shipout/backgroundshipout/foreground

Множини

1. Нехай $A = \{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$. Чи справедливо, що:

а) $\{1,2\} \in A$;
Ні, так як елементу $\{1,2\}$ немає в множині A. Дане твердження було би справедливим, якщо множина A мала би вигляд $A = \{\{1,2,3\},\{1,3\},\{1,2\}\}$.
б) $\{1,2\} \subset A$*;*
Так, адже множина A включає в себе елементи $\{1,2\}$.

Нехай *A* - довільна множина. Що являють собою множини:

a) $A \cap \emptyset$

$$A \cap \emptyset = \emptyset; \tag{1}$$

b) $A \setminus \emptyset$

$$A \setminus \emptyset = A; \tag{2}$$

c) $A \setminus A$

$$A \setminus A = \emptyset; \tag{3}$$

d) $A \cup \emptyset$

$$A \cup \emptyset = A. \tag{4}$$

7. Нехай *A* - множина цілих чисел, що діляться на 4, *B* - множина цілих чисел, що діляться на 3. Які з чисел 9,0,-24,-53,128,242048 входять у множину $A \cup B$?

Запишемо явний вигляд множин A та B:

$$\begin{aligned} A = \{0, -24, 128, 242048\}; \\ B = \{9, 0, -24\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тоді:

$$A \cup B = \{0, -24, 128, 242048, 9\}. \tag{6}$$

Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{2,4,6\}$. Знайти:

a) Суму C:

$$C = A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}; \tag{7}$$

b) різницю R:

$$R = A \setminus B = \{1,3,5,7\}; \tag{8}$$

c) Переріз P множин A і B:

$$P = A \cap B = \{2,4,6\}. \tag{9}$$

12. Користуючись кругами Ейлера, довести рівності:

a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

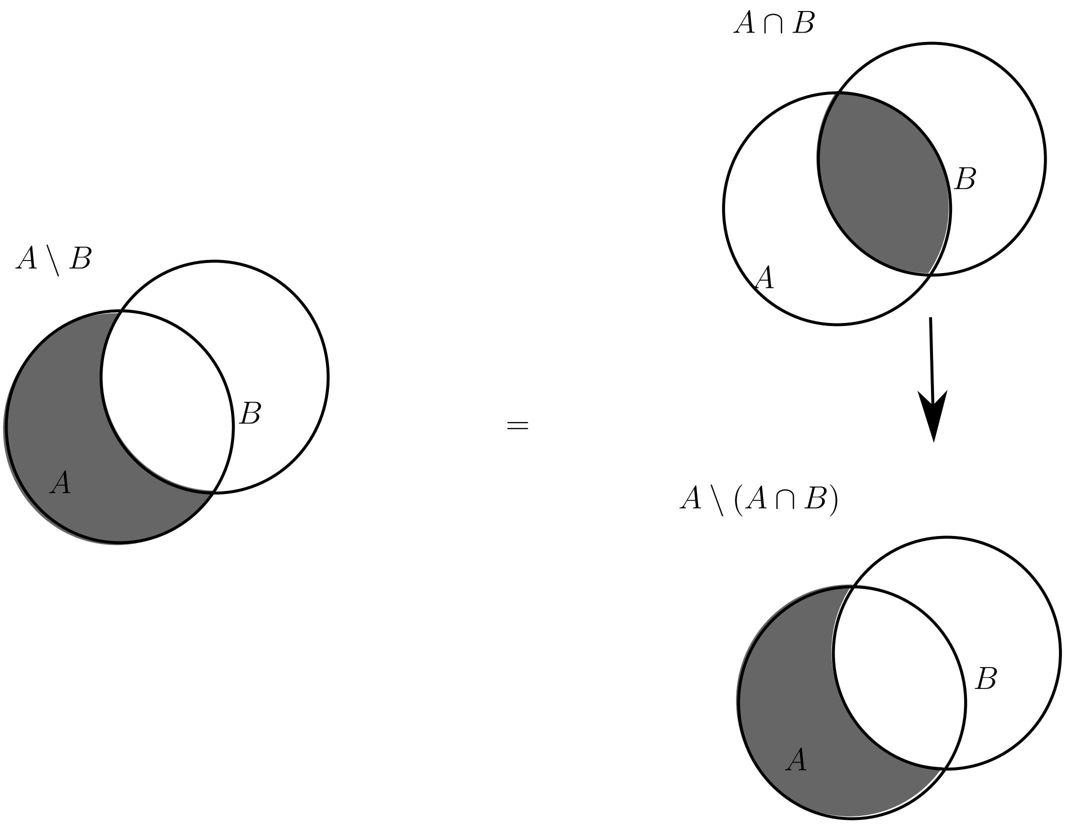


Рис. 1: $A\setminus = A \setminus (A \cap B)$

b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$

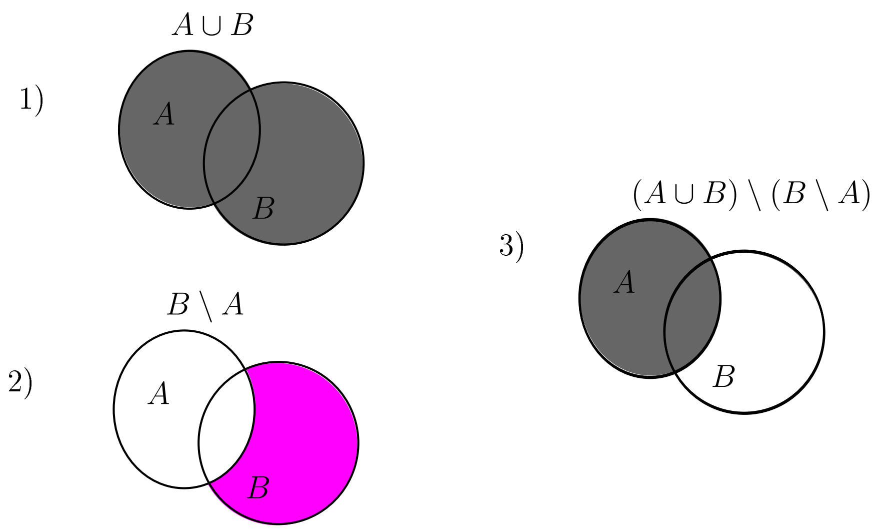


Рис. 2: $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$

17. Задані множини $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Побудувати множини:

a)
$$A \cap B = \{a, b, c, d, e\}; \quad (10)$$

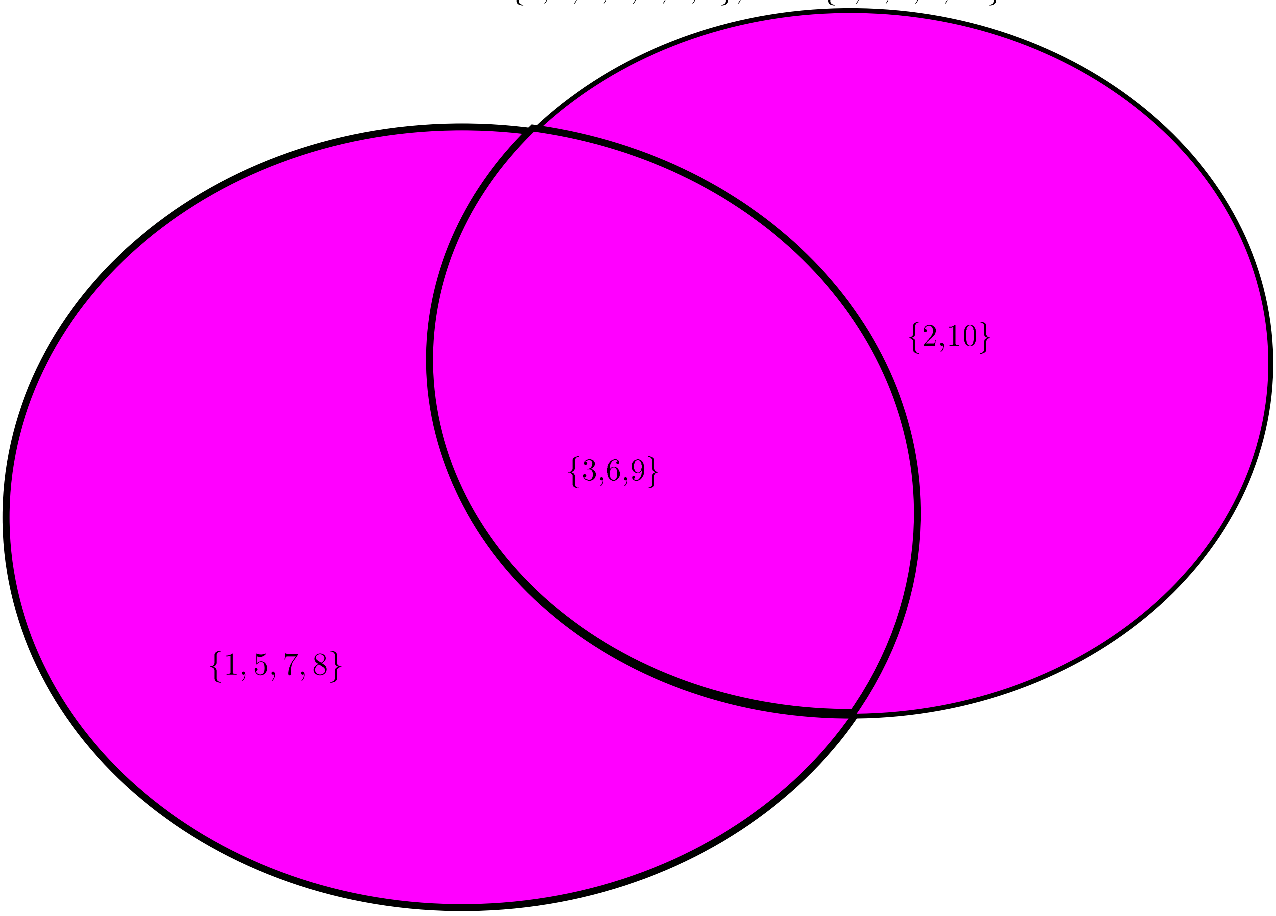
b)
$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}; \quad (11)$$

c)
$$A \setminus B = \emptyset; \quad (12)$$

d)
$$B \setminus A = \{f, g, h\}. \quad (13)$$

18. Знайти множини $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, якщо $A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B \setminus A = \{2, 10\}, B \cap A = \{3, 6, 9\}$.

Рис. 3: $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 6, 9, 10\}$



24. Чи можна стверджувати, що $A = B$, якщо $\boldsymbol{A, B, C}$ - множини, для яких виконані такі рівності:

a) $A \cup C = B \cup C$

Розглянемо дві множини:

$$\begin{aligned} P_1 = \{p_1 | p_1 \in A \cup C\}, \\ P_2 = \{p_2 | p_2 \in B \cup C\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Елементи множини P_1 включають в себе всі елементи $a \in A$ та всі $c \in C$; елементи P_2 включають в себе всі елементи $b \in B$ та $c \in C$. Тоді множина $P_1 \setminus C$ міститиме в собі виклллючно $a \in A$, множина $P_2 \setminus C$ міститиме $b \in B$. Покажемо, що $\forall A, B, C : A \cup C = B \cup C \leftrightarrow A = B$:

1) Достатність:

$$\begin{aligned} P_1 = P_2, \\ P_1 \setminus C = P_2 \setminus C, \\ (A \cup C) \setminus C = (B \cup C) \setminus C, \\ A = B. \end{aligned} \tag{15}$$

2) Необхідність:

$$\begin{aligned} \sqsupseteq A \neq B, \\ (A \cup C) \setminus C \neq (B \cup C) \setminus C, \\ A \cup C \neq B \cup C, \\ P_1 \neq P_2 - \text{ отримали протиріччя, адже за умовою } P_1 = P_2. \blacktriangle \end{aligned} \tag{16}$$

b) $A \cap C = B \cap C$.

По аналогії з минулим прикладом, розглянемо множини:

$$\begin{aligned} P_1 = \{p_1 | p_1 \in A \cap C\}, \\ P_2 = \{p_2 | p_2 \in B \cap C\}. \end{aligned} \tag{17}$$

На цей раз замість (душних) елегантних математичних викладок поміркуємо логічно.

В минулому прикладі кінцева множина P_i вбирала в себе ВСІ елементи початкових множин. А дві множини можуть бути рівними тоді і тільки тоді, коли всі їх елементи рівні між собою.

У випадку, коли мимаємо справу з перекриттям двох множин, результуюча множина $P = A \cap C$ включає в себе лише ті елементи, що спільні і для A і для C. Таким чином, рівність двох перекриттів $P_1 = P_2$ не гарантує рівності A та B, адже ці множини можуть мати в собі елементи, що не увішли до перекриття і знання множин P_1, P_2, C не достатньо, аби перевірити рівність $A = B$.

c) $A \oplus C = B \oplus B$.

Розглянемо множини:

$$\begin{aligned} P_1 = A \oplus C = \{p_1 | (p_1 \in A \cup C) \wedge (p_1 \notin A \cap C)\}, \\ P_2 = B \oplus C = \{p_2 | (p_2 \in B \cup C) \wedge (p_2 \notin B \cap C)\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Представимо доведення у вигляді таблиці, де 1 позначатимемо випадки, коли $x \in X$, а 0 - випадки $x \notin X$.

Табл. 1: Доведення рівності $A = B$ якщо $A \oplus C = B \oplus C$.

A	B	C	$A \cup C$	$A \cap C$	$B \cup C$	$B \cap C$	P_1	P_2
1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1

При цьому слід звернути увагу, що в формулі $P = \{p_1 | (p_1 \in A \cup C) \wedge (p_1 \notin A \cap C)\}$ другий член $(p_1 \notin A \cap C)$ можна представити як $(p_1 \in -(A \cap C))$, а в таблиці приведені значення для $(p_1 \in A \cap C)$. Тобто при визначенні P в колонках з оператором «$\cap$» значення треба брати протилежні наведенимю

В результаті отримуємо, що для однакових логічних значень $x \in A$ та $x \in B$ отримуємо однакові значення $P_1 = P_2$, а отже $A = B$▲

32. Нехай $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X = \{1, 5\}$, $Y = \{1, 2, 4\}$, $Z = \{2, 5\}$. Знайти множини:

$a)\, X \cap \overline{Y}$

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= \{3, 5\}, \\ X \cap \overline{Y} &= \{5\}; \end{aligned} \tag{19}$$

$b)\, (X \cap Z) \cup \overline{Y}$

$$\begin{aligned} X \cap Z &= \{5\}, \\ \{5\} \cup \overline{Y} &= \{3, 5\}; \end{aligned} \tag{20}$$

$c)\, X \cup (Y \cap Z)$

$$\begin{aligned} Y \cap Z &= \{2\}, \\ X \cup \{2\} &= \{1, 2, 5\}; \end{aligned} \tag{21}$$

$d)\, (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{1, 2, 4, 5\}, \\ X \cup Z &= \{1, 2, 5\}, \\ \{1, 2, 4, 5\} \cap \{1, 2, 5\} &= \{1, 2, 5\}; \end{aligned} \tag{22}$$

$e)\, \overline{X \cup Y}$

$$\begin{aligned} \overline{X \cup Y} &= \overline{X} \cap \overline{Y}, \\ \overline{X} \cap \overline{Y} &= \{2, 3, 4\} \cap \{3, 5\} = \{3\}; \end{aligned} \tag{23}$$

$f)\, \overline{X} \cap \overline{Y}$ - див. поп. завд.
$g)\, \overline{X \cap Y}$

$$\begin{aligned} \overline{X \cap Y} &= \overline{X} \cup \overline{Y}, \\ \{2, 3, 4\} \cup \{3, 5\} &= \{2, 3, 4, 5\}; \end{aligned} \tag{24}$$

$h)\, (X \cup Y) \cup Z$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup Y \cup Z = U = \{1, 2, 3, 4, 5, \}; \tag{25}$$

$i)\, X \cup (Y \cup Z)$ - див. поп. завд.
$j) X \setminus Z$

$$X \setminus Z = \{1\}; \tag{26}$$

$k)$ $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$

$$\begin{aligned} X \setminus Z &= \{1\}, \\ Y \setminus Z &= \{1, 4\}, \\ \{1\} \cup \{1, 4\} &= \{1, 4\}. \end{aligned} \tag{27}$$

38. Спростити вирази:

$a)$ $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B$

$$\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B \cup B = \overline{A} \cup B; \tag{28}$$

$b)$ $\overline{\overline{\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})} \cup (A \cup B)}$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})} \cup (A \cup B)} = \overline{\overline{(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})} \cup (A \cup B)} = \overline{(A \cup B) \cup (A \cap B) \cup (A \cup B)} = \\ = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A} \cap \overline{B}; \end{aligned} \tag{29}$$

$c)$ $\overline{\overline{(A \cup \overline{B})} \cup \overline{(\overline{A} \cup B)} \cap (A \cup B)}$

$$\overline{\overline{(A \cup \overline{B})} \cup \overline{(\overline{A} \cup B)} \cap (A \cup B)} = \overline{(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cap (A \cup B)} = (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}); \tag{30}$$

$d)$ $(\overline{A \setminus B} \setminus (B \cap C)) \setminus \overline{(\overline{C} \cup D)}$

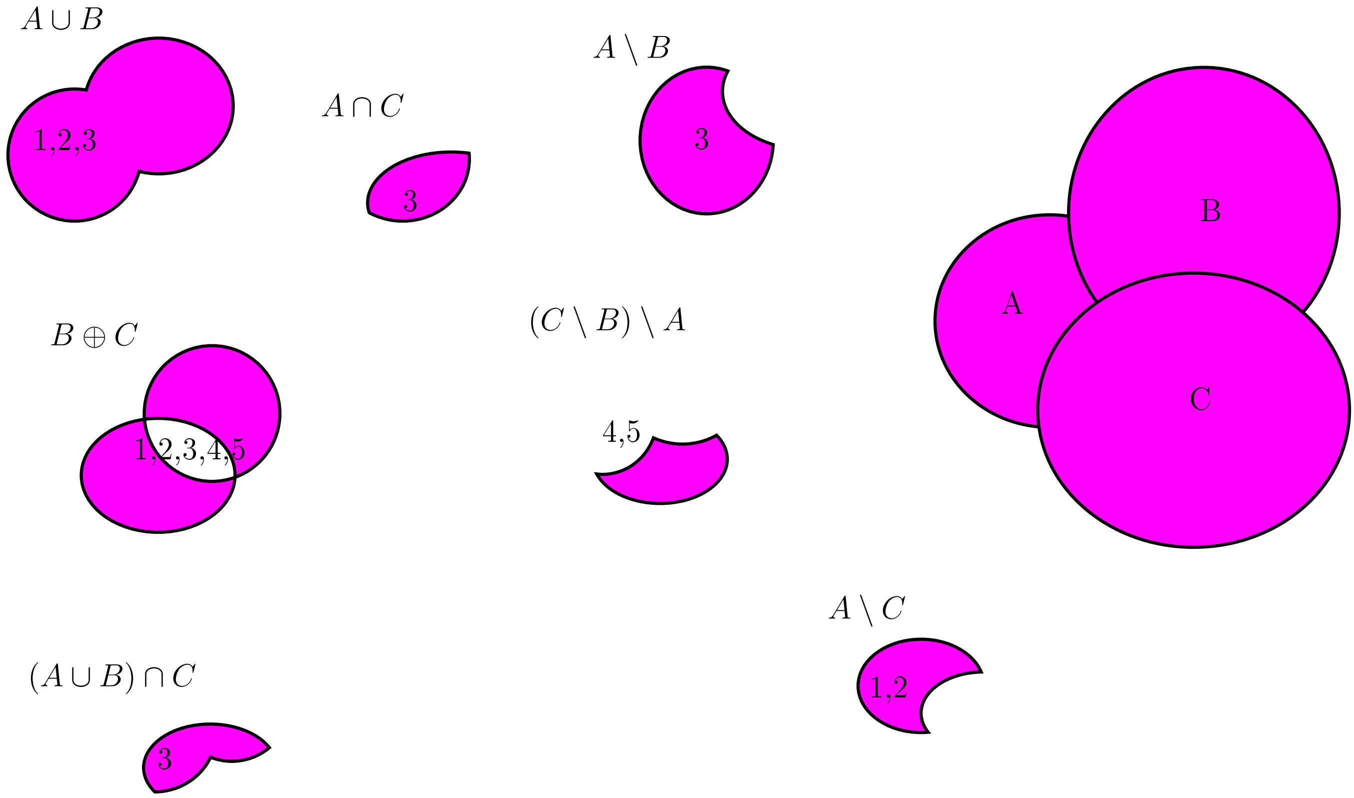
$$\begin{aligned} (\overline{A \setminus B} \setminus (B \cap C)) \setminus \overline{(\overline{C} \cup D)} = (\overline{A \cap \overline{B}} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) \cap (\overline{C} \cup D) = (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap (\overline{C} \cup D) = \\ = (\overline{A} \cup B) \cap \big[\big((\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{C}\big) \cup \big((\overline{B} \cup \overline{C}) \cap D\big)\big] = (\overline{A} \cup B) \cap \big[\overline{B} \cup \big((\overline{B} \cup \overline{C}) \cap D\big)\big]; \end{aligned} \tag{31}$$

$e)$ Кароч, заїбався я. Більше всього не люблю завдання на спрости чи доведи. Тим більше тут все просто і тривіально, а сидіти і вилуплятись на строку по $+100500$ годин в пошуках ще якоїсь схованої там формули, шоб зменшити кількість дій аж на одну - заморився. Вот наступне завдання цікаве, таке я люблю. Но спершу поїм))

44. Про множини *A*, *B*, *C* відомо, що $A \cup B = \{1,2,3\}$, $A \cap C = \{3\}$, $A \setminus B = \{3\}$, $B \oplus C = \{1,2,3,4,5\}$, $(C \setminus B) \setminus A = \{4,5\}$, $(A \cup B) \cap C = \{3\}$, $C \setminus C = \{1,2\}$**. Знайти множини *A*, *B* та *C*.**

Для наглядності зобразимо задані умови за допомогою діаграм Ейлера.

Рис. 4: Схематичне зображення умови до завд.44



Розпочнемо аналіз з наступних рівностей:

$$A \cup B = \{1,2,3\}, \tag{32}$$

$$A \setminus B = \{3\}, \tag{33}$$

$$A \setminus C = \{1,2\}. \tag{34}$$

З рівності (32) ми можемо припустити, що

$$A = \{1,2,3\}. \tag{35}$$

Тоді, з рівності (33) слідує:

$$B = \{1,2\}. \tag{36}$$

Рівність (34) служить підтвердженням твердженню (35) і дозволяє стверджувати, що в множині C точно немає елементів $\{1,2\}$, натомість присутній елемент $\{3\}$. Тоді умова на $B \oplus C$ дає:

$$B \oplus C = \{1,2\} \oplus C = \{1,2,3,4,5\} \Rightarrow C = \{3,4,5\} - \text{ опираючись на вище описані судження.} \tag{37}$$

Таким чином, ми отримали натупний набір множин:

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3\}, \\ B &= \{1,2\}, \\ C &= \{3,4,5\}. \end{aligned} \tag{38}$$

При цьому невикористаними залишились дві умови: $(C \setminus B) \setminus A = \{4,5\}$ та $(A \cup B) \cap C = \{3\}$. Якщо (38) дійсно є розв'язком задачі, то умови повинні виконуватись.

Перевіримо:

$$(C \setminus B) \setminus A = (\{3,4,5\} \setminus \{1,2\}) \setminus \{1,2,3\} = \{3,4,5\} \setminus \{1,2,3\} = \{4,5\}; \tag{39}$$

$$(A \cup B) \cap C = (\{1,2,3\} \cup \{1,2\}) \cap \{3,4,5\} = \{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}. \tag{40}$$

Отже, твердження (38) - дійсно є розв'язком даної задачі. Крім того, з (37) не важко помітити, що початкове припущення про перетин множин B та C (що продемонстровано на рис.4) виявилось хибним.

Рис. 5: Відповідь в діаграмах Ейлера до завд.44