Прямая на плоскости

Содержание

§1. Аналитическая геометрия

Основной объект любой геометрической задачи — точка. Наибольший интерес представляют множества точек, объединенные некоторым свойством. Такие множества будем называть **геометрическими местами точек**. Перечислим некоторые из них:

(а) Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух заданных точек, определяет **прямую** в $\mathbb{R}^2$.

(б) Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух заданных точек, определяет **плоскость** в $\mathbb{R}^3$.

(в) Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех заданных точек, не лежащих на одной прямой, определяет **прямую** в $\mathbb{R}^3$.

Задачи аналитической геометрии

(а) Описание геометрического места точек аналитическим выражением или их совокупностью;

(б) Нахождение ГМТ, удовлетворяющих заданным условиям;

(в) Нахождение пересечения ГМТ;

(г) Отыскание и описание свойств ГМТ;

(д) Отыскание инвариантных (геометрических) свойств ГМТ;

(е) Преобразование систем координат и их аналитическое описание;

(ж) Преобразование уравнений ГМТ при преобразованиях координат.

§2. Общий подход к рассмотрению прямых и плоскостей

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ в случае плоскости и $n = 3$ в объемном геометрическом пространстве, а также зафиксируем подпространство $L \leqslant \mathbb{R}^n$. Напомним, что линейным многообразием M называлось подмножество линейного пространства, полученное путем "сдвига" какого-то линейного подпространства на вектор $\mathbf{r}_0$.

$$M = \mathbf{r}_0 + L \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \mathbf{r} \in M \quad \exists \mathbf{s} \in L : \quad \mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{s}$$

Опр. 2.1. Линейное подпространство L, по которому строится линейное многообразие M, называют **направляющим подпространством**.

В зависимости от соотношения между размерностью n геометрического пространства и размерностью $k = \dim L$ линейного подпространства $L \leqslant \mathbb{R}^n$ мы получаем различные примеры линейных многообразий в геометрических пространствах.

Возможны случаи:

- $n = 2$, $k = 1$: M — радиус-векторы, концы которых лежат на прямой в плоскости. При этом
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{s}, \tag{1}$$
где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор **опорной** точки этой прямой, а $\mathbf{s}$ — ненулевой вектор из направляющего подпространства, который также называют **направляющим вектором**.
- $n = 3$, $k = 1$: M — радиус-векторы, концы которых лежат на прямой в пространстве. При этом также как и в предыдущем случае
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{s}. \tag{2}$$
- $n = 3$, $k = 2$: M — радиус-векторы, концы которых лежат на плоскости в пространстве. При этом
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \tag{3}$$
где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор **опорной** точки этой плоскости, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — линейно независимые (неколлинеарные) векторы в пространстве, линейная оболочка которых образует линейное подпространство L.

NtB 2.1. Введение точечного базиса позволяет построить соответствие между точками прямой или плоскости и радиус-векторами $\mathbf{r}$ в указанных выше уравнениях.

Опр. 2.2. Уравнения, описывающие прямые (на плоскости или в пространстве) и плоскости (в пространстве) при помощи радиус-векторов опорных точек и векторов направляющего подпространства, называются **векторными параметрическими уравнениями** прямых и плоскостей.

§3. Векторные уравнения прямых

Из векторного параметрического уравнения прямой (на плоскости или в пространстве) можно получить также **векторное уравнение прямой, проходящей через две точки**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} - t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \mathbf{s}$ определяет направляющий вектор прямой.

Опр. 3.1. Нормалью $\mathbf{n}$ к прямой на плоскости называется произвольный вектор, который ортогонален любому вектору, коллинеарному с данной прямой.

Опр. 3.2. Нормальным векторным уравнением прямой на плоскости называют уравнение вида

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = -C$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к прямой, а C — некоторая константа.

Данное уравнение может быть получено при помощи скалярного умножения векторного параметрического уравнения на вектор нормали к данной прямой.

NtB 3.1. Для прямой в пространстве подобное уравнение, как мы увидим далее, не будет иметь смысла.

§4. Взаимное расположение прямых

Прямые на плоскости

Пусть прямые на плоскости заданы векторными параметрическими (или нормальными) векторными уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{s}_1 \qquad & (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1) \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{s}_2 \qquad & (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) &= (\mathbf{r}_2, \mathbf{n}_2) \end{aligned}$$

Возможно несколько случаев:

(а) Для параллельных прямых выполняются следующие равносильные условия

$$(1) \quad \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{n}_1 = \alpha\mathbf{n}_2$$

$$(2) \quad \mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{s}_1 = \alpha\mathbf{s}_2$$

$$(3) \quad \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{s}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_2) = 0$$

(б) При совпадении прямых (частный случай параллельности) дополнительно выполняется

$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \parallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

(в) Пересечение прямых гарантирует выполнение следующего условия

$$(\mathbf{n_1}, \mathbf{s}_2) \neq 0, \qquad\qquad (\mathbf{n_2}, \mathbf{s}_1) \neq 0$$

(г) В случае ортогональных прямых (частный случай пересекающихся прямых) можно утверждать, что

$$\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{s}_2, \qquad\qquad \mathbf{n}_2 \parallel \mathbf{s}_1$$

Прямые в пространстве

Пусть прямые в пространстве заданы векторными параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{s}_1 \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{s}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Возможно несколько случаев:

(а) Прямые параллельны

$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{s}_1 = \lambda \mathbf{s}_2 \tag{5}$$

(б) Прямые совпадают

$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \parallel (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{6}$$

(в) Прямые пересекаются

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = 0 \\ \mathbf{s}_1 \neq \lambda \mathbf{s}_2 \end{cases} \tag{7}$$

(г) Прямые скрещиваются

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \neq 0 \tag{8}$$

Последние свойства следуют из естественного предположения, что если прямые пересекаются, то они лежат в одной плоскости, а следовательно векторы $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ являются компланарными. В случае скрещивающихся прямых такую плоскость провести невозможно, а значит условие некомпланарности этой тройки векторов является критерием такого расположения прямых.

§5. Плоскость в пространстве

Опр. 5.1. Вектором нормали $\mathbf{n}$ к плоскости называется любой вектор, ортогональный этой плоскости.

NtB 5.1. Если известны два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, принадлежащие этой плоскости, то вектор нормали может быть естественным образом найден как результат векторного умножения данных векторов:

$$\mathbf{n} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \tag{9}$$

Определим ряд векторных уравнений помимо векторного параметрического уравнения, позволяющие задать плоскость в пространстве:

(а) Нормальное уравнение плоскости в пространстве:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = -D$$

(б) Уравнение, полученное из условия компланарности:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \tag{10}$$

Действительно, для точки, принадлежащей плоскости, выражение $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ также определяет вектор, лежащий в ней, а значит он будет компланарным в системе с парой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

§6. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Пусть плоскости заданы векторными параметрическими (или нормальными) векторными уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \beta_1 \mathbf{b}_1 \qquad & (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1) = -D_1 \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \beta_2 \mathbf{b}_2 \qquad & (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = (\mathbf{r}_2, \mathbf{n}_2) = -D_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Возможно несколько случаев:

(а) Параллельность плоскостей

$$\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2 \tag{12}$$

(б) Совпадение плоскостей

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2 \\ D_1 = \lambda D_2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0 \tag{13}$$

(в) Пересечение плоскостей

$$\mathbf{n}_1 \neq \lambda \mathbf{n}_2 \qquad \text{или} \qquad [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] = \mathbf{s} \neq 0 \tag{14}$$

(г) Ортогональность плоскостей

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0 \tag{15}$$

§7. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть плоскость задана векторным нормальным уравнением, а прямая в пространстве — векторным параметрическим уравнением:

$$\begin{gathered}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = -D \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t \cdot \mathbf{s}\end{gathered} \tag{16}$$

Возможно несколько случаев:

(а) Прямая и плоскость параллельны

$$(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = 0 \tag{17}$$

(б) Прямая принадлежит плоскости (частный случай параллельности)

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{n}) = 0 \tag{18}$$

(в) Прямая пересекает плоскость

$$(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \neq 0 \tag{19}$$

Причем точка пересечения может быть определена через параметр t

$$t = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{n})}{(\mathbf{s}, \mathbf{n})} \tag{20}$$

(г) Прямая ортогональна плоскости (частный случай пересечения)

$$\mathbf{s} \parallel \mathbf{n} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{s} = \lambda \mathbf{n} \tag{21}$$