Геометрическое пространство

Содержание

§1. Системы координат

При описании геометрического пространства векторов на плоскости (в пространстве) для начался воспользуемся интуитивными представлениями и очевидными конструкциями, позволяющими связать геометрические и алгебраические подходы. Основным естественным объектом геометрии является точка, с которой мы и начнем наши рассуждения.

Опр. 1.1. Метод координат — это подход, позволяющий установить соответствие между геометрическими объектами (точками) и алгебраическими объектами (числами), а также описать их свойства и отношения между ними с помощью аналитических соотношений.

Опр. 1.2. Координатная линия — непрерывная линия без самопересечений, каждой точке которой ставится в соответствие действительное число.

Опр. 1.3. Координатной осью α называют координатную линию, представленную ориентированной прямой, имеющей начало отсчета O и снабженную масштабом E. При этом любой точке P координатной оси ставится в соответствие вещественное число x_P, называемое координатой точки:

$$P \in \alpha \qquad \leftrightarrow \qquad x_P \in \mathbb{R}$$

NtB. Координатные оси на плоскости (в пространстве) в совокупности образуют систему координат.

Опр. 1.4. Прямолинейной системой координат на плоскости (в пространстве) называется система из двух (трех) разнонаправленных координатных осей, имеющих общее начало.

NtB. В фиксированной системе координат на плоскости каждой точке ставится в соответствие пара вещественных чисел.

$$\forall P \qquad \leftrightarrow \qquad (x_P, y_P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

В фиксированной системе координат в пространстве каждой точке ставится в соответствие тройка вещественных чисел.

$$\forall P \qquad \leftrightarrow \qquad (x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$$

Опр. 1.5. Координатной линией уровня на плоскости называется любая прямая, параллельная одной из координатных осей.

Опр. 1.6. Координатной поверхностью уровня в пространстве называется любая плоскость, параллельная одной из координатных плоскостей.

Опр. 1.7. Прямоугольной системой координат называется такая система, в которой угол между каждой парой координатных осей является прямым. Если на координатных осях выбран одинаковый масштаб, то такая система называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Опр. 1.8. Полярной системой координат называется такая система координат, в которой каждой точке соответствует полярный радиус r — расстояние от начала координат (полюса), и полярный угол ϕ, который отсчитывается от луча, выходящего из начала координат (полярная ось), против часовой стрелки.

NtB. Пару полярных координат (r, ϕ) можно перевести в декартовы координаты (x, y) при помощи тригонометрических функций, полагая, что полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

§2. Векторы

Помимо точек, другим естественным объектом являются геометрические векторы. В элементарной математике обычно явно не указывается, но подразумевается различие между вектором и направленным отрезком. В текущем курсе мы проведем границу между двумя этими понятиями.

Опр. 2.1. Направленным отрезком, или связанным вектором, назовем отрезок, *однозначным образом* определяемый точками, которые назовет началом и концом направленного отрезка.

Пример 2.1. Радиус-вектором точки A называется направленный отрезок, проведенный из начала координат в точку A.

Опр. 2.2. Направленные отрезки будем называть **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых.

Опр. 2.3. Направленные отрезки будем называть **компланарными**, если они лежат на параллельных плоскостях.

NtB. Любые два направленных отрезка являются компланарными.

Опр. 2.4. Модулем (или длиной) направленного отрезка **AB** будем называть длину отрезка AB.

Опр. 2.5. Отношением эквивалентности $\sim$ на множестве M называется отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Опр. 2.6. Класс эквивалентности элемента $a \in M$ - это подмножество множества M, в котором все элементы эквивалентны a.

Опр. 2.7. Направленные отрезки будем называть **эквивалентными**, если они сонаправлены и их модули равны.

Опр. 2.8. Свободным вектором, или просто вектором, называется класс эквивалентности направленных отрезков.

§3. Множество векторов

Рассмотрим два свободных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. От произвольной точки A отложим направленный отрезок **AB**, являющийся изображением свободного вектора $\mathbf{a}$, а от точки B отложим вектор **BC**, принадлежащий $\mathbf{b}$.

Опр. 3.1. Суммой векторов a и **b** называется вектор $\mathbf{c}$, являющийся классом эквивалентности направленного отрезка **AC**, начало которого совпадает с началом вектора **AB**, а конец — с концом вектора **BC**.

Опр. 3.2. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на скаляр λ называется вектор $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ такой, что

(а) $|\mathbf{b}| = |\lambda||\mathbf{a}|$

(б) $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$

(в) $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$

(г) $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}$

Лемма 3.1. *Множество свободных векторов с введенными операциями сложения и умножения на скаляр образуют линейное пространство.*

Доказательство. Аксиомы линейного пространства проверяются очевидным образом. □

Введение структуры линейного пространства на множестве свободных векторов позволяет переформулировать само отношение эквивалентности, которое его порождает.

Опр. 3.3. Параллельным переносом (или трансляцией) $T_{\mathbf{a}}$ точки P называется преобразование, которое сопоставляет ей такую точку P', что направленный отрезок $\mathbf{PP'}$ по модулю и направлению совпадает с $\mathbf{a}$, называемым **вектором переноса**.

Лемма 3.2. *Множество параллельных переносов образует абелеву группу.*

Доказательство. Композицию параллельных переносов $T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}}$ можно однозначно интерпретировать как сопоставление точке P другой точки P' такой, что $\mathbf{PP'} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$. Таким образом структура абелевой группы на множестве векторов однозначно переносится на множество преобразований трансляции. $\square$

NtB 3.1. Группа трансляций является частным случаем (подгруппой) евклидовой группы преобразований типа $x \mapsto Ax + b$, где ортогональная матрица A совпадает с единичной матрицей.

NtB 3.2. Эквивалентность направленных отрезков равносильна существованию преобразования трансляции, которое однозначно сопоставляет соответствующие точки направленных отрезков. Параллельный перенос на нулевой вектор (тождественное преобразование) обеспечивает рефлексивность отношения, обратимость параллельного переноса гарантирует симметричность. Транзитивность следует из представления композиции параллельных переносов в виде суммы векторов.

§4. Аффинное пространство

Рассмотрим более общий подход, позволяющий описывать не только геометрические пространства точек и векторов, но и другие множества обладающие схожей структурой.

Пусть $\mathcal{A}$ — непустое множество, элементы которого мы будем называть *точками*, $L(\mathbb{B})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, а также задано отображение (векторизация)

$$\Phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to L$$

сопоставляющее паре точек (A, B) из $\mathcal{A}$ вектор $\mathbf{AB} = x \in L$.

Опр. 4.1. Тройка $(\mathcal{A}, L, \Phi)$ называется аффинным пространством с ассоциированным линейным пространством L над полем $\mathbb{K}$, если выполнено:

- Для любой точки $A \in \mathcal{A}$ и любого вектора $x \in L$ существует единственная точка $B \in \mathcal{A}$ такая, что $\mathbf{AB} = x \in L$.
- Lля любых трех точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ имеет место равенство (треугольника)

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} \tag{1}$$

NtB 4.1. Очевидно, что множество точек на плоскости (в пространстве) с ассоциированным линейным пространством свободных векторов удовлетворяет этим требованиям.

Рассмотрение геометрического пространства точек и векторов как аффинного пространства позволяет перенести понятие базиса линейного пространства в эту структуру.

Опр. 4.2. Репером (или точечным базисом) называется совокупность фиксированной точки O (начала координат) и $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базиса ассоциированного линейного пространства.

NtB 4.2. Введение точечного базиса позволяет каждой точке P сопоставить вектор $\mathbf{OP} \in L$, являющийся обобщением радиус-вектора. Тогда, помня о единственности разложения по базису линейного пространства, можно утверждать, что вектор $\mathbf{OP}$ единственным образом представляется линейной комбинацией векторов базиса L

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{OP} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots \alpha_n e_n \qquad (2)$$

NtB. Определим базис в различных пространствах:

(а) На прямой линии базисом является любой ненулевой вектор;

(б) На плоскости базисом является любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов;

(в) В трехмерном пространстве базис - упорядоченная тройка любых некомпланарных векторов;

NtB. Единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ осей декартовой прямоугольной системы координат образуют базис пространства. Следовательно радиус-вектор любой точки A может быть разложен по базису

$$\mathbf{r}_A = x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j} + z_A \mathbf{k},$$

где x_A, y_A и z_A - координаты точки в данной системе координат.