AMB-1

Волынцев Дмитрий 676 гр.

18 февраля 2017

Задача 1

Заведем счетчик, равный единице и запоним первый элемент массива. Далее поочередно проверяем элементы массива следующим образом: если элемент равен тому, который мы запомнили, мы увеличиваем счетчик на 1, иначе уменьшаем на 1. Если в какой то момент счетчик стал нулевым, запоминаем текущий элемент. По завершении такого цикла в случае существования искомого элемента мы его и получим в качестве запомненного, а если его нет - какой-то случайный элемент. Поэтому цикл надо прогнать второй раз на запомненном элементе.Таким образом, получим требуемое, не используя более чем $O(\log \text{n})$ битов (храним запомненный элемент и число его вхождений).

Задача 2

Задача 3

1)контр-пример(числа - часы): пусть у нас 3 события - (9-15);(14-17);(16-21)
Алгоритм выберет 2 вариант, хотя оптимальнее выбрать 1 и 3.
2)контр-пример: (9-14);(10-11);(12-13)
Алгоритм выберет 1 вариант, хотя оптимальнее выбрать 2 и 3.
3)Докажем оптимальность по индукции по количеству событий. База - одно событие, его выбор всегда оптимален. Пусть для k событий алгоритм работает оптимально. Докажем для $k + 1$:
Первые k выбираются оптимально. Остается одно событие, которое может пересекаться с уже выбранными или не пересекаться. Во втором

случае алгоритм добавляет это событие, что является оптимальным вариантом. Если же событие пересекается с ранее добавленными, мы можем добавить его и пожертвовать НЕ МЕНЕЕ ЧЕМ 1 событием, либо не добавлять. Очевидно, что во втором случае число событий будет не меньше, чем в певром, а значит это оптимальный вариант, соответствующий алгоритму.

Задача 4

a) $g(n) = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + g(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + 3$
Воспользуемся методом Акра-Баззи: $(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{4})^p = 1$
Решим уравнение, сделав замену $(\frac{1}{2})^p = z > 0$, тогда $z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и
$p = -log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$
Тогда $g(n) = \Theta((n^{-log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})}) * (1 + \int_1^n \frac{3}{u^{p+1}} du)) = \Theta((n^{-log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})}) * (1 + \frac{3}{log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})} * (\frac{1}{n} - 1))) = \Theta(n^{-log_2(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})})$

b) Пусть $x_k = g(2^k)$. Примем $g(0) = g(1) = 0$. Тогда из рекуррентного соотношения получим, что $x_0 = 0, x_1 = 3, x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + 3$
Пусть $X(m) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k m^k = \frac{3}{1-m} + mX(m) + m^2X(m) = \frac{3}{(1-m)(1-m-m^2)} =$
$3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} (F_k + .. + F_0) m^k = 3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} (F_{k+2} - 1) m^k$ (числа Фибоначчи)
Докажем последний переход по индукции:
$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ - для F_3 истинно
Пусть верно для k. Докажем для $k + 1$:
$F_{k+1} + F_k + .. + F_0 = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$ - ч.т.д.
Таким образом $x_k = 3(F_{k+2} - 1)$

Задача 5

$T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + 10\frac{n^3}{logn} > 10\frac{n^3}{logn}$ (оценили снизу)
$T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + 10\frac{n^3}{logn} < 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil) + 10\frac{n^3}{logn}$ (оценили сверху: вычитанием константы увеличили значения в узлах - время увеличилось)
Используем Мастер-теорему, где $a = 3, b = \sqrt{3}, f(n) = 10\frac{n^3}{logn}$
Заметим, что $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \varepsilon}) = \Omega(n^{2+\varepsilon})|_{\varepsilon=0.1} = \Omega(n^{2.1})$
$3 * 10 * \frac{(\frac{n}{\sqrt{3}})^3}{log \frac{n}{\sqrt{3}}} < 0.9 * 10 * \frac{n^3}{logn}$
Таким образом $T(n) = \Theta(\frac{n^3}{logn})$

Задача 6

Задача 7

Пусть $T(n) = 1$ при $n \leq 100$ и $T(n) = T(n-1) + T(n-3) + 1$ при $n > 100$ - вычисляет количество рекурсивынх вызовов S. Их количество = $T(10^{12})$.
$T(n+3) - T(n+2) - T(n) = 1$
$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = 0$. Приближенные корни с помощью Wolfram: 1.47, -0.23±0.79i.
Тогда $T_k = A * 1.47^k + B * e(-0.23 + 0.79i)^k + C * e(-0.23 - 0.79i)^k$. Так как $\sqrt{0.23^2 + 0.79^2} < 1$, не будем учитывать комплексные корнидля нахождения ассимптотики.
Частное решение $T_k = -1$. Тогда общее решение найдем из: $T_{100} = 1$ и $T_k = -1 + A * 1.47^k$.
$A = 2 * 1.47^{-100}$ и тогда $T(10^{12}) = 2 * 1.47^{10^{12}-100} - 1$

Задача 8

Задача 1(доп)

Из курса матанализа известно, что все нормы в R^n эквиваленетны (доказывал М.В.Балашов в первом семестре). По определению эквивалентных норм, это такие нормы, что $\exists C, D > 0 : \forall x \in R^n$ выполняется $C\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq D\|x\|_1$
Как нетрудно заметить, это и есть определние Θ, а значит искомое утверждение верно.