Общие уравнения кривых 2-го порядка

Содержание

§1. Полярные уравнения

Начнем рассмотрение с эллипса.

Лемма 1.1. *Фокальные радиусы $r_{1,2}$ точки $M(x,y)$ эллипса в канонической системе координат могут быть найдены как*

$$r_{1,2} = a \pm \varepsilon x \tag{1}$$

Доказательство. Фокальные радиусы могут быть найдены по определению как расстояние от точки M до фокусов F_1 и F_2 соответственно

$$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} \tag{2}$$

При этом координаты точки связывает каноническое уравнение эллипса, представленное в виде

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{3}$$

Прямой подстановкой и очевидными преобразованиями убеждаемся в справедливости утверждения.

$$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \tag{4}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 \pm 2xc + a^2} = \sqrt{\left(a \pm \frac{c}{a}x\right)^2} = a \pm \varepsilon x, \tag{5}$$

где $c^2 = a^2 - b^2$ и $\varepsilon = \frac{c}{a}$. □

Аналогичными рассуждениями можно получить фокальные радиусы для гиперболы.

Лемма 1.2. *Фокальные радиусы $r_{1,2}$ точки $M(x, y)$ гиперболы в канонической системе координат могут быть найдены как*

$$r_{1,2} = |a \pm \varepsilon x| \tag{6}$$

Полученные соотношения позволяют описать эллипс, гиперболу и параболу **общим уравнением в полярных координатах**.

Теорема 1.1. *Уравнение вида*

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi},$$

где p — фокальный параметр, ρ — полярный радиус, а ϕ — полярный угол, описывает эллипс, гиперболу и параболу в зависимости от параметров:

- *Эллипс*
$$\varepsilon \in [0, 1) \qquad p = a - \varepsilon c$$
- *Парабола*
$$\varepsilon = 1 \qquad p = 2c$$
- *Гипербола*
$$\varepsilon \in [0, 1) \qquad p = \pm(\varepsilon c - a)$$

Доказательство. Начнем доказательство с **эллипса**.
Поместим полюс системы координат в (левый) фокус F_1. Тогда полярный радиус произвольной точки будет совпадать с первым фокальным радиусом

$$|\mathbf{r}_1| = \rho$$

Из уравнения эллипса, а также связи между координатами получаем

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad r_1 = \rho, \qquad r_2 = a - \varepsilon x, \qquad x + c = \rho \cos \phi$$

Соберем воедино

$$\rho + a - \varepsilon(\rho \cos \phi - c) = 2a \qquad \Rightarrow \qquad (1 - \varepsilon \cos \phi)\rho = a - \varepsilon c$$

Откуда следует утверждение теоремы.

$$\rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon \cos \phi} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi}$$

Гипербола.
Выберем в качестве полюса также левый фокус. Воспользуемся соотношениями:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \qquad r_1 = \rho, \qquad r_2 = \varepsilon x - a, \qquad x + c = \rho \cos \phi$$

После раскрытия модуля придем к двум уравнениям соответствующим веткам гиперболы:

$$\rho = \frac{\pm(a - \varepsilon c)}{1 - \varepsilon \cos\phi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi},$$

где знак "+" соответствует левой ветке параболы $p = a - \varepsilon c$, а "−" соответствует правой $p = \varepsilon c - a$.

Парабола.
Вновь разместим полюс в фокусе. Тогда

$$r = d, \qquad r = \rho, \qquad d = \frac{p}{2} + x, \qquad x - \frac{p}{2} = \rho\cos\phi$$

из которых получаем

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\phi},$$

где эксцентриситет $\varepsilon = 1$, что завершает доказательство теоремы. □

§2. Уравнение через эксцентриситет

Получим общее уравнение кривых в декартовых координатах.

Для этого рассмотрим параллельный перенос канонической системы координат $Ox'y'$ эллипса в его левую вершину. Соответствующее преобразование в новую систему координат Oxy будет иметь вид

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' \end{cases}$$

Тогда уравнение преобразуется следующим образом

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}$$
$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Вводя обозначения

$$\frac{b^2}{a} = p \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

получим окончательно

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

Аналогичное уравнение по своей форме получается и для гиперболы, если разместить новую систему координат в правой вершине гиперболы. Вспомним, что для параболы мы полагали $\varepsilon = 1$. Тогда становится очевидным, что это уравнение описывает все три кривые.

При фиксированном p и изменяющемся $\varepsilon \in [0, +\infty)$ мы последовательно получаем

- $\varepsilon = 0$ — окружность
- $\varepsilon \in (0, 1)$ — эллипс
- $\varepsilon = 1$ — парабола
- $\varepsilon \in (1, +\infty)$ — гипербола

NtB 2.1. Геометрический смысл эксцентриситета — степень отличия кривой от окружности.

§3. Общее уравнение кривой 2-го порядка

Общее уравнение кривых 2-го порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

обязательно содержит в себе все частные случаи, но также может содержать дополнительную информацию. Рассмотрим свойства данного уравнения.

- Квадратичное слагаемое $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. Наличие этого слагаемого, говорит о том, что уравнение описывает кривую 2-го порядка. Более того, сравнивая это уравнение с каноническими, можно заметить, что слагаемое, содержащее xy может возникнуть только при повороте канонической системы координат (в силу наличия перекрестного умножения).
- Линейное слагаемое $Dx + Ey$ сигнализирует о возможном наличии параллельного переноса канонической системы координат. Это становится очевидным, если применить преобразование трансляции к любому из канонических уравнений.

Рассмотрим один из возможных алгоритмов приведения кривой к каноническому виду. Очевидно, что в канонических системах координат отсутствует слагаемое вида $2Bxy$, а значит избавление от него точно позволит нам сделать шаг в сторону канонического уравнения.

Рассмотрим поворот плоскости на неизвестный угол θ

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta, \end{cases}$$

полагая, что x' и y' — координаты точек кривой в новой системе координат.

Подставим это преобразование в общее уравнение кривой 2-го порядка:

$$
\begin{gathered}
A(x'^2\cos^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta + y'^2\sin^2\theta)+ \\
+2B(x'^2\cos\theta\sin\theta + x'y'(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - y'^2\cos\theta\sin\theta)+ \\
+C(x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\cos\theta\sin\theta + y'^2\cos^2\theta)+ \\
+D(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F = 0
\end{gathered}
$$

Выберем угол θ такой, что коэффициент перед $x'y'$ станет равным нулю. Попробуем выяснить, что это за угол:

$$
\begin{gathered}
-2A\cos\theta\sin\theta + 2B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2C\cos\theta\sin\theta = 0 \\
2B\cos 2\theta = (A - C)\sin 2\theta \\
\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2B}{A - C}
\end{gathered}
$$

Таким образом мы нашли значение угла, при котором слагаемое с $x'y'$ обращается в ноль.

NtB 3.1. Можно заметить, что при $A = C$ обнуляется знаменатель дроби. Однако это не должно смущать, т.к. тангенс принимает значение ∞ при $\pi/2$. Следовательно искомый угол $\theta = \pi/4$

Завершая преобразование с уже найденным углом θ получим уравнение вида

$$
A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0
$$

Если предположить, что оба коэффициента A' и C' не равны нулю, то можно привести уравнение к каноническому виду путем рассмотрения еще одного преобразования — параллельного переноса начала системы координат в центр кривой.

$$
\begin{cases}
\xi = x_0 + x' \\
\eta = y_0 + y'
\end{cases}
$$

с последующим обнулением коэффициентов при линейных слагаемых. Этот способ в своем подходе аналогичен рассмотрению поворота.

Второй способ использует выделение полного квадрат. Сгруппируем слагаемые следующим образом

$$
A'\left(x^2 + \frac{D'}{A'}x\right) + C'\left(y^2 + \frac{E'}{C'}y\right) + F = 0
$$

$$
A'\left(x + \frac{D'}{2A'}\right)^2 - \frac{D'^2}{4A'} + C'\left(y + \frac{E'}{2C'}\right)^2 - \frac{E'^2}{4C'} + F = 0
$$

Вводя обозначения

$$x_0 = -\frac{D'}{2A'} \qquad y_0 = -\frac{E'}{2C'} \qquad F' = F - \frac{D'^2}{4A'} - \frac{E'^2}{4C'}$$

получим уравнение кривой в канонической системе координат:

$$A'(x - x_0)^2 + C'(y - y_0)^2 + F' = 0$$

или

$$A'\xi^2 + C'\eta^2 + F' = 0$$

В зависимости от знаков и абсолютных значений полученных коэффициентов в преобразованном уравнении получаются рассмотренные ранее частные случаи или те, которые еще не рассматривались ранее.

NtB 3.2. Композиция проведенных преобразований — поворота и параллельного переноса есть ничто иное как элемент евклидовой группы. Иными словами, именно преобразования такого типа позволяют получить из общего уравнения кривой ее канонический вид:

$$\begin{cases} \xi = x\cos\theta + y\sin\theta - x_0 \\ \eta = -x\sin\theta + y\cos\theta - y_0 \end{cases} \tag{7}$$

§4. Классификация кривых 2-го порядка

Для удобства переобозначим все буквы следующим образом

$$Ax^2 + By^2 + C = 0$$

Основываясь на коэффициентах A, B и C, разделим уравнения на три группы:

(a) Уравнения эллиптического типа. К уравнениям этого типа отнесем такие, в которых A и B имеют одинаковый знак

$$AB > 0$$

В зависимости от коэффициента C получим несколько случаев

- Пусть C имеет отличный от A и B знак. Тогда уравнение можно переписать как
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
Полученное уравнение описывает **вещественный эллипс**.

- Пусть C имеет одинаковый с A и B знак. Тогда

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

  Полученное уравнение описывает **мнимый эллипс**. Данное уравнение описывает пустое множество точек на декартовой плоскости.

- Пусть $C = 0$. Тогда

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

  В таком случае имеется **пара пересекающихся мнимых прямых**. В вещественной плоскости этому типу уравнения удовлетворяет только одна единственная точка $(0, 0)$.

(б) Уравнения гиперболического типа. К этому типу уравнений относят такие, что $AB < 0$ — коэффициенты имеют разный знак. Не теряя общности можем положить, что $A > 0$. В силу того, что знак C не влияет на сам тип кривой, можно выделить два случая:

- $C \neq 0$. В таком случае, уравнение дает **гиперболу** (при $C < 0$) или **двойственную ей гиперболу** ($C > 0$):

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

- $C = 0$. В таком случае

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

  уравнение описывает **две пересекающиеся прямые**.

(в) Уравнения параболического типа. Рассмотрим вырожденный случай — такой, что какой-то *один из* коэффициентов A или B равен нулю. Не теряя общности и здесь можем положить, например, коэффициент B равным нулю. Тогда уравнение

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

параллельным переносом можно привести к виду

$$Sy^2 + Px + Q = 0$$

которое также представляет несколько типов:

- Пусть $P \neq 0$. Знакомый нам случай **параболы**:

  $$y^2 = 2px$$

- Пусть $P = 0$, а $SQ \leqslant 0$. Иными словами, что S и Q имеют разный знак или же $Q = 0$. В таком случае уравнение описывает **параллельные (совпадающие при $Q = 0$) прямые**

$$y^2 = a^2$$

- Пусть $P = 0$, а $PQ > 0$. Тогда уравнение примет вид

$$y^2 + a^2 = 0$$

  и уравнение будет описывать пустое множество на вещественной плоскости, но, вообще говоря, **мнимые параллельные прямые.**

Этим описанием ограничиваются все возможные множества точек, которые могут быть описаны общим уравнением кривой 2-го ворядка.