Подпространства

Содержание

§1. Подпространства и линейные многобразия

Опр. 1.1. Подмножество U векторного пространства L называется ***подпространством***, если

1. U является подгруппой аддитивной группы L;
2. $a \in U \Rightarrow \lambda a \in U$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$.

Тот факт, что U является подпространством V будем обозначать $U \leqslant L$.

NtB. Подпространство векторного пространства само является векторным пространством относительно тех же операций. Соответственно, сохраняют смысл понятия линейной зависимости, базиса, размерности.

Пример 1.1. Примеры подпространств:

(а) В любом пространстве L есть «тривиальные» подпространства $\{0\} \leqslant L$, $L \leqslant L$;

(б) $\mathbb{R}_n[x] \leqslant \mathbb{R}[x]$;

(в) В пространстве $F(X, \mathbb{R})$ всех функций на заданном промежутке X числовой прямой множество непрерывных функций является подпространством;

(г) Множество векторов, параллельных заданной плоскости, — подпространство в пространстве геометрических векторов;

(д) Множество диагональных матриц является подпространством в $M_n(\mathbb{R})$;

(е) Линейная оболочка набора векторов является подпространством в изначальном пространстве.

(ж) Множество решение однородной СЛАУ $Ax = 0$ над $\mathbb{F}$ является подпространством в соответствующем координатном пространстве;

Опр. 1.2. Пусть $U \leqslant L$, $a \in L$ — фиксированный вектор. Множество векторов вида $x = a + U = \{a + u \,|\, u \in U\}$ называется ***линейным многообразием*** размерности $\dim U$. Говорят, что оно параллельно подпространству U. Одномерное линейное многообразие называется ***прямой***, k-мерное — ***k-мерной плоскостью***, если $1 < k < \dim V - 1$, ***гиперплоскостью*** — если $k = \dim V - 1$.

Пример 1.2. Примеры линейных многообразий:

(а) В пространстве геометрических векторов, исходящих из точки O, прямая и гиперплоскость $x = a+U$ — это обычные прямая и плоскость, смещённые относительно точки O на вектор a и параллельные прямой или плоскости U, проходящей через точку O;

(б) Множество многочленов, производная которых равна $3x^2 + 4x$, является линейным многообразием в пространстве $\mathbb{R}_3[x]$. В этом случае $a = x^3+2x^2$, $U = \mathbb{R}_0[x] = \mathbb{R}$.

NtB. Линейное многообразие является подпространством только при условии $a \in U$. При этом оно совпадает с U.

§2. Изоморфизм векторных пространств

Опр. 2.1. Векторные пространства U и V над полем $\mathbb{F}$ называются ***изоморфными***, если существует такое биективное отображение $\varphi : V \to U$, что

- $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для любых $a, b \in V$;
- $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in V$.

Само отображение φ называется при этом ***изоморфизмом*** пространств.

Теорема 2.1. *Всякое векторное пространство V над полем $\mathbb{F}$, имеющее базис из n векторов, изоморфно пространству $\mathbb{F}^n$.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис V. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to \mathbb{F}^n$, которое ставит в соответствие каждому вектору из V его координатную строку в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. В силу определения базиса оно биективно. Если $a = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots a_ne_n$ и $b = b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots b_ne_n$, то

$$a + b = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + \ldots (a_n + b_n)e_n,$$

$$\lambda a = (\lambda a_1)e_1 + (\lambda a_2)e_2 + \ldots (\lambda a_n)e_n.$$

Из этого следует, что φ — изоморфизм. □

Пример 2.1. Примеры изоморфных пространств:

(а) Пространство квадратных матриц $M_n(\mathbb{R})$ изоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$;

(б) Пространство полиномов $\mathbb{R}_n[x]$ степени не выше n изоморфно$\mathbb{R}^{n+1}$.

Следствие 2.1.1. *Любые два векторных конечномерных пространства одной размерности на одним полем изоморфны.*

NtB. Изоморфность линейных пространств — это отношение эквивалентности, т.к. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

NtB. Существование изоморфизма между линейными пространствами (а вообще говоря и между другими алгебраическими системами) позволяет изучать структуру одного пространства, опираясь на свойства изоморфному ему. Так например часто мы будем изучать линейные пространства, исследуя изоморфное ему координатное пространство.

§3. Ранг матрицы и его свойства

NtB. На основе понятия размерности векторного пространства введём понятие ранга системы векторов и ранга матрицы.

Опр. 3.1. ***Рангом системы векторов*** называется размерность её линейной оболочки. ***Строчным рангом матрицы*** называется ранг системы её строк. ***Столбцовым рангом матрицы*** называется ранг системы её столбцов.

Опр. 3.2. ***Минорным рангом матрицы*** называется наибольший порядок отличного от нуля минора матрицы. Сам этот минор называется ***базисным***.

Теорема 3.1. ***(о базисном миноре)*** *Столбцы (строки), пересекающие базисный минор матрицы, линейно независимы. Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией базисных.*

Доказательство. Все рассуждения проведем для столбцов, для строк они аналогичны. Предположим, что столбцы, пересекающие базисный минор, линейно зависимы. Тогда один из этих столбцов есть линейная комбинация остальных. Но тогда, по свойствам определителей, базисный минор должен равняться нулю, что противоречит определению базисного минора. Не нарушая общности будем считать, что базисный минор расположен в левом верхнем углу матрицы и его порядок равен r. Рассмотрим определитель Δ_{r+1} порядка $r+1$, полученный добавлением к базисному минору i-той строки и j-того столбца. Если $i \leqslant r$ или $j \leqslant r$, то Δ_{r+1} содержит две одинаковых строки или два одинаковых столбца. А если $i > r$ и $j > r$, то Δ_{r+1} оказывается минором порядка $r+1$ и он равен нулю. То есть, всегда $\Delta_{r+1} = 0$. Разложим его по последней строке, обозначив алгебраические дополнения элементов этой строки $A_{i1} = \lambda_1$, $A_{i2} = \lambda_2$, $\ldots$, $A_{ir} = \lambda_r$, $A_{ij} = \lambda_{r+1}$. Заметим, что эти алгебраические дополнения не зависят от того, какая именно строка на последнем месте, поэтому в индексах λ_j отсутствует зависимость от i. Тогда $\Delta_{r+1} = a_{i1}\lambda_1 + \ldots + a_{ir}\lambda_r + a_{ij}\lambda_{r+1}$. Набор этих равенств равносилен соотношению для столбцов матрицы $\overline{0} = \overline{a}_1\lambda_1 + \ldots + \overline{a}_r\lambda_r + \overline{a}_j\lambda_{r+1}$. Так как $\lambda_{r+1} = A_{ij}$, то есть базисный минор,который не равен нулю. Значит, на λ_{r+1} можно обе части равенства разделить и выразить $\overline{a}_j$. В силу произвольности j, любой столбец есть линейная комбинация базисных. $\square$

Следствие 3.1.1. *Минорный, столбцовый и строчный ранги матрицы совпадают, поэтому можно говорить просто о* ***ранге*** *матрицы A. Обозначается он $rg\,A$, $rk\,A$, $\operatorname{rank} A$, $rang\,A$, $r(A)$.*

Следствие 3.1.2. *Если матрица квадратная и вырожденная, то её столбцы (строки) линейно зависимы.*

Теорема 3.2. ***(о ранге матрицы)*** *Ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк (столбцов).*

Доказательство. Доказательство следует из определения ранга матрицы и теоремы о базисном миноре. $\square$

Следствие 3.2.1. *Ранг матрицы не меняется при умножении её на на любую невырожденную матрицу.*

Лемма 3.1. *Имеют место следующие свойства:*

1. *При элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы её ранг не меняется;*
2. *Каждая матрица элементарными преобразованиями строк приводится к ступенчатому виду;*
3. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк.*

Теорема 3.3. ***(о ранге суммы и произведения матриц)*** *Имеют место следующие свойства:*

- $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$;
- $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

Доказательство. Справедливость первого неравенства следует из того, что строки матрицы $A+B$ получаются в результате суммирования строк матриц A и B. Следовательно размерность линейной оболочки строк $A+B$ не может превышать сумм размерностей линейной оболочки строк матрицы A и линейной оболочки строк матрицы B.

Справедливость второго неравенства следует из того, что столбцы матрицы $A \cdot B$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы A, а значит количество линейно независимых столбцов (столбцовый ранг) матрицы $A \cdot B$ не может превышать количество линейно независимых стольцов матрицы A. Аналогичное утверждение можно сформулировать и для строк $A \cdot B$, представляемых линейными комбинациями строк матрицы B. Из этого можно сделать вывод, что ранг матрицы $A \cdot B$ не превышает (столбцового) ранга A и (строчного) ранга B, откуда следует само неравенство. $\square$