1. Нехай $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Навести всі розміщення та сполучення без повторень з елементів множини М по 3 елементи.

$$\begin{aligned}
&\textbf{Сполучення:}\\
&[1,2,3],[1,2,4],[1,2,5],[1,3,4],[1,3,5][1,4,5],[2,3,4],[2,3,5],[2,4,5],[3,4,5];\\
&\textbf{Розміщення:}\\
&(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1);\\
&(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1);\\
&(1,2,5),(1,5,2),(2,1,5),(2,5,1),(5,1,2),(5,2,1);\\
&(1,3,4),(1,4,3),(3,1,4),(3,4,1),(4,1,3),(4,3,1);\\
&(1,3,5),(1,5,3),(3,1,5),(3,5,1),(5,1,3),(5,3,1);\\
&(1,4,5),(1,5,4),(4,1,5),(4,5,1),(5,1,4),(5,4,1);\\
&(2,3,4),(2,4,3),(3,2,4),(3,4,2),(4,2,3),(4,3,2);\\
&(2,3,5),(2,5,3),(3,2,5),(3,5,2),(5,2,3),(5,3,2);\\
&(2,4,5),(2,5,4),(4,2,5),(4,5,2),(5,2,4),(5,4,2);\\
&(3,4,5),(3,5,4),(4,3,5),(4,5,3),(5,3,4),(5,4,3).
\end{aligned} \tag{1}$$

хер знає чого вона по правій стороні вирівняло

8. Знайти або довести не існування лексикографічно наступних сполучень без повторень на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$ для кожного з розміщень: $dab, ad, be, abce, acde, cde$.

Для простоти сприйняття проіндексуємо множину та розміщення:

$$\begin{aligned}
\{a,b,c,d,e\} &\equiv \{1,2,3,4,5\};\\
dab &\equiv 4,1,2;\\
ad &\equiv 1,4;\\
be &\equiv 2,5;\\
abce &\equiv 1,2,3,5;\\
acde &\equiv 1,3,4,5;\\
cde &\equiv 3,4,5.
\end{aligned} \tag{2}$$

В сполучннях без повторень аби довести не існування наступних сполучень потрібно, аби виконувалась рівність $a_i = n - r + i$, де n - найбільший елемент вибірки, r - розмір сполучення, a_i - і-тий елемент сполучення, для всіх $i = \overline{1, r}$. Якщо ж знайдеться такий $a_i < n - r + i$, значить наступне сполучення існує.

Навідміну від розміщень, в сполученнях не грає роль порядок розміщення елементів, тому при їх розгляді всі сполучення будуть записані в порядку зростання індексів елементів. Розглянемо кожне із сполучень:

a) $1, 2, 4$

$$\begin{gathered}
4 \neq 5 - 3 + 3 \Rightarrow \text{ наступне сполучення } 1,2,5;\\
\text{Для розміщення } dab \text{ наступним сполученням буде } abe;
\end{gathered} \tag{3}$$

b) $1, 4$

$$\begin{gathered}
4 \neq 5 - 2 + 2 \Rightarrow \text{ the next combination will be } 1,5;\\
\text{For the partial permutation } ab \text{ the next combination will be } ae;
\end{gathered} \tag{4}$$

c) $2, 5$

$$\begin{gathered} 5 = 5 - 2 + 2;\ \textbf{BUT}\ 2 \neq 5 - 2 + 1 \Rightarrow \text{ the next combination will be } 3, 4; \\ \text{For the partial permutation } be \text{ the next combination will be } cd; \end{gathered} \tag{5}$$

d) $1, 2, 3, 5$

$$\begin{gathered} 3 \neq 5 - 4 + 3 \Rightarrow \text{ the next combination will be } 1, 2, 4, 5; \\ \text{For the partial permutation } abce \text{ the next combination will be } abde; \end{gathered} \tag{6}$$

e) 145

$$\begin{gathered} 1 \neq 5 - 3 + 1 \Rightarrow \text{ the next combination will be } 2, 3, 4; \\ \text{For the partial permutation } ade \text{ the next combination will be } bcd; \end{gathered} \tag{7}$$

f) 1345

$$\begin{gathered} 1 \neq 5 - 4 + 1 \Rightarrow \text{ the next combination will be } 2, 3, 4, 5; \\ \text{For the partial permutation } acde \text{ the next combination will be } bcde; \end{gathered} \tag{8}$$

g) 345

$$\begin{gathered} 3 = 5 - 3 + 1 \textbf{ AND } 4 = 5 - 3 + 2 \textbf{ AND } 5 = 5 - 3 + 3 \Rightarrow \text{ no further combinations;} \\ \text{The partial permutation } cde \text{ does NOT have any further combinations.} \end{gathered} \tag{9}$$

Partial permutation - розміщення, combination - перестановка. Просто задовбався між мовами свапатись))

15. Написати алгоритм або програму, яка виводитиме всі тризначні числа, які володіють такими властивостями:

Коди я напишу, але після того, як це завдання обговорю з тобою. Особливо пункт про оптимізацію. Ну або ж ти читаєш це коли я вирішив, шо придумав шось офігенне і вже написав код. *а) діляться на всі свої цифри. Як оптимізувати алгоритм, щоб зменшити кількість операцій для перевірок ділення?*

Алгоритм простий як двері:

1. беремо по черзі кожну цифру і ділимо на неї наше число;
2. кожен раз, коли вдається поділити націло, отримуємо TRUE;
3. якщо число назбирує три TRUE - воно нам підходить.

Шляхи оптимізації:

- першим кроком перевіряємо чи є в записі числа хоча б один нуль. Якщо є - число автоматично відбраковується;
- за умовою число трьохзначне. Тому ділимо на першу цифру і отримуємо TRUE чи FALSE, а наступні цифри перш, ніж ділити, порівнюємо з попередніми. Якщо воно співпадає з тим, для якого ми вже отримали TRUE/FALSE, то ділити не будемо. Таким чином, для числа 123 ми будемо мати 3 операції ділення, а для числа 666 - одну. Дана оптимізація зменшить кількість операцій ділення, але не зменшить кількість операцій всього. Більше того, для випадків, коли хоча б одна цифра числа не співпадає з тими, що вже аналізувались, операцій код виконає більше, аніж початковий алгоритм. Хз, чи це оптимізація, але в умові спитали саме за ділення, а не операції вцілому;

- можна обійтись взагалі майже без ділення, якщо треба позбутись саме його, а не зменшити кількість операцій загалом. Для цього деяким цифрам можемо прописати правила поідльності, типу як «число ділиться на 5, якщо воно закінчується на 5 чи 0»;

б) число, отримане з вихідного шляхом запису його цифр у зворотньому порядку також ділиться на всі свої цифри.

Вихідний алгоритм нічим не відрізняється від описаного вище.

Спрощення:

- якщо в числі є 3,6 або 9 і воно не ділилось на ці цифри, то і після дзеркального запису ділитись не буде;
- ще можна додати перевірку числа на відзеркалення самого в себе, наприклад $757 \to 757$.

Але ці всі оптимізації в більшості своїй виглядають парашно. Перевірка на нулі і на співпадіння цифр мб і має сенс. А тому мені здається, що я шось упускаю. Але вже 3 день думаю і не бачу, шо саме я не викупаю, в чому моя проблема, такша давай, чекаю твоїх коментарів.

24. Обчислити значення:

$$\textbf{a)}\ A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60; \tag{10}$$

$$\textbf{b)}\ A_6^5 = 720; \tag{11}$$

$$\textbf{c)}\ A_8^1 = \frac{8!}{7!} = 8; \tag{12}$$

$$\textbf{d)}\ A_8^5 = \frac{8!}{5!} = 336; \tag{13}$$

$$\textbf{e)}\ A_8^8 = 8!; \tag{14}$$

$$\textbf{f)}\ A_{10}^9 = 10!; \tag{15}$$

26. Обчислити значення:

$$\textbf{a)}\ C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4; \tag{16}$$

$$\textbf{b)}\ C_7^5 = \frac{7!}{5!2!} = 21; \tag{17}$$

$$\textbf{c)}\ C_4^1 = 4; \tag{18}$$

$$\textbf{d)}\ C_8^0 = 1; \tag{19}$$

$$\textbf{e)}\ C_8^8 = 1; \tag{20}$$

$$\textbf{f)}\ C_{10}^9 = \frac{10!}{9!} = 10. \tag{21}$$

38. Скількома способами можна поставити на полицю 9 книжок:

а) Якщо серед них є один тритомник, усі томи якого мають стояти поруч у довільному порядку.
3 томи можна поставити поруч у довільному порядку 3! способами.
Якщо ж ці три томи повинні стояти поруч, то їх можна розглядати не як 3 окремі об'єкти, а к одне ціле. Таким чином у нас буде не 9 самостійних книжок, які треба розмістити на полиці, а лише 7 об'єктів. 7 об'єктів можна розммістити в довільному порядку 7! способами.
Отже, на полицю можна поставити тритомник, томи якого стоять поруч у довільному порядку, та 6 книжок:

$$3! \cdot 7! = 6 \cdot 5040 = 30240 \text{ способами.} \tag{22}$$

б) Щоб усі томи тритомника стояли за зростанням їх номерів.
Томи тритомника за зростанням можна поставити лише одним способом.
Знову розглядаючи 6 книжок та один тритомник як 7 незалежних об'єктів отримуємо, що розмістити їх на полиці можна:

$$1 \cdot 7! = 5040 \text{ способами.} \tag{23}$$

Скількома способами з колоди 52 карт можна вийняти 10 карт, щоб серед них були такі:

а) точно один туз.

Я дуууже довго не міг викупити, яка різниця між ситуаціями «точно один туз» і «принаймні один туз». Ібо перший варіант звучав в моїй голові «мамой клянусь, эжжи, там точно один туз есть, а может даже два, ээввэ не убивай только, братан!». А потім в мене виникла підозра, шо «точно один туз» може значити «лише один туз». Ох уж ця велика і могутня мова, в рот її їбати

В колоді 4 тузи, а отже вибрати один з них можна 4 способами. Після чого в колоді без тузів буде 48 карт, з яких вибрати решту 9 можна A_{48}^9 способами. В результаті отримуємо:

$$4 \cdot A_{48}^9 = 4 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \approx 24 \cdot 10^{14} \text{ способів.} \tag{24}$$

б) принаймні один туз.
Від минулої задачі дана умова відрізняється тим, що ми вибиравши один з 4-х тузів решту не викидаємо, а вертаємо до колоди. Таким чином, кінцевий вираз буде:

$$4 \cdot A_{51}^9 - \text{ шо ще більше, ніж 24 трільйонів.} \tag{25}$$

в) не менше двох тузів.
З 4-х тузів обрати два ми можемо $A_4^2 = 12$ способами. Після чого нам треба буде вибрати ще 9 карт з 50-и, що залишились в колоді A_{50}^9 способами. Отримана таким чином кількість способів рівна `ахуєть_якому_великому_сука_числу_прям_як_кількість_ударів_Стар_Платінума_в_секунду.`

Якщо ж порядок карт ролі не грає, то всі оператори A_n^r замінюються на C_n^r.

49. Визначити п'ятий член а-ха-ха пісюн а-ха-ха розкладу бінома $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a})^n\right)$, якщо відношення третього коефіцієнта, до другого рівне $\frac{11}{2}$. Члени пронумеровано від 1 до n+1.

Так, як члени пронумеровано від 1, то в розкладі $(x+y)^n = \Sigma_r^n x^r y^{n-r}$ першому члену відповідатиме $r = 0$, другому - $r = 1$ і т.д. Таким чином, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{C_n^2}{C_n^1} &= \frac{11}{2}; \\ \frac{n! \cdot 1! \cdot (n-1)!}{2! \cdot (n-2)! \cdot n!} &= \frac{11}{2}; \\ \frac{n-1}{2} &= \frac{11}{2}; \\ n &= 12; \end{aligned} \tag{26}$$

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 495 - \text{п'ятий член.}$$

60. Записати розклад $(x + y + z)^4$.

$$(x+y+z)^4 = \Sigma_{n_1+n_2+n_3=4}^{n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, n_3 \geq 0} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} =$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + 4(x^3y + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y) + 12(x^2zy + y^2xz + z^2xy) + 6(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) \tag{27}$$

72. Знайти кількість додатніх цілих чисел, менших за 1000000, сума цифр яких дорівнює 19.

Розглянемо число як суму його розрядів

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \tag{28}$$

де кожне x_i - розряд в порядку спадання (сотні тисяч, десятки тисяч, тисячі і т.д.), а оператор + позначає символьну конкатенацію. Тоді, наприклад, число 214 запишеться як $214 = 0{+}0{+}0{+}2{+}1{+}4$. Таким чином, рівняння, що описує поставлену задачу матиме вигляд:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19. \tag{29}$$

Тоді, використовуючи стандартну формулу визначення кількості цілих невід'ємних розв'язків, отримуємо:

$$C_{19+5-1}^{19} = \frac{23!}{19! \cdot 4!} = 8855. \tag{30}$$

Однак розв'язок (30) не враховує однієї особливості - значення розряду не може бути більше дев'яти. Тобто розв'язок $(18, 1, 0, 0, 0)$, який входить в (30) нас не задовільняє.
Для того, аби знайти кількість всіх розв'язків, що нас не задовільняють, накладемо додаткову умову:

$$x_i \geq 10, \tag{31}$$

і перейдемо до нової змінної:

$$\hat{x}_i = x_i - 10. \tag{32}$$

Цілком очевидно, що одночасно підпадати під умову (31) може лише одна змінна, адже сума двох чисел ≥ 10, буде ≥ 20, що суперечить умові завдання. Розглянемо випадок, коли $\hat{x}_1 = x_1 - 10$:

$$\begin{gathered} \hat{x}_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9, \\ C_{13}^{9} = \frac{13!}{9!4!} = 715 - \text{кількість розв'язків, що не задовільняє нас.} \end{gathered} \tag{33}$$

Очевидно, що випадки з рештою $\hat{x}_i$, $i = (\overline{2,5})$ дадуть таку ж кількість незадовільних розв'язків. Тоді остаточний результат буде:

$$C_{23}^{19} - 5 \cdot C_{13}^{9} = 8855 - 5 \cdot 715 = 5280 \text{ чисел менше } 1000000\text{, сума цифр яких дасть } 19. \tag{34}$$