

Занятие 3. Интегрирование по частям

Составитель: Блинова И.В.

I. Интегралы вида:

$\int P_n(x) \sin mx dx$, $\int P_n(x) \cos mx dx$, $\int P_n(x) e^{ax} dx$, где $P_n(x)$ многочлен ($u = P_n(x)$)

1) $\int x e^{-x} dx$ Ответ: $-e^{-x}(x+1) + C$

2) $\int x \cos x dx$ Ответ: $x \sin x + \cos x + C$

3) $\int (2x+5)e^{\frac{x}{3}} dx$ Ответ: $(6x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$

4) $\int x^2 \sin 4x dx$ Ответ: $\frac{x \sin 4x}{8} - \frac{x^2 \cos 4x}{4} + \frac{\cos 4x}{32} + C$

5) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$ Ответ: $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| + C$

II. Интегралы вида:

$\int P_n(x) \ln x dx$, $\int P_n(x) \arcsin x dx$, $\int P_n(x) \arccos x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx$ ($dv = P_n(x)$)

1) $\int x \ln x dx$ Ответ: $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

2) $\int \ln x dx$ Ответ: $x(\ln x - 1) + C$

3) $\int x \ln^2 x dx$ Ответ: $\frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C$

4) $\int \operatorname{arctg} x dx$ Ответ: $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

5) $\int x^2 \operatorname{arcctg} x dx$ Ответ: $\frac{x^3}{3} \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{6} (x^2 - \ln(x^2 + 1)) + C$

6) $\int \arcsin 3x dx$ Ответ: $x \arcsin 3x + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C$

III. Интегралы вида: $\int e^{ax} \cos mx dx$, $\int e^{ax} \sin mx dx$ и другие

1) $\int e^x \sin x dx$ Ответ: $\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$

2) $\int \cos \ln 5x dx$ Ответ: $\frac{x}{2} (\cos \ln 5x + \sin \ln 5x) + C$

3) $\int \sqrt{x^2+1} dx$ Ответ: $\frac{x}{2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$

4) $\int 4^x \cos(2x-1) dx$ Ответ: $\frac{4}{4 + \ln^2 4} \left(\frac{4^x}{2} \sin(2x-1) + 4^{x-1} \ln 4 \cos(2x-1) \right) + C$

Задачи для самостоятельного решения

1) $\int x 3^x dx$ Ответ: $\frac{3^x}{\ln^2 3} (x \ln 3 - 1) + C$

2) $\int (x^2 - 2x + 3) \cos x dx$ Ответ: $(x^2 - 2x + 1) \sin x + 2(x - 1) \cos x + C$

3) $\int x \operatorname{arctg} x dx$ Ответ: $\frac{1}{2} (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$

4) $\int \frac{\ln^2 x}{x^5} dx$ Ответ: $-\frac{1}{4x^4} \left(\ln^2 x + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right) + C$