Координатные уравнения прямых и плоскостей

Содержание

§1. Прямая на плоскости: уравнения в координатах

Зафиксируем декартову прямоугольную систему координат, в которой обозначим

$$\mathbf{r} = (x, y) \qquad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) \qquad \mathbf{s} = (s_x, s_y) \qquad \mathbf{n} = (A, B)$$

Тогда можно получить следующие уравнения прямой на плоскости, выраженные как аналитические соотношения между координатами:

(а) Координатные параметрические уравнения прямой на плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot s_x \\ y = y_0 + t \cdot s_y \end{cases}$$

как следствие векторного параметрического уравнения прямой.

(б) Каноническое уравнение прямой на плоскости

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y},$$

которое может быть получено из системы координатных параметрических уравнений прямой на плоскости.

(в) Уравнения прямой, проходящей через две точки

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

полученные из векторного уравнения прямой, проходящей через две точки, а также канонического уравнения прямой на плоскости, если положить направляющий вектор как $\mathbf{s} = (s_x, s_y) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$.

(г) Общее уравнение прямой на плоскости

$$Ax + By + C = 0$$

и нормальное уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Оба уравнения могут быть получены из векторного нормального уравнения прямой на плоскости

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = -C$$

(д) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = kx + b,$$

где $k = s_y/s_x$ — угловой коэффициент, а $b = y_0 - kx_0$.

(е) Уравнение в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -C/A$ и $b = -C/B$ в обозначениях общего уравнения прямой на плоскости.

(ж) Уравнение с прицельным параметром

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta = p,$$

где $\cos\alpha = \frac{A}{|\mathbf{n}|}$, $\cos\beta = \frac{B}{|\mathbf{n}|}$ - направляющие косинусы прямой, а $p = (\mathbf{r}_0, \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}_0|})$ — прицельный параметр прямой.

§2. Плоскость в пространстве: уравнения в координатах

В зависимости от способа задания плоскости в пространстве необходимы следующие объекты:

(а) $\mathbf{n} = (A, B, C)$: вектор нормали к плоскости;

(б) $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$: пара неколлинеарных векторов, принадлежащих плоскости;

(в) $\mathbf{r}_{0,1,2} = (x_{0,1,2}, y_{0,1,2}, z_{0,1,2})$: радиус-векторы опорных точек плоскости.

Использование этих объектов в различных комбинациях позволяет описать несколько способов задания плоскости в пространстве при помощи аналитических соотношений на координаты точек плоскости:

(а) Параметрические уравнения плоскости в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_x + \beta b_x \\ y = y_0 + \alpha a_y + \beta b_y \\ z = z_0 + \alpha a_z + \beta b_z \end{cases} \tag{1}$$

(б) Уравнение, полученное из условия компланарности:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

(в) Общее уравнения плоскости в пространстве

$$Ax + By + Cy + D = 0 \tag{3}$$

и нормальное уравнение плоскости в пространстве

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \tag{4}$$

Оба уравнения, как и в случае прямой на плоскости, могут быть получены из векторного нормального уравнения плоскости в пространстве

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = -D$$

(г) Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{5}$$

где $a = -D/A$, $b = -D/B$ и $c = -D/C$ в обозначениях общего уравнения плоскости в пространстве.

(д) Уравнение плоскости с прицельным параметром

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma = p \tag{6}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы, имеющие тот же смысл, что и в уравнении прямой на плоскости, а p — прицельный параметр.

§3. Прямая в пространстве: уравнения в координатах

(а) Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \\ z = z_0 + ts_z \end{cases}, \tag{7}$$

где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — опорная точка прямой, а $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ — ее направляющий вектор.

(б) Каноническое уравнение прямой в пространстве

$$\frac{x-x_0}{s_x} = \frac{y-y_0}{s_y} = \frac{z-z_0}{s_z} \tag{8}$$

(в) Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{9}$$

(г) Прямая как пересечение плоскостей

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

NtB 3.1. В последнем представлении, вообще говоря, могут использоваться произвольные уравнения для плоскости, но обычно используется именно общее уравнение плоскости в пространстве, потому что совокупность таких уравнений образует систему линейных алгебраических уравнений.