Сумма пересечение подпространств

Содержание

§1. Основные определения

Опр. 1.1. Пусть U и W — подпространства векторного пространства V. Минимальное подпространство, содержащее оба подпространства U и W, называется ***суммой*** подпространств U и W и обозначается $U+W$. То есть, если U, $W \leqslant U$, то $U+W = \{u+w \,|\, v \in U,\, w \in W\} \leqslant V$.

NtB. Сумма подпространств, как правило, не совпадает с их объединением. Более того, объединение подпространств в общем случае не является подпространством. Например, многочлены вида ax^2 и многочлены вида bx образуют два одномерных подпространства в пространстве многочленов, но сумма $x+x^2$ не лежит в их объединении.

NtB. $U+W$ — наименьшее подпространство, содержащее как U, так W. Другими словами, это линейная оболочка оболочка объединения $U \cup W$.

Если подпространства заданы как линейные оболочки систем векторов, то сумма подпространств является линейной оболочкой объединения этих системы векторов. Всё, что нужно сделать для поиска базиса $U+W$, — это исключить лишние (линейно выражающиеся через другие) векторы из объединённой системы векторов. Для этого достаточно записать их в матрицу и привести её к ступенчатому виду. Базисом суммы подпространств будут, например, векторы, соответствующие ненулевым строкам ступенчатой матрицы. Если подпространства заданы однородными СЛАУ, то надо найти базисы этих подпространств, то есть ФСРы этих СЛАУ.

Опр. 1.2. Пусть U и W — подпространства векторного пространства V. Пересечение $U \cap W$ множеств U и W замкнуто относительно операций из V и является подпространством V. Оно называется ***пересечением*** подпространств U и W. То есть $U \cap W = \{v \,|\, v \in U \;\vee\; v \in W\} \leqslant V$.

NtB. $U \cap W$ — наибольшее подпространство, содержащееся в как U, так и в W.

Для определения базиса пересечения подпространств, нужно задать их однородными СЛАУ. Так как любой вектор, принадлежащий пересечению, должен принадлежать каждому из подпространств, то он должен удовлетворять каждой системе. Следовательно, он должен удовлетворять и объединённой СЛАУ. Значит, для нахождения базиса $U \cap W$ нужно найти ФСР этой СЛАУ.

Понятия суммы и пересечения можно обобщить на случай большего числа подпространств. Так, сумма подпространств U_i — это линейная оболочка их объединения. То есть, суммой $U_1 + \ldots + U_k$ подпространств $U_1, \ldots, U_k \leqslant V$ называется совокупность векторов вида $u_1 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Пересечение определяется аналогично пересечению двух подпространств.

§2. Согласованный базис

Опр. 2.1. Базис пространства V называется ***согласованным*** с подпространством U, если U является линейной оболочкой какой-то части базисных векторов пространства V.

Теорема 2.1. *Для любой пары подпространств $U, W \leqslant V$ существует базис пространства V, согласованный с каждым из подпространство U, W.*

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис $e_1, e_2, \ldots, e_p \in U \cap W$ и дополним его векторами $e_{p+1}, \ldots, e_k$ и $e_{k+1}, \ldots, e_{k+l-p}$ до базисов в U и W соответственно. ($p = \dim U$, $k = \dim U$, $l = \dim W$). Ясно, что векторы $e_1, \ldots e_{k+l-p}$ порождают $U + W$. Допустим, что они линейно зависимы, то есть существует нетривиальная линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{k+l-p} \lambda_i e_i = 0$. Рассмотрим вектор $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = -\sum\limits_{i=k+1}^{k+l-p} \lambda_i e_i$. Из первого представления следует, что $x \in U$, из второго — $x \in W$. Следовательно, $x \in U \cap W$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i e_i = \sum\limits_{i=k+1}^{k+l-p} \lambda_i e_i$. Так как векторы $e_1, \ldots, e_p, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l-p}$ линейно независимы, то $x = 0$ $\lambda_i = 0$ при $i = k+1, \ldots, k+l-p$. Так как $e_1, \ldots, e_k$ линейно независимы, то из равенства $\sum\limits_{i=k}^{k} \lambda_i e_i = 0$ следует, что $\lambda_i = 0$ при $i = 1, \ldots mk$. $\square$

Следствие 2.1.1. ***(формула Грассмана)*** *Для любых двух конечномерных подпространств U и W произвольного векторного пространства V верно равенство* $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Доказательство. В обозначениях доказательства предыдущей теоремы векторы $e_1, \ldots, e_{k+l-p}$ составляют базис $U + W$, значит $\dim(U + W) = k + l - p$. $\square$

NtB. Хотя формула Грассмана похожа по виду на формулу включений-исключений, напрашивающееся обобщение на случай большего числа подпространств неверно.

Пример 2.1. $U = \{f(t) \in \mathbb{R}[t]_7 \mid f(-1) = f'(-1) = f''(-1) = 0\} \leqslant \mathbb{R}[t]_7$, $W = \{f(t) \in \mathbb{R}[x]_7 \mid f(2) = f'(2) = f''(2) = 0\} \leqslant \mathbb{R}[t]_7$. Найдем базисы суммы и пересечения этих подпространств. Что значит $f(-1) = f'(-1) = f''(-1) = 0$? Что -1 — корень кратности как минимум 3. Что значит $f(2) = f'(2) = f''(2) = 0$? Аналогично про корень 2. Значит, если многочлен $f \in U \cap W$, то он имеет корни -1 и 2 кратности минимум 3, то есть имеет вид $(t+1)^3(t-2)^3 g(t)$. Так как мы находимся в пространстве многочленов степени не выше 7, степень $g(t)$ максимум 1. Тогда $f(t) = (t+1)^3(t-2)^3(At+B) = A(t+1)^3(t-2)^3 x + (t+1)^3(t-2)^3$, то есть любой многочлен из $U \cap W$ представим в виде линейной комбинации многочленов $(t+1)^3(t-2)^3 t$ и $(t+1)^3(t-2)^3$. Значит, $\dim(U \cap W) = 2$ и $U \cap W = \langle (t+1)^3(t-2)^3 t, (t+1)^3(t-2) \rangle$. Каждое из подпространств U и W пятимерно, так как многочлены из них имеют вид $(t-t_0)^3(At^4+Bt^3+Ct^2+Dt+E)$, где t_0 равно -1 или 2 соответственно. Тогда по формуле Грассмана $\dim(U+W) = 5+5-2 = 8 = \dim \mathbb{R}[t]_7$, то есть $U + W = \mathbb{R}[t]_7$. Следовательно, в качестве базиса $U+W$ можно взять любой базис $\mathbb{R}[t]_7$, например, $1, t, t^2, \ldots, t^7$.

§3. Прямая сумма подпространств

Опр. 3.1. Сумма $U + W$ называется ***прямой***, если для любого вектора $v \in U + W$ представление $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$ единственно. Прямая сумма обозначается $U \oplus W$ или $U \dotplus W$.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы сумма <u>двух</u> подпространств U и W была прямой, необходимо и достаточно, чтоб их пересечение было нулевым.*

Доказательство. Пусть $0 \neq z \in U \cap W$. Рассмотрим вектор $x \in U + W$ и представим его в виде $x = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$. Если $z \neq 0$, то существует ещё разложение $x = u + z + w - x$, $u + z \in U$, $w - z \in W$. Это противоречит единственности разложения. Обратно, пусть разложение $x = u + w$ не единственно: $x = a + b$, $a \in U$, $b \in W$. Тогда $u - a + w - b = 0$ или $u - a = w - b$. Так как $u - a \in U$, $w - b \in W$, то $u - a, w - b \in U \cap W$. Но $U \cup W = \{0\}$, значит $u = a$, $w = b$. $\square$

Опр. 3.2. Пусть $U \leqslant V$. Подпространство $W \leqslant V$ называется ***прямым дополнением*** к U в V, если $V = U \oplus W$.

NtB. Прямое дополнение, вообще говоря, не единственно.

Более общо, сумма подпространств $U_1, U_2, \ldots, U_k \leqslant V$ называется ***прямой***, если каждый вектор $w \in U_1 + U_2 + \ldots + U_k$ имеет единственное представление в виде $w = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Вектор u_i называется проекцией вектора w на подпространство U_i. Заметим, что проекция на подпространство зависит не только от него, но и остальных слагаемых разложения.

Пример 3.1. $\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x]^+ \oplus \mathbb{R}[x]^-$, где $\mathbb{R}[x]^+$ и $\mathbb{R}[x]^-$ — подпространства четных и нечетных многочленов соответственно. Отметим, что в данном примере все пространства бесконечномерны.

Пример 3.2. Проекцией многочлена $3x^3+5x^2-x+7 \in \mathbb{R}[x]$ на подпространство нечётных многочленов является многочлен $3x^3-x \in \mathbb{R}[x]^-$, на подпространство чётных многочленов — многочлен $5x^2+7 \in \mathbb{R}[x]^+$.

Пример 3.3. Если векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис пространства V, то V является прямой суммой одномерных подпространств, порожденных векторами e_i: $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \langle e_i \rangle$. Проекция вектора $v \in V$ на $\langle e_i \rangle$ равна $v_i e_i$, где v_i — i-такая координата вектора v в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.