Жеглов Дмитрий Андреевич
2 Теоретическое задание

Задача 1

$$Q(w) = \sum_{i=1}^{n} \left(\langle w, f(x_i) \rangle - y_i \right)^2 \to \min_{w}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot f_j(x_i) \left(\langle w, f(x_i) \rangle - y_i \right) = 0$$

т.е. $\sum_i f_j(x_i) \cdot \sum_k w_k f_k(x_i) = \sum_i f_j(x_i)\, y_i$

вносим

$$\Rightarrow \sum_k w_k \overbrace{\sum_i f_j(x_i) \cdot f_k(x_i)}^{= \langle f_j, f_k \rangle} = \langle f_j, y \rangle$$

т.к. $\langle f_j, f_k \rangle = 0$ при $j \neq k$

$$\Rightarrow w_j \langle f_j, f_j \rangle = \langle f_j, y \rangle$$

$$\Rightarrow w_j = \frac{\langle f_j, y \rangle}{\langle f_j, f_j \rangle}, \text{ где } \left(f_j(x_i) \right)_{i=1}^{n} = f_j$$

Задача 2

З2. а) $\|E\| \geq 1$

$\square$ $\|E\| \leq \|E\| \cdot \|E\| = \|E\|^2$

т.к. $E = E \cdot E$ и по св-ву матр. нормы ($\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$)

$\Rightarrow \|E\| \geq 1$

$\blacksquare$

б) $\|A^{-1}\| \geq \dfrac{\|E\|}{\|A\|}$

$\square$ $\|E\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$\Rightarrow \|A^{-1}\| \geq \dfrac{\|E\|}{\|A\|}$

$\blacksquare$

Задача 3

3а) $\|A\| = n \max\limits_{ij} |a_{ij}|$

Проверим св-ва нормы

1) $|a_{ij}| \geq 0 \quad \forall i,j \Rightarrow \|A\| \geq 0$ и $\|A\| = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i,j$

2) $n \max\limits_{ij} (|\lambda a_{ij}|) = n \max(|\lambda| \cdot |a_{ij}|) = |\lambda| \, n \max |a_{ij}| = |\lambda| \, \|A\|$

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$n \max_{ij} (|a_{ij} + b_{ij}|) \leq n \max (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \leq n \max |a_{ij}| + n \max |b_{ij}|$$

4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$$n \max_{ij} \left(\left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \right) \leq n \max \left(\sum_k |a_{ik}| \cdot |b_{kj}| \right) \leq$$

$$\leq n \max_{ij} \left(n \max_k (|a_{ik}| \cdot |b_{kj}|) \right) \leq n \max_{i,k} (|a_{ik}|) \cdot n \cdot \max_{j,k} |b_{kj}|$$

$\blacksquare$

Задача 4

3 и.

а) $\|E\| = \sup\limits_{v \neq 0} \dfrac{\|Ev\|}{\|v\|} = \sup\limits_{v \neq 0} \dfrac{\|v\|}{\|v\|} = 1$

б) $\|A\| = \sup\limits_{v \neq 0} \dfrac{\|Av\|}{\|v\|} \geq \dfrac{\|Av\|}{\|v\|} \Rightarrow \|Av\| \leq \|A\| \|v\|$

Задача 5

б) $\|A\| = \sup\limits_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|} \Rightarrow \|Av\| \leq \|v\|\|A\|$

3. 5.

1) $\|Ax\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\right\|_1 =$

$= \left\| \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^n a_{ni}x_i \end{pmatrix}\right\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n \left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| =$

$= \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|\cdot|x_j| \leq \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}| \sum\limits_{j=1}^n |x_j|$

Максимум достигается на

$\|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$, $x = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$ ← 1 на max j

$\|Ax\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^n a_{ni}x_i \end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\limits_{i=1..n} \left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| =$

$\leq \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|\,|x_j|\right) \leq \max\limits_i \left\{\sum\limits_j |a_{ij}| \max\limits_j |x_j|\right\} \leq \max\limits_i \left(\sum\limits_j |a_{ij}|\right)\|x\|_\infty$

Покажем, что эта оценка достигается. $\exists$ максимум по i имеет место при $i=l \Rightarrow x = (\mathrm{sign}(a_{l1}), \dots \mathrm{sign}(a_{ln})) \Rightarrow \|x\|_\infty = 1$ и точные равенства во всей цепочке выше

3б. $\mathrm{cond}(A) = \begin{cases} \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \\ \infty \quad \text{для вырожденной } A \end{cases}$

1) т.к. $E = E\cdot E$ $\quad \|E\| \geq 1 \quad E = A\cdot A^{-1}$

Задача 6

и точные равенства во всей цепочке выше

3б $\operatorname{cond}(A) = \begin{cases} \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \\ \infty & \text{для вырожденной } A \end{cases}$

1) т.к. $E = E\cdot E$, $\|E\| \geq 1$, $E = A\cdot A^{-1}$

$\Rightarrow 1 \leq \|E\| = \|A^{-1}\cdot A\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|A\| = \operatorname{cond} A$

2) $\operatorname{cond}(A^{-1}) = \|A^{-1}\|\cdot\|(A^{-1})^{-1}\| = \|A^{-1}\|\cdot\|A\| = \operatorname{cond} A$

3) $\operatorname{cond}(AB) = \|AB\|\cdot\|B^{-1}A^{-1}\| \leq \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|B\|\cdot\|B^{-1}\| =$

$= \operatorname{cond} A \cdot \operatorname{cond} B$

4) $|\lambda(A)| \leq \|A\|$, для любого собственного числа

△ Зафиксируем произвольный собственный вектор x матрицы A и построим матрицу X, столбцами которой являются вектора x

Получим равенство $\lambda X = AX \Rightarrow |\lambda|\,\|X\| \leq \|A\|\cdot\|X\|$

$\Rightarrow \frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda(A)| \quad \Rightarrow \frac{1}{|\lambda(A)|} \leq \|A^{-1}\|$, если $\exists A^{-1}$

$\Rightarrow \operatorname{cond}(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \geq \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ ▨

Задача 7

3₇. Применим сингулярное разложение к A

$$A = U \Sigma V^T, \quad rk(\Sigma) = m,$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{ik} \left(\sum_{j=1}^{m} u_{ij} \sigma_j v_{jk} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$ Раскроем квадрат и внесем сумму по i

$$= \left(\sum_k \left(\sum_j \sigma_j^2 v_{jk}^2 \underbrace{\sum_i u_{ij}^2}_{\substack{1 \\ \text{т.к. } U \text{ ортогон.}}} + 2 \sum_{r<s} v_{rk} \sigma_r \cdot v_{sk} \sigma_s \underbrace{\sum_i u_{ir} u_{is}}_{\substack{0 \\ \text{т.к. } U \text{ ортогон.}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_j \sigma_j^2 \underbrace{\sum_k v_{jk}^2}_{\substack{1 \\ \text{т.к. } V \text{ - ортогон.}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_j \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \blacksquare$$

Задача 8

38. $AGA = A$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix} \Rightarrow G \cdot A = \begin{pmatrix} 3x_1 & 2x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ 3x_5 & 2x_6 & x_7 & 0 & 0 \\ 3x_9 & 2x_{10} & x_{11} & 0 & 0 \\ 3x_{13} & 2x_{14} & x_{15} & 0 & 0 \\ 3x_{17} & 2x_{18} & x_{19} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AGA = \begin{pmatrix} 9x_1 & 6x_2 & 3x_3 & 0 & 0 \\ 6x_5 & 4x_6 & 2x_7 & 0 & 0 \\ 3x_9 & 2x_{10} & x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow$ $x_1 = \frac{1}{3}$ $\quad x_2 = 0$ $\quad x_3 = 0$

$x_5 = 0$ $\quad x_6 = \frac{1}{2}$ $\quad x_7 = 0$ $\qquad$ остальные $x_i \in \mathbb{R}$

$x_9 = 0$ $\quad x_{10} = 0$ $\quad x_{11} = 1$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & x_8 \\ 0 & 0 & 1 & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}$$