АМВ-5

Волынцев Дмитрий 676 гр.

11 марта 2018 (я тут осознал, что во всех работах до этой писал 2017 год:))

Задача 1

1) Сведем ГП к ГЦ: пусть в графе G n вершин. Тогда новые значения $V' = V \cup \{u\}$ и $E' = E \cup \{(u, s_i)\}$ $(i = 1..n)$. Делается это за полином, так как мы просто переписываем граф (матрицу смежности) с добавлением вершины и ребер ко всем вершинам (т.к. не знаем, где гамильтовнов путь начинается и кончается). Таким образом если в исходном графе был г.путь, то в новом будет г.цикл, а если же пути не было, то в новом не будет цикла. Значит ГП $\leq_p$ ГЦ.
2) Сведем ГЦ к ГП. Тогда будем удалять ребро с вершинами u и v и добавлять 2 вершины и соединяющие их с u и v ребра. Делается это также за полином. Таким образом, если в исходном графе был г.цикл, то в новом будет г.путь (начинается и заканчивается в добавленных вершинах), а если цикла не было в исходном, то и пути в новом не будет. Значит ГЦ $\leq_p$ ГП.

Задача 2

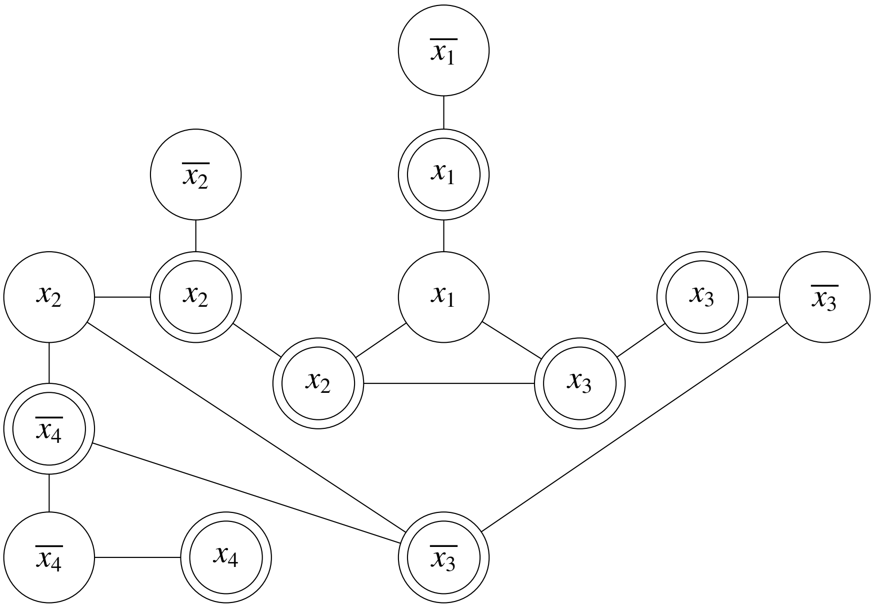
В формулах 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ в дизъюнкте может быть 1,2,3 литерала. Тогда будет добавлять к дизъюнктам форму, равную нулю, и в результате получать функции из РОВНО-3-ВЫПОЛНИМОСТЬ: из курса АЛКТГ $x_1 = x_1 \vee (x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_3 \wedge \overline{x_3}) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ например. Подобные операции выполняются за линейное время, и мы получаем формулы из РОВНО-3-ВЫПОЛНИМОСТЬ, и на выполнимость формулы подобные преобразования не влияют. Таким образом, 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ $\leq_p$ РОВНО-3-ВЫПОЛНИМОСТЬ.

Задача 3

i) $\psi = (x_1 \lor x_2 \lor \overline{x_3})$ - выполнимая КНФ, тогда $A_1 = \{x_1, \overline{x_1}\}$, $A_2 = \{x_2, \overline{x_2}\}$, $A_3 = \{x_3, \overline{x_3}\}$ и $B_1 = \{x_1, x_2, \overline{x_3}\}$. Протыкающее мн-во: $\{x_1, x_2, \overline{x_3}\}$
ii) $\chi = (x_1 \lor x_2) \land (x_1 \lor \overline{x_2}) \land (\overline{x_1})$ - невыполнимая КНФ. Тогда $A_1 = \{x_1, \overline{x_1}\}$, $A_2 = \{x_2, \overline{x_2}\}$, $B_1 = \{x_1, x_2\}$, $B_2 = \{x_1, \overline{x_2}\}$, $B_3 = \{\overline{x_1}\}$. Тогда любое двухэлементное мн-во из 1 и 0 не протыкает ни одно из этих множеств, а значит мощность протыкающего больше 2.
Общий случай:
1) Набор - выполняющий. Если x_i соответствует 1, то в протыкающее множество добавляем x_i, иначе $\overline{x_1}$. Заметим, что в каждом дизъюнкте хотя бы один литерал - 1 (набор выполняющий). Тогда будем добавлять такой элемент из каждого подмножетсва в протыкающее, которое будет размера n.
2) Набор - невыполняющий. Пусть A_psi имеет протыкающее множество размера n и тогда пусть каждый литерал из множества равен 1. В протыкающее множество входит хотя бы один литерал из каждого подмножества и при этом ровно n элементов. Значит, в дизъюнкте хотя бы одна 1, что противоречит предположению, а значит протыкающего множества из n элементов не будет.

Задача 4

Пусть в ψ m дизъюнктов и n литералов. Для каждого литерала строим ребро $(x_i, \overline{x_i})$, а для дизъюнкта - треугольник из 3 литералов этого дизъюнкта, и соединим соответствующие вершины с x_i.
$\psi = (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (x_2 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4})$ Тогда граф будет таким (1,1,1,1):



Для покрытия ребер $(x_i, \overline{x_i})$ нужно n вершин, а для треугольников - $2m$ вершин, значит всего $n + 2m$. Будем включать x_i в покрытие, если она равна 1, иначе $\overline{x_i}$. Один литерал в дизъюнкте равен 1 для его выполнимости, значит есть ребро вида (x_i, вершина треугольника) или ($\overline{x_i}$, вершина треугольника). Тогда добавляем в покрытие 2 другие вершины треугольника. Тогда ψ соответствует покрытию из $n + 2m$ вершин, можем вычислить за полином. За полином строим граф. Если же ψ не выполняется, то какое-нибудь ребро, соединяющее пары с треугольниками, не будет покрываться. Таким образом 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ $\leq_p$ ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ.

Задача 5

Задача 6

(найдена в интернете)
Каждый из m дизъюнктов d_i имеет вид $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$. Можем преобразовать каждый из них в 2-КНФ из 10 дизъюнктов:
$d_i \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{d_i}) \wedge (x_2 \vee \overline{d_i}) \wedge (x_3 \vee \overline{d_i})$
Всего есть 7 наборов, выполняющих d_i, каждый из которых будет выполнять 7 дизъюнктов из 2-КНФ. Т.е. если подается выполняющий набор и выполнен каждый из m дизъюнктов, тогда получим $7m$ выполненных дизъюнктов, а если невыполняющий, то не не получим. Таким образом, 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ $\leq_p$ max-2-ВЫПОЛНИМОСТЬ.

Задача 7