Тряп-1

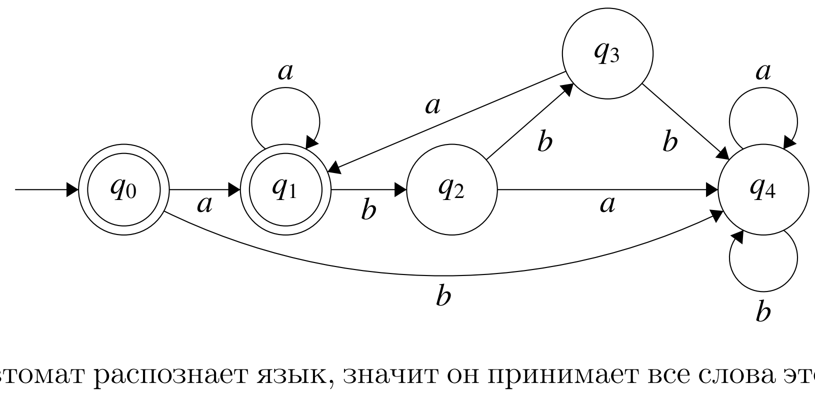
Волынцев Дмитрий 676 гр.

10 сентября 2017

1

1) Из условия следует, что $\varepsilon \in L$. Значит, подстроки $a, aa, abba \in L$, т.к. можно взять $x = \varepsilon$. Теперь поочередно возьмем за x подстроки $a, aa, abba$. Отсюда аналогичной конкатенацией суффиксов $a, aa, abba$ можем получить: $aa, aaa, aabba$ из a; $aaa, aaaa, aaabba$ из aa; $abbaa, abbaaa, abbaabba$ из $abba$. Значит все слова языка L получаются из предыдущих прибавлением суффиксов $a, aa, abba$.*** Рассмотрим слово $abbabba$, удовлетворяющее языку T. Оно могло быть получено только путем добавления $abba$ к словам bba или abb, которые не принадлежат L (это следует из ***). Значит, языки L и T не совпадают.

2)



Если автомат распознает язык, значит он принимает все слова этого языка и при этом не принимает больше никаких слов. Покажем, что автомат не принимает слова не из T. Если слово начинается на b, то оно сразу попадает в непринимающее состояние q_4, где зацикливается. Кончаться на b слово также не может, так как соответствующие состояния q_1 и q_2

не являются принимающими. Слова, содержащие в себе подстроки aba и bbb будут зацикливаться в состоянии q_4. Таким образом автомат не принимает слова, не принадлежащие языку.
Докажем теперь, что автомат принимает все остальные слова (принадлежащие языку). Доказательство проведем по индукции (2 случая).
1) База индукции: ε, a принимаются автоматом
Предположение: если $(n-1) * a$ принимается автоматом, то $n * a$ принимается автоматом
В состоянии q_0 может быть принято лишь слово ε. Кроме него существует лишь одно принимающее состояние q_1, в котором слово из всех a будет зациклено, а значит будет принято.
2) База индукции: $\varepsilon, a, abba$ принимаются автоматом
Предположение: если $a(bba)^{n-1}$ принимается автоматом, то $a(bba)^n$ принимается автоматом
В состояние q_1 можно попасть лишь имея слово из всех a (рассмотрено в первом случае), либо конкатенацией к a подстроки bba, так как только в этом случае заключительным состоянием будет q_1. Во всех остальных случаях заключительными состояниями будут непринимающие q_2, q_3, q_4, т.е. во всех остальных случаях слово не будет принадлежать языку T: в q_2 и q_3 слово заканчивается на b, что ложно, а в состоянии q_4 слово либо начинается на b, либо содержит запрещенную подстроку aba или bbb.

Таким образом, данный автомат распознает язык T

2

$L = \Sigma^* \backslash \{(a|b)^* aa (a|b)^*\}$
$(a|b)^*$ означает, что в начале и конце строки может быть любой набор символов (любая подстрока). Посередине же обязательно должна быть подстрока aa. Таким образом, L это язык всех слов за исключением тех, в которых есть подстрока aa. Тогда регулярным выражением будет:
$(b^*ab)^*b^*(a|\varepsilon)$

3

Да, язык $\{a^n b^n | n < C\}$ $\forall C$ (конечного) будет регулярным. Докажем это по индукции.
База: ab - регулярная строка (конкатенация не меняет регулярности)
Предположение: пусть $a^{n-1}b^{n-1}$ регулярная, тогда $a^n b^n$ также регулярная. Домножим строку $a^{n-1}b^{n-1}$ на a слева, т.е. произведем конкатенацию двух регулярных строк. Получим регулярную строку $a^n b^{n-1}$. Аналогично при домножении на b справа получим регулярную строку $a^n b^n$. Утверждение доказано для любого конечного C.

4

1)
Автомат A:
$Q = q_0, q_1, q_2$ - промежуточные состояния
$\Sigma = 1, 0$ - алфавит
q_0 - начальное состояние
$F = q_1$ - конечное состояние
$\delta(q_0, 0) = q_0$
$\delta(q_0, 1) = q_1$
$\delta(q_1, 0) = q_2$
$\delta(q_1, 1) = q_0$
$\delta(q_2, 0) = q_1$
$\delta(q_2, 1) = q_2$

Автомат B:
$Q = q_0, q_1, q_2$ - промежуточные состояния
$\Sigma = 1, 0$ - алфавит
q_0 - начальное состояние
$F = q_1$ - конечное состояние
$\delta(q_0, 0) = q_0$
$\delta(q_0, 1) = q_1$
$\delta(q_1, 0) = q_0, q_2$
$\delta(q_1, 1) =$ не определено
$\delta(q_2, 0) = q_1$

$\delta(q_2, 1) = q_2$

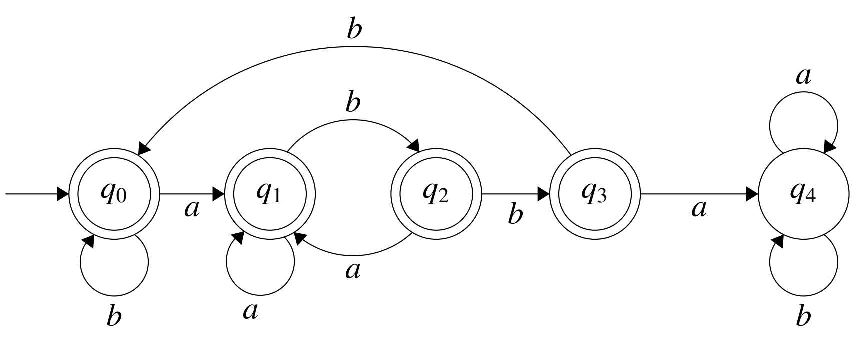
2) Автомат A детерминирован, так как все переходы определены однозначно (каждому состоянию и каждому символу соответствует не более одного состояния), в отличие от автомата B, в котором конфигурации $(q_1, 0)$ соответствуют два состояния.

3) $(q_0, 1) \vdash (q_1, 1) \vdash (q_0, 0) \vdash (q_0, 1) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_2, 1) \vdash (q_2, 0) \vdash q_1$
Таким образом, слово ω принимается автоматом (q_1 - конечное состояние), а значит принадлежит $L(A)$

4) Недетерминированный автомат принимает слово, если существует такая последовательность выборов состояний, что после обработки слова он оказывается в принимающем состоянии. Приведем пример такой последовательности:
$(q_0, 0) \vdash (q_0, 1) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_2, 1) \vdash (q_2, 0) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_0, 1) \vdash q_1$
Таким образом, слово v принимается автоматом.

5) Приведем примеры слов:
Принадлежит $L(A)$: $\omega = 1010$: $(q_0, 1) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_2, 1) \vdash (q_2, 0) \vdash q_1$ (конечное)
Не принадлежит $L(A)$: $\omega = 1011$: $(q_0, 1) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_2, 1) \vdash (q_2, 1) \vdash q_2$
Принадлежит $L(B)$: $\omega = 1001$: $(q_0, 1) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_0, 0) \vdash (q_0, 1) \vdash q_1$ (конечное)
Не принадлежит $L(B)$: $\omega = 1000$: $(q_0, 1) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_0, 0) \vdash (q_0, 0) \vdash q_0$
либо: $(q_0, 1) \vdash (q_1, 0) \vdash (q_2, 0) \vdash (q_1, 0) \vdash q_0$

5



Для построения автомата воспользуемся алгоритмом Кнута-Морриса-Пратта поиска подстроки в строке (из Кормена). Согласно ему у нас будет 4 принимающих состояния (q_0, q_1, q_2, q_3) для последовательности 4 букв $abba$ и одно непринимающее, которое следует зациклить. Таким образом, слова вида $vabba\omega$ приниматься не будут, т.к. в конце будут оставаться в непринимающем состоянии. Чтобы автомат принимал остальные слова и при этом не нарушал алгоритм непринятия $abba$, следует рассматривать так называемые суффиксы и префиксы слов, т.е., пронумеровав символы, находить в строке префикс нужной подстроки и нумеровать заново. С помощью этой нумерации можно находить номер состояния, в которое следует вернуться. Для подстроки $abba$ существуют следующие неподходящие комбинации: aa, aba, $abbb$. В первом случае суффикс $a = 1$, значит возвращаемся в состояние q_1. Аналогично во втором случае суффикс $a = 1$. В случае $abbb$ суффикс $b = 0$, значит возвращаемся в q_0. Согласно построению алгоритма К-М-П такой автомат будет принимать все слова алфавита за исключением содержащих подстроку $abba$.