Тряп-7

Волынцев Дмитрий 676 гр.

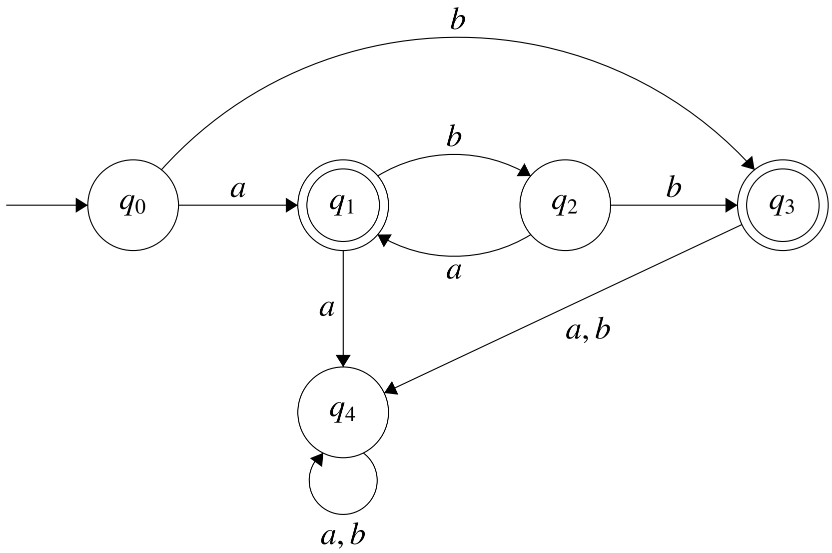
22 октября 2017

1

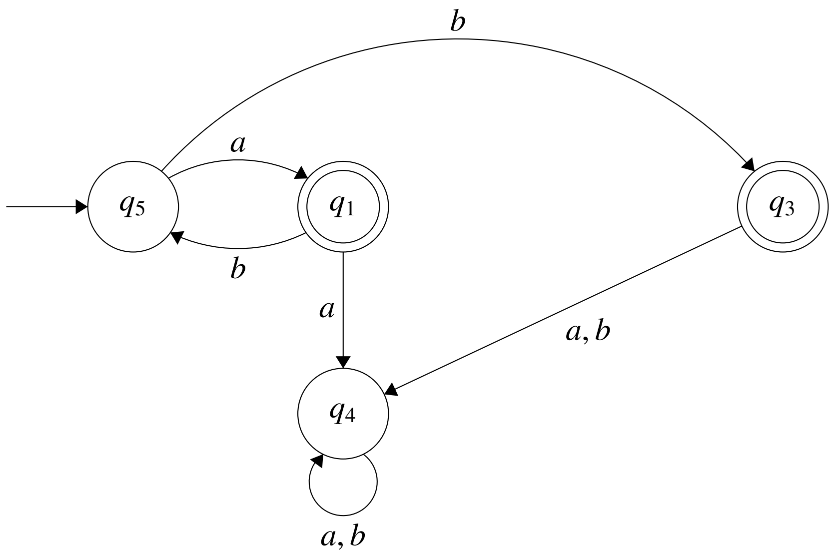
Пусть L_1 - нерегулярный, а значит в нем бесконечное множество слов (любой конечный язык - регулярный). Так как он нерегулярный, для него не выполняется лемма о накачке, т.е. для любого $p \geq 1$ существует слово xyz длины $> p$, где $|y| > 0$ и $|xy| \leq p$, и $k \geq 1$ такие, что слово xy^kz не принадлежит L_1. Так как R - конечный, можем выделить в нем самое длинное слово, пусть его длина l. Для $p \leq l + 1$ возьмем слово длины $> l + 1$. В соответствии с леммой о накачке для него не будет необходимого разбиения, а значит лемма не выполняется (слово не принадлежит L). Для $p > l + 1$ для любого слова xyz длины $> p$, где $|y| > 0$ и $|xy| \leq p$, существует $k \geq 1$ такое, что слово xy^kz не принадлежит L (его длина $> l$ для любого $k \geq 0$, а значит оно не принадлежит R). Таким образом если слово не принадлежит L_1, значит оно не принадлежит L. То есть из нерегулярности языка L_1 следует нерегулярность языка L, что ложно, а значит L_1 не может быть нерегулярным.

2

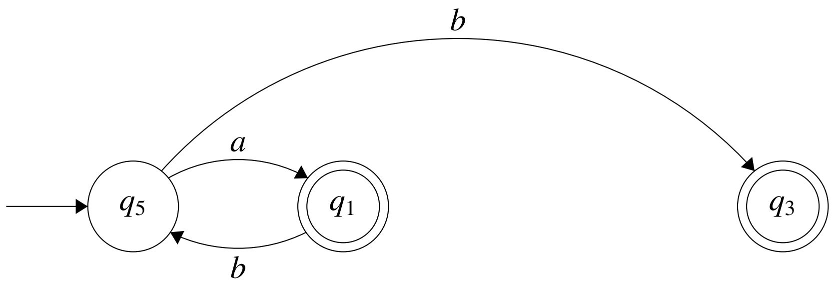
В соответствии с алгоритмом сделаем автомат полным:



Теперь произведем склейку состояний в соответствии с алгоритмом. Разобьем множество состояний на множество принимающих и множество непринимающих:
$\{q_0, q_2, q_4 | q_1, q_3\}$
Разобьем данные множества по переходам по a:
$\{q_0, q_2 | q_4 | q_1, q_3\}$
Разобьем данные множества по переходам по b:
$\{q_0, q_2 | q_4 | q_1 | q_3\}$
Склеим состояния q_0 и q_2, оказавшиеся в одном множестве, в состояние q_5 и построим автомат:



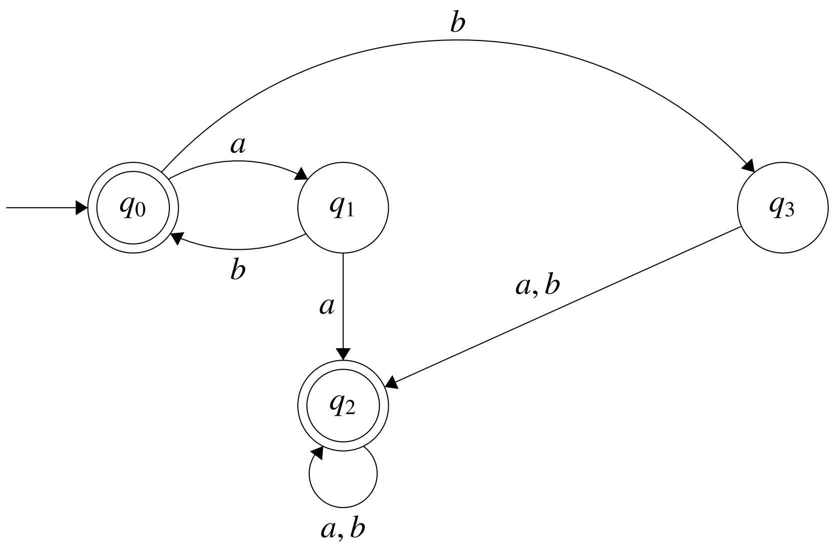
Теперь удалим состояние q_4, так как из него невозможно попасть в принимающие состояния(можем и не удалять, тогда у нас будет минимальный полный автомат):



Таким образом мы минимизировали исходный автомат в соответствии с алгоритмом.

3

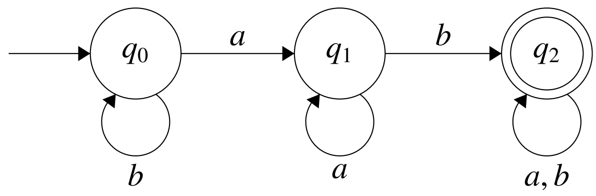
Используем построенный в прошлой задаче минимальный полный автомат и поменяем в нем терминальные состояния на нетерминальные и наоборот.



Таким образом мы построили автомат для дополнения языка L. Теперь минимизируем его все по тому же алгоритму, разбивая множество состояний на подмножества:
Принимающие и непринимающие:
$\{q_0, q_2 | q_1, q_3\}$
Разобьем данные множества по переходам по a:
$\{q_0 | q_2 | q_1, q_3\}$
Разобьем данные множества по переходам по b:
$\{q_0 | q_2 | q_1 | q_3\}$
Таким образом, склеить ничего не удалось. Значит получившийся автомат и есть минимальный.

4

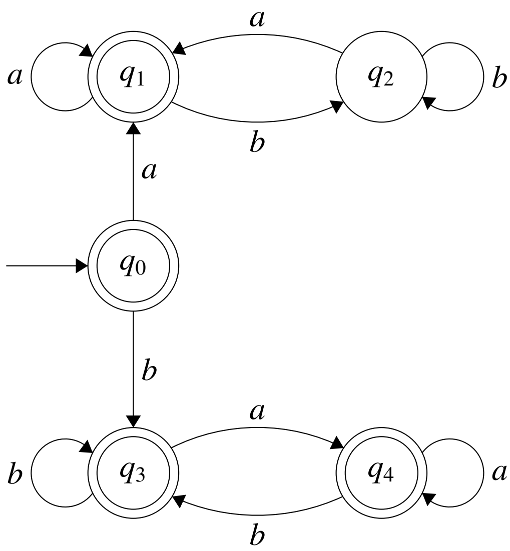
Для любого слова w слово $\Sigma^* ab \Sigma^* w$ также принадлежит языку. Таким образом $\Sigma^* ab \Sigma^*$ - класс эквивалентности(1).
Значит в других классах не будет подслов ab, то есть слова будут иметь вид $b^* a^*$. Если добавить к такому слову, содержащему a, слово, содержащее b, то новое слово будет принадлежать языку, а если не содержащее b, то нет. Значит все слова вида $b^* a^* a$ принадлежат одному классу эквивалентности(2).
Теперь рассмотрим оставшийся вид слов - b^*. Если добавить к такому слову слово, содержащее ab, то новое слово будет принадлежать языку, а если не содержащее ab, то нет. Таким образом слова вида b^* принадлежат одному классу эквивалентности(3).
Все эти классы различны. Возьмем слово ε и добавим его поочередно ко всем 3 классам эквивалентности. Получим, что только в первом случае получится слово, принадлежащее языку, значит первый класс эквивалентности отличен от 2 и 3. Теперь возьмем слово b и добавим его поочередно ко 2 и 3 классам эквивалентности. Получим, что только в первом случае получится слово, принадлежащее языку, значит 2 класс эквивалентности отличен от 3.
Теперь построим ДКА по алгоритму построения автомата, данного в доказательстве теоремы Майхилла-Нероуда, где q_0 соответствует классу b^*, q_1 - $b^* a^* a$, q_2 - $\Sigma^* ab \Sigma^*$:



5

1) Язык L состоит из всех слов, в которых количество a и b одинаково. Пусть $\alpha = |w|_a - |w|_b$. Тогда классы эквивалентности будут различаться тем, что у принадлежащих им слов α будет различна, т.е. слова с одинаковой разностью количсетва a и b будут принадлежать одному классу эквивалентности. В этом легко убедиться, добавив к таким словам любое слово с разностью $-\alpha$ и получая слово, принадлежащее L. Если же добавить любое другое слово, новое слово не будет принадлежать L. В силу неограниченности выбора количества a и b таких классов будет бесконечно много. Различны они потому, что для каждой α нужны разные слова, добаивив которые к исходным, мы получим слово из L.

2) Разделим слова на следующие классы:
ε - класс эквивалентности($xz = yz$, для x и y всегда одинаковый результат)(1)
$a\Sigma^*a \cup a$ - класс эквивалентности(2)
$b\Sigma^*b \cup b$ - класс эквивалентности(3)
$a\Sigma^*b$ - класс эквивалентности(4)
$b\Sigma^*a$ - класс эквивалентности(5)
Все они различны, так как при добавлении одного слвоа из ε, a, b для одного класса слово будет принадлежатьязыку, а для другого нет. Например для (1 и 2) и (2 и 3) классов это слово b, для 1 и 4 - слово a и т.д. Таким образом, все эти классы эквивалентности попарно различны. Теперь построим соответствующий минимальный полный ДКА:



a
a
q1
q2
b
b
a
q0
b
a
b
q3
q4
a
b