Поверхности 2-го порядка

Содержание

§1. Способы задания поверхностей

Аналогично способам задания линий можно выделить те же самые способы задания поверхностей:

(а) Явный способ:

$$x = x(y, z) \qquad y = y(x, z) \qquad z = z(x, y)$$

(б) Неявный способ:

$$F(x, y, z) = 0$$

(в) Параметрический способ:

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

NtB 1.1. Для задания кривой на плоскости было достаточно одного параметра, но для задания поверхности одного параметра уже недостаточно.

В дополнение к перечисленным способам, концептуально совпадающими со способами задания кривых, можно также назвать еще и кинематический способ задания. Он основан на определении поверхности как множества всех положений линии, перемещающейся по определенному закону. Линия, совершающая перемещение, называется **образующей**. Закон движения образующей определяет одна или несколько неподвижных линий, которые называются **направляющими**.

Пример 1.1. Поверхность конуса можно трактовать как поверхность, которая получается движением образующей, проходящей через неподвижную точку по окружности таким образом, что все образующие пересекаются в одной точке и последовательно через все точки некоторой кривой направляющей (например, окружности). Другой, вполне очевидный пример - это сфера, которая может быть получена вращением окружности вокруг одной из осей, проходящих через центр окружности. Однако из окружности может получиться и не совсем тривиальный пример, если вращение будет производиться вокруг оси, не пересекающейся с ней. Такая поверхность называется тором.

§2. Поверхности 2-го порядка

Опр. 2.1. **Поверхностью второго порядка** называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^3 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$

полагая, что хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13} и a_{23} не равен нулю.

Поверхности второго порядка делятся на вырожденные и невырожденные. Вырожденные поверхности второго порядка это плоскости и точки, которые задаются целыми алгебраическими уравнениями второго порядка. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка пространства (мнимые поверхности), то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную поверхность.

Невырожденные поверхности второго порядка подразделяются на пять типов:

(а) Эллипсоид;

(б) Гиперболоид;

(в) Конус;

(г) Параболоид;

(д) Цилиндр.

Опр. 2.2. Поверхность называется **связной**, если для любых двух точек поверхности M_1 и M_2 существует непрерывная кривая, соединяющая эти две точки и целиком лежащая на поверхности.

Для поверхностей можно выделить следующие возможные симметрии:

- плоскости симметрии такие, что точки, симметричные каждой точке поверхности относительно этой плоскости, также принадлежат этой поверхности;
- ось симметрии;
- центр симметрии;

Опр. 2.3. Поверхность называется **центральной**, если существует такая единственная точка M_0, что для любой точки M_1, лежащей на поверхности, симметричная относительно M_0 точка M_2 тоже лежит на поверхности.

§3. Приведение к каноническому виду

Произвольная поверхность второго порядка может быть приведена к каноническому виду.

Метод Лагранжа

Метод основан преимущественно на выделении полного квадрата с некоторыми нюансами.

(а) Если в уравнении поверхности отсутствуют произведения различных переменных, то уравнение уже представлено каноническим видом.

(б) Если это не так, найдем такую переменную, что в уравнение входит ее квадрат, а также эта переменная в произведении с другой переменной. Назовем ее **ведущей**.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \ldots = 0$$

(в) По ведущей переменной выделить полный квадрат

$$a_{11}\left(x^2 + 2x(\frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z)\right) + \ldots = 0$$

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z\right)^2 + \ldots = 0$$

(г) Выполнить преобразование переменных, заменив ведущую переменную на выражение в скобках. Провести преобразование в оставшейся части уравнения.

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' - \frac{a_{12}}{a_{11}}y - \frac{a_{13}}{a_{11}}z \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

(д) Если в уравнении не осталось ведущих переменных в смысле определения выше, но еще присутствуют попарные произведения переменных, то можно выполнить преобразование, равносильное повороту в плоскости этих переменных. Допустим, что в уравнении присутствует yz без квадратов этих переменных. Тогда можно выполнить следующую замену переменных

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \frac{\sqrt{2}}{2}z' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' \end{cases}$$

Тогда слагаемое с произведением исходных переменных преобразуется к виду

$$yz = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y' - \frac{\sqrt{2}}{2}z'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z'\right) = \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2$$

(е) Оставшиеся линейные члены после выполнения предыдущих пунктов необходимое количество раз можно также исключить "классическим" выделением полного квадрата.

Проведенные преобразования являются линейными преобразованиями, определитель которых равен 1 (элементы специальной линейной группы SL(3)). Линейные преобразования такого типа не изменяют длины и углы, а значит, что и параметры поверхностей не изменятся.

§4. Канонические уравнения поверхностей

Общее уравнение поверхности второго порядка любым из методов приводится к одному из следующих канонических видов:

(а) Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(б) Мнимый эллипсоид *(выр.)*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

(в) Точка *(выр.)*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(г) Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(д) Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

(е) Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z^2 = 1$$

(ж) Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

(з) Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

(и) Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(к) Мнимый эллиптический цилиндр *(выр.)*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

(л) Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(м) Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px$$

(н) Прямая - пара мнимых пересекающихся плоскостей *(выр.)*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

(о) Пара пересекающихся плоскостей *(выр.)*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

(п) Пара параллельных плоскостей *(выр.)*

$$x^2 - d^2 = 0$$

(р) Пара мнимых параллельных плоскостей *(выр.)*

$$x^2 + d^2 = 0$$

(с) Плоскость *(выр.)*

$$x^2 = 0$$