Свойства определителя и обратимость матрицы

Содержание

§1. Свойства определителя

Приведем некоторые свойства определителя без доказательства, но в их справедливости можно убедиться, если проверить их при помощи разложения определителя по строке согласно определению из предыдущей лекции.

Определитель транспонированной матрицы

Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

$$\det A = \det A^T$$

Линейность по строкам

Если элементы какой-либо строки представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых элементы строки равны первым слагаемым, а во втором - вторым.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A_b + \det A_c$$

NtB 1.1. Благодаря первому свойству можно также утверждать, что это свойство справедливо и для столбцов.

NtB 1.2. Обратите внимание, что, в общем случае, определитель суммы матриц **не равен** сумме определителей матриц!

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Множитель строки

Если все элементы какой-либо строки определителя имеют общий множитель, то этот общий множитель можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Лемма 1.1. *Умножение квадратной матрицы на число λ влечет умножение определителя на λ^n, где n — порядок квадратной матрицы.*

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Действительно, умножение всей матрицы на скаляр приводит к увеличению каждой из n строк матрицы в λ. Соответственно, этот множитель может быть вынесен из под определителя ровно n раз.

Равенство строк

Предположим, что в определителе могут быть найдены две одинаковые строки. Тогда

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & I & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & I & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

где через I обозначена некоторая строка.

Перестановка строк

Лемма 1.2. *Перестановка строк влечет изменение знака определителя.*

Рассмотрим определитель с равными строками, равный нулю по предыдущему свойству. Пусть каждая из них представлена в виде некоторых сумм, как было в свойстве линейности по строкам. Согласно этому свойству, можно разложить определить сначала на два определителя, воспользовавшись им для одной строки, а затем каждый из них разложить по второй строке.

$$0 = \begin{vmatrix} \cdots \\ I+II \\ \cdots \\ I+II \\ \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots \\ I \\ \cdots \\ I \\ \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots \\ I \\ \cdots \\ II \\ \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots \\ II \\ \cdots \\ I \\ \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots \\ II \\ \cdots \\ II \\ \cdots \end{vmatrix}$$

Первый и последний определители равны нулю. Соответственно второй и третий обязательно должны иметь разный знак.

$$\begin{vmatrix} \cdots \\ I \\ \cdots \\ II \\ \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots \\ II \\ \cdots \\ I \\ \cdots \end{vmatrix}$$

Пропорциональные строки

Если две строки пропорциональны с некоторым коэффициентом λ, этот общий коэффициент пропорциональности элементов строки можно вынести за знак определителя. Но в таком случае остается определитель с равными строками, который равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Лемма 1.3. *Добавление к какой-либо строке чисел, пропорциональных элементам другой строки, не меняет определитель.*

Показать это легко с помощью разложения определителя в сумму — один из определителей будет содержать пропорциональные строки.

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & I + \lambda II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & I & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & I & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & II & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Определитель умножения матриц

Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей.

$$\det(AB) = \det A \det B$$

§2. Минор и алгебраическое дополнение

Опр. 2.1. Минором M порядка $k \leqslant n$ называется определитель, полученный из исходной матрицы посредством вычеркивания одной или нескольких строк и столбцов. В общем случае индексы вычеркиваемых строк и столбцов могут не совпадать, но общее количество вычеркиваемых строк и столбцов совпадает всегда.

Опр. 2.2. **Дополнительным минором** M_{ij} к элементу a_{ij} называется минор, полученный вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Опр. 2.3. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его дополнительный минор, взятый со знаком, определяемым как

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1}$$

NtB 2.1. Понятие алгебраического дополнения позволяет обобщить формулу разложения по строке, приведенную в предыдущей лекции. Действительно, определитель матрицы n-го порядка равен произведению элементов произвольной k-ой строки, умноженных на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} \cdot M_{kj}$$

NtB 2.2. Формулу разложения по строке, в силу свойства сохранения определителя при транспонировании, можно также перенести на раложение по произвольному столбцу.

Определитель треугольной матрицы

Лемма 2.1. *Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Для его вычисления воспользуемся разложением по первому столбцу. Очевидно, что все слагаемые кроме одного будут нулевыми.

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Откуда итеративно продолжая процесс приходим к тому, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

NtB 2.3. Аналогичное свойство может быть показно для нижнетреугольной и диагональной матриц.

§3. Обратная матрица

Опр. 3.1. Обратной матрицей B к матрице A того же порядка называется матрица, которая в произведении с матрицей A дает единичную.

$$AB = E = BA$$

Опр. 3.2. Матрица, для которой существует обратная, называется обратимой. Обратная матрица обычно обозначается A^{-1}.

Теорема 3.1. *Квадратная матрица имеет обратную матрицу, и при том единственную, тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. Причем обратную матрицу можно вычислить по формуле*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

*где A^* - **присоединенная матрица** — матрица, составленная из алгебраических дополнений соответствующих элементов транспонированной матрицы A.*

Теорему приводим без доказательства.