Теория СЛАУ

Содержание

§1. Принадлежность вектора линейной оболочке

Пусть $V = \mathbb{F}^k$. Поставим вопрос о принадлежности столбца $b \in V$ линейной оболочке векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ из пространства V

$$b \stackrel{?}{=} x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n, \qquad x_i \in \mathbb{F}$$

Он приводит к СЛАУ $Ax = b$, состояшей из k уравнений и n неизвестных, где A — матрица коэффициентов размера $k \times n$. Пользуясь рассуждениями с предыдущих лекций данную систему можно однозначно описать расширенной матрицей $(A \,|\, b)$.

Теорема 1.1. ***(Кронекера-Капелли)*** *СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.*

Доказательство. Покажем переход $\Rightarrow$.
Пусть СЛАУ $Ax = b$ совместна. Тогда существуют такие числа x_i, что $b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$, то есть столбец b является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Следовательно, его добавление к системе столбцов матрицы A не меняет её ранга.

Покажем переход $\Leftarrow$.
Обратно, пусть $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \,|\, b)$. Выберем в матрице A какой-нибудь базисный минор, но он будет и базисным минором матрицы $\operatorname{rank}(A \,|\, b)$. По теореме о базисном миноре, последний столбец b будет линейной комбинацией базисных, то есть столбец свободных членов СЛАУ является линейной комбинацией столбцов матрицы коэффициентов. $\square$

NtB. Для решения произвольной СЛАУ используется ***метод Гаусса***. Приведём матрицу $(A \,|\, b)$ путём элементарных преобразований к ступенчатому виду $(\widetilde{A} \,|\, \widetilde{b})$. Ясно, что число ненулевых строк матрицы $\widetilde{A}$ равно $\operatorname{rank} A$, матрицы $(\widetilde{A} \,|\, \widetilde{b})$ — $\operatorname{rank}(A \,|\, b)$.

Возможны три случая:

- $\operatorname{rank}(A \mid b) = \operatorname{rank} A = n$. Тогда однозначно определяется x_n, потом x_{n-1} и так далее до x_1, то есть решение единственно — такие системы называются ***определёнными***.
- $\operatorname{rank}(A \mid b) = \operatorname{rank} A + 1$. То есть возникло уравнение $0x_1 + \ldots + 0x_n = c$, $c \neq 0$. Это означает, что СЛАУ ***несовместна***;
- $\operatorname{rank}(A \mid b) = \operatorname{rank} A < n$. В этом случае выберем переменные, коэффициенты при которых образуют базисный минор (эти переменные называются ***базисными***) и выразим их через оставшиеся переменные (они называются ***свободными***). Базисные переменные оказываются функциями от свободных — выражаются как линейные комбинации последних возможно с дополнительным ненулевым свободным членом. В таком случае имеется более одного решения, а сами системы называются ***неопределёнными***. Если поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то и решений бесконечно много.

§2. Однородные СЛАУ

Опр. 2.1. СЛАУ называется ***однородной***, если столбец свободных членов является нулевым вектором.

NtB. Часто мы будем использовать запись $Ax = 0$, предполагая, что в данном случае в правой части стоит нулевой вектор из $\mathbb{F}^k$

Лемма 2.1. *Множество $X = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = 0\}$ решений однородной СЛАУ образует линейное подпространство $X \leqslant \mathbb{F}^k$.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ векторов $x_1, x_2 \in X \subseteq \mathbb{F}^k$ являющихся решениями однородной СЛАУ. Тогда

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$$

□

NtB. Однородная СЛАУ $Ax = 0$ всегда совместна. Если число уравнений в ней меньше числа неизвестных, то она всегда имеет ненулевое решение.

Теорема 2.1. ***(о "степени неопределённости" однородной СЛАУ)*** *Размерность пространства X решений однородной СЛАУ с n неизвестными и матрицей коэффициентов A равна*

$$\dim X = n - \operatorname{rank} A$$

Доказательство. Решим СЛАУ $Ax = 0$ методом Гаусса.

Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — базисные переменны ($r = \operatorname{rank} A$). Выразим их через оставшиеся свободные:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} x_{r+1} + c_{12} x_{r+2} + \ldots + c_{1,n-r} x_n \\ \ldots = \ldots \\ x_r = c_{r1} x_{r+1} + c_{r2} x_{r+2} + \ldots + c_{r,n-r} x_n \end{cases}$$

Будем придавать последовательно свободным переменным следующие значения: одной — единица, остальным — нули. Получим при этом столбцы решений

$$\begin{cases} e_1 = (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{r1}, 1, 0, \dots, 0)^T \\ e_2 = (c_{12}, c_{22}, \dots, c_{r2}, 0, 1, \dots, 0)^T \\ \dots \\ e_{n-r} = (c_{1,n-r}, c_{2,n-r}, \dots, c_{r,n-r}, 0, 0, \dots, 1)^T \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что они линейной независимы, а в связи с тем, что они полностью порождают пространство решений СЛАУ, то мы можем сделать вывод, что это базис $X \leqslant \mathbb{F}^n$. $\square$

Опр. 2.2. Базис пространства решений однородной СЛАУ называется ***фундаментальной системой решений*** (ФСР).

Опр. 2.3. ***Общим решением однородной СЛАУ*** называется линейная комбинация векторов ФСР:

$$x_0 = \sum_{1}^{n-r} \lambda_i e_i, \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{F}$$

NtB. Вопрос: как задать подпространство с помощью однородной СЛАУ?

Теорема 2.2. *Пусть матрица B состоит из столбцов, образующих базис пространства решений СЛАУ $Ax = 0$. Тогда система $B^T x = 0$ задаёт линейную оболочку строк матрицы A.*

Доказательство. Поскольку каждый столбец матрицы B является решением линейной системы $Ax = 0$, имеет место матричное равенство $AB = 0$, которое эквивалентно равенству $B^T A^T = 0$. Если B^T интерпретировать как матрицу коэффициентов некоторой СЛАУ, все столбцы A^T (то есть строки A) будут ей удовлетворять.

Покажем, что столбец, не принадлежащий линейной оболочке столбцов матрицы A^T, не удовлетворяет СЛАУ $B^T y = 0$. Пусть в исходной СЛАУ n неизвестных, а $r = \operatorname{rank} A$. Тогда $\operatorname{rank} B^T = \operatorname{rank} B = n - r$, то есть СЛАУ $B^T y = 0$ имеет $n - (n - r)$ линейно независимых решений. Поскольку $\operatorname{rank} A = r$, это означает, что систем $B^T y = 0$ удовлетворяет лишь линейная оболочка строк матрицы A. $\square$

NtB. Проще, однако, искать нужную систему не непосредственно по теореме, а путём элементарных преобразований. Попробуйте сами придумать необходимый алгоритм.

§3. Неоднородные СЛАУ

Теорема 3.1. ***(о структуре решения СЛАУ)*** *Общее решение неоднородной СЛАУ вида $Ax = b$ является суммой общего решения однородной x_0 и произвольного частного решения $\widetilde{x}$ неоднородной:*

$$x = \widetilde{x} + x_0 = \widetilde{x} + \sum_{1}^{n-r} \lambda_i e_i, \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{F},$$

где $Ax_0 = 0$ и $A\widetilde{x} = b$.

Доказательство. Рассмотрим данное представление:

$$A(\widetilde{x} + x_0) = A\widetilde{x} + Ax_0 = b + 0 = b$$

Обратно, пусть $\widetilde{x}$ — произвольное решение $A\widetilde{x} = b$, тогда $x - \widetilde{x}$ — решение соответствующей однородной системы, т.к.

$$A(x - \widetilde{x}) = Ab - Ab = 0$$

Следовательно, x_0 всегда принадлежит общему решению $Ax = 0$. □

Теорема 3.2. ***(альтернатива Фредгольма)*** *Если в СЛАУ $Ax = b$ число уравнений равно числу неизвестных, то*

- *либо она имеет единственное решение при любых значениях правой части,*
- *либо однородная СЛАУ $Ax = 0$ обладает ненулевым решение.*

Доказательство. Просто суммирует то, что говорилось до этого. □

NtB. Неоднородная СЛАУ описывает линейное многообразие. Соответственно, возникает вопрос, можно ли задать произвольное линейное многообразие с помощью СЛАУ и как это сделать.

Теорема 3.3. *Пусть U — подпространство в F^n, $L = x_0 + U$ — линейное многообразие. Тогда существует СЛАУ $Ax = b$, состоящая из $n - \dim U$ линейных уравнений, множество решений которой совпадает с L.*

Доказательство. Доказательство следует из возможности задать однородной СЛАУ подпространство и структуры решения СЛАУ. □