Вступ до теорії графів

3. Чи існує простий граф з степенями вершин, заданими нище. Якщо так - зобразіть його, якщо ні - обгрунтуйте, чому.

а) 2,4,4,2,4; Відповідно до теореми (*неорієнтований граф має парну кількість вершин непарного степеня*[1]) ми маємо 0 вершин непарного степеня, отже граф неорієнтований. Однак, аби граф був пустий, не повинно бути кратних вершин та петель.

Для графа справедлива формула:

$$\sum v_i = 2m, \text{ де } v_i \text{ - степінь і-го ребра, } m \text{ - кількість ребер.} \tag{1}$$

У нашому випадку ми маємо:

$$m = \frac{2+4+4+2+4}{2} = 8 \text{ ребер.} \tag{2}$$

Дві вершини (перша та четверта) заданого графа мають всього по 2 ребра, це означає, що на решту 3 вершин приходиться 5 ребер. А три вершини з'єднати 5-а ребрами так, аби не було однакових (кратних) з'єднань, очевидно, неможливо.

Отже, даний граф не є простим.

b) 1,1,1,1,1 За теоремою [1] даний граф не є неорієнтованим, але може бути простим орієнтованим.
c) 1,1,1,1,2 За т.1 даний граф існує. І, очевидно, буде простим.
d) 5,5,5,5,5 За т.1 даний граф не існує.
e) 4,5,5,5,5 Так як п'ята вершина має степінь 5, даний граф міститиме петлю і/або кратні зв'язки, а отже не буде простим.
f) 2,2,4,4,4 Див. пункт а)
g) 1,1,2,2,4 Даний граф буде простим.
h) 4,4,4,4,4 Даний граф буде простим.

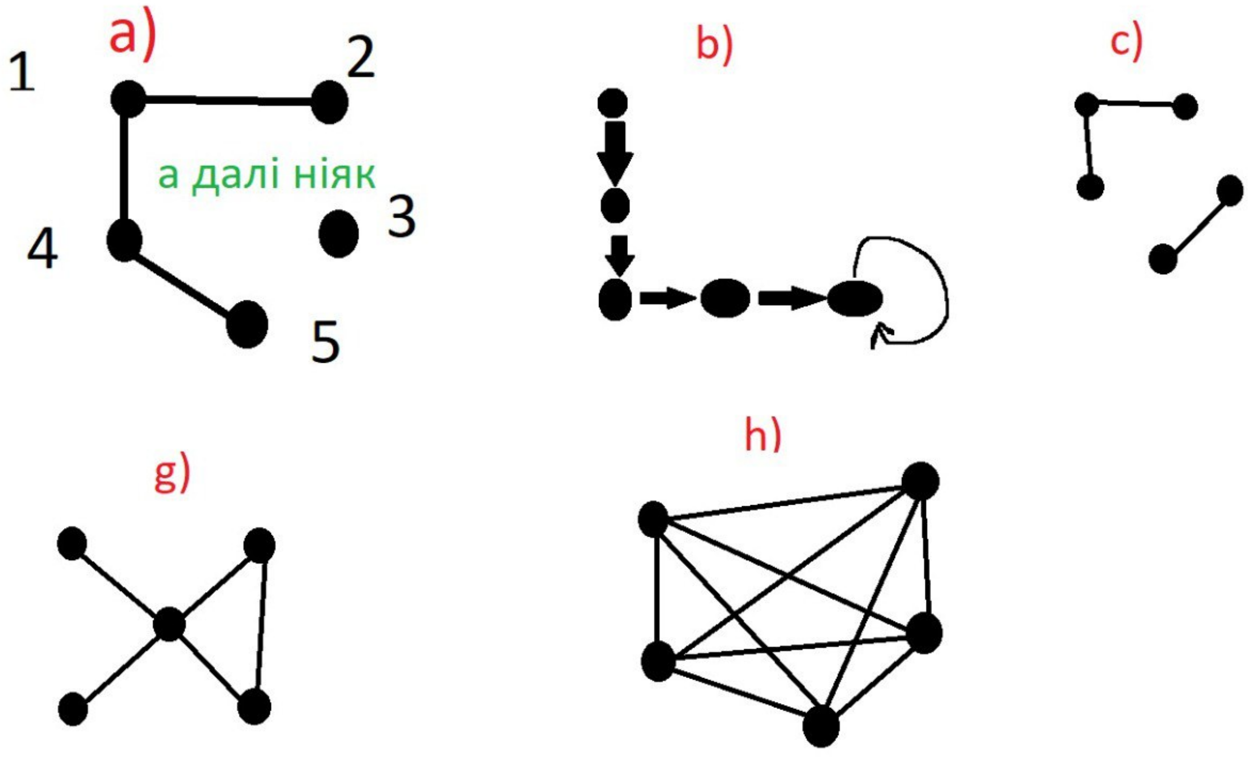


Рис. 1: Зображення можливих графів

7. Обчисліть для кожного графу число півстепенів входу та виходу для кожної вершини.

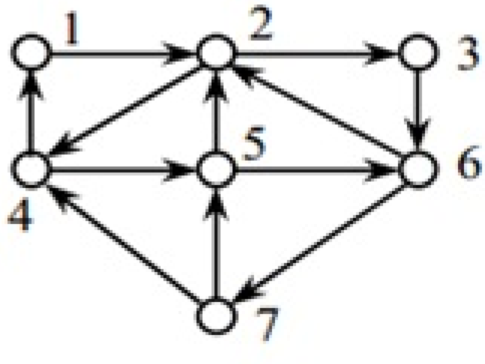


Рис. 2: a)

$$\begin{aligned} deg^+(1) &= 1, \\ deg^-(1) &= 1, \\ deg^+(2) &= 2, \\ deg^-(2) &= 3, \\ deg^+(3) &= 1, \\ deg^-(3) &= 1, \\ deg^+(4) &= 2, \\ deg^-(4) &= 2, \\ deg^+(5) &= 2, \\ deg^-(5) &= 2, \\ deg^+(6) &= 2, \\ deg^-(6) &= 2, \\ deg^+(7) &= 2, \\ deg^-(7) &= 1; \end{aligned} \tag{3}$$

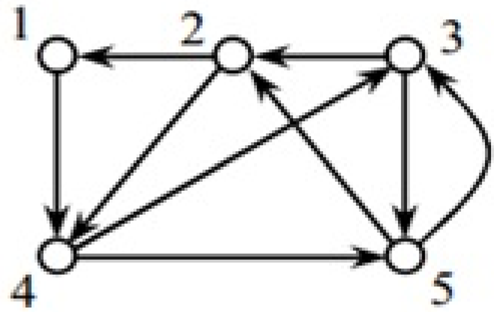


Рис. 3: b)

$$
\begin{aligned}
deg^{+}(1) &= 1, \\
deg^{-}(1) &= 1, \\
deg^{+}(2) &= 2, \\
deg^{-}(2) &= 2, \\
deg^{+}(3) &= 2, \\
deg^{-}(3) &= 2, \\
deg^{+}(4) &= 2, \\
deg^{-}(4) &= 2, \\
deg^{+}(5) &= 2, \\
deg^{-}(5) &= 2;
\end{aligned} \tag{4}
$$

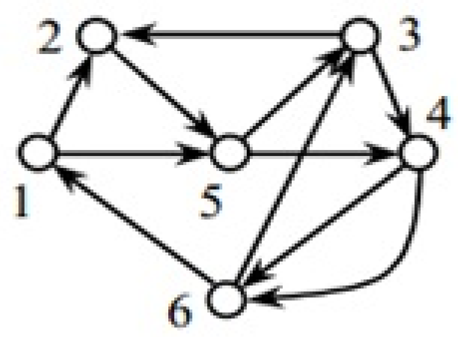


Рис. 4: c)

$$
\begin{aligned}
deg^{+}(1) &= 2, \\
deg^{-}(1) &= 1, \\
deg^{+}(2) &= 1, \\
deg^{-}(2) &= 2, \\
deg^{+}(3) &= 2, \\
deg^{-}(3) &= 2, \\
deg^{+}(4) &= 2, \\
deg^{-}(4) &= 2, \\
deg^{+}(5) &= 2, \\
deg^{-}(5) &= 2, \\
deg^{+}(6) &= 2, \\
deg^{-}(6) &= 2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

22. У графі G 5 вершин та 4 ребра. Скільки ребер та вершин у графі $\overline{G}$?

У доповнювальному графі стільки ж вершин, скільки і в початковому - 5.

Для того, щоб знайти кількість ребер у доповнювальному, спершу знайдемо кількість ребер в повному графі:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10. \tag{6}$$

Тоді кількість ребер у доповнювальному графі рівна:

$$\overline{m} = C_5^2 - E = 10 - 4 = 6. \tag{7}$$

26. Задати матрицями інцидентності, суміжності, списком ребет, списком суміжності неорієнтовані графи, зображені на рисунках:

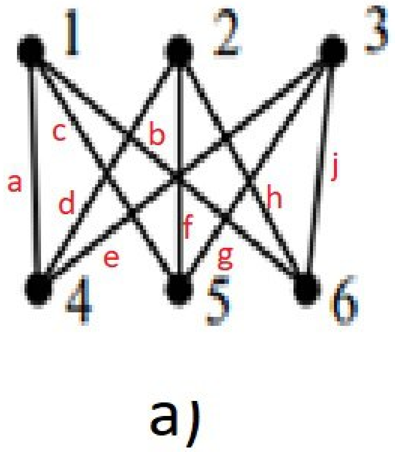


Рис. 5: *а)*

Табл. 1: Матриця інцидентності для а)

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**j**
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	0	0	1	0	1	0	1
4	1	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Табл. 2: Матриця суміжності для а)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0

Табл. 3: Список пар для a)

1	4
1	5
1	6
2	4
2	5
2	6
3	4
3	5
3	6

Табл. 4: Список суміжності для a)

Вершина входу	Вершина виходу
1	4,5,6
2	4,5,6
3	4,5,6
4	1,2,3
5	1,2,3
6	1,2,3

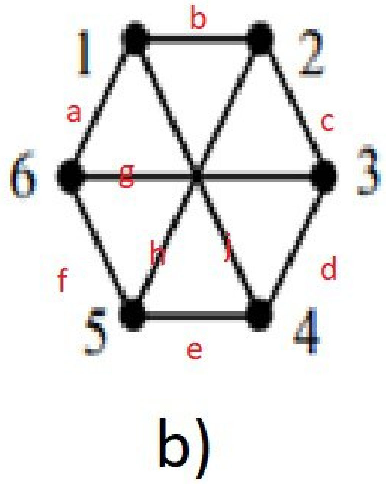


Рис. 6: b)

Табл. 5: Матриця інцидентності для b)

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**j**
1	1	1							1
2		1	1					1	
3			1	1			1		
4				1	1				1
5					1	1		1	
6	1					1	1		

Табл. 6: Матриця сумісності для b)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1		1		1
2	1		1		1	
3		1		1		1
4	1		1		1	
5		1		1		1
6	1		1		1	

Табл. 7: Список пар для b)

1	2
1	4
1	6
2	3
2	5
3	4
3	6
4	5
5	6

Табл. 8: Список суміжності для b)

Вершина виходу	Вершина входу
1	2,4,6
2	1,3,5
3	2,4,6
4	1,3,5
5	2,4,6
6	1,3,5

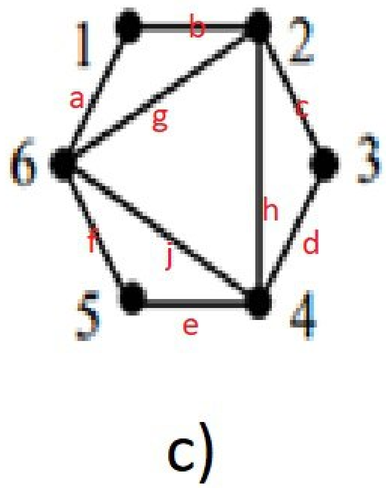


Рис. 7: *c)*

Табл. 9: Матриця інцидентності для с)

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**j**
1	1	1							
2		1	1				1	1	
3			1	1					
4				1	1			1	1
5					1	1			
6	1					1	1		1

Табл. 10: Матриця суміжності для с)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1				1
2	1		1	1		1
3		1		1		
4		1	1		1	1
5				1		1
6	1	1		1	1	

Табл. 11: Список ребер для с)

1	2
1	6
2	3
2	4
2	6
3	4
4	5
4	6
5	6

Табл. 12: Список суміжності

Вершина виходу	Вершина входу
1	2,6
2	1,3,4,6
3	2,4
4	2,3,5,6
5	4,6
6	1,2,4,5

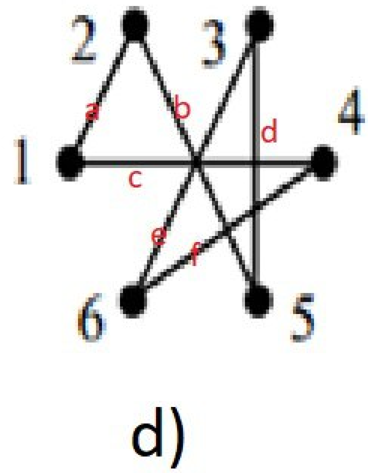


Рис. 8: *d)*

Табл. 13: Матриця інцидентності для d)

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
1	1		1			
2	1	1				
3				1	1	
4			1			1
5		1		1		
6					1	1

Табл. 14: Матриця суміжності для d)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1		1		
2	1				1	
3					1	1
4	1					1
5		1	1			
6			1	1		

Табл. 15: Список ребер для с)

1	2
1	4
2	5
3	5
3	6
4	6

Табл. 16: Список суміжності для d)

Ребро виходу	Ребро входу
1	2,4
2	1,5
3	5,6
4	1,6
5	2,3
6	3,4

Половину графів описав і, думаю, достатньо. Решта - нічим не відрізняється від вже описаних. Ні петель тобі, ні кратностей, скушно. Скушно! Бракує фантазії вашим викладачам ЛПІ.

32-33. Запишіть матриці інцидентності та суміжності для графів із завд.7

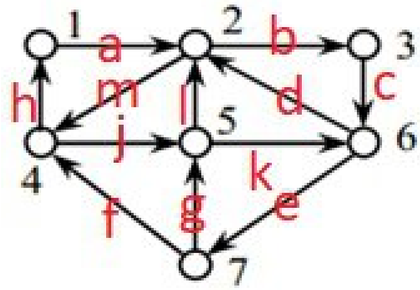


Рис. 9: *a)*

Табл. 17: Матриця інцидентності для a)

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**j**	**k**	**l**	**m**
1	1							-1				
2	-1	1		-1							-1	1
3		-1	1									
4						-1		1	1			-1
5							-1		-1	1	1	
6			-1	1	1					-1		
7					-1	1	1					

Табл. 18: Матриця суміжності для a)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1		1					
2			1	1			
3						1	
4	1				1		
5		1				1	
6		1					1
7				1	1		

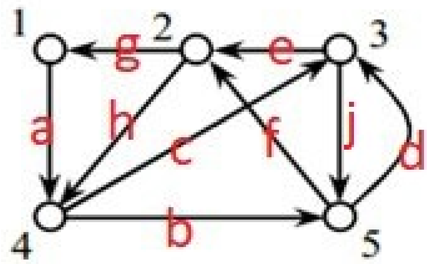


Рис. 10: *b)*

Табл. 19: Матриця інцидентності для b)

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**j**
1	1						-1		
2					-1	-1	1	1	
3			-1	-1	1				1
4	-1	1	1					-1	
5		-1		1		1			-1

Табл. 20: Матриця суміжності для b)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1				1	
2	1			1	
3		1			1
4			1		1
5		1	1		

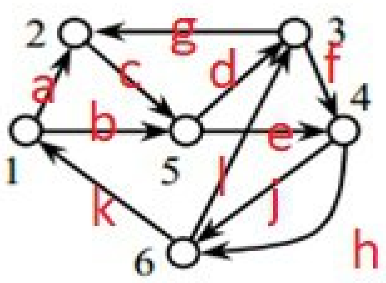


Рис. 11: *c)*

Табл. 21: Матриця інцидентності для с)

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**j**	**k**	**l**
1	1	1								-1	
2	-1		1				-1				
3				-1		1	1				-1
4					-1	-1		1	1		
5		-1	-1	1	1						
6								-1	-1	1	1

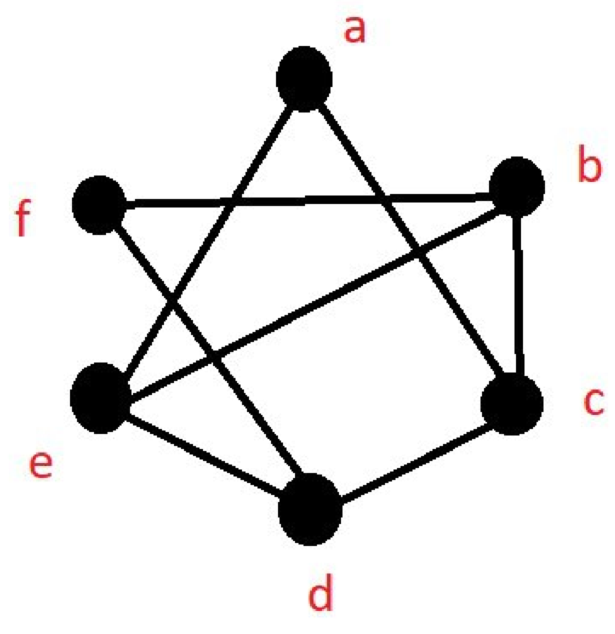
Табл. 22: Матриця суміжності для с)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1			1	
2					1	
3		1		1		
4						2
5			1	1		
6	1		1			

38. Для заданих матриць суміжності побудувати відповідні графи.

	a	b	c	d	e	f
a	0	0	1	0	1	0
b	0	0	1	0	1	1
c	1	1	0	1	0	0
d	0	0	1	0	1	1
e	1	1	0	1	0	0
f	0	1	0	1	0	0

(а) Умова

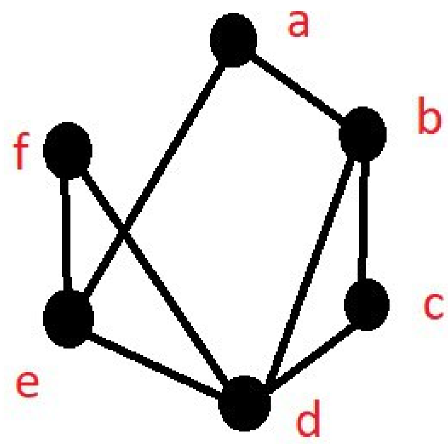


(б) Отриманий Граф

Рис. 12: *a)*

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	1	0
b	1	0	1	1	0	0
c	0	1	0	1	0	0
d	0	1	1	0	1	1
e	1	0	0	1	0	1
f	0	0	0	1	1	0

(а) Умова



(б) Отриманий граф

Рис. 13: *b)*