Математика (базовый уровень), 2 семестр

Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов.
Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя. В противном случае рациональная дробь называется *неправильной*.
Рассмотрим интеграл :

$$\int \frac{x^6 - x^5 + 4x^4 - x^3 + 2x - 2}{(x-1)x^2\left(x^2+2\right)}\, dx$$

1. **Выделение целой части**

   Методом деления многочленов "в столбик" , приведём неправильную рациональную дробь к сумме многочлена и правильной дроби:

$$\frac{x^6 - x^5 + 4x^4 - x^3 + 2x - 2}{(x-1)x^2\left(x^2+2\right)} = x + \frac{2x^4 + x^3 + 2x - 2}{(x-1)x^2\left(x^2+2\right)}$$

2. **Разложение на простейшие дроби методом неопределённых коэффициентов**

   Правильную рациональную дробь всегда можно разложить на сумму простейших дробей, т.е. рациональных дробей у которых знаменатель имеет или единственный корень, или пару сопряжённых корней. Запишем разложение полученной правильной дроби в общем виде:

$$\frac{2x^4 + x^3 + 2x - 2}{(x-1)x^2\left(x^2+2\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$$

   Умножим обе части равенства на знаменатель $(x-1)x^2(x^2+2)$, чтобы избавиться от дробей. Получим:

$$2x^4 + x^3 + 2x - 2 = A \cdot x^2(x^2+2) + B \cdot (x-1)x(x^2+2) + C \cdot (x-1)(x^2+2) + (Dx+E) \cdot (x-1)x^2$$

   Раскрыв скобки, и приравняв выражения перед одинаковыми степенями x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -2 = -2C \\ 2 = -2B + 2C \\ 0 = 2A + 2B - C - E \\ 1 = -B + C - D + E \\ 2 = A + B + D \end{cases}$$

   Находим решение (например *методом Крамера* или *методом Гаусса*):
   $A = 1; B = 0; C = 1; D = 1; E = 1$. Значит:

$$\frac{2x^4 + x^3 + 2x - 2}{(x-1)x^2\left(x^2+2\right)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+2}$$

   Вычислим интеграл от каждого слагаемого отдельно.

3. **Интегрирование простейших дробей I типа**

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1| + \mathcal{C}$$

4. **Интегрирование простейших дробей II типа**

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \mathcal{C}$$

5. **Интегрирование простейших дробей III типа**

$$\int \frac{x+1}{x^2+2}\,dx = \int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

Первая часть - это табличный интеграл:

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{C}$$

Во второй части используем внесение под дифференциал:

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,d(x^2+2) = \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \mathcal{C}$$

Просуммируем полученные ответы, добавим интеграл от x и получим ответ:

$$\int \frac{x^6-x^5+4x^4-x^3+2x-2}{(x-1)x^2\left(x^2+2\right)}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{C}$$