AMB-4

Волынцев Дмитрий 676 гр.

5 марта 2017

Задача 1

1) Это язык пар (G, k), где G - граф, k -размер клики. Сертификатом тбудет множество вершин клики (не большее чем множество всех вершин). Тогда для каждой пары вершин из этого множества будем проверять, приндлежит ли соединяющее их ребро множеству ребер графа, что можно сделать за полином.
2) Количество вершин этих графов одинаково, а вершины можно занумеровать так, что в первом графе верщины с номерами x и y соединены тогда и только тогда, когда вершины с такими же номерами соединены во втором. То есть существует биекция $V \to V : (u, v) \in E \leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E'$. Сертификатом будет такая перестановка, при которой матрицы смежности совпадают. Проверка этого факта займет полином.
(идея взята у А.Сотникова)

Задача 2

1) NP - класс языков, разрешимых недетерминированными алгоритмами за полином. Пусть этот алгоритм - НМТ. Тогда сертификатом будет последовательность функций перехода, по которым МТ будет работать, и второе определние эквивалентно.
2) NP - ... существует сертификат $|y| \le poly(|x|)$ и вычислимая функция двух аргументов $R(x, y) = 1$... Тогда НМТ запутсит $R(x, y)$, и время работы будет полиномом. Первое определение будет эквивалентно.

Задача 3

Пусть $L \in NP$ и M - НМТ, разрешающая его. Построим НМТ (алгоритм), разрешающий L^*.

Пусть $\omega \in L^*$ - входное слово. Недетерминированно выберем m, причем $1 \leq m \leq |\omega|$ и недетерминированно разделим ω на m частей: $\omega = \omega_1..\omega_m$. Применим M к каждому из ω_i. Если во всех случаях выдаст 1, то принимаем, иначе отвергаем. Подсчитаем время работы: выбор m и разбиение на m частей займут полином, проверка всех подслов займет $n * O(M)$, так как максимальное количество подслов равно n. Пусть M работает за $O(n^q)$, тогда искомый алгоритм работает за $O(n^{q+1})$. Значит $L^* \in NP$. Сертификат - разбиение ω на m частей.

Задача 4

Используем критерий Кронекера-Капелли из курса линала: чтобы система была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы совпадал с рангом матрицы системы. Приведение матрицы к единичной методом Гаусса займет полином, определение количества ЛНЗ столбцов (т.е. ранга матрицы) - 2018 шагов. Со второй матрицей разберемся также за полином. На сравнение рангов потратим еще 1 шаг. Таким образом, мы определили совместность системы за полином. Таким образом язык принадлежит P, а значит принадлежит NP, причем сертификат не нужен, можем например в качестве него взять пустое слово.

Задача 5

Задача 6

1) $L_{factor} \subset NP$. В качестве сертификата возьмем такой делитель m числа N, что $m \leq M$. Тогда за полином можем произвести деление с остатком и за полином можем сравнить M и N $(M < N)$.
2) $L_{factor} \subset co - NP$. В качестве сертификата возьмем разложение N на простые множители. Тогда за полином можем проверить их простоту и то, что они $\leq M$ и за полином проверить, что $M < N$.
Таким образом из (1) и (2) следует, что L_{factor} принадлежит $NP \cap co - NP$