

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 18

Студент
Линейский Аким Евгеньвич
Р3115

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $2 \leq |x_1x_2 - x_3x_4x_5| \leq 4$ и неопределенное значение при $|x_1x_2 - x_3x_4x_5| = 1$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1x_2	$x_3x_4x_5$	x_1x_2	$x_3x_4x_5$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	d
2	0	0	0	1	0	0	2	0	2	1
3	0	0	0	1	1	0	3	0	3	1
4	0	0	1	0	0	0	4	0	4	1
5	0	0	1	0	1	0	5	0	5	0
6	0	0	1	1	0	0	6	0	6	0
7	0	0	1	1	1	0	7	0	7	0
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0	d
9	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
10	0	1	0	1	0	1	2	1	2	d
11	0	1	0	1	1	1	3	1	3	1
12	0	1	1	0	0	1	4	1	4	1
13	0	1	1	0	1	1	5	1	5	1
14	0	1	1	1	0	1	6	1	6	0
15	0	1	1	1	1	1	7	1	7	0
16	1	0	0	0	0	2	0	2	0	1
17	1	0	0	0	1	2	1	2	1	d
18	1	0	0	1	0	2	2	2	2	0
19	1	0	0	1	1	2	3	2	3	d
20	1	0	1	0	0	2	4	2	4	1
21	1	0	1	0	1	2	5	2	5	1
22	1	0	1	1	0	2	6	2	6	1
23	1	0	1	1	1	2	7	2	7	0
24	1	1	0	0	0	3	0	3	0	1
25	1	1	0	0	1	3	1	3	1	1
26	1	1	0	1	0	3	2	3	2	d
27	1	1	0	1	1	3	3	3	3	0
28	1	1	1	0	0	3	4	3	4	d
29	1	1	1	0	1	3	5	3	5	1
30	1	1	1	1	0	3	6	3	6	1
31	1	1	1	1	1	3	7	3	7	1

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		
m_2	00010	✓	m_2-m_3	0001X	✓	$m_2-m_3-m_{10}-m_{11}$	0X01X	
m_4	00100	✓	m_1-m_3	000X1	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}$	10X0X	✓
m_{16}	10000	✓	m_8-m_{10}	010X0	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{24}-m_{25}$	1X00X	✓
m_1	00001	✓	m_8-m_{12}	01X00	✓	$m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}$	1XX00	✓
m_8	01000	✓	m_2-m_{10}	0X010	✓	$m_1-m_3-m_{17}-m_{19}$	X00X1	
m_3	00011	✓	m_4-m_{12}	0X100	✓	$m_8-m_{10}-m_{24}-m_{26}$	X10X0	
m_{12}	01100	✓	$m_{16}-m_{17}$	1000X	✓	$m_8-m_{12}-m_{24}-m_{28}$	X1X00	
m_{20}	10100	✓	$m_{16}-m_{20}$	10X00	✓	$m_4-m_{12}-m_{20}-m_{28}$	XX100	
m_{24}	11000	✓	$m_{16}-m_{24}$	1X000	✓	$m_{24}-m_{25}-m_{28}-m_{29}$	11X0X	✓
m_{10}	01010	✓	m_1-m_{17}	X0001	✓	$m_{24}-m_{26}-m_{28}-m_{30}$	11XX0	
m_{17}	10001	✓	m_4-m_{20}	X0100	✓	$m_{20}-m_{21}-m_{28}-m_{29}$	1X10X	✓
m_{11}	01011	✓	m_8-m_{24}	X1000	✓	$m_{20}-m_{22}-m_{28}-m_{30}$	1X1X0	
m_{13}	01101	✓	$m_{10}-m_{11}$	0101X	✓	$m_{17}-m_{21}-m_{25}-m_{29}$	1XX01	✓
m_{21}	10101	✓	$m_{12}-m_{13}$	0110X	✓	$m_{12}-m_{13}-m_{28}-m_{29}$	X110X	
m_{22}	10110	✓	m_3-m_{11}	0X011	✓	$m_{28}-m_{29}-m_{30}-m_{31}$	111XX	
m_{25}	11001	✓	$m_{17}-m_{19}$	100X1	✓			
m_{19}	10011	✓	$m_{20}-m_{21}$	1010X	✓			
m_{26}	11010	✓	$m_{20}-m_{22}$	101X0	✓			
m_{28}	11100	✓	$m_{17}-m_{21}$	10X01	✓			
m_{29}	11101	✓	$m_{24}-m_{25}$	1100X	✓			
m_{30}	11110	✓	$m_{24}-m_{26}$	110X0	✓			
m_{31}	11111	✓	$m_{24}-m_{28}$	11X00	✓			
			$m_{17}-m_{25}$	1X001	✓			
			$m_{20}-m_{28}$	1X100	✓			
			m_3-m_{19}	X0011	✓			
			$m_{10}-m_{26}$	X1010	✓			
			$m_{12}-m_{28}$	X1100	✓			
			$m_{28}-m_{29}$	1110X	✓			
			$m_{28}-m_{30}$	111X0	✓			
			$m_{25}-m_{29}$	11X01	✓			
			$m_{26}-m_{30}$	11X10	✓			
			$m_{21}-m_{29}$	1X101	✓			
			$m_{22}-m_{30}$	1X110	✓			
			$m_{13}-m_{29}$	X1101	✓			
			$m_{30}-m_{31}$	1111X	✓			
			$m_{29}-m_{31}$	111X1	✓			
$K^3(f)$						$Z(f)$		
$m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}-m_{24}-m_{25}-m_{28}-m_{29}$						0X01X		
						X00X1		
						X10X0		
						X1X00		
						XX100		
						11XX0		
						1X1X0		
						X110X		
						111XX		
						1XX0X		

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы															
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
		0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
		1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
		0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
		2	3	4	11	12	13	16	20	21	22	24	25	29	30	31	
	0X01X	X	X		X												
	X00X1		X														
	X10X0											X					
	X1X00					X						X					
	XX100			X		X		X									
	11XX0											X			X		
	1X1X0							X		X					X		
	X110X					X	X							X			
	111XX													X	X	X	
	1XX0X							X	X	X		X	X	X			

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0X01X \\ XX100 \\ X110X \\ 1XX0X \\ 1X1X0 \\ 111XX \end{array} \right\}$$

Вся таблица вычеркнулась, следовательно ядро покрытия является минимальным покрытием

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 0X01X \\ XX100 \\ X110X \\ 1XX0X \\ 1X1X0 \\ 111XX \end{array} \right\}$$

$$S^a = 17$$

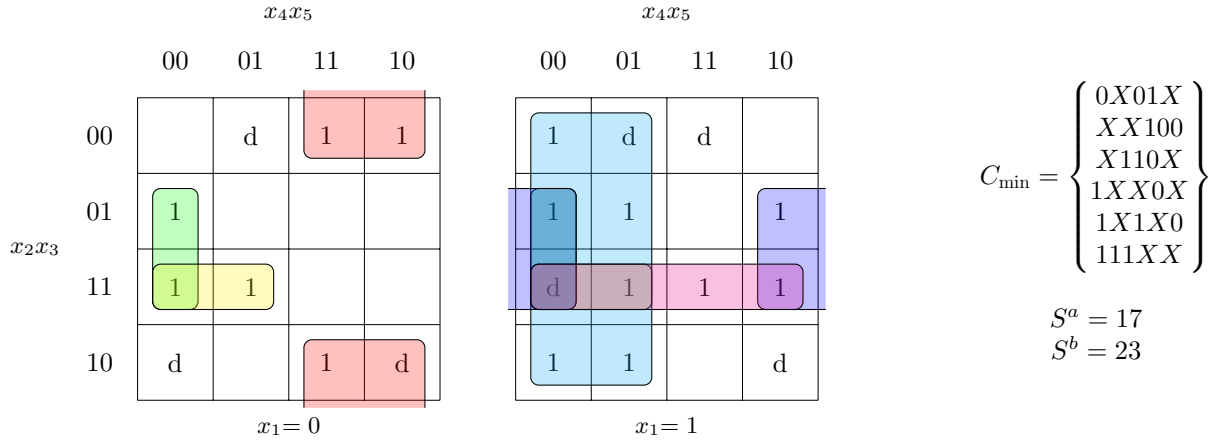
$$S^b = 23$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} x_4 \vee x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \vee x_1 x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3$$

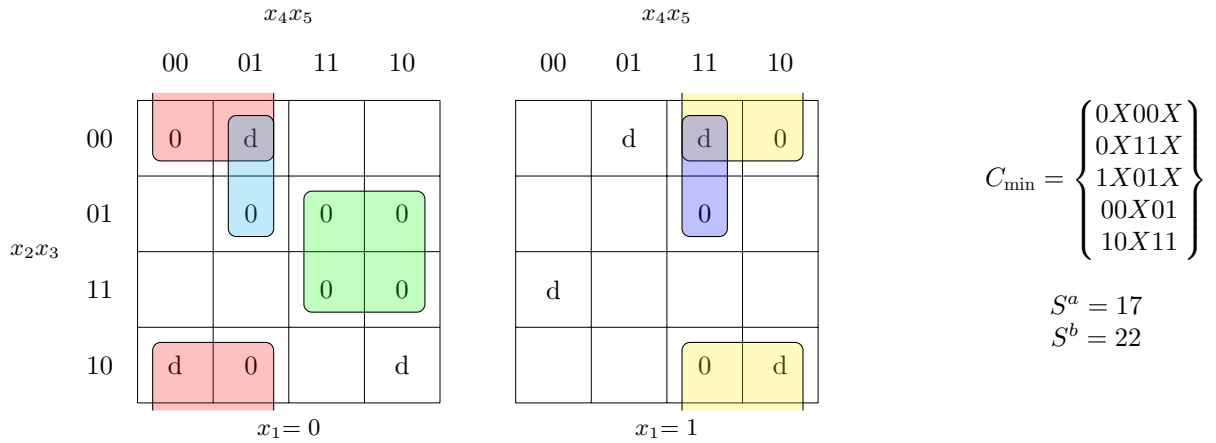
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} x_4 \vee x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \vee x_1 x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_3 \vee x_4) (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} x_4 \vee x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_4} \vee x_1 x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \quad S_Q = 23 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 \overline{x_4} \vee x_3 (x_1 \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} \overline{x_3} x_4 \quad S_Q = 15 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = \overline{x_1} x_4$$

$$\overline{\varphi} = x_1 \vee \overline{x_4}$$

$$f = x_1 \overline{x_4} \vee x_3 \overline{\varphi} (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \varphi \overline{x_3} \quad S_Q = 15 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = x_1 \overline{x_4} \vee x_3 (x_1 \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} \overline{x_3} x_4 \quad S_Q = 15 \quad \tau = 3$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_3 \vee x_4) (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 2$$

Декомпозиция невозможна

$$f = (x_3 (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee (x_1 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4})) (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 17 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_4} \vee x_3 (x_1 \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} \overline{x_3} x_4 \quad (S_Q = 15, \tau = 3)$$

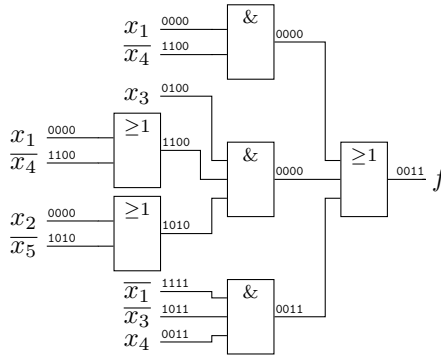
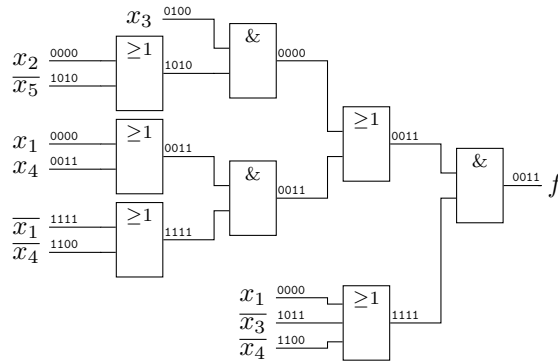


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_3 (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee (x_1 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4})) (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad (S_Q = 17, \tau = 4)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1 \overline{x_4} x_3 \overline{\varphi} \overline{x_2} x_5 \overline{\varphi} \overline{x_3}}} \quad (S_Q = 20, \tau = 6)$$

$$\varphi = \overline{x_1} x_4$$

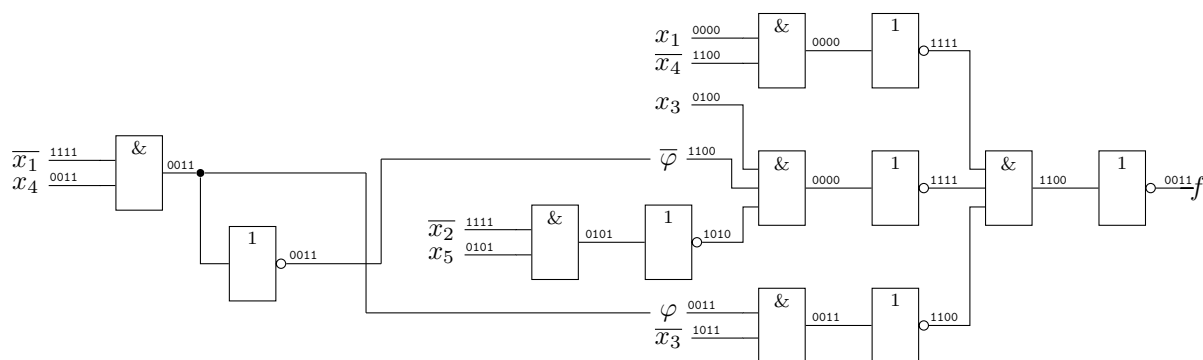
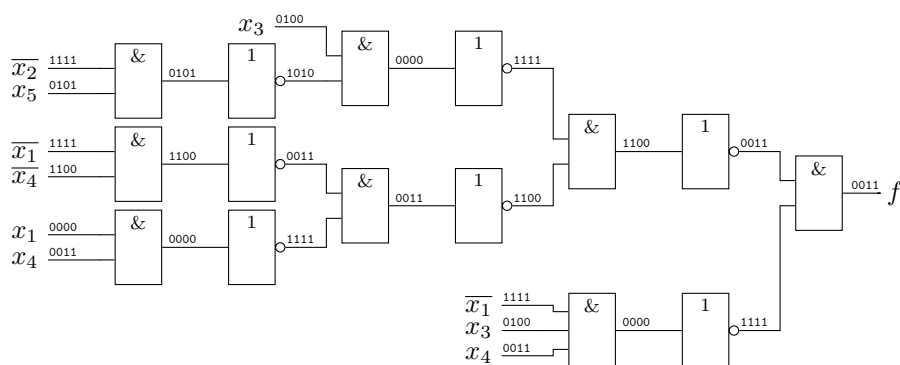


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_3 \overline{x_2} x_5} \overline{x_1 \overline{x_4} x_1 x_4} \overline{x_1 x_3 x_4}} \quad (S_Q = 24, \tau = 7)$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_4} x_3 \overline{x_1} x_4 x_2 x_5 \overline{x_1} x_3 x_4 \quad (S_Q = 24, \tau = 7)$$

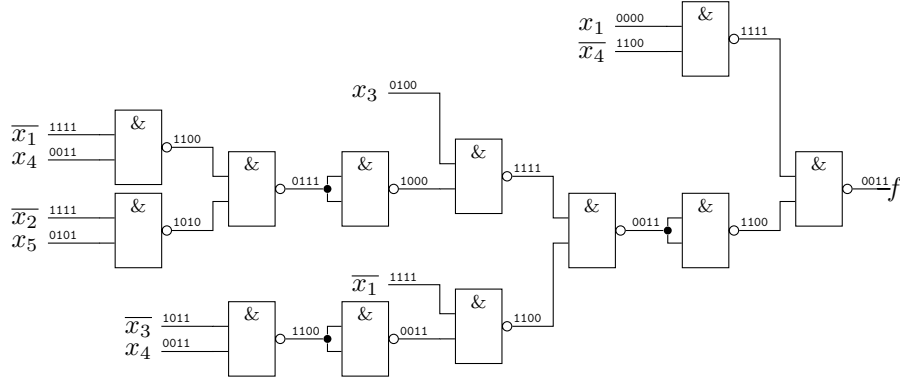


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_3 \overline{x_2} x_5 \overline{x_1} x_4 \overline{x_1} x_4 \overline{x_1} x_3 x_4 \quad (S_Q = 22, \tau = 5)$$

