

Занятие 5. Неопределенный интеграл

интегрирование тригонометрических и иррациональных функций

Составитель: Кольцова Т.Б.

*Задачи со звёздочкой * рекомендуется решать в случае большого запаса времени.*

I. Интегрирование тригонометрических функций: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

Ответ: $\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$

2) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$

Ответ: $2\sqrt{\sin x} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{5}\right) + C$

3) $\int \cos^4 x \, dx$

Ответ: $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

4) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx$

Ответ: $\operatorname{tg} x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{2}x + C$

II. Интегрирование тригонометрических функций: $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

5) $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$

Ответ: $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C$

6) $\int \operatorname{ctg}^4 3x \, dx$

Ответ: $x - \frac{1}{9}\operatorname{ctg}^3 3x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + C$

III. Интегрирование тригонометрических функций вида: $\int R(a \sin^2 x + b \cos^2 x + c)dx$,
где $R(x)$ – рациональная функция, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7) $\int \frac{dx}{3 + \cos^2 x}$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2}\right) + C$

IV. Интегрирование тригонометрических функций вида: $\int R(a \sin x + b \cos x + c)dx$,
где $R(x)$ – рациональная функция, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

8) $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$

Ответ: $\frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C$

9)* $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$

Ответ: $\frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + C$

V. Интегрирование иррациональных функций: $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots\right) dx$, где $R(x)$ – рациональная функция, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

10) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

Ответ: $2(\sqrt{x+1} - \ln(\sqrt{x+1} + 1)) + C$

11) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} - (x+1) + \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} + C$

12)* $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$

Ответ: $\ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$

VI. Тригонометрические подстановки:

$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ (указание: подстановка $x = a \sin t$ или $x = a \cos t$),

$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ (указание: подстановка $x = a \operatorname{tg} t$ или $x = a \operatorname{ctg} t$),

$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ (указание: подстановка $x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$),

где $R(x)$ – рациональная функция, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

13) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$

Ответ: $2 \ln \left| \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} \right| + \sqrt{4-x^2} + C$

14) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$

Ответ: $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x} \right| + C$

Задачи для самостоятельного решения

15) Вывести формулы понижения степени для интегралов вида $I_n = \int \sin^n x dx$, вычислить $\int \sin^6 x dx$.

Ответ: $I_n = \frac{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$,

$I_6 = -\frac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \sin^3 x - \frac{5}{16} \cos x \sin x - \frac{5}{18} x + C$

16) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

Ответ: $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + C$

17) $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 x}}$

Ответ: $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{(1+t)^3(1+t^3)}{(1-t)^3(1-t^3)} \right| - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{1-t^2}{t\sqrt{3}} + C$, где $t = \sqrt[3]{\sin x}$

18) $\int \sin 5x \cos x dx$

Указание: воспользуйтесь формулой $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

Ответ: $-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x + C$

19) $\int \frac{dx}{3 + \sin^2 x + 2 \cos^2 x}$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} \right) + C$

20) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right) + C$

21) $\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$

Ответ: $\frac{3}{4} \ln \left| \frac{x \sqrt[3]{x}}{(1 + \sqrt[6]{x})^2 (1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x})^3} \right| - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{4\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{7}} \right) + C$

22) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$

Ответ: $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 25} + \frac{25}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 25}}{5} \right| + C$