§3 УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ И НОРМАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

Из аналитической геометрии известно, что всякому уравнению с тремя неизвестными $F(x,y,z)=0$ (или в явной форме $z=f(x,y)$) соответствует в декартовой системе координат некоторая поверхность.

Один из способов задания кривой в пространстве, задание как линии пересечения двух поверхностей :

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\}.$$

Другой способ задания - параметрическое задание

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \mathrm{z}=\mathrm{z}(\mathrm{t}),\quad t\in T \tag{1}$$

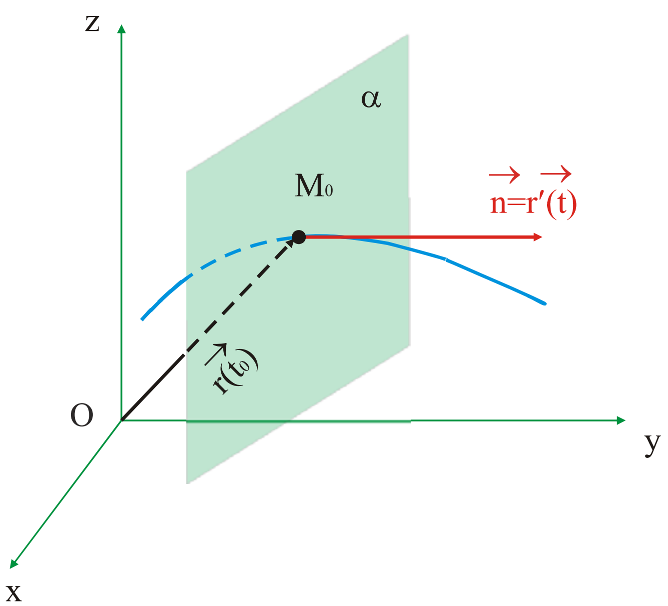
Найдем канонические уравнения касательной прямой к пространственной кривой заданной параметрически уравнениями (1) в некоторой точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, соответствующей значению параметра $t_0\in T$. Искомые уравнения имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где *m, n, p* -проекции (координаты) направляющего вектора прямой $\vec{s}=(m,n,p)$.

Кривая $\mathrm{L}\in R^3$ есть годограф вектор- функции $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, а вектор $\vec{r}\,'(t)$ направлен по касательной к кривой L , следовательно его можно считать направляющим вектором прямой, значит $m=x'(t_0)$, $n=y'(t_0)$, $p=z'(t_0)$. Тогда искомые уравнения примут вид

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}} \tag{2}$$



Определение *Нормальной плоскостью к пространственной кривой называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и проходящая через точку касания.*

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка касания. Уравнение плоскости, проходящей через эту точку имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

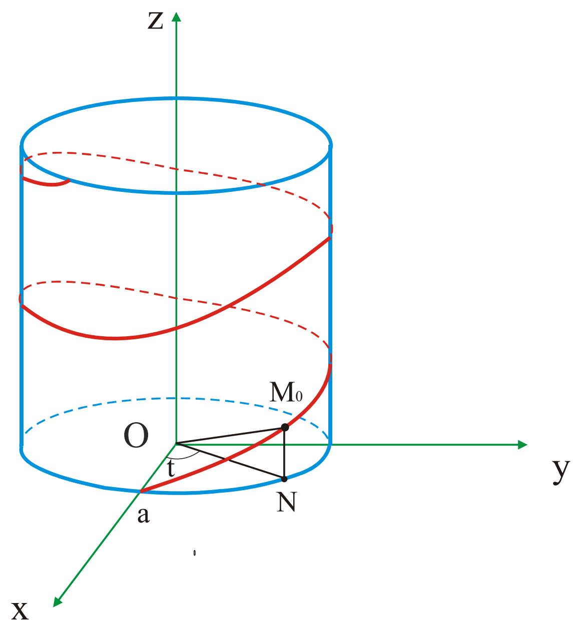
где $\vec{n}(A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости. Из определения нормальной плоскости следует, что векторы $\vec{n}(A, B, C)$ и $\vec{r}'(t)$ коллинеарные, поэтому можно считать, что $A = x'(t_0), B = y'(t_0), C = z'(t_0)$. Тогда искомое уравнение примет вид

$$\boxed{x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0} \qquad (3)$$

Пример Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к годографу L, заданному параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad t \in R, a = const, b = const, \\ z = bt \end{cases}$$

в точке M_0, соответствующей значению параметра $t_0 = \pi/3$.



Данная кривая называется винтовой линией. При произвольном t

$$x^2 + y^2 = (a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2$$

Найдем координаты точки касания:

$$x_0 = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}, \quad y_0 = a\sin\frac{\pi}{3} = a\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_0 = b\frac{\pi}{3}$$

Определим координаты направляющего вектора касательной $\vec{r}'(t_0)$

$$x'(t_0) = -a\sin\frac{\pi}{3} = -a\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y'(t_0) = a\cos\frac{\pi}{3} = a\frac{1}{2}; \qquad z'(t_0) = b\,.$$

Тогда уравнения касательной

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{-a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z - b\frac{\pi}{3}}{b}.$$

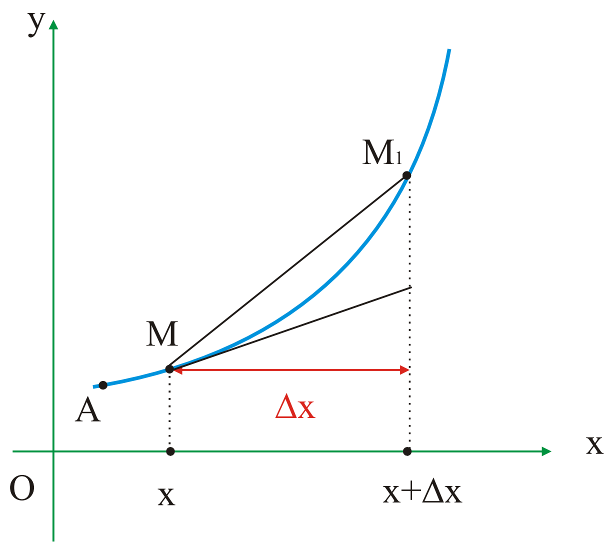
Уравнение нормальной плоскости

$$a\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - b\left(z - b\frac{\pi}{3}\right) = 0\,.$$

§ 4 КРИВИЗНА КРИВОЙ

Дифференциал длины дуги.

Пусть кривая L - график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$. Такую кривую называют *гладкой.* Возьмем точка А за начало отсчета. Пусть $M \in L$, тогда длина дуги АМ будет функцией абсциссы х точки М.



Обозначим эту функцию $l(x)$: $A\breve{M} = l(x)$. Найдем дифференциал функции $l(x)$, который будем называть *дифференциал длины дуги.* Найдем $l'(x)$. По определению

$$l'(x) = \frac{dl}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{l(x + \Delta x) - l(x)}{\Delta x} \qquad (4)$$

Без доказательства примем теорему:

Теорема 1 *Предел отношения длины дуги гладкой кривой к длине стягивающей ее хорды при стремлении длины дуги к нулю равен единице:*

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{M\breve{M}_1}{\left|\overline{MM_1}\right|} = 1$$

На основании теоремы 1 и свойств эквивалентных бесконечно малых величин, заменим дугу $M\breve{M}_1$ эквивалентной ей хордой $\left|\overline{MM_1}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Тогда

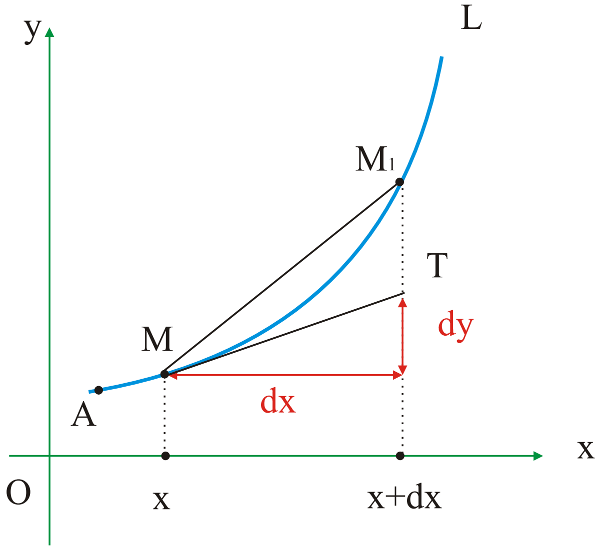
$$l'(x)=\frac{dl}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{\Delta x^2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+y'^2}$$

Отсюда

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx\,. \qquad (5)$$

Внеся dx под знак радикала получим

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2} \qquad (6)$$



Из формулы (6) следует, что с геометрической точки зрения дифференциал дуги кривой в точке M с абсциссой x равен длине соответствующего отрезка касательной к линии L в точке M(x,y)/ Это отрезок MT.

Если кривая L задана параметрически, уравнениями

$$x=x(t),\quad y=y(t),$$

то с использованием принятых в механике обозначений получим,

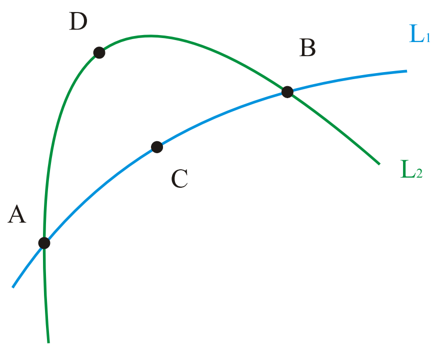
$$x'_t=\dot{x},\quad y'_t=\dot{z},\quad y'_x=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

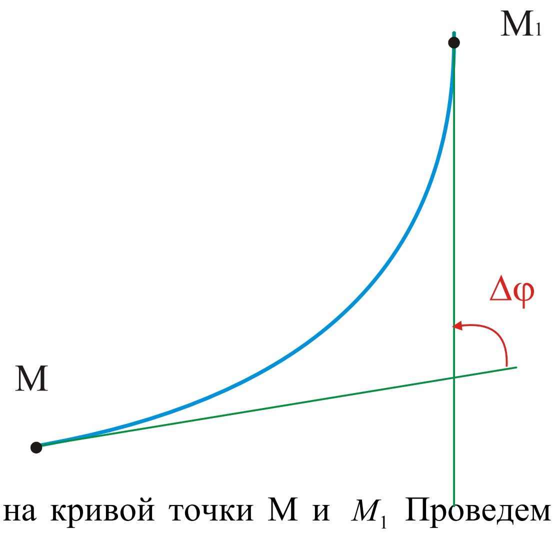
Подставив эти значения в уравнение (5) получим,

$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

Кривизна кривой. Основные определения.

Одной из важных характеристик кривой является мера ее изогнутости. Для введения такой меры необходимо ввести количественную характеристику.





Рассмотрим на кривой точки М и M_1 Проведем в этих точках касательные к кривой. При переходе от точки М к M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$, который называется <u>*углом*</u> <u>*смежности*</u> . Отношение угла смежности дуги к ее длине называется <u>*средней*</u> <u>*кривизной*</u> <u>*дуги*</u>

$$K_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

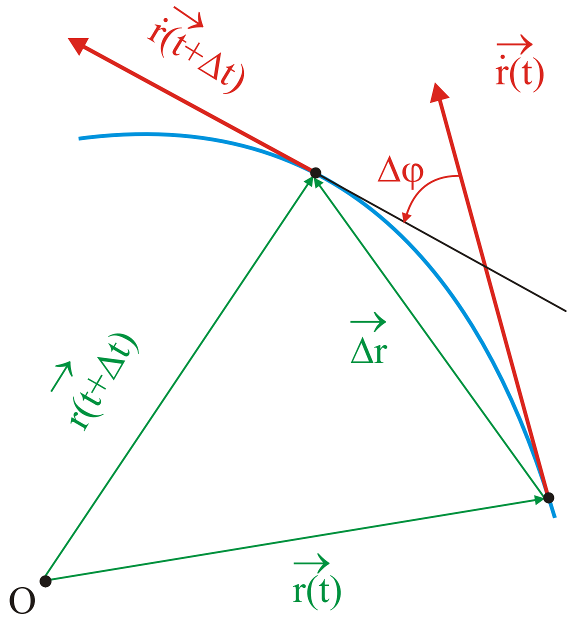
Средняя кривизна характеризует среднюю изогнутость кривой на всей дуге. Для характеристики меры изогнутости кривой в точке введем новое понятие

Определение 7 *Кривизной K линии L в точке M называется предел, к которому стремится средняя кривизна* K_{cp} *дуги* MM_1 *линии L при стремлении точки* M_1 *к точке M:*

$$\boxed{K = \lim_{M_1 \to M} K_{cp} = \left| \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \right|}$$

Вычисление кривизны кривой.

Пусть кривая L является годографом дважды дифференцируемой векторной функции действительного аргумента $\vec{r}(t)$.



Кривизна кривой $K=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right|$. Угол смежности $\Delta\varphi$ - угол между $\dot{\vec r}(t)$ и $\dot{\vec r}(t+\Delta t)$. Вектор $\dot{\vec r}(t+\Delta t)=\dot{\vec r}(t)+\Delta\dot{\vec r}(t)$. Из векторного произведения векторов $\dot{\vec r}(t)$ и $\dot{\vec r}(t)+\Delta\dot{\vec r}(t)$ находим:

$$\sin\Delta\varphi=\frac{\left|\left[\dot{\vec r},\left(\dot{\vec r}+\Delta\dot{\vec r}\right)\right]\right|}{\left|\dot{\vec r}\right|\left|\dot{\vec r}+\Delta\dot{\vec r}\right|}\Rightarrow\sin\Delta\varphi=\frac{\left|\left[\dot{\vec r},\Delta\dot{\vec r}\right]\right|}{\left|\dot{\vec r}\right|\left|\dot{\vec r}+\Delta\dot{\vec r}\right|},$$

так как $\left[\dot{\vec r},\dot{\vec r}\right]=\vec 0$.

При $\Delta t\to 0$ $\Delta l\to 0$ и $\Delta\varphi\to 0$, а также $\Delta\varphi\sim\sin\Delta\varphi$. Следовательно кривизна

$$K=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta l}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\left[\dot{\vec r},\Delta\dot{\vec r}\right]}{\left|\dot{\vec r}\right|\left|\dot{\vec r}(t+\Delta t)\right|\left|\Delta l\right|}\right|=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\left[\dot{\vec r},\dfrac{\Delta\dot{\vec r}}{\Delta t}\right]\right|}{\left|\dot{\vec r}\right|\left|\dot{\vec r}(t+\Delta t)\right|\left|\dfrac{\Delta l}{\Delta t}\right|}.$$

Если $\Delta t\to 0$, то $\dot{\vec r}(t+\Delta t)\to\dot{\vec r}(t)$ и $|\Delta l|\approx|\Delta r|$; тогда

$$\boxed{K=\frac{\left|\left[\dot{\vec r},\ddot{\vec r}\right]\right|}{\left|\dot{\vec r}\right|^3}}\qquad(7)$$

Формула (7) используется, для вычисления кривизны плоской или пространственной кривой L, если она является годографом дважды дифференцируемой вектор - функции $\vec r(t)$.

Пример Вычислить кривизну кривой $\vec r(t)=e^t\vec i+e^{-t}\vec j+t\sqrt2\vec k$ в произвольной точке t и при t=0.

$$\dot{\vec r}(t)=e^t\vec i-e^{-t}\vec j+\sqrt2\vec k,\quad \ddot{\vec r}(t)=e^t\vec i+e^{-t}\vec j$$

$$\left[\dot{\vec r}(t),\ddot{\vec r}(t)\right]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ e^t & -e^{-t} & \sqrt2\\ e^t & e^{-t} & 0\end{vmatrix}=-\sqrt2e^{-t}\vec i+\sqrt2e^t\vec j+2\vec k$$

$$\left|\left[\dot{\vec r}(t),\ddot{\vec r}(t)\right]\right|=\sqrt{2e^{-2t}+2e^{2t}+4}=\sqrt{2\left(e^{-t}+e^t\right)^2}=\sqrt2\left(e^{-t}+e^t\right).$$

$$\left|\dot{\vec r}(t)\right|=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}=\left(e^{-t}+e^t\right).$$

$$K=\frac{\sqrt2\left(e^{-t}+e^t\right)}{\left(e^{-t}+e^t\right)^3}=\frac{\sqrt2}{\left(e^{-t}+e^t\right)^2}=\frac{\sqrt2}{\left(x+y\right)^2}.$$

Замечание Часто при задании векторной функции скалярного аргумента используют *натуральный параметр (*длину дуги). При таком задании кривой $\left|\dot{\vec r}(l)\right|=1$ и вектор $\ddot{\vec r}(l)$ перпендикулярен вектору $\dot{\vec r}(l)$. Тогда формула (7) примет вид

$$K=\left|\ddot{\vec r}(l)\right|.$$

Вычисление кривизны плоской кривой, заданной параметрически.

Пусть гладкая плоская кривая L задана параметрически уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}$$

Запишем вектор - функцию $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ и воспользуемся формулой (7) для определения кривизны этой кривой. Найдем $\dot{\vec{r}}(t)=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}$, $\ddot{\vec{r}}(t)=\ddot{x}(t)\vec{i}+\ddot{y}(t)\vec{j}$. Тогда

$$\left[\dot{\vec{r}}(t),\ddot{\vec{r}}(t)\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & 0 \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & 0 \end{vmatrix}=\left(\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)\right)\vec{k}.$$

$$\left\|\left[\dot{\vec{r}}(t),\ddot{\vec{r}}(t)\right]\right\|=\left|\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)\right|,\quad \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|=\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}$$

Получаем формулу для определения кривизны кривой, заданной параметрически

$$\boxed{K=\frac{\left\|\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]\right\|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}=\frac{\left|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}\right|}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}} \qquad (8)$$

Вычисление кривизны плоской кривой в декартовых координатах.

Если кривая L задана уравнением $y=f(x)$, то формулу для вычисления кривизны можно получить из формулы (8)Ю если явное задание считать параметрическим:

$$\begin{cases} y=f(t) \\ x=t \end{cases}$$

Тогда из формулы (8) имеем $K=\dfrac{\ddot{y}}{\left(1+\left(\dot{y}\right)^2\right)^{3/2}}$ или переходя к уравнению линии в декартовой системе координат ,

$$\boxed{K=\frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left(1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}}$$

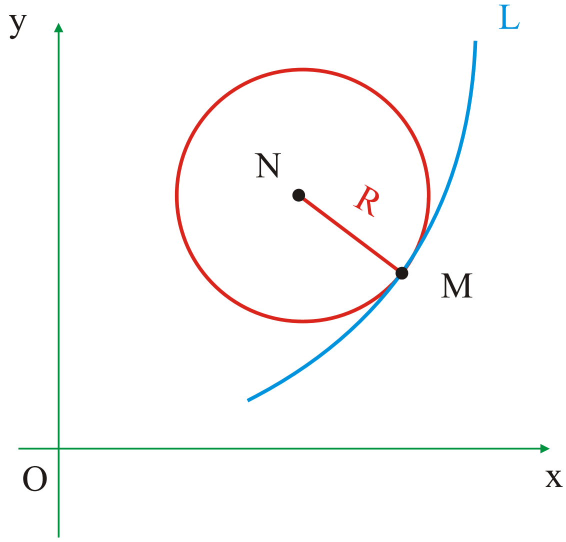
Пример Вычислить кривизну кривой $y=\ln x$ в точке x=1. Ответ: $K=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Пример Найти кривизну в любой точке циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$

Ответ: $K=\dfrac{1}{4a\sin\dfrac{t}{2}}$.

Радиус, круг и центр кривизны.

Проведем к кривой L нормаль в точке M(x;y) и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок $MN=R$, по величине обратный кривизне $K{:}R=1/R$. Отрезок MN называется *радиусом кривизны,* точка N -*центром кривизны,* а круг с центром в точке N и радиусом R - *кругом кривизны кривой в точке M(x;y).*



Если кривая L задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то ее радиус кривизны находится по формуле

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''\right|}$$

Если кривая L задана параметрически, то ее радиус кривизны определяется по формуле

$$R = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\left|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}\right|}$$

Если L - годограф вектор функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$R = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}{\left|\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}\right]\right|}$$