Типовой расчёт.

Васильков Дмитрий M3115

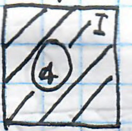
№1

$$\overline{P} = \overset{1}{\overline{A} \cap B} \cup \overset{2}{\overline{A} \cap C} \cup \overset{3}{A \cap \overline{B}} \cup \overset{4}{\overline{B} \cap C}$$

1) $\overline{A}$

2) $\overline{A} \cap B$

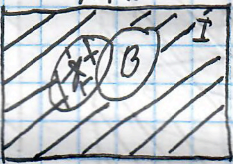
2) $\overline{A}$



$\overline{A} \cap C$

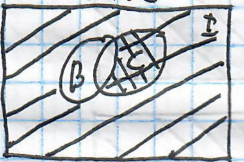
3) $\overline{B}$

$A \cap \overline{B}$



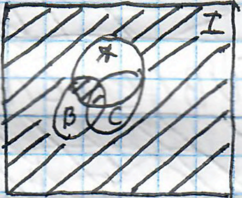
4) $\overline{B}$

$\overline{B} \cap C$



5) $\overline{P}$

6) P

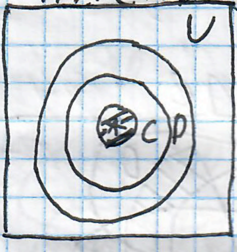


$P = \{3, 4, 5, 6\}$

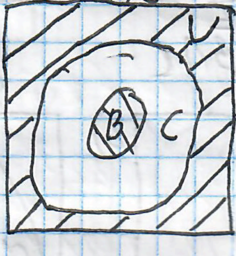
№2

$$\overset{1}{A \cap C \cap D} \cup \overset{2}{B \cap \overline{C} \cap D} \cup \overset{3}{B \cap C \cap D}$$

1) $A \cap C \cap D$

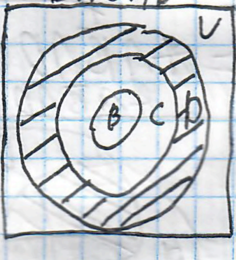


2) $B \cap \overline{C}$

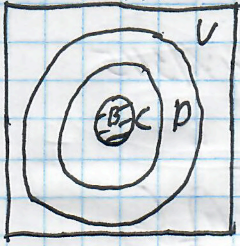


$= \varnothing$

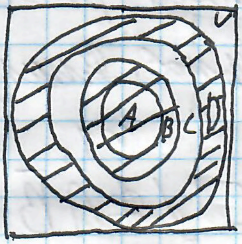
$B \cap \overline{C} \cap D$



3) $B \cap C \cap D$



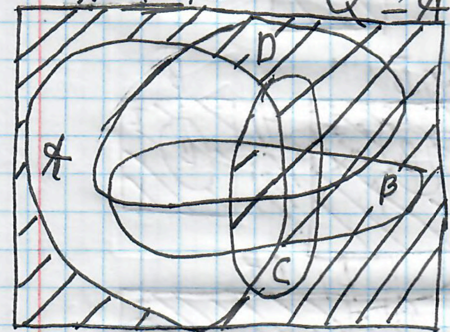
4)



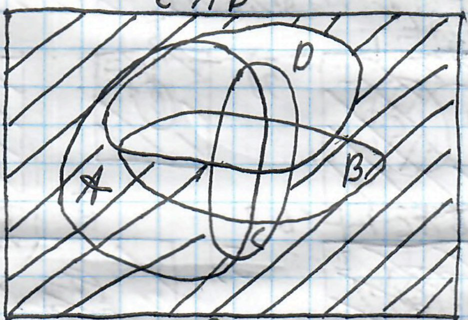
№3

$$Q = \overset{1}{\bar{A} \cup B \cap C} \cup \overset{2}{\bar{C} \cap \bar{D}}$$

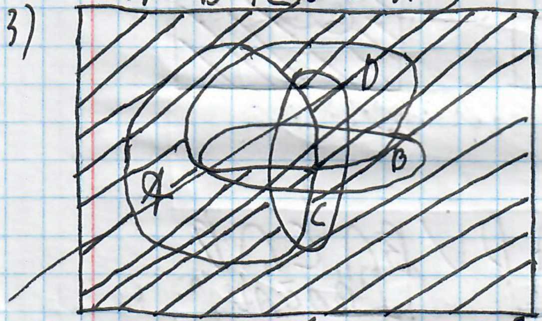
1) $\bar{A} \cup B \cap C$



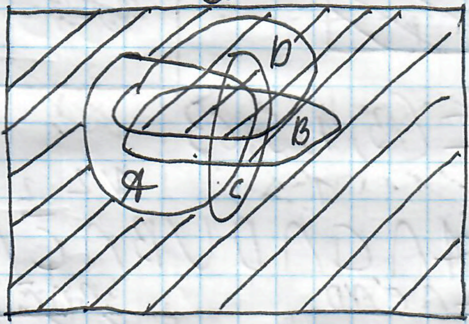
2) $\bar{C} \cap \bar{D}$



3) $\bar{A} \cup B \cap C \cup \bar{C} \cap \bar{D}$

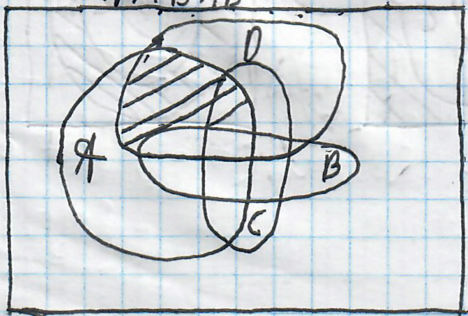


Q

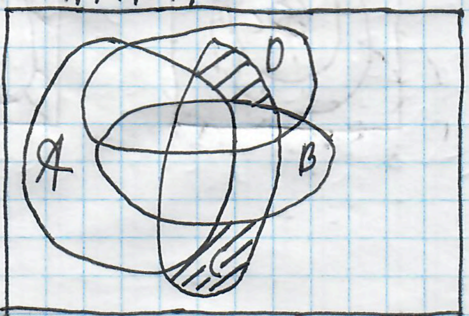


1. $P = \overset{1}{A \cap \bar{B} \cap D} \cup \overset{2}{\bar{A} \cap \bar{B} \cap C}$

1) $A \cap \bar{B} \cap D$

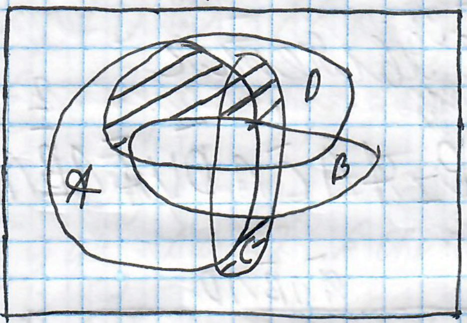


2) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$



3)

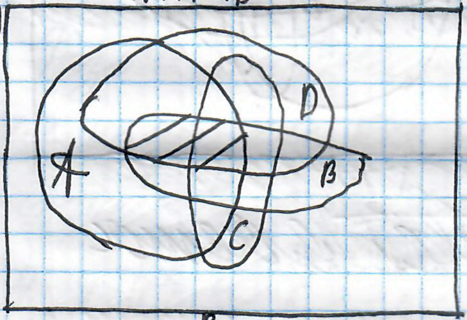
P



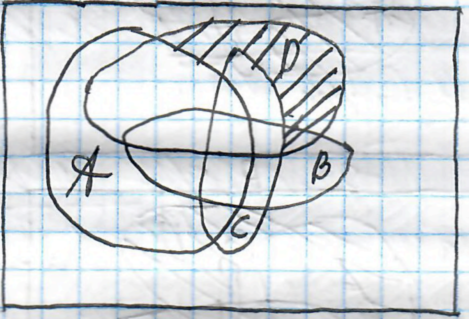
Не является

2. $P = \overset{1}{A \wedge B \wedge D} \vee \overset{2}{\bar{A} \wedge \bar{C} \wedge D}$

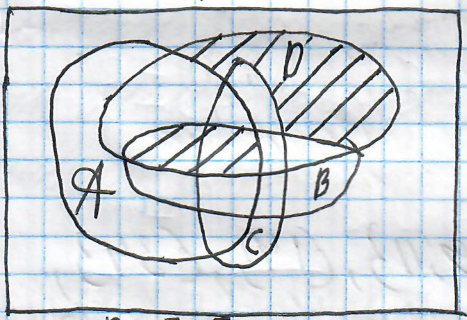
1) $A \wedge B \wedge D$



2) $\bar{A} \wedge \bar{C} \wedge D$



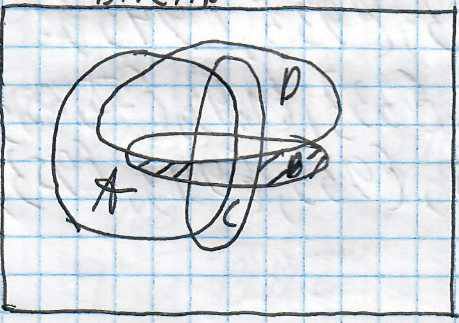
3) P



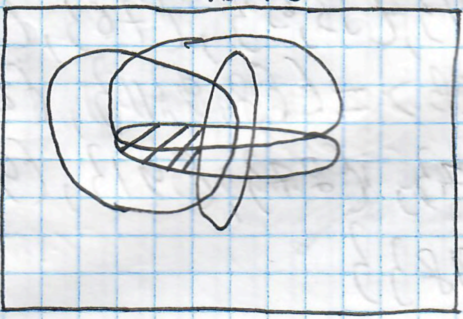
~~Не~~ является

3. $P = \overset{1}{B \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}} \vee \overset{2}{A \wedge B \wedge \bar{C}}$

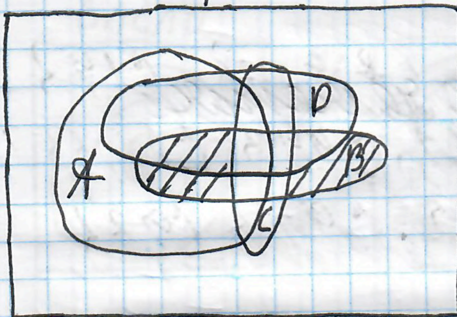
1) $B \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$



2) $A \wedge B \wedge \bar{C}$



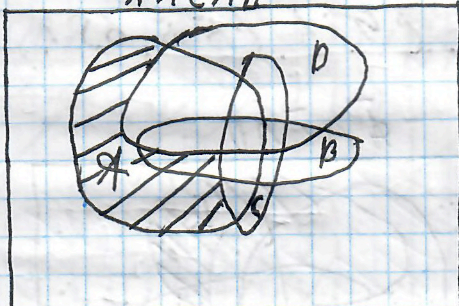
3)



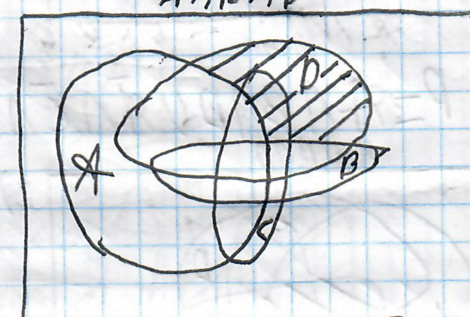
Не является

4. $P = A \wedge \overset{1}{\bar{C}} \wedge \bar{D} \vee \bar{A} \wedge \overset{2}{\bar{B}} \wedge D$

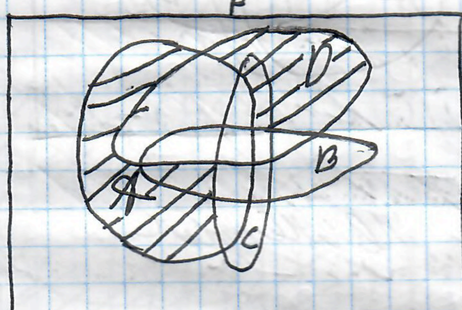
1) $A \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$



2) $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge D$



3) P



Не является

№4

a) $\langle A \rangle = \{\{6\}, \{7\}, \{8, 9, 11\}, \{14\}, \{34\}, \{91\}, \{55, 65\}, \{76\}, \{28\}, \{93\}, \{94\}\}$.

b) $\langle B \rangle = \{\{8, 9, 11\}, \{22\}, \{33\}, \{44\}, \{55, 65\}, \{67\}, \{87\}, \{91\}, \{92\}, \{93\}, \{94\}, \{95\}, \{98\}\}$

c) $\langle A \cup B \rangle = \{\{63\}, \{7\}, \{8, 9, 11\}, \{14\}, \{22\}, \{28\}, \{33\}, \{34\}, \{44\}, \{55, 65\}, \{67\}, \{76\}, \{87\}, \{91\}, \{92\}, \{93\}, \{94\}, \{95\}, \{98\}\}$.

d) $\langle A \wedge B \rangle = \{\{8, 9, 11\}, \{91\}, \{55, 65\}, \{93\}, \{94\}\}$.

Разбив множества таким образом мы получаем как минимум 2 общих множества в разбиениях, а именно: $\{8, 9, 11\}$ и $\{55, 65\}$. Также мощность каждого разбиения превышает 4, так как минимальная мощность из всех четырёх разбиений равна 5.

№5

a) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge C) \vee \bar{B} \vee \bar{C}$

Пусть $B \wedge C = T$,

Тогда $(A \wedge T) \vee (\bar{A} \wedge T) \vee \bar{B} \vee \bar{C}$

По закону склеивания получаем:

$T \vee \bar{B} \vee \bar{C}$

Если $T = B \wedge C$, то $T \vee \bar{B} \vee \bar{C} = B \wedge C \vee \bar{B} \vee \bar{C}$

По закону коммутативности

получаем: $C \wedge B \vee \bar{B} \vee \bar{C} = C \wedge U \vee \bar{C} =$

$C \vee \bar{C} = U$,

где U - универсум

b) $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$

По закону склеивания получаем:

$B \wedge (A \vee \bar{B})$

По закону дистрибутивности

получаем: $(B \wedge A) \vee (B \wedge \bar{B})$

$B \wedge \bar{B} = \emptyset$ тогда выражение принимает вид $(B \wedge A)$

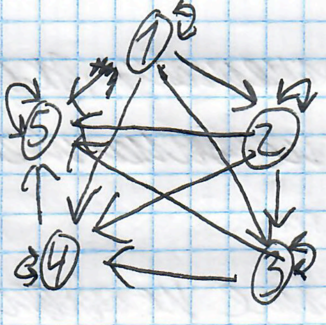
По закону де Моргана

получаем: $\bar{B} \vee \bar{A}$

№6

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2),$
$(2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5), (4,4),$
$(4,5), (5,5)\}$

Часть 1



a) Данное отношение рефлексивно, т.к. для каждого элемента a множества найдётся пара вида (a, a). На графе обозначены в виде петель.

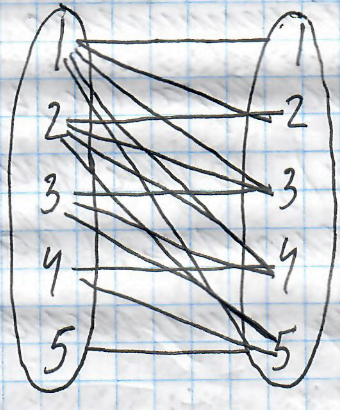
b) Отношение антисимметрично, так как ни для какой пары вида (a, b) не существует пары (b, a), но при этом выполняется рефлексивность. (На графе это видно по полному отсутствию рёбер)

c) Предложенное для анализа отношение транзитивно, так как нет тройки, которая бы не давала выполняться данному свойству.

Часть 2

a) Нет, данное отношение не является отношением эквивалентности, так как не выполняется симметричность.

b) Нет, отношение не является функциональным, так как не каждому элементу x соответствует не более одного элемента y. Это видно на графике:



На графике видно, что только элемент 5 ~~подходит под от~~ не нарушает условие функционального отношения.

c) У данного отношения типа соответствия не определить, так как существует 5, который соответствует только 5 в комбинации $5Ry$, а также 1, но в комбинации $xR1$, где в случае 5 y может быть равен лишь 5, а в случае с 7 и равен только 1.

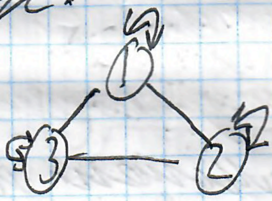
d) Данное отношение является отношением нестрогого порядка, так как выполнилась рефлексивность и транзитивность, но не выполнилась симметричность, но есть отношение антисимметричности. Также отношение является линейно упорядоченным, так как все элементы упорядочены.

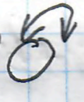
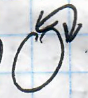
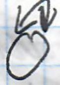
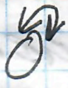
№7

a) $R = \{(a,b) \mid a+b=0\}$

Данное отношение не может быть отношением эквивалентности, так как если $a+b=0$, ~~но~~ и при этом $a, b \in$ множеству целых чисел, то такое отношение может только иметь вид $(a,-a)$ или $(-a,a)$ или (a,a), если $a=0$. Значит данное отношение только не будет рефлексивным, а значит и не будет являться отношением эквивалентности.

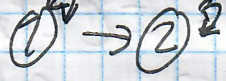
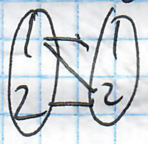
b) $R = \{(a,b) \mid a^3 = b^3\}$ данное отношение тоже не будет отношением эквивалентности, так как оно антисимметрично, потому что при $a, b \in A \times A$, где $A = \{-10 \ldots 10\}$ a должна быть равна b, а значит на графе такого отношения не будет ни дуг, ни рёбер.

c) 

разбить данное множество отношением эквивалентности невозможно, так как в результате может быть только 1)  и 2)  или 1)  2)  3) . В первом случае ~~ж~~ отношением эквивалентности будет только отношение из петель 1, а во втором никакое из ~~множеств~~ отношений.

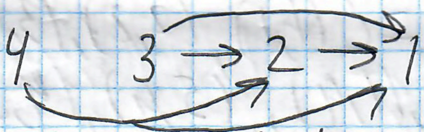
Значит $[1]=[2]=[3]=\{1,2,3\}$ – один класс эквивалентности.

№8

а) Такая ситуация невозможна, например, отношение $R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$ – рефлексивно и транзитивно , но  не является одно-много-значным иным соответствием, так как выполняется транзитивность.

b) ч $A=\{1,2,3,4\}$

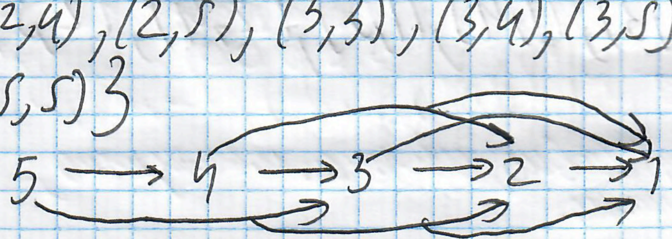
$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$



Частично упорядочено, так как 4 не упорядочен по отношению к 3.

ч $A=\{1,2,3,4,5\}$

$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5),(4,4),(4,5),(5,5)\}$



c) $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

$\circlearrowleft 1 - 2 \circlearrowright$ – транзитивно, рефлексивно, симметрично.

$R^{-1} = \{(1,1),(2,2),(2,1),(1,2)\}$

$\circlearrowleft 1 - 2 \circlearrowright$ – транзитивно, рефлексивно, симметрично.

№9

$R_2^{-1} = \{(2,1),(3,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$

$R_1^{-1} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(3,2),(2,3),(1,4),(5,4),(4,5),(5,5)\}$

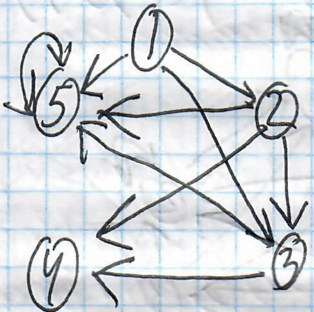
$R_1^2 = \{(1,1),(2,2),(2,1),(2,3),(3,3),(3,2),(1,2),(1,3),(3,1),(4,1),(4,2),(4,4),(4,5),(5,1),(5,4),(5,5)\}$

$R_2^2 = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,5)\}$

e)

$R_1 \cdot R_2$

$R_1 \cdot R_2 = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (5,5)\}$

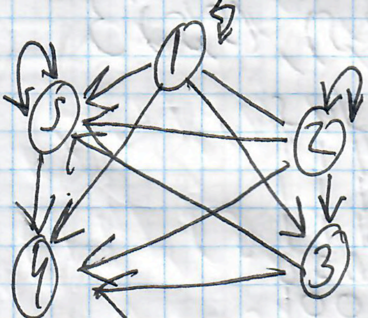


	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1

нерефлексивно, антисимметрично, транзитивно

$R_2 \cdot R_1$

$R_2 \cdot R_1 = \{(1,2), (1,1), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,2), (2,1), (2,5), (2,4), (3,5), (3,4), (5,4), (5,5)\}$



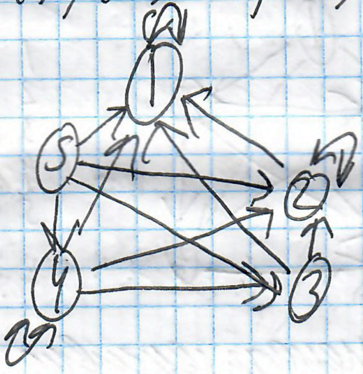
нерефлексивно, несимметрично, нетранзитивно

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	1

$R_1 \cdot R_2^{-1}$

$R_1 \cdot R_2^{-1} = \{(2,1),(3,1),(3,2),(1,1),(2,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,2),(5,3),(5,4),(5,1)\}$

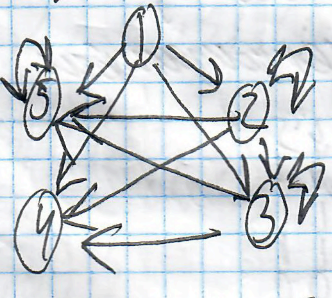
	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	0
4	1	1	1	1	0
5	1	1	1	1	0



транзитивно, антисимме-
трично, нерефлексивно

$R_1^{-1} \cdot R_2$

$R_1^{-1} \cdot R_2 = \{(1,2),(1,3),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(1,4),(2,2),(2,3),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5),(2,4),(2,5),(5,5)\}$

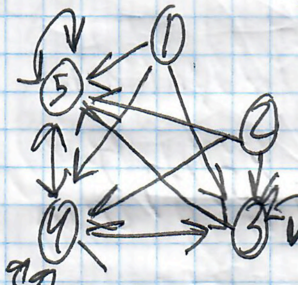


	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1

нетранзитивно, антисимметрично,
нерефлексивно.

$R_1^2 \cdot R_2^2$

$R_1^2 \cdot R_2^2 = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(2,3),(2,4),(3,5),(3,4),(3,3),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$



~~нетранзитивно~~

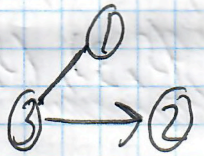
нерефлексивно

несимметрично

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	0	1	1	1
5	0	0	1	1	1

№10

a) $R_1 = \{(3,2),(3,1);(1,3)\}$

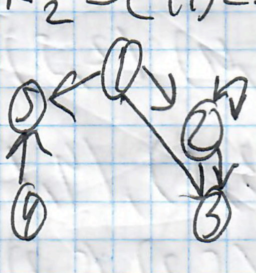


антитранзитивно

несимметрично

антирефлексивно

b) $R_2 = \{(1,2),(2,2),(1,3),(1,5),(2,3),(4,5)\}$

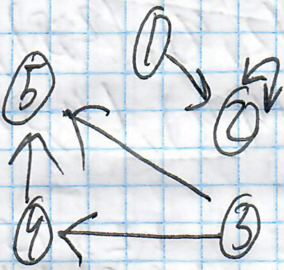


нерефлексивное

антисимметричное

нетранзитивное

c) $R_3 = \{(1,2),(2,2),(3,4),(3,5),(4,5)\}$



транзитивно

нерефлексивно

антисимметрично

$R_3^2 = \{(1,2),(2,2),(3,5)\}$

$R_3^{-1} = \{(2,1),(2,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$

$\overline{R_2^2} = \{(1,1),(1,4),(1,5),(2,1),(2,4),(2,5),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),$
$(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),$
$(5,5)\}$

$R_2^2 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

$\overline{R_2} = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,4),(2,5),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),$
$(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),$
$(5,4),(5,5)\}$

a) $R_1 \cap R_2 = \{(1,3)\}$ — по отношению к R_2

$1 \to 3$

антисимметрично — по отношению к R_1

антирефлексивно

антитранзитивно

антисимметрично

Стало симметричным в узком к R_1

b) $(R_1 \cup R_2) \cap R_3 = \{(1,2),(2,2),(4,5)\}$

$1 \to 2$, $4 \to 5$

нетранзитивно — по отн. к R_2

нерефлексивно — по отн. к R_2, R_3

антисимметрично — по отн к R_2, R_3

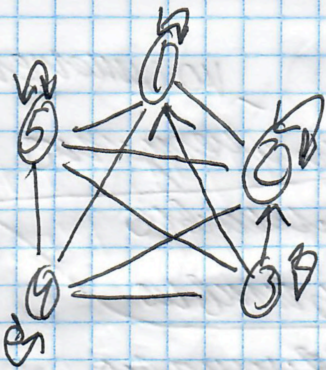
c) $R_3^2 \cap R_3^{-1} = \{(2,2)\}$

~~антитранзитивно~~ ~~(R_1)~~

рефлексивно

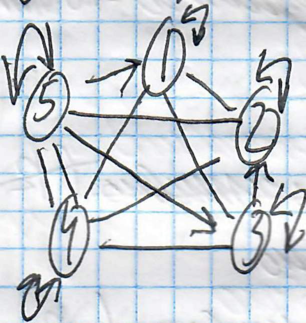
симметрично ~~антитранзитивно~~ (R_2, R_3)

d) $R_3 \cup R_2^2 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$



транзитивно (R_3)
рефлексивно
несимметрично R_1

e) $R_1 \cup \overline{R_2} \cup R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$



транзитивно R_3
рефлексивно
несимметрично