Векторы на плоскости и в пространстве

Содержание

§1. Проекция вектора

Опр. 1.1. Ортогональной проекцией точки A на прямую L будем называть точку A', полученную опусканием перпендикуляра из точки A на прямую L.

Опр. 1.2. Ортогональной проекцией вектора $\mathbf{a} = [\mathbf{AB}]$ на прямую L будем называть класс эквивалентности $\mathbf{a}'$ направленного отрезка $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$, где точка A' является ортогональной проекцией начала A направленного отрезка $\mathbf{AB}$, а точка B' — ортогональной проекцией конца B направленного отрезка $\mathbf{AB}$.

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Pr}_L^{\perp}\mathbf{a}$$

Опр. 1.3. Ортом $\mathbf{e}$ направленной прямой L называется вектор, модуль которого равен $|\mathbf{e}| = 1$, а направление совпадает с заданным направлением прямой.

Опр. 1.4. Пусть на прямой L задано направление и $\mathbf{e}$ — ее орт. **Величиной проекции вектора a** на ось L называется число $x_a = \mathrm{Pr}_L^{\perp}\mathbf{a}$ такое, что

$$\mathbf{a}' = x_a\mathbf{e}$$

NtB. Для любого вектора $\mathbf{a}$, заданного на L, существует единственное представление

$$\mathbf{a} = x_a\mathbf{e}$$

где $\mathbf{e}$ — орт оси L.

NtB. Для любого вектора $\mathbf{a}$, заданного на плоскости, существует единственное представление в базисе ДПСК $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, являющихся ортами координатных осей Ox и Oy.

$$\mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j},$$

где $x_a = \mathrm{Pr}_x^{\perp}\mathbf{a}$ и $y_a = \mathrm{Pr}_y^{\perp}\mathbf{a}$.

NtB. Для любого вектора $\mathbf{a}$, заданного в пространстве, существует единственное представление в базисе ДПСК $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, являющихся ортами координатных осей Ox, Oy и Oz.

$$\mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k},$$

где $x_a = \mathrm{Pr}_x^{\perp}\mathbf{a}$, $y_a = \mathrm{Pr}_y^{\perp}\mathbf{a}$ и $z_a = \mathrm{Pr}_z^{\perp}\mathbf{a}$.

§2. Скалярное произведение

Опр. 2.1. **Скалярным произведением** векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ назовем число, определяемое равенством:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot \mathrm{Pr}^{\perp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$$

Опр. 2.2. Для скалярного произведения существует несколько обозначений.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Свойства скалярного произведения

(а) Связь с углом между векторами.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi$$

(б) Линейность.

$$(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

(в) Симметричность.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

Опр. 2.3. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, отличные от нулевых векторов, будем называть ортогональными, если

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$$

NtB. Рассмотрим скалярное произведения векторов в ДПСК.

(а) Скалярное произведение ортов.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \end{array}$$

(б) Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(в) Длина вектора $\mathbf{a}$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

§3. Векторное произведение

Опр. 3.1. Тройка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ называется **правой**, если, располагаясь по направлению вектора $\mathbf{c}$, наблюдатель видит, что кратчайший поворот от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ происходит по часовой стрелке.

Опр. 3.2. **Векторным произведением** векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(а) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами;

(б) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;

(в) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ образуют правую тройку.

NtB. Для векторного произведения используются следующие обозначения:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

NtB. Модуль векторного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах.

Свойства векторного произведения

(а) Линейность.

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mu\mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

(б) Антикоммутативность.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

(в) Связь с коллинеарностью векторов.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

(г) Разложение в ортогональные компоненты.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a}_{\perp\mathbf{b}}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}_{\perp\mathbf{a}}),$$

где $\mathbf{a}_{\perp\mathbf{b}}$ — компонента вектора a, ортогональная вектору $\mathbf{b}$, и наоборот $\mathbf{b}_{\perp\mathbf{a}}$ — компонента вектрора b, ортогональная вектору $\mathbf{a}$.

NtB. Векторное произведение в ДПСК

(а) Векторные произведения ортов

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

(б) Произведение векторов **a** и **b**

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}) = \\ = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_z b_y - a_y b_z)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Векторное произведение ДПСК можно представить в виде определителя:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

§4. Смешанное произведение

Опр. 4.1. Смешанным произведением трех векторов **a**, **b** и **c** называется результат последовательного применения к данной тройке операций векторного и скалярного произведений:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \equiv (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$

Свойства смешанного произведения

(а) Связь с компланарностью векторов.

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ – компланарны}$$

(б) Циклические перестановки.

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

(в) Нециклические перестановки (в силу антикоммутативности).

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$$

(г) Перестановочность умножений.

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

(д) Знак смешанного произведения.

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \text{ – правая тройка}$$

(е) Объем параллелепипеда.

$$|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})| = V_{abc}$$

NtB. Смешанное произведение в ДПСК.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Перечисленные способы определения произведений позволяют использовать удобный способ описания некоторых геометрических объектов, которые будут рассмотрены в следующих лекциях.