

**Демонстрационный вариант**

Ниже представлены задания КР. В некоторых из них есть подпункты а), б) ... , они отражают вариации этих заданий. При написании КР вам попадётся одна из них.

**Задание 1. Метод математической индукции**

- а) Найдите краткую формулу для суммы при любом  $n \in \mathbb{N}$ :  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ .
- б) Докажите, что для любого натурального числа  $n$  величина  $5^{2n-1} + 2^{2n+2}$  делится на 21.
- в) Докажите, что при любых натуральных  $n$  справедливо неравенство  $3^n > 2^n + n$ .

**Задание 2. Ограниченность множеств**

- а) Докажите, что множество  $\{x_n\} = \left\{\frac{2n+1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$  ограничено. Найдите  $\sup\{x_n\}$  и  $\inf\{x_n\}$ , а также  $\max\{x_n\}$  и  $\min\{x_n\}$ , если они существуют.
- б) Докажите, что множество  $\{x_n\} = \left\{\frac{1-n^4}{n^3+5}, n \in \mathbb{N}\right\}$  неограниченно.

**Задание 3. Предел последовательности по определению**

Исходя из определения предела последовательности, докажите, что:

- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n+5} = 4$ , б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5n^2}{3n+6} = -\infty$ .

**Задание 4. Предел функции по Коши**

Исходя из определения предела функции по Коши, докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$ .

**Задание 5. Предел функции по Гейне**

Исходя из определения предела функции по Гейне, докажите, что не существует  $\lim_{x \rightarrow 0} \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**Задание 6. Теорема Вейерштрасса и критерий Коши**

- а) При помощи теоремы Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности докажите, что последовательность сходится:  $x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1} + \dots + \frac{1}{5^{n+1}+1}$ .
- б) При помощи критерия Коши докажите, что последовательность сходится:  $x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1} + \dots + \frac{1}{5^{n+1}+1}$ .

**Задание 7. Подпоследовательности**

Выделив подпоследовательности, докажите, что последовательность  $x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n}\right)$  расходится, найдите  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Задание 8. Арифметические свойства пределов**

Вычислите при помощи арифметических свойств пределов:

- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2-4n+7}{\sqrt{n^4+6n^2-7}}$  б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$  в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2+5x+1}{x^3+1}$  г)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-3}-1}$

**Задание 9. Второй замечательный предел**

Вычислите при помощи второго замечательного предела:

- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2n}{5-2n}\right)^{\frac{n-6}{2}}$  б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2}{x^2+3}\right)^{2x^2+6}$  в)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{4}{2-x}}$

**Задание 10. Замена на эквиваленты**

Вычислите при помощи замены на эквиваленты:

- а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{x \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin(x/2)}{1-\cos 4x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x^2-1}$