

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра математической физики

Лытов Дмитрий Андреевич

**Применение Байесовских методов машинного обучения для решения обратной задачи модели** **Лотки — Вольтерры**

КУРСОВАЯ РАБОТА

**Научный руководитель:**

к.ф-м.н. С.Б.Березин

Москва, 2019

Оглавление

[Введение 3](#_Toc9927750)

[Основная часть 4](#_Toc9927751)

[Модель Лотки – Вольтерры 4](#_Toc9927752)

[Описание данных 5](#_Toc9927753)

[Постановка задачи 5](#_Toc9927754)

[Возможные варианты решения 5](#_Toc9927755)

[Решение 7](#_Toc9927756)

[Эксперимент 9](#_Toc9927757)

[Оценка 9](#_Toc9927758)

[Выводы 10](#_Toc9927759)

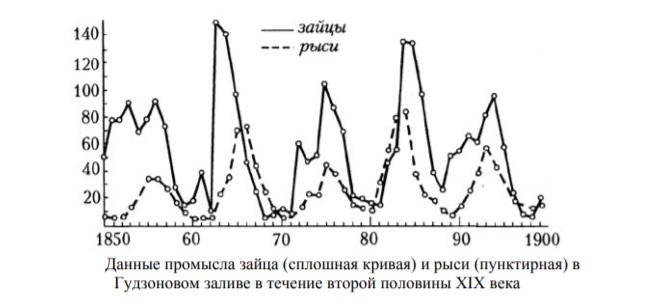
[Заключение 10](#_Toc9927760)

[Список литературы 12](#_Toc9927761)

# Введение

*Система «хищник — жертва» — сложная экосистема, для которой реализованы долговременные отношения между* [*видами*](https://ru.wikipedia.org/wiki/Биологический_вид) *хищника и жертвы.*

*На (рис. 1) приведены примеры реальной динамики численности популяции зайцев* и *рысей [1]*

Рис. 1

*Одна из простейших математических моделей для описания динамики численности популяций -* ***Модель Лотки — Вольтерры***. В ней полагаются известными некоторые параметры, характеризующие регуляцию численности популяций, что позволяет смоделировать их динамику. Но что, если наша задача в обратном? Допустим, что уже имеем измерения численности популяций за последние несколько лет наблюдений за видами, но нам хотелось бы по этим данным найти исходные параметры – числовые значения, характеризующие регуляцию их численности?

*Цель работы:*

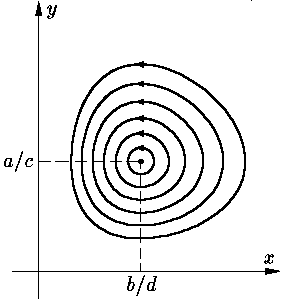
*1. По данным измерениям численности популяций видов хищников и жертв приблизить исходные параметры модели Лотки – Вольтерры.*

*2. Реализовать алгоритм, решающий данную задачу с помощью Байесовских методов машинного обучения и выяснить, насколько точен этот подход в сравнении с другими известными моделями решения обратной задачи для модели Лотки – Вольтерры.*

# Основная часть

## Модель Лотки – Вольтерры

Решением на фазовой плоскости является семейство замкнутых траекторий с центром в равновесной точке:

Координаты равновесной точки находятся [2]

## 

## Описание данных

Данные о численности популяций видов будет моделировать самостоятельно. Для этого был реализован алгоритм для прямого решения поставленной задачи с начальными условиями После того, как я передаю ему на вход некоторые исходные параметры, он моделирует динамику популяций (в виде двух непрерывных функций от времени), и возвращает случайным образом сделанные измерения (берет точки на графике /\*каком\*/ с некоторыми отклонениями, соответствующими погрешности измерения):

## Постановка задачи

На основе данных (2) приблизить исходные параметры системы .

Для оценки точности работы алгоритма используем функционал .

Для визуализации будем строить решение прямой задачи с найденными параметрами и оценивать схожесть с решением задачи с исходными параметрами.

## Возможные варианты решения

Для решения поставленной задачи я использовал Байесовские методы машинного обучения. Но при обучении использовал две различные модели:

1. Разностная модель.

Пусть имеется выборка из n точек , тогда имеем

Аналогично для

1. Модель с использованием первого интеграла

Найдем первый интеграл системы (1):

По определению, значение функции слева принимает одинаковое значение на всех точках наперед взятой фазовой траектории. Воспользуемся этим, чтобы описать модель.

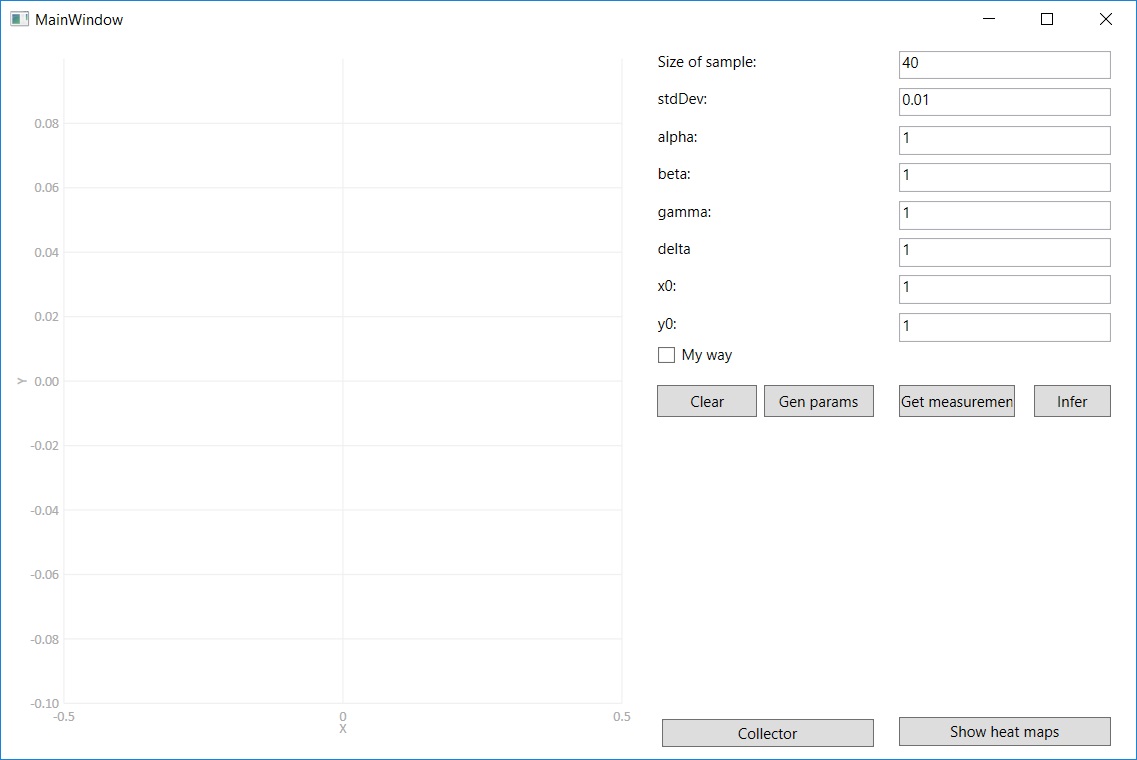
Пусть имеется выборка из n точек , тогда имеем

После обучения получаем значения . Дополнительно, предоставляет данные о конкретной траектории, входные данные не требуют временных отметок, но и параметры получены с точностью до мультипликативной константы (из-за отсутствия данных о времени)

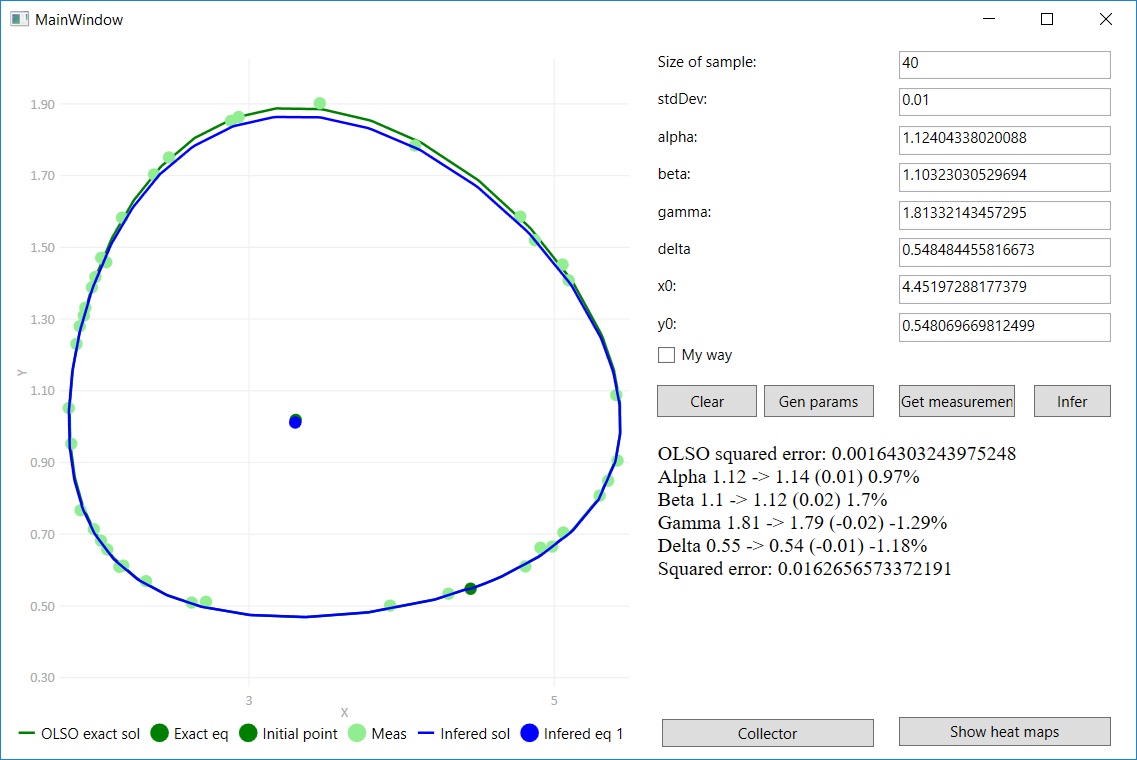
## Решение

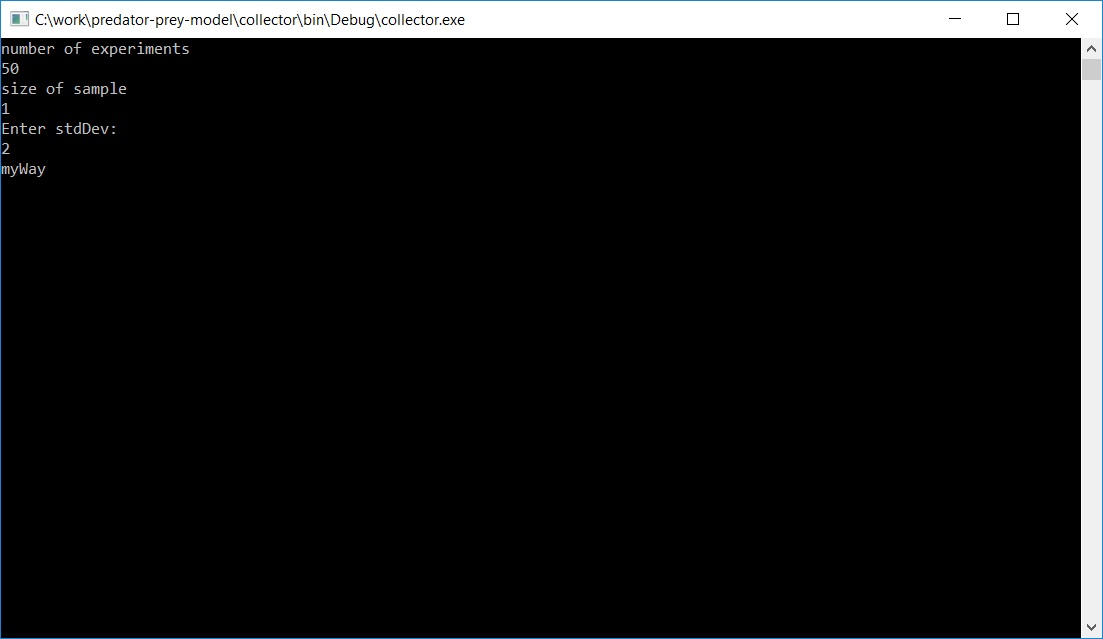
Для описания модели и ее обучения я выбрал программный пакет *Microsoft Infer .NET* – библиотеку, реализующую Байесовские методы машинного обучения, разработанную Microsoft Research. В качестве языка программирования и среды разработки я выбрал C# и Microsoft Visual Studio 2015. Для отрисовки графиков использовал пакет LiveCharts.

В составе решения были написаны 5 проектов:

1. User Interface – пользовательский интерфейс, обеспечивающий возможность использования функционала для пользователя и просмотр графиков;

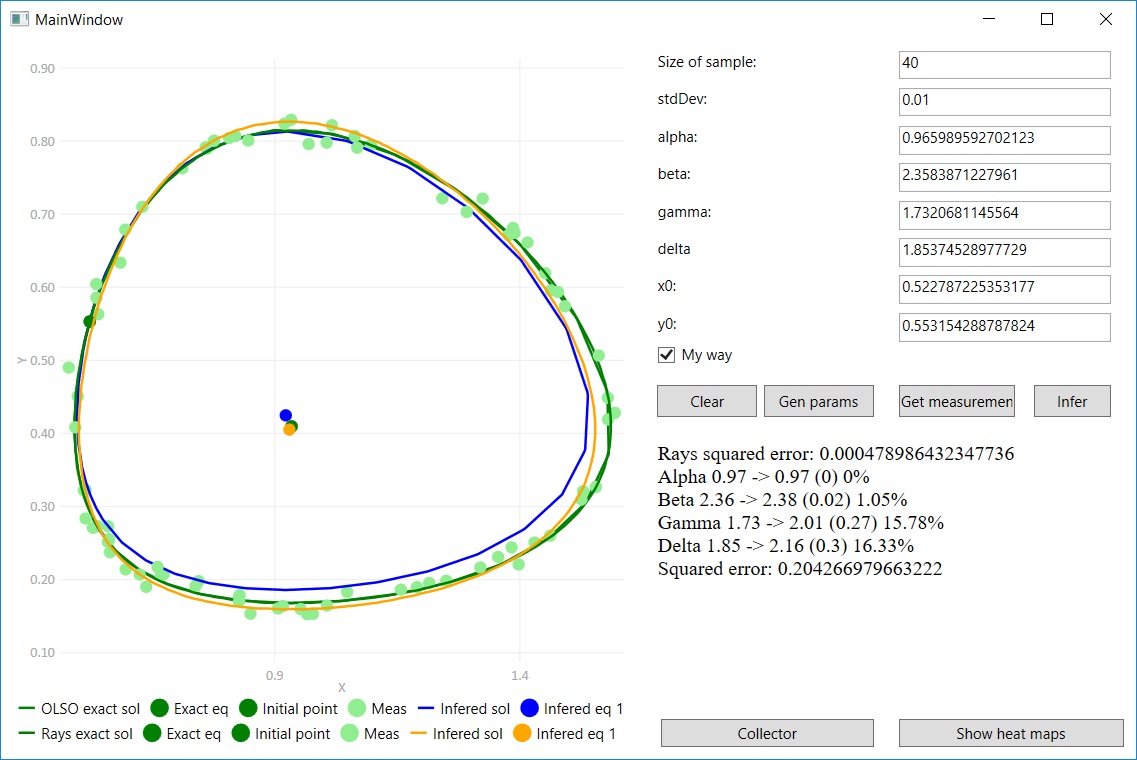
Пользователю предлагается пронаблюдать эксперимент. Ввести исходные параметры системы или сгенерировать их случайно, решить прямую задачу, снять измерения с выбранной погрешностью, решить обратную задачу одним из двух способов. После чего предлагается оценить визуально сходство решений для исходных и приближенных параметров, а также оценить точность их нахождения:



1. Solver – проект, отвечающий за решение прямой дифференциальной задачи;
2. Randomizer – проект, предоставляющий случайные исходные параметры для экспериментов;
3. Predictor – проект, отвечающий за решение обратной задачи;
4. Collector – проект, запускающий серию экспериментов в автоматическом режиме и собирающий их результаты в выходной файл;

## Пример работы программы

Сгенерируем случайные параметры и проведем эксперимент.



Темно-зеленым обозначена исходная траектория, её начальная и равновесная точки.

Светло-зеленым обозначены сделанные по ней измерения.

Синим обозначены траектория и её равновесная точка, полученные первым способом.

Желтым обозначены траектория и её равновесная точка, полученные вторым способом.

## Эксперимент

Была проведена серия экспериментов, в ходе которых были получены данные о работе каждого из двух методов для выборки из 5 точек и погрешности измерения с нормальным отклонением при и для выборки из 50 точек и погрешности измерения при . Для каждой комбинации было проведено 50 экспериментов. На тепловой карте цвет подобран в соответствии с медианой ошибки.

## Оценка

Adsfasfas

# Выводы

ыфвафыва

# Заключение

фывафыва

# Список литературы

1. «Хищник и жертва» К. Богданов
2. «Очерки по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» Дифференциальные уравнения в биологии, химии, медицине

15-20