r, r]$, $r < R$).

Следствие 2 (***почленное интегрирование степенного ряда***). Так как каждый член степенного ряда (17.7) является непрерывной функцией x, и ряд (17.7) равномерно сходится на отрезке $[0, x]$ (или $[x, 0]$), где $|x| < R$, то согласно теореме 17.3 этот ряд можно почленно проинтегрировать от 0 до x, т.е. из формулы $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ будет следовать формула $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \int_0^x S(t)dt$, или $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t)dt$, $|x| < R$. Из этого рассуждения также следует, что для степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \tag{17.11}$$

радиус сходимости $R_2 \ge R$.

Теорема 17.8 (**почленное дифференцирование степенного ряда**). Степенной ряд (17.7) можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости, т.е. из формулы $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ будет следовать формула $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = S'(x)$, $|x| < R$. Значит, для степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \tag{17.12}$$

радиус сходимости $R_3 \ge R$.

▲ Достаточно доказать, что формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = S'(x) \tag{17.13}$$

справедлива для $x \in [-r, r]$, где $r < R$ (так как любую точку интервала $(-R, R)$ можно заключить в некоторый такой отрезок).

Поскольку все члены степенного ряда непрерывно дифференцируемы и этот ряд сходится на отрезке $[-r, r]$, $r < R$, то согласно теореме 17.4 для доказательства справедливости равенства (17.13) при $x \in [-r, r]$, $r < R$, достаточно доказать равномерную сходимость ряда (17.12) на любом отрезке $[-r, r]$, $r < R$.

Пусть $\xi \in (r, R)$. Так как $\xi \in (-R, R)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ сходится, следовательно, по теореме 16.4 предел $\lim_{n\to\infty} a_n \xi^n = 0$. Но всякая последовательность, имеющая конечный предел, ограничена, т.е. $\exists M > 0$: $|a_n \xi^n| \le M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Далее используем признак Вейерштрасса (см. теорему 17.1). Для всех $x \in [-r, r]$ $|a_n n x^{n-1}| \le |a_n n r^{n-1}| = |a_n \xi^n| \frac{n r^{n-1}}{\xi^n} \le M \frac{n r^{n-1}}{\xi^n}$; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{n r^{n-1}}{\xi^n}$ сходится по признаку Даламбера, так как $\lim_{n\to\infty} \frac{M(n+1) r^n \xi^n}{\xi^{n+1} M n r^{n-1}} = \frac{r}{\xi} < 1$ по условию. Значит, ряд (17.12) равномерно сходится на отрезке $x \in [-r, r]$, где $r < R$. ■

Следствие. По теореме 17.8 радиус сходимости степенного ряда (17.12) $R_3 \ge R$. Но если почленно проинтегрировать степенной ряд (17.12) от 0 до x, то получим снова ряд (17.1) без первого члена с радиусом сходимости R. Согласно следствию 2 теоремы 17.7, при почленном интегрировании радиус сходимости уменьшиться не может, значит, $R \geq R_3 \Rightarrow R_3 = R$.

Далее, согласно следствию 2 теоремы 17.7 радиус сходимости ряда (17.11) $R_2 \geq R$. Но если почленно продифференцировать степенной ряд (17.11), то получим снова ряд (17.1) с радиусом сходимости R. Согласно теореме 17.8 при почленном дифференцировании радиус сходимости уменьшиться не может, значит, $R \geq R_2 \Rightarrow R_2 = R$.

Учитывая возможность повторного почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда, приходим к следующему *выводу*.

Степенной ряд с радиусом сходимости R можно почленно дифференцировать и интегрировать от 0 до x сколько угодно раз внутри интервала сходимости. При этом радиусы сходимости всех получаемых степенных рядов будут равны радиусу сходимости исходного ряда.

Примеры. Найти сумму степенного ряда при помощи почленного интегрирования и дифференцирования.

Решение

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = S(x)$.

По формуле (17.9), в которой a_n (коэффициент при x^n) равен $n + 1$, имеем $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$; при $|x| < 1$ проинтегрируем ряд почленно:

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{t^n}{n}\bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

(в последнем переходе использовалась формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом x и знаменателем, тоже равным x).

Теперь, дифференцируя обе части полученного равенства по x, имеем

$$\left[\int_0^x S(t)dt\right]'_x = S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

т.е. $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$.

2. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n = S(x). \qquad (17.14)$$

Радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{n(n-1)} = 1$; при $|x| < 1$ дифференцируем равенство (17.14) два раза почленно;

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n(n-1)} x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)}{n-1} x^{n-1}; \qquad (17.15)$$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{(n-1)} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2} = \frac{1}{1+x} \qquad (17.16)$$

(в последнем переходе использовалась формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем, равным $-x$).

Теперь два раза интегрируем обе части полученного равенства от 0 до x ($|x| < 1$):

$\int_0^x S''(t)dt = S'(t)\big|_0^x = S'(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\big|_0^x = \ln(1+x)$ (так как из формулы (17.15) видно, что $S'(0) = 0$);

$$\int_0^x S'(t)dt = S(t)\big|_0^x = S(x) = \int_0^x \ln(1+t)dt = t\ln(1+t)\big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{t+1}dt =$$

$$= x\ln(1+x) - \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = x\ln(1+x) - x + \ln(1+t)\big|_0^x = x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)$$

(из формулы (17.14) видно, что $S(0) = 0$), т.е. $S(x) = x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1)$.

Пусть теперь дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Как уже отмечалось, после замены $x - x_0 = t$ он превращается в обычный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, для которого справедливы все полученные выше результаты. Значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится абсолютно при $|t| = |x - x_0| < R$ (где R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$), т.е. при $-R < x - x_0 < R$, или $x_0 - R < x < x_0 + R$, и расходится при $|t| = |x - x_0| > R$, т.е. при $x < x_0 - R$ и $x > x_0 + R$. Этот ряд равномерно сходится при $|t| = |x - x_0| \leq r$, где r – любое число, меньшее, чем R, т.е. аналогично предыдущему при $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, и его можно почленно дифференцировать и интегрировать от x_0 до x (при

$x = x_0 + t \quad \int\limits_0^t \dots dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+t} \dots dx = \int\limits_{x_0}^{x} \dots dx$) сколько угодно раз с сохранением области сходимости.

17.6. Разложение функций в степенные ряды

В этом разделе рассмотрим возможность разложения функции в степенной ряд, т.е. представления ее в виде суммы степенного ряда. Пусть такое представление возможно:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R. \qquad (17.17)$$

Используя возможность почленного дифференцирования степенного ряда, продифференцируем обе части равенства (17.17) k раз, $k = 1, 2, \dots$ Учитывая, что производная постоянной равна 0, получим

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x - x_0)^{n-2}, \dots,$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(x - x_0)^{n-k}, |x - x_0| < R. \quad (17.18)$$

Положим, что в формуле (17.18) $x = x_0$. При этом все слагаемые в правой части, кроме первого, в котором $n = k$, обратятся в 0, и мы получим $f^{(k)}(x_0) = a_k k!$; $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Таким образом, если разложение (17.17) возможно, то его коэффициенты обязательно определяются по формулам

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \dots \qquad (17.19)$$

То есть разложение функции в степенной ряд единственно и имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \qquad (17.20)$$

Ряд в правой части этой формулы называется рядом Тейлора для функции $f(x)$. В частности, при $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \qquad (17.21)$$

Однако наличие у функции всех производных и сходимость ее ряда Тейлора еще не являются достаточными условиями справедливости разложения (17.20), что показывает следующий пример.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

Решение

При $x \neq 0$ эта функция, очевидно, имеет производные любого порядка. Будем искать ее производные в точках $x \neq 0$ и 0:

$$f'(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3};$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{-1}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{x^2}}{-e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0;$$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{n \to 0} \frac{2\, e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{x^{-4}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 2 \lim_{x \to 0} \frac{-4x^{-5}}{-e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}} =$$

$$= 4 \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 4 \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{x^3}}{-e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}} = 0.$$

Аналогичным образом можно доказать, что $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 3, 4, 5, \dots$ Таким образом, все члены ряда Тейлора при $x_0 = 0$ для этой функции равны 0, но тогда сумма ряда Тейлора тоже равна 0 и тем самым (при $x \neq 0$) не равна самой функции.

Теорема 17.9. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности $U(x_0)$ производные любого порядка. Тогда для справедливости разложения (17.20) в этой окрестности необходимо и достаточно, чтобы для $\forall x \in U(x_0)$ $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x) = 0$, где $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ — остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа (c — промежуточная точка между x_0 и x).

▲ Разложим функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности $U(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), \tag{17.22}$$

и перейдем в этой формуле к пределу при $n \to \infty$.

Пусть справедлива формула (17.20). Тогда из (17.22)

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \text{ и } \exists \lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) -$$

$$-\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \overset{(17.20)}{=} 0.$$

Пусть, теперь $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$ Тогда из (17.22)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - r_n(x) \text{ и}$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} r_n(x) = f(x) - 0 = f(x).$$

Значит, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x),$ т.е. справедлива формула (17.20). ■

Замечание. Естественно, теорема справедлива и при других формах записи остаточного члена формулы Тейлора.

Проверка выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ на практике затруднительна, поэтому приведем следующее достаточное условие возможности разложения функции в ряд Тейлора.

Теорема 17.10. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности $U(x_0)$ производные любого порядка и пусть $\exists M > 0$: $\forall x \in U(x_0)$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ $\left(\left|f^{(n)}(x)\right| \le M\right)$. Тогда для $\forall x \in U(x_0)$ справедливо разложение (17.20).

▲ Согласно теореме 17.9, нам достаточно доказать, что для $\forall x \in U(x_0)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0, c \text{ между } x_0 \text{ и } x\right)$.

По условию теоремы $\left|r_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$. Этот ряд сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M\left|x-x_0\right|^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\,M\left|x-x_0\right|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|}{n+2} = 0 < 1.$$

Отсюда, по теореме 16.4, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} = 0$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} \left|r_n(x)\right| = 0$. ■

Примеры разложений функций в ряд Тейлора при $x_0 = 0$.

1. Функция $f(x) = e^x$. Тогда $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1, n = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{17.23}$$

Из теоремы 17.10 следует, что это разложение справедливо на любом отрезке $[-H, H]$, так как на этом отрезке $\left|f^{(n)}(x)\right| \le e^H$, $n = 0,1,2,\ldots$, значит, это разложение справедливо на всей прямой.

2. Функция $f(x) = \sin x$. Тогда $f(0) = 0, f'(x) = \cos x, f'(0) = 1,$ $f''(x) = -\sin x,$ $f''(0) = 0,$ $f'''(x) = -\cos x,$ $f'''(0) = -1,$ $f^{IV}(x) = \sin x, \ldots \Rightarrow$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{17.24}$$

Разложение справедливо на всей прямой, так как для всех x $\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1$, $n = 0,1,2,\ldots$

3. Функция $f(x) = \cos x.$

Продифференцируем обе части полученного разложения (17.24) (степенной ряд в правой его части можно дифференцировать почленно по всей прямой):

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} x^{2n} \Rightarrow$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (17.25)$$

4. Функция $f(x) = \ln(1+x)$. Проверка выполнения условий теоремы 17.10 здесь довольно сложна, поэтому поступим по-другому: рассмотрим производную этой функции $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.

Правая часть этой формулы является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = -x$, следовательно, при $|q| < 1$, т.е. при $x \in (-1, 1)$, $f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ (пишем саму прогрессию).

Интегрируем обе части этого равенства от 0 до x (степенной ряд в правой части интегрируем почленно):

$$\int_0^x f'(t)\,dt = f(t)\Big|_0^x = \ln(1+x) = t\Big|_0^x - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \frac{t^3}{3}\Big|_0^x - \frac{t^4}{4}\Big|_0^x + \ldots, \text{ т.е.}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},\ x \in (-1,1). \qquad (17.26)$$

5. Функция $f(x) = (1+x)^\alpha$ (*биномиальный ряд*). Тогда $f(0) = 1$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f'(0) = \alpha$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1), \ldots,$ $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$.

Следовательно, ряд Тейлора для функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ имеет вид

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \qquad (17.27)$$

Ряд (17.27) называется *биномиальным рядом*. Радиус его сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\,\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1.$$

Поскольку здесь трудно проверить выполнение условий теоремы 17.10, будем доказывать возможность разложения совершенно другим способом. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases}(1+x)y' = \alpha y;\\ y(0) = 1.\end{cases} \qquad (17.28)$$

Пусть решение этой задачи $y = y(x)$ существует. Тогда

$$(1+x)\frac{dy(x)}{dx} = \alpha y(x),$$

что при $x \neq -1$ и $y(x) \neq 0$ равносильно уравнению $\frac{dy(x)}{y(x)} = \alpha\frac{dx}{1+x}$. Последнее равенство есть равенство дифференциалов двух функций. Для такого равенства необходимо и достаточно, чтобы сами функции, т.е. интегралы от их дифференциалов, отличались на постоянную:

$$\int \frac{dy(x)}{y(x)} = \alpha\int\frac{dx}{1+x} + c_1;$$

$$\ln|y(x)| = \alpha\ln|1+x| + \ln|c_2|;\ \ln|y(x)| = \ln\left|c_2(1+x)^\alpha\right|;$$

$$y(x) = \pm c_2(1+x)^\alpha;\quad y(x) = c(1+x)^\alpha.$$

Для нахождения постоянной c используем начальное условие $y(0) = 1$: $y(0) = c = 1 \Rightarrow y(x) = (1+x)^\alpha$.

Теперь проверим, что эта функция действительно является решением задачи Коши (17.28): для $\forall x \in R$ $(1+x)\alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha(1+x)^\alpha$; $(1+x)^\alpha\Big|_{x=0} = 1$.

Таким образом, задача Коши (17.28) имеет единственное решение $y(x) = (1+x)^\alpha$.

Теперь докажем, что при $x \in (-1, 1)$ сумма биномиального ряда (17.27) также является решением этой задачи Коши. Для этого сначала подставим функцию (17.27) в уравнение $(1+x)y' = \alpha y$ (при этом ряд мы будем дифференцировать почленно, что, как и для всякого степенного ряда, возможно внутри интервала сходимости):

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

Надо проверить выполнение равенства

$$(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}=\alpha+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^{n},$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n}=$$

$$=\alpha+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}.$$

В первой сумме левой части этой формулы обозначим $n-1=k$, а затем (так как индекс суммирования можно обозначать любой буквой) вместо k снова напишем n:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n}=$$

$$=\alpha+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}.$$

Чтобы доказать справедливость последнего равенства, достаточно проверить, что в нем совпадают коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа.

Коэффициент при x^0: $\alpha=\alpha$.

Коэффициент при x^n, $n=1,2,\ldots$:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{(n-1)!}=\alpha\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!};$$

$$\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)+\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)n=\alpha^2(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1).$$

Вынося в левой части за скобку $\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$, имеем

$$\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(\alpha-n+n)=\alpha^2(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1),$$

что действительно верно.

Теперь подставим функцию (17.27) в начальное условие:

$$\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}\right]\Bigg|_{x=0}=1.$$

В соответствии с теоремой 14.1 задача Коши (17.28) имеет единственное решение, поэтому функция $(1+x)^{\alpha}$ и сумма биномиального ряда (17.27) должны совпадать, следовательно,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots,\quad x\in(-1,1). \qquad (17.29)$$

Замечание. При натуральных α, $\alpha=n$, $f^{(n)}(x)=0$ при $n=\alpha+1,\ \alpha+2,\ldots$, следовательно, биноминальный ряд превращается в конечную сумму, содержащую $(\alpha+1)$ слагаемое, а равенство (17.29) превращается в формулу бинома Ньютона (естественно, при этом $x\in R$).

Из разложений (17.23)–(17.26) и (17.29) можно получать и другие разложения.

17.7. Применение разложений в степенные ряды для решения дифференциальных уравнений

Изучение в предыдущем разделе биномиального ряда уже показало возможность применения разложений функций в степенные ряды для решения дифференциальных уравнений. Приведем еще один подобный пример.

Пример. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y''=2xy'+4y;\\ y(0)=0;\\ y'(0)=1.\end{cases}$

Решение

Уравнение линейно, но его коэффициенты не являются постоянными числами, поэтому применение изложенной выше теории уже не является возможным. Будем искать решение y в виде суммы степенного ряда:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Подставим в эту формулу $x = 0$: $y(0) = a_0$; так как по условию $y(0) = 0$, то $a_0 = 0$.

Продифференцируем степенной ряд почленно: $y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$; подставим в эту формулу $x = 0$: $y'(0) = a_1$; так как по условию $y'(0) = 1$, то $a_1 = 1$.

Еще раз дифференцируем почленно степенной ряд: $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$. Подставим найденные производные в исходное дифференциальное уравнение:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

В ряду в левой части обозначим $n - 2$ через k, а затем вместо k снова напишем n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Для выполнения этого равенства достаточно совпадения коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой части. Приравняем эти коэффициенты.

Коэффициент при x^0: $2a_2 = 4a_0$; $a_2 = 2a_0 = 0$.

Коэффициент при x^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = 2na_n + 4a_n = 2(n+2)a_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)a_{n+2} = 2a_n \Rightarrow a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+1}. \qquad (17.30)$$

Так как $a_2 = 0$, то из этой формулы определяем $a_4 = 0$, $a_6 = 0, \ldots$, т.е. $a_{2n} = 0$; из этой же формулы, учитывая, что $a_1 = 1$, имеем:

$$a_3 = 1,\ a_5 = \frac{2a_3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!},\ a_7 = \frac{2a_5}{6} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!},\ a_9 = \frac{2a_7}{8} = \frac{2\cdot\frac{1}{3!}}{8} = \frac{1}{4!}, \ldots \Rightarrow a_{2n+1} = \frac{1}{n!}.$$

Докажем этот факт методом математической индукции. При $n = 1$ формула верна; пусть она верна для некоторого n, т.е. $a_{2n+1} = \frac{1}{n!}$. Тогда, учитывая (17.30), получаем, что

$$a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = \frac{2a_{2n+1}}{2n+2} = \frac{2\frac{1}{n!}}{2(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!},$$

следовательно, формула верна и для $n+1$.

Подставляя найденные коэффициенты в степенной ряд $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, имеем:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n \overset{(17.23)}{=} xe^{x^2}.$$

Эта функция и является решением исходной задачи Коши.

Определение 17.5. Уравнением Бесселя называется дифференциальное уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad (17.31)$$

где ν — некоторый параметр (не обязательно целый). Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}, \qquad (17.32)$$

где r — некоторое число.

Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ имеет некоторый радиус сходимости R (который будет найден ниже), поэтому в области $(-R; R)$ этот ряд можно дифференцировать почленно. Тогда в этой области можно почленно дифференцировать и ряд (17.32):

$$y' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}\right)' = \left(x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' =$$

$$= rx^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k) x^{r+k-1}.$$

Аналогично $y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)(r+k-1)x^{r+k-2}$. Подставляя выражения y' и y'' в уравнение (17.31), имеем:

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)(r+k-1)x^{r+k-2} + x\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)x^{r+k-1} +$$

$$+ x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0,$$

или

$$x^r\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k(r+k)(r+k-1)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(r+k)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2}-\sum_{k=0}^{\infty}a_k\nu^2x^k\right)=0,$$

или, обозначая в третьей сумме $k+2$ как новое k,

$$x^r\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left((r+k)(r+k-1)+(r+k)-\nu^2\right)x^k+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^k\right)=0.$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left((r+k)^2-\nu^2\right)x^k+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^k=0. \tag{17.33}$$

Последний степенной ряд на интервале $(-R;\ R)$ тождественно равен 0 тогда, и только тогда, когда коэффициенты при всех степенях x в нем будут равны 0. Приравняем к 0 коэффициент при x^0 $(k=0)$: $a_0(r^2-\nu^2)=0$. Предполагая, что $a_0\neq 0$, отсюда имеем $r=\pm\nu$.

Рассмотрим случай $r=\nu$. В этом случае формула (17.33) приобретает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(2\nu k+k^2\right)x^k+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^k=0,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kk\left(2\nu+k\right)x^k+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^k=0. \tag{17.34}$$

Приравняем к 0 коэффициент при x^1 $(k=1)$: $a_1(2\nu+1)=0$, отсюда $\left(\text{при } \nu\neq-\frac{1}{2}\right)$ находим, что $a_1=0$. Теперь приравняем к 0 коэффициенты при всех остальных степенях x:

$$a_kk\,(2\nu+k)+a_{k-2}=0,\ k=2,3,\ldots \tag{17.35}$$

При k нечетных и четных отсюда соответственно получаем:

$$\begin{cases}3(2\nu+3)a_3+a_1=0,\\5(2\nu+5)a_5+a_3=0,\\7(2\nu+7)a_7+a_5=0,\\\ldots\ldots\end{cases}\qquad\begin{cases}2(2\nu+2)a_2+a_0=0,\\4(2\nu+4)a_4+a_2=0,\\6(2\nu+6)a_6+a_4=0.\\\ldots\ldots\end{cases} \tag{17.36}$$

Так как $a_1=0$, то из первой системы, при ν, не являющемся отрицательным, полуцелым, получаем: $a_3=0,\ a_5=0,\ a_7=0,\ \ldots$, значит, при $k=0,1,2,\ldots$

$$a_{2k+1}=0; \tag{17.37}$$

для отрицательных, полуцелых ν просто берем $a_{2k+1}=0$.

Если во второй системе произвольно задать a_0, то $a_2, a_4, a_6,\ldots$ определяются однозначно (при $\nu\neq-1,-2,-3,\ldots$). Пусть $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ — гамма-функция. Положим, что

$$a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}. \tag{17.38}$$

Методом математической индукции докажем, что тогда

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{2^{\nu+2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{17.39}$$

Формула (17.39) верна при $k=0$ (в этом случае она имеет вид (17.38)).

Пусть (17.39) верна при некотором k, покажем, что тогда она будет верна и при $k+1$. Используем (17.35) с заменой $k-2$ на $2k$: $(2k+2)\,(2\nu+2k+2)a_{2k+2}+a_{2k}=0$, и формулу приведения для гамма-функции $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$. В результате получаем:

$$a_{2(k+1)}=a_{2k+2}=-\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2\nu+2k+2)}=-\frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k}k!\Gamma(\nu+k+1)(2k+2)(2\nu+2k+2)}=$$

$$=-\frac{(-1)^{k+1}}{2^{\nu+2k+2}k!(k+1)(\nu+k+1)\Gamma(\nu+k+1)}=-\frac{(-1)^{k+1}}{2^{\nu+2(k+1)}(k+1)!\Gamma(\nu+k+2)},$$

что и требовалось найти.

Подставляя (17.37) и (17.39) в ряд (17.32), получаем решение уравнения (17.31), которое обозначим $J_\nu(x)$ $(\nu\neq-1,-2,-3,\ldots)$:

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\nu+n}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{\nu+2k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{\nu+2k}}{2^{\nu+2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{17.40}$$

Ряд в правой части формулы (17.40) абсолютно сходится для всех x, так как применение признака Даламбера к ряду из модулей с учетом формулы приведения дает

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}x^{\nu+2k+2}2^{\nu+2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}{2^{\nu+2k+2}(k+1)!\Gamma(\nu+k+2)(-1)^k x^{\nu+2k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^2}{2^2(k+1)(\nu+k+1)}\right|=0<1.$$

Определение 17.6. Функция $J_\nu(x)$ называется функцией Бесселя, или бесселевой функцией первого рода с индексом ν. Если $\nu=n$ — целое, неотрицательное, то

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}, \tag{17.41}$$

в частности

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k}}{(k!)^2}. \tag{17.42}$$

Бесселевы функции первого рода, вообще говоря, являются новыми функциями, не выражающимися через элементарные. Исключение составляют бесселевы функции с полуцелым индексом. Например, так как

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\overset{(13.3)}{=}\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\overset{(13.8)}{=}\frac{(2k+1)}{2}\frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}=\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

то

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{\frac{1}{2}+2k}}{k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{\frac{1}{2}+2k}2^{k+1}}{2^{\frac{1}{2}+2k}k!(2k+1)!!\sqrt{\pi}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{1+2k}\sqrt{2}}{2^k k!(2k+1)!!\sqrt{\pi x}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$ Аналогично $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$

Теперь найдем решение уравнения Бесселя в случае нецелого ν. До сих пор мы рассматривали случай, когда $r=\nu$. Для $r=-\nu$, рассуждая аналогично, получим еще одно решение уравнения Бесселя:

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{-\nu+2k}}{k!\Gamma(-\nu+k+1)},\ \nu\neq 1,2,3,\ldots \tag{17.43}$$

Функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы (Если бы они были линейно зависимы, то $c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x)=0$ для всех x при хотя бы одном коэффициенте c_i, отличном от 0. Тогда, поделив последнее равенство на этот ненулевой коэффициент получили бы, что $J_{-\nu}(x)=$ $=k\,J_\nu(x)$ или $J_\nu(x)=k\,J_{-\nu}(x)$, а это явно не так, ибо ряд для $J_\nu(x)$ содержит x в степенях ν; $\nu+2$; $\nu+4$;..., а ряд для $J_{-\nu}(x)$ содержит x в степенях $-\nu$; $-\nu+2$; $-\nu+4$;...) Значит, эти функции образуют фундаментальную систему решений уравнения (17.31) и общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$y=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x). \tag{17.44}$$

В случае целого ν, подставить в (17.40) $\nu=-n$ нельзя, так как гамма-функция не определена в нуле и в целых отрицательных точках. Но $\lim\limits_{\alpha\to -n}\Gamma(\alpha)=0$, поэтому если положить, что $\frac{1}{\Gamma(-n)}=0$, $n=0,1,2,\ldots$, то ряд (17.40) имеет смысл и дает следующее равенство:

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{-n+2k}}{k!\Gamma(-n+k+1)}=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{-n+2k}}{k!(-n+k)!}\underset{l=k-n}{\overset{k=l+n}{=}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^l(x/2)^{n+2l}}{(l+n)!l!}\overset{(17.41)}{=}(-1)^nJ_n(x).$$

Эта функция тоже удовлетворяет уравнению Бесселя, однако функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ уже будут линейно зависимыми и (17.44) не будет общим решением уравнения (17.31). В этом случае общее решение указанного уравнения можно получить, введя так называемые бесселевы функции второго рода, что здесь не рассматривается.

18. РЯДЫ ФУРЬЕ

18.1. Ортогональные и ортонормированные системы функций

Определение 18.1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *ортогональными* на отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$

Определение 18.2. Система функций $f_1(x),\ f_2(x),\ldots$ называется *ортогональной* на отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b f_m(x)f_n(x)dx = 0,\ \ m \neq n$, т.е. все функции системы ортогональны друг другу.

Определение 18.3. Система функций $f_1(x),\ f_2(x),\ldots$ называется *ортонормированной* на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Данные определения аналогичны определениям ортогональных и ортонормированных систем элементов евклидова пространства, в частности векторов двух- или трехмерного пространства; роль скалярного произведения двух функций при этом выполняет интеграл от их произведения. Естественно, предполагается, что все такие интегралы существуют.

Докажем, что система функций 1, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$,..., $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$,... ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Пусть $m,\ n = 0,1,2,\ldots$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ \ m \neq n$$

(так как $\sin \pi k = 0,\ k \in Z$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, m \neq n$$

(по той же причине);

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx =$$

$$= -\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ \ m \neq n$$

(так как функция $\cos x$ — четная);
если же $m = n$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nx\, dx = -\frac{1}{4m}\cos 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(по той же причине);
функция 1 тоже входит в наши вычисления, так как $1 = \cos mx\big|_{m=0}$.

Теперь посмотрим, не является ли наша система функций ортонормированной, т.е. рассмотрим случай, когда в первых двух интегралах $m = n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2mx}{2} dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\cdot 2m}\underbrace{\sin 2mx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} = \pi,$$

$m = 1,2,\ldots;$

$$m = 0:\ \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2} dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\cdot 2m}\underbrace{\sin 2mx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} = \pi,$$

$m = 1,2,\ldots$

Отсюда следует, что наша система ортонормированной не является. Проверим теперь, что система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ \ m = 1,2,\ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx,\ \ m = 1,2,\ldots$$

является ортонормированной на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для этого рассмотрим следующие интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx = 1,\ \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx\right)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\right)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mxdx = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1.$$

18.2. Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе функций. Тригонометрический ряд Фурье для функций с периодом 2π

Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная на отрезке $[a,\ b]$ система функций. Установим возможно ли представить заданную функцию $f(x)$ в виде разложения по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$, т.е. в виде суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$. Пусть такое представление возможно:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x). \qquad (18.1)$$

Умножим равенство (18.1) на $\varphi_m(x)$ и проинтегрируем от a до b. При этом предположим, что все приведенные ниже интегралы существуют и ряд возможно интегрировать почленно. Имеем

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

Так как система функций $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормированная, то все интегралы в правой части этого равенства, в которых $n \neq m$, будут равны 0; тот интеграл, в котором $n = m$, будет равен 1. Тогда из всей суммы в правой части останется только одно слагаемое и $c_m = \int\limits_a^b f(x)\varphi_m(x)dx.$ Заменяя в этом равенстве m на n, получаем, что если функция $f(x)$ представлена в виде разложения (18.1), то коэффициенты этого разложения обязательно ищутся по формулам

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx,\ \ n = 1,\ 2,\ldots \qquad (18.2)$$

Определение 18.4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ с коэффициентами (18.2) называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. Числа c_n называются коэффициентами Фурье этой функции.

Теперь обратимся к так называемому тригонометрическому ряду Фурье, т.е. ряду по ортонормированной на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ системе функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ \ m = 1,2,\ldots,\ \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx,\ \ m = 1,2,\ldots$

Функция $f(x)$ будет предполагаться абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, т.е. такой, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx$ существует.

Если обозначить в представлении (18.1) коэффициенты при косинусах и синусах через c_n и $\tilde{c}_n$ соответственно, то это представление приобретает вид:

$$f(x) = c_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx + \tilde{c}_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right).$$

Положим, что

$$c_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{a_0}{2};\ \ c_n\frac{1}{\sqrt{\pi}} = a_n,\ \tilde{c}_n\frac{1}{\sqrt{\pi}} = b_n,\ \ n = 1,2,\ldots \qquad (18.3)$$

Тогда последняя формула примет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right). \qquad (18.4)$$

Из (18.2) следует, что коэффициенты этого разложения можно определить по формулам

$$a_0 = \frac{2c_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ \ n = 1,2,\ldots;$$

$$b_n = \frac{\tilde{c}_n}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,\ \ n = 1,2,\ldots\ .$$

Таким образом,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ \ n=0,1,2...;\ b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ \ n=1,2,... \qquad (18.5)$$

(смысл обозначения первого коэффициента как $\frac{a_0}{2}$ состоит в том, что a_0 находится по той же формуле, что и a_n, $n=1, 2,...$; интегралы существуют, так как $|f(x)\cos nx|\le|f(x)|$ и $|f(x)\sin nx|\le|f(x)|$, а $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ абсолютно интегрируема).

Определение 18.5. Ряд в правой части формулы (18.4) с коэффициентами (18.5) (независимо от того, сходится ли он и чему равна его сумма) называется *тригонометрическим рядом Фурье* функции $f(x)$. Числа a_n и b_n при этом называются коэффициентами Фурье этой функции.

Теперь обратимся к возможности разложения функции в ряд Фурье. Отметим, что если представление (18.4) возможно, то $f(x)$ является периодической функцией с периодом 2π : $f(x+2\pi)=f(x)$, $x\in R$ (так как этот период имеют все функции cos nx и sin nx).

Для того чтобы сформулировать теорему о достаточных условиях возможности разложения функции в ряд Фурье, дадим сначала следующее определение.

Определение 18.6. Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2,..., x_{n-1}$ на интервалы $(a,x_1),(x_1,x_2),...,(x_{n-1},b)$ так, что на каждом из этих интервалов функция будет монотонной, т.е. либо невозрастающей, либо неубывающей (рис. 85). Такая функция будет абсолютно интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Рис. 85

Теперь сформулируем теорему.

Теорема 18.1 (признак Дирихле – достаточные условия разложения функции в ряд Фурье). Пусть $y=f(x)$ – периодическая (с периодом 2π), кусочно-монотонная на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеющая на нем лишь конечное число точек разрыва (причем первого рода) функция. Сопоставим с ней ряд Фурье (~ это знак сопоставления):

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ \ n=0, 1, 2,...;\ \ b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ \ n=1, 2,...$

(как уже отмечено выше, эти интегралы существуют). Тогда наш ряд Фурье сходится во всех точках, причем сумма этого ряда равна

$$=\begin{cases} f(x) \text{ – в точках непрерывности функции } f; \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \text{ – в точках разрыва функции } f. \end{cases}$$

Последний случай изображен на рис. 86. Отметим, что выражение $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ дает и сумму ряда в точках непрерывности f, так как в этих точках

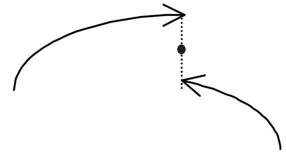


Рис. 86

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x).$$

Доказательство этой теоремы в силу его сложности и отсутствия достаточного для такого доказательства времени в курсе высшей математики технических вузов здесь не приводится.

Коэффициенты Фурье четных и нечетных функций

1. Пусть функция $y=f(x)$ четная, тогда (функция sin nx нечетная) согласно выводам разд. 10.5,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{нечетная}}dx=0,\ n=1, 2, 3,...,$$

так как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю;

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{четная}}dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\ n=0, 1, 2, ...,$$

по свойству интеграла от четной функции в симметричных пределах.

2. Пусть функция $y = f(x)$ нечетная, тогда (функция cos nx четная) согласно выводам разд. 10.5,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{нечетная}}dx = 0,\ n = 0, 1, 2, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{четная}}dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, ...,$$

по тем же причинам.

Таким образом, в формуле $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ для четной функции $b_n = 0$, т.е. четная функция раскладывается только по четным функциям cos nx; для нечетной функции $a_n = 0$, т.е. нечетная функция раскладывается только по нечетным функциям sin nx.

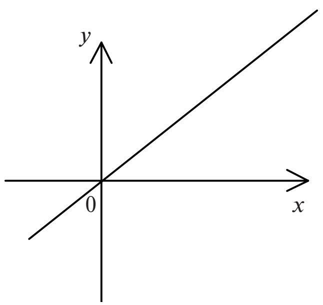


Рис. 87

Примеры.

1. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию $y = x$ (рис. 87).

Решение

Эта функция вообще не является периодической, поэтому рассмотрим новую периодическую (с периодом 2π) функцию $f(x)$, которая на отрезке $[-\pi, \pi]$ совпадает с данной (рис. 88).

Значения функции в точках разрыва первого рода $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, ...$ можно взять любыми. Эта функция удовлетворяет всем условиям нашей теоремы ($T = 2\pi$, возрастает на отрезке $[-\pi, \pi]$, разрывы первого рода в точках $\pm\pi$), следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье. Но при $x \in (-\pi, \pi)$ она совпадает с данной функцией $y = x$, тогда для $x \in (-\pi, \pi)$ получим разложение функции $y = x$.

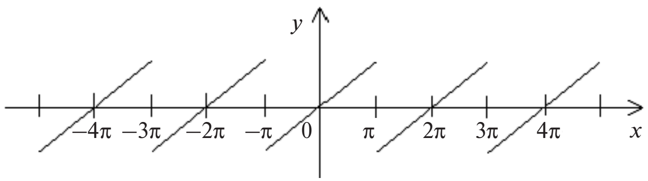


Рис. 88

Наша функция нечетная, значит,

$$a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, ...;\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin nx\,dx}_{dv};\ \sin nx\,dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \Rightarrow$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\pi\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n} + \frac{2}{\pi n^2}\underbrace{\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{0} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

$n = 1, 2, ..., \Rightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin\ nx.$

При этом согласно теореме 18.1 сумма ряда равна $f(x)$ в точках непрерывности f, т.е. при $x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, ...$, и $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$ в ее точках разрыва $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, ...$ (что, впрочем, видно и из самого ряда), тогда для $x \in (-\pi, \pi)$ выполняется равенство $f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx.$

Замечание. Положим, что в последнем равенстве $x = \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\underbrace{\sin\frac{\pi n}{2}}_{=0,\pm 1} = 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right];$$

отсюда имеем один из способов приближенного нахождения числа π: $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right).$

2. Разложить функцию (рис. 89)

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

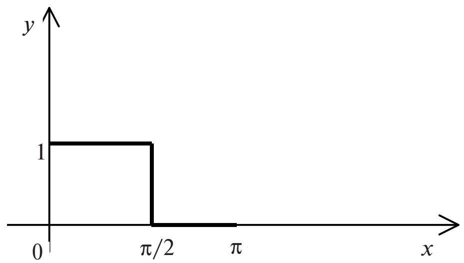


Рис. 89

в ряд Фурье на отрезке $[0, \pi]$ только по косинусам (значение функции в точке разрыва $\frac{\pi}{2}$ произвольно).

Рассмотрим новую четную периодическую ($T = 2\pi$) функцию $f_1(x)$, совпадающую на отрезке $[0, \pi]$ с данной (сначала отражаем исходный график относительно оси $0y$, а потом продолжаем периодически полученный график) (рис. 90).

Так как эта функция четная, то $b_n = 0,\ \ n = 1, 2, ...,$

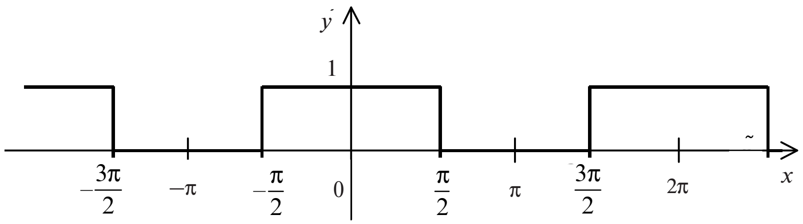


Рис. 90

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{четная}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,d(nx)=\frac{2}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2},\ n=1,\ 2,\ \ldots;$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}=1,\ \text{следовательно,}$$

$$f_1(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi n}{2}}_{\substack{=0\\ \text{при } n=2k}}\cdot\cos(nx)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)}\sin\frac{\pi(2k+1)}{2}\cos((2k+1)x).$$

По формуле приведения находим:

$$\sin\frac{\pi(2k+1)}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=\cos(\pi k)=(-1)^k,\ \ k=0,1,2\ldots$$

В соответствии с теоремой 18.1 функция $f(x)$ будет равна сумме ряда Фурье при $x\in[0,\pi]$, $x\neq\frac{\pi}{2}$. В точке $\frac{\pi}{2}$ эта сумма будет равна $\frac{1}{2}$. Если положить, что $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$, то равенство будет верно для всех $x\in[0,\pi]$:

$$f_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\cos((2k+1)x).$$

Замечание. Докажем, что для периодической функции с периодом T справедливо равенство $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_b^{b+T}f(x)dx$ для любых a и b, т.е. интегралы по любым отрезкам длиной в период совпадают:

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^{b}f(x)dx+\int_b^{b+T}f(x)dx+\underbrace{\int_{b+T}^{a+T}f(x)dx}_{x=t+T,\ t=x-T}=\int_a^{b}f(x)dx+\int_b^{b+T}f(x)dx+$$

$$+\int_b^{a}\underbrace{f(t+T)}_{=f(t)}dt=\int_a^{b}f(x)dx+\int_b^{b+T}f(x)dx-\int_a^{b}f(x)dx=\int_b^{b+T}f(x)dx.$$

Но

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos(nx)}_{\substack{\text{периодическая}\\ T=2\pi}}dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin(nx)}_{\substack{\text{периодическая}\\ T=2\pi}}dx,$$

следовательно, при вычислении коэффициентов Фурье периодической ($T=2\pi$) функции интегралы можно брать не обязательно от $-\pi$ до π, а по любому отрезку длиной 2π (иногда удобнее, например, от 0 до 2π.)

18.3. Тригонометрический ряд Фурье для функции с произвольным периодом 2l. Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть $y=f(x)$ – периодическая функция с периодом $2l$. Сделаем замену переменной: $t=x\frac{\pi}{l}\Rightarrow x=t\frac{l}{\pi}$ (если $-l\le x\le l$, то $-\pi\le t\le\pi$, т.е. при нашей замене $[-l,l]$ переходит в $[-\pi,\pi]$). Тогда $y=f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=g(t)$ – некоторая функция от t;

$$g(t+2\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)\overset{T=2l}{=}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=g(t)\Rightarrow$$

$g(t)$ – периодическая функция с периодом уже 2π.

Пусть $g(t)$ такова, что ее можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x)=g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt \overset{t=\frac{\pi}{l}x}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ n = 0,1,2\ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,dt \overset{t=\frac{\pi}{l}x}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ n = 1,2\ldots$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \tag{18.6}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, n = 0,1,2\ldots,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, n = 1,2\ldots, \tag{18.7}$$

Легко видеть, что все факты, которые имели место для рядов Фурье периодических функций с периодом 2π, переносятся и на ряды Фурье периодических функций с произвольным периодом $2l$ (см. теорему 18.1 о достаточных условиях разложимости функции в ряд Фурье, замечание о коэффициентах Фурье четной или нечетной функций и др.).

Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом 2π, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Сопоставим с ней ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Используя формулы $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ и собирая коэффициенты при e^{inx} и e^{-inx}, имеем

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)e^{inx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)e^{-inx}\right].$$

Обозначим $\frac{a_0}{2} = c_0$, $\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n i}{2} = c_n$, $\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n i}{2} = c_{-n}$ (заметим, кстати, что $c_{-n} = \bar{c}_n$). Тогда

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) \overset{(18.5)}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - i\sin nx]\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) \overset{(18.5)}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx + i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx + i\sin nx]\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx,\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Объединяя две последние формулы, получаем

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{18.8}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{18.9}$$

Это и есть ряд Фурье в комплексной форме. Так как этот ряд получился путем преобразования обычного ряда Фурье, то на него переносится теорема 18.1.

Аналогично если период функции равен $2l$, то

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi nx}{l}}, \tag{18.10}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{\pi nx}{l}}dx,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{18.11}$$

18.4. Средняя квадратичная погрешность. Минимальное свойство коэффициентов Фурье

Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная ортонормированная система функций, а $f(x)$ такова, что $\int_a^b f^2(x)dx$ существует.

Рассмотрим $T_N(x)=\sum_{n=1}^{N} d_n\varphi_n(x)$. Как один из вариантов измерения близости двух функций рассмотрим интеграл от квадрата их разности.

Определение 18.7. *Средней квадратичной погрешностью* называется интеграл

$$\int_a^b \left[f(x)-T_N(x)\right]^2 dx. \tag{18.12}$$

Преобразуем этот интеграл:

$$\int_a^b \left[f(x)-T_N(x)\right]^2 dx=\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)T_N(x)dx+\int_a^b T_N^2(x)dx=$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)\left[\sum_{n=1}^{N} d_n\varphi_n(x)\right]dx+\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{N} d_n\varphi_n(x)\right]^2 dx=$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{n=1}^{N} d_n\cdot\underbrace{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}_{c_n\text{ – коэфф. Фурье } f(x)}+\sum_{n=1}^{N} d_n^2\underbrace{\int_a^b \varphi_n^2 dx}_{=1}+$$

$$+\sum_{\substack{n,m=1\\ n\neq m}}^{N} d_n d_m\underbrace{\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx}_{=0}=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{n=1}^{N} d_n c_n+\sum_{n=1}^{N} d_n^2=$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx+\sum_{n=1}^{N}(d_n-c_n)^2-\sum_{n=1}^{N} c_n^2.$$

Поставим вопросы: при каких коэффициентах d_n средняя квадратичная погрешность наименьшая и какой многочлен $T_N(x)$ приближает функцию $f(x)$ лучше всего? В правой части последней формулы d_n содержится лишь в средней сумме, которая будет наименьшей (и равной 0) при $d_n=c_n$. Следовательно, средняя квадратичная погрешность будет наименьшей при $d_n=c_n$. Это свойство называется *минимальным свойством коэффициентов Фурье*.

Пусть $d_n=c_n$, $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n(x)$. Тогда из последней формулы имеем

$$0\le\int_a^b\left[f(x)-S_N(x)\right]^2 dx=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{n=1}^{N} c_n^2\Rightarrow\sum_{n=1}^{N} c_n^2\le\int_a^b f^2(x)dx.$$

Но суммы $\sum_{n=1}^{N} c_n^2$ являются n-ми частичными суммами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$, они не убывают, так как члены ряда неотрицательны и ограничены числом $\int_a^b f^2(x)dx.$ Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится и его сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\le\int_a^b f^2(x)dx. \tag{18.13}$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя*.

Теперь рассмотрим тригонометрический ряд Фурье. Как было отмечено в разд. 18.2, ортонормированной на отрезке $[-\pi,\pi]$ в этом случае является система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \ n=1,2,\ldots,\ \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx,\ \ m=1,2,\ldots$$

Из формул (18.3) следует, что тогда коэффициенты Фурье функции $f(x)$ будут равны

$$c_0=\frac{\sqrt{2\pi}a_0}{2}=\frac{\sqrt{\pi}a_0}{\sqrt{2}};\ \ c_n=\sqrt{\pi}a_n;\ \ \tilde{c}_n=\sqrt{\pi}b_n,\ n=1,2,\ldots,$$

и по формуле (18.13) находим, что $\frac{a_0^2}{2}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2\pi+b_n^2\pi)\le\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$ Отсюда следует неравенство Бесселя для тригонометрического ряда Фурье:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx. \qquad (18.14)$$

Замечание. Можно доказать, что на самом деле в данной формуле можно поставить знак равенства:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx. \qquad (18.15)$$

Это равенство называется *равенством Парсеваля.*

18.5. Интеграл Фурье

Пусть $y=f(x)$ – кусочно-монотонная на любом конечном интервале функция, имеющая на нем лишь конечное число точек разрыва, причем первого рода, ограниченная на всей прямой и абсолютно интегрируемая на всей прямой, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ сходится. Тогда согласно достаточным условиям разложимости (см. теорему 18.1), в любом интервале $(-l,l)$ функцию можно разложить в ряд Фурье, т.е. для $x\in(-l,l)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad (18.6)$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt,\ n=0,1,2\dots;\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt,\ \ n=1,\ 2,\dots \quad (18.7)$$

(вне интервала $(-l,l)$ функцию надо продолжить как периодическую с периодом $2l$; для справедливости равенства (18.6) в точках разрыва функции $f(x)$ надо положить, что в этих точках $f(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$).

Подставим значение a_n и b_n из (18.7) в формулу (18.6):

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt\right)\cos\frac{\pi nx}{l}+\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt\right)\sin\frac{\pi nx}{l}\right]=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\frac{\pi nt}{l}\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}+\sin\frac{\pi nt}{l}\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt.$$

Если зафиксировать x, то эта формула верна при всех $l>|x|$. Устремим теперь в ней l к бесконечности. Левая часть от l не зависит, значит, ее предел существует и равен ей самой. Следовательно, существует предел правой части при $l\to\infty$ и

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt\right\}.$$

Но $\displaystyle\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}f(x)dx=0\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx}_{\text{конечное число}}=0\Rightarrow$

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt.$$

Положим, что

$$\alpha_1=\frac{\pi}{l},\ \alpha_2=\frac{2\pi}{l},\ \alpha_3=\frac{3\pi}{l},\dots,\ \alpha_n=\frac{n\pi}{l},\dots,\ \Delta\alpha_n=\alpha_n-\alpha_{n-1}=\frac{\pi}{l}.$$

Тогда

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\alpha_n(t-x)dt\cdot\Delta\alpha_n. \qquad (18.16)$$

Далее для простоты изложения приведем лишь наводящие для получения нужной нам формулы соображения. Ряд в правой части этого равенства похож на интегральную сумму для функции $g(\alpha)=$ $=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt$ (интеграл сходится, так как $|f(t)\cos\alpha(t-x)|\le|f(t)|$ и $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ также сходится. Отметим здесь, что ряд лишь похож на интегральную сумму, так как сама подынтегральная функция в правой части формулы (18.16) зависит от l и несобственный интеграл определяется как предел собственного интеграла, а не как предел интегральных сумм.

Можно доказать, что при $l\to\infty$ предел правой части формулы (18.16) равен $\int\limits_0^\infty g(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right]d\alpha.$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right]d\alpha. \qquad (18.17)$$

Определение 18.8. Стоящее в правой части этого равенства выражение называется *интегралом Фурье для функции* $f(x)$.

Равенство (18.17) представляет функцию $f(x)$ в виде ее интеграла Фурье. Оно верно для всех x (мы предположили, что в точках разрыва $f(x)$ равна $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. Без этого предположения из наших рассуждений понятно, что интеграл Фурье равен значению самой функции $f(x)$ в точках ее непрерывности и $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в точках разрыва функции $f(x)$).

Теперь преобразуем интеграл (18.17):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\alpha t\cdot\cos\alpha x+\sin\alpha t\cdot\sin\alpha x)dt\right]d\alpha=$$

$$=\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x+\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt\right)\sin\alpha x\right]d\alpha.$$

Обозначим

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt;\quad b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt \qquad (18.18)$$

(интегралы в формулах (18.18) сходятся, так как $|f(t)\cos\alpha t|\le|f(t)|$, $|f(t)\sin\alpha t|\le|f(t)|$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ также сходится). Формулу можно представить в виде

$$f(x)=\int\limits_0^\infty[a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha. \qquad (18.19)$$

Здесь видна аналогия с разложением в ряд Фурье, только вместо параметра $n=0,1,2,\ldots$ взят непрерывно меняющийся параметр α, а ряд (бесконечная сумма) заменен интегралом.

Интеграл Фурье для четных и нечетных функций

1. Пусть $f(x)$ – четная функция, тогда

$$b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(t)\sin\alpha t}_{\substack{\text{нечетная}\\ \text{функция } t}}dt=\frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\underbrace{\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\alpha t\,dt}_{0}=0$$

согласно свойству интеграла от нечетной функции в симметричных пределах. Теперь по свойству интеграла от четной функции в симметричных пределах имеем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(t)\cos\alpha t}_{\substack{\text{четная}\\ \text{функция } t}}dt\right]\cos\alpha x\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\lim_{l\to\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha t dt\right]\cos\alpha x d\alpha=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^{l} f(t)\cos\alpha t dt\right]\cos\alpha x d\alpha=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt\right]\cos\alpha x d\alpha.$$

Таким образом,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt\right]\cos\alpha x d\alpha. \qquad (18.20)$$

2. Пусть $f(x)$ – нечетная функция, тогда

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(t)\cos\alpha t}_{\substack{\text{нечетная}\\ \text{функция } t}}dt=\frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\underbrace{\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha t\,dt}_{0}=0$$

согласно свойству интеграла от нечетной функции в симметричных пределах. Теперь вследствие свойства интеграла от четной функции в симметричных пределах имеем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(t)\sin\alpha t\,dt}_{\substack{\text{четная}\\ \text{функция } t}}\right]\sin\alpha x\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\alpha t dt\right]\sin\alpha x d\alpha=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\lim_{l\to\infty}\int_0^{l}f(t)\sin\alpha t dt\right]\sin\alpha x d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right]\sin\alpha x d\alpha.$$

Таким образом,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right]\sin\alpha x d\alpha. \qquad (18.21)$$

Интегралы в правых частях формулы (18.20) и (18.21) – это интегралы Фурье для четных и нечетных функций.

Интеграл Фурье в комплексной форме

Вернемся теперь к формуле (18.17):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha\,(t-x)\,dt\right]}_{\text{четная функция }\alpha}d\alpha \overset{\substack{\text{аналогично}\\ \text{предыдущему}}}{\Rightarrow}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\right]d\alpha. \qquad (18.22)$$

Далее для $M>0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt\right]}_{\text{нечетная функция }\alpha}d\alpha=0,$$

откуда при $M\to\infty$

$$0=\frac{1}{2\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)dt\right]d\alpha \qquad (18.23)$$

(напомним, что символ *v.p.* означает главное значение несобственного интеграла).

Замечание. Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)dt\right]d\alpha$ может и расходиться, он обязан сходиться только в смысле главного значения.

Умножим обе части формулы (18.23) на i и сложим с формулой (18.22):

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\underbrace{(\cos\alpha(t-x)+i\sin\alpha(t-x))}_{=e^{i\alpha(t-x)}}dt\right]d\alpha,$$

где внешний интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}[\ldots]\,d\alpha$ понимается в смысле главного значения (в правой части формулы (18.22) главное значение сходящегося интеграла равно самому этому интегралу, поэтому к правой части формулы (18.22) можно приписать символ *v.p.*; далее этот символ для краткости записи писать не будем). Таким образом,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\right]d\alpha. \qquad (18.24)$$

Формула (18.24) дает так называемый интеграл Фурье в комплексной форме.

Теперь перепишем эту формулу следующим образом:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}e^{-i\alpha x}dt\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}\,dt}_{F(\alpha)}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha. \qquad (18.25)$$

Определение 18.9. Функция

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx \qquad (18.26)$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f(x)$

(интеграл сходится по условию, так как для действительных α и x

$$\left|e^{i\alpha x}\right| = \left|\cos\alpha x + i\sin\alpha x\right| = \sqrt{\cos^2\alpha x + \sin^2\alpha x} = 1 \Rightarrow |\, f(x)\, e^{i\alpha x}| = |\, f(x)|).$$

Отметим, что $F(\alpha)$ – комплексное, даже если $f(x)$ действительное (в принципе можно и $f(x)$ брать комплексным). Формула (18.25) тогда имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \qquad (18.27)$$

(интеграл в этой формуле понимается в смысле главного значения).

Определение 18.10. Функция $f(x)$ называется *обратным преобразованием Фурье* для функции $F(\alpha)$ (по сравнению с формулой (18.26) отличается знак в степени).

Во многих задачах вместо самой функции $f(x)$ удобнее изучать ее преобразование Фурье $F(\alpha)$, а потом возвращаться обратно к $f(x)$.

VII

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

19. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

19.1. Определение и свойства двойного интеграла

По аналогии с определением 10.1 дается определение двойного интеграла. В нем «гладкая кривая» – это кривая, заданная уравнением $\overline{r}=\overline{r}(t)$, где $\overline{r}'(t)$ – существует; «кусочно-гладкая кривая» – это кривая, которую можно разбить на конечное число «гладких кривых»; диаметр ограниченного множества – это верхняя грань расстояний между точками этого множества (рис. 91).

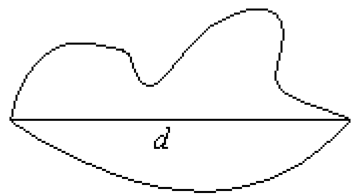


Рис. 91

Под словом «область», как и выше, понимается открытое связное множество; если это множество ограничено, то оно вместе со своей границей образует так называемую «замкнутую область».

Определение 19.1. Пусть функция $z=f(M)=f(x,y)$ определена в замкнутой области (D) плоскости $0xy$, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой. Разобьем эту область сетью (гладких или кусочно-гладких) кривых на конечное число замкнутых частей (D_i) с площадями S_i (будем считать, что эти площади, равно как и площадь всей области S, существуют). В каждой части разбиения возьмем произвольную точку $M_i\in(D_i)$ (рис. 92). Составим интегральную сумму $\sigma=\sum_i f(M_i)S_i$. Обозначим через λ наибольший из диаметров множеств (D_i). Если существует предел этих интегральных сумм при $\lambda\to 0$, который не зависит от разбиения области (D) на части D_i и от выбора

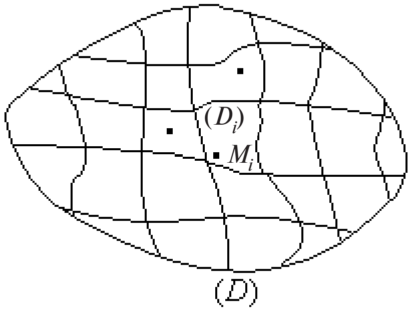


Рис. 92

точек $M_i \in (D_i)$, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $z = f(x,y)$ по области (D) и обозначается $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$. Таким образом,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(M_i)\, S_i, \tag{19.1}$$

если этот предел существует и не зависит от разбиения области на части и от выбора точек в каждой части.

Свойства двойного интеграла аналогичны свойствам обычного определенного интеграла:

1. $\iint\limits_{(D)} \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, если интеграл справа существует (т.е. если существует интеграл справа, то существует интеграл слева и справедливо наше равенство).

$$\blacktriangle \iint\limits_{(D)} \alpha f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_i \alpha\, f(M_i)S_i}_{\text{произвольная интегральная сумма для интеграла слева}} = \alpha \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_i f(M_i)S_i}_{\text{интегральная сумма для интеграла справа}} =$$

$$= \alpha \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy. \blacksquare$$

2. $\iint\limits_{(D)} [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\, dxdy = \iint\limits_{(D)} f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{(D)} f_2(x,y)dxdy$,

если интегралы справа существуют.

$$\blacktriangle \iint\limits_{(D)} [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\, dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_i [f_1(M_i) \pm f_2(M_i)] S_i}_{\text{произвольная интегральная сумма для интеграла слева}} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_i f_1(M_i)S_i}_{\text{интегральная сумма для первого интеграла справа}} \pm \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_i f_2(M_i)S_i}_{\text{интегральная сумма для второго интеграла справа}} =$$

$$= \iint\limits_{(D)} f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{(D)} f_2(x,y)dxdy. \blacksquare$$

3. Пусть $(D) = (D^1) \cup (D^2)$, где (D^1) и (D^2) не имеют общих внутренних точек (рис. 93). Тогда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D^1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D^2)} f(x,y)\, dxdy,$$

если все эти три интеграла существуют.

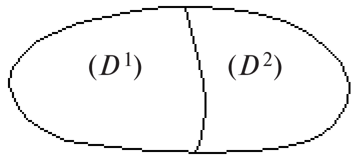


Рис. 93

▲ Разобьем (D^1) и (D^2) на части (D_i^1) и (D_i^2) с площадями S_i^1 и S_i^2, выберем произвольные точки $M_i^1 \in (D_i^1)$ и $M_i^2 \in (D_i^2)$ и рассмотрим произвольные интегральные суммы для интегралов справа: $\sum\limits_i f(M_i^1)S_i^1$ и $\sum\limits_i f(M_i^2)S_i^2$. Тогда $\sum\limits_i f(M_i^1)S_i^1 + \sum\limits_i f(M_i^2)S_i^2$ является некоторой (не любой!) интегральной суммой для интеграла слева и

$$\lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_i f(M_i^1)S_i^1 + \sum_i f(M_i^2)S_i^2\right] = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy.$$

В то же время $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left[\sum\limits_i f(M_i^1)S_i^1 + \sum\limits_i f(M_i^2)S_i^2\right] =$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(M_i^1)S_i^1 + \lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(M_i^2)S_i^2 = \iint\limits_{(D^1)} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{(D^2)} f(x,y)\, dxdy. \blacksquare$$

4. Пусть в области (D) функция $f(x,y)\ge 0$. Тогда $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \ge 0$, если этот интеграл существует.

▲ $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \underbrace{\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_i \underbrace{f(M_i)S_i}_{\ge 0}}_{\ge 0} \ge 0$ (так как интеграл существует). ■

5. Пусть в области (D) функция $f(x,y)\ge g(x,y)$. Тогда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \ge \iint\limits_{(D)} g(x,y)dxdy,$$

если оба этих интеграла существуют.

▲ $f(x,y)\ge g(x,y) \Rightarrow f(x,y)-g(x,y)\ge 0 \overset{4)}{\Rightarrow} \iint\limits_{(D)} [f(x,y)-g(x,y)]dxdy \ge 0$

$\overset{2)}{\Rightarrow} \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy - \iint\limits_{(D)} g(x,y)\,dxdy \ge 0 \Rightarrow \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy \ge \iint\limits_{(D)} g(x,y)\,dxdy$. ■

6. $\left|\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|\,dxdy$, если оба этих интеграла существуют.

▲ Из свойств абсолютных величин чисел следует, что

$$\left|\sum_i f(M_i)S_i\right| \le \sum_i |f(M_i)|S_i .$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda\to 0$, имеем

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\left|\sum_i f(M_i)S_i\right| \le \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_i |f(M_i)|S_i$, или $\left|\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|\,dxdy$. ■

7. $\iint\limits_{(D)} dxdy = S$, где S, как уже было отмечено выше, это площадь области (D).

▲ Согласно определению имеем $\iint\limits_{(D)} dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_i S_i = \lim\limits_{\lambda\to 0} S = S$. ■

8. Аналогично случаю одной переменной доказывается следующая теорема.

Теорема 19.1. Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области (D), то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ существует.

9. **Теорема 19.2 (о среднем в двойном интеграле).** Пусть $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области (D) с площадью S. Тогда существует такая точка $(x_0, y_0)\in(D)$, что $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S$.

▲ Согласно теореме 19.1 интеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ существует. Пусть m и M – наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции $f(x,y)$ в области (D) (см. теорему 12.2). Тогда при

$$(x,y)\in(D)\ m\le f(x,y)\le M \overset{5)}{\Rightarrow} \iint\limits_{(D)} m\,dxdy \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_{(D)} M dxdy \overset{1)}{\Rightarrow}$$

$$m\iint\limits_{(D)} dxdy \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le M\iint\limits_{(D)} dxdy \overset{7)}{\Rightarrow}$$

$$mS \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le MS \Rightarrow m \le \frac{1}{S}\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy \le M .$$

Здесь $\frac{1}{S}\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ – это число, заключенное между двумя значениями m и M функции $f(x)$. Тогда согласно теореме 12.3 существует точка $(x_0,y_0)\in(D)$, такая, что $f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy \Rightarrow$

$$f(x_0,y_0)S = \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy. \ ■$$

10. Пусть $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области (D) и в этой области $f(x,y)\ge 0$. Согласно определению двойного интеграла 19.1 (который в данном случае существует в силу теоремы 19.1)

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(M_i)S_i.$$

В последней сумме слагаемое $f(M_i)S_i$ – это объем цилиндра с основанием (D_i) и высотой $f(M_i)$ (рис. 94), а сумма таких слагаемых – это объем «ступенчатого» тела, состоящего из таких цилиндров.

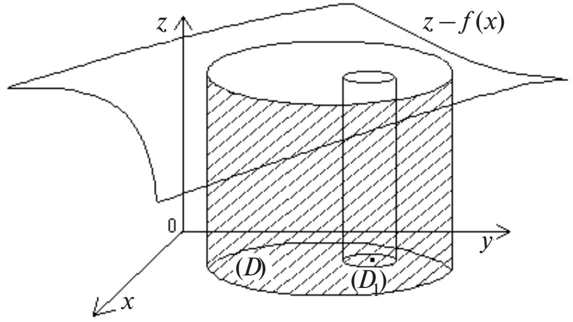


Рис. 94

Под объемом V тела, ограниченного областью (D) на плоскости $0xy$, поверхностью $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $0z$, а направляющей является граница области (D), будем понимать предел объемов таких ступенчатых тел при $\lambda\to 0$, если этот предел существует и не зависит от разбиения (D) на части и от выбора точек в каждой из частей. Но данный предел как раз и дает двойной интеграл, значит,

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y). \tag{19.2}$$

19.2. Вычисление двойного интеграла

Предположим, что в двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x,y)$ область (D) является так называемой криволинейной трапецией, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a \le b)$ и кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, где обе эти функции непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $\psi(x) \ge \varphi(x)$, $x \in [a,b]$ (рис. 95). Такая область называется правильной в направлении оси $0y$. Любая прямая, параллельная оси $0y$, пересекает не вертикальную границу об-

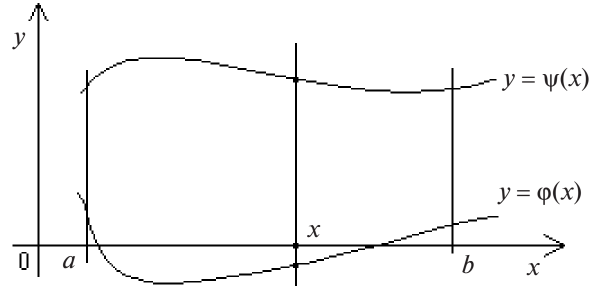


Рис. 95

ласти (D) не более чем в двух точках. Пример неправильной области приведен на рис. 96.

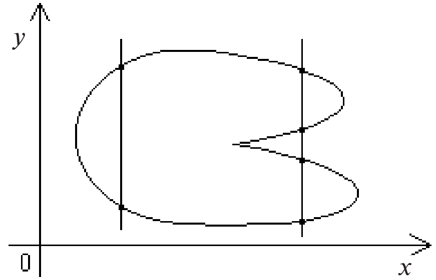


Рис. 96

Если область (D) не является правильной, то ее нужно разбить на правильные части и для вычисления двойного интеграла применить свойство 3 из разд. 19.2.

Теорема 19.3. Пусть (D) – криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a \le b)$ и кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, где обе эти функции непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $\psi(x) \ge \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, и пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывна в области (D). Тогда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{19.3}$$

▲ Функцию $z = f(x,y)$ будем полагать непрерывной в замкнутой области (D), что согласно теореме 19.1 обеспечивает существование нашего двойного интеграла. Предположим еще, что в области (D) $f(x,y) \ge 0$, тогда для вычисления двойного интеграла можно применить формулу (19.2). Но согласно результатам разд. 10.8 объем тела можно посчитать и как интеграл от площади поперечного сечения: $V = \int\limits_a^b S(x)dx$ (отметим, что при таком рассуждении мы используем равносильность определений объема, данных в разд. 10.8 и 19.1, что нуждается в строгом обосновании). Тогда $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b S(x)dx$. Теперь найдем $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси $0x$, в точке с абсциссой x (рис. 97).

Из рис. 97 видно, что поперечное сечение – это криволинейная трапеция, площадь которой согласно результату разд. 10.1 равна $\int\limits_a^b f(x)dx$, где a и b – наименьшее и наибольшее значения x; $f(x)$ – верхняя граница трапеции. В нашем случае интеграл берется по переменной y, наименьшее и наибольшее значения этой переменной – $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а верхняя граница – $f(x,y)$ (x фиксирован). Значит, $S(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ и

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx.$$

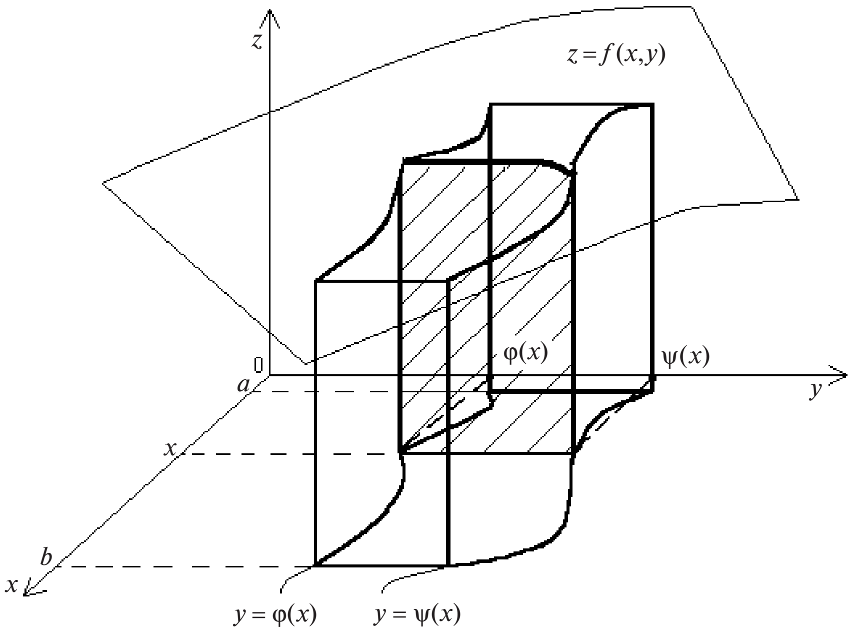


Рис. 97

В последнем интеграле dx переставляют вперед и записывают эту формулу в виде

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Докажем справедливость этой формулы в случае невыполнения условия $f(x,y) \geq 0$. Так как $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области (D), значит, в этой области она ограничена и существует число C (в нашем случае отрицательное), такое, что $f(x,y) \geq C \Rightarrow f(x,y) - C \geq 0$. Следовательно, только что выведенную формулу можно применить к функции $f(x,y) - C$:

$$\iint\limits_{(D)} [f(x,y) - C]dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} [f(x,y) - C]dy.$$

Преобразуем левую и правую части последней формулы:

• согласно свойствам двойного интеграла

$$\iint\limits_{(D)} [f(x,y) - C]dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy - C\iint\limits_{(D)} dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy - CS;$$

• согласно свойствам обычного определенного интеграла

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} [f(x,y) - C]dy = \int\limits_a^b dx \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy - C\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\right] = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy -$$

$$- C\int\limits_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy - CS.$$

Здесь S – площадь (D).

Приравнивая два полученных результата, убеждаемся в справедливости нужной нам формулы. ■

Расстановка пределов в формуле (19.3) производится следующим образом: x меняем от a до b, далее фиксируем произвольное значение x и проводим через точку x вертикальную прямую; вдоль этой прямой y меняется от минимального значения (или, как говорят, от точки «входа») $\varphi(x)$ до максимального значения (или, как говорят, до точки «выхода») $\psi(x)$ (см. рис. 95).

Интеграл в правой части формулы (19.3) вычисляется следующим образом: сначала при каждом фиксированном x берется внутренний интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$. Этот интеграл является функцией от x, которая интегрируется от a до b.

Теперь рассмотрим случай, когда область (D) является правильной в направлении оси $0x$, т.е. является криволинейной трапецией, изображенной на рис. 98.

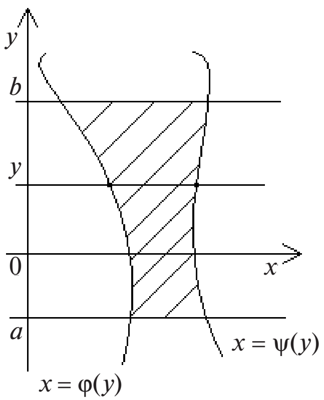


Рис. 98

Тогда аналогично предыдущему расстановка пределов в двойном интеграле производится по формуле

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \quad (19.4)$$

Здесь y меняем от наименьшего значения a до наибольшего значения b, далее фиксируем произвольное значение y и проводим через точку y горизонтальную прямую; вдоль этой прямой x меняется от минимального значения $\varphi(y)$ до максимального значения $\psi(y)$.

Пример 1. Расставить пределы в двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ (в том и в другом порядке) по области (D), ограниченной кривыми $x^2+y^2=2$, $(y \geq 0)$, $y=x$, $x=0$.

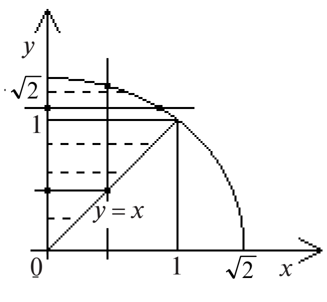


Рис. 99

Решение

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

($x^2+y^2=2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2-x^2}$ – это окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат (рис. 99); выбирается знак «+», так как на нашей дуге окружности $y \geq 0$).

При расстановке пределов в другом порядке область приходится разбивать на две части:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=2x$, $z=0$, $z=x^2y^2$.

Решение

Первые две поверхности – цилиндрические с образующими (в силу отсутствия в уравнениях координаты z), параллельными оси $0z$. Проекцией тела на плоскость $0xy$ является заштрихованная область (D), изображенная на рис. 100 ($2x=x^2 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=2$).

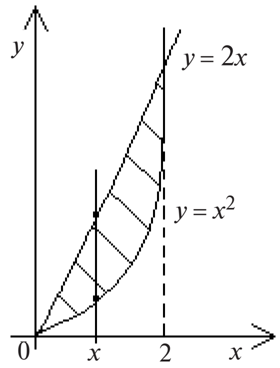


Рис. 100

Не вдаваясь в изучение вида поверхности $z=x^2y$, отметим, что при $(x,y)\in(D)$ $z\geq 0$. Тогда выполняются условия, при которых справедлива формула (19.2) и

$$V=\iint\limits_{(D)} x^2ydxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^{2x} x^2ydy=\int\limits_0^2 x^2\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{2x}dx=\int\limits_0^2\left(\frac{4x^4}{2}-\frac{x^6}{2}\right)dx=$$

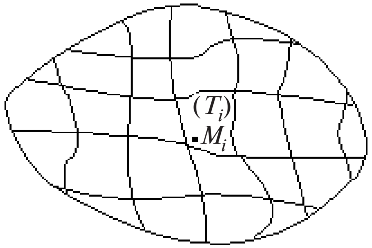
$$=\frac{2x^5}{5}\Big|_0^2-\frac{x^7}{14}\Big|_0^2=\frac{64}{5}-\frac{64}{7}=\frac{128}{35}.$$

Отметим, что при решении задачи мы сумели обойтись без пространственного чертежа рассматриваемого тела.

19.3. Определение и свойства тройного интеграла

Определение тройного интеграла дается по аналогии с определением 19.1 двойного интеграла. При этом не будем пытаться строго определять такие понятия, как *гладкие поверхности* или *кусочно-гладкие поверхности*, и ограничимся их интуитивным пониманием.

Определение 19.2. Пусть функция $u=f(M)=f(x,y,z)$ определена в замкнутой области (T) трехмерного пространства, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой поверхностью. Разобьем эту область сетью (гладких или кусочно-гладких) поверхностей на конечное число замкнутых частей (T_i) с объемами V_i (будем считать, что эти объемы, равно как и объем всей области V, существуют). В каждой части разбиения возьмем произвольную точку $M_i\in(T_i)$ (рис. 101). Составим интеграль-



(T)

Рис. 101

ную сумму $\sigma = \sum_i f(M_i)V_i$. Обозначим через λ наибольший из диаметров множеств (T_i). Если существует предел наших интегральных сумм при $\lambda \to 0$, который не зависит от разбиения области (T) на части (T_i) и от выбора точек $M_i \in (T_i)$, то этот предел называется *тройным интегралом* от функции по области (T) и обозначается $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$.

Таким образом,

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z,)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(M_i)V_i, \tag{19.5}$$

если этот предел существует и не зависит от разбиения области на части и от выбора точек в каждой части.

Свойства тройного интеграла также аналогичны свойствам двойного (а значит, и обычного определенного) интеграла и доказываются точно так же, как в разд. 19.1. Ниже приведем эти свойства, ограничиваясь только теми доказательствами, в которых есть какие-либо отличия от доказательств свойств двойного интеграла (разд. 19.1).

1) $\iiint\limits_{(T)} \alpha f(x,y,z)dxdydz = \alpha\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$, если интеграл справа существует:

2) $\iiint\limits_{(T)} \left[f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z)\right]dxdydz = \iiint\limits_{(T)} f_1(x,y,z)dxdydz \pm$

$\pm\iiint\limits_{(T)} f_2(x,y,z)dxdydz$, если интегралы справа существуют;

3) пусть $(T) = (T^1) \cup (T^2)$, где (T^1) и (T^2) не имеют общих внутренних точек. Тогда:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(T^1)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(T^2)} f(x,y,z)dxdydz,$$

если все эти три интеграла существуют;

4) пусть в области (T) $f(x,y,z) \ge 0$. Тогда

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz \ge 0,$$

если этот интеграл существует;

5) пусть в области (T) $f(x,y,z) \ge g(x,y,z)$. Тогда

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz \ge \iiint\limits_{(T)} g(x,y,z)dxdydz.$$

если оба этих интеграла существуют;

6) $\left|\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz\right| \le \iiint\limits_{(T)} |f(x,y,z)|dxdydz$, если оба этих интеграла существуют.

7) $\iiint\limits_{(T)} dxdydz = V$, где V, как уже было отмечено выше, – объем области (T).

▲ Согласно определению $\iiint\limits_{(T)} dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i V_i = \lim_{\lambda\to 0} V = V$. ■

Теорема 19.4. Если функция $u = f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой области (T), то $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$ существует.

Теорема 19.5 (о среднем в тройном интеграле). Пусть $u = f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой области (T) с объемом V. Тогда существует такая точка $(x_0,y_0,z_0) \in (T)$, что $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)V$.

▲ Согласно теореме 19.4 $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$ существует.

Пусть m и M – наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции $f(x,y,z)$ в области (T) (см. теорему 12.2). Тогда при $(x,y,z) \in (T)$

$$m \le f(x,y,z) \le M \overset{5)}{\Rightarrow} \iiint\limits_{(T)} mdxdydz \le \iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz \le \iiint\limits_{(T)} Mdxdydz \overset{1)}{\Rightarrow}$$

$$m\iiint\limits_{(T)} dxdydz \le \iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz \le M\iiint\limits_{(T)} dxdydz \overset{7)}{\Rightarrow}$$

$$mV \le \iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz \le MV \Rightarrow \; m \le \frac{1}{V}\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz \le M.$$

Таким образом, число $\frac{1}{V}\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$ заключено между двумя значениями функции m и M. Тогда согласно теореме 12.3 существует точка $(x_0,y_0,z_0)\in(T)$, такая, что

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{V}\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz \Rightarrow \; f(x_0,y_0,z_0)V=\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz. \;\blacksquare$$

19.4. Вычисление тройного интеграла

Теорема 19.6. Пусть область (T) ограничена снизу и сверху гладкими или кусочно-гладкими поверхностями $z=p(x,y)$ и $z=q(x,y)$, проектирующимися на плоскость $0xy$ в некоторую ограниченную область (D), $p(x,y)\le q(x,y)$, $(x,y)\in(D)$, а сбоку – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $0z$, и границей области (D) в роли направляющей (рис. 102). Пусть также функция $u=f(x,y,z)$ непрерывна в области (T). Тогда

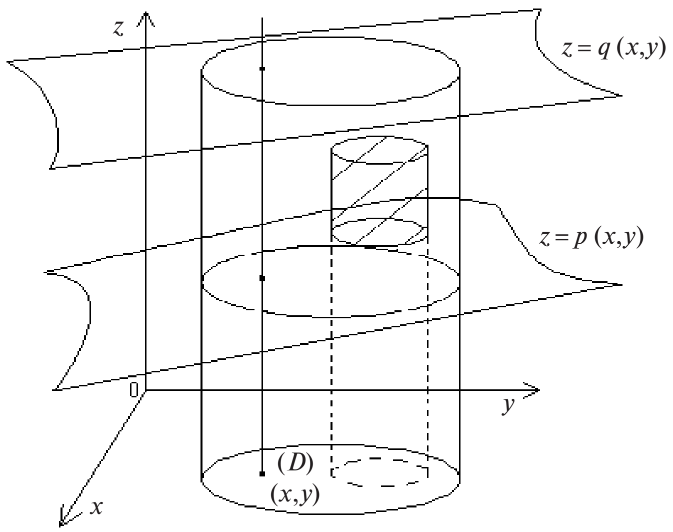


Рис. 102

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{(D)}dxdy=\int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (19.6)$$

▲ Разобьем область (D) гладкими или кусочно-гладкими кривыми на части (D_i) с площадями S_i и рассмотрим цилиндры с основаниями (D_i) и образующими, параллельными оси $0z$. Пусть

$$m=\inf_{(x,y)\in(D)} p(x,y),\; M=\sup_{(x,y)\in(D)} q(x,y).$$

Разобьем отрезок $[m,M]$ на части точками z_k и проведем плоскости $z=z_k$. Обозначим $\Delta z_k=z_{k+1}-z_k$. Тогда плоскости $z=z_k$ разобьют наши цилиндры на более мелкие, которые будем обозначать двумя индексами, а именно: $(T_{ik})=\{(x,y,z):(x,y)\in(D_i),\; z\in[z_k,z_{k+1}]\}$. Тем самым мы разбили область (T) на части (T_{ik}) с объемами $V_{ik}=S_i\Delta z_k$. Одна из таких частей изображена на рис. 102.

Как обычно, через λ обозначим наибольший (по i и k) диаметр областей (T_{ik}). Будем предполагать, что число λ достаточно мало. Тогда части, расположенные около верхней и нижней границ, тоже можно заменить на цилиндры указанного вида (это является следствием стремления к 0 при $\lambda\to 0$ интеграла по данным частям).

Преобразуем правую часть формулы (19.6):

$$\iint\limits_{(D)}dxdy\int\limits_{p(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)dz=\iint\limits_{(D)}dxdy\sum_k\int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} f(x,y,z)dz.$$

Применим к интегралу по z теорему о среднем 10.1, где $z_k^*\in\left[z_k,\; z_{k+1}\right]$:

$$\iint\limits_{(D)}dxdy\sum_k\int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} f(x,y,z)dz=\iint\limits_{(D)}dxdy\sum_k f(x,y,z_k^*)\Delta z_k=$$

$$=\sum_k\Delta z_k\iint\limits_{(D)} f(x,y,z_k^*)dxdy=\sum_k\Delta z_k\sum_i\iint\limits_{(D_i)} f(x,y,z_k^*)dxdy=$$

$$=\sum_{i,k}\Delta z_k\iint\limits_{(D_i)} f(x,y,z_k^*)dxdy.$$

К каждому из последних интегралов применим теорему 19.2 о среднем:

$$\iint\limits_{(D_i)} f(x,y,z_k^*)dxdy = f(x_{ik}^*,y_{ik}^*,z_k^*)S_i,$$

где $(x_{ik}^*,y_{ik}^*,z_k^*)\in T_{ik}$ (координаты «средних» точек x и y обозначаются двумя индексами, так как эти точки зависят как от области (D_i), так и от значения $z=z_k^*$). Отсюда следует, что

$$\iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{p(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)dz = \sum_{i,k} f\left(x_{ik}^*,y_{ik}^*,z_k^*\right)S_i\Delta z_k = \sum_{i,k} f\left(x_{ik}^*,y_{ik}^*,z_k^*\right)V_{ik}.$$

Но последняя сумма является одной из интегральных сумм для тройного интеграла в левой части формулы (19.6) (этот интеграл существует в силу непрерывности подынтегральной функции). Значит, при достаточно малых λ эта сумма сколь угодно мало отличается от самого интеграла. Таким образом, правая и левая части формулы (19.6) сколь угодно близки, т.е. совпадают. ■

Подведем итог, пользуясь не вполне математическим, но зато доступным языком: в формуле (19.6) пределы расставляются для трехмерной области (T), представляющей собой параллельную оси $0z$ «цилиндрическую банку» с двумя «крышками» – нижней $z=p(x,y)$ и верхней $z=q(x,y)$; при расстановке пределов x и y меняются по проекции (T) на плоскость $0xy$, а z меняется от нижней до верхней «крышки». При таком рассуждении часто можно, не рисуя область (T), обойтись плоским чертежом области (D).

При вычислении тройного интеграла по формуле (19.6) сначала находим интеграл $\int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)\,dz$, который зависит от x и y, а потом двойной интеграл от полученной функции по области (D).

Если область (D) является криволинейной трапецией, изображенной на рис. 95, то согласно теореме 19.3 можно расставить и пределы по x и y, получив результат

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (19.7)$$

Пример 1. Расставить пределы в тройном интеграле $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$, где область (T) ограничена поверхностями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

Решение

Пространственный чертеж области (T) (без которого можно и обойтись) и чертеж ее проекции на плоскость $0xy$ имеют вид, представленный на рис. 103 и 104.

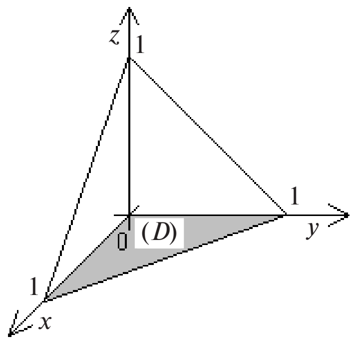


Рис. 103

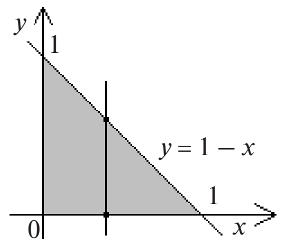


Рис. 104

Используя формулы (19.6) и (19.7), расставим пределы интегрирования:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz$$

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x,\ y=2x,$ $x=1,\ z=x^2+y^2,\ z=x^2+2y^2$.

Решение

Три первые поверхности – это плоскости, параллельные (ввиду отсутствия координаты z) оси $0z$. Эти плоскости и образуют описанную выше цилиндрическую поверхность. Область (D) на плоскости $0xy$ изображена на рис. 105.

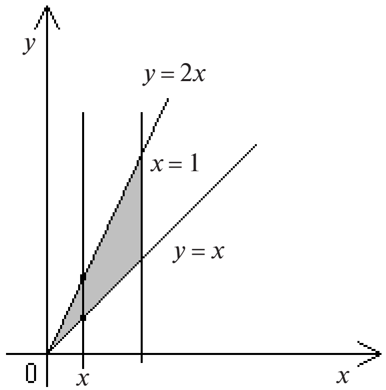


Рис. 105

Две последние поверхности (на самом деле это эллиптические параболоиды) выполняют роль нижней и верхней «крышек» соответственно ($x^2+y^2\le x^2+2y^2$; область (D) эти поверхности не пересекают, так как из уравнений этих поверхностей при $z=0$ получаем, что $x=y=0$.

Тогда из свойства 7 тройного интеграла и формулы (19.7) получаем

$$V=\iiint\limits_{(T)}dxdydz=\int_0^1 dx\int_x^{2x}dy\int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2}dz=\int_0^1 dx\int_x^{2x}y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^1 dx\frac{y^3}{3}\bigg|_x^{2x}=\frac{7}{3}\int_0^1 x^3dx=$$

$$=\frac{7}{3}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{7}{12}.$$

19.5. Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим $\iint\limits_{(D)}f(x,y)dxdy$, где область (D) ограничена гладкой или кусочно-гладкой кривой, а функция $z=f(x,y)$ непрерывна в этой области. Пусть $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, где эти функции осуществляют взаимно однозначное и в обе стороны непрерывно дифференцируемое соответствие между точками области (D) на плоскости $0xy$ и точками некоторой области (D') на плоскости $0'uv$ (это означает, что каждой точке одной из этих областей соответствует одна, и только одна точка другой и функции $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ и $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ имеют непрерывные частные производные в соответствующих областях). Можно показать, что при этом границе одной из этих областей соответствует граница другой, и наоборот.

Так как функция $z=f(x,y)$ непрерывна в области (D), то $\iint\limits_{(D)}f(x,y)dxdy$ существует, поэтому для его вычисления, как предела интегральных сумм, можем эти суммы выбирать наиболее удобным для нас способом: пренебрегая частями у границы (что можно сделать, так как интегралы по этим частям стремятся к 0 при $\lambda\to 0$), разобьем область (D') на прямоугольники линиями $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, при этом и область (D) разобьется на некоторые подобласти. Рассмотрим один из таких прямоугольников (рис. 107) и соответствующий ему (ограниченный сплошной линией) «криволинейный четырехугольник» (рис. 106) на плоскости $0xy$ (Δx и Δy достаточно малы).

Возьмем в этой области точку $P_1(x,y)$, соответствующую точке $P_1'(u,v)$, т.е. $P_1(x(u,v),y(u,v))=P_1(x,y)$. На рис. 106 и 107 точке $P_2'(u+\Delta u,v)$ соответствует точка $P_2(x(u+\Delta u,v),y(u+\Delta u,v))$, точке

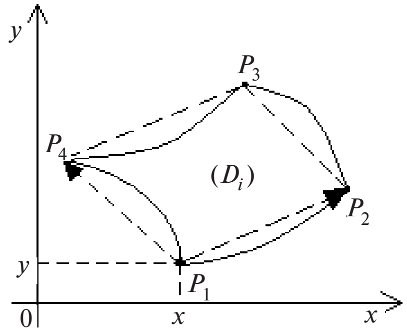


Рис. 106

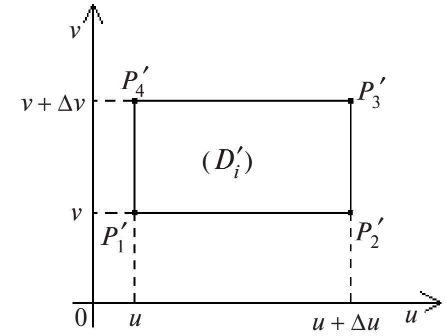


Рис. 107

$P_3'(u+\Delta u,v+\Delta v)$ — точка $P_3(x(u+\Delta u,v+\Delta v),y(u+\Delta u,v+\Delta v))$ и точке $P_4'(u,v+\Delta v)$ — точка $P_4(x(u,v+\Delta v),\ y(u,v+\Delta v))$.

Так как функции $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ имеют непрерывные частные производные, то эти функции дифференцируемы. Вспомним, что для любой дифференцируемой функции $g(x,y)$ согласно определению 12.21 и теореме 12.6

$$g(u+\Delta u,v+\Delta v)=g(u,v)+\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}\Delta v+\alpha\Delta u+\beta\Delta v,$$

где $\alpha,\beta\to 0$ при $\Delta u,\ \Delta v\to 0$. Пренебрегая в этой формуле членами более высокого порядка малости $\alpha\,\Delta u$ и $\beta\,\Delta v$ и опуская (как и для точки P_1) аргументы u и v, получим приближенные значения координат точек P_i, $i=2,3,4$:

$$P_2\left(x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u,y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u\right)=P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right)\ -$$

здесь $\Delta v=0$,

$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right),$$

$$P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ y+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right)\text{— здесь }\Delta u=0.$$

Находя координаты вектора как разность координат конца и начала, имеем

$$\overline{P_1P_2}=\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right\},\ \ \overline{P_4P_3}=\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right\},$$

т.е. эти векторы равны. Значит, изображенный штриховыми линиями на рис. 106 четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ есть параллелограмм. Пренебрегая членами более высокого порядка малости, заменим площадь криволинейного четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ на площадь этого параллелограмма, которая, как известно из курса аналитической геометрии, равна модулю векторного произведения образующих его векторов $\overline{P_1P_2}$ и $\overline{P_1P_4} = \left\{\dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right\}$:

$$S = \left|\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_4}\right| = \left\| \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left| \bar{0} + \bar{k} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{vmatrix} \right| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| |\Delta u||\Delta v|. \qquad (19.8)$$

Определение 19.3. Определитель $I = I(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ называется *определителем Якоби*, или *якобианом* функций $x(u,v)$, $y(u,v)$.

В формуле (19.8) стоит абсолютная величина этого определителя. Произведение $|\Delta u||\Delta v|$ дает площадь S' прямоугольника на плоскости $0'uv$, изображенного на рис. 107.

Используя определение 19.1 и поступая так с каждой частью области (D) на плоскости $0xy$ (индекс i отличает эти части друг от друга), получим

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y,z)\,dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i f\big(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i)\big)\left|I(u_i,v_i)\right| S'_i.$$

Последний предел (в силу непрерывности подынтегральной функции) дает двойной интеграл по u и v:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} f(x(u,v),y(u,v))\left|I(u,v)\right| dudv. \qquad (19.9)$$

Пример. Вычислить $\iint\limits_{(D)}(2x-y)dxdy$, где (D) ограничена прямыми $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$ (рис.108).

Решение

Расстановка пределов по параллелограмму (D), как легко понять, приведет к трем слагаемым, поэтому проще сделать замену: $x+y=u$, $2x-y=v$. Складывая эти уравнения, имеем $x=\dfrac{u+v}{3}$. Подставляя x в первое уравнение, получаем $y=u-\dfrac{u+v}{3}=\dfrac{2u-v}{3}$. При такой замене область (D) перейдет в прямоугольник (D'), ограниченный прямыми $u=1$, $u=2$, $v=1$, $v=3$ (рис. 109).

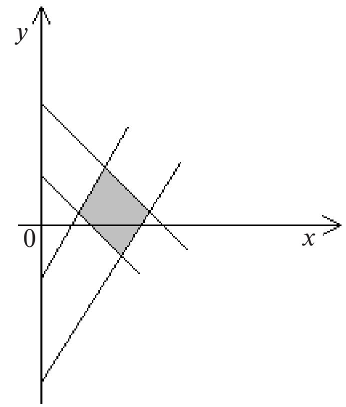


Рис. 108

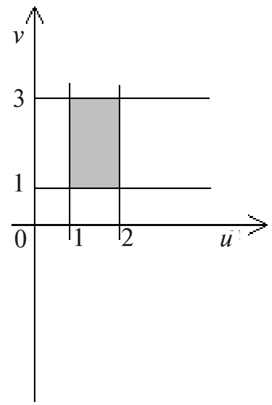


Рис. 109

Якобиан функций $x\ (u,v)$, $y\ (u,v)$ равен $I(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{9}=-\dfrac{1}{3}$; по формуле (19.9) получаем

$$\iint\limits_{(D)}(2x-y)dxdy = \iint\limits_{(D')} v\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du\int_1^3 v\,dv = \frac{1}{3}\frac{v^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

19.6. Двойной интеграл в полярных координатах

Как частный случай формулы (19.9) рассмотрим переход в двойном интеграле к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Якобиан этих функций имеет вид

$$I(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r. \quad (19.10)$$

Соответственно формула перехода приобретает вид

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi. \quad (19.11)$$

Чтобы расставить пределы в последнем интеграле, нужно, чтобы область (D') на «плоскости» r,φ была криволинейной трапецией (рис. 110).

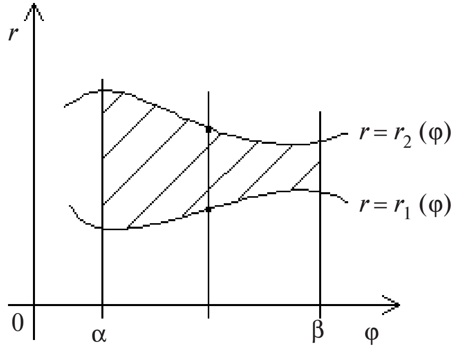


Рис. 110

Тогда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr. \quad (19.12)$$

Последний чертеж можно перенести на плоскость $0xy$. Область интегрирования при этом должна быть ограничена линиями $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (это два луча, проведенные из начала координат) и двумя кривыми, заданными в полярной системе координат: $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_2(\varphi) \geq r_1(\varphi)$ (рис. 111).

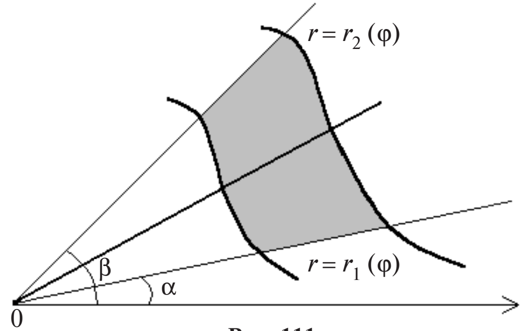


Рис. 111

Пользуясь рис. 111, расставим пределы в полярных координатах следующим образом: φ меняем от α до β, теперь фиксируем угол φ, т.е. проводим луч из начала координат, вдоль этого луча r меняется от минимального значения (точки «входа») $r_1(\varphi)$ до максимального значения (точки «выхода») $r_2(\varphi)$.

К полярным координатам стоит переходить, если уравнение границы области или, может быть, подынтегральная функция содержат выражение $x^2 + y^2$, которое в этих координатах превращается в $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$.

Пример. Вычислить $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где область (D) ограничена кривыми $y = 0$ и $x^2 + y^2 = 2x$ $(y \geq 0)$ (рис. 112).

Решение

Преобразовав последнее уравнение к виду $(x-1)^2 + y^2 = 1$, видим, что это уравнение окружности радиуса 1 с центром в точке (1;0); тогда область интегрирования – «серая» область на рис. 112.

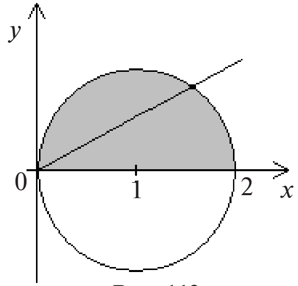


Рис. 112

Перейдем в уравнении окружности к полярным координатам: $r^2 = 2r\cos\varphi$, $r = 2\cos\varphi$. В соответствии с формулой (19.12), имеем

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r\cdot r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi} =$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\,d\sin\varphi = \frac{8}{3}\left.\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{9}.$$

Интеграл Эйлера–Пуассона

Теперь можно доказать приведенную в разд. 13.4 формулу для вычисления интеграла Эйлера–Пуассона:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (19.13)$$

Сначала преобразуем исходный интеграл следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a e^{-x^2}dx\cdot\int_0^a e^{-y^2}dy\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx\cdot\int_0^a e^{-y^2}dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Произведение интегралов в круглых скобках равно

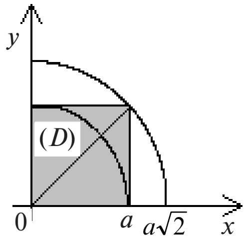


Рис. 113

$$\iint\limits_{(D)} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \iint\limits_{(D)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

где областью (D) является заштрихованный квадрат на рис. 113.

Действительно, при расстановке пределов по этому квадрату получается произведение интегралов:

$$\iint\limits_{(D)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^a dx\int_0^a e^{-x^2}e^{-y^2}dy = \int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^a e^{-y^2}dy.$$

В последнем интеграле внутренняя часть $\int_0^a e^{-y^2}dy$ не зависит от x, следовательно, ее можно вынести за знак внешнего интеграла. Тогда $\iint\limits_{(D)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^a e^{-y^2}dy\cdot\int_0^a e^{-x^2}dx$, что мы и утверждали.

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \left(\lim_{a\to+\infty}\iint\limits_{(D)} e^{-(x^2+y^2)dxdy}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (19.14)$$

Учитывая положительность подынтегральной функции и обозначая изображенные на рис. 113 четверти кругов радиусов a и $a\sqrt{2}$ через (D_1) и (D_2) соответственно, имеем

$$\iint\limits_{(D_1)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint\limits_{(D)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint\limits_{(D_2)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \qquad (19.15)$$

Вычислим два крайних интеграла этого неравенства, перейдя к полярным координатам: левый интеграл

$$\iint\limits_{(D_1)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^a e^{-r^2}rdr = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^a e^{-r^2}d(-r^2) = -\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right);$$

правый интеграл вычисляется так же и дает такой же ответ с заменой a на $a\sqrt{2}$:

$$\iint\limits_{(D_2)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right).$$

Для нахождения предела среднего интеграла неравенства (19.15) применим теорему 2.12:

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) = \frac{\pi}{4};\ \lim_{a\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}) = \frac{\pi}{4}\ \overset{\text{теорема 2.12}}{\Rightarrow}\ \lim_{a\to+\infty}\iint\limits_{(D)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда по формуле (19.14) получаем: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

19.7. Замена переменных в тройном интеграле

Рассмотрим $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$, где область (T) ограничена гладкой или кусочно-гладкой поверхностью, а функция $u = f(x,y,z)$ непрерывна в этой области. Пусть $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$, где эти функции осуществляют взаимно однозначное и в обе стороны непрерывно дифференцируемое соответствие между точками области (T) пространства xyz и точками некоторой области (T') пространства uvw.

При этом границе одной из этих областей соответствует граница другой, и наоборот. Аналогично результатам разд. 19.5, получим, что

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(T')} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|I(u,v,w)\right| dudvdw, \qquad (19.16)$$

где якобиан

$$I(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \qquad (19.17)$$

(доказательство аналогично доказательству, приведенному в разд. 19.5, только вместо площади параллелограмма нам придется считать объем параллелепипеда, который равен модулю смешанного произведения составляющих параллелепипед векторов, что и приведет к определителю третьего порядка и выражению для объема параллелепипеда $V = |I(u,v,w)||\Delta u||\Delta v||\Delta w|$).

Рассмотрим два частных случая формул (19.16),(19.17).

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Цилиндрические координаты представляют собой соединение полярных координат на плоскости $0xy$ с обычной декартовой аппликатой z (рис. 114).

На рис. 114 точка M имеет координаты (r,φ,z) , где r и φ — полярные координаты точки P — проекции M на плоскость $0xy$, z — обычная аппликата точки M. Формулы перехода к цилиндрическим координатам имеют вид: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. По формуле (19.17) находим якобиан этих функций:

$$I(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r. \qquad (19.18)$$

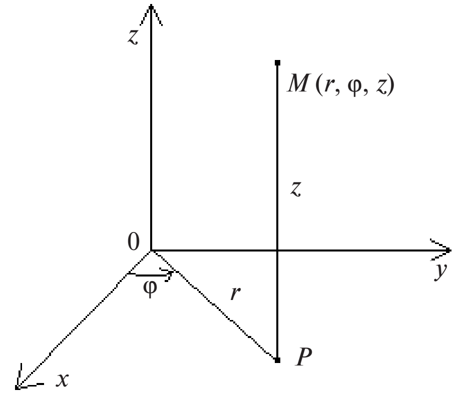


Рис. 114

К цилиндрическим координатам стоит переходить, если уравнение границы области или, может быть, подынтегральная функция содержит выражение $x^2 + y^2 = r^2$.

Пример. Вычислить $\iiint\limits_{(T)} zdxdydz$, где область (T) ограничена поверхностями $y = x,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ x^2 + y^2 = x,\ z = 0,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение

Первые три поверхности – цилиндрические, параллельные оси $0z$; они проектируются на плоскость $0xy$ в границу области, изображенной на рис. 115. Рссмотрим уравнения этих границ:

$$x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4};$$

$$y = x:\ k_1 = \mathrm{tg}\varphi_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}:\ k_2 = \mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{6}.$$

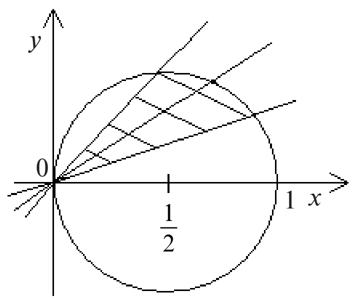


Рис. 115

Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение окружности примет вид $r^2 = r\cos\varphi \Rightarrow r = \cos\varphi$, уравнение верхней «крышки» преобразуется к $z = \sqrt{r^2} = r$, и интеграл примет вид

$$\iiint\limits_{(T)} z\,dxdydz = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r dr \int\limits_{0}^{r} z dz = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r^3 dr = \frac{1}{8}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\varphi\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{32}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{32}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{3}{2}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{2\pi+16-9\sqrt{3}}{512}.$$

Тройной интеграл в сферических координатах

В сферических координатах положение точки M в пространстве определяется тремя числами, ρ, φ, θ (рис. 116): ρ — это расстояние от точки M до начала координат ($\rho \geq 0$); φ — это тот же угол, что в цилиндрических координатах, т.е. угол от положительного направления оси $0x$ до вектора $\overline{OP}$ ($\varphi \in (-\pi, \pi]$); θ — это угол между положительным направлением оси $0z$ и вектором $\overline{OM}$ ($\theta \in [0, \pi]$). Угол φ показывает, в какую сторону вектор $\overline{OM}$ отклоняется от оси $0z$, а угол θ показывает, как велико такое отклонение.

Формулы перехода к сферическим координатам имеют вид:

$$x = \left|\overline{OP}\right| \cos\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi;\ \ y = \left|\overline{OP}\right| \sin\varphi = \rho\sin\theta\sin\varphi;\ \ z = \rho\cos\theta.$$

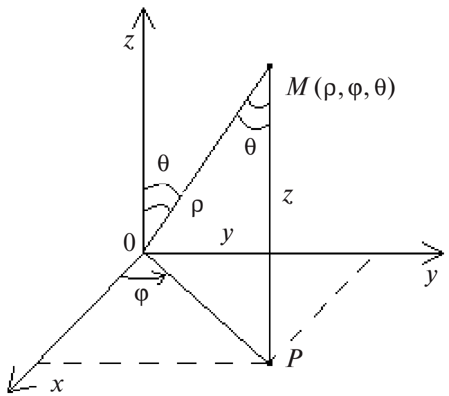


Рис. 116

По формуле (19.17) определяем якобиан этих функций:

$$I(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по элементам второй строки, находим:

$$I(\rho,\varphi,\theta) = \rho\sin\theta\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} + \rho\sin\theta\cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\sin\theta\sin\varphi\left(-\rho\sin^2\theta\sin\varphi - \rho\cos^2\theta\sin\varphi\right) + \rho\sin\theta\cos\varphi\left(-\rho\sin^2\theta\cos\varphi - \right.$$

$$\left. -\rho\cos^2\theta\cos\varphi\right) = -\rho^2\sin\theta\sin^2\varphi\cdot 1 - \rho^2\sin\theta\cos^2\varphi\cdot 1 = -\rho^2\sin\theta\cdot 1.$$

Значит,

$$\left|I(\rho,\ \varphi,\ \theta)\right| = \rho^2\sin\theta. \qquad (19.19)$$

К сферическим координатам стоит переходить, когда уравнение границы области или подынтегральная функция содержит выражение $x^2+y^2+z^2$, которое в этих координатах преобразуется следующим образом:

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta =$$

$$= \rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2.$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного конусом $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq 0$) и сферой $x^2+y^2+z^2 = 1$ ($z \geq 0$) (рис. 117).

Решение

Сечение конуса плоскостью $0yz$ ($x = 0$) имеет вид $z^2 = y^2 \Leftrightarrow z = \pm y$, значит, максимальное значение угла θ равно $\frac{\pi}{4}$ (так как угловой коэффициент прямых $z = \pm y$ равен $k = \pm\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \pm 1$) и объем тела

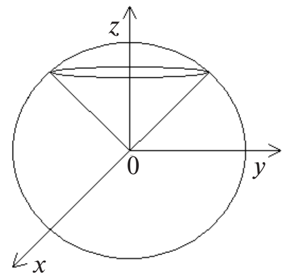


Рис. 117

$$V=\iiint\limits_{(T)} dxdydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\sin\theta d\rho=2\pi(-\cos\theta)\ \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

20. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

20.1. Криволинейный интеграл первого рода

Определение 20.1. Пусть в пространстве задана кривая (AB) и пусть на ней задана некоторая функция $f(M)=f(x,y,z)$, где $M(x,y,z)\in(AB)$. Разобьем кривую (AB) на части точками $A_i\in(x_i,y_i,z_i)$. На каждой части (A_iA_{i+1}) возьмем произвольную точку $M_i\in(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,\tilde{z}_i)$. Пусть Δs_i — длина дуги (A_iA_{i+1}). Составим интегральную сумму $\sigma=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(M_i)\Delta s_i$. Обозначим λ максимальную по i длину дуги (A_iA_{i+1}): $\lambda=\max\limits_i\Delta s_i$. Если существует предел интегральных сумм при $\lambda\to0$, который не зависит от разбиения (AB) на части (A_iA_{i+1}) и от выбора точек $M_i\in(A_iA_{i+1})$, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(M)=$ $=f(x,y,z)$ по кривой (AB) и обозначается $\int\limits_{(AB)}f(M)ds=\int\limits_{(AB)}f(x,y,z)ds$.

Таким образом,

$$\int\limits_{(AB)}f(M)ds=\int\limits_{(AB)}f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\Delta s_i, \qquad (20.1)$$

если этот предел существует и не зависит от выбора точек A_i и M_i (рис. 118).

Определения криволинейного и обычного интегралов аналогичны, поэтому совпадают и одинаково доказываются их свойства. Приведем некоторые из этих свойств:

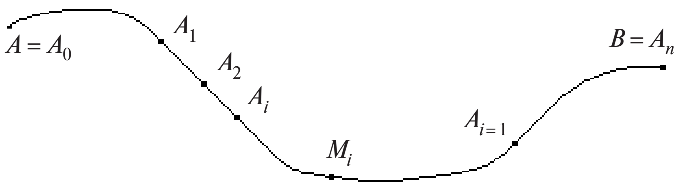


Рис. 118

1) $\int\limits_{(AB)}\alpha f(M)ds=\alpha\int\limits_{(AB)}f(M)ds$, если интеграл справа существует;

2) $\int\limits_{(AB)}[f(M)+g(M)]ds=\int\limits_{(AB)}f(M)ds+\int\limits_{(AB)}g(M)ds$, если интегралы справа существуют;

3) $\int\limits_{(AB)}f(M)ds=\int\limits_{(AC)}f(M)ds+\int\limits_{(CB)}f(M)ds$, если $(AB)=(AC)\cup(CB)$ и все эти три интеграла существуют;

4) $\int\limits_{(AB)}f(M)ds=\int\limits_{(BA)}f(M)ds$ при условии существования этих интегралов (это свойство следует из определения 20.1).

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Пусть кривая (AB) задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$, а функция $f(x,y,z)$ непрерывна вдоль (AB).

Можно доказать, что при этих условиях интеграл $\int\limits_{(AB)}f(M)ds$ существует. Не вдаваясь в это доказательство, получим формулу для вычисления интеграла. Пусть точки A_i и A_{i+1} соответствуют значениям параметра t_i и t_{i+1}, тогда запишем Δs_i по аналогии со случаем двух переменных x и y (см. формулу (10.14)):

$$\Delta s_i=\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt.$$

Применяя к последнему интегралу теорему 10.1 о среднем, получаем

$$\Delta s_i=\sqrt{[x'(\tilde{t}_i)]^2+[y'(\tilde{t}_i)]^2+[z'(\tilde{t}_i)]^2}\,\Delta t_i,$$

где $\tilde{t}_i\in[t_i,t_{i+1}]$, $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$. Тогда

$$\int\limits_{(AB)}f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\sqrt{[x'(\tilde{t}_i)]^2+[y'(\tilde{t}_i)]^2+[z'(\tilde{t}_i)]^2}\,\Delta t_i.$$

Так как интеграл $\int\limits_{(AB)} f(M)ds$ существует, то для его вычисления можем интегральные суммы выбрать не произвольным, а наиболее удобным для нас способом. А именно пусть в последней сумме точка M_i соответствует значению параметра $\widetilde{t}_i$, тогда эта сумма является интегральной суммой для определенного интеграла и в пределе дает сам этот интеграл:

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt. \qquad (20.2)$$

(в этой формуле интеграл справа существует в силу непрерывности подынтегральной функции).

20.2. Криволинейный интеграл второго рода

Определение 20.2. Пусть в пространстве задана кривая (AB) и пусть на ней задана некоторая функция $P(M)=P(x,y,z)$, где $M(x,y,z)\in(AB)$. Разобьем кривую (AB) на части точками $A_i\in(x_i,y_i,z_i)$. На каждой части (A_iA_{i+1}) возьмем произвольную точку $M_i\in(\widetilde{x}_i,\widetilde{y}_i,\widetilde{z}_i)$. Пусть $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$, т.е. Δx_i – это проекция дуги (A_iA_{i+1}) на ось $0x$ (длина этой проекции со знаком). Составим интегральную сумму $\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} P(M_i)\Delta x_i$. Обозначим через λ максимальную по i длину дуги (A_iA_{i+1}): $\lambda=\max\limits_i \Delta s_i$. Если существует предел наших интегральных сумм при $\lambda\to 0$, который не зависит от разбиения (AB) на части (A_iA_{i+1}) и от выбора точек $M_i\in(A_iA_{i+1})$, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода* от функции $P(M)=P(x,y,z)$ по кривой (AB) по переменной x и обозначается $\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} P(M_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i, \qquad (20.3)$$

если этот предел существует и не зависит от выбора точек A_i и M_i (см. рис. 118).

Отметим, что различие криволинейных интегралов первого и второго рода состоит в том, что в интегральных суммах для первого из этих интегралов значение функции умножается на длину части кривой, а в интегральных суммах для второго интеграла значение функции умножается на проекцию этой части на ось координат.

Аналогично определяются

$$\int\limits_{(AB)} Q(x,y,z)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} Q(M_i)\underbrace{\Delta y_i}_{y_{i+1}-y_i}, \quad \int\limits_{(AB)} R(x,y,z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} R(M_i)\underbrace{\Delta z_i}_{z_{i+1}-z_i}$$

и $\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz$ как сумма таких интегралов:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + \int\limits_{(AB)} Q(x,y,z)\,dy + \int\limits_{(AB)} R(x,y,z)\,dz.$$

Как и в предыдущем разделе свойства криволинейных интегралов второго рода аналогичны свойствам обычных интегралов. А именно:

1) $\int\limits_{(AB)} \alpha P(x,y,z)dx = \alpha\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx$, если интеграл справа существует;

2) $\int\limits_{(AB)} [P_1(x,y,z)+P_2(x,y,z)]dx = \int\limits_{(AB)} P_1(x,y,z)dx + \int\limits_{(AB)} P_2(x,y,z)dx$, если интегралы справа существуют;

3) $\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx = \int\limits_{(AC)} P(x,y,z)dx + \int\limits_{(CB)} P(x,y,z)dx$, если $(AB) = (AC)\cup(CB)$ (рис. 119) и все эти три интеграла существуют;

4) из определения 20.2 также следует, что в отличие от интеграла первого рода $\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx = -\int\limits_{(BA)} P(x,y,z)dz$ (при составлении интегральных сумм для интеграла справа точки A_i и A_{i+1} меняются местами, и $x_i - x_{i+1} = -(x_{i+1}-x_i)$).

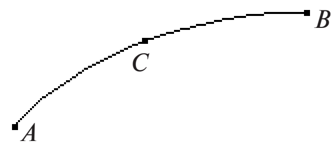


Рис. 119

С учетом этого свойство 3 будет верным независимо от взаимного расположения точек A, B и C.

Естественно, все перечисленные свойства справедливы и для интегралов по переменным y и z, и для суммы таких интегралов.

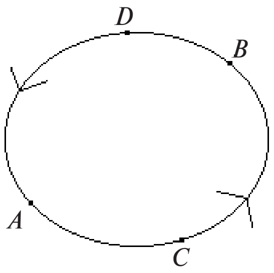


Рис. 120

Если контур (L) замкнут, то криволинейный интеграл вдоль (L) в заданном направлении определяется так: пусть $A\in(L)$, $B\in(L)$ – произвольные точки, тогда для интеграла по любой переменной и для суммы этих интегралов по определению $\int\limits_{(L)} = \int\limits_{(ACB)} + \int\limits_{(BDA)}$ (рис. 120).

При другом выборе точек значение интеграла не изменится:

$$\int\limits_{(ACB)} + \int\limits_{(BDA)} = \int\limits_{(AC)} + \int\limits_{(CB)} + \int\limits_{(BD)} + \int\limits_{(DA)};$$

$$\int\limits_{(CBD)} + \int\limits_{(DAC)} = \int\limits_{(CB)} + \int\limits_{(BD)} + \int\limits_{(DA)} + \int\limits_{(AC)} \Rightarrow \int\limits_{(ACB)} + \int\limits_{(BDA)} = \int\limits_{(CBD)} + \int\limits_{(DAC)}.$$

Если (L) – замкнутый контур, то под интегралом $\int\limits_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz$ при отсутствии указания на направление обхода контура понимают интеграл, взятый в положительном направлении (так, чтобы при движении вдоль контура ближайшая часть области, ограниченной этим контуром, оставалась бы слева, что в простых случаях равносильно обходу контура против часовой стрелки – рис. 121).

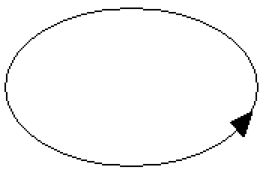


Рис. 121

В случае замкнутого контура иногда также пишут

$$\oint\limits_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz.$$

Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Теорема 20.1. Пусть кривая (AB) задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ и при изменении параметра t от α до β кривая описывается в направлении от A к B; при $t=\alpha$ получаем точку A, при $t=\beta$ – точку B. Пусть также функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вдоль кривой (AB), а функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда криволинейный интеграл существует и

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))\,dx(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,dy(t)+R(x(t),y(t),z(t))\,dz(t)=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)]\,dt \tag{20.4}$$

(т.е. для вычисления надо и в подынтегральных функциях, и под знаками дифференциалов заменить x, y, z на их выражения через параметр t).

▲ Докажем одну часть этого равенства (остальные части доказываются аналогично):

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)dt. \tag{20.5}$$

В соответствии с определением 20.2 левая часть этого равенства

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}P(M_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i.$$

Докажем, что этот предел равен правой части равенства, т.е. при достаточно малых λ интегральные суммы σ будут отличаться от интеграла в правой части формулы (20.5) меньше, чем на любое наперед заданное число.

Зададим произвольное число $\varepsilon>0$. Пусть в интегральной сумме σ точки A_i и M_i соответствуют значениям параметра t_i и $\tilde{t}_i$. Тогда

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}P\left(x\left(\tilde{t}_i\right),\,y\left(\tilde{t}_i\right),\,z\left(\tilde{t}_i\right)\right)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=x(t_{i+1})-x(t_i)$.

Используя равенство $\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)dt = x(t)\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \Delta x_i$, перепишем предыдущую формулу в виде

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} P\left(x\left(\tilde{t}_i\right), y\left(\tilde{t}_i\right), z\left(\tilde{t}_i\right)\right)\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)\,dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} P\left(x\left(\tilde{t}_i\right), y\left(\tilde{t}_i\right), z\left(\tilde{t}_i\right)\right)x'(t)\,dt.$$

Преобразуем интеграл в правой части формулы (20.5) следующим образом:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

и рассмотрим разность двух полученных выражений:

$$\sigma - \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt =$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} P\left(x\left(\tilde{t}_i\right), y\left(\tilde{t}_i\right), z\left(\tilde{t}_i\right)\right)x'(t)\,dt-\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)\,dt =$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left[P\left(x\left(\tilde{t}_i\right), y\left(\tilde{t}_i\right), z\left(\tilde{t}_i\right)\right)-P(x(t), y(t), z(t))\right]x'(t)\,dt.$$

Отсюда из свойств абсолютных величин и свойств интегралов получаем

$$\left|\sigma - \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt\right| \le$$

$$\le\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left|P\left(x\left(\tilde{t}_i\right), y\left(\tilde{t}_i\right), z\left(\tilde{t}_i\right)\right)-P(x(t), y(t), z(t))\right|\left|x'(t)\right|dt\right|. \qquad (20.6)$$

Так как по условию функция $x'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то она ограничена на этом отрезке: $|x'(t)| \le K$, где K – некоторая постоянная.

Сложная функция $P(x(t),\ y(t),\ z(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, тогда по теореме Кантора 3.9 она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Исходя из этого можно выбрать λ столь малым, что на каждом отрезке разбиения $[t_i, t_{i+1}]$ модуль разности значений функции в двух произвольных точках не будет превосходить любое наперед заданное положительное число, за которое в нашем случае возьмем $\dfrac{\varepsilon}{K|\beta-\alpha|}$. Тогда по формуле (20.6) получим

$$\left|\sigma - \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{K|\beta-\alpha|}K\left|t_{i+1}-t_i\right| = \frac{\varepsilon}{|\beta-\alpha|}\sum_{i=0}^{n-1}\left|t_{i+1}-t_i\right|.$$

Так как при движении вдоль кривой (AB) параметр t либо растет, либо уменьшается, то все слагаемые последней суммы имеют один и тот же знак:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left|t_{i+1}-t_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(t_{i+1}-t_i\right)\right| = \left|(t_1-t_0)+(t_2-t_1)+\ldots+(t_n-t_{n-1})\right| = \left|t_n-t_0\right| =$$

$$=|\beta-\alpha| \;\Rightarrow\; \left|\sigma - \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt\right| \le \frac{\varepsilon}{|\beta-\alpha|}|\beta-\alpha| = \varepsilon. \blacksquare$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{(L)} xdx + ydy + (x+y-1)dz$, где L – отрезок прямой от точки $A\,(1,\,1,\,1)$ до точки $B\,(2,\,3,\,4)$.

Решение

Уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{4-1}\Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}=t\Rightarrow$$

$x=t+1,\ y=2t+1,\ z=3t+1$ – параметрические уравнения этой прямой.

При $t=0$ получаем $x=1,\ y=1,\ z=1$, т.е. точку A; при $t=1$ получаем $x=2,\ y=3,\ z=4$, т.е. точку B. Следовательно,

$$\int\limits_{(L)} xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int\limits_0^1 (t+1)dt + (2t+1)d(2t+1) + (t+1+2t+1-1)\,d(3t+1) =$$

$$=\int\limits_0^1 (t+1)dt + (2t+1)2dt + (3t+1)3dt = \int\limits_0^1 (t+1+4t+2+9t+3)\,dt = \int\limits_0^1 (14t+6)\,dt =$$

$$=14\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1 + 6t\Bigg|_0^1 = 7+6=13.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{(L)} ydx + xdy$, где L – путь от точки (0, 0) до точки (1, 1) вдоль: а) $y = x$; б) $y = x^2$ (рис. 122).

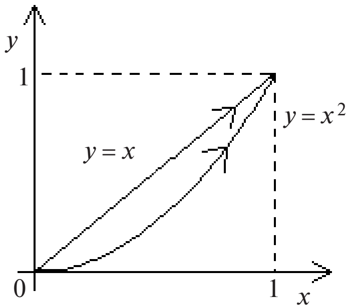


Рис. 122

Решение

а) $y = x$: берем за параметр $x \in [0,1]$, тогда

$$\int\limits_{(L)} ydx + xdy = \int\limits_0^1 xdx + xdx = 2\int\limits_0^1 xdx = 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1;$$

б) $y = x^2$: опять берем за параметр $x \in [0,1]$, тогда

$$\int\limits_{(L)} ydx + xdy = \int\limits_0^1 x^2dx + xdx^2 = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2x^2\right)dx = 3\int\limits_0^1 x^2dx = 3\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1.$$

В обоих случаях получили один и тот же ответ. Возникает вопрос: не является ли этот факт правилом независимости криволинейного интеграла (второго рода) от формы пути интегрирования? Приведенный ниже пример показывает, что, вообще говоря, такого правила быть не может.

Пример 3. Для тех же путей, что в примере 2, вычислить $\int\limits_{(L)} 2ydx + xdy$.

Решение

а) $y = x$: $\int\limits_{(L)} 2ydx + xdy = \int\limits_0^1 2xdx + xdx = 3\int\limits_0^1 xdx = 3\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2};$

б) $y = x^2$:

$$\int\limits_{(L)} 2ydx + xdy = \int\limits_0^1 2x^2dx + xdx^2 = \int\limits_0^1 \left(2x^2 + 2x^2\right)dx = 4\int\limits_0^1 x^2dx = 4\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Однако при определенных условиях указанная независимость криволинейного интеграла от формы пути интегрирования все же имеет место.

20.3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от формы пути интегрирования

Напомним сначала некоторые определения разд. 12.1: множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую окрестность этой точки; множество называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой,

целиком принадлежащей множеству; открытое связное множество называется областью.

Далее будем рассматривать криволинейный интеграл $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$, в котором функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в некоторой области (T) трехмерного пространства.

Теорема 20.2. Для того чтобы $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$ при любых кривых $(AB) \subset (T)$ не зависел от формы пути интегрирования (AB), а зависел только от положения начальной и конечной точек A и B, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = 0$ для любого замкнутого контура $(L) \subset (T)$.

▲ *Необходимость.* Пусть наш интеграл не зависит от формы пути интегрирования. Тогда для произвольного замкнутого контура $(L) \subset (T)$, изображенного на рис. 123, имеем

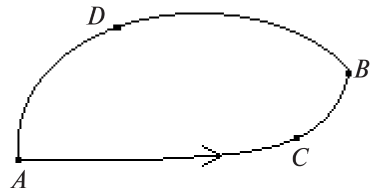


Рис. 123

$$\int\limits_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(ACB)} Pdx + Qdy + Rdz +$$

$$+ \int\limits_{(BDA)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(ACB)} Pdx + Qdy + Rdz - \int\limits_{(ADB)} Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

так как интеграл не зависит от пути интегрирования.

Достаточность. В этой части теоремы нам нужно доказать, что при выполнении условий теоремы

$$\int\limits_{(ACB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(ADB)} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Для этого докажем, что разность левой и правой частей этого равенства есть 0:

$$\int\limits_{(ACB)} Pdx + Qdy + Rdz - \int\limits_{(ADB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(ACB)} Pdx + Qdy + Rdz +$$

$$+ \int\limits_{(BDA)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(ACBDA)} Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

как интеграл по замкнутому контуру. ■

Теорема 20.3. Для того чтобы $\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz$ не зависел от формы пути интегрирования для любой кривой $(AB)\subset(T)$, необходимо и достаточно, чтобы выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ являлось в области (T) дифференциалом от некоторой функции трех переменных $u(x,y,z)$, т.е. чтобы существовала такая функция $u(x,y,z)$, что $du(x,y,z) = P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$.

▲ *Необходимость.* Пусть криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz$$

не зависит от формы пути интегрирования. Тогда введем функцию

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz,$$

где $(x_0,y_0,z_0)\subset(T)$ – фиксированная точка и криволинейный интеграл берется по любому пути в (T), соединяющему (x_0,y_0,z_0) и (x,y,z). Тогда, считая, что путь в точку $(x+\Delta x,y,z)$ проходит через точку (x,y,z), имеем

$$\Delta_x u=u(x+\Delta x,y,z)-u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x+\Delta x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz\ -$$

$$-\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz.$$

Последний интеграл берется по любому пути. Возьмем за такой путь отрезок, соединяющий точки (x,y,z) и $(x+\Delta x,y,z)$; его уравнения: $x=t,\ t\in[x,x+\Delta x];\ \ y=y,\ z=z,$ – постоянные, следовательно, $dy=dz=0$. Отсюда

$$\int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y,z)\,dt \overset{\text{теорема 10.1 о среднем}}{=} P(c,y,z)\underbrace{(x+\Delta x-x)}_{\Delta x},$$

где c – точка между x и $x+\Delta x$, следовательно

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=P(c,y,z)\Rightarrow\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}P(c,y,z)\overset{P(x,y,z)\text{ – непрерывна}}{=}P(x,y,z).$$

Аналогично $\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}=Q(x,y,z)$ и $\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}=R(x,y,z)$. Следовательно,

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=Pdx+Qdy+Rdz.$$

Достаточность. Пусть $Pdx+Qdy+Rdz=du$ и кривая (AB) задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$. Тогда $P=\dfrac{\partial u}{\partial x},\ Q=\dfrac{\partial u}{\partial y},\ R=\dfrac{\partial u}{\partial z}$ и

$$\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))x'(t)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))y'(t)+\frac{\partial u}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt.$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции (см. разд. 12.4) последнее выражение можно представить в виде

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{d}{dt}u(x(t),y(t),z(t))\right]dt=u(x(t),y(t),z(t))\Big|_{t=\beta}-u(x(t),y(t),z(t))\Big|_{t=\alpha}=$$

$$=u(B)-u(A).$$

Итак, если $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz=du$, то

$$\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz=u(B)-u(A)=u\Big|_A^B. \qquad (20.7)$$

Правая часть формулы (20.7) не зависит от пути из A в B, что доказывает независимость интеграла от формы пути интегрирования. ■

Заодно мы получили формулу для вычислений интеграла от полного дифференциала и для примера 2 в разд. 20.2:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} ydx + xdy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(xy) = (xy)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1 \text{ для любого пути.}$$

Теорема 20.4. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области (D) на плоскости $0xy$. Для того чтобы интеграл $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy$ не зависел от формы пути интегрирования для любой кривой $(AB) \subset (D)$, необходимо, а в предположении односвязности области и достаточно, чтобы при $(x,y) \in D$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{20.8}$$

Эта теорема сразу следует из теорем 20.3 и 14.2, которая утверждает, что (20.8) есть необходимое, а в предположении односвязности области и достаточное условие того, чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ являлось дифференциалом некоторой функции двух переменных. Напомним здесь, что область (D) на плоскости называется односвязной, если вместе с каждым замкнутым самонепересекающимся контуром она содержит и область, ограниченную этим контуром, т.е. односвязная область – это область без «дырок».

Для формулировки аналогичной теоремы для случая трех переменных приведем следующее определение.

Определение 20.3. Область в пространстве называется односвязной, если вместе с каждым самонепересекающимся замкнутым контуром она содержит и некоторую поверхность, натянутую на этот контур (т.е. поверхность, границей которой является наш контур).

Теорема 20.5. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области (T) трехмерного пространства. Для того чтобы $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависел от формы пути интегрирования для любой кривой $(AB) \subset (T)$, необходимо, а в предположении односвязности области и достаточно, чтобы при $(x,y,z) \in (T)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{20.9}$$

▲ *Необходимость*. Пусть криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$$

не зависит от формы пути интегрирования. Тогда по теореме 20.3 выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является дифференциалом от некоторой функции трех переменных $u(x,y,z)$: $Pdx + Qdy + Rdz = du \Rightarrow$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Но $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ по теореме (12.9) о смешанных производных. Отсюда $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Аналогично проверяются другие равенства:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y};\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Достаточность условий (20.9) будет проверена позднее (см. разд. 21.5). ■

21. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

21.1. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент

Определение 21.1. Пусть каждой точке M некоторой области (T) трехмерного пространства соответствует скалярная (числовая) величина $U = U(M)$. Тогда говорят, что в области (T) задано *скалярное поле.*

Если положение точки M определять ее координатами в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $M(x,y,z)$, то $U = U(M) = U(x,y,z)$. Будем полагать, что эта функция имеет непрерывные частные производные.

Определение 21.2. Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (T)$. Проведем через эту точку направленную прямую (ось) l. Пусть $M(x,y,z) \in l$ — произвольная точка оси. Обозначим M_0M — расстояние от M_0 до M со знаком «+» при смещении M от M_0 в сторону направления оси и «–» при смещении M от M_0 в сторону, противоположную направлению оси. Производной скалярного поля $u = u(M)$ в точке M_0 по направлению l (обозначение: $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$) называется

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \lim_{M_0M \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0M} = \lim_{M_0M \to 0} \frac{u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0)}{M_0M}, \quad (21.1)$$

если этот предел существует.

Так как это определение совпадает с определением 12.31 производной функции трех переменных по направлению (см. разд. 12.9), то можем здесь использовать все результаты этого раздела.

1. Если ось l составляет с положительными направлениями осей координат $0x$, $0y$, $0z$ углы α, β, γ соответственно, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \quad (21.2)$$

2. Дадим следующее определение.

Определение 21.3. *Градиентом* скалярного поля $u(M) = u(x,y,z)$ в точке M_0 называется вектор $\overline{\text{grad}\, u} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ (все производные берутся в точке M_0).

Тогда производная поля в точке M_0 будет наибольшей по направлению вектора $\overline{\text{grad}\, u}$ в этой точке и эта наибольшая производная по направлению равна $\left|\text{grad}\, u(M_0)\right|$.

3. Из определения 21.2 видно, что значение производной по направлению не зависит от выбора системы координат xyz. Тогда и вектор $\overline{\text{grad}\, u(M_0)}$ не зависит от выбора системы координат: он направлен по тому направлению, производная по которому наибольшая, и длина его равна этой наибольшей производной по направлению.

21.2. Векторное поле. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля вдоль кривой

Определение 21.4. Пусть каждой точке M некоторой области (T) трехмерного пространства соответствует вектор $\overline{F} = \overline{F}(M)$. Тогда говорят, что в области (T) задано *векторное поле.*

Если в пространстве ввести прямоугольную декартову систему координат, то $M = M(x,y,z)$. Тогда вектор $\overline{F}$, а значит, и его координаты P, Q, R будут являться функциями трех переменных x, y, z:

$$\overline{F} = \{P,\ Q,\ R\} \text{ или } \overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k},$$

где $\overline{F} = \overline{F}(x,y,z)$, $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$, $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — единичные, взаимно перпендикулярные векторы, направленные по осям системы координат.

Всюду будем полагать, что функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные.

Определение 21.5. Разобьем кривую (AB) на части произвольными точками A_i и выберем произвольные точки $M_i \in \left(A_iA_{i+1}\right)$ (рис. 124).

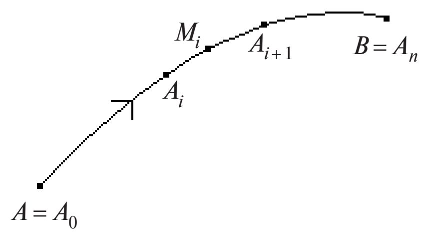


Рис. 124

Рассмотрим интегральную сумму $\sum\limits_i \overline{F}(M_i) \cdot \overline{A_iA_{i+1}}$, где $\overline{F}(M_i) \cdot \overline{A_iA_{i+1}}$ — скалярное произведение двух векторов. Пусть O — фиксированная точка и $\overline{r}_i = \overline{OA}_i$ — радиус-вектор. Тогда $\overline{A_iA_{i+1}} = \overline{r_{i+1}} - \overline{r_i}$. Переписав последнее выражение как $\overline{\Delta r_i}$, получим

$$\sum_i \overline{F}(M_i) \cdot \overline{A_iA_{i+1}} = \sum_i \overline{F}(M_i) \cdot \overline{\Delta r_i} \text{ (рис. 125).}$$

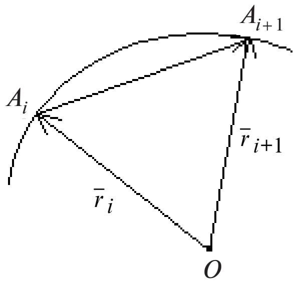


Рис. 125

Обозначим через λ максимальную длину дуги (A_iA_{i+1}). Если существует предел наших интегральных сумм при $\lambda \to 0$, который не зависит от выбора точек A_i и M_i, то этот предел называется *линейным интегралом* от векторного поля $\bar F$ вдоль кривой (AB) и обозначается $\int\limits_{(AB)} \bar F d\bar r$.

Таким образом,

$$\int\limits_{(AB)} \bar F d\bar r = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i \bar F(M_i)\cdot\overline{\Delta r_i} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i \bar F(M_i)\cdot\overline{A_iA_{i+1}}. \qquad (21.3)$$

В случае замкнутой кривой (L) этот линейный интеграл называют *циркуляцией* векторного поля $\bar F$ вдоль кривой (L).

Если в пространстве введена прямоугольная система координат xyz и $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $A_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$, $M_i(\tilde x_i, \tilde y_i, \tilde z_i)$, то

$$\overline{A_iA_{i+1}} = \{x_{i+1} - x_i,\ y_{i+1} - y_i,\ z_{i+1} - z_i\}.$$

Учитывая координатную форму записи скалярного произведения, имеем

$$\bar F(M_i)\cdot\overline{A_iA_{i+1}} = P(M_i)\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x_i} + Q(M_i)\underbrace{(y_{i+1} - y_i)}_{\Delta y_i} + R(M_i)\underbrace{(z_{i+1} - z_i)}_{\Delta z_i}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{(AB)} \bar F d\bar r = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i P(M_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_i Q(M_i)\Delta y_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_i R(M_i)\Delta z_i.$$

Отсюда, согласно определению 20.2 криволинейного интеграла, получаем

$$\int\limits_{(AB)} \bar F d\bar r = \int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \qquad (21.4)$$

Этим доказано существование линейного интеграла и циркуляции и дан метод их вычисления.

Замечание. Формулу (21.4) легко запомнить следующим образом: если $\bar F = \{P, Q, R\}$, $d\bar r = \{dx, dy, dz\}$, а $\bar F d\bar r$ – скалярное произведение, то $\bar F d\bar r = Pdx + Qdy + Rdz$.

Если вектор $\bar F$ рассматривать как силу, то скалярное произведение $\bar F(M_i)\cdot\overline{A_iA_{i+1}}$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка будет работой силы при перемещении точки вдоль пути (A_iA_{i+1}) и $\int\limits_{(AB)} \bar F d\bar r$ дает работу силы при перемещении точки вдоль пути (AB).

21.3. Поверхностный интеграл первого и второго рода

Определение 21.6. Пусть в области (T) задано скалярное поле f. Пусть (S) – кусочно-гладкая поверхность, $(S) \subset (T)$. Разобьем поверхность (S) кусочно-гладкими кривыми на части (S_i) с площадями S_i и выберем произвольные точки $M_i \in (S_i)$. Рассмотрим интегральную сумму $\sum\limits_i f(M_i)S_i$. Обозначим через λ наибольший из диаметров множеств (S_i). Если предел таких интегральных сумм при $\lambda \to 0$ существует и не зависит от разбиения поверхности на части (S_i) и от выбора точек $M_i \in (S_i)$, то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода* и обозначается

$$\iint\limits_{(S)} f(M)dS = \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{(S)} f(M)dS = \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(M_i)S_i. \qquad (21.5)$$

Из этого определения, естественно, следует, что поверхностный интеграл первого рода обладает обычными свойствами интегралов (см., например, разд. 19.1 и 19.3).

Приведем здесь (без доказательства) формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода (на которую мы впоследствии опираться не будем): если поверхность (S) задана непрерывно дифференцируемой функцией $z = \varphi(x,y)$, где $(x,y) \in (D)$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{(D)} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Перед тем как дать определение поверхностного интеграла второго рода, введем понятие стороны поверхности.

Определение 21.6. *Стороной поверхности* (S) называется множество всех точек (S) с нормалями $\bar{n}$ $(|\bar{n}|=1)$ к поверхности (S) в этих точках. Из двух возможных направлений нормали выбирается одно, так, чтобы вектор нормали $\bar{n}$ являлся непрерывной функцией точек поверхности.

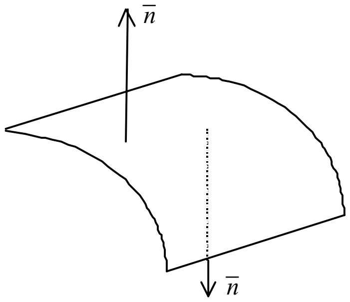


Рис. 126

Ниже будем рассматривать только двусторонние поверхности (рис. 126). При движении вдоль любого замкнутого контура на такой поверхности мы не можем перейти с одной ее стороны на другую. Односторонние поверхности (типа так называемого листа Мебиуса, который получается переворачиванием и последующим склеиванием ленты) из рассмотрения исключаются.

Определение 21.7. Пусть в области (T) задано векторное поле $\bar{F}$ и пусть (S) – кусочно-гладкая поверхность, $(S)\subset(T)$. Фиксируем одну из сторон этой поверхности. *Поверхностным интегралом второго рода* по выбранной стороне поверхности, или (что то же самое) *потоком векторного поля* $\bar{F}$ через поверхность (S) в сторону, определяемую вектором $\bar{n}$, называется интеграл $\iint\limits_{(S)} \bar{F}\,\bar{n}\,dS$. То есть

$$\iint\limits_{(S)} \bar{F}\,\bar{n}\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i \bar{F}(M_i)\bar{n}(M_i)S_i. \tag{21.6}$$

Таким образом, поверхностный интеграл второго рода (или поток векторного поля через поверхность) определяется как поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения $\bar{F}\,\bar{n}$. В формуле (21.6) S_i – площадь (S_i), λ – наибольший из диаметров (S_i); предел должен существовать и не зависеть от разбиения поверхности на части (S_i) и от выбора точек $M_i\in(S_i)$.

Замечание. Рассмотрим движение жидкости в пространстве. Пусть $\bar{F}=\bar{F}(M)$ – вектор скорости, тогда за время dt через поверхность dS в сторону вектора $\bar{n}$ протечет жидкости $\bar{F}_n dt\cdot dS=\bar{F}\,\bar{n}dt\cdot dS$, где $\bar{F}_n dt$ – высота цилиндра, $|\bar{F}_n|dt\cdot dS$ – его объем, $\bar{F}\,\bar{n}$ – скалярное произведение (рис. 127).

Следовательно, через всю поверхность (S) в единицу времени протечет жидкости

$$\frac{\iint\limits_{(S)} \bar{F}\,\bar{n}dtdS}{dt} = \frac{dt\iint\limits_{(S)} \bar{F}\,\bar{n}dS}{dt} = \iint\limits_{(S)} \bar{F}\,\bar{n}dS.$$

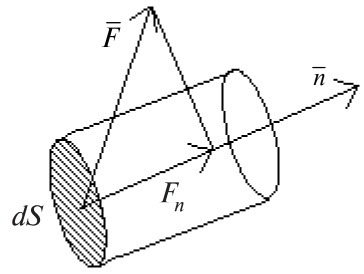


Рис. 127

Полученный результат оправдывает термин «поток векторного поля».

Из определения 21.7 следует, что поверхностный интеграл второго рода, или поток векторного поля через поверхность, обладает обычными свойствами интегралов. В отличие от поверхностного интеграла первого рода поток зависит от выбора стороны поверхности и меняет знак при ее смене.

Отметим здесь также, что определение 21.7 инвариантное, т.е. поток не зависит от выбора системы координат.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Пусть теперь в пространстве введена прямоугольная система координат xyz и пусть в этой системе $\bar{F}=\{P,Q,R\}, M_i(x_i,y_i,z_i)$. Пусть единичная нормаль $\bar{n}=\bar{n}(M)$ к выбранной стороне поверхности образует с осями координат $0x$, $0y$, $0z$ углы α, β, γ соответственно. Тогда $\bar{n}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ и $\bar{F}\,\bar{n}=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$. Учитывая определение 21.6, получаем

$$\iint\limits_{(S)} \bar{F}\,\bar{n}dS = \iint\limits_{(S)} [P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]dS =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_i \left[P(M_i)\cos\alpha(M_i)+Q(M_i)\cos\beta(M_i)+R(M_i)\cos\gamma(M_i)\right]S_i. \tag{21.7}$$

Рассмотрим одно из слагаемых в этой формуле:

$$\iint\limits_{(S)} R\cos\gamma dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_i R(M_i)\cos\gamma(M_i)S_i. \tag{21.8}$$

Обозначим $D_i=S_i\cos\gamma(M_i)$; с точностью до бесконечно малых высшего порядка D_i – это площадь проекции элемента поверхности

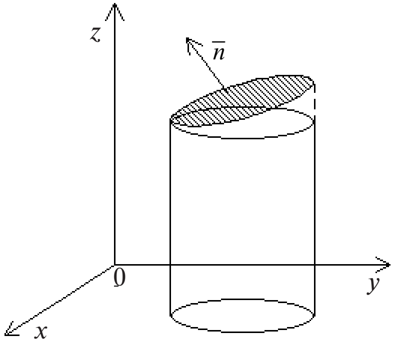


Рис. 128

(S_i) на плоскость $0xy$ со знаком «+», если $\cos\gamma > 0$, т.е. нормаль $\bar{n}$ образует с осью $0z$ острый угол, и «–», если $\cos\gamma < 0$, т.е. нормаль $\bar{n}$ образует с осью $0z$ тупой угол (рис. 128).

При таком обозначении $\iint\limits_{(S)} R\cos\gamma ds = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_i R(M_i)D_i$. Эта формула оправдывает другое обозначение поверхностного интеграла второго рода: $\iint\limits_{(S)} R\cos\gamma dS = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy$.

Теперь продолжаем.

1. Пусть поверхность задана уравнением $z = z(x,y)$. Мы будем предполагать, что на нашей стороне поверхности либо всюду $\cos\gamma > 0$, либо всюду $\cos\gamma < 0$. В противном случае поверхность нужно разбить на части, на каждой из которых $\cos\gamma$ сохраняет знак, и вычислять наш интеграл как сумму интегралов по таким частям. Если $M_i = M(x_i, y_i, z_i) = M(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$, то

$$\iint\limits_{(S)} R\cos\gamma dS = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_i R(x_i, y_i, z(x_i, y_i))D_i = \pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_i R(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\left|D_i\right|.$$

Здесь сумма $\sum\limits_i R(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\left|D_i\right|$ является интегральной суммой для двойного интеграла $\int\limits_{(D_{xy})} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$ по области (D_{xy}) – проекции (S) на плоскость $0xy$. При нашем предположении непрерывности функции $R(x,y,z)$ предел такой суммы равен этому интегралу:

$$\iint\limits_{(S)} R\cos\gamma ds = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = \pm\int\limits_{(D_{xy})} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy. \tag{21.9}$$

Здесь знак «+» будет в случае, если на нашей стороне поверхности $\cos\gamma > 0$, т.е. нормаль $\bar{n}$ образует с осью $0z$ острый угол, или сторона

поверхности – верхняя, а знак «–» в противоположном случае, т.е. для нижней стороны поверхности (ось $0z$, пронзая поверхность, сначала встречает нижнюю сторону поверхности, потом верхнюю).

Формула (21.9) сводит поверхностный интеграл по стороне (S) к двойному интегралу по ее проекции. Эту формулу не так сложно запомнить: при вычислении $\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy$ надо проектировать (S) на плоскость $0xy$ и выражать z через x и y из уравнения поверхности (S). При этом знак зависит от угла нормали к стороне поверхности с осью $0z$.

2. Пусть (S) – часть цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси $0z$. Для таких поверхностей угол γ прямой. Эти поверхности проектируются на плоскость $0xy$ не в область, а в линию.

Для любой точки такой поверхности $\cos\gamma = 0$, и согласно формуле (21.8)

$$\iint\limits_{(S)} R\cos\gamma dS = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = 0. \tag{21.10}$$

Аналогично рассматриваются другие слагаемые формулы (21.7).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 21.1. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны и (D_{xy}), (D_{yz}), (D_{zx}) – проекции поверхности (S) на плоскости $0xy$, $0yz$, $0zx$ соответственно. Тогда

$$\iint\limits_{(S)} R\cos\gamma ds = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = \begin{cases} \pm\iint\limits_{(D_{xy})} R(x,y,z(x,y))dxdy \text{ – для поверхности } z = z(x,y); \\ 0 \text{ – для цилиндрической поверхности} \\ \text{с образующими, параллельными оси } 0z. \end{cases}$$

Будет знак «+», если угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью $0z$ острый, и «–», если этот угол тупой.

$$\iint\limits_{(S)} P\cos\alpha ds = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz = \begin{cases} \pm\iint\limits_{(D_{yz})} P(x(y,z),y,z)dydz \text{ – для поверхности } x = x(y,z); \\ 0 \text{ – для цилиндрической поверхности} \\ \text{с образующими, параллельными оси } 0x. \end{cases}$$

Будет знак «+», если угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью $0x$ острый, и «–», если этот угол тупой.

$$\iint\limits_{(S)} Q\cos\beta\, ds = \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dzdx = \begin{cases} \pm \iint\limits_{(D_{zx})} Q(x, y(z,x), z)\,dzdx \text{ – для поверх-} \\ \text{ности } y = y(z,x); \\ 0 \text{ – для цилиндрической поверхности} \\ \text{с образующими, параллельными оси } 0y. \end{cases}$$

Будет знак «+», если угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью $0y$ острый, и «–», если этот угол тупой.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_{(S)} y^2 dzdx$, где (S) – внешняя сторона той половины сферы $x^2+y^2+z^2=1$, где $y<0$ (рис. 129).

Решение

Согласно условию мы должны проектировать нашу поверхность на плоскость $0zx$. Уравнение проекции на эту плоскость получается из уравнения сферы при $y=0$: $x^2+z^2=1$ (рис. 130).

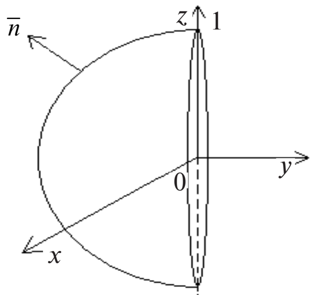


Рис. 129

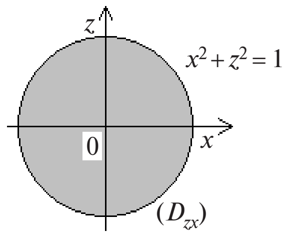


Рис. 130

Так как на нашей стороне поверхности $\cos\beta<0$, то, выражая y через z и x и переходя после этого к полярным координатам, имеем

$$\iint\limits_{(S)} y^2 dzdx = -\iint\limits_{(D_{zx})} (1-x^2-z^2)\,dzdx = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2) r\,dr = -2\pi\int_0^1 (r-r^3)\,dr =$$

$$= -2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = -2\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right] = -2\pi\frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_{(S)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где внешняя сторона пирамиды, образованной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Решение

Из соображений симметрии поверхности (рис. 131) и подынтегрального выражения относительно всех трех переменных имеем

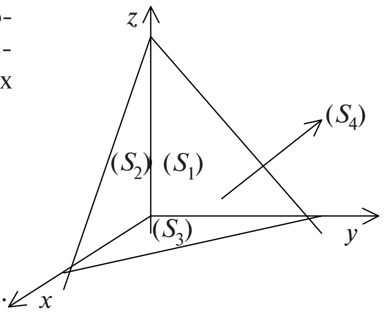


Рис. 131

$$\iint\limits_{(S)} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iint\limits_{(S)} zdxdy =$$

$$= 3\left(\iint\limits_{(S_1)} zdxdy + \iint\limits_{(S_2)} zdxdy + \iint\limits_{(S_3)} zdxdy + \iint\limits_{(S_4)} zdxdy \right).$$

В правой части этого равенства $\iint\limits_{(S_1)} zdxdy = 0$ и $\iint\limits_{(S_2)} zdxdy = 0$, так как (S_1) и (S_2) проектируются на плоскость $0xy$ в линию, а $\iint\limits_{(S_3)} zdxdy = 0$, так как уравнение поверхности (S_3) – это $z=0$. Уравнение поверхности (S_4) – это $x+y+z=1 \Leftrightarrow z=1-x-y$, нормаль к этой поверхности образует с осью $0z$ острый угол и правая часть равна $+3\iint\limits_{(D_{xy})}(1-x-y)\,dxdy$. Область (D_{xy}) имеет вид, изображенный на рис. 132.

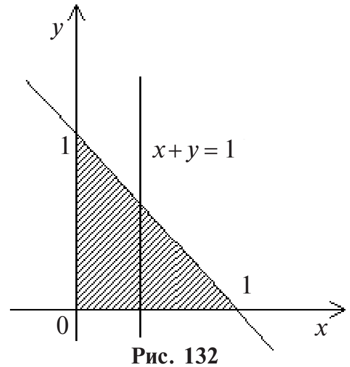


Рис. 132

Можно продолжить:

$$3\iint\limits_{(D_{xy})}(1-x-y)\,dxdy = 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy =$$

$$= 3\int_0^1 dx\left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} = 3\int_0^1\left(1-x-x+x^2-\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2\right)dx = 3\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\right)dx =$$

$$= 3\left[\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]\Bigg|_0^1 = 3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

21.4. Формула Гаусса–Остроградского

Теорема 21.2. Пусть в области (T) задано векторное поле $\bar{F}=\{P,Q,R\}$, где P, Q, R непрерывны и имеют непрерывные частные производные, пусть $(S)\in(T)$ – внешняя сторона кусочно-гладкой поверхности, ограничивающей тело $(V)\subset(T)$; $n=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ – единичная нормаль к этой стороне поверхности. Тогда

$$\iint\limits_{(S)}\bar{F}\,\bar{n}\,dS=\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{21.11}$$

▲ Согласно разд. 21.3 левая часть формулы (21.11) – это $\iint\limits_{(S)}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$, а сама формула может быть записана в виде

$$\iint\limits_{S}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{21.12}$$

Докажем одну часть формулы (21.12), т.е. докажем, что

$$\iint\limits_{(S)}Rdxdy=\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz. \tag{21.13}$$

1. Пусть (V) ограничено снизу и сверху частями двух поверхностей $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$, проектирующимися на плоскость $0xy$ в некоторую область (D_{xy}), а «сбоку» – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $0z$, т.е. описанная в разд. 19.4 «банка с двумя крышками» (рис. 133).

Расставив пределы в тройном интеграле в правой части равенства (21.13), получим

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{(D_{xy})}dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz=\iint\limits_{(D_{xy})}dxdy\,R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}=$$

$$\iint\limits_{(D_{xy})}\left[R\left(x,y,z_2(x,y)\right)-R\left(x,y,z_1(x,y)\right)\right]dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(D_{xy})}R\left(x,y,z_2(x,y)\right)dx\,dy-\iint\limits_{(D_{xy})}R\left(x,y,z_1(x,y)\right)dx\,dy.$$

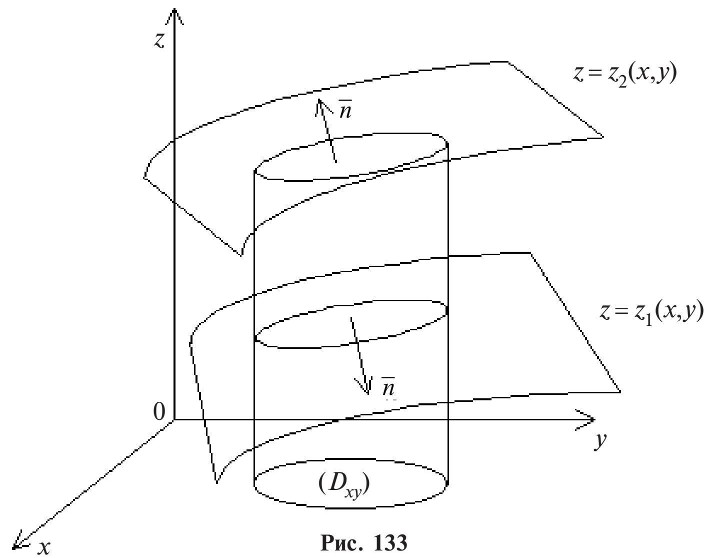


Рис. 133

Если (S_2) – верхняя сторона поверхности $z=z_2(x,y)$ (для нее угол γ с осью $0z$ острый и $\cos\gamma>0$) и (S_1) – нижняя сторона поверхности $z=z_1(x,y)$ (для нее угол γ с осью $0z$ тупой и $\cos\gamma<0$), то последнее выражение можно переписать в виде суммы двух поверхностных интегралов: $\iint\limits_{(S_2)}R(x,y,z)dxdy+\iint\limits_{(S_1)}R(x,y,z)dxdy$. Добавив сюда равный нулю интеграл по цилиндрической боковой поверхности (S_3) (образующая этой поверхности параллельна оси $0z$), получим

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{(S_2)}R(x,y,z)dxdy+$$

$$+\iint\limits_{(S_1)}R(x,y,z)\,dx\,dy+\iint\limits_{(S_3)}R(x,y,z)\,dx\,dy=\iint\limits_{(S)}R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

что и доказывает справедливость формулы (21.13) в нашем случае.

2. В общем случае область (V) нужно разбить на конечное число областей указанного выше вида (V_i) с границами (S_i) (будем рассматривать только тела, для которых это возможно). Для каждой из таких областей $\iiint\limits_{(V_i)}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{(S_i)}Rdxdy$. Складывая эти равенства, получим

$$\sum_i \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \sum_i \iint\limits_{(S_i)} Rdxdy. \qquad (21.14)$$

Левая часть последнего равенства, очевидно, равна $\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$.

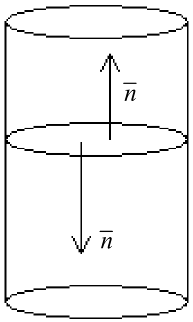


Рис. 134

При сложении интегралов в правых частях интегралы по цилиндрическим перегородкам равны нулю, интегралы же по другим перегородкам взаимно уничтожаются, так как интегралы по таким перегородкам в сумму будут входить дважды, причем с разными знаками, ибо нормали к этим перегородкам направлены в противоположные стороны (рис. 134). Тогда

$$\sum_i \iint\limits_{(S_i)} Rdxdy = \iint\limits_{(S)} Rdxdy \text{ и } \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Rdxdy.$$

Аналогично: $\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Pdydz$, $\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Qdzdx$ и

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \blacksquare$$

Определение 21.8. *Дивергенцией* векторного поля $\bar{F} = \{P, Q, R\}$ называется скалярная (числовая) величина $\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ (естественно, число $\operatorname{div} \bar{F}$ зависит от точки M, т.е. от ее координат x, y, z).

Обозначив $dV = dxdydz$, формулу Гаусса–Остроградского можно записать в виде

$$\iint\limits_{(S)} \bar{F}\bar{n} dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \bar{F} dV \qquad (21.15)$$

и «прочесть» следующим образом: поток векторного поля $\bar{F}$ через замкнутую поверхность (S) в сторону, определяемую вектором внешней нормали $\bar{n}$, равен интегралу от дивергенции этого поля по телу (V), ограниченному поверхностью (S).

Пример 1. Найти дивергенцию векторного поля

$$\bar{F} = \underbrace{x^2 yz}_{P} \bar{i} + \underbrace{xy^2 z}_{Q} \bar{j} + \underbrace{xyz^2}_{R} \bar{k}.$$

Решение

$$\operatorname{div} \bar{F} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz.$$

Пример 2. Решим пример 2 в разд. 21.3 еще раз, применив формулу Гаусса–Остроградского.

Решение

$$P = x,\ Q = y,\ R = z \Rightarrow \operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow \iint\limits_{(S)} Pdx + Qdy + Rdz = \iiint\limits_{(V)} 3dV = 3V,$$

где V – объем изображенной на рис. 131 пирамиды, следовательно

$$\iint\limits_{S} Pdx + Qdy + Rdz = 3\frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \left(\frac{1}{2} 1 \cdot 1 \right) \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Инвариантное определение дивергенции векторного поля

Создается впечатление, что скаляр $\operatorname{div} \bar{F}$ зависит от выбора системы координат. Покажем, что на самом деле это не так. Возьмем точку $M_0 \in (T)$ и заключим ее в какое-нибудь тело (V), ограниченное поверхностью (S). Применим формулу Гаусса–Остроградского: $\iint\limits_{(S)} \bar{F}\bar{n} dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \bar{F} dV$. Используя теорему 19.5 о среднем в тройном интеграле, получим $\iint\limits_{(S)} \bar{F}\bar{n} dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \bar{F} dV = \operatorname{div} \bar{F}(M) \cdot V$, где $M \in (V)$, V – объем тела (V). Отсюда

$$\operatorname{div} \bar{F}(M) = \frac{\iint\limits_{(S)} \bar{F}\bar{n} dS}{V}. \qquad (21.16)$$

Теперь будем стягивать тело (V) к точке M_0, тогда $\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \right.$ непрерывны $\left. \right)$ существует предел левой части равенства (21.16)

$$\lim_{(V) \to M_0} \operatorname{div} \bar{F}(M) = \operatorname{div} \bar{F}(M_0).$$

Значит, существует предел и правой части этого равенства:

$$\operatorname{div}\bar{F}(M_0)=\lim_{(V)\to M_0}\frac{1}{V}\iint_{(S)}\bar{F}\,\bar{n}\,dS. \qquad (21.17)$$

Правая, а значит, и левая часть формулы (21.17) не зависят от выбора системы координат. Формулу (21.17) можно взять за инвариантное (т.е. не зависящее от выбора системы координат) определение дивергенции векторного поля.

Физический смысл дивергенции векторного поля: если рассматривать движение жидкости в пространстве, то стоящий в правой части формулы (21.17) поток $\iint\limits_{(S)}\bar{F}\,\bar{n}\,dS$ определяет количество жидкости, вытекающей из тела (V) (если поток меньше нуля, то втекающей в тело (V)) за единицу времени; тогда $\operatorname{div}\bar{F}(M_0)=\lim\limits_{(V)\to M_0}\frac{1}{V}\iint\limits_{(S)}\bar{F}\,\bar{n}\,dS.$ дает так называемую плотность источников в точке M_0 (жидкость вытекает за счет наличия источников, втекает за счет наличия стоков), т.е. дивергенция показывает, сколько жидкости «создается» в точке M_0.

21.5. Формулы Грина и Стокса

Теорема 21.3 (формула Грина).

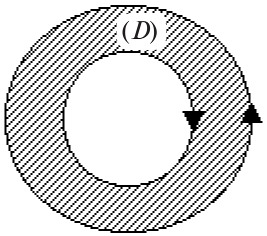


Рис. 135

Пусть (D) – плоская область, ограниченная конечным числом замкнутых, самонепересекающихся кусочно-гладких кривых; (L) – граница области (D), проходимая в положительном направлении, так что область (D) при движении вдоль кривой остается для правой системы координат слева, для левой системы координат – справа; $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $(D)\cup(L)$ (рис. 135). Тогда

$$\int_{(L)}Pdx+Qdy=\iint_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (21.18)$$

▲ Докажем часть формулы (21.18):

$$\int_{(L)}Pdx=-\iint_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy. \qquad (21.19)$$

1. Пусть область (D) – криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x=a$ и $x=b$ и непрерывными кривыми $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ ($\varphi(x)\le\psi(x)$) (рис. 136).

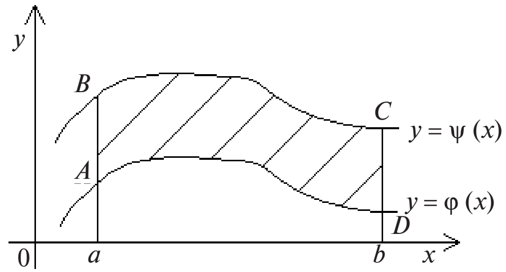


Рис. 136

Тогда

$$-\iint_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy=-\int_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)}dx=$$

$$=\int_a^b P(x,\varphi(x))dx-\int_a^b P(x,\psi(x))dx=\int_a^b P(x,\varphi(x))dx+\int_b^a P(x,\psi(x))dx.$$

Последнее выражение можно переписать в виде суммы двух криволинейных интегралов $\int\limits_{(AD)}P(x,y)dx+\int\limits_{(CB)}P(x,y)dx.$ Добавим сюда равные нулю $(x=\text{const}\Rightarrow dx=0)$ интегралы $\int\limits_{(DC)}P(x,y)dx$ и $\int\limits_{(BA)}P(x,y)dx$:

$$-\iint_{(S)}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_{(AD)}P(x,y)dx+\int_{(DC)}P(x,y)dx+$$

$$+\int_{(CB)}P(x,y)dx+\int_{(BA)}P(x,y)dx=\int_{(ADCBA)}P(x,y)dx,$$

т.е. получили формулу (21.19).

2. Чтобы получить формулу (21.19) для любой области, нужно разбить ее на криволинейные трапеции (будем рассматривать только области, для которых это возможно), к каждой из них применить формулу (21.19) и сложить такие равенства. В результате будем иметь:

$$\sum_i \int_{(L_i)} Pdx = -\sum_i \iint_{(D_i)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \qquad (21.20)$$

Правая часть этого равенства, очевидно, равна $-\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$.

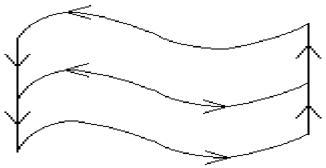


Рис. 137

При сложении интегралов в левых частях интегралы по вертикальным перегородкам равны нулю, а интегралы по другим перегородкам взаимно уничтожаются, так как эти перегородки проходятся дважды, причем в противоположных направлениях (рис. 137).

В результате будем иметь $\sum_i \int_{(L_i)} Pdx = \int_{(L)} Pdx$ и $\int_{(L)} Pdx = -\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$.

Аналогично, рассматривая криволинейные трапеции «вдоль» оси $0y$, получим, что $\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{(L)} Qdy$. Следовательно,

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{(L)} Pdx + Qdy. \ \blacksquare$$

Пример. Вычислить $\int_{(L)} ydx - xdy$, где (L) – замкнутый контур, изображенный на рис. 138.

Решение

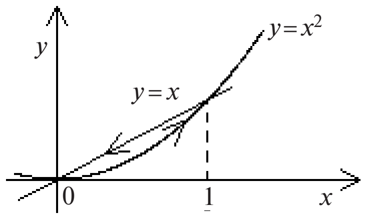


Рис. 138

$$\int_{(L)} \underbrace{y}_{P} dx \underbrace{-x}_{Q} dy = \iint_{(D)} (-1-1) dxdy =$$

$$= -2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy = -2 \int_0^1 (x - x^2) dx =$$

$$= -2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_0^1 = -2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -2 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Обобщением формулы Грина на случай трех переменных является так называемая формула Стокса. Чтобы написать ее, дадим сначала следующее определение.

Определение 21.9. *Ротором* векторного поля $\bar{F} = \{P, Q, R\}$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\bar{k} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

(естественно, вектор $\operatorname{rot}\bar{F}$ и его координаты зависят от точки M, т.е. от ее координат x, y, z).

Запомнить это определение можно при помощи следующей символической формулы:

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \bar{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \bar{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

(раскладываем определитель по первой строке, получаемые при этом произведения рассматриваем как частные производные, например $\frac{\partial}{\partial y} \cdot R = \frac{\partial R}{\partial y}$).

Пример. Найти ротор поля $\bar{F} = \underbrace{x^2 yz}_{P}\bar{i} + \underbrace{xy^2 z}_{Q}\bar{j} + \underbrace{xyz^2}_{R}\bar{k}$.

Решение

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & xy^2z & xyz^2 \end{vmatrix} = \bar{i}(xz^2 - xy^2) - \bar{j}(yz^2 - x^2y) + \bar{k}(y^2z - x^2z) =$$

$$= \{x(z^2 - y^2);\ y(x^2 - z^2); z(y^2 - x^2)\}.$$

Теорема 21.4 (формула Стокса). Пусть в области (T) задано векторное поле $\overline{F}=\{P,Q,R\}$, где функции P, Q, R – непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Пусть (L) – замкнутый контур, ограничивающий двустороннюю поверхность (S), $(S)\cup(L)\subset(T)$. Тогда

$$\int\limits_{(L)}\overline{F}d\overline{r}=\iint\limits_{(S)}\operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,dS. \qquad (21.21)$$

В этой формуле сторона поверхности (S) и направление обхода контура (L) связаны следующим образом: если смотреть со стороны нормали к нашей стороне поверхности в точках, близких к (L), то обход контура (L) виден совершающимся против часовой стрелки для правой системы координат и по часовой стрелке для левой системы координат. Или: наблюдатель, идущий по контуру так, что нормаль $\overline{n}$ пронизывает его от ног до головы, должен видеть непосредственно прилегающую к нему часть поверхности слева от себя (для правой системы координат) (рис. 139).

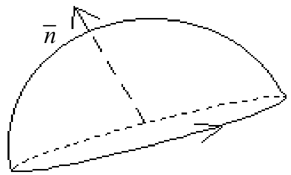


Рис. 139

«Прочесть» формулу (21.21) можно следующим образом: циркуляция векторного поля $\overline{F}$ вдоль замкнутого контура (L) равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную данным контуром. При этом направление обхода (L) и сторона поверхности (S) связаны по указанному выше правилу.

▲ В соответствии с определениями 21.5 (циркуляции векторного поля), 21.9 (ротора этого поля) и 21.7 (потока векторного поля через поверхность) формулу (21.21) можно переписать следующим образом:

$$\int\limits_{(L)}Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (21.22)$$

Докажем часть этой формулы, относящуюся к функции P (остальные части доказываются аналогично). То есть докажем, что

$$\int\limits_{(L)}Pdx=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy. \qquad (21.23)$$

Пусть поверхность (S) задана уравнением $z=f(x,y),(x,y)\in(D_{xy})$. Тогда левая часть (21.23) принимает вид

$$\int\limits_{(L)}Pdx=\int\limits_{(L)}P(x,y,f(x,y))dx=$$

$$=\int\limits_{(C)}P(x,y,f(x,y))dx,$$

где (C) – проекция (L) на плоскость (рис. 140).

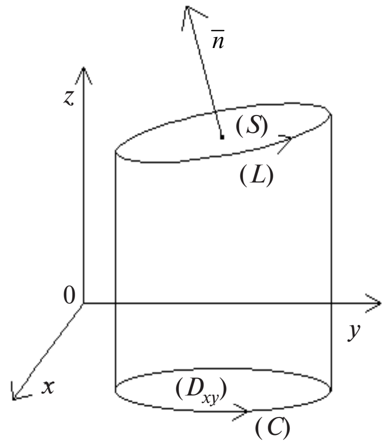


Рис. 140

Последнее равенство следует из определения 20.2 криволинейного интеграла второго рода, так как проекции на ось $0x$ части контура (L) и проекции этой части на плоскость $0xy$, т.е. части контура (C), совпадают.

Применим к последнему криволинейному интегралу формулу Грина (21.19):

$$\int\limits_{(L)}Pdx=\int\limits_{(C)}P(x,y,f(x,y))dx=-\iint\limits_{(D_{xy})}\frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y}dxdy.$$

Частную производную под знаком интеграла вычисляем по правилу нахождения производной сложной функции:

$$\int\limits_{(L)}Pdx=-\iint\limits_{(D_{xy})}\left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy=$$

$$=-\iint\limits_{(D_{xy})}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}dxdy-\iint\limits_{(D_{xy})}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}dxdy,$$

где $z=f(x,y)$. Полученные интегралы согласно формуле вычисления поверхностных интегралов (21.9) перепишем в виде следующих интегралов $(\cos\gamma>0)$:

$$\int\limits_{(L)}Pdx=-\iint\limits_{(S)}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}dxdy-\iint\limits_{(S)}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}dxdy. \qquad (21.24)$$

Сравним полученный результат с правой частью формулы (21.23):

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Второе из этих слагаемых как раз и входит в правую часть формулы (21.24), значит, для доказательства равенства (21.23) достаточно проверить, что $-\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}dxdy = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx$ или, применяя другую форму записи поверхностного интеграла,

$$-\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma dS = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta dS.$$

Для проверки этого равенства нужно показать, что

$$\cos\beta = -\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma = -\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma.$$

Наша поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, или $\underbrace{z - f(x,y)}_{F(x,y,z)} = 0.$ В соответствии с результатами разд. 12.8 вектор нормали к этой поверхности $N = \left\{\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z}\right\} = \left\{-\frac{\partial f}{\partial x}; -\frac{\partial f}{\partial y}; 1\right\}$. Следовательно,

$$\cos\beta = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

откуда $\cos\beta = -\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma$. ■

Теперь можем провести *доказательство достаточности* условий теоремы 20.5: если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, то из формулы (21.22) следует, что для любого замкнутого контура $(L) \subset (T)$ с натянутой на него поверхностью $(S) \subset (T)$ $\int\limits_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = 0$, а в соответствии с теоремой 20.2 последнее равенство является необходимым и доста-

точным условием независимости интеграла от формы пути интегрирования. ■

Замечание. Если (L) и (S) лежат на плоскости $0xy$, то $z = 0$, и из формулы Стокса (21.22) получаем формулу Грина.

Инвариантное определение ротора векторного поля

Создается впечатление, что вектор $\operatorname{rot}\overline{F}$ зависит от выбора системы координат. Покажем, что на самом деле это не так. Возьмем точку $M_0 \in (T)$ и любой единичный вектор $\overline{n}$, исходящий из точки M_0. «Окружим» M_0 перпендикулярной к вектору $\overline{n}$ плоской площадкой (S) с границей (L) (рис. 141).

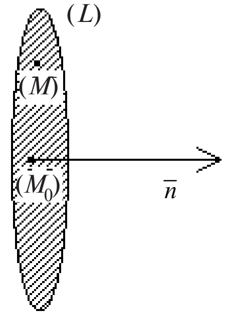


Рис. 141

Применим формулу Стокса:

$$\int\limits_{(L)} \overline{F}d\overline{r} = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,dS.$$

Следующее равенство запишем на основании теоремы о среднем в поверхностном интеграле, которая аналогична теореме 19.2 о среднем в двойном интеграле:

$$\iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,dS = \operatorname{rot}\overline{F}(M)\overline{n}(M)S = \operatorname{rot}\overline{F}(M)\overline{n}S,$$

где $\operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}$ — скалярное произведение; S — площадь площадки; M — некоторая ее точка. Отсюда

$$\operatorname{rot}\overline{F}(M)\overline{n} = \frac{1}{S}\int\limits_{(L)} \overline{F}dr.$$

Теперь будем стягивать площадку (S) в точку M_0, тогда (частные производные функций P, Q, R непрерывны) существует предел левой части последнего равенства: $\lim\limits_{(S)\to M_0} \operatorname{rot}\overline{F}(M)\overline{n} = \operatorname{rot}\overline{F}(M_0)\,\overline{n}.$ Но тогда существует и предел правой части этого равенства:

$$\operatorname{rot}\overline{F}(M_0)\overline{n} = \lim\limits_{(S)\to M_0} \frac{1}{S}\int\limits_{(L)} \overline{F}d\overline{r}. \qquad (21.25)$$

Из определения 21.5 видно, что правая часть этой формулы не зависит от выбора системы координат, значит, и левая часть этой формулы тоже не зависит от выбора системы координат. Формула (21.25) задает $\operatorname{rot}\overline{F}(M_0)\overline{n}$ ($\overline{n}$ – единичный вектор), т.е. проекцию $\operatorname{rot}\overline{F}(M_0)$ на любое направление. Ее можно взять за инвариантное определение $\operatorname{rot}\overline{F}$, т.е. $\operatorname{rot}\overline{F}(M_0)$ – это вектор, проекция которого на произвольное направление, определяемое вектором $\overline{n}$, задается этой формулой.

Если рассматривать произвольное движение некоторого твердого тела и $\overline{F}$ – вектор скорости в каждой точке, то $\operatorname{rot}\overline{F}$ с точностью до числового множителя будет давать мгновенную угловую скорость. С этим связано и само название «ротор» (вихрь) векторного поля.

21.6. Оператор Гамильтона. Операции второго порядка

Введем символический вектор – оператор Гамильтона:

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k},$$

где символ «$\overline{\nabla}$» читается как «набла». Пользуясь этим символом, можно написать.

1. Вектор $\overline{\operatorname{grad} U} = \overline{\nabla} u$ – это произведение вектора $\overline{\nabla}$ на число *u*.

Действительно, при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число: $\overline{\operatorname{grad} U} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}u; \frac{\partial}{\partial y}u; \frac{\partial}{\partial z}u\right\}$; понимая эти произведения как частные производные, имеем

$$\overline{\operatorname{grad} U} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

2. Скаляр (число) $\operatorname{div}\overline{F} = \overline{\nabla}\,\overline{F}$ – это скалярное произведение векторов $\overline{\nabla}$ и $\overline{F}$.

Действительно, считая скалярное произведение как сумму произведений координат векторов и понимая эти произведения как частные производные, имеем

$$\operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

3. Вектор $\operatorname{rot}\overline{F} = \overline{\nabla} \times \overline{F}$ – это векторное произведение векторов $\overline{\nabla}$ и $\overline{F}$.

Действительно, находя векторное произведение и рассуждая так же, как изложено выше, имеем

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overline{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}R - \frac{\partial}{\partial z}Q\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}R - \frac{\partial}{\partial z}P\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right) =$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \overline{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Операции второго порядка

Попробуем применить рассмотренные выше три операции первого порядка: $\overline{\operatorname{grad} U}$, $\operatorname{div}\overline{F}$, $\operatorname{rot}\overline{F}$, переводящие соответственно скаляр в вектор, вектор в скаляр и вектор в вектор, последовательно (там, где это возможно). При этом получим пять операций второго порядка: $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{F}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{F}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{F}$. Рассмотрим некоторые из этих операций.

1. При выполнении условий теоремы 12.9 о смешанных производных.

$$\operatorname{rot}\overline{\operatorname{grad} U} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right) = 0$$

Используя оператор Гамильтона, этот результат можно получить короче: $\operatorname{rot}\overline{\operatorname{grad} U} = \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} U = 0$ как векторное произведение коллинеарных векторов $\overline{\nabla}$ и $\overline{\nabla} U$.

2. При существовании соответствующих производных $\operatorname{div}\overline{\operatorname{grad} U} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$ (Δ – это так называемый оператор Лапласа).

3. При выполнении условий теоремы 12.9 о смешанных производных

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{F} = \operatorname{div}\left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} =$$

$$=\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}=0.$$

При помощи оператора Гамильтона этот результат можно получить короче: $\operatorname{div}\operatorname{rot} F=\overline{\nabla}\cdot\underbrace{\overline{\nabla}\times\overline{F}}_{\perp\overline{\nabla}}=0$ как скалярное произведение ортогональных векторов $\overline{\nabla}$ и $\overline{\nabla}\times\overline{F}$.

21.7. Специальные векторные поля

Потенциальное поле

Определение 21.10. Векторное поле $\overline{F}=\{P, Q, R\}$ называется потенциальным, если существует скалярное поле U, называемое потенциалом, такое, что $\overline{F}=\overline{\operatorname{grad} U}$.

Теорема 21.5. Пусть в области (T) функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные. Для того чтобы в этой области поле $\overline{F}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot}\overline{F}=0$.

Необходимость этого условия уже доказана (см. п. 1) в разд. 21.6).

▲ *Достаточность.* Пусть $\operatorname{rot}\overline{F}=0$, т.е.

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Тогда согласно теоремам 20.5 и 20.3 выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ является дифференциалом некоторой функции $U=U(x,y,z)$:

$$Pdx+Qdy+Rdz=dU,$$

откуда $P=\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial U}{\partial y}$, $R=\dfrac{\partial U}{\partial z}$, т.е.

$$\overline{F}=\{P, Q, R\}=\left\{\frac{\partial U}{\partial x};\ \frac{\partial U}{\partial y};\ \frac{\partial U}{\partial z}\right\}=\overline{\operatorname{grad} U}.\ ■$$

Замечание. При доказательстве теоремы (20.3) была получена и формула для нахождения потенциала U:

$$U(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz. \qquad (21.26)$$

В этой формуле векторное поле задано в области (T); фиксированная точка (x_0,y_0,z_0) и точка (x,y,z), в которой ищется потенциал, принадлежат этой области, а интеграл берется по любому пути, принадлежащему (T) и соединяющему эти две точки. В частности, удобен путь по ломаной, звенья которой параллельны координатным осям. К правой части формулы (21.26), естественно, можно прибавить произвольную постоянную.

Пример. $\overline{F}=(y+z)\overline{i}+(x+z)\overline{j}+(x+y)\overline{k}.$ Проверить, что это поле потенциально, и найти его потенциал.

Решение

Для этого в соответствии с теоремой (21.5) найдем ротор этого поля:

$$\operatorname{rot}\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=\overline{i}(1-1)-\overline{j}(1-1)+\overline{k}(1-1)=0,$$

следовательно, поле потенциально и его потенциал, определенный по формуле (21.26),

$$U(x,y,z)=\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz.$$

Вычислим этот интеграл по изображенной на рис. 142 ломаной как сумму интегралов по ее звеньям:

$$U(x,y,z)=\underbrace{\int\limits_0^x 0dx}_{\substack{y=0,\ z=0\\ dy=0,\ dz=0}}+\underbrace{\int\limits_0^y xdy}_{\substack{x=c,\ z=0\\ dx=0,\ dz=0}}+$$

$$+\underbrace{\int\limits_0^z (x+y)dz}_{\substack{x=c,\ y=c\\ dx=0,\ dy=0}}=xy+xz+yz.$$

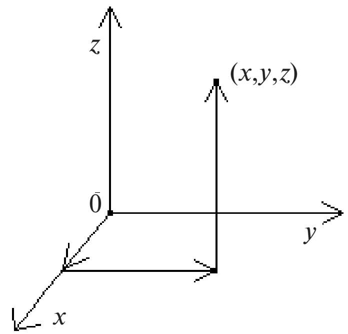


Рис. 142

Отметим, что в потенциальном поле линейный интеграл $\int\limits_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy+Rdz$ не зависит от формы пути интегрирования и в силу формулы (20.7)

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy + Rdz = U\Big|_{(A)}^{(B)} = U(B) - U(A). \qquad (21.27)$$

Соленоидальное поле

Определение 21.11. Векторное поле $\bar{F}$ называется *соленоидальным*, если существует другое векторное поле $\bar{A}$, называемое векторным потенциалом, такое, что $\bar{F} = \operatorname{rot}\bar{A}$.

Теорема 21.6. Пусть в области (T) функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные. Для того чтобы в этой области $\bar{F}$ было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div}\bar{F} = 0$.

Необходимость этого условия уже доказана (см. п. 3) в разд. 21.6.).

▲ *Достаточность.* Пусть $\operatorname{div}\bar{F} = 0$. Надо доказать, что существует $\bar{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, такое, что

$$\bar{F} = \{P, Q, R\} = \operatorname{rot}\bar{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left\{\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right\},$$

т.е.

$$P = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad Q = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad R = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \qquad (21.28)$$

Не пытаясь искать все решения этой системы, найдем одно частное ее решение. Положим, что $A_z = 0$. Тогда $P = -\dfrac{\partial A_y}{\partial z}$, $Q = \dfrac{\partial A_x}{\partial z}$. Из первой из этих формул следует, что $A_y = -\int\limits_{z_0}^{z} P(x,y,z)dz + \varphi(x,y)$, где z_0 – фиксированная точка, $\varphi(x,y)$ – постоянная (по z) интегрирования, которую нужно определить. Из второй формулы $A_x = \int\limits_{z_0}^{z} Q(x,y,z)dz$ (постоянную интегрирования здесь берем равной нулю). Дифференцируя интегралы по параметру, получаем: $\dfrac{\partial A_y}{\partial x} = -\int\limits_{z_0}^{z} \dfrac{\partial P}{\partial x}dz + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial A_x}{\partial y} = \int\limits_{z_0}^{z} \dfrac{\partial Q}{\partial y}dz$.

Подставим эти значения в последнее из уравнений (21.28):

$$R = R(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial x}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Q}{\partial y}dz = \int_{z_0}^{z} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dz + \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Так как $\operatorname{div}\bar{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$ и $-\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial R}{\partial z}$, то можно продолжить:

$$R(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = R(x,y,z)\Big|_{z_0}^{z} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = R(x,y,z) - R(x,y,z_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = R(x,y,z_0)$. Теперь, например,

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} R(x,y,z_0)dx,$$

где x_0 – фиксированная точка. Тем самым мы нашли частное решение системы уравнений (21.28):

$$A_z = 0,\ A_x = \int_{z_0}^{z} Q(x,y,z)dz,\ A_y = -\int_{z_0}^{z} P(x,y,z)dz + \int_{x_0}^{x} R(x,y,z_0)dx. \ ■ \qquad (21.29)$$

Пример. Рассмотрим то же поле, что и выше:

$$\bar{F} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}.$$

Проверим, что оно не только потенциально, но и соленоидально, и найдем его векторный потенциал.

Решение

Очевидно, что $\operatorname{div}\bar{F} = \dfrac{\partial(y+z)}{\partial x} + \dfrac{\partial(x+z)}{\partial y} + \dfrac{\partial(x+y)}{\partial z} = 0 \Rightarrow$ поле соленоидально. Найдем векторный потенциал по формулам (21.29), взяв в них $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$:

$$A_z = 0, A_x = \int_0^z (x+z)dz = xz + \frac{z^2}{2}, A_y = -\int_0^z (y+z)dz + \int_0^x (x+y)dx = \frac{x^2}{2} + xy - yz - \frac{z^2}{2},$$

т.е.

$$\bar{A} = \left(xz + \frac{z^2}{2}\right)\bar{i} + \left(\frac{x^2}{2} + xy - yz - \frac{z^2}{2}\right)\bar{j}.$$

VIII

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

22. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

22.1. Определение и некоторые элементарные функции комплексного переменного

Определение 22.1. Пусть E — некоторое множество комплексных чисел z и $\forall z \in E$ соответствует одно комплексное число w. Тогда говорят, что w является (однозначной) функцией комплексного переменного z с областью определения E, и пишут $w = f(z)$. Функция комплексного переменного сопоставляет каждой точке комплексной плоскости z некоторую точку комплексной плоскости w.

Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$ и w является функцией от z (т.е. от x и от y). Тогда u и v тоже являются функциями от x и от y. Таким образом, задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ равносильно заданию двух действительных функций двух действительных переменных x и y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Определение 22.2. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью функции $w = f(z)$ и обозначаются $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} z$.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции $w = z^2$.

Решение

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \text{, т.е. } u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.$$

Определение 22.3. Если некоторым z из области определения функции соответствует более одного значения w, то такая функция комплексного переменного называется *многозначной*.

Пример. Функция $w = \sqrt[n]{z}$ — n-значная функция ($\forall z \neq 0$ соответствует n различных значений w).

Некоторые элементарные функции комплексного переменного

1. Степенная функция $w = z^{\alpha}$, где α — рациональное число, т.е. $\alpha = \dfrac{m}{n}$, m и n — натуральные.

Эта функция фактически уже была определена выше в разд. 8.2 $\left(z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m \right)$.

2. Показательная функция $w = e^z$.

Проведем формальное ее преобразование, используя формулу Эйлера:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Последнее выражение и берется за определение комплексного числа $w = e^z$. При этом $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Введенная таким образом показательная функция обладает обычными свойствами показательной функции действительного переменного:

а) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$, так как согласно выводам в разд.8.3

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1 + iy_1} e^{x_2 + iy_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)} = e^{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} = e^{z_1 + z_2};$$

б) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$ (аналогично);

в) $(e^z)^n = e^z e^z \ldots e^z = e^{z + z + \ldots + z} = e^{nz}$;

г) $e^{z + 2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$, значит показательная функция является периодической с периодом $2\pi i$.

3. Тригонометрические функции.

Для действительных x имеет место равенство $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Заменяя в этой формуле x на $-x$, имеем $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. Складывая и вычитая эти две формулы, получаем $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Теперь по аналогии определяем косинус и синус комплексного числа: $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ (определение показательной функции было дано выше). Далее определим, что $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

Оказывается, что для введенных таким образом функций справедливы все формулы тригонометрии, которые выражаются равенствами. Например:

а) $\sin^2 z+\cos^2 z=\dfrac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}+\dfrac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}=\dfrac{4}{4}=1$;

б) $\sin 2z=\dfrac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i}=2\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2\sin z\cos z$;

в) $\sin(z+2\pi)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}\right)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz+2\pi i}-e^{-iz-2\pi i}\right)=$

$=\dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\sin z$; аналогично $\cos(z+2\pi)=\cos z$.

4. Гиперболические функции и их связь с тригонометрическими.

По аналогии с гиперболическими функциями действительного переменного, по определению, $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\operatorname{th} z=\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z=\dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$. Из этих определений следуют те же свойства, что и для гиперболических функций действительного переменного. В частности,

$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=\frac{e^{2z}+2+e^{-2z}-e^{2z}+2-e^{-2z}}{4}=1.$$

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями дается следующими формулами:

$$\operatorname{sh} iz=i\sin z,\ \sin iz=i\operatorname{sh} z,\ \operatorname{ch} iz=\cos z,\ \cos iz=\operatorname{ch} z \qquad (22.1)$$

(т.е. i выносится как -1 для таких же функций действительного переменного с заменой гиперболических функций на тригонометрические и наоборот).

Докажем одну из этих формул (остальные доказательства аналогичны):

$$\sin iz=\frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i}=-i\frac{e^{-z}-e^{z}}{2}=i\operatorname{sh} z.$$

5. Логарифмическая функция $w=\operatorname{Ln} z$.

Эта функция определяется как функция, обратная показательной, т.е. согласно определению $w=\operatorname{Ln} z$ – это такое комплексное число, что $e^w=z$. Таким образом, если $w=u+iv$, то $e^u(\cos v+i\sin v)=z$.

Два комплексных числа равны только при совпадении их модулей и отличии аргументов на число, кратное 2π, поэтому $e^u=|z|\Leftrightarrow u=\ln|z|$ (это обычный логарифм действительного числа) и $v=\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k$ $(-\pi<\arg z\le\pi)$, значит,

$$w=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\arg z+2\pi ki,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (22.2)$$

Это бесконечнозначная функция, так как $\forall z\ne 0$ соответствует по этой формуле бесконечное число значений w. При каждом k получаем однозначную функцию комплексного переменного. Функция, получаемая при $k=0$, называется главным значением логарифмической функции и обозначается: $\ln z=\ln|z|+i\arg z$.

Отметим следующие свойства логарифмической функции:

$\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2$; $\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2$ (это совпадение двух множеств комплексных чисел). Докажем первую из этих формул (вторая доказывается аналогично):

$$\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\ln|z_1z_2|+i\operatorname{Arg}(z_1z_2).$$

Множества $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ и $\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2$ совпадают, поэтому

$$\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\ln|z_1||z_2|+i(\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2)=$$

$$=\ln|z_1|+i\operatorname{Arg} z_1+\ln|z_2|+i\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2.$$

Пример. Решить уравнение $\cos z=5{,}05$ (так как $5{,}05>1$, то в области действительных чисел такое уравнение, естественно, решения не имеет).

Решение

$$\cos z=5{,}05\Leftrightarrow\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=5{,}05\Leftrightarrow e^{iz}+\frac{1}{e^{iz}}=10{,}1.$$

Обозначим $e^{iz}=t$, тогда это уравнение примет вид

$$t+\frac{1}{t}=10{,}1\Leftrightarrow t^2-10{,}1\ t+1=0\Rightarrow t_1=10,\ \ t_2=0{,}1\Rightarrow e^{iz}=10,\ \ e^{iz}=0{,}1.$$

Используя определение логарифмической функции, находим:

$$iz=\operatorname{Ln}10=\ln|10|+i\arg 10+2\pi ki=\ln 10+2\pi ki;\ \ z=2\pi k-i\ln 10.$$

Аналогично

$$iz = \text{Ln}\,0{,}1 = \ln|0{,}1| + i\arg 0{,}1 + 2\pi ki = -\ln 10 + 2\pi ki; \quad z = 2\pi k + i\ln 10.$$

В итоге наше уравнение имеет бесконечное число решений:

$$z = 2\pi k \pm i\ln 10, \; k \in Z.$$

6. Комплексное число в комплексной степени.

Проводя формальное преобразование, получаем:

$$z_1^{z_2} = e^{\text{Ln}\, z_1^{z_2}} = e^{z_2 Lnz_1}.$$

Так как логарифмическая и показательная функции уже определены, то последнее выражение берется за определение числа (точнее, чисел) $z_1^{z_2}$. При фиксированном z_1 из этой формулы получаем общую показательную функцию, а при фиксированном z_2 – общую степенную функцию. Обе эти функции бесконечнозначные.

Пример. Вычислить i^i.

Решение

$$i^i = e^{\text{Ln}\, i^i} = e^{i\text{Ln}\, i} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}, \; k = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \ldots,$$

так как

$$\text{Ln}\, i = \ln|i| + i\arg i + 2\pi ki = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

(т.е. результатом примера является бесконечное множество действительных чисел).

22.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Определение 22.4. На комплексной плоскости ε-окрестностью (или просто окрестностью) точки z_0 называется множество $U(z_0,\varepsilon)$ таких точек z, что $|z - z_0| < \varepsilon$. Если из этого множества исключить саму точку z_0, то получим так называемую проколотую окрестность точки z_0, обозначаемую как $\overset{0}{U}(z_0,\varepsilon)$.

Если $z = x + iy, \; z_0 = x_0 + iy_0$, то

$$|z - z_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

значит, $|z - z_0|$ – это расстояние от точки z до точки z_0 и ε-окрестность точки z_0 – это круг (без границы) радиуса ε с центром в точке z_0.

По аналогии с определением предела функции действительного переменного 2.5 дадим определение предела функции комплексного переменного.

Определение 22.5. Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки z_0. Тогда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, где A – некоторое комплексное число, если:

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z, \; 0 < |z - z_0| < \delta \; (|f(z) - A| < \varepsilon)$$

или

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall z \in \overset{0}{U}(z_0,\delta)(|f(z) - A| < \varepsilon)$$

Следующая теорема определяет связь между пределом функции комплексного переменного и пределами ее действительной и мнимой частей, которые являются действительными функциями двух действительных переменных.

Теорема 22.1. Пусть $z = x + iy, \; z_0 = x_0 + iy_0, \; A = a + ib, \; w = f(z) = u + iv, \; u = u(x,y), \; v = v(x,y) \Rightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ тогда, и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = a, \; \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = b.$$

▲ $|z - z_0| = |x - x_0 + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$;

$|f(z) - A| = |u - a + i(v - b)| = \sqrt{(u - a)^2 + (v - b)^2}$.

1. Пусть $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \;\; \forall z$ (или $\forall x, y$): $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\left(\sqrt{[u(x,u) - a]^2 + [v(x,y) - b]^2} < \varepsilon\right) \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{[u(x,y) - a]^2} = |u(x,y) - a| < \varepsilon \;\text{ и }\; \sqrt{[v(x,y) - b]^2} = |v(x,y) - b| < \varepsilon,\right.$$

а это согласно определению предела функции двух переменных означает, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$.

2. Пусть $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Согласно определению предела функции двух переменных

$$\exists\delta_1>0:\forall x,y,\ \ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_1\left(|u(x,y)-a|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\exists\delta_2>0:\forall x,y,\ \ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_2\left(|v(x,y)-b|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right).$$

Тогда если $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, то $\forall x,y,\ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ будет выполняться неравенство

$$\left(\sqrt{[u(x,y)-a]^2+[v(x,y)-b]^2}<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}}=\varepsilon\right).$$

Это и означает, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$. ■

Из данной теоремы следует возможность перенесения на функции комплексного переменного основных теорем о пределах (суммы, разности, произведения, частного). Например, покажем, что $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\cdot f_2(z)=\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\cdot\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$.

▲ Пусть $f_1(z)=u_1+iv_1$, $f_2(z)=u_2+iv_2$, тогда

$$f_1(z)f_2(z)=u_1u_2-v_1v_2+i(u_1v_2+v_1u_2).$$

Пусть $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)=A_1=a_1+ib_1$, $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)=A_2=a_2+ib_2$, тогда по теореме 22.1

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u_1(x,y)=a_1,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u_2(x,y)=a_2,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v_1(x,y)=b_1,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v_2(x,y)=b_2.$$

Согласно теоремам о пределах функции двух переменных,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}(u_1u_2-v_1v_2)=$$

$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u_1(x,y)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u_2(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v_1(x,y)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v_2(x,y)=a_1a_2-b_1b_2.$$

Аналогично $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}(u_1v_2+v_1u_2)=a_1b_2+b_1a_2$. Тогда по той же теореме 22.1

$$\lim_{z\to z_0} f_1(z)\cdot f_2(z)=a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+b_1a_2)=A_1A_2=$$

$$=\lim_{z\to z_0} f_1(z)\cdot\lim_{z\to z_0} f_2(z).\ ■$$

По аналогии с определением 3.1 непрерывности функции действительного переменного дается определение непрерывности функции комплексного переменного.

Определение 22.6. Пусть функция $w=f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Эта функция называется непрерывной в точке z_0, если существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Теорема 22.2. Функция $w=f(z)$ непрерывна в точке $z_0=x_0+iy_0$ тогда, и только тогда, когда ее действительная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части непрерывны в точке (x_0,y_0).

▲ При $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, имеем $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $f(z_0)=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)$. Равенство $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ согласно теореме 22.1 равносильно выполнению двух равенств: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v(x_0,y_0)$, что и означает справедливость теоремы. ■

Сославшись на основные теоремы о пределах для функций комплексного переменного, легко проверить, что сумма, разность, произведение и частное (при знаменателе, отличном от 0) непрерывных в некоторой точке функций есть функция, непрерывная в этой точке.

Определение 22.7. Функция $w=f(z)$ называется непрерывной на некотором множестве (D), если она непрерывна в каждой точке этого множества.

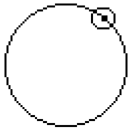


Рис. 143

Если множество (D) является замкнутым, т.е. содержит все точки своей границы, где граница – это совокупность точек, таких, что в каждой их окрестности есть и точки, принадлежащие (D), и точки, (D) не принадлежащие (рис. 143), то непрерывная на (D) функция обладает обычными свойствами действительных функций, непрерывных на отрезке, в частности она будет ограниченной на (D), т.е. $\exists M > 0 \colon \forall z \in (D)\ (|f(z)| \le M)$.

22.3. Производная функции комплексного переменного

Определение 22.8. Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Производной этой функции в точке z_0 называется комплексное число

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

если этот предел существует.

Из определения производной и свойств пределов функций комплексного переменного следует, что на функции комплексного переменного распространяются основные правила дифференциального исчисления (производная суммы, разности, произведения, частного, сложной и обратной функций). Так же как для функций действительного переменного, доказывается, что функция, имеющая производную в некоторой точке, будет непрерывной в этой точке. Спецификой же функций комплексного переменного является то, что для существования производной функции $w = f(z)$ ее действительная и мнимая части должны быть не просто «хорошими» функциями, а определенным образом связанными друг с другом.

Теорема 22.3. Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ и ее действительная и мнимая части дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух переменных. Тогда для существования производной $f'(z_0)$ необходимо и достаточно, чтобы в точке (x_0, y_0) выполнялись условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{22.3}$$

Условия (22.3) называются условиями Коши–Римана или условиями Даламбера–Эйлера.

▲ *Необходимость.* Пусть $\exists\, f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$.
Так как

$$\Delta z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y,$$

$$\Delta f(z) = f(z) - f(z_0) = \left[u(x,y) - u(x_0,y_0)\right] + i\left[v(x,y) - v(x_0,y_0)\right],$$

то, обозначая две последних квадратных скобки как Δu и Δv соответственно, получаем $f'(z_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$. Так как в этой формуле Δx и Δy стремятся к 0 произвольным образом, то рассмотрим два частных случая: $\Delta x = 0$ и $\Delta y = 0$ (результат должен быть один и тот же):

1. Пусть $\Delta x = 0$, тогда

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right).$$

Так как этот предел существует, то согласно теореме 22.1 существуют пределы

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \quad \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} \quad \text{и}$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

2. Пусть $\Delta y = 0$, тогда

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} \quad \text{(аналогично).}$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$.

Достаточность. В разд. 12.3 было показано, что если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0), то

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y \ \text{ и } \ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2\Delta x + \beta_2\Delta y,$$

где все частные производные берутся в точке (x_0,y_0) и α_i, β_i, $i = 1,2$, стремятся к 0 при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Тогда с учетом условий (22.3) имеем

$$\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y + i\alpha_2\Delta x + i\beta_2\Delta y =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right) + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y + i\alpha_2\Delta x + i\beta_2\Delta y =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)\Delta x + (\beta_1 + i\beta_2)\Delta y =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta z - i\frac{\partial u}{\partial y}\Delta z + (\alpha_1 + i\alpha_2)\Delta x + (\beta_1 + i\beta_2)\Delta y \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha_1 + i\alpha_2)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta_1 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

При $\Delta z \to 0$, т.е. при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$,

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \le 1, \quad \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le 1, \quad \left|(\alpha_1 + i\alpha_2)\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le |\alpha_1 + i\alpha_2| \to 0,$$

$$\left|(\beta_1 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le |\beta_1 + i\beta_2| \to 0 \Rightarrow \exists \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \quad \blacksquare$$

Одновременно мы получили формулы для нахождения производной:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (22.4)$$

Согласно теореме 22.3 для функции комплексного переменного справедливы все формулы из таблицы производных функций действительного переменного.

Пусть, например, $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow$ $u = e^x\cos y$, $v = e^x\sin y$; эти функции дифференцируемы во всех точках (x, y); $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$ производная существует во всех точках и она равна

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z.$$

Определение 22.9. Функция $w = f(z)$ называется *аналитической* в области (D) (область – это открытое, связное множество), если она определена в этой области и в каждой ее точке имеет производную.

Замечание. Функция двух действительных переменных $f(x, y)$ называется *гармонической*, если $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$.

Покажем, что для любой аналитической функции $w = f(z)$ ее действительная $u = u(x, y)$ и мнимая $v = v(x, y)$ части являются гармоническими функциями. Действительно, так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, а так как $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, тогда согласно теореме 12.9 о смешанных производных для функций двух переменных (в случае непрерывности этих производных) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$.

Аналогично, так как $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, то $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, а так как $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, то $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$ по той же теореме.

22.4. Интеграл от функции комплексного переменного

Определение 22.10. Пусть (AB) – непрерывная кривая на комплексной плоскости (замкнутая или нет) и пусть вдоль этой кривой задана некоторая функция комплексного переменного $w = f(z)$. Разобьем (AB) произвольным образом на части точками z_k и на каждой дуге разбиения выберем произвольную точку ζ_k (можно и на краю этой дуги) (рис. 144).

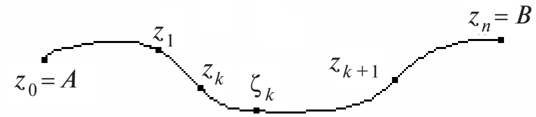


Рис. 144

Составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Обозначим через λ максимальную по k длину вектора $\overline{z_k z_{k+1}}$. Если существует предел наших интегральных сумм при $\lambda \to 0$, который не зависит от выбора точек z_k и ζ_k, то этот предел называется интегралом от функции комплексного переменного $w = f(z)$ вдоль кривой (AB) и обозначается $\int\limits_{(AB)} f(z)dz$.

Таким образом,

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k. \qquad (22.5)$$

Пусть $z_k = x_k + iy_k$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, тогда

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = (x_{k+1} + iy_{k+1}) - (x_k + iy_k) =$$
$$= (x_{k+1} - x_k) + i(y_{k+1} - y_k) = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

Пусть $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Обозначая $\operatorname{Re} w = u$, $\operatorname{Im} w = v$, имеем

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow f(\zeta_k) = u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k).$$

Тогда из формул (22.5) и (20.3) получаем, что

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] + i\sum_{k=0}^{n-1}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]\right\} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] +$$

$$+ i\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] =$$

$$= \int\limits_{(AB)} u(x,y)dx - v(x,u)dy + i\int\limits_{(AB)} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

при условии существования этих криволинейных интегралов (второго рода).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 22.4 (существование и вычисление интеграла от функции комплексного переменного). При условии существования криволинейных интегралов в правой части формулы интеграл от функции комплексного переменного существует и вычисляется:

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = \int\limits_{(AB)} udx - vdy + i\int\limits_{(AB)} vdx + udy \qquad (22.6)$$

Запомнить формулу (22.6) проще всего при помощи следующей формальной выкладки:

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = \int\limits_{(AB)} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int\limits_{(AB)} udx - vdy + i\int\limits_{(AB)} vdx + udy.$$

Условия существования этих криволинейных интегралов и формула для их вычисления приведены в теореме 20.1: если (AB) задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$, при изменении t от α до β кривая описывается в направлении от A к B (не обязательно $\alpha < \beta$), функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны на (AB), то интегралы в правой части формулы (22.6) существуют и имеют вид

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = \int\limits_{(AB)} udx - vdy + i\int\limits_{(AB)} vdx + udy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}[u(x(t),y(t))x'(t) -$$
$$- v(x(t),y(t))y'(t)]\,dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta}[v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]dt. \qquad (22.7)$$

Пример. Вычислить $\int\limits_{(OB)} \overline{z}dz$, где O — начало координат, B задана комплексным числом $z = 1 + i$, а путь интегрирования: $y = x^2$ (рис. 145).

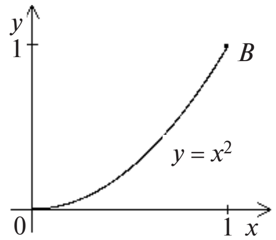


Рис. 145

Решение

$$\int\limits_{(OB)} \overline{z}dz = \int\limits_{(OB)} (x-iy)(dx+idy) =$$

$$\int\limits_{(OB)} xdx + ydy + i\int\limits_{(OB)} -ydx + xdy \overset{y=x^2}{=}$$

$$= \int\limits_0^1 (x + x^2 2x)dx + i\int\limits_0^1 (-x^2 + x2x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 + i\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = 1 + \frac{1}{3}i.$$

Уравнения кривой (AB) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, можно записать в виде $z = x + iy = x(t) + iy(t)$, т.е. $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, при этом $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Формулу (22.7) можно переписать следующим образом:

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{[u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] +$$

$$+ i[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)]\}dt.$$

Легко видеть, что функция в фигурных скобках в правой части последней формулы равна

$$[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))]\ [x'(t) + iy'(t)] = f(z(t))z'(t)$$

и, таким образом,

$$\int\limits_{(AB)} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt \tag{22.8}$$

(мы получили формулу (22.8) при помощи формальных преобразований; на самом деле если рассмотреть комплекснозначные функции действительного переменного $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ и их производные $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, то эти преобразования будут иметь вполне строгий характер).

Задача. Показать, что

$$\int\limits_{(\Gamma_\rho)} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_{|z - z_0| = \rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \tag{22.9}$$

где (Γ_ρ) – окружность радиуса ρ с центром в точке z_0 (как обычно, при отсутствии указания на направление обхода контура это направление берется положительным, т.е. для правой системы координат против часовой стрелки).

Решение

Зададим контур (Γ_ρ) параметрически: $x - x_0 = \rho\cos\varphi$, $y - y_0 = \rho\sin\varphi$ (тогда действительно $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$). При этом $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$, т.е. $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, $\varphi = [0, 2\pi]$. Тогда $z'(\varphi) = (z_0 + \rho e^{i\varphi})' = i\rho e^{i\varphi}$.

Теперь по формуле (22.8) находим

$$\int\limits_{(\Gamma_\rho)} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Основные свойства интегралов от функций комплексного переменного

Сначала, при условии существования интегралов, укажем три свойства, которые, очевидно, следуют из аналогичных свойств криволинейного интеграла (второго рода) и формулы (22.6).

1. $\int\limits_{(AB)} [\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)]dz = \alpha_1 \int\limits_{(AB)} f_1(z)dz + \alpha_2 \int\limits_{(AB)} f_2(z)dz$ для любых комплексных чисел α_1 и α_2.

2. $\int\limits_{(AB)} f(z)dz = \int\limits_{(AC)} f(z)dz + \int\limits_{(CB)} f(z)dz$ (рис. 146).

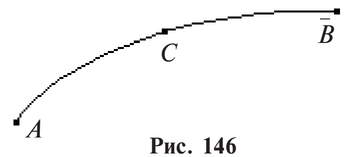


Рис. 146

3. $\int\limits_{(AB)} f(z)dz = -\int\limits_{(BA)} f(z)dz.$

Менее очевидна следующая теорема.

Теорема 22.5. Пусть $|f(z)| \le M$ для $\forall z \in (AB)$ и l – длина кривой (AB). Тогда при условии существования интеграла

$$\left| \int\limits_{(AB)} f(z)dz \right| \le Ml. \tag{22.10}$$

▲ Сначала приведем некоторые свойства модулей комплексных чисел.

1. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Действительно, пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2,\ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \Rightarrow$$

$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ – это длина вектора $\overline{OM_1}$, где $O(0,0)$, а $M_1(x_1, y_1)$, $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ – это длина вектора $\overline{OM_2}$, где $M_2(x_2, y_2)$, а $|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ – это длина вектора $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$,

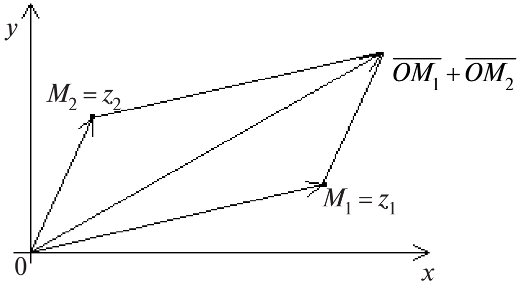


Рис. 147

т.е. вектора $\overline{OM_1} + \overline{OM_2}$; длина же суммы двух векторов не превосходит суммы их длин (рис. 147).

2. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Действительно,

$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Действительно,

$$|z_1 z_2| = |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)| =$$

$$= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (y_1x_2 + x_1y_2)^2} =$$

$$= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2} =$$

$$= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = |z_1||z_2|.$$

4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (проверяется аналогично).

Теперь находим интеграл $\int\limits_{(AB)} f(z)dz$ по формуле (22.5),

Применяя свойства 1 (для нескольких слагаемых) и 3, имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)\Delta z_k| = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \leq M\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|.$$

Здесь $|\Delta z_k| = |z_{k+1} - z_k|$ — это расстояния на комплексной плоскости между точками z_k и z_{k+1}, а $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|$ — сумма таких расстояний, т.е. длина ломаной, вписанной в дугу (AB) (рис. 148). Но длина всякой вписанной ломаной не превосходит длины самой дуги, значит, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \leq l \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leq Ml$; при $\lambda \to 0$ имеем $\left|\int\limits_{(AB)} f(z)dz\right| \leq Ml$. ■

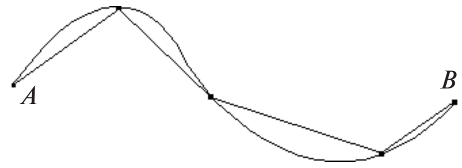


Рис. 148

22.5. Интегральная теорема Коши

Теорема 22.6. Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в односвязной области (D) и $(L) \subset (D)$ — кусочно-гладкая замкнутая кривая. Тогда $\int\limits_{(L)} f(z)dz = 0$.

▲ Для нахождения $\int\limits_{(L)} f(z)dz$ используем формулу (22.6)

Два последних криволинейных интеграла в этой формуле удовлетворяют условию независимости криволинейного интеграла второго рода от формы пути интегрирования $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (см. 20.3), при выполнении которого $\oint\limits_{(L)} Pdx + Qdy = 0$:

- для первого из них $P = u,\ Q = -v \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$;
- для второго $P = v,\ Q = u \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$,

а $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, так как аналитическая функция согласно теореме 22.3 удовлетворяет условиям Коши–Римана (естественно, при таком доказательстве предполагается, что функции $u(x, y)$ и $u(x, y)$ удовлетворяют условиям этой теоремы). ■

***Следствие* 1.** Из доказательства теоремы видно, что если функция $w = f(z)$ аналитична в односвязной области (D) и $(AB) \subset (D)$ – кусочно-гладкая кривая, то $\int\limits_{(AB)} f(z)dz$ зависит не от формы пути (AB), а лишь от положения ее начальной и конечной точек.

***Следствие* 2.** Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в односвязной области (D) и $\Phi(z)$ – какая-либо ее первообразная в этой области, т.е. $\exists \Phi'(z) = f(z)$, $z \in (D)$. Тогда для любых $z_1 z_2 \in (D)$

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = \Phi(z_2) - \Phi(z_1). \tag{22.11}$$

▲ Пусть $\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$. Тогда по формуле (22.4) определяем $\Phi'(z) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$. Так как $\Phi'(z) = f(z) = u + iv$, то отсюда $u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, тогда при $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$, по формуле (22.6) получаем

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} udx - vdy + i\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} vdx + udy =$$

$$= \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\psi}{\partial x}dy + i\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x}dy,$$

что согласно условиям Коши–Римана для аналитической функции $\Phi(z)$ равно

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + i\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} d\varphi(x, y) + i\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} d\psi(x, y).$$

Последнее выражение согласно формуле (20.7) для случая двух переменных имеет вид

$$\varphi(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} + i\psi(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = (\varphi + i\psi)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = \Phi(z)\Big|_{z_1}^{z_2}. \blacksquare$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1+\pi i} e^z dz$.

Решение

$$\int\limits_0^{1+\pi i} e^z dz = e^z\Big|_0^{1+\pi i} = e^{1+\pi i} - 1 = e(\cos\pi + i\sin\pi) - 1 = -e - 1.$$

Теорема 22.7 (интегральная теорема Коши для неодносвязных областей). Пусть область (D) ограничена конечным числом кусочно-гладких кривых и функция $w = f(z)$ является аналитической в некоторой области (D_1), включающей (D) и всю ее границу (на рис. 149 сплошной линией изображена граница (D), а штриховой – граница (D_1)). Тогда если (L) – внешняя граница (D), а (L_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, – ее внутренние границы, то $\int\limits_{(L)} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{(L_k)} f(z)dz$, где все интегралы берутся в одном направлении.

▲ Взяв произвольные точки E, F, G, H на контуре (L), проведем гладкие самонепересекающиеся кривые (EA), (BC), (DF) (на рис. 150 A, B, C, D, K, L, M, N – произвольные точки внутренних границ). К двум получившимся односвязным областям применим теорему 22.6: $\int\limits_{(EGFDNCBLAE)} f(z)dz = 0$ и $\int\limits_{(EAKBCMDFHE)} f(z)dz = 0$. Сложим эти два равенства. При этом интегралы по введенным перегородкам сокращаются, так как эти перегородки проходятся дважды: один раз – в одном, другой раз – в противоположном направлении. Получим

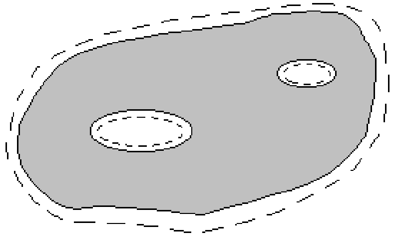


Рис. 149

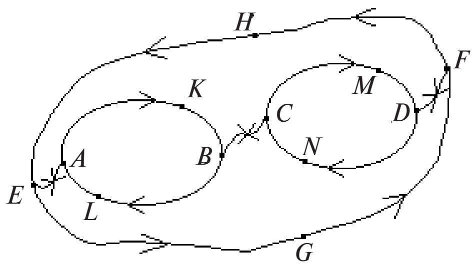


Рис. 150

$$\int\limits_{(EGF)} f(z)dz + \int\limits_{(DNC)} f(z)dz + \int\limits_{(BLA)} f(z)dz + \int\limits_{(AKB)} f(z)dz + \int\limits_{(CMD)} f(z)dz + \int\limits_{(FHE)} f(z)dz = 0,$$

т.е.

$$\int\limits_{(L)} f(z)\,dz + \int\limits_{-(L_1)} f(z)\,dz + \int\limits_{-(L_2)} f(z)\,dz = 0,$$

или, учитывая, что $\int\limits_{-(L_k)} f(z)dz = -\int\limits_{(L_k)} f(z)dz$, $k = 1,2$,

$$\int\limits_{(L)} f(z)\,dz = \int\limits_{(L_1)} f(z)\,dz + \int\limits_{-(L_2)} f(z)\,dz$$

(здесь $-(L_k)$ – это контур (L_k), проходимый в противоположном направлении).

Изложенное аналогично для большего количества «дырок» и для противоположного направления обхода границ области (*D*). ■

22.6. Интегральная формула Коши

Теорема 22.8. Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в односвязной области (*D*), $(L) \subset (D)$ – кусочно-гладкая замкнутая кривая и z_0 – точка внутри этой кривой. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad (22.12)$$

(направление обхода контура выбирается положительным).

▲ Докажем, что $\int\limits_{(L)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$.

На рис. 151 внешней штриховой линией изображена граница области (*D*). Пусть (Γ_ρ) – окружность радиуса ρ с центром в точке z_0, целиком содержащаяся внутри (*L*) (для этого ρ должно быть достаточно малым). В области, ограниченной внешней и любой внутренней (по отношению к (Γ_ρ)), содержащей z_0, штриховыми линиями, функция

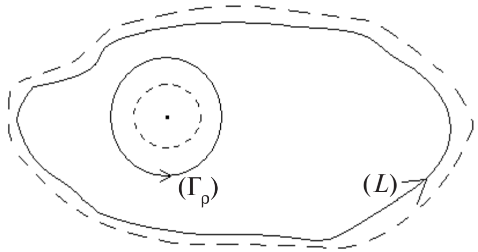


Рис. 151

$\frac{f(z)}{z - z_0}$ является аналитической (как отношение двух аналитических функций при знаменателе, отличном от 0). Согласно теореме 22.7 $\int\limits_{(L)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int\limits_{(\Gamma_\rho)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. Надо доказать, что последнее выражение равно $2\pi i \cdot f(z_0)$. Учитывая формулу (22.9), нам надо проверить, что $\int\limits_{(\Gamma_\rho)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int\limits_{(\Gamma_\rho)} \frac{dz}{z - z_0} f(z_0)$ или что

$$\int\limits_{(\Gamma_\rho)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0. \qquad (22.13)$$

Для проверки равенства (22.13) докажем, что интеграл в его левой части можно (за счет выбора ρ) сделать сколь угодно малым. Пусть ε – сколь угодно малое число. Так как $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0, то в некоторой окрестности этой точки $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ и, значит, для достаточно малых ρ (таких, что окружность (Γ_ρ) попадает в эту окрестность) $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ для $\forall z \in (\Gamma_\rho)$. Тогда $\forall z \in (\Gamma_\rho)$

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{\rho} < \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Согласно формуле (22.10) при l – длине (Γ_ρ) имеем

$$\left|\int\limits_{(\Gamma_\rho)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz\right| \le \frac{\varepsilon}{\rho} l = \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon,$$

а это число действительно сколь угодно мало. ■

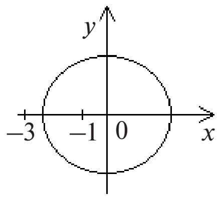


Рис. 152

Пример. Вычислить $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+4z+3}dz$ (направление обхода контура положительное) (рис. 152).

Решение

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+4z+3}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+3)(z+1)}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{\sin z}{z+3}}{(z+1)}dz =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{\sin z}{z+3}\right|_{z=-1} = 2\pi i \frac{\sin(-1)}{2} = -\pi \sin 1 \cdot i.$$

Интегральная формула Коши является основой для излагаемой ниже теории.

Теорема 22.9 (о производных высших порядков аналитической функции). Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в односвязной области (D). Тогда эта функция имеет в области (D) производные всех порядков (которые тем самым тоже будут аналитическими функциями в (D)) и

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{22.14}$$

$(L) \subset (D)$ – кусочно-гладкая замкнутая кривая, содержащая внутри себя точку z.

Эта теорема показывает существенные отличия между аналитическими функциями комплексного переменного и дифференцируемыми функциями действительного переменного, для которых из существования первой производной вовсе не следует существование следующих производных.

▲ Сначала приведем нестрогое обоснование формулы (22.14). Используя интегральную формулу Коши (22.12), имеем

$$f^{(n)}(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right)^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)^{(n)} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} f(\zeta)\frac{n!}{(\zeta-z)^{n+1}}dz,$$

что и приводит к формуле (22.14). Проведенные преобразования, конечно, не являются доказательством формулы (22.14) в силу недоказанной возможности дифференцирования интеграла по параметру z.

Строгое доказательство формулы (22.14) проведем методом математической индукции. При $n = 0$ формула верна, так как при этом она превращается в интегральную формулу Коши. Теперь предположим, что формула (22.14) верна при $n = k$, и докажем, что она тогда будет верна и при $n = k+1$, $k = 0,1,2,\dots$, т.е.

$$f^{(k+1)}(z) = \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}}\,d\zeta. \tag{22.15}$$

Как мы знаем, $f^{(k+1)}(z) = \lim\limits_{z_1 \to z} \frac{f^{(k)}(z_1) - f^{(k)}(z)}{z_1 - z}$. Применяя формулу (22.14) при $n = k$ и считая, что z_1 столь близка к z, что тоже находится внутри (L), имеем

$$\frac{f^{(k)}(z_1) - f^{(k)}(z)}{z_1 - z} = \frac{1}{z_1 - z}\left[\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_1)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{z_1 - z}\,\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} f(\zeta)\frac{(\zeta - z)^{k+1} - (\zeta - z_1)^{k+1}}{(\zeta - z_1)^{k+1}(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta. \tag{22.16}$$

Далее используем известную формулу

$$a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)(a^k + a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \dots + b^k) = (a-b)\sum_{s=0}^{k} a^{k-s}b^s.$$

Согласно этой формуле

$$(\zeta - z)^{k+1} - (\zeta - z_1)^{k+1} = (\zeta - z - \zeta + z_1)\sum_{s=0}^{k}(\zeta - z)^{k-s}(\zeta - z_1)^s =$$

$$= (z_1 - z)\sum_{s=0}^{k}(\zeta - z)^{k-s}(\zeta - z_1)^s, \tag{22.17}$$

а из (22.16) и (22.17) следует, что

$$\frac{f^{(k)}(z_1)-f^{(k)}(z)}{z_1-z}=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} f(\zeta)\frac{\sum\limits_{s=0}^{k}(\zeta-z)^{k-s}(\zeta-z_1)^s}{(\zeta-z_1)^{k+1}(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta. \qquad (22.18)$$

Для доказательства равенства (22.15) нам надо показать, что предел при $z_1 \to z$ последнего выражения равен $\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int\limits_{(L)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+2}}$. Для этого рассмотрим разность

$$A=\frac{f^{(k)}(z_1)-f^{(k)}(z)}{z_1-z}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int\limits_{(L)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+2}} \qquad (22.19)$$

и докажем, что ее можно сделать сколь угодно малой по модулю за счет близости z_1 к z. Из (22.18) и (22.19) имеем

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} f(\zeta)\left[k!\frac{\sum\limits_{s=0}^{k}(\zeta-z)^{k-s}(\zeta-z_1)^s}{(\zeta-z_1)^{k+1}(\zeta-z)^{k+1}}-\frac{(k+1)k!}{(\zeta-z)^{k+2}}\right]d\zeta=$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} f(\zeta)\frac{\sum\limits_{s=0}^{k}(\zeta-z)^{k+1-s}(\zeta-z_1)^s-(k+1)(\zeta-z_1)^{k+1}}{(\zeta-z_1)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta. \qquad (22.20)$$

Представляя $(k+1)(\zeta-z_1)^{k+1}$ в виде суммы $k+1$-го слагаемого вида $(\zeta-z_1)^{k+1}$ и объединяя каждое из этих слагаемых с одним членом суммы в числителе дроби, из (22.20) получаем

$$A=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} f(\zeta)\frac{\sum\limits_{s=0}^{k}\left[(\zeta-z)^{k+1-s}(\zeta-z_1)^s-(\zeta-z_1)^{k+1}\right]}{(\zeta-z_1)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta=$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} f(\zeta)\frac{\sum\limits_{s=0}^{k}(\zeta-z_1)^s\left[(\zeta-z)^{k+1-s}-(\zeta-z_1)^{k+1-s}\right]}{(\zeta-z_1)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta. \qquad (22.21)$$

Применим к квадратной скобке в числителе подынтегральной дроби формулу (22.17), заменив s на r и k на $k-s$:

$$A=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{(L)} f(\zeta)\frac{\sum\limits_{s=0}^{k}(\zeta-z_1)^s(z_1-z)\left[\sum\limits_{r=0}^{k-s}(\zeta-z)^{k-s-r}(\zeta-z_1)^r\right]}{(\zeta-z_1)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta=$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}(z_1-z)\int\limits_{(L)} f(\zeta)\frac{\sum\limits_{s=0}^{k}(\zeta-z_1)^s\left[\sum\limits_{r=0}^{k-s}(\zeta-z)^{k-s-r}(\zeta-z_1)^r\right]}{(\zeta-z_1)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta. \qquad (22.22)$$

Заключим контур (L) в некоторый круг радиуса R с центром в начале координат. Тогда для любых двух точек z_1 и z_2 на этом контуре или внутри его $|z_2-z_1| \le |z_2|+|z_1| \le R+R=2R$, значит, в формуле (22.22)

$$\left|\sum_{s=0}^{k}(\zeta-z_1)^s\left[\sum_{r=0}^{k-s}(\zeta-z)^{k-s-r}(\zeta-z_1)^r\right]\right| \le \sum_{s=0}^{k}|\zeta-z_1|^s\left[\sum_{r=0}^{k-s}|\zeta-z|^{k-s-r}|\zeta-z_1|^r\right] \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{k}(2R)^s\left[\sum_{r=0}^{k-s}(2R)^{k-s-r}(2R)^r\right]=\sum_{s=0}^{k}(2R)^s\left[\sum_{r=0}^{k-s}(2R)^{k-s}\right]=$$

$$=\sum_{s=0}^{k}(2R)^s(2R)^{k-s}\sum_{r=0}^{k-s}1=\sum_{s=0}^{k}(2R)^k(k-s+1)=$$

$$=(2R)^k\sum_{s=0}^{k}(k+1-s)=(2R)^k\frac{k+1+1}{2}(k+1)=(2R)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad (22.23)$$

как сумма арифметической прогрессии.

По условию функция $w=f(z)$ имеет производную в каждой точке контура (L), значит, она ограничена на этом контуре. Пусть $|f(\zeta)| \le M$, $\zeta \in (L)$, и l – длина (L). Пусть $|z_1-z| \le \varepsilon$ и δ – расстояние между окружностью радиуса ε с центром в точке z и контуром (L), т.е. наименьшее расстояние между точками этих кривых (рис. 153). Если уменьшать ε, то δ, естественно, будет увеличиваться.

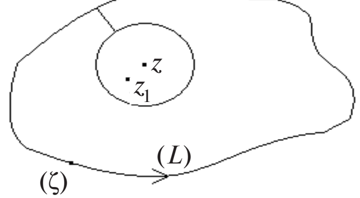


Рис. 153

Тогда с учетом (22.23) по формуле (22.22) можно оценить модуль подынтегральной функции

$$|f(\zeta)|\frac{\left|\sum_{s=0}^{k}(\zeta-z_1)^s\left[\sum_{r=0}^{k-s}(\zeta-z)^{k-s-r}(\zeta-z_1)^r\right]\right|}{|\zeta-z_1|^{k+1}|\zeta-z|^{k+2}}\le$$

$$\le M\frac{(2R)^k(k+1)(k+2)}{2\delta^{k+1}\delta^{k+2}}=\frac{M(2R)^k(k+1)(k+2)}{2\delta^{2k+3}}$$

и согласно формуле (22.10)

$$|A|=\frac{k!}{2\pi}|z_1-z|\left|\int\limits_{(L)} f(\zeta)\frac{\sum_{s=0}^{k}(\zeta-z_1)^s\left[\sum_{r=0}^{k-s}(\zeta-z)^{k-s-r}(\zeta-z_1)^r\right]}{(\zeta-z_1)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta\right|\le$$

$$\le\frac{k!}{2\pi}\varepsilon\frac{M(2R)^k(k+1)(k+2)}{2\delta^{2k+3}}l. \qquad (22.24)$$

Последнюю величину можно сделать сколь угодно малой за счет выбора ε. ■

Из формулы (22.14) следует, что

$$\int\limits_{(L)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z). \qquad (22.25)$$

Пример. Вычислить $\int\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{(z^2-1)^2}$ (рис. 154).

Решение

$$\int\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{(z^2-1)^2}=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz\overset{n=1}{=}\frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right]'_{z=1}=$$

$$=2\pi i\left.\frac{-2}{(z+1)^3}\right|_{z=1}=-\frac{4\pi i}{8}=-\frac{\pi i}{2}.$$

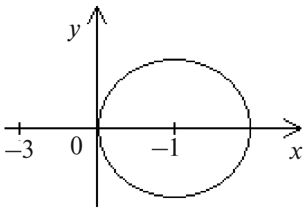


Рис. 154

22.7. Краткие сведения о рядах с комплексными членами

На такие ряды переносятся многие определения и теоремы, известные для числовых и функциональных рядов с действительными членами (см. гл. 16 и 17).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_n+iy_n. \qquad (22.26)$$

Этот ряд называется *сходящимся*, если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, где $S_n=z_1+z_2+\ldots+z_n$ – n-я частичная сумма; при этом комплексное число S называется суммой ряда (22.26).

Ряд (22.26) сходится тогда, и только тогда, когда сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$, при этом $S=R+iT$, где R – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, а T – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$.

Ряд (22.26) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$. Последний ряд является рядом из действительных чисел, к которому применимы все признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Если ряд из модулей сходится, то сам ряд (22.26) тоже сходится, т.е. из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость в обычном смысле (заметим здесь, что доказательство такой теоремы, приведенное в разд. 16.3, не пригодно для рядов с комплексными членами, но теорему несложно доказать, используя критерий Коши сходимости последовательностей частичных сумм самого ряда и ряда из модулей).

Областью сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z) \qquad (22.27)$$

называется множество комплексных чисел z, для которых этот ряд сходится. Если $S_n(z)$ – n-я частичная сумма, а $S(z)$ – сумма ряда (22.27), то этот ряд называется *равномерно сходящимся* на множестве E, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon):\ \forall n>N,\ \forall z\in E\ (|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon)$.

Как и для рядов с действительными членами, справедлив признак Вейерштрасса: если $\forall z \in E\ |u_n(z)| \le c_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд (22.27) равномерно сходится на множестве E.

Равномерно сходящийся на некоторой кривой ряд из непрерывных функций имеет непрерывную на этой кривой сумму, и его можно почленно интегрировать вдоль этой кривой.

Справедлива следующая теорема (Вейерштрасса): если функции $u_n(z)$ аналитичны в односвязной области (D) и ряд (22.27) равномерно сходится в этой области, то его сумма тоже аналитична в (D). При условии непрерывности функций $u_n(z)$ на границе области (D) ряд (22.27) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.

Пусть дан степенной ряд с комплексными коэффициентами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (22.28)$$

Тогда справедлива следующая теорема (Абеля): если ряд (22.28) сходится при некотором z_0, то он абсолютно сходится при всех $z : |z| < |z_0|$.

Отсюда следует, что существует действительное число $R \in [0, \infty]$: ряд (22.28) абсолютно сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. То есть областью сходимости ряда (22.28) является круг радиусом R с центром в начале координат. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Формулы для нахождения радиуса сходимости аналогичны формулам для степенных рядов с действительными членами: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, если эти пределы (конечные или бесконечные) существуют.

Ряд (22.28) равномерно сходится на каждом замкнутом (т.е. включающем свою границу) круге $|z| \le r < R$, его можно почленно дифференцировать или интегрировать от 0 до z сколь угодно раз с сохранением радиуса сходимости.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad (22.29)$$

который также называется степенным, сводится к ряду (22.28) путем замены $z - z_0 = \zeta$.

Ряд (22.29) абсолютно сходится при $|z - z_0| < R$, где радиус сходимости R находится так же, как для ряда (22.28). Ряд (22.29) равномерно сходится на каждом замкнутом круге $|z - z_0| \le r < R$; его можно почленно дифференцировать или интегрировать от z_0 до z сколько угодно раз с сохранением радиуса сходимости.

22.8. Ряд Тейлора

В этом разделе будет изучаться возможность представления аналитической функции в виде суммы степенного ряда. Пусть в некоторой окрестности точки z_0 аналитическая в этой окрестности функция представлена в виде $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Так как степенной ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно раз с сохранением радиуса сходимости, то продифференцируем обе части этого равенства k раз, $k = 0, 1, 2, \ldots$, учитывая при этом, что производная постоянной равна 0:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(z - z_0)^{n-k}.$$

При $z = z_0$ все члены этого ряда, для которых $n > k$, будут равны нулю и останется только первый член ряда, для которого $n = k$:

$$f^{(k)}(z_0) = a_k k(k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = a_k k!,$$

т.е. $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Итак, если функцию можно представить в виде суммы степенного ряда, то такое представление *единственно* и обязательно имеет вид $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$.

Теорема 22.10. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области (D), $z_0 \in (D)$ и $\rho \in (0, +\infty]$ – расстояние от точки z_0 до границы (D) (т.е. наименьшее расстояние от z_0 до точек этой границы). Тогда для z: $|z - z_0| < \rho$ имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad (22.30)$$

где

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (22.31)$$

В последнем равенстве была использована формула для производных высших порядков аналитической функции (22.14); $(L)\subset(D)$ – произвольная кусочно-гладкая замкнутая кривая, содержащая внутри точку z_0.

Определение 22.11. Ряд (22.30) с коэффициентами (22.31) называется *рядом Тейлора* для функции $f(z)$.

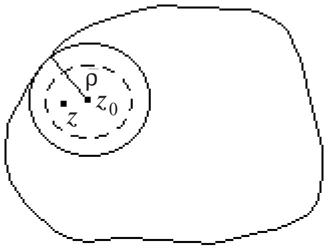


Рис. 155

В отличие от разложения в ряд Тейлора функций действительного переменного для функций комплексного переменного можно сразу указать область, в которой справедливо разложение: оно верно в круге $|z-z_0|<\rho$, где ρ – расстояние от z_0 до границы области аналитичности, т.е. до ближайшей к z_0 точки, в которой функция $w=f(z)$ не имеет производной (ниже такие точки будут названы особыми точками функции) (рис. 155).

▲ Пусть z – произвольная точка круга $|z-z_0|<\rho$. Докажем, что в этой точке справедлива формула (22.30) с коэффициентами (22.31). Для этого проведем окружность (Г) с центром в точке z_0 радиуса r: $|\zeta-z_0|=r$, где $r<\rho$ и точка z находится внутри этой окружности: $|z-z_0|<r$ (на рис. 155 эта окружность проведена штриховой линией).

Согласно интегральной формуле Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{22.32}$$

В этой формуле $\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\dfrac{1}{\zeta-z_0}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$.

В последней дроби $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\dfrac{|z-z_0|}{r}<\dfrac{r}{r}=1$, поэтому по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=1$ и знаменателем $q=\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, $|q|<1$, получаем

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n.$$

Значит,

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

Подставим этот ряд в формулу (22.32) и проинтегрируем (почленно) вдоль окружности (Г). Это возможно, так как члены ряда непрерывны на (Г) и в соответствии с признаком Вейерштрасса ряд на (Г) сходится равномерно: если $M=\max\limits_{\zeta\in(\Gamma)}|f(\zeta)|$, то

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right|\le\frac{M}{r^{n+1}}|z-z_0|^n=\frac{M}{r}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n,$$

а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{M}{r}\left(\dfrac{|z-z_0|}{r}\right)^n$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\dfrac{|z-z_0|}{r}<1$.

В итоге получим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\Gamma)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n d\zeta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^n,$$

что и дает ряд (22.30) с коэффициентами (22.31).

Замечание. В последней формуле интеграл по окружности (Г) можно заменить на интеграл по произвольному кусочно-гладкому замкнутому контуру $(L)\subset(D)$, содержащему внутри точку z_0, так как оба этих интеграла равны $\dfrac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$. ■

Точно так же, как для функций действительного переменного, из формул (22.30) и (22.31) получаем разложения в ряд Тейлора при $z_0=0$ следующих элементарных функций:

1) $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$;

2) $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

3) $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$;

4) $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n}$;

5) $(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \ldots = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}z^n$.

Первые три разложения справедливы на всей комплексной плоскости в силу аналитичности на ней функций e^z, $\sin z$, $\cos z$. Два последних разложения справедливы при $|z| < 1$, так как $z = -1$ является особой точкой функций $\ln(1+z)$ и $(1+z)^{\alpha}$, значит, ρ, как расстояние от 0 до -1, равно 1.

В последнем разложении α – произвольное (не действительное, натуральное) комплексное число и $(1+z)^{\alpha} = e^{\alpha\ln(1+z)}$; если же α – натуральное число, то ряд превращается в конечную сумму $\sum\limits_{n=1}^{\alpha}$ и получаем формулу бинома Ньютона, которая верна для всех z.

22.9. Ряд Лорана

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n}$. После замены $\dfrac{1}{z-z_0} = \zeta$ этот ряд превращается в степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^n$, который сходится (абсолютно) при $|\zeta| < R$, где R – радиус сходимости, и равномерно сходится при $|\zeta| \le R_1$, где R_1 – произвольное число: $R_1 < R$. То есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n}$ сходится (абсолютно) при $\dfrac{1}{|z-z_0|} < R$, $|z-z_0| > \dfrac{1}{R}$ и равномерно сходится при $\dfrac{1}{|z-z_0|} \le R_1$, $|z-z_0| \ge \dfrac{1}{R_1}$, где R_1 – произвольное число: $R_1 < R$.

Теперь рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{22.33}$$

Этот ряд понимается как сумма двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \text{ и } \sum_{n=-1}^{-\infty}a_n(z-z_0)^n \overset{n=-m}{=} \sum_{m=1}^{\infty}a_{-m}(z-z_0)^{-m}$$

и называется сходящимся, если сходятся оба этих ряда. Первый из этих рядов сходится при $|z-z_0| < R$, а второй – при $|z-z_0| > r$. Здесь R и r – некоторые числа, и предполагается, что $r < R$, так как в противном случае ряд (22.33) всюду расходится. Значит, областью сходимости ряда (22.33) является кольцо $r < |z-z_0| < R$ (рис. 156).

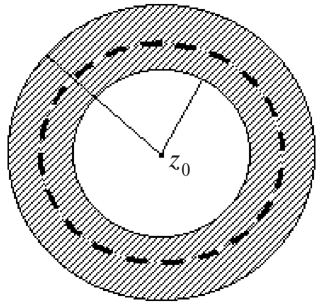


Рис. 156

Точно так же показывается, что ряд (22.33) равномерно сходится при $r < r_1 \le |z-z_0| \le \le R_1 < R$, т.е. в любом замкнутом кольце внутри кольца сходимости.

Далее будет изучаться возможность представления аналитической в кольце $r < |z-z_0| < R$ функции в виде суммы ряда (22.33). Пусть такое представление возможно:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{22.34}$$

Умножим обе части равенства (22.34) на $\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^{n-k-1}. \tag{22.35}$$

Проинтегрируем обе части этого равенства вдоль произвольной окружности (Γ): $|z-z_0| = \rho$, где $r < \rho < R$ (на рис. 156 эта окружность проведена штриховой линией). При этом ряд в правой части можно проинтегрировать почленно в силу его равномерной сходимости. Получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz =$$

$$= \int_{(\Gamma)}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^{n-k-1}\right)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}(z-z_0)^{n-k-1}dz. \tag{22.36}$$

Рассмотрим интегралы в правой части (22.36) при различных значениях n:

а) $n-k-1\geq 0$, т.е. $n\geq k+1 \Rightarrow \int\limits_{(\Gamma)}(z-z_0)^{n-k-1}dz=0$, как интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру;

б) $n-k-1\leq -2$, т.е. $n\leq k-1$, тогда подставим $z-z_0=\rho e^{i\varphi}$, $z=z_0+\rho e^{i\varphi}$, $dz=i\rho e^{i\varphi}$:

$$\int\limits_{(\Gamma)}(z-z_0)^{n-k-1}dz=\int\limits_0^{2\pi}\rho^{n-k-1}e^{i(n-k-1)\varphi}i\rho e^{i\varphi}d\varphi=$$

$$=i\rho^{n-k}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(n-k)\varphi}d\varphi=i\rho^{n-k}\frac{1}{i(n-k)}e^{i(n-k)\varphi}\Big|_0^{2\pi}=0$$

в силу периодичности (с периодом $2\pi i$) показательной функции e^z;

в) $n=k \Rightarrow \int\limits_{(\Gamma)}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i$ по формуле (22.9).

Таким образом, в правой части формулы (22.36) лишь один член (в котором $n=k$) отличен от нуля, и эта формула принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz=a_k.$$

В итоге если аналитическую в кольце $r<|z-z_0|<R$ функцию можно в этом кольце представить в виде суммы ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ (22.33), то такое представление *единственно*, и коэффициенты a_n находятся по формулам

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \qquad (22.37)$$

$n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ (Γ): $|z-z_0|=\rho$, $r<\rho<R$.

Определение 22.12. Ряд (22.34) с коэффициентами (22.37) называется *рядом Лорана* для функции $f(z)$.

Теорема 22.11. Пусть функция $w=f(z)$ аналитична в кольце (D): $0\leq r<|z-z_0|<R\leq\infty$. Тогда ее можно представить в виде суммы сходящегося ряда Лорана (22.34) с коэффициентами (22.37).

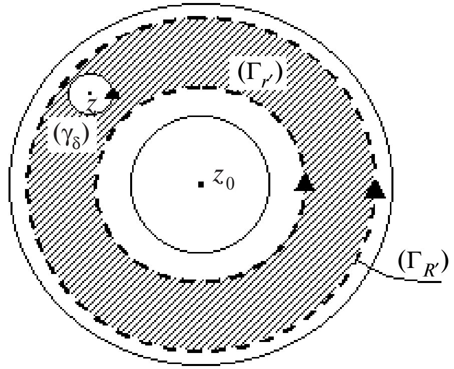


Рис. 157

▲ Пусть z — произвольная точка кольца (D). Образуем новое кольцо $(D'): r'<|z-z_0|<R'$ с границами $(\Gamma_{r'})$ и $(\Gamma_{R'})$ соответственно (изображены на рис. 157 штриховыми линиями), лежащими внутри первоначального кольца (D) и содержащими точку z. Пусть (γ_δ) — окружность с центром в точке z радиуса δ: $|\zeta-z_0|=\delta$, лежащая внутри (D').

Согласно интегральной формуле Коши $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\gamma_\delta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$. Подынтегральная функция в последнем интеграле аналитическая в заштрихованной области, ограниченной контурами $(\Gamma_{r'})$, $(\Gamma_{R'})$ и (γ_δ), так как числитель и знаменатель дроби аналитичны в этой области и знаменатель равен 0 только при $\zeta=z$. Поэтому по интегральной теореме Коши для неодносвязных областей

$$\int\limits_{(\Gamma_{R'})}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int\limits_{(\Gamma_{r'})}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\int\limits_{(\gamma_\delta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

(все контуры проходятся в одном направлении). Тогда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\gamma_\delta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{R'})}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{r'})}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (22.38)$$

Первый интеграл в правой части формулы (22.38) преобразуется точно так же, как при доказательстве теоремы 22.10, и имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{R'})}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{R'})}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma)}\frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ldots;$$

(Γ) – произвольная окружность; $|\zeta - z_0| = \rho$, где $r < \rho < R$ (в последнем переходе использована интегральная теорема Коши для неодносвязных областей).

Преобразуем второй интеграл в правой части формулы (22.38), тогда

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}.$$

В последней дроби при $\zeta \in (\Gamma_{r'})$ $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$. Значит, по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}$, $|q| < 1$, $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n$, тогда $-\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\cdot\dfrac{1}{(z - z_0)^{n+1}}$. Подставим этот ряд во второй интеграл в правой части формулы (22.38) и проинтегрируем почленно вдоль $(\Gamma_{r'})$. Это возможно, так как члены ряда непрерывны на $(\Gamma_{r'})$ и ряд на $(\Gamma_{r'})$ равномерно сходится по признаку Вейерштрасса. А именно если $M = \max\limits_{\zeta\in(\Gamma_{r'})}|f(\zeta)|$, то

$$\left|f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}\right| \le M(r')^n\frac{1}{|z - z_0|^{n+1}} = \frac{M}{|z - z_0|}\left(\frac{r'}{|z - z_0|}\right)^n$$

и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{M}{|z - z_0|}\left(\dfrac{r'}{|z - z_0|}\right)^n$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \dfrac{r'}{|z - z_0|} < 1$. В результате имеем:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{r'})}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{(\Gamma_{r'})} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\cdot\frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{r'})} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta\cdot\frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Произведя замену $n + 1 = -m, n = -m - 1,$ перепишем этот результат в виде

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{r'})}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{m=-1}^{-\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{r'})}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}}d\zeta\cdot(z - z_0)^m$$

или, заменяя m снова на n,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{r'})}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma_{r'})}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma)}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta,$

$n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$; контур (Γ) тот же, что выше, – произвольная окружность радиуса ρ; $|\zeta - z_0| = \rho$, где $r < \rho < R$ (в последнем переходе опять использована интегральная теорема Коши для неодносвязных областей).

Объединяя результаты преобразований обоих интегралов в правой части формулы (22.38), получаем нужный нам результат:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma)}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, (Γ): $|z - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$. ■

Пример. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{2z + 1}{z^2 + z - 2}$ в ряд Лорана в областях: 1) $|z| < 1$; 2) $1 < |z| < 2$; 3) $0 < |z - 1| < 3$.

Решение

Разложим исходную правильную рациональную дробь на простые дроби:

$$\frac{2z + 1}{z^2 + z - 2} = \frac{2z + 1}{(z + 2)(z - 1)} = \frac{A}{z + 2} + \frac{B}{z - 1}.$$

Отсюда $2z + 1 = A(z - 1) + B(z + 2)$. Подставим в это равенство $z = 1$ и $z = -2$, получим $3 = 3B,\ -3 = -3A \Rightarrow B = 1,\ A = 1.$

Таким образом, $f(z) = \dfrac{1}{z + 2} + \dfrac{1}{z - 1}.$

Случай 1: $z_0 = 0$ и $f(z)$ аналитична в области $|z| < 1$, т.е. ряд Лорана превращается в ряд Тейлора. Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1\right]z^n$$

$\Big($обе прогрессии действительно являются бесконечно убывающими, так как $|q_1| = \left|\frac{-z}{2}\right| = \frac{|z|}{2} < \frac{1}{2}$ и $|q_2| = |z| < 1\Big)$.

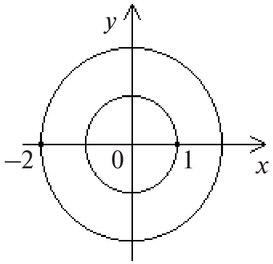


Рис. 158

Случай 2: по-прежнему $z_0 = 0$ и $f(z)$ аналитична в кольце $1 < |z| < 2$ (ее особые точки $z = -2$ и $z = 1$) (рис. 158).

В указанном кольце дробь $\frac{1}{z+2}$ раскладывается точно так же, как в первом случае, так как $|q_1| = \left|\frac{-z}{2}\right| = \frac{|z|}{2} < 1$. Для разложения второй дроби (а в ней $|z| > 1$) поступим следующим образом: $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$. Последнее выражение уже можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q_2 = \frac{1}{z}$, $|q_2| < 1$.

Тогда $\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}$. В итоге $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$.

Случай 3: $z_0 = 1$ и $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z-1| < 3$ (рис. 159) (внутренней границей кольца является сама точка $z = 1$).

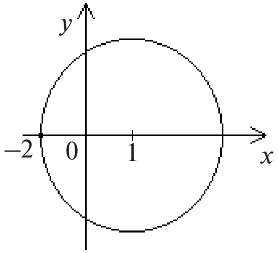


Рис. 159

Тогда дробь $\frac{1}{z-1}$ уже является частью искомого ряда Лорана, как всякая степень $z - z_0 = z - 1$. С дробью $\frac{1}{z+2}$ поступим так:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z-1+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}.$$

Последнее выражение можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = -\frac{z-1}{3}$, $|q| = \frac{|z-1|}{3} < 1$. Тогда

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n.$$

В итоге $f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n$.

Во всех трех случаях мы использовали единственность разложения функции в ряд Лорана (или Тейлора), т.е. путем некоторых преобразований получали разложение, а затем использовали то обстоятельство, что других разложений у функции в данной области быть не может.

22.10. Классификация изолированных особых точек

Определение 22.13. Точка z_0 называется особой точкой функции $w = f(z)$, если $f'(z_0)$ не существует.

Определение 22.14. Особая точка z_0 функции $w = f(z)$ называется изолированной, если $w = f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки z_0.

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $w = f(z)$. Тогда в проколотой окрестности точки z_0, т.е. в области $0 < |z - z_0| < R$, где R – некоторое число, ее можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}. \qquad (22.39)$$

Определение 22.15. Первая сумма в правой части формулы (22.39) называется *правильной частью* ряда Лорана, а вторая сумма – *главной частью* ряда Лорана.

Определение 22.16. Изолированная особая точка z_0 называется *устранимой*, если в разложении (22.39) главная часть отсутствует, т.е. $a_{-n} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Теорема 22.12. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

▲ *Необходимость.* Пусть z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$. Это означает, что при $0<|z-z_0|<R$ функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. Правая часть этой формулы, как сумма сходящегося степенного ряда, непрерывна в точке z_0, значит, ее предел при $z\to z_0$ равен сумме ряда в точке z_0. Так как последняя сумма равна a_0, то существует и конечный предел левой части $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a_0$.

Достаточность. Пусть, наоборот, существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$. Тогда функция $w=f(z)$ ограничена в окрестности точки z_0; пусть в этой окрестности $|f(z)|\le M$. Из формул для коэффициентов ряда Лорана (22.37) и формулы (22.10) следует , что при достаточно малом ρ

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho=\frac{M}{\rho^n}. \qquad (22.40)$$

В правой части этой формулы ρ можно взять сколь угодно малым, тогда при отрицательных n правая (а значит, и левая) часть сколь угодно мала, а это может быть только тогда, когда эти части равны 0. Итак, $a_n=0$ при $n=-1,-2,\ldots$ ■

Определение 22.17. Изолированная особая точка z_0 называется *полюсом* функции $w=f(z)$, если в разложении (22.39) главная часть содержит лишь конечное число членов. Пусть $a_{-n}=0$ для $n>k$ (где k – некоторое натуральное число) и $a_{-k}\ne 0$. Тогда число k называется *порядком* полюса (т.е. порядок полюса – это наибольшее число $k\in N$, для которого $a_{-k}\ne 0$). Полюса́ первого порядка также называются *простыми* полюсами.

Можно показать, что определение полюса эквивалентно тому, что $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

Определение 22.18. Изолированная особая точка z_0 называется *существенно особой* точкой функции $w=f(z)$, если в разложении (22.39) главная часть содержит бесконечное число членов.

Можно показать, что определение существенно особой точки эквивалентно тому, что $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ не существует.

Теоремы о полюсах

Теорема 22.13. Пусть в проколотой окрестности точки z_0 функция $w=f(z)$ может быть представлена в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\varphi(z)$ – аналитическая в этой (уже не проколотой) окрестности и $\varphi(z_0)\ne 0$, а k – некоторое натуральное число. Тогда z_0 – полюс функции $w=f(z)$ порядка k.

▲ Разложим аналитическую функцию $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0: $\varphi(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$, при этом $\varphi(z_0)=$ $=a_0\ne 0$. Тогда

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}=\frac{a_0}{(z-z_0)^k}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}}+\frac{a_2}{(z-z_0)^{k-2}}+\ldots$$

Это есть разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0 (в силу единственности такого разложения), в котором $a_0\ne 0$, значит, действительно z_0 – полюс функции $w=f(z)$ порядка k. ■

Определение 22.19. Точка z_0 называется нулем аналитической в ее окрестности функции $\varphi(z)$ кратности m (где $m=1,\ 2,\ldots$), если в окрестности этой точки $\varphi(z)=(z-z_0)^m g(z)$, где $g(z)$ аналитична в этой окрестности и $g(z_0)\ne 0$.

Теорема 22.14. Это определение эквивалентно тому, что

$$\varphi(z_0)=\varphi'(z_0)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(z_0)=0,\quad \varphi^{m}(z_0)\ne 0.$$

▲ Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8.5 о кратных корнях многочлена.

Именно пусть $\varphi(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0)\ne 0$, тогда

$$\varphi'(z)=m(z-z_0)^{m-1}g(z)+(z-z_0)^m g'(z)=$$
$$=(z-z_0)^{m-1}\left[mg(z)+(z-z_0)g'(z)\right]=(z-z_0)^{m-1}g_1(z),$$

где $g_1(z)$ – аналитическая в исходной окрестности и $g_1(z_0)=mg(z_0)\ne 0$; отсюда $\varphi'(z_0)=0$. Аналогично

$$\varphi''(z)=(z-z_0)^{m-2}\left[(m-1)g_1(z)+(z-z_0)g_1'(z)\right]=(z-z_0)^{m-2}g_2(z),$$

где $g_2(z)$ аналитична в исходной окрестности и $g_2(z_0)=(m-1)g_1(z_0)\neq 0$, откуда $\varphi''(z_0)=0$; ... ; $\varphi^{(m-1)}(z)=(z-z_0)g_{m-1}(z)$, где $g_{m-1}(z)$ аналитична в исходной окрестности и $g_{m-1}(z_0)\neq 0$, откуда $\varphi^{(m-1)}(z_0)=0$. Далее имеем

$$\varphi^{(m)}(z)=g_{m-1}(z)+(z-z_0)g'_{m-1}(z);\quad \varphi^{(m)}(z_0)=g_{m-1}(z_0)\neq 0.$$

Пусть теперь, наоборот,

$$\varphi(z_0)=\varphi'(z_0)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(z_0)=0,\ \varphi^{m}(z_0)\neq 0.$$

Раскладывая аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $\varphi(z)$ в ряд Тейлора, имеем

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=(z-z_0)^m\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m}=(z-z_0)^m g(z),$$

где $g(z)=\sum\limits_{n=m}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m}$ аналитична в нашей окрестности, как сумма сходящегося степенного ряда, и $g(z_0)=\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0.$ ■

Теорема 22.15. Пусть в проколотой окрестности точки z_0 функция $w=f(z)$ может быть представлена в виде $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в этой (уже не проколотой) окрестности, $\varphi(z)$ имеет в точке z_0 нуль кратности m, а $\psi(z)$ имеет в точке z_0 нуль кратности $n>m$. Тогда z_0 — полюс функции $w=f(z)$ порядка $n-m$.

▲ По условию теоремы в окрестности точки z_0

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{(z-z_0)^m g_1(z)}{(z-z_0)^n g_2(z)},$$

где $g_1(z)$ и $g_2(z)$ аналитичны в этой окрестности и $g_1(z_0)\neq 0$, $g_2(z_0)\neq 0$. Тогда в этой окрестности $f(z)=\frac{g_1(z)/g_2(z)}{(z-z_0)^{n-m}}$. Числитель данной дроби является аналитической функцией в (не проколотой) окрестности, так как представляет собой отношение двух аналитических функций при знаменателе, отличном от нуля, откуда согласно теореме 22.13 и следует нужный нам результат. ■

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что ее можно применять и при $m=0$, т.е. если z_0 вообще не является нулем функции $\varphi(z)$. Кроме того, из приведенного рассуждения видно, что теорему можно применять и при $n\leq m$. В этом случае в проколотой окрестности точки z_0 функция $f(z)=\frac{g_1(z)}{g_2(z)}(z-z_0)^{m-n}$, где $g_i(z)$ — аналитическая функция, причем $g_i(z)\neq 0$, $i=1{,}2$, значит, существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ и z_0 является устранимой особой точкой для функции $w=f(z)$.

22.11. Вычеты и их нахождение

Определение 22.20. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $w=f(z)$ и

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{22.41}$$

— разложение этой функции в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0. *Вычетом* функции $w=f(z)$ в точке z_0 называется коэффициент a_{-1}, т.е. коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в этом разложении, который обозначается как $a_{-1}=\operatorname{Res}f(z_0)=\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0}f(z)$.

Из формулы (22.37) для нахождения коэффициентов ряда Лорана при $n=-1$ следует, что

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma)}f(z)dz, \tag{22.42}$$

где (Γ) — окружность $|z-z_0|=\rho$, а ρ столь мало, что внутри этой окружности и на ней у функции $f(z)$ нет других особых точек.

Нахождение вычетов в особых точках в зависимости от их вида проводится следующим образом:

а) z_0 — устранимая особая точка функции $w=f(z)\Rightarrow$

$$a_{-1}=0\Rightarrow\operatorname{Res}f(z_0)=0;$$

б) z_0 — существенно особая точка функции $w=f(z)$; в этом случае функцию следует разложить в ряд Лорана (22.41) и найти коэффициент a_{-1} в этом разложении;

в) z_0 — полюс функции $w=f(z)$ порядка k; тогда в проколотой окрестности точки z_0 разложение (22.41) принимает вид

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots. \qquad (22.43)$$

Умножив обе части этого равенства на $(z-z_0)^k$, получим:

$$f(z)(z-z_0)^k = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \ldots +$$

$$+a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + a_1(z-z_0)^{k+1} + \ldots$$

Продифференцируем обе части последнего равенства $k - 1$ раз. При этом степенной ряд в правой его части можно дифференцировать почленно. Поскольку производные всех степеней $(z-z_0)$ меньших, чем $(k - 1)$, будут равны 0, то

$$\left[f(z)(z-z_0)^k\right]^{(k-1)} =$$

$$= a_{-1}(k-1)! + a_0 k!(z-z_0) + a_1(k+1)k \cdot \ldots \cdot 3(z-z_0)^2 + \ldots \qquad (22.44)$$

Теперь перейдем в равенстве (22.44) к пределу при $z \to z_0$. Правая часть, как сумма сходящегося степенного ряда, непрерывна в точке z_0, значит, предел при $z \to z_0$ правой части существует и равен сумме ряда в точке z_0, т.е. $a_{-1}(k-1)!$. Раз существует предел правой части, то существует такой же предел левой части равенства:

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]^{(k-1)} = a_{-1}(k-1)!,$$

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]^{(k-1)}. \qquad (22.45)$$

Замечание. При выводе формулы (22.45) не использовалось отличие от 0 коэффициента a_{-k} (равно как и других коэффициентов) в формуле (22.43). Так как при $a_{-k} = 0$ порядок полюса уже будет меньше, чем k, то формула (22.45) на самом деле справедлива не только для полюса порядка k, но и для полюса любого меньшего порядка, т.е. порядок полюса в формуле (22.45) можно (если это целесообразно) «перебрать».

В частности, для простого полюса (т.е. при $k = 1$)

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]. \qquad (22.46)$$

Рассмотрим здесь также случай, при котором в проколотой окрестности точки z_0 функция $w = f(z)$ может быть представлена в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в этой (уже не проколотой) окрестности, $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в точке z_0 нуль кратности 1, т.е. $\psi(z_0) = 0$, а $\psi'(z_0) \neq 0$. Тогда в соответствии с замечанием к теореме 22.15 z_0 — простой полюс $f(z)$ и согласно формуле (22.46)

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (22.47)$$

Примеры. Найти вычеты функций в их особых точках.

Решение

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ — единственной особой точкой этой функции является точка $z_0 = 0$. Это устранимая особая точка, так как $\lim\limits_{z\to 0} = \dfrac{\sin z}{z} = 1$. Значит, $\operatorname{Res} f(0) = 0$ (тот же результат можно получить и при разложении $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z_0 = 0$).

2. $f(z) = z^4 \sin\dfrac{1}{z}$ — единственной особой точкой этой функции снова является точка $z_0 = 0$. Так как на всей комплексной плоскости $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \ldots$, то при $z \neq 0$, заменяя в этом разложении z на $\dfrac{1}{z}$, имеем

$$f(z) = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \ldots\right) = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} - \frac{1}{7!z^3} + \ldots$$

Это и есть разложение исходной функции в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z_0 = 0$ (в силу единственности такого разложения). Главная часть этого разложения содержит бесконечное число членов, значит, $z_0 = 0$ — существенно особая точка, и вычет $f(z)$ в этой точке, т.е. коэффициент при $\dfrac{1}{z}$, равен $\dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120}$.

3. $f(z) = \dfrac{1+\cos z}{(z-\pi)^6}$ — единственной особой точкой этой функции является точка $z_0 = \pi$. Знаменатель в данной точке имеет нуль кратности 6, а числитель — нуль кратности 2: $(1+\cos z)|_{z=\pi} = 0$; $(1+\cos z)'|_{z=\pi} = -\sin z|_{z=\pi} = 0$; $(1+\cos z)''|_{z=\pi} = -\cos z|_{z=\pi} = 1 \neq 0$. Тогда согласно теореме 22.15 $z_0 = \pi$ — полюс

функции $f(z)$ четвертого порядка. Однако нахождение вычета в этой точке по формуле (22.45) при $k=4$ затруднительно: $\operatorname{Res} f(\pi)=\frac{1}{6}\lim\limits_{z\to\pi}\left[\frac{1+\cos z}{(z-\pi)^2}\right]'''$.

Поэтому в соответствии с замечанием к формуле (22.45), применим для нахождения вычета эту формулу при $k=6$:

$$\operatorname{Res} f(\pi)=\frac{1}{5!}\lim_{z\to\pi}\left[\frac{1+\cos z}{(z-\pi)^6}(z-\pi)^6\right]^{(5)}=\frac{1}{120}\lim_{z\to\pi}[1+\cos z]^{(5)}=\frac{1}{120}\lim_{z\to\pi}[-\sin z]=0.$$

22.12. Основная теорема о вычетах

Применение теории вычетов основывается в первую очередь на следующей основной теореме.

Теорема 22.16. Пусть функция $w=f(z)$ аналитическая в некоторой области (D), за исключением конечного числа изолированных особых точек, и $(L)\subset(D)$ – кусочно-гладкая замкнутая кривая, не проходящая через эти точки. Тогда

$$\int\limits_{(L)} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k), \tag{22.48}$$

где z_k, $k=1, 2,..., n$, – особые точки $f(z)$, лежащие внутри кривой (L) (рис. 160).

▲ Пусть (Γ_k), $k=1, 2,..., n$, – окружность с центром в особой точке z_k, такая, что внутри ее и на ней нет других особых точек функции $f(z)$, кроме z_k. По интегральной теореме Коши для неодносвязных областей $\int\limits_{(L)} f(z)dz=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{(\Gamma_k)} f(z)dz$. Но согласно формуле (22.42) $\int\limits_{(\Gamma_k)} f(z)dz=2\pi i\operatorname{Res} f(z_k)$.■

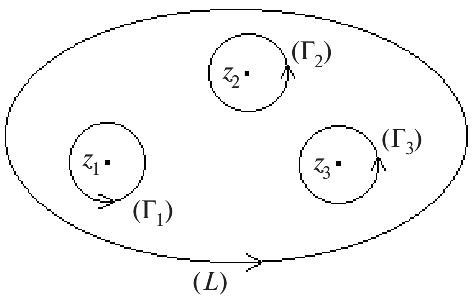


Рис. 160

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z+1|=3}\frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{(z-1)^2}dz$.

Решение

$\int\limits_{|z+1|=3}\frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{(z-1)^2}dz=2\pi i[\operatorname{Res} f(1)+\operatorname{Res} f(-\pi)]$, так как особыми точками этой функции являются точка $z=1$ (лежит внутри контура интегрирования) и точки, где $\cos\frac{z}{2}=0$, т.е. $\frac{z}{2}=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $z=\pm\pi+4\pi k$, из которых только точка $-\pi$ лежит внутри контура интегрирования (рис. 161).

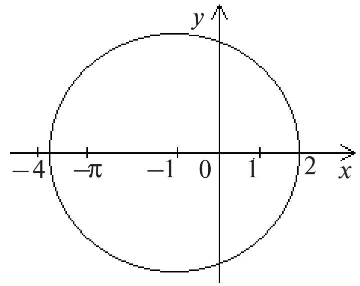


Рис. 161

Точка $z=1$ – полюс второго порядка ($\operatorname{tg}\frac{1}{2}\neq 0$), значит, по формуле (22.45) получаем

$$\operatorname{Res} f(1)=\lim_{z\to 1}\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{(z-1)^2}(z-1)^2\right]'=\lim_{z\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}=\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}}.$$

Что касается точки $z=-\pi$, то в ее окрестности подынтегральную функцию можно представить в виде отношения двух аналитических функций:

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\sin\frac{z}{2}\Big/(z-1)^2}{\cos\frac{z}{2}},$$

$$\varphi(-\pi)=-\frac{1}{(\pi+1)^2}\neq 0,\ \psi(-\pi)=0,\ \psi'(-\pi)=-\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2}\Big|_{z=-\pi}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Значит, по формуле (22.47) определяем: $\operatorname{Res} f(-\pi)=\frac{\varphi(-\pi)}{\psi'(-\pi)}=-\frac{2}{(\pi+1)^2}$.

Таким образом, исходный интеграл равен $2\pi i\left[\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}}-\frac{2}{(\pi+1)^2}\right]$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^3}{z^4+1}dz.$

Решение

$I=\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^3}{z^4+1}dz.$ Здесь прямые вычисления по формуле (22.48) довольно громоздки, так как внутри контура интегрирования содержатся четыре особые точки подынтегральной функции: $z=\sqrt[4]{-1}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$ (см. формулу извлечения корня из комплексного числа). Поэтому сделаем замену $z=\frac{1}{\zeta}$. При такой замене направление обхода контура меняется на противоположное, так как $\arg z=-\arg\zeta$, а окружность $|z|=2$ переходит в окружность $|\zeta|=\frac{1}{2}$. В итоге имеем

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^3}{z^4+1}dz=\oint\limits_{|\zeta|=\frac{1}{2}}\frac{-\frac{1}{\zeta^2}d\zeta}{\zeta^3\left(\frac{1}{\zeta^4}+1\right)},$$

где окружность обходится по часовой стрелке. Меняя направление обхода на противопожарное, получаем $\displaystyle\oint\limits_{|\zeta|=\frac{1}{2}}\frac{d\zeta}{\zeta\left(1+\zeta^4\right)}$.

Теперь внутри контура интегрирования находится лишь простой полюс $\zeta_0=0$, и по формуле (22.47) $I=2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{\zeta=0}\dfrac{\frac{1}{1+\zeta^4}}{\zeta}=2\pi i\dfrac{\frac{1}{1+\zeta^4}}{1}\Big|_{\zeta=0}=2\pi i.$

Отметим также, что данный пример достаточно просто решить, используя понятие вычета подынтегральной функции в бесконечно удаленной точке.

22.13. Вычисление некоторых интегралов от функций действительного переменного

1. Рассмотрим $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$, где $P_m(x)$ – многочлен степени *m*, $Q_n(x)$ – многочлен степени *n*, не имеющий действительных корней, и $n-m\ge 2$. Такой несобственный интеграл сходится, так как подынтегральная функция при действительных *x* непрерывна а при больших *x* ведет себя как $\frac{x^m}{x^n}=\frac{1}{x^{n-m}}$, где $n-m\ge 2$.

Теорема 22.17. Если σ – сумма вычетов функции $f(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ в ее особых точках, находящихся в верхней полуплоскости (т.е. при $\operatorname{Im} z>0$), то.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=2\pi i\sigma, \tag{22.49}$$

▲Особые точки $f(z)$ – это корни (нули) ее знаменателя $Q_n(z)$. Значит, этих точек конечное число и согласно теореме 22.15 они являются полюсами (не лежащими на действительной оси).

Рассмотрим изображенный на рис. 162 контур (L), состоящий из отрезка $[-R,R]$ и полуокружности (C_R): $|z|=R$, где R столь велико, что все особые точки $f(z)$ из верхней полуплоскости находятся внутри (L).

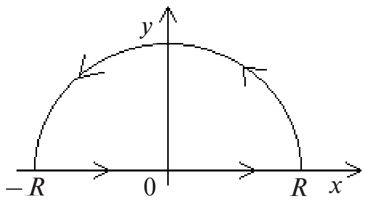


Рис. 162

Согласно основной теореме о вычетах 22.16 интеграл $\displaystyle\oint\limits_{(L)}f(z)dz=2\pi i\sigma$, или, учитывая, что на действительной оси $z=x$,

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx+\int\limits_{(C_R)}\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}dz=2\pi i\sigma. \tag{22.50}$$

Перейдем в этой формуле к пределу при $R\to\infty$. Докажем, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{(C_R)}\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}dz=0. \tag{22.51}$$

А именно пусть

$$P_m(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_m,\quad Q_n(z)=b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n,$$

тогда

$$\left|\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}\right|=\frac{|a_0||z|^m}{|b_0||z|^n}\cdot\frac{\left|1+\dfrac{a_1}{a_0z}+\ldots+\dfrac{a_m}{a_0z^m}\right|}{\left|1+\dfrac{b_1}{b_0z}+\ldots+\dfrac{b_n}{b_0z^n}\right|}.$$

Последняя дробь при $|z|=R\to\infty$ стремится к 1, т.е. имеет конечный предел, значит, при больших R она ограничена:

$$\frac{\left|1+\frac{a_1}{a_0 z}+\ldots+\frac{a_m}{a_0 z^m}\right|}{\left|1+\frac{b_1}{b_0 z}+\ldots+\frac{b_n}{b_0 z^n}\right|}\le K,$$

где K — некоторое число. Следовательно, при $|z|=R$

$$\left|\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}\right|\le\frac{K\,|a_0|}{|b_0|\,R^{n-m}}. \qquad (22.52)$$

По свойству интегралов от функций комплексного переменного (22.10) при кривой (C_R) длиной $l=\pi R$ имеем

$$\left|\int\limits_{(C_R)}\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}dz\right|\le\frac{K\,|a_0|}{|b_0|\,R^{n-m}}\pi R=\frac{\pi K\,|a_0|}{|b_0|\,R^{n-m-1}}.$$

Но так как по условию теоремы $(n-m-1)\ge 1$, то последняя величина при $R\to\infty$ стремится к нулю, что и доказывает формулу (22.51).

Переходя в формуле (22.50) к пределу при $R\to\infty$ и учитывая формулу (22.51), получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=2\pi i\sigma$, т.е. формулу (22.49). ■

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$.

Решение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{z^2}{(z^2+1)^2}=2\pi i\lim_{z\to i}\left[\frac{z^2(z-i)^2}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]'=2\pi i\lim_{z\to i}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]'=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{2z(z+i)^2-z^2 2(z-i)}{(z+i)^4}=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{2z(z+i)-2z^2}{(z+i)^3}=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{2zi}{(z+i)^3}=$$

$$=2\pi i\frac{-2}{-8i}=\frac{\pi}{2}$$ ($z_0=i$ — полюс второго порядка функции $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$).

2. Рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(x)\cos\lambda x dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(x)\sin\lambda x dx$, где $T(x)$ — правильная рациональная дробь, знаменатель которой не имеет действительных корней, и $\lambda>0$.

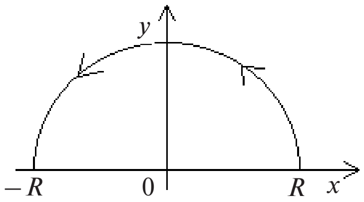


Рис. 163

Сначала докажем нижеследующую лемму, в которой (C_R) — та же полуокружность (рис. 163), что и выше: $|z|=R$, $\operatorname{Im} z\ge 0$.

Лемма Жордана. Пусть $g(z)$ — непрерывная в верхней полуплоскости при достаточно больших $|z|$ функция, такая, что если $M(R)=\max\limits_{z\in(C_R)}|g(z)|$, то $\lim\limits_{R\to\infty}M(R)=0$. Тогда при $\lambda>0$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{(C_R)}g(z)e^{i\lambda z}dz=0. \qquad (22.53)$$

▲ Зададим полуокружность (C_R) параметрически:

$$z=\mathrm{R}e^{i\varphi}=R(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \ \varphi\in[0,\pi].$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{(C_R)}g(z)e^{i\lambda z}dz\right|=\left|\int\limits_0^{\pi}g(\mathrm{R}e^{i\varphi})e^{i\lambda R(\cos\varphi+i\sin\varphi)}i\,\mathrm{R}e^{i\varphi}\,d\varphi\right|\le$$

$$\le\int\limits_0^{\pi}\left|g(\mathrm{R}e^{i\varphi})\right|\left|e^{i\lambda R\cos\varphi}\right|\left|e^{-\lambda R\sin\varphi}\right|\left|i\right|\left|R\right|\left|e^{i\varphi}\right|d\varphi.$$

Так как при действительных значениях φ

$$\left|e^{i\varphi}\right|=\left|\cos\varphi+i\sin\varphi\right|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1,$$

то и $\left|e^{i\lambda R\cos\varphi}\right|=1$; $\left|e^{-\lambda R\sin\varphi}\right|=e^{-\lambda R\sin\varphi}$ как модуль действительного положительного числа; $\left|g(\mathrm{R}e^{i\varphi})\right|\le M(R)$. Значит,

$$\left|\int\limits_{(C_R)}g(z)e^{i\lambda z}dz\right|\le M(R)\cdot R\int\limits_0^{\pi}e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi. \qquad (22.54)$$

Так как

$$\int\limits_0^{\pi}e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi,$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi \underset{d\varphi=-d\psi}{\overset{\varphi=\pi-\psi}{=}} -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-\lambda R\sin(\pi-\psi)}d\psi = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\psi}d\psi,$$

то из (22.54) следует, что

$$\left|\int\limits_{(C_R)} g(z)e^{i\lambda z}dz\right| \le 2M(R)\cdot R\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\varphi}d\varphi. \qquad (22.55)$$

Далее рассмотрим дробь $\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$, $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. При $\varphi=0$ числитель и знаменатель этой дроби равны. При увеличении φ знаменатель возрастает быстрее числителя, так как $\varphi'=1$, а $(\sin\varphi)'=\cos\varphi<1$, т. е. при увеличении φ дробь уменьшается и будет наименьшей при $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Значит, $\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\ge\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$. Тогда при $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\sin\varphi\ge\dfrac{2}{\pi}\varphi\Rightarrow-\sin\varphi\le-\dfrac{2}{\pi}\varphi$ и из (22.55) имеем

$$\left|\int\limits_{(C_R)} g(z)e^{i\lambda z}dz\right| \le 2M(R)\cdot R\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi}d\varphi =$$

$$=2M(R)\cdot R\frac{\pi}{-2\lambda R}e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi}\Bigg|_{z_0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi M(R)}{\lambda}(1-e^{-\lambda R})\le\frac{\pi M(R)}{\lambda},$$

так как при $\lambda>0$ выполняется неравенство $e^{-\lambda R}<1$. Таким образом,

$$\left|\int\limits_{(C_R)} g(z)e^{i\lambda z}dz\right| \le \frac{\pi M(R)}{\lambda}. \qquad (22.56)$$

Так как $\lim\limits_{R\to\infty} M(R)=0$, то из (22.56) следует формула (22.53). ■

Теорема 22.18. Если σ – сумма вычетов функции $T(z)e^{i\lambda z}$ в ее особых точках из верхней полуплоскости, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x)\cos\lambda x dx=\mathrm{Re}(2\pi i\sigma),\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x)\sin\lambda x dx=\mathrm{Im}(2\pi i\sigma), \qquad (22.57)$$

▲ Рассмотрим $\int\limits_{(L)} T(z)e^{i\lambda z}dz$, где $T(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ – правильная рациональная дробь (т.е. $n>m$), знаменатель которой не имеет действительных корней, $\lambda>0$ и (L) – тот же контур, что в п. 1 (рис. 164). Этот контур состоит из отрезка $[-R,R]$ и полуокружности (C_R): $|z|=R$, $\mathrm{Im}\, z\ge0$, где R столь велико, что все особые точки $T(z)$ (нули ее знаменателя) из верхней полуплоскости находятся внутри (L).

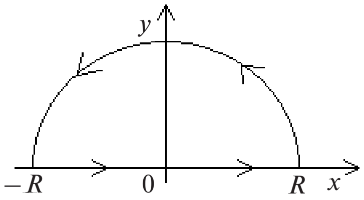


Рис. 164

Согласно основной теореме 22.16

$$\int\limits_{(L)} T(z)e^{i\lambda z}dz=\int\limits_{-R}^{R} T(x)e^{i\lambda x}dx+\int\limits_{(C_R)} T(z)e^{i\lambda z}dz=2\pi i\sigma, \qquad (22.58)$$

где σ – сумма вычетов функции $T(z)e^{i\lambda z}$ в ее особых точках из верхней полуплоскости.

Перейдем в формуле (22.58) к пределу при $R\to\infty$. При этом из оценки (22.52) при $n>m$ следует, что

$$M(R)=\max_{z\in(C_R)}|T(z)|=\max_{z\in(C_R)}\left|\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}\right|\to0 \text{ при } R\to\infty,$$

значит, согласно лемме Жордана $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{(C_R)} T(z)e^{i\lambda z}dz=0$, и тогда из формулы (22.58) при $R\to\infty$ следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x)e^{i\lambda x}dx=2\pi i\sigma. \qquad (22.59)$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x)e^{i\lambda x}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x)\cos\lambda x dx+i\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x)\sin\lambda x dx,$$

то, приравнивая действительные и мнимые части обеих сторон равенства (22.59), получаем формулы (22.57). ■

Замечание. Из доказательства теоремы 22.18 видно, что в левой части формулы (22.59), а значит, и в левых частях формул (22.57) несобственные интегралы понимаются в смысле главного значения.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx.$

Решение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx = \mathrm{Im}\left[2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{ze^{iz}}{z^2+4}\right] \overset{(22.47)}{=} \mathrm{Im}\left[2\pi i \frac{(ze^{iz})\big|_{z=2i}}{(z^2+4)'\big|_{z=2i}}\right] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[2\pi i \frac{ze^{iz}}{2z}\Big|_{z=2i}\right] = \mathrm{Im}\left[\pi i e^{-2}\right] = \frac{\pi}{e^2}.$$

3. Рассмотрим теперь $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(x,y)$ – рациональная функция двух переменных. Сделаем в этом интеграле замену $z = e^{ix}$, при которой $|z| = 1$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$, $dz = ie^{ix}dx = izdx \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz}$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{1}{iz}dz = \int\limits_{|z|=1} F(z)dz, \qquad (22.60)$$

где $F(z) = R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{1}{iz}$ – рациональная функция z. Интеграл в правой части формулы (22.60) вычисляется с помощью основной теоремы о вычетах.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}.$

Решение

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(5+4\frac{z^2+1}{2z}\right)} = -i\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2+5z+2}.$$

Особые точки подынтегральной функции – это решения уравнения $2z^2+5z+2=0$, т.е. $z_1=-2$ и $z_2=-\frac{1}{2}$. Из этих точек лишь z_2 находится внутри контура интегрирования, поэтому

$$I = -i\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{2z^2+5z+2} \overset{(22.47)}{=} 2\pi \frac{1}{4z+5}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}.$$

23. ОСНОВЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

23.1. Оригинал и его изображение

Определение 23.1. *Оригиналом* называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция $f(t)$ определена на всей прямой и $f(t)=0$ при $t<0$;

2) функция $f(t)$ вместе со своими производными до некоторого (достаточно высокого) порядка кусочно-непрерывна, т.е. функция и ее производные могут иметь только разрывы первого рода в конечном числе в любом конечном интервале;

3) функция $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют числа $M>0$ и $s_0 \ge 0$, такие, что для всех t $|f(t)| < Me^{s_0 t}$; при этом число s_0 называется показателем роста функции $f(t)$.

Определение 23.2. Пусть функция $f(t)$ является оригиналом. *Изображением* этой функции (или ее преобразованием Лапласа) называется функция комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая соотношением

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \qquad (23.1)$$

Формулу (23.1) также будем записывать в виде $f(t) \div F(p)$.

Теорема 23.1. Изображение $F(p)$ определено при $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$ (т.е. при этом условии несобственный интеграл в формуле (23.1) сходится) и является в этой области аналитической функцией (рис. 165).

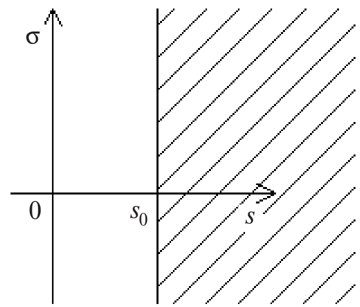


Рис. 165

▲ Аналогично оценкам интеграла в действительной области имеем

$$|F(p)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int\limits_0^{+\infty} |f(t)|\left|e^{-pt}\right|dt \le \int\limits_0^{+\infty} Me^{s_0 t}\left|e^{-st}\right|\left|e^{-i\sigma t}\right|dt =$$

$$=\int_0^{+\infty} Me^{s_0 t}e^{-st}dt = M\int_0^{+\infty} e^{(s_0-s)t}dt = \frac{M}{s_0-s}e^{(s_0-s)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{s-s_0}$$

(последнее равенство справедливо, так как $s_0 - s < 0$), что и дает сходимость (даже абсолютную) интеграла в правой части формулы (23.1).

Для доказательства аналитичности $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ нужно показать, что для каждого *p* из этой полуплоскости $F'(p)$ существует:

$$F'(p)=\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)'_p = \int_0^{+\infty}\left(f(t)e^{-pt}\right)'_p dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}dt. \qquad (23.2)$$

Последний интеграл сходится, так как аналогично предыдущей оценке при $s \ge c > s_0$

$$\left|-\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^{+\infty} t\left|f(t)\right|e^{-st}\left|e^{-i\sigma t}\right|dt \le \int_0^{+\infty} t\,Me^{s_0 t}e^{-ct}dt = M\int_0^{+\infty} t\,e^{(s_0-c)t}\,dt =$$

$$=\frac{M}{s_0-c}\int_0^{+\infty} t\,de^{(s_0-c)t} = \frac{M}{s_0-c}\left[te^{(s_0-c)t}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{(s_0-c)t}dt\right] =$$

$$=\frac{M}{s_0-c}\left[\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{(c-s_0)t}} - \frac{1}{s_0-c}e^{(s_0-c)t}\Big|_0^{+\infty}\right] \underset{\text{Лопиталя}}{\overset{\text{правило}}{=}}$$

$$=\frac{M}{s_0-c}\left[\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{(c-s_0)t}(c-s_0)} + \frac{1}{s_0-c}\right] = \frac{M}{s_0-c}\left[0+\frac{1}{s_0-c}\right] = \frac{M}{(c-s_0)^2}.$$

На самом деле, согласно признаку Вейерштрасса для несобственных интегралов, проведенная выкладка дает даже равномерную по *p* в области $\operatorname{Re} p = s \ge c > s_0$ сходимость интеграла в правой части формулы (23.2), что, как и для действительного переменного, является обоснованием возможности дифференцирования интеграла по параметру *p*, использованного в формуле (23.2). ■

Замечание. Из полученной в ходе доказательства этой теоремы оценки

$$\left|F(p)\right| \le \frac{M}{s-s_0} \qquad (23.3)$$

следует также, что

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p) = 0. \qquad (23.4)$$

Пример. Найти изображение так называемой единичной функции

$$\eta(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t>0;\\ 0 & \text{при } t<0.\end{cases}$$

Решение

По определению $F(p)=\int_0^{+\infty}\eta(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}$. При $p = s + i\sigma$ и $s>0$ $\lim_{t\to+\infty}e^{-pt} = \lim_{t\to+\infty}e^{-st}e^{-i\sigma t} = 0$, так как под знаком предела стоит произведение бесконечно малой при $t\to+\infty$ функции e^{-st} на ограниченную функцию $e^{-i\sigma t}$ $\left(\left|e^{-i\sigma t}\right|=1\right)$. Отсюда $\eta(t) \div \frac{1}{p}$.

Схема применения операционного исчисления состоит в следующем: перейдя от данных функций к их изображениям, совершают соответствующие (более простые) операции над полученными изображениями и находят изображение искомой функции. Затем по найденному изображению искомой функции находят оригинал – решение исходной задачи.

Теорема 23.2 (обращения). Пусть $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ (где $s_0 > 0$ – некоторое число), такая, что для любого $c > s_0$ взятый вдоль вертикальной прямой интеграл $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)dp$, понимаемый в смысле главного значения, абсолютно сходится, и $\lim_{R\to\infty}M(R)=\lim_{R\to\infty}\max_{|p|=R,\ \operatorname{Re} p\ge c}\left|F(p)\right|=0$. Тогда $F(p)$ является изображением функции

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)e^{pt}dp \qquad (23.5)$$

(здесь интеграл также понимается в смысле главного значения).

▲ Сначала в (23.5) преобразуем интеграл при $p = c + i\sigma$:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)e^{pt}dp = \int_{-\infty}^{\infty}F(c+i\sigma)e^{ct}e^{i\sigma t}id\sigma = ie^{ct}\int_{-\infty}^{\infty}F(c+i\sigma)e^{i\sigma t}d\sigma. \qquad (23.6)$$

Последний интеграл согласно признаку Вейерштрасса равномерно сходится по t, так как $\left|F(c+i\sigma)e^{i\sigma t}\right| = \left|F(c+i\sigma)\right|$, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|F(c+i\sigma)\right|d\sigma$ сходится по условию теоремы.

Теперь найдем изображение функции (23.5) в произвольной фиксированной точке p_0: $\operatorname{Re} p_0 > c$, и докажем, что оно действительно равно $F(p_0)$. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-p_0 t}dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} e^{-p_0 t}\left[\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp\right]dt.$$

Меняя в этой формуле порядок интегрирования, что возможно в силу отмеченной выше равномерной (по t) сходимости, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-p_0 t}dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p_0-p)t}dt\right]dp.$$

Так как аналогично нахождению изображения единичной функции

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p_0-p)t}dt = -\frac{1}{p_0-p}e^{-(p_0-p)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p_0-p}$$

$$(\operatorname{Re}(p_0-p) = \operatorname{Re} p_0 - \operatorname{Re} p = \operatorname{Re} p_0 - c > 0),$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-p_0 t}dt = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{F(p)}{p-p_0}dp. \qquad (23.7)$$

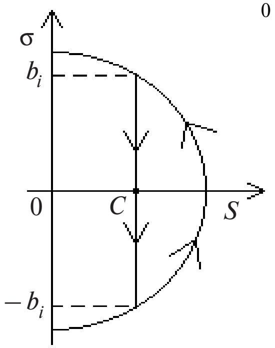


Рис. 166

Теперь рассмотрим $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)}\frac{F(p)}{p-p_0}dp$ по изображенному на рис. 166 контуру, состоящему из дуги окружности (C_R) и отрезка $[c+bi, c-bi]$, где R столь велико, что p_0 находится внутри контура.

Так как $F(p)$ аналитическая функция, то согласно интегральной формуле Коши этот интеграл равен $F(p_0)$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c+ib}^{c-ib}\frac{F(p)}{p-p_0}dp + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C_R)}\frac{F(p)}{p-p_0}dp = F(p_0). \qquad (23.8)$$

При $p \in (C_R)$ $\left|\frac{F(p)}{p-p_0}\right| \le \frac{M(R)}{|p-p_0|} \le \frac{M(R)}{|p|-|p_0|} = \frac{M(R)}{R-|p_0|}$ и длина $(C_R) \le \pi R$, поэтому

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C_R)}\frac{F(p)}{p-p_0}dp\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M(R)}{R-|p_0|}\pi R = \frac{1}{2}M(R)\frac{R}{R-|p_0|}.$$

Предел же последней величины при $R\to\infty$ равен нулю, поскольку $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$, а $\lim\limits_{R\to\infty}\frac{R}{R-|p_0|} = 1$.

Значит, $\lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C_R)}\frac{F(p)}{p-p_0}dp = 0$ и, переходя в формуле (23.8) к пределу при $R\to\infty$, получаем $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c+i\infty}^{c-i\infty}\frac{F(p)}{p-p_0}dp = F(p_0)$ или $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{F(p)}{p-p_0}dp = F(p_0)$, что с учетом формулы (23.7) и доказывает нужное утверждение.

Можно проверить, что функция $f(t)$, заданная формулой (23.5), удовлетворяет условиям определения оригинала. В частности, используя (23.6), имеем

$$|F(t)| = \frac{1}{2\pi}e^{ct}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(c+i\sigma)e^{i\sigma t}d\sigma\right| \le \frac{1}{2\pi}e^{ct}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(c+i\sigma)d\sigma = Ke^{ct},$$

где $K > 0$ — некоторое число. ■

Приведем здесь (уже без доказательства) еще одну теорему, оправдывающую описанную выше схему применения операционного исчисления.

Теорема 23.3 (единственности). Если в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ $F(p)$ является изображением двух оригиналов, то эти оригиналы равны во всех точках, где они непрерывны.

То есть в точках своей непрерывности оригинал определяется однозначно; в точках же разрыва (1-го рода) значение оригинала может быть любым, так как это значение не влияет на величину интеграла в формуле (23.1).

23.2. Свойства преобразования Лапласа

Далее всюду запись $f(t) \div F(p)$ будет означать, что $f(t)$ — оригинал, а $F(p)$ — его изображение.

Теорема 23.4 (смещения). Пусть $f(t) \div F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$ и α — любое комплексное число. Тогда при $\operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re}\alpha$ справедлива формула

$$e^{\alpha t} f(t) \div F(p-\alpha)$$

(т.е. в аргументе изображения p заменяется на $p-\alpha$).

▲ $e^{\alpha t} f(t) \div \int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p-\alpha)$ в силу формулы (23.1) при $\operatorname{Re}(p-\alpha) > s_0$, т.е. при $\operatorname{Re} p - \operatorname{Re}\alpha > s_0$, $\operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re}\alpha$. ■

Пример. Найти изображение функции $e^{\alpha t}$, где α — произвольное комплексное число.

Решение

Здесь, как и в других примерах ниже, условию 1 определения оригинала удовлетворяет не эта функция, а функция, равная нулю и $e^{\alpha t}$ при отрицательных и положительных значениях t соответственно, т.е. функция $e^{\alpha t}\eta(t)$. Однако там, где это не может привести к недоразумениям, будем для простоты записи $\eta(t)$ опускать.

То есть $e^{\alpha t} = e^{\alpha t}\eta(t)$. Так как $\eta(t) \div \dfrac{1}{p}$, то согласно теореме 23.4 функция $e^{\alpha t}\eta(t) \div \dfrac{1}{p-\alpha}$.

Теорема 23.5 (линейность изображения). Пусть $f_1(t) \div F_1(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_1$ и $f_2(t) \div F_2(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_2$. Тогда при $\operatorname{Re} p > \max(s_1, s_2)$ и любых комплексных постоянных c_1 и c_2 справедлива формула

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p).$$

▲ $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div \int\limits_0^{+\infty} \left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] e^{-pt} dt =$

$$= c_1 \int\limits_0^{+\infty} f_1(t) e^{-pt} dt + c_2 \int\limits_0^{+\infty} f_2(t) e^{-pt} dt = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p). \ ■$$

Примеры. Найти изображения функций (α — произвольное комплексное число).

Решение

1) $\sin \alpha t = \dfrac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i} \div \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i\alpha} - \dfrac{1}{p+i\alpha}\right) = \dfrac{1}{2i} \cdot \dfrac{2i\alpha}{p^2+\alpha^2} = \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$;

2) $\cos \alpha t = \dfrac{e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}}{2} \div \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-i\alpha} + \dfrac{1}{p+i\alpha}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2p}{p^2+\alpha^2} = \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$;

3) $\operatorname{sh}\alpha t = \dfrac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \div \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\alpha} - \dfrac{1}{p+\alpha}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\alpha}{p^2-\alpha^2} = \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$;

4) $\operatorname{ch}\alpha t = \dfrac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} \div \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\alpha} + \dfrac{1}{p+\alpha}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2p}{p^2-\alpha^2} = \dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$.

Приведем еще один пример применения теорем 23.4 и 23.5: $e^t \sin^2 t = \dfrac{1}{2} e^t (1-\cos 2t)$; так как $1-\cos 2t = \eta(t) - \cos 2t \div \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+4} = \dfrac{4}{p(p^2+4)}$, то

$$e^t \sin^2 t \div \frac{2}{(p-1)\left[(p-1)^2+4\right]}.$$

Теорема 23.6 (подобия). Пусть $f(t) \div F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$ и $k > 0$ — произвольная постоянная. Тогда при тех же p функция $f(kt) \div \dfrac{1}{k} F\left(\dfrac{p}{k}\right)$.

▲ $f(kt) \div \int\limits_0^{+\infty} f(kt) e^{-pt} dt$. Положим здесь $kt = \tau$; $t = \dfrac{\tau}{k}$; $dt = \dfrac{1}{k} d\tau$.

Тогда $f(kt) \div \dfrac{1}{k} \int\limits_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{k}\tau} d\tau = \dfrac{1}{k} F\left(\dfrac{p}{k}\right)$. ■

Теорема 23.7 (дифференцирование оригинала). Пусть $f(t) \div F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$ и $f'(t)$ тоже является оригиналом при $\operatorname{Re} p > s_1$. Тогда $f'(t) \div pF(p) - f(0)$ при $\operatorname{Re} p > \max(s_0, s_1)$, где под $f(0)$ понимается $\lim\limits_{t \to +0} f(t)$.

▲ Интегрируя по частям, имеем

$$f'(t) \div \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} df(t) = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\, de^{-pt} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-pt} f(t) - f(0) + p\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0),$$

так как при $p = s + i\sigma$

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| \le \left|e^{-st}\right| \left|e^{-i\sigma t}\right| Me^{s_0 t} = Me^{-st} e^{s_0 t} = M^{-(s-s_0)t},$$

а эта величина стремится к 0 при $t \to +\infty$ $(s - s_0 > 0)$. ■

Следствие. Если оригиналом являются не только $f'(t)$, но и следующие производные этой функции, то согласно теореме 23.7 получаем

$$f''(t) = [f'(t)]' \div p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$f'''(t) = [f''(t)]' \div p\left[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)\right] - f''(0) =$$
$$= p^3F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

и т.д. В общем случае

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Теорема 23.8 (интегрирование оригинала). Пусть $f(t) \div F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$ и $f(t)$ непрерывна при $t \ne 0$. Тогда при тех же p

$$\int_0^t f(t)\, dt \div \frac{F(p)}{p}.$$

▲ Проверим, что функция $\varphi(t) = \int_0^t f(t)\, dt$ является оригиналом. Условия 1 и 2 определения оригинала, очевидно, выполняются, условие 3 тоже выполняется, так как

$$|\varphi(t)| = \left|\int_0^t f(t) dt\right| \le \int_0^t |f(t)| dt \le M\int_0^t e^{s_0 t} dt = \frac{M}{s_0} e^{s_0 t}\Big|_0^t = \frac{M}{s_0}(e^{s_0 t} - 1) \le \frac{M}{s_0} e^{s_0 t}.$$

Так как функция $\varphi(t)$ является оригиналом, то она имеет некоторое изображение. Пусть $\varphi(t) \div \Phi(p)$. Тогда по теореме 23.7 имеем

$$\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p) - \lim_{t\to+0}\int_0^t f(t)\, dt = p\Phi(p) - \lim_{t\to+0} f(c)\cdot t =$$

$$= p\Phi(p) - 0 = p\Phi(p)$$

(здесь применены теоремы о среднем в определенном интеграле, где точка c между 0 и t, и о произведении бесконечно малой и ограниченной функций). Но согласно теореме 10.6 о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу $\varphi'(t) = f(t) \div F(p)$, значит, $F(p) = p\Phi(p)$, т.е. $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$. ■

Теорема 23.9 (дифференцирование изображения). Пусть $f(t) \div F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда при тех же p справедлива формула $-tf(t) \div F'(p)$.

▲ Теорема сразу же следует из формулы (23.2). ■

Результат теоремы можно переписать следующим образом: $tf(t) \div -F'(p)$.

Следствие. Применяя эту теорему несколько раз, имеем

$$t^2 f(t) \div F''(p);\ t^3 f(t) \div -F'''(p); \ldots; t^n f(t) \div (-1)^n F^{(n)}(p).$$

Пример. Найти изображение функций $g(t) = t^n$.

Решение

При натуральных числах n имеем

$$t^n = t^n \eta(t) \div (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Рассмотренные до сих пор примеры можно объединить в следующую таблицу изображений:

$\eta(t) \div \dfrac{1}{p}$	$\sin\alpha t \div \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	$\operatorname{sh}\alpha t \div \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$t^n \div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t} \div \dfrac{1}{p-\alpha}$	$\cos\alpha t \div \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$	$\operatorname{ch}\alpha t \div \dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$.	

Пример. Найти изображение функции $f(t) = t\sin t$.

Решение

$$t\sin t \div -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

Теорема 23.10 (интегрирование изображения). Пусть $f(t) \div F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$ и для таких p интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp$ сходится (здесь под интегралом понимается $\lim\limits_{\operatorname{Re} P\to+\infty}\int\limits_p^P F(p)dp$). Тогда этот интеграл является изображением функции $\frac{f(t)}{t}$, т.е. $\frac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^\infty F(p)\,dp.$

▲ Интеграл в правой части последней формулы имеет вид

$$\int\limits_p^\infty F(p)\,dp = \int\limits_p^\infty\left[\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right]dp. \tag{23.9}$$

При $\operatorname{Re} p = s \ge c > s_0$ имеем

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| = \left|f(t)\right|\left|e^{-st}\right|\left|e^{-i\sigma t}\right| \le Me^{s_0 t}e^{-st} = Me^{(s_0-s)t} \le Me^{(s_0-c)t}$$

и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} Me^{(s_0-c)t}dt = \frac{M}{s_0-c}e^{(s_0-c)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{m}{c-s_0}$ сходится, что согласно признаку Вейерштрасса дает равномерную по p сходимость внутреннего интеграла в формуле (23.9). Предполагая, что путь интегрирования от p до ∞ целиком лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s \ge c > s_0$, можем изменить порядок интегрирования в этой формуле. Получаем

$$\int\limits_p^\infty F(p)\,dp = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\left[\int\limits_p^\infty e^{-pt}dp\right]dt. \tag{23.10}$$

Так как при $p = s + i\sigma$

$$\int\limits_p^\infty e^{-pt}dp = -\frac{1}{t}e^{-pt}\Big|_p^\infty = -\frac{1}{t}\left[\lim_{s\to+\infty} e^{-st}e^{-i\sigma t} - e^{-pt}\right] = -\frac{1}{t}(0 - e^{-pt}) = \frac{1}{t}e^{-pt}$$

(произведение бесконечно малой и ограниченной функций), то из формулы (23.10) имеем $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp = \int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt$, что и доказывает теорему (заметим, что из наших рассуждений следует и сходимость последнего интеграла). ■

Пример. Найти изображение функции $g(t) = \frac{e^t - 1}{t}$.

Решение

$$\frac{e^t-1}{t} \div \int\limits_p^\infty\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)dp = \left[\ln(p-1) - \ln p\right]\Big|_p^\infty = \ln\frac{p-1}{p}\Big|_p^\infty = \ln 1 - \ln\frac{p-1}{p} = \ln\frac{p}{p-1}.$$

Замечание. Теорема 23.10 означает, что $\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt = \int\limits_p^\infty F(p)dp.$ Если бы в этой формуле можно было положить $p = 0$, то она приняла бы вид

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt = \int\limits_0^\infty F(p)dp. \tag{23.11}$$

На самом деле формула (23.11) верна. Ее можно применять для вычисления некоторых сходящихся несобственных интегралов от функций действительного переменного.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt.$

Решение

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt = \int\limits_0^\infty\frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Свертка двух функций и ее изображение

Определение 23.3. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – два оригинала. Их сверткой называется функция, обозначаемая $f_1 * f_2$ и определяемая равенством

$$(f_1 * f_2)(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \tag{23.12}$$

1. Интеграл в правой части формулы (23.12) существует в силу кусочной непрерывности функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

2. Функция $(f_1 * f_2)(t)$ также является оригиналом.

Условия 1 и 2 определения оригинала, очевидно, выполняются. Проверим выполнение условия 3.

Пусть s_0 — наибольший из показателей роста функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, а M — наибольшая из постоянных в оценке их модулей. Тогда $|f_i(t)| < Me^{s_0 t}$, $i = 1, 2$, и

$$|(f_1 * f_2)(t)| \le \int_0^t |f_1(\tau)||f_2(t-\tau)|\,d\tau \le$$

$$\le \int_0^t M^2 e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)}\,d\tau = M^2 \int_0^t e^{s_0 t}\,d\tau = M^2 t e^{s_0 t}, \qquad (23.13)$$

что не превосходит некоторой постоянной, умноженной на $e^{(s_0+\varepsilon)t}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное (сколь угодно малое) число.

3. $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$. Действительно, $(f_2 * f_1)(t) = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau)\,d\tau$. Произведем в этом интеграле замену $t - \tau = s$, $\tau = t - s$, $d\tau = -ds$. Тогда

$$(f_2 * f_1)(t) = -\int_t^0 f_2(t-s) f_1(s)\,ds = \int_0^t f_1(s) f_2(t-s)\,ds = (f_1 * f_2)(t).$$

Теорема 23.11 (о свертке). Пусть $f_1(t) \div F_1(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_1$ и $f_2(t) \div F_2(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_2$. Тогда при $\operatorname{Re} p > s_0 = \max(s_1, s_2)$

$$(f_1 * f_2)(t) \div F_1(p) F_2(p),$$

т.е. свертке оригиналов соответствует произведение их изображений.

▲ Согласно определениям изображения и свертки

$$(f_1 * f_2)(t) \div \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \right] e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

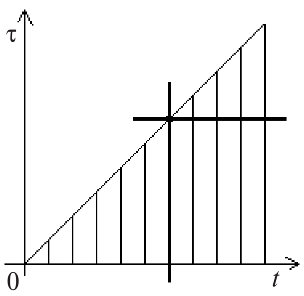


Рис. 167

Это есть двойной интеграл по изображенной на рис. 167 области (в этой области действительно t изменяется от 0 до $+\infty$, а при каждом фиксированном t, т.е. вдоль вертикальной прямой, τ меняется от 0 до прямой $\tau = t$).

Так как согласно оценке (23.13), этот двойной интеграл абсолютно сходится, то в нем можно изменить порядок интегрирования и тогда

$$(f_1 * f_2)(t) \div \int_0^{+\infty} d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,dt = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau}\,d\tau \int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-p(t-\tau)}\,dt.$$

Заменяя во внутреннем интеграле правой части последней формулы $t - \tau = s$, $dt = ds$, получим

$$(f_1 * f_2)(t) \div \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau}\,d\tau \int_0^{+\infty} f_2(s) e^{-ps}\,ds = F_1(p) F_2(p).$$

Интеграл Дюамеля

Пусть $f(t) \div F(p)$ и $\varphi(t) \div \Phi(p)$. Теорема о свертке означает тогда, что $\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \div F(p)\Phi(p)$. Отсюда согласно теореме о дифференцировании оригинала

$$\left(\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \right)'_t \div pF(p)\Phi(p) - \lim_{t\to+0} \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau = pF(p)\Phi(p).$$

Но левая часть этой формулы, как производная интеграла по параметру и по верхнему пределу, равна $\int_0^t f(\tau)\varphi'_t(t-\tau)\,d\tau + f(t)\varphi(0)$.

Таким образом, нами *доказана* следующая теорема.

Теорема 23.12.

$$\int_0^t f(\tau)\varphi'_t(t-\tau)\,d\tau + f(t)\varphi(0) \div p\,F(p)\Phi(p). \qquad (23.14)$$

Формула (23.14) называется формулой Дюамеля, или интегралом Дюамеля.

Теорема 23.13 (запаздывания). Пусть $f(t) \div F(p)$, а $\tau > 0$. Тогда $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$.

▲ Сначала отметим, что так как $f(t) = 0$ при $t < 0$, то $f(t-\tau) = 0$ при $t - \tau < 0$, т.е. $t < \tau$. График функции $f(t-\tau)$ получается из графика функции $f(t)$ сдвигом на τ вправо (рис. 168). Поэтому функция $f(t-\tau)$ и называется запаздывающей по отношению к функции $f(t)$.

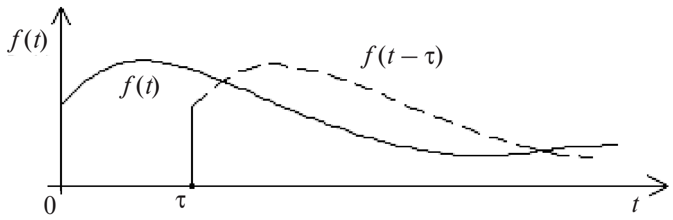


Рис. 168

Далее, учитывая, что $f(t-\tau)=0$ при $t-\tau<0$, т.е. при $t<\tau$, имеем:

$$f(t-\tau) \div \int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_\tau^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену $t-\tau=s$, $t=\tau+s$, $dt=ds$. Получим

$$f(t-\tau) \div \int_0^{+\infty} f(s)e^{-p(\tau+s)}ds = e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} f(s)e^{-ps}ds = e^{-p\tau}F(p). \blacksquare$$

23.3. Нахождение оригиналов по изображениям

Нахождение оригиналов по теореме 23.2, естественно, мало интересно. Рассмотрим некоторые типовые примеры более простого нахождения оригиналов.

Примеры. Найти оригиналы по изображениям.

Решение

1. $F(p)=\dfrac{2p}{(p+1)(p^2+1)}$.

Разложим эту правильную рациональную дробь на простые дроби:

$$\frac{2p}{(p+1)(p^2+1)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+1};\ 2p=A(p^2+1)+(Bp+C)(p+1).$$

При $p=-1$, имеем: $-2=2A$, $A=-1$. Приравнивая коэффициенты при p^2 и p^0, имеем $A+B=0$ и $A+C=0$, откуда $B=1$ и $C=1 \Rightarrow$

$$F(p)=-\frac{1}{p+1}+\frac{p+1}{p^2+1}=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p+1}.$$

Откуда, с учетом линейности изображения и таблицы изображений имеем

$$F(p) \div \cos t+\sin t-e^{-t}.$$

2. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$.

Эту дробь также можно разложить на простые, однако проще применить теорему об интегрировании оригинала:

$$F(p)=\frac{\frac{1}{p^2+1}}{p} \div \int_0^t \sin t dt = -\cos t\Big|_0^t = 1-\cos t.$$

3. $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+2}$.

Эта правильная рациональная дробь уже является простой. Выделим в ее знаменателе полный квадрат:

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)^2+1}=\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+\frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Теперь применим теорему смещения: так как $\cos t \div \dfrac{p}{p^2+1}$ и $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, то

$$F(p) \div e^t\cos t+e^t\sin t.$$

4. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

В этом случае целесообразно применить теорему о свертке:

$$F(p)=\frac{p}{(p+1)^2}\cdot\frac{p}{p^2+1} \div \cos t * \cos t = \int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]d\tau =$$

$$=\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{4}\sin(2\tau-t)\Big|_0^t=\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin(-t)=\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t.$$

Отметим здесь также, что если изображение $F(p)$ есть рациональная дробь, то эта дробь согласно формуле (23.4) обязана быть правильной.

Теперь перейдем от примеров к более общему случаю.

Теорема 23.14 (разложения). Пусть $F(p)$ – правильная рациональная дробь. Тогда оригиналом для нее будет (умноженная на $\eta(t)$) функция

$$f(t)=\sum_k \operatorname*{Res}_{p=p_k}\left\{F(p)e^{pt}\right\}, \qquad (23.15)$$

где сумма берется по всем особым точкам функции $F(p)$.

▲ Особые точки функции $F(p)e^{pt}$ – это нули знаменателя $F(p)$ (значит, все такие точки будут полюсами). Этих точек – конечное число, поэтому можем выбрать такое достаточно большое число $c>0$, что все особые точки лежат левее прямой $\mathrm{Re}\, p=c$.

Рассмотрим на плоскости p полуокружность (L_R) с диаметром на этой прямой и центром на действительной оси такого столь большого радиуса R, что все особые точки $F(p)e^{pt}$ лежат внутри изображенного на рис. 169 замкнутого контура, состоящего из (L_R) и отрезка $[c-Ri,\ c+Ri]$.

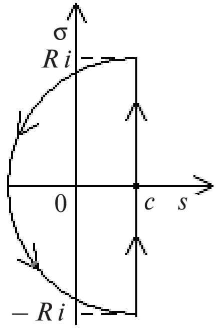


Рис. 169

Согласно основной теореме о вычетах при любом фиксированном $t>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L_R)}F(p)e^{pt}dp+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-Ri}^{c+Ri}F(p)e^{pt}dp= \tag{23.16}$$

$$=\sum_k \underset{p=p_k}{\mathrm{Res}}\left\{F(p)e^{pt}\right\},$$

Перейдем в этой формуле к пределу при $R\to+\infty$ (при этом правая часть формулы от R уже не зависит). Для этого произведем в первом интеграле левой части замену $p=c+iz$. Так как уравнение полуокружности (L_R) имеет вид $p-c=Re^{i\varphi}$, $\varphi\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, то после замены эта полуокружность перейдет на плоскости z в кривую

$$iz=\mathrm{Re}^{i\varphi}\Rightarrow z=\frac{1}{i}Re^{i\varphi}=-iRe^{i\varphi}=-iR(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=R(\sin\varphi-i\cos\varphi)=R\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Обозначая $\varphi-\frac{\pi}{2}=\psi$, имеем $z=R(\cos\psi+$ $+i\sin\psi)=Re^{i\psi}$, $\psi\in[0,\pi]$, т.е. на плоскости z полученная кривая является изображенной на рис. 170 полуокружностью (C_R) радиуса R с центром в точке 0.

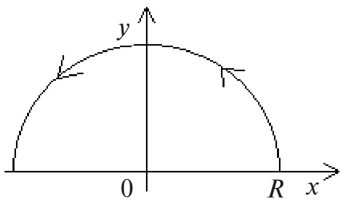


Рис. 170

Так как при такой замене $dp=idz$, то в результате

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L_R)}F(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_R)}F(c+iz)e^{(c+iz)t}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{ct}\int\limits_{(C_R)}F(c+iz)e^{itz}dz=\frac{1}{2\pi}e^{ct}\int\limits_{(C_R)}g(z)e^{itz}dz, \tag{23.17}$$

где $g(z)=F(c+iz)$. Согласно оценке (22.52), обозначая в ней $\frac{K|a_0|}{|b_0|}=L$ и $R=|z|$, при $n-m\ge1$ (наша дробь правильная) и $|z|>1$, $|z|>c$ имеем

$$|F(z)|\le\frac{L}{|z|^{n-m}}\le\frac{L}{|z|},$$

значит,

$$|g(z)|=|F(c+iz)|\le\frac{L}{|c+iz|}\le\frac{L}{|iz|-|c|}=\frac{L}{R-c}.$$

Из последней оценки ясно, что $M(R)=\max\limits_{z\in(C_R)}|g(z)|\to0$ при $R\to+\infty$, и тогда согласно лемме Жордана $(t>0)$ $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{(C_R)}g(z)e^{itz}dz=0$, значит, из формулы (23.17) следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L_R)}F(p)e^{pt}dp=0. \tag{23.18}$$

Далее, согласно теореме 23.2

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-Ri}^{c+Ri}F(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)e^{pt}dp=f(t). \tag{23.19}$$

Теперь, переходя в формуле (23.16) к пределу при $R\to+\infty$, с учетом формул (23.18) и (23.19) получаем искомую формулу (23.15). ■

Пример. Вернемся к рассмотренному выше примеру $F(p)=\frac{2p}{(p+1)(p^2+1)}$ и найдем оригинал для этого разложения еще раз при помощи теоремы разложения, т.е. формулы (23.15), учитывая при этом, что все три особых точки $p=-1$, $p=\pm i$ — простые полюса.

Решение

$$F(p)\div\underset{p=-1}{\mathrm{Res}}\frac{\frac{2p}{p^2+1}e^{pt}}{p+1}+\underset{p=i}{\mathrm{Res}}\frac{\frac{2p}{p+1}e^{pt}}{p^2+1}+\underset{p=-i}{\mathrm{Res}}\frac{\frac{2p}{p+1}e^{pt}}{p^2+1}=\left.\frac{2p}{p^2+1}e^{pt}\right|_{p=-1}+$$

$$+\frac{\frac{2p}{p+1}e^{pt}}{2p}\Bigg|_{p=i}+\frac{\frac{2p}{p+1}e^{pt}}{2p}\Bigg|_{p=-i}=-e^{-t}+\frac{1}{1+i}e^{it}+\frac{1}{1-i}e^{-it}=$$

$$=-e^{-t}+\frac{1-i}{2}(\cos t+i\sin t)+\frac{1+i}{2}(\cos t-i\sin t)=-e^{-t}+\left(\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2}\right)\cos t+$$

$$+i\left(\frac{1-i}{2}-\frac{1+i}{2}\right)\sin t=-e^{-t}+\cos t+\sin t.$$

23.4. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами; аргумент искомой функции обозначим t, а саму эту функцию $x(t)$:

$$\begin{cases} a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t), & (23.20)\\ x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0',\ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}. & (23.21)\end{cases}$$

Правая часть $f(t)$ предполагается непрерывной, что дает существование и единственность решения задачи Коши (23.20)–(23.21).

Начальные условия всегда будем задавать в точке 0. Если аргумент рассматривать как время, то это соответствует принятию начального момента отсчета времени за 0; если же начальные условия заданы в точке t_0, то после замены аргумента $t-t_0=\tau$ задача сводится к задаче (23.20)–(23.21).

Пусть $x(t)$ – решение задачи (23.20)–(23.21). Применим к обеим частям уравнения (23.20) преобразование Лапласа, учитывая его линейность и теорему о дифференцировании оригинала. Обозначая $x(t)\div X(p)$, имеем

$$x'(t)\div pX(p)-x(0);\quad x''(t)\div p^2X(p)-px(0)-x'(0),\ldots;$$

$$x^{(n)}(t)\div p^{(n)}X(p)-p^{n-1}x(0)-p^{n-2}x'(0)-\ldots-x^{(n-1)}(0).$$

В итоге получим линейное алгебраическое уравнение для $X(p)$. Решая его, мы найдем $X(p)$, а затем по изображению $X(p)$ вернемся к оригиналу $x(t)$.

Пример. Решить задачу Коши $\begin{cases} x''+x=\cos t;\\ x(0)=-1,\ x'(0)=1.\end{cases}$

Решение

Применим к обеим частям уравнения преобразование Лапласа (аргумент p для краткости записи опустим):

$$p^2X+p-1+X=\frac{p}{p^2+1}\Leftrightarrow(p^2+1)X=\frac{p}{p^2+1}-p+1\Leftrightarrow$$

$$X=\frac{p}{(p^2+1)^2}-\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'-\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}.$$

Теперь возвратимся назад к оригиналам, учитывая теорему о дифференцировании изображения: $x(t)=\frac{1}{2}t\sin t-\cos t+\sin t.$

Аналогично задаче Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами решается задача Коши для систем таких уравнений.

Пример. Решить задачу Коши $\begin{cases} x'-y=2e^t;\\ y'-x=-2e^t;\\ x(0)=1,\ y'(0)=-1.\end{cases}$

Решение

Применяя преобразование Лапласа и обозначая $x(t)\div X(p)$, $y(t)\div Y(p)$, имеем

$$\begin{cases} pX-1-Y=\frac{2}{p-1};\\ pY+1-X=-\frac{2}{p-1};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} pX-Y=\frac{p+1}{p-1};\\ pY-X=-\frac{p+1}{p-1}.\end{cases}$$

Сложим эти уравнения: $pX-Y+pY-X=0\Leftrightarrow(p-1)(X+Y)=0$, откуда $Y=-X$, значит, $(p+1)X=\frac{p+1}{p-1}\Rightarrow X=\frac{1}{p-1}\div e^t$ и $Y=-\frac{1}{p-1}\div -e^t$. Таким образом, $x(t)=e^t$, $y(t)=-e^t$.

Отметим, что для применения вышеизложенного метода необходимо найти изображение правой части дифференциального уравнения (или правых частей уравнений системы), что не всегда возможно. Действительно, согласно теоремам разд. 23.2 мы умеем находить изображение лишь функций специального вида:

$$f(t)=e^{\alpha t}\left[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t\right],$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ – многочлены.

Для решения уравнений с другими правыми частями можно использовать интеграл Дюамеля (см. теорему 23.12). А именно рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_nx = f(t), \\ x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \tag{23.22}$$

Начальные условия в этой задаче для простоты берутся нулевыми (если они такими не являются, то можно показать, что некоторой заменой искомой функции их всегда можно свести к нулевым).

Рассмотрим еще одну задачу Коши:

$$\begin{cases} a_0x_1^{(n)} + a_1x_1^{(n-1)} + \ldots + a_nx_1 = 1, \\ x_1(0) = x_1'(0) = \ldots = x_1^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \tag{23.23}$$

Перейдем в задачах (23.22) и (23.23) от искомых функций к их изображениям, обозначая $x(t) \div X(p)$, $x_1(t) \div X_1(p)$, $f(t) \div F(p)$. Отметим, что 1 — это единичная функция $\eta(t)$ и $1 \div \dfrac{1}{p}$. Учитывая нулевые начальные условия, из формулы (23.22) получаем

$$a_0p^nX(p) + a_1p^{n-1}X(p) + \ldots + a_nX(p) = F(p), \text{ или}$$

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)X(p) = F(p).$$

Многочлен в скобках, который обозначим $A(p)$, это характеристический многочлен для исходного дифференциального уравнения, и последнюю формулу можно записать в виде

$$A(p)X(p) = F(p). \tag{23.24}$$

Аналогично из формулы (23.23) получаем

$$A(p)X_1(p) = \frac{1}{p}. \tag{23.25}$$

Разделив левые и правые части уравнений (23.24) и (23.25) друг на друга, имеем

$$\frac{X(p)}{X_1(p)} = pF(p), \quad \text{или} \quad X(p) = pF(p)X_1(p). \tag{23.26}$$

Теперь используем формулу (23.14), которая в наших обозначениях принимает вид

$$\int_0^t f(\tau)x'_{1_t}(t-\tau)d\tau + f(t)x_1(0) \div pF(p)X_1(p).$$

Так как $x_1(0) = 0$ то, в силу (23.26) из данной формулы следует, что

$$\int_0^t f(\tau)x'_{1_t}(t-\tau)d\tau \div X(p).$$

Тогда из этой формулы и единственности оригинала (в точках его непрерывности) следует, что

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x'_{1_t}(t-\tau)d\tau. \tag{23.27}$$

Пример. Решить задачу Коши $\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{1+t^2}; \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$

Решение

Решим сначала задачу $\begin{cases} x'' = 1; \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$

При $x(t) \div X(p)$ имеем $p^2X = \dfrac{1}{p} \Leftrightarrow X = \dfrac{1}{p^3} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2!}{p^3} \div \dfrac{1}{2}t^2$ (см. формулу для изображения t^n), т. е. $x_1(t) = \dfrac{1}{2}t^2 \Rightarrow x_1'(t) = t$. Тогда по формуле (23.27) определяем

$$x(t) = \int_0^t \frac{t-\tau}{1+\tau^2}d\tau = t\int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau^2} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d(1+\tau^2)}{1+\tau^2} =$$

$$= t\operatorname{arctg}\tau\Big|_0^t - \frac{1}{2}\ln(1+\tau^2)\Big|_0^t = t\operatorname{arctg}t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2).$$

23.5. Применение теоремы запаздывания для нахождения изображений различных функций

Теорема запаздывания 23.13 удобна при нахождении изображений функций, которые на разных участках прямой задаются различными аналитическими выражениями.

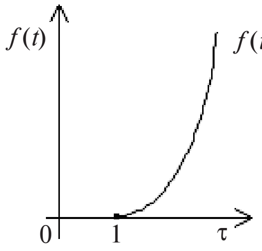


Рис. 171

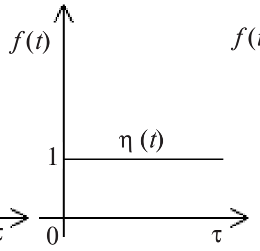


Рис. 172

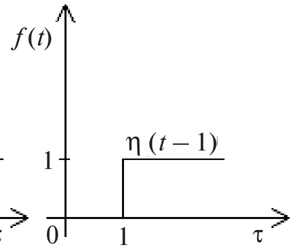


Рис. 173

Пример 1. Найти изображение функции, равной $(t-1)^2$ при $t>1$ и 0 при $t<1$ (рис. 171).

Решение

Рассмотрим функцию $f(t)=t^2=t^2\eta(t)$ (при применении теоремы запаздывания оправданна именно такая строгая запись); $f(t)\div\dfrac{2}{p^3}$. Как легко понять, исходная функция $f(t-1)=(t-1)^2\eta(t-1)$ (из графиков видно (рис. 172, 173), что это произведение действительно равно $(t-1)^2$ при $t>1$ и 0 при $t<1$). Тогда по теореме 23.13 при $\tau=1$ $f(t-1)\div e^{-p}\dfrac{2}{p^3}$.

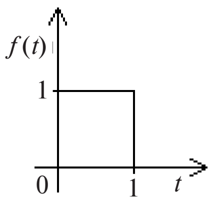


Рис. 174

Пример 2. Найти изображение функции, равной 1 при $t\in(0,1)$ и 0 при $t>1$ и $t<1$ (рис. 174) (значения функции в точках разрыва 0 и 1, естественно, роли не играют).

Решение

Из графиков функций $\eta(t)$ и $\eta(t-1)$ (см. пример 1) видно, что данная функция равна $\eta(t)-\eta(t-1)$; так как $\eta(t)\div\dfrac{1}{p}$, то согласно теореме 23.13 при $\tau=1$

$$\eta(t)-\eta(t-1)\div\frac{1}{p}-e^{-p}\frac{1}{p}=\frac{1}{p}(1-e^{-p}).$$

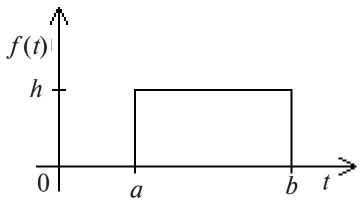


Рис. 175

Пример 3. Точно так же находится изображение «ступеньки» любой высоты (можно и отрицательной), находящейся в любом месте оси (рис. 175).

Решение

Уравнение нашей функции можно записать в виде

$$h\left[\eta(t-a)-\eta(t-b)\right]\div\frac{h}{p}(e^{-ap}-e^{-bp}).$$

Функция, состоящая из нескольких «ступенек», представляется в виде суммы таких «ступенек», а изображение исходной функции будет равно сумме изображений этих «ступенек».

Далее отметим, что любую функцию, равную $f(t)$ при $t\in(a,b)$ и 0 при $t\notin[a,b]$, можно представить в виде $f(t)[\eta(t-a)-\eta(t-b)]$, так как выражение в квадратных скобках равно 1 при $t\in(a,b)$ и 0 при $t\notin[a,b]$. Такое представление часто дает возможность находить изображения функции по теореме запаздывания.

Пример 4. Найти изображение функции с графиком, изображённым на рис. 176.

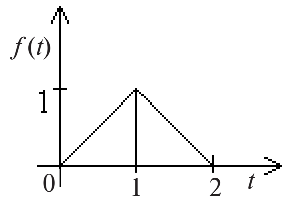


Рис. 176

Решение

Согласно предыдущим рассуждениям

$$f(t)=t\left[\eta(t)-\eta(t-1)\right]+(2-t)\left[\eta(t-1)-\eta(t-2)\right]=$$

$$=t\eta(t)-2(t-1)\eta(t-1)+(t-2)\eta(t-2)\div\frac{1}{p^2}-2e^{-p}\frac{1}{p^2}+e^{-2p}\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2}(1-e^{-p})^2.$$

Пусть теперь функция $f(t)$ – периодическая с периодом T (естественно, при $t>0$), т.е. $f(t+T)=f(t)$, $t>0$ (рис. 177).

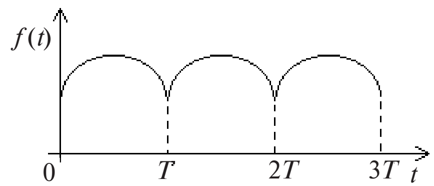


Рис. 177

Теорема 23.15 (**изображение периодической функции**). Пусть оригинал $f(t)$ есть периодическая функция с периодом T. Пусть

$$g(t)=\begin{cases}f(t) & \text{при } t\in(0,\ T),\\ 0 & \text{при } t\notin[0,\ T]\end{cases}$$

и $g(t)\div G(p)$. Тогда изображение функции $f(t)$ имеет вид

$$F(p)=\frac{G(p)}{1-e^{-pT}}. \tag{23.28}$$

$$\blacktriangle\, F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-pt}dt.$$

График функции $g(t)$ изображен на рис. 178.

График функции $g(t-nT)$ получается сдвигом вправо на nT (рис. 179). При $t\in(nT,(n+1)T)$ она равна $f(t)$, а при $t\notin[nT,(n+1)T]$ — 0. Тогда

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} g(t-nT)e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} g(t-nT)e^{-pt}dt.$$

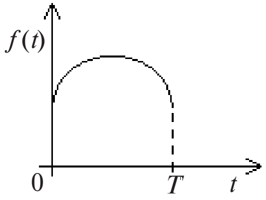


Рис. 178

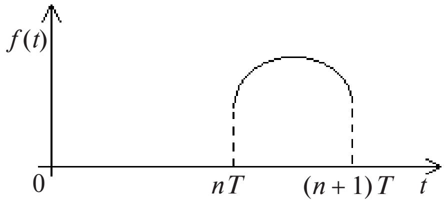


Рис. 179

Последний интеграл — это изображение функции $g(t-nT)$. По теореме запаздывания 23.13

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-pnT}G(p)=G(p)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-pnT}.$$

Последняя сумма есть сумма геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $q=e^{-pT}$. Этот знаменатель по абсолютной величине не превосходит 1, так как

$$|q|=\left|e^{-(s+i\sigma)T}\right|=\left|e^{-sT}\right|\cdot\left|e^{-i\sigma T}\right|=e^{-sT}<1 \text{ при } s=\operatorname{Re}p>0\,.$$

Значит, по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$F(p)=G(p)\frac{1}{1-e^{-pT}},$$

что и дает формулу (23.28). ■

В примерах для нахождения $G(p)$ часто удобно применять теорему запаздывания.

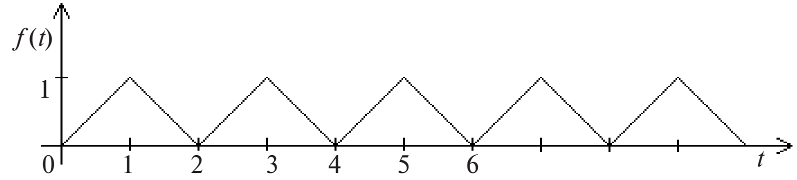


Рис. 180

Пример 5. Найти изображение периодической функции $f(t)$ с графиком, изображенным на рис. 180.

Решение

Функция $g(t)$ в данном примере имеет график, приведенный на рис. 176. Изображение ее уже было найдено в примере 4:

$$G(p)=\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2}.$$

По формуле (23.28) при $T=2$ находим, что

$$F(p)=\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-2p})}=\frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный курс основан на лекциях, читаемых автором студентам Московского технического университета связи и информатики.

Зачем нужен такой курс? Ведь его материал содержится во многих других учебниках. Дело в том, что автор поставил себе цель кратко, но вместе с тем максимально строго изложить такие сложные основополагающие разделы, как предел последовательности и функции, непрерывность функции, дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной, функции нескольких переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды, кратные интегралы, теория поля, элементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление. В учебниках для технических вузов этот материал либо дается излишне упрощенно, без части сведений и доказательств, а это противоречит самой сути математики как предмета, либо занимает очень большой объем, что отпугивает основную массу студентов. Если исходить только из лекций, то студентам трудно воспринимать упомянутый материал без наличия соответствующей учебной литературы в силу сложности тем и наличия только небольшого времени для их изложения.

Почти все теоремы в курсе приводятся с доказательствами. В первой главе теоремы о пределах последовательностей и функций изложены параллельно, что, по мнению автора, способствует лучшему пониманию материала. Даются необходимые предварительные сведения: аксиоматика действительных чисел, метод математической индукции, элементы комбинаторики, бином Ньютона. Весь материал соответствует примерно 140 часам лекционного времени.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

▲ – означает начало доказательства теоремы.

■ – конец доказательства теоремы.

$a \Rightarrow b$ – «из предложения a следует предложение b».

$a \Leftrightarrow b$ – «предложения a и b равносильны: из a следует b и из b следует a».

$\forall$ – означает «для любого», «для всякого».

$\exists$ – «существует», «найдется».

: – «такое, что».

$A \cup B$ (или $A + B$) – объединение (сумма множеств), т.е. множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

$A \cap B$ (или $A \cdot B$) – пересечение (произведение множеств), т.е. множество элементов, принадлежащих A и B одновременно.

$A \setminus B$ (или $A - B$) – разность множеств, т.е. множество элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B.

$x \in X$ – элемент x, принадлежащий множеству X.

$x \notin X$ – элемент x, не принадлежащий множеству X.

$\varnothing$ – пустое множество, т.е. множество, не содержащее ни одного элемента; все остальные множества – непустые.

В круглые скобки заключается утверждение, вытекающее из предыдущих условий, т.е. при этих условиях верно утверждение в круглых скобках.

Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c, ...

Последовательность a_n, $n = 1, 2, 3$ будет обозначаться как $\{a_n\}$.

Факториал числа: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

Сумма чисел $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.