Основи логіки

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

Табл. 1: $\big((p \to q) \wedge p\big) \vee (q \sim p)$:

p	q	$p \to q$	$\big((p \to q) \wedge p\big)$	$q \sim p$	$\big((p \to q) \wedge p\big) \vee (q \sim p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	T

Табл. 2: $\big((p \wedge q) \vee p\big) \sim (q \to p)$:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee p$	$q \to p$	$\big((p \wedge q) \vee p\big) \sim (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	F

Табл. 3: $\big((p \to q) \vee r\big) \sim (q \vee \bar{r})$:

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \vee r$	$\bar{r}$	$q \vee \bar{r}$	$\big((p \to q) \vee r\big) \sim (q \vee \bar{r})$
T	T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T	T

Табл. 4: $\big((p \vee \bar{q}) \vee r\big) \to (p \vee r)$:

p	q	r	$\bar{q}$	$p \vee \bar{q}$	$(p \vee \bar{q}) \vee r$	$p \vee r$	$\big((p \vee \bar{q}) \vee r\big) \to (p \vee r)$
T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	F

4. Побудовою таблиць істинності вияснити, чи є запереченням (може протиріччям?) висловлювання:

протиріччя - завжди отримуємо F

Табл. 5: $\big((p \to q) \wedge (q \wedge r)\big) \sim (p \to \bar{r})$

p	q	r	$p \to q$	$q \wedge r$	$(p \to q) \wedge (q \wedge r)$	$\bar{r}$	$p \to \bar{r}$	$\big((p \to q) \wedge (q \wedge r)\big) \sim (p \to \bar{r})$
T	T	T	T	T	T	F	F	F
T	T	F	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	F	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	F	T	F
F	F	F	T	F	F	T	T	F

Формула не є протиріччям

Табл. 6: $\big((p \to \bar{q}) \wedge q\big) \sim (\bar{p} \vee q)$

p	q	r	$\bar{q}$	$p \to \bar{q}$	$(p \to \bar{q}) \wedge q$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$\big((p \to \bar{q}) \wedge q\big) \sim (\bar{p} \vee q)$
T	T	T	F	F	F	F	T	F
T	T	F	F	F	F	F	T	F
T	F	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	F	T	T	F

Не є протиріччям

Табл. 7: $\big((p \vee q) \wedge (\bar{q} \to r)\big) \to p$

p	q	r	$p \vee q$	$\bar{q}$	$\bar{q} \to r$	$(p \vee q) \wedge (\bar{q} \to r)$	$\big((p \vee q) \wedge (\bar{q} \to r)\big) \to p$
T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	T	F	T	T	F
F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	F	F	T

Не є протиріччям

Табл. 8: $(p \wedge q) \wedge (\bar{p} \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$(p \wedge q) \wedge (\bar{p} \vee q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	F

Не є протиріччям

Табл. 9: $\Big(\big((\bar{p} \to \bar{r}) \to p\big) \wedge (p \vee r)\Big) \sim (p \wedge q)$

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{r}$	$\bar{p} \to \bar{r}$	$(\bar{p} \to \bar{r}) \to p$	$p \vee r$	$\big((\bar{p} \to \bar{r}) \to p\big) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge q$	$\Big(\big((\bar{p} \to \bar{r}) \to \big) \wedge (p \vee r)\Big) \sim (p \wedge q)$
T	T	T	F	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	F	F	F	F	T

Не є протиріччям

9. Які формули є еквівалентними до $p \to q$:

1. $(p \wedge \bar{q}) \to \bar{p}$;
2. $\bar{p} \vee q$;
3. $(p \wedge \bar{q}) \to F$;
4. $(p \vee \bar{q}) \to F$.

Спростимо вираз з умови: $p \to q \equiv \bar{p} \vee q$.
Тепер розглянемо кожен із варіантів:
1)
$$p \wedge \bar{q} \to \bar{p} \equiv \overline{(p \wedge \bar{q})} \vee \bar{p} \equiv \bar{p} \vee q \vee \bar{p} \equiv \bar{p} \vee q - \textbf{підходить}. \tag{1}$$

2) $\bar{p} \wedge q$ – **не підходить**.

3)
$$(p \wedge \bar{q}) \to F \equiv \bar{p} \vee q \vee F \equiv \bar{p} \vee q - \textbf{підходить}. \tag{2}$$

4) $(p \vee \bar{q}) \to F \equiv \bar{p} \wedge q$ – **не підходить**.

15. Довести, що формули еквівалентні

Табл. 10: $\big(p \wedge (q \oplus r)\big) \sim \big((p \vee q) \oplus (p \vee r)\big)$

p	q	r	$q \oplus r$	$p \wedge (q \oplus r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \oplus (p \vee r)$	$\big(p \wedge (q \oplus r)\big) \sim \big((p \vee q) \oplus (p \vee r)\big)$
T	T	T	F	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F	T

Формули не є еквівалентними.

Табл. 11: $p \to (q \wedge r) \sim (p \wedge q) \to (p \wedge r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \to (p \wedge r)$	$p \to (q \wedge r) \sim (p \wedge q) \to (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	T	F
T	F	F	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	T	T

Табл. 12: $p \to (q \vee r) \sim (p \to q) \vee (p \to r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \vee (p \to r)$	$p \to (q \vee r) \sim (p \to q) \vee (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

Формули не є еквівалентними.

Розглянемо вираз $p \to (q \vee r) \sim (p \to q) \vee (p \to r)$.
Спростимо ліву частину:

$$p \to (q \vee r) \equiv \bar{p} \vee q \vee r; \tag{3}$$

Спростимо праву частину:

$$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv \bar{p} \vee q \vee \bar{p} \vee r \equiv \left|\bar{p} \vee \bar{p} = \bar{p}\right| \equiv \bar{p} \vee q \vee r. \tag{4}$$

Ліва частина еквівалентна правій, а отже - вирази еквівалентні.

23 Предметною областю кожної змінної $P(x, y)$ є множина $\{1, 2, 3\}$. Записати висловлювання логічниз зв'язок кон'юкції та диз'юнкції

не впевнений, шо правильно викупив, шо треба робити в завданнях 23-33

а):

$$\exists x P(x, 3) \equiv P(1, 3) \vee P(2, 3) \vee P(3, 3); \tag{5}$$

б):

$$\forall y P(1, y) \equiv P(1, 1) \wedge P(1, 2) \wedge P(1, 3); \tag{6}$$

в):

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3) \wedge P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3) \wedge P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3); \tag{7}$$

г):

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3) \vee P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3) \vee P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3); \tag{8}$$

взагалі д, але якого хера всі пропускають букву ґ? Вона є в укр алфавіті, так юзайте її, патріоти їбані!

$$\exists x \forall y P(x, y) \equiv \big(P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3)\big) \vee \big(P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3)\big) \vee \big(P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3)\big); \tag{9}$$

е) але по норм нумерації - д):

$$\forall y \exists x P(x, y) \equiv \big(P(1,1) \vee P(2,1) \vee P(3,1)\big) \wedge \big(P(1,2) \vee P(2,2) \vee P(3,2)\big) \wedge \big(P(1,3) \vee P(2,3) P(3,3)\big). \tag{10}$$

27. Змінні x та y набувають значень із множини $\{0, 1, 2\}$. Записати формулу, еквівалентну до висловлювань, без використання кванторів:

1):

$$\forall x \exists y P(x) \wedge Q(y) \equiv \Big| \text{тут взагалі для простоти ввести б новий предикат} P(x) \wedge Q(y) = R(x,y)$$
$$\text{і задача зводиться до попередньої, ну да ладно} \Big| \equiv \Big[\big(P(0) \wedge Q(0)\big) \vee \big(P(0) \wedge Q(1)\big) \vee \big(P(0) \wedge Q(2)\big)\Big] \wedge$$
$$\wedge \Big[\big(P(1) \wedge Q(0)\big) \vee \big(P(1) \wedge Q(1)\big) \vee \big(P(1) \wedge Q(2)\big)\Big] \wedge \Big[\big(P(2) \wedge Q(0)\big) \vee \big(P(2) \wedge Q(1)\big) \vee \big(P(2) \wedge Q(2)\big)\Big]; \tag{11}$$

2) - абсолютно та ж фігня, тільки кон і диз місцями міняються. Лінь набирати, тим більш шо не впевнений, шо взагалі правильно

3):

$$\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \equiv \big(P(0) \vee P(1) \vee P(2)\big) \wedge \big(Q(0) \vee Q(1) \vee Q(2)\big); \tag{12}$$

4):

$$\forall x \forall y Q(y) \to P(x) \equiv \exists x \exists y \bar{Q}(y) \vee P(x) \equiv \Big[\big(\bar{Q}(0) \vee P(0)\big) \vee \big(\bar{Q}(0) \vee P(1)\big) \vee \big(\bar{Q}(0) \vee P(2)\big)\Big]$$
$$\vee \Big[\big(\bar{Q}(1) \vee P(0)\big) \vee \big(\bar{Q}(1) \vee P(1)\big) \vee \big(\bar{Q}(1) \vee P(2)\big)\Big] \vee \Big[\big(\bar{Q}(2) \vee P(0)\big) \vee \big(\bar{Q}(2) \vee P(1)\big) \vee \big(\bar{Q}(2) \vee P(2)\big)\Big]. \tag{13}$$

33. Змінні x та y набувають значень із множини $\{1, 2, 3\}$. Записати формулу без використання кванторів, еквівалентну до висловлювання $\exists x \forall y P(x) \vee Q(y)$.

Один в один завдання 33.2, тільки множин чисел трохи інша.

35. Записати формулу без використання квантору існування, еквівалентну до висловлювання $\exists x \forall y P(x) \vee Q(y)$.

$$\exists x \forall y P(x) \vee Q(y) \equiv \forall y Q(y) \vee \big(\bigvee_{i=1}^{n} P(x_n)\big), \qquad \text{де} \bigvee_{i=1}^{n} P(x_n) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee etc. \quad (14)$$