Векторные пространства

Содержание

§1. Определение векторного пространства

Опр. 1.1. ***Векторным*** (***линейным***) ***пространством*** над полем $\mathbb{F}$ (например, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется множество L с операциями сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{F}$, обладающими следующими свойствами (***аксиомами векторного пространства***):

1. Относительно сложения L есть абелева группа;
2. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ для любых $a, b \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
3. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
4. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
5. $1a = a$ для любого $a \in L$.

NtB. Элементы пространства L называются ***векторами***, поля $\mathbb{F}$ — ***скалярами*** или ***числами***. Векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ называются ***вещественными***, над $\mathbb{C}$ — ***комплексными***.

NtB. Наличие противоположного элемента позволяет ввести операцию вычитания: $a - b := a + (-b)$.

Лемма 1.1. *Следствия аксиом векторного пространства (докажите их!):*

1. $\lambda 0_L = 0_L$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ (здесь 0_L — нулевой вектор);
2. $\lambda(-a) = \lambda a$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
3. $\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a, b \in L$;
4. $0a = 0_L$ для любого $a \in L$ (здесь 0 слева — скаляр, справа — вектор);
5. $(-1)a = -a$ для любого $a \in L$;
6. $(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$.

Пример 1.1. Примеры линейных пространств:

(a) Пространство $\{0\}$, состоящее только из нулевого вектора;

(б) Множество $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n с элементами из $\mathbb{F}$ относительно операций поэлементного сложения и умножения на числа — ***арифметическое*** или ***координатное*** пространство;

(в) Множество $F(X, \mathbb{F})$ всех функций на множестве X со значениями в поле $\mathbb{F}$ относительно операций поточечного сложения и умножения на числа;

(г) Множество $\mathbb{C}$ с привычными операциями можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{R}$;

(д) Геометрические векторы со стандартными операциями сложения и умножения на числа;

(е) Вещественные квадратные матрицы $M_{m,n}(\mathbb{R})$ размерности $m \times n$ относительно стандартных операций сложения и умножения на числа;

(ж) Вещественные многочлены $\mathbb{R}[x]$ с естественными операциями;

(з) Вещественные многочлены степени ровно n с естественными операциями **не являются** векторным пространством.

§2. Линейные комбинации и оболочки

Опр. 2.1. Выражение вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ $(\lambda_i \in \mathbb{F})$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$. Скаляры λ_i называются ***коэффициентами*** линейной комбинации. Говорят, что вектор $b \in L$ ***линейно выражается*** через векторы $a_1, \ldots, a_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации.

Опр. 2.2. ***Линейной оболочкой*** подмножества $S \subseteq L$ называется множество всех векторов из L, представимых в виде конечных линейных комбинаций элементов из S. Она обозначается $\langle S \rangle$. Говорят, что пространство L ***порождается*** множеством S, если $\langle S \rangle = L$

Пример 2.1. Примеры линейных оболочек:

(а) Линейная оболочка матричных единиц $E_{11}, \ldots, E_{nn} \in M_n(\mathbb{R})$ — множество диагональных матриц n-го порядка;

(б) Линейная оболочка многочленов $1, x, x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ — все вещественные многочлены степени не выше второй степени;

(в) Пространство $\mathbb{R}_3[x]$ вещественных многочленов степени не выше 3 порождается, например, множеством $5x^3, x^3 - 7, 4x^2, 2x + 9, 3x, 2$.

Опр. 2.3. Линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ векторов $a_1, \ldots, a_n \in L$, где $\lambda_i \in \mathbb{F}$ называется ***тривиальной***, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, и ***нетривиальной*** в противном случае.

Опр. 2.4. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ называются ***линейно зависимыми***, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и ***линейно независимыми*** в противном случае.

NtB. Понятие ***системы векторов*** отличается от понятия множества векторов следующим:

1. Векторы системы занумерованы (если не менять сами векторы, но поменять лишь их нумерацию, получим уже <u>другую</u> систему);
2. Среди них могут быть равные.

Может быть ***пустая система***, состоящая из пустого множества векторов.

Пример 2.2. Примеры линейной зависимости:

(а) Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой;

(б) Система, состоящая из двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы пропорциональны;

(в) Три геометрических векторы линейной зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны;

(г) Векторы 1, x, $x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ линейно независимы, векторы 2, $3x$, $5 + x \in \mathbb{R}_2[x]$ линейно независимы.

Лемма 2.1. *Свойтсва линейно (не)зависимых систем:*

1. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из этих столбцов есть линейная комбинация остальных;*
2. *Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то вся система линейно зависима;*
3. *Если система векторов линейно независима, то любая её подсистема тоже линейно независима.*

§3. Базис и размерность

Опр. 3.1. Система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq L$ называется ***базисом*** векторного пространства L, если каждый вектор $a \in L$ <u>единственным</u> образом выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Коэффициенты этого выражения называются ***координатами*** вектора a в данном базисе.

NtB. Переход от вектора к его координатам в некотором базисе позволяет вместо изначального пространства рассматривать соответствующее координатное пространство.

Пример 3.1. Примеры базисов:

(а) Любые два неколлинеарных вектора составляют базис пространства геометрических векторов плоскости;

(б) Любые два некомпланарных вектора составляют базис пространства геометрических векторов пространства;

(в) Единичные столбцы $(1, 0, \dots, 0)^T$, $(0, 1, \dots, 0)^T$, …, $(0, 0, \dots, 1)^T$ составляют базис пространства $\mathbb{F}^n$;

(г) Система $\{1, i\}$ является базисом $\mathbb{C}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$. Координатами комплексного числа в данном базисе являются его вещественная и мнимая части;

(д) Стандартные матричные единицы E_{ij} образуют базис пространства $M_n(\mathbb{R})$;

(е) Система $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ — базис пространства $\mathbb{R}_n[x]$ вещественных многочленов степени не выше n.

Лемма 3.1. *Набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, порождающий векторное пространство L, является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.*

Доказательство. Если $\sum \lambda_i e_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $x = \sum x_i e_i$ допускает *другое* выражение $x = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$ через векторы e_i. Обратно, если $x = \sum x_i e_i = \sum \widetilde{x}_i e_i$ — два различных представления одного вектора, то, перенося правую часть в середину, получаем линейную зависимость $\sum (x_i - \widetilde{x}_i) = 0$. $\square$

NtB. В силу данной леммы можно переформулировать определение базиса следующим образом: ***базисом*** векторного пространства V называется всякая линейно независимая система, порождающая пространство L.

NtB. Не во всяком векторном пространстве существует базис в смысле данного выше определения. Вообще, если в пространстве существует базис из n векторов, то и любой другой базис этого пространства тоже содержит n векторов. Число элементов произвольного базиса (если он существует) в L называется ***размерностью*** пространства L и обозначается $\dim L$. В пространстве $\{0\}$ базисом по определению является пустая система (то есть его размерность равна нулю). Если базиса в смысле данного вышего определения не существует, то можно считать, что $\dim L = \infty$. Если $\dim L < \infty$, то пространство называется ***конечномерным***.