AMB-2

Волынцев Дмитрий 676 гр.

23 февраля 2017

Задача 1

1) Монету подбросили 10 раз и число выпавших орлов и решек равно, значит выпало 5 орлов и 5 решек. Вероятность каждого из этих событий равна искомой вероятности выпадения равного количества орлов и решек и равна $C_n^k = C_{10}^5 = 252$, деленному на число всех исходов $= 2^{10} = 1024$. То есть веротяность равна $\frac{63}{256}$
2) Выпало больше орлов, чем решек. Вероятность этого равна вероятности обратного, то есть если решек выпадет больше чем орлов. Веротяность равенства из пункта 1 равна $\frac{63}{256}$, а вместе все 3 события составляют верояность 1. Значит вероятность каждого из "неравновесных"событий равна $(1 - \frac{63}{256})/2 = \frac{193}{512}$
3) Из условия понятно, что первые 5 бросков могут быть любыми, а вот остальные определены однозначно по этим 5. Так что вероятность равна $\frac{2^5}{2^{10}} = \frac{1}{32}$
4) Пусть x -номер первого из 4 орлов, выпавших впервые. При $x = 1$ оставшиеся броски - любые, значит 2^6 вариантов. При $x = 2$ первый бросок - решка, остальные - любые, значит 2^5 вариантов. При $x = 3, 4, 5$ также будет по 2^5 вариантов, так как перед серией орлов будет решка. При $x = 6$ будет $2^5 - 2$ варианта, так как не учитываем 4 орла в начале. Аналогично при $x = 7$ будет $2^5 - 3$ варианта. Суммируя и деля на количество всех исходов, получим искомую вероятность $\frac{251}{1024}$

Задача 2

Мужик подбрасывает кость и говорит, что выпала 6. Вероятность того, что это правда, равна $75\% = \frac{3}{4}$, значит верояность того, что выпала 6 равна $75\% = \frac{3}{4}$

Задача 3

Для начала определим матожидание значения, выпавшего на игральной кости: $\mathbb{E} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\xi_k = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$

Для ответа на искомый вопрос воспользуемся свойством линейности матожидания:

$\mathbb{E}(max\{X_1, X_2\}) + \mathbb{E}(min\{X_1, X_2\}) = \mathbb{E}(max\{X_1, X_2\} + min\{X_1, X_2\}) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \frac{7}{2} * 2 = 7$

Задача 4

1) Пусть ω - исход, при котором выпадает 6, ψ - исход, при котором выпадает не 6. Их вероятности соответственно равны $\frac{1}{6}$ и $\frac{5}{6}$. По формуле для полного матожидания имеем: $\mathbb{E}N = \frac{1}{6}\mathbb{E}\{N|\omega\} + \frac{5}{6}\mathbb{E}\{N|\psi\}$

При этом $\mathbb{E}\{N|\psi\} = 1 + \mathbb{E}N$ - если 6 не выпадает, мы просто теряем ход. Аналогично $\mathbb{E}\{N|\omega\} = \frac{1}{6}*2+\frac{5}{6}*(2+\mathbb{E}N)$ - если 6 выпало, то с вероятностью $\frac{1}{6}$ 6 выпадет и на следующем броске и тогда $N = 2$, иначе теряем 2 хода. Из полученной системы 3 уравнений несложно вычислить $\mathbb{E}N = 42$

2) Посчитаем матожидания для обеих последовательностей(аналогично предыдущему пункту): ω - при первом броске выпала решка, ψ - при первом броске выпал орел, ϕ - первый и второй броски - решки

РОР:

$\mathbb{E}N = \frac{1}{2}\mathbb{E}\{N|\psi\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{N|\omega\}$

$\mathbb{E}\{N|\psi\} = 1 + \mathbb{E}N$

$\mathbb{E}\{N|\omega\} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} * 3 + \frac{1}{2} * (\mathbb{E}N + 3)) + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}\{N|\omega\})$

Из полученной системы 3 уравнений несложно вычислить $\mathbb{E}N = 10$

РРО:

$\mathbb{E}N = \frac{1}{2}\mathbb{E}\{N|\psi\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{N|\omega\}$

$\mathbb{E}\{N|\psi\} = 1 + \mathbb{E}N$

$\mathbb{E}\{N|\omega\} = \frac{1}{2}(2 + \mathbb{E}N) + \frac{1}{2} * \mathbb{E}\{N|\phi\}$

$\mathbb{E}\{N|\phi\} = \frac{1}{2} * 3 + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}\{N|\phi\})$

Из полученной системы 3 уравнений несложно вычислить $\mathbb{E}N = 9$

Таким образом вероятность получить вторую комбинацию(РРО) больше.

Это можно получить и из качественных соображений: для обеих комбинаций первой должна выпасть решка, далее вероятность выпадения орла или решки равновероятна, но если падает решка, то вероятность встретить РРО раньше РОР становится 100%, а если выпадает орел, то вероятность встретить РОР раньше не настолько высока, ведь далее снова может быть орел и обе комбинации обнулятся.

Задача 5

Задача 6

Расположим места в коробках на числовых прямых - получится квадрат $n * n$. Тогда нас устраивают варианты, когда по одной из прямых мы остановились на значении k, а другую полностью прошли, причем вынуть последнюю спичку мы должны не раньше, чем достиг нужного значения k. Количество таких путей в квадрате (умножаем на 2, так как неважно, какой именно коробок) $2 * C_{2n-k-1}^{n-1}$. Всего путей C_{2n}^{n}. Таким образом вероятность равна $\frac{2 * C_{2n-k-1}^{n-1}}{C_{2n}^{n}}$

Задача 7

Первое событие - $A\{2, 4, 6\}$, второе - $B\{3, 6\}$, то есть $A \cap B = \{6\}$. Тогда $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}\{A\} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}\{B\} = \frac{1}{3}$. Нетрудно заметить, что таким образом $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} * \mathbb{P}\{B\}$, а значит события независимы.

Задача 8

Задача 9

Пусть в цикле 1..r - переставляются по кругу, тогда остальные до n включительно - как угодно. Таких перестановок $(n - r)!$, всего $n!$, значит вероятность равна $\frac{(n-r)!}{n!}$. Всего циклов $\frac{n!}{r(n-r)!}$, тогда $\frac{(n-r)!}{n!} * \frac{n!}{r(n-r)!} = \frac{1}{r}$ (идея взята у Т.Бабушкиной)

Задача 10