О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма

А. КИРИЛЛОВ

Пролог

Задачи на геометрические построения одни из самых популярных в школьной математике. Почти в каждом математическом кружке разбираются такие задачи. Это, конечно. не случайно. История геометрических построений насчитывает несколько тысяч лет. и уже древние греки достигли здесь большого искусства. В качестве примера можно привести задачу Аполлония: *построить окружность, касающуюся трех Данных окружностей.*

Многим, вероятно, известны три знаменитые задачи древности, оказавшиеся неразрешимыми: *о квадратуре круга. трисекции угла и куба.*

Но, пожалуй, самой красивой является задача о построении правильных многоугольников. Собственно говоря, это не одна задача, а целая серия задач: *Для каждого натурале ного числа $n > 3$ требуется с помощью циркуля и линейки построить правильный n-угольник.*

Для некоторых значений n эта задача совсем простая (например, для n = 3, 4, 6, 8, 12); для других — посложнее (n = 5, 10, 15; ниже мы расскажем, как построить десятиугольник и пятиугольник); для третьих очень сложная (n = 17 или 257). Наконец, существуют такие значения n, для которых эта задача вообще неразрешима (например, п = 7, 9, 11).

Выпишем подряд несколько натуральных чисел, начиная с n = 3, и отметим красным цветом те числа n, для которых можно построить правильный n-угольник циркулем и линейкой:
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14 15. 16, 17. 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 45, 46, 47, 48...

Есть ли какая-нибудь закономерность в распределении «красных» и «черных» чисел? Оказывается, есть; но найти ее довольно трудно. Эта за- имеет арифметическую природу; чтобы ее описать, нам придется временно оставить геометрию и заняться элементами теории чисел высшего раздела арифметики.

Функция Эйлера

Важной арифметической характеристикой числа п является количество чисел, меньших п и взаимно простых с n. Одним из первых это заметил знаменитый математик XVIII века Леонард Эйлер. Он предложил для этого количества обозначение ф(n), и с тех пор функция n → ф(n) известна под именем *«функции Эйлера»*, Например, для n = 10 имеется четыре числа, меньших десяти и взаимно простых с ним: 1, 3, 7 и 9; так что ф(10) = 4.

Функция обладает многими интересными свойствами. Одно из них было открыто еще самим Эйлером: для любых двух взаимно простых чисел m и n справедливо равенство:

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n). \qquad (1)$$

Кроме того, легко проверить, *что если p простое число, то $\phi(p) = p - 1, \phi(p^2) = p^2 - p$, и вообще*

$$\phi(p^m) = p^{m-1}(p-1). \qquad (2)$$

Эти свойства позволяют легко вычислять функцию Эйлера для небольших значений п. Например, « 10) 9(5) = 1-4 4,

$$\phi(10) = \phi(2) * \phi(5) = 1 * 4 = 4,$$

$$\phi(100) = \phi(4) * \phi(25) = 2 * 20 = 40,$$

Мы приводим здесь значения функции Эйлера для n от 1 до 42 (см. таблицы 1, а и б).

Сравните эти таблицы с приведенным выше рядом «красных» и «черных» чисел. Не правда ли, связь между «цветом» чисел n и значением ф(n) уже легко угадывается? Мы видим, что если правильный n-утольник можно построить с помощью циркуля и линейки, то соответствующее значение функции ф(n) является степенью двойки. Оказывается, это условие является необходимым и достаточным для возможности построения правильного n-угольника.

В настоящей статье мы не сможем строго доказать это. Однако мы приведем достаточно простые и убедительные соображения в пользу этого факта. Аналогичные соображения применимы и ко многим другим задачам на построение - например, к задаче о трисекции утла.

Что значит «построить»?

Вопрос о точной постановке задач на построение циркулем и линейкой уже обсуждался на страницах «Кванта». Мы не будем здесь еще раз предостерегать читателей от неправильного употребления математических ин- струментов. Скажем лишь, что окон- чательное решение задачи на построе- ниедолжнобыть(хотя бы в принципе) записываемо в виде цепочки элементарных операций, напоминающей сис- тему команд, отдаваемых электрон- ной вычислительной машине.

Таблица 1, а

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ф(n)	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Таблица 1, б

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ф(n)	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Эта статья была опубликована в "Кванте"№ 7 за 1977 год.

Например, задача о построении середины отрезка AB решается следующей «программой» (рис.1):

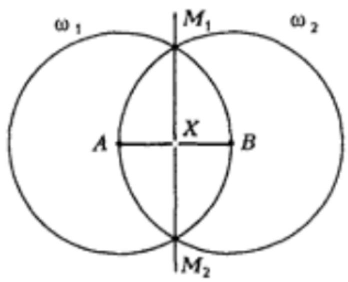

Рис. 1

1. Циркулем построить окружность ω_1 с центром A и радиусом AB.

2. Циркулем построить окружность ω_2 с центром B и радиусом BA.

3. Отметить точки пересечения M_1 и M_2 окружностей ω_2 и ω_2.

4. По линейке провести прямую $M_1 M_2$.

5. Отметить точку X пересечения прямых $\mathrm{M}_1 M_2 AB$.

Еще один пример: построение биссектрисы заданного угла AOB (рис.2). Соответствующая система команд имеет вид:

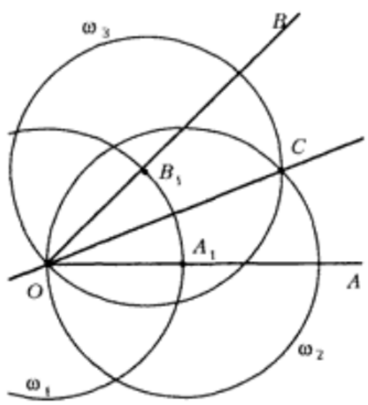

Рис. 1

1. Циркулем построить окружность ω_1 с центром O и радиусом R.

2,3. Отметить точки пересечения этой окружности: A_1 - с прямой OA, B_1 - с прямой OB.

4, 5. Циркулем построить окружности ω_2, ω_3 с центрами A_1, B_1 и радиусом R.

6. Отметить точку пересечения C окружностей ω_2, ω_3

7. По линейке провести прямую OC.

Однако в этом случае в пунктах 2 и 3 программа сформулирована неточно. В самом деле, окружность ω_1 имеет с прямыми OA и OB по две точки пересечения, и неясно какие из этих точек нужно обозначить через A_1 и B_2. Вы можете возразить, что речь идет о лучах OA и OB, которые пересекаются с окружностью в единственной точке, но понятие «луч» выходит за рамки понимания нашей «математической машины». Ей доступно только понятие «прямая».

Посмотрим, что получится, если понимать выражение «точка пересечения» как «какая-нибудь точка пересечения». Тогда нашей программе будет соответствовать рисунок 3:

выполнение этой операции приводит к двум реализациям (как в разобран- ном выше примере). Вообще, ЕЛИ в программе есть k двузначных опера- ций, то эту программу можно реализовать 2^k способами.

Мы видели, что некоторые неопределенности могут в конце концов «сокращатьтя» и не влиять на окончательный ответ. Оказывается (это можно строго доказать, но не в этом цель настоящей статьи), такие сокращения всегда происходят согласованным об. разом, так что неопределенность в окончательном ответе всегда имеет вид $2^l (l \leq k)$. Этот факт имеет не геометрическую, а алгебраическую природу (соответствующая часть алгебры называется теорией Галуа).

Вернемся к задаче о построении биссектрисы. Наша программа. кроме биссектрисы угла ЛОВ, дает так- же и биссектрису внешнего утла ЛОВ, (см. рис.З). Это решение не надо рассматривать как «постороннее». С точки зрения циркуля и линейки, «понимающих» угол только как пару пересекающихся прямых, лот угол ничем не хуже исходного угла АОВ. Попробовав определить понятие биссектрисы в терминах. «доступных» циркулю н линейке, мы увидим, что биссектриса внешнего угла будет удовлетворять этому определению также, как и биссектриса внутреннего угла.

Это обстоятельство имеет общий характер: все 2^l решений, доставляемых программой. содержащей неопределенности, являются «настоящими», а не посторонними решениями, если только правильно сформулировать задачу

Например, задача: *вписать окружность в данный треугольник* - решается в неопределенностью 16 (нужно построить биссектрисы двух углов), и приводит к четырем разным ответам (одна вписанная и три вневписанные окружности), причем все эти ответы равноправны, если сформулировать задачу так: построить окружность, касающуюся трех данных прямых. Отличие вписанной окружности от вневписанных основано на понятии «между» (или «внутри») и недоступно пониманию нашей машины.

Разобранные примеры показывают также, что если задача на построение имеет несколько решений, то программа построение дает все эти решения. Это утверждение также справедливо в обще случает.

Поучительный пример: геометрическое построение одного из корней квадратного уравнения автоматически приводи к построение и второго корня