ТМ по Линейной алгебре №2
И пусть удача всегда будет с вами

1. Продолжите равенства $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ и $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ — элементы из поля, а $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.

2. Используя аксиомы линейного пространства и следствия из него, покажите, что $(-\lambda)a = \lambda(-a)$ и $\lambda(a - b) = (-\lambda)(b - a)$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ — элемент из поля, а $a, b \in L$ — элементы линейного пространства.
$(-\lambda)a = (0 - \lambda)a = 0a - \lambda a = -\lambda a = \lambda(-a)$ $\quad \lambda(a - b) = \lambda(a + (-b)) = \lambda a + \lambda(-b) = (-\lambda)(-a + b) = (-\lambda)(b - a)$

3. Какие линейные пространства называются вещественными? Комплексными? Векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ называются вещественными, над $\mathbb{C}$ — комплексными.

4. Какое пространство называется арифметическим (координатным) над полем $\mathbb{F}$? Множество $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n с элементами из F относительно операций поэлементного сложения и умножения на числа — арифметическое или координатное пространство.

5. Почему вещественные многочлены $\mathbb{R}[x]$ фиксированной степени n с естественными операциями сложения и умножения на скаляр не являются линейным пространством? Какая аксиома линейного пространства нарушается? Вещественные многочлены $\mathbb{R}[x]$ фиксированной степени n образуют множество, которое не является линейным пространством, потому что оно не замкнуто относительно операции сложения. Таким образом, нарушается аксиома замкнутости относительно сложения.

6. Сформулируйте определение линейной комбинации векторов. Выражение вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n (\lambda_i \in \mathbb{F})$ называется линейной комбинацией векторов $a_1, ..., a_n \in L$.

7. Сформулируйте определение линейной оболочки. Как обозначается линейная оболочка векторов из множества S? Линейной оболочкой подмножества $S \subseteq L$ называется множество всех векторов из L, представимых в виде конечных линейных комбинаций элементов из S. Она обозначается $\langle S \rangle$.

8. В каком случае пространство L порождается множеством векторов S? Говорят, что пространство L порождается множеством S, если $\langle S \rangle = L$.

9. Какая линейная комбинация векторов называется тривиальной? Нетривиальной? Линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n$ векторов $a_1, ..., a_n \in L$, где $\lambda_i \in \mathbb{F}$ называется тривиальной, если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, и нетривиальной в противном случае.

10. В каком случае векторы называются линейно зависимыми? Независимыми? Векторы $a_1, a_2, ..., a_n \in L$ называются линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и линейно независимыми в противном случае.

11. Дайте определение понятия системы векторов? Чем система отличается от множества? Система векторов — это конечный или бесконечный набор векторов, который может быть использован для описания линейных комбинаций и анализа линейной зависимости или независимости. Понятие системы векторов отличается от понятия множества векторов следующим: 1. Векторы системы занумерованы (если не менять сами векторы, но поменять лишь их нумерацию, получим уже другую систему); 2. Среди них могут быть равные. Может быть пустая система, состоящая из пустого множества векторов.

12. В каком случае система векторов называется линейно зависимой? Если любая её подсистема тоже линейно независима / Система векторов называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю.

13. Может ли система, состоящая из одного вектора, быть линейно зависимой? Почему? Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой. Если вектор ненулевой, то он является линейно независимым, так как не может быть представлен как линейная комбинация других векторов (поскольку других векторов нет).

14. Сформулируйте определение базиса линейного пространства. Система векторов $e_1, e_2, ..., e_n \subseteq L$ называется базисом векторного пространства L, если каждый вектор $a \in L$ единственным образом выражается через $e_1, e_2, ..., e_n$.

15. Может ли в линейно независимой системе векторов быть линейно зависимая подсистема? Почему? Нет, в линейно независимой системе векторов не может быть линейно зависимой подсистемы. Линейная независимость означает, что ни один из векторов не может быть представлен как линейная комбинация других векторов в этой системе. Если бы существовала линейно зависимая подсистема, это противоречило бы определению линейной независимости всей системы.

16. Укажите возможный базис пространства $\mathbb{F}^n$. Единичные столбцы $(1, 0, ..., 0)^T$, $(0, 1, ..., 0)^T$, ..., $(0, 0, ..., 1)^T$ составляют базис пространства $\mathbb{F}^n$;

17. Приведите пример базиса в пространстве матриц размерности 2×3. (1 0 0) (0 0 0) дальше единичку переставляем вправо, получая 6 матриц.

18. Что называется размерностью векторного пространства? Как обозначается размерность пространства L? Число элементов произвольного базиса (если он существует) в L называется размерностью пространства L и обозначается $dimL$.

19. Чему равна размерность пространства 0? В пространстве $\{0\}$ базисом по определению является пустая система (то есть его размерность равна нулю).

20. Какое линейное пространство называется конечномерным? Бесконечномерным? Если базиса в смысле определения не существует, то можно считать, что $dimL = \infty$. Если $dimL < \infty$, то пространство называется конечномерным.

21. В каком случае подмножество $U \subset L$ будет являться подпространством L? 1. U является подгруппой аддитивной группы L; 2. $a \in U \Rightarrow \lambda \in U$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$.

22. Какие подпространства L называются тривиальными? В любом пространстве L есть «тривиальные» подпространства $\{0\} \leq L, L \leq L$;

23. Как связаны размерности подпространства и пространства, если они конечномерны? $\mathbb{R}_n[x] \leq \mathbb{R}[x]$

24. Какое множество называется линейным многообразием? Как определяется его размерность? Множество векторов вида ($U \leq V$ a - фиксированный вектор) $x = a + u = \{a + u | u \in U\}$ называется линейным многообразием размерности $dimU$

25. При каком условии линейное многообразие называют гиперплоскостью в линейном пространстве? Как иначе называют гиперплоскость в пространстве dim V $=$ 2. $k = dimV - 1$. Прямая.

26. При каком условии линейное многообразие является подпространством? $a \in U$ (задание 24)

27. В каком случае размерность подпространства $U \leq V$ совпадает с размерностью пространства V ? Если подпространство U имеет ту же размерность, что и все пространство V, то это означает, что U содержит все векторы из V, и, следовательно, U совпадает с V.

28. Напишите размерности пространства диагональных матриц $Mat_n^D(R)$, пространства полиномов $\mathbb{R}[x] \leq n$ степени не выше n, комплексного арифметического пространства Cn. $n, n+1, n$ 1.Так как диагональная матрица имеет n диагональных элементов 2.Так как базисом этого пространства могут быть полиномы $1, x, x^2, \ldots, x^n$ 3. Так как это пространство состоит из n-мерных векторов с комплексными координатами

29. Какие линейные пространства называются изоморфными? Векторные пространства U и V над полем $\mathbb{F}$ называются изоморфными, если существует такое биективное отображение $\phi : V \to U$, что $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ для любых $a, b \in V$; $\phi(\lambda a) = \lambda\phi(a)$ для любых $\lambda \in \mathbb{F},\ a \in V$.

30. Благодаря чему существует возможность построить изоморфизм между линейным пространством и координатным пространством той же размерности? Возможность построить изоморфизм между линейным пространством и координатным пространством той же размерности основана на существовании базиса в линейном пространстве. Каждому вектору в линейном пространстве можно сопоставить координаты относительно базиса, что позволяет установить взаимно однозначное соответствие между элементами линейного пространства и элементами координатного пространства.

31. Почему изоморфность линейных пространств является отношением эквивалентности? Изоморфность линейных пространств — это отношение эквивалентности, т.к. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

32. Назовите достаточное условие того, чтобы линейные пространства были изоморфными. Если два линейных пространства имеют одинаковую конечную размерность и находятся над одним и тем же полем, то они изоморфны.

33. Сформулируйте определение ранга матрицы. Рангом системы векторов называется размерность ее линейной оболочки.

34. Дайте определение базисного минора. Ненулевой минор наибольшего порядка порядка.

35. Сформулируйте теорему о базисном миноре. Столбцы (строки), пересекающие базисный минор матрицы, линейно независимы. Любой столбец (строка) матрицы, является линейной комбинацией базисных.

36. Как найти ранг ступенчатой матрицы? Посчитать количество ненулевых строк.

37. Сформулируйте теорему о ранге суммы и произведения матриц. Имеют место следующие свойства: $rank(A+B) \leq rank(A)+rank(B)$, $rank(AB) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$

38. О чём говорит характеристика совместности СЛАУ? Несовместности? Совместно определена - 1 решение. Совместно не определена - решений более 1. Несовместна - нет решений.

39. Напишите теорему Кронекера-Капелли. СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.

40. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если $rk(A|b) = rk(A) = n$, где n – количество неизвестных, $rk(A|b), rk(A)$ – ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно? Существует 1 решение. Определенная система.

41. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если $rk(A|b) = rk(A) + 1$, где $rk(A|b), rk(A)$ – ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно? Нет решений. СЛАУ несовместна.

42. Что можно сказать о решениях СЛАУ, если $rk(A|b) = rk(A) < n$, где n – количество неизвестных, $rk(A|b), rk(A)$ – ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов соответственно? В таком случае имеется более одного решения, а сами системы называются неопределёнными. Если поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то и решений бесконечно много.

42. В каком случае СЛАУ называется однородной? Неоднородной? СЛАУ называется однородной, если столбец свободных членов является нулевым вектором, в остальных случаях - неоднородой.

43. Какой алгебраической структурой обладает множество решений однородной СЛАУ? Множество $X = x \in \mathbb{F}^n | Ax = 0$ решений однородной СЛАУ образует линейное подпространство $X \leq \mathbb{F}^k$.

44. Когда однородная СЛАУ имеет ненулевое решение? Однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов меньше числа переменных. Это означает, что система имеет свободные переменные.

45. Чему равна размерность пространства X решений однородной СЛАУ с n неизвестными и матрицей коэффициентов A? $dimX = n - rankA$

47. Сформулируйте определение ФСР (фундаментальной системы решений). Базис пространства решений однородной СЛАУ называется фундаментальной системой решений (ФСР).

48. Что называется общим решением однородной СЛАУ? Линейная комбинация векторов ФСР.

49. Опишите способ задания подпространства как решения однородной СЛАУ. Подпространство можно задать как множество всех решений однородной СЛАУ. Если у нас есть система уравнений в виде матрицы $Ax = 0$, то подпространство решений будет состоять из всех векторов x, которые удовлетворяют этому уравнению. Это подпространство будет линейным и будет включать нулевой вектор.

50. Запишите теорему о структуре решений неоднородной СЛАУ. Общее решение неоднородной СЛАУ вида $Ax = b$ имеет вид $x = \widetilde{x} + x_0$, где $Ax_0 = 0$ и $A\widetilde{x} = b$

51. Запишите альтернативу Фредгольма. Если в СЛАУ $Ax = b$ число уравнений равно числу неизвестных, то либо она имеет единственное решение при любых значениях правой части, либо однородная СЛАУ $Ax = 0$ обладает ненулевым решение.

52. Пусть $U, W \leq L$. Как определяется сумма U и W? $U + W = \{u + w | v \in U, w \in W\} \leq V$

53. Из каких элементов состоит пересечение подпространств U и W? Как обозначается пересечение пространств? Пусть U и W — подпространства векторного пространства V. Пересечение $U \cap W$ множеств U и W замкнуто относительно операций из V и является подпространством V. Оно называется пересечением подпространств U и W. То есть $U \cap W = \{v | v \in U \text{ и } v \in W\} \leq V$.

54. Какой из операций с подпространствами U и V определяется наименьшее подпространство, содержащее оба эти подпространства? Минимальное подпространство, содержащее оба подпространства U и W, называется суммой подпространств U и W и обозначается $U+W$. То есть, если $U, W \leq U$, то $U+W = \{u+w | v \in U, w \in W\} \leq V$ (объединение)

55. Какой из операций с подпространствами U и V определяется наибольшее подпространство, которое содержится в обоих подпространствах? $U \cap W$ — наибольшее подпространство, содержащееся в как U, так и в W.

56. В каком случае базис называется согласованным с подпространством? Базис пространства V называется согласованным с подпространством U, если U является линейной оболочкой какой-то части базисных векторов пространства V.

57. Напишите формулу Грассмана. Для любых двух конечномерных подпространств U и W произвольного векторного пространства V верно равенство $dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$.

58. В каком случае сумма подпространств U и W называется прямой? Как обозначается прямая сумма этих пространств? Сумма $U + W$ называется прямой, если для любого вектора $v \in U + W$ представление $v = u + w$, где $u \in U, w \in W$ единственно. Прямая сумма обозначается $U \oplus W$ или $U \dot{+} W$.

59. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором сумма двух подпространств является прямой. Для того, чтобы сумма двух подпространств U и W была прямой, необходимо и достаточно, чтоб их пересечение было нулевым.

60. Пусть $U \leq V$. Какое пространство называется прямым дополнением U в V? Пусть $U \leq V$. Подпространство $W \leq V$ называется прямым дополнением к U в V, если $V = U \oplus W$.

61. Пусть $\oplus_{i=1}^{n} U_i = V$. Что называется проекцией вектора $v \in V$ на подпространство U_i?

62. Что позволяет представить конечномерное пространство в виде прямой суммы одномерных пространств? Для представления конечномерного пространства в виде прямой суммы одномерных пространств необходимо иметь набор линейно независимых векторов, который образует базис этого пространства. Каждый вектор базиса будет представлять одно одномерное подпространство, и их прямая сумма будет равна всему пространству.

63. Дайте определение матрице перехода. Как она обозначается? Невырожденная матрица T называется матрицей перехода от базиса $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ к базису $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^{n}$. $T = (e \rightsquigarrow \widetilde{e})$

64. Как связать с помощью матрицы перехода две строки, элементы которых являются базисными векторами?

65. Запишите свойства матрицы перехода. 1. $(e \rightsquigarrow e) = E$; 2. $(e \rightsquigarrow f) = (e \rightsquigarrow g)(g \rightsquigarrow f)$; 3. $(e \rightsquigarrow f)$ обратима и $(e \rightsquigarrow f)^{-1} = (f \rightsquigarrow e)$.

66. Пусть $C = (e \rightsquigarrow \widetilde{e})$ — матрица перехода, $\widetilde{X}, X$ − координатные столбцы вектора $x \in V$ в базисе e и $\widetilde{e}$ соответственно. Запишите связь между перечисленными объектами. Тогда для любого вектора $x \in V$ выполнено $\widetilde{X} = (\widetilde{e} \rightsquigarrow e)X$.

67. Какое преобразование называется контравариантным? Чтобы получить столбец координат в новом базисе, нужно слева умножить столбец его координат в старом базисе на матрицу, обратную к матрице перехода от старого базиса к новому. Еще говорят, что координаты вектора в базисе преобразуются контравариантно.

68. Что такое полная линейная группа и как она обозначается? Множество невырожденных квадратных матриц n-го порядка с операцией умножения называется полной линейной группой и обозначается $GL(n)$.

69. Что такое специальная линейная группа и как она обозначается? Специальной линейной группой $SL(n)$ называется группа, которая образована подмножеством $GL(n)$ квадратных матриц, определитель которых равен 1.

70. Какие матрицы содержатся в унитреугольной группе? Унитреугольная группа $UT(n)$ — множество верхнетреугольных матриц, все диагональные элементы которых равны 1.

71. Каким свойством обладают ортогональные матрицы по определению? $C^T = C^1$, то есть $C^T C = CC^T = E$.

72. Запишите общий вид матрицы поворота в двумерном пространстве.

$$\begin{matrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{matrix}$$

73. Какие объекты необходимо задать, чтобы определить элемент евклидовой группы? Для определения элемента евклидовой группы необходимо задать преобразование, которое включает в себя комбинацию изометрий: параллельный перенос (вектор), вращение (угол) и возможное отражение (по оси).