Тряп-8

Волынцев Дмитрий 676 гр.

30 октября 2017

1

Приведем пример такой линейной грамматики, которая задает нерегулярный язык, а именно тривиальный нерегулярный язык $a^n b^n$. Эта грамматика: $S \to aSb|\varepsilon$. Она линейна по определению. Очевидно, что эта грамматика задает язык $a^n b^n$. Действительно, при переходе $S \to \varepsilon$ мы получим слово $\varepsilon = a^0 b^0$, принадлежащее языку. При многократном же переходе $S \to aSb$ мы всегда будем получать слово вида $a^k b^k$, так же принадлежащее языку. Таким образом, используя данную грамматику, мы можем задать все слова, принадлежащие языку $a^n b^n$ и не можем задать никаких других слов. Значит данная линейная грамматика задает нерегулярный язык, значит исходное утверждение неверно.

2

Сначала докажем по индукции, что все слова, порождаемые грамматикой - слова языка. База: $S \to \varepsilon$, где ε принадлежит языку. Пусть слово длины k, порождаемое грамматикой, принадлежит языку. Оно состоит и равного количества a и b ($k/2$). Затем, сколько бы раз мы не использовали бы $S \to aSb|bSa|SS$ и не прибавляли бы таким образом с каждоый стороны по a и b, их количество будет оставаться равным, а значит любое слово, порождаемое грамматикой, будет принадлежать языку.
Теперь докажем по индукции, что все слова языка - слова, порождаемые грамматикой, то есть докажем возможность выразить любое слово языка через правила переходов грамматики. Возможны 2 случая:

1) Если слово вида awb или bwa. Такое слово получается из слова w, принадлежащего языку, путем перехода $S \to aSb|bSa$. Если слово имеет такой же вид (начинается и заканчивается на разные символы), то раскрываем его по тем же двум переходам и т.д. по индукции. Таким образом оно выразимо через правила перехода грамматики. Слово ε также выразимо через грамматику за счет правила перехода $S \to \varepsilon$. Если же слово имеет вид awa или bwb, переходим ко второму пункту:
2) Слова вида awa или bwb, принадлежащие языку, можно представить как конкатенацию двух и более слов вида (1), так как они имеют одинаковое количество символов a и b и принадлежат языку. Просто введем счетчик, который при встреченном символе a будет увеличиваться на 1, а при встреченном символе b уменьшаться на 1. Тогда первое слово закончится там, где этот счетчик занулится, и счетчик начинает работу для следующего слова. Конкатенация слов осуществляется правилом перехода $S \to SS$, а каждое из конкатенируемых слов имеет вид (1), а значит выразимо через правила грамматики. Таким образом, слова и вида (2) тоже выразимы через грамматику, а значит любое слово языка выразимо через грамматику.

3

Пусть $L_1 = \Sigma^*$ - регулярное выражение, значит регулярный, а $L_2 = a^*b^*$ - регулярное выражение, значит регулярный (удовлетворяют обоим условиям, ведь их пересечение это язык L_2, а L_2 содержит F). Как сказано выше, оба языка регулярны и при этом удовлетворяют условию, значит предположение задачи не верно.

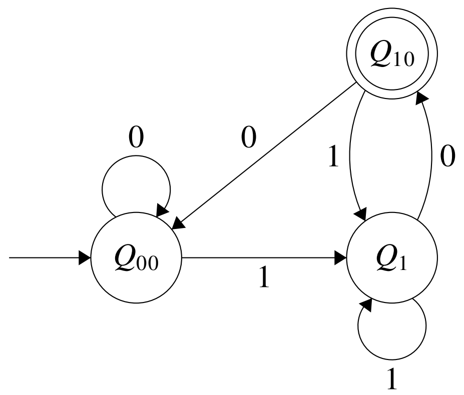
4

1) Это языку всех непалиндромов. Построим следующую КС-грамматику:
$S \to aSa|bSb|aAb|bAa$
$A \to aA|bA|\varepsilon$
Действительно, пока мы будем использовать первые два правила перехода из S, мы будем получать палиндромы. Но перейдя лишь раз по 3

или 4 правилу мы уже никогда не получим слово-палиндром благодаря правилам перехода из A, при этом получая любые другие слова (возможен любой набор символов, кроме палиндромов).

5

Число в двоичной записи дает остаток 2 при делении на 4 только в том случае, если оно заканчиается на ...10: оно четное вследствие последнего нуля и имеет слагаемое 2 вследствие предпоследней единицы (искомый остаток), остальные слагаемые делятся на 4, значит их сумма также делится на 4. Таким образом, нам не важна последовательность нулей и единиц далее второго члена с конца.
1) Q_{00} - первый класс экв., содержащий слова ε, 0 и слова вида $w00$
2) Q_{10} - второй класс экв., содержащий слова вида $w10$
3) Q_1 - третий класс экв., содержащий слова вида $w1$
Очевидно, что любое слово языка принадлежит одному из этих классов и что эти классы различны (существует различающее слово). Значит это действительно классы эквивалентности. Теперь построим соответствующий ДКА, где эти классы являются состояниями, принимающим - тот класс, который отвечает за остаток 2:



6

$L = \{a^n\Sigma^* b^n | n > 1\}$
Т.к. $n > 1$, представим язык в виде $L = \{aaa^{n-2}\Sigma^* b^{n-2}bb | n > 1\}$. Тогда $\{aa\Sigma^* bb\}$ является регулярным выражением для данного языка. Действительно, любое слово вида $\{a^n\Sigma^* b^n | n > 1\}$ будет принадлежать языку $L = \{aa\Sigma^* bb\}$ (т.к. a^{n-2} и b^{n-2} при $n \geq 2$ можно занести в Σ^*. Обратно, любое слово вида $\{aa\Sigma^* bb\}$ будет принадлежать языку $L = \{a^n\Sigma^* b^n | n > 1\}$ (случай $n = 2$). Таким образом, $L = \{a^n\Sigma^* b^n | n > 1\}$ и $L = \{aa\Sigma^* bb\}$ совпадают, т.е. мы смогли представить язык в виде регулярного выражения, значит данный язык L является регулярным.