Системы линейных уравнений

Содержание

§1. Основные определения

Опр. 1.1. **Системой линейных алгебраических уравнений** называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

При этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*, $\{a_{ij}\}$ - *коэффициентами* системы и $b_1, b_2, \ldots b_m$ - *свободные члены*.

NtB 1.1. *Решить* систему линейных алгебраических уравнений значит найти такие значения ее неизвестных, при которых все уравнения системы окажутся верными равенствами.

NtB 1.2. В настоящей лекции мы остановимся на частном случае систем, для которых число уравнений равно числу неизвестных, и определитель матрицы $A = \|a_{ij}\|$ отличен от нуля.

§2. Методы решения СЛАУ

NtB 2.1. В качестве примера, демонстрирующго методы решения СЛАУ, рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Матрица A данной системы иметт вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Метод Крамера

NtB 2.2. Метод Крамера заключается в вычислении определителя матрицы A и определителей, полученных из матрицы A подстановкой столбца b в эту матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем определители:

$$\Delta = \det A, \quad \Delta_1 = \det A_1, \quad \Delta_2 = \det A_2, \quad \Delta_3 = \det A_3,$$

и вычисляем значения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Прямой подстановкой убеждаемся в правильности решения.

Метод Гаусса

Опр. 2.1. Эквивалентными преобразованиями матрицы называются следующие три вида преобразований:

(а) перестановка местами произвольных строк матрицы;

(б) умножение произвольной строки матрицы на число $\lambda \neq 0$;

(в) прибавление к произвольной строке матрицы другой строки;

NtB 2.3. Применение элементарных преобразований к расширенной матрице

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3. \end{pmatrix}.$$

позволяет получить эквивалентную систему, которая имеет такое же решение как и исходная.

Метод Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу системы к верхнетреугольному виду и затем, используя метод подстановки найти решение:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3. \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3. \end{pmatrix}$$

Откуда сразу получаем:

$$x_3 = \frac{d_3}{c_{33}}, \quad x_2 = \frac{d_2 - c_{23}x_3}{c_{22}}, \quad x_1 = \frac{d_1 - c_{12}x_2 - c_{1_3}x_3}{c_{11}}.$$

Метод обратной матрицы

NtB 2.4. Исходную систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = b$$

Решим данное матричное уравнение формально, используя тот факт, что матрица A^{-1}, обратная к матрице A существует:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Rightarrow \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}b.$$

Вычислить матрицу A можно, использовав один из способов:

- **метод Гаусса** - элементарными преобразованиями строк, необходимо из матрицы A получить единичную матрицу E, обратная матрица тогда возникнет из следующей конструкции:

$$[A|E] \sim \left[E|A^{-1}\right]$$

- **метод союзной матрицы** - вычислив *союзную матрицу* $\widehat{A}$, найти A^{-1} с использованием следующей формулы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}^T$$

Рассмотрим способ вычисления союзной матрицы. Пусть

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix},$$

тогда m_{ij} равен определителю матрицы 2×2, полученной из исходной матрицы A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j, умноженному на число $(-1)^{i+j}$.

Опр. 2.2. Число m_{ij} называется **алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} матрицы A.

NtB 2.5. Таким образом, союзная к A матрица - это матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями соответствующих элменетов матрицы A.