

# Полилинейные формы

## §1. Основные определения

**Определение 1.1.** Полилинейной формой на линейном пространстве  $V(\mathbb{K})$  назовем отображение вида

$$\mathcal{A} : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \mathbb{K}$$

обладающее линейностью по каждому из аргументов

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, \dots, \alpha x'_i + \beta x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) = \\ = \alpha \mathcal{A}(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) + \beta \mathcal{A}(x_1, \dots, x''_i, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q), \end{aligned}$$

где  $x_i \in V$  и  $\varphi^j \in V^*$ .

Рассмотрим частные случаи полилинейных форм.

**Определение 1.2.** Валентностью полилинейной формы называют пару чисел  $(p, q)$ , определяющих количество векторов и ковекторов (линейных форм), являющихся аргументами данного отображения.

**Пример 1.1.** Линейные формы над  $V$  — это отображения вида

$$f : V \rightarrow \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма  $\varphi \in V^*$  является ПЛФ валентности  $(1, 0)$ .

**Пример 1.2.** Линейные формы над  $V^*$  — это отображения вида

$$\hat{x} : V^* \rightarrow \mathbb{K}$$

Следовательно, линейная форма  $\hat{x} \in V^{**}$  является ПЛФ валентности  $(0, 1)$ . Однако ранее обсуждалось, что между пространствами  $V$  и  $V^{**}$  существует естественный изоморфизм, определяемый как

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow \hat{x} \quad (\hat{x}, f) = (f, x) \quad \forall f \in V^* \\ x \in V, \quad \hat{x} \in V^{**} \end{aligned}$$

Следовательно, можно утверждать, что ПЛФ валентности  $(0, 1)$  однозначно соответствует элемент линейного пространства  $V$  в силу обсуждаемого изоморфизма.

**Пример 1.3.** Билинейные формы над  $V$  — это отображения вида

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

Таким образом, билинейная форма — это ПЛФ валентности  $(2, 0)$ . Примером билинейной формы служит скалярное произведение двух геометрических векторов

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

а также все другие примеры билинейных форм, которые рассматривались ранее.

**Пример 1.4.** Можно также рассмотреть трилинейные формы как отображения вида

$$\psi : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

являющиеся ПЛФ валентности  $(3, 0)$ . Отображения такого вида встречались в геометрии — это смешанное произведение трех векторов.

## §2. Действия с полилинейными формами

Пусть  $\Omega_q^p$  — множество полилинейных форм валентности  $(p, q)$ .

**Определение 2.1.** Полилинейные формы  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$  одинаковой валентности будем называть **равными**, если

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \mathcal{B}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов  $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$  и  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$ .

**Определение 2.2.** Нуль-формой  $\Theta \in \Omega_q^p$  называется такая полилинейная форма, что

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = 0 \quad \forall x_i \in V, \forall \varphi^j \in V^*$$

Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — полилинейные формы валентности  $(p, q)$ . Введем операции с ними.

### 2.1. Линейные операции

**Определение 2.3.** Отображение  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  будем называть суммой полилинейных форм  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , если

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \\ = \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) + \mathcal{B}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) \end{aligned}$$

для любых наборов  $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$  и  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$ .

**Лемма 2.1.** Отображение  $\mathcal{C}$ , определенное как сумма полилинейных форм  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega_q^p$  является полилинейной формой из  $\Omega_q^p$

**Доказательство.** Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм.  $\square$

Аналогично можно ввести и умножение на скаляр.

**Определение 2.4.** Отображение  $\lambda\mathcal{A}$  будем называть произведением полилинейной формы  $\mathcal{A}$  на скаляр  $\lambda$ , если

$$(\lambda\mathcal{A})(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

для любых наборов  $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$  и  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q \in V^*$ .

**Лемма 2.2.** *Отображение  $\lambda\mathcal{A}$ , определенное как произведение полилинейной формы  $\mathcal{A} \in \Omega_q^p$  на скаляр  $\lambda \in \mathbb{K}$  является полилинейной формой из  $\Omega_q^p$*

**Доказательство.** Доказательство строится также как аналогичное доказательство для линейных и билинейных форм.  $\square$

**Теорема 2.1.** *Множество  $\Omega_q^p$  полилинейных форм валентности  $(p, q)$  образует линейное пространство.*

**Доказательство.** Доказательство сводится к проверке аксиом линейного пространства.  $\square$

## 2.2. Произведение ПЛФ

**Определение 2.5.** Произведением полилинейных форм  $\mathcal{A} \in \Omega_{q_1}^{p_1}$  и  $\mathcal{B} \in \Omega_{q_2}^{p_2}$  называют отображение  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  определяемое как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, \dots, x_{p_1}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}) \cdot \mathcal{B}(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2}) = \\ = \mathcal{C}(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}; \varphi^1, \dots, \varphi^{q_1}, \varphi^{q_1+1}, \dots, \varphi^{q_1+q_2}) \end{aligned}$$

**Пример 2.1.** Билинейную форму  $b(x_1, x_2) \in \Omega_q^p$  можно задать как

$$b(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2),$$

где  $f, g \in \Omega_q^p = V^*$  — линейные формы.

**Замечание 2.1.** Произведение полилинейных форм валентностей  $(p_1, q_1)$  и  $(p_2, q_2)$  всегда позволяет получить полилинейную форму валентности  $(p_1+p_2, q_1+q_2)$ . Однако **не каждая** полилинейная форма валентности  $(p, q)$  **может быть представлена (разложена)** в произведение полилинейных форм валентностей  $(p_1, q_1)$  и  $(p_2, q_2)$ , даже если  $p_1 + p_2 = p$  и  $q_1 + q_2 = q$ .

**Лемма 2.3.** *Отображение  $\mathcal{C}$ , введенное как произведение полилинейных форм, является полилинейной формой.*

$$\mathcal{C} \in \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$$

**Доказательство.** Не теряя общности, мы можем показать линейность по первому векторному аргументу. Для остальных доказательство может быть построено аналогичным образом, но его запись при этом усложнится значительно. Пусть произведение полилинейных форм задается следующим образом:

$$\mathcal{C}(x, \dots; \dots) = \mathcal{A}(x, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots, \dots; \dots),$$

где через многоточия обозначены остальные аргументы всех полилинейных форм согласно определению выше.

При этом, если аргумент  $x$  представлен линейной комбинацией  $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) &= \mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= (\alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots)) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= \alpha_1 \mathcal{A}(x_1, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{A}(x_2, \dots; \dots) \cdot \mathcal{B}(\dots; \dots) = \\ &= \alpha_1 \mathcal{C}(x_1, \dots; \dots) + \alpha_2 \mathcal{C}(x_2, \dots; \dots), \end{aligned}$$

где мы воспользовались свойством полилинейности отображения  $\mathcal{A}$ . В силу того, что это отображение линейно по каждому из аргументов, данные рассуждения справедливы по набору его аргументов. А также в силу того, что отображение  $\mathcal{B}$  тоже является полилинейным, свойство линейности отображения  $\mathcal{C}$  по каждому из аргументов набора из  $\mathcal{B}$ .  $\square$

### 2.3. Свойства произведения полилинейных форм

(а) Некоммутативность

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$$

Данное свойство очевидно вытекает из определения произведения в силу того, что порядок произведения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  определяет порядок аргументов в  $\mathcal{C}$ . Однако продемонстрируем это свойство на более простом примере. Рассмотрим следующие полилинейные формы, определенные как произведения обычных линейных форм  $f^1, f^2 \in V^*$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= f^1 \cdot f^2 & \Rightarrow & \quad \mathcal{C}_1(x, y) = f^1(x) \cdot f^2(y) \\ \mathcal{C}_2 &= f^2 \cdot f^1 & \Rightarrow & \quad \mathcal{C}_2(x, y) = f^2(x) \cdot f^1(y) \end{aligned}$$

(б) Ассоциативность

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$$

(в) Нуль-форма

$$\mathcal{A} \cdot \Theta_{(p_2, q_2)} = \Theta_{(p_1, q_1)} \cdot \mathcal{B} = \Theta_{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)}$$

(г) Законы согласования операций (дистрибутивность)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) &= \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} &= \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \\ (\alpha \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} &= \alpha(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cdot (\alpha \mathcal{B}) \end{aligned}$$

### §3. Тензор ПЛФ

Зафиксируем в  $V(\mathbb{K})$  базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$  и построим к нему сопряженный базис  $\{f^j\}_{j=1}^n$  в пространстве  $V^*$ . Вспомним, что эти базисы связаны соотношением

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

**Определение 3.1.** Тензором полилинейной формы  $\mathcal{C}$  валентности  $(p, q)$  называется набор из  $n^{p+q}$  скаляров, определяемых как действие полилинейной формы на всевозможных наборах базисных векторов.

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}),$$

где индексы  $i_1, i_2, \dots, i_p$  и  $j_1, j_2, \dots, j_q$  принимают значения  $1, \dots, n$ , где  $n = \dim V$  — это размерность пространства  $V$ .

#### Замечание о неом суммировании

Прежде чем перейдем к дальнейшим рассуждениям, отметим следующий факт. Наличие большого количества индексов в случае анализа линейных объектов нередко приводит к большому количеству суммирований как в теоретических выкладках, так и в практических приложениях тензоров. По этой причине вводится так называемое **правило суммирования Эйнштейна**, или соглашение о неом суммировании. В контексте данной темы договоримся о следующем:

- (а) Если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по нему:

$$a^i b_i = \sum_i a^i b_i$$

- (б) Индекс, по которому происходит суммирование, называют немым в силу того, что его обозначение не принципиально, т.е.

$$a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$$

- (в) Необходимо соблюдение баланса индексов. Если индекс не является немым, то в левой и правой частях равенства должны присутствовать одни и те же индексы, а также должен быть неизменным их порядок, т.е.

$$a_{ik} b^{kl} = c_i^l$$

**Теорема 3.1.** Задание тензора эквивалентно заданию его компонент в паре базисов пространств  $V$  и  $V^*$ .

**Доказательство.** Рассмотрим набор векторов  $x_1, \dots, x_p$  и форм  $\varphi^1, \dots, \varphi^q$ , заданных своими разложениями по базисам

$$x_k = \sum_{i=1}^n \xi_k^i e_i = \xi_k^i e_i \quad \varphi^l = \sum_{j=1}^n \eta_j^l f^j = \eta_j^l f^j$$

Применим к ним тензор  $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q)$  и воспользуемся его линейными свойствами

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1, \dots, x_p; \varphi^1, \dots, \varphi^q) &= \mathcal{C}(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \eta_{j_1}^1 f^{j_1}, \dots, \eta_{j_q}^q f^{j_q}) = \\ &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q \mathcal{C}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) = \\ &= \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} \eta_{j_1}^1 \eta_{j_2}^2 \dots \eta_{j_q}^q c_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}, \end{aligned}$$

где в данной записи мы как раз воспользовались соглашением о немом суммировании.  $\square$

**Замечание 3.1.** Таким образом мы получаем, что компоненты тензора однозначно задают его в фиксированной паре базисов  $\{e_i\}_{i=1}^n$  и  $\{f^j\}_{j=1}^n$ . Данное свойство аналогично рассмотренным ранее:

- (а) Разложению линейной формы  $\varphi$  на коэффициенты  $\{\varphi_i\}$  в базисе сопряженного пространства  $V^*$ ;
- (б) Матрице  $B$  билинейной формы  $b(x, y)$ , где коэффициент  $\beta_{ij}$  с парой индексов  $(ij)$  соответствует значению билинейной формы на базисных векторах  $e_i$  и  $e_j$ .