

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ
НАПРАВЛЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
курса «Методы оптимизации»

Выполнили студенты:

Мозжевилов Данил, Кучма Андрей

Группы: М3238, М3239

Санкт-Петербург, 15 апреля 2021 г.

Содержание

Лабораторная работа 1

Методы многомерной оптимизации

1.1. Постановка задачи и цель работы

1. Реализовать алгоритмы:

- Метод градиентного спуска
- Метод наискорейшего спуска
- Метод сопряженных градиентов

Оценить как меняется скорость сходимости, если для поиска величины шага используются различные методы одномерного поиска.

2. Проанализировать траектории методов для нескольких квадратичных функций: придумайте две-три квадратичные двумерные функции, на которых работа каждого из методов будет отличаться. Нарисовать графики с линиями уровня функций и траекториями методов.
3. Исследовать, как зависит число итераций, необходимое методам для сходимости, от следующих двух параметров:

- числа обусловленности $k \geq 1$ оптимизируемой функции
- размерности пространства n оптимизируемых переменных

Сгенерировать от заданных параметров k и n квадратичную задачу размерности n с числом обусловленности k и запустить на ней методы многомерной оптимизации с некоторой заданной точностью. Замерить число итераций $T(n, k)$, которое потребовалось сделать методу до сходимости.

1.2. Иллюстрации работы градиентных методов на двумерных квадратичных функциях

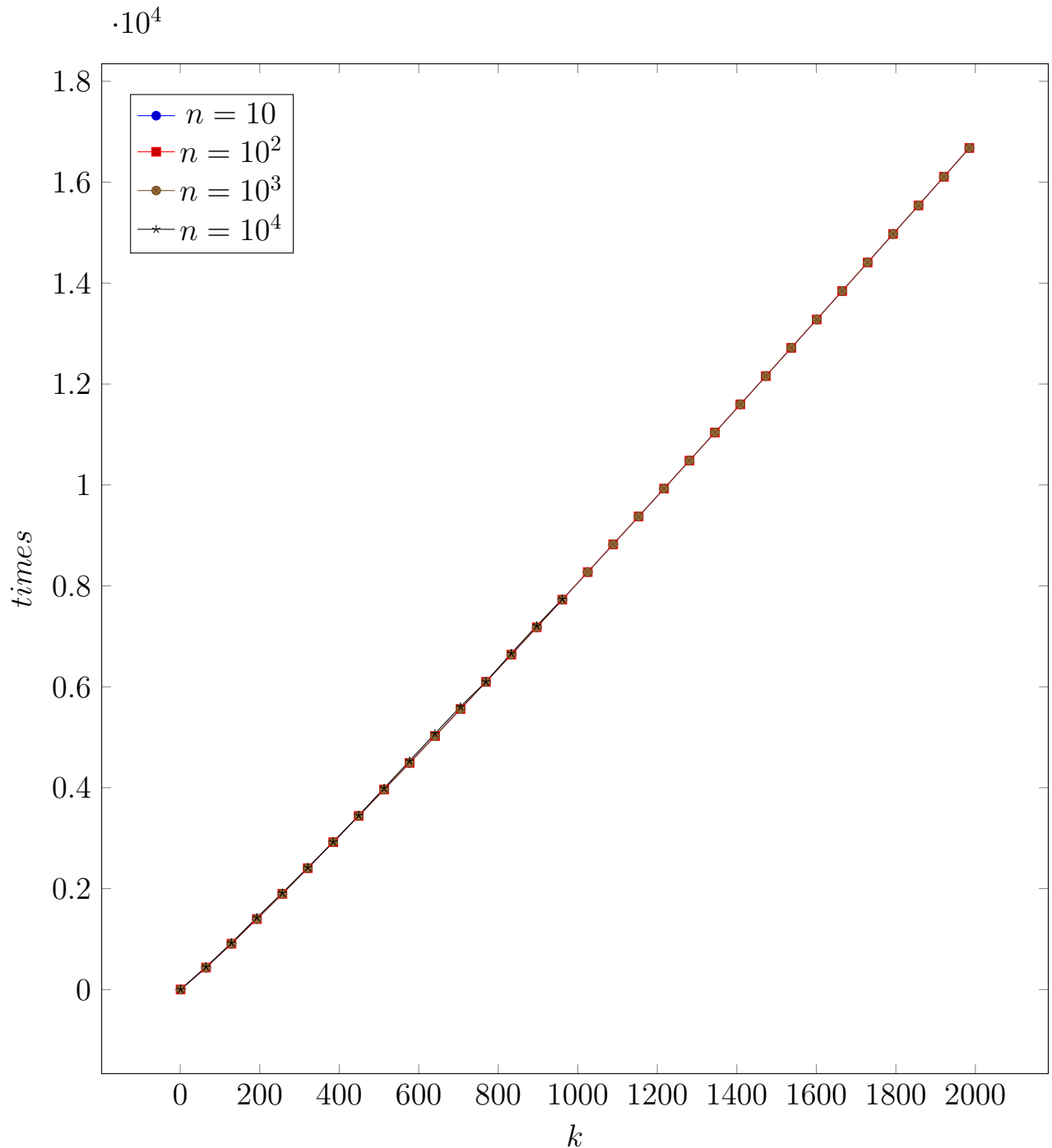
Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - xy + 4y^2 + 2x + y$. В матричном виде ее вид $f(x) = 1/2 * (Ax, x) + b * x$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

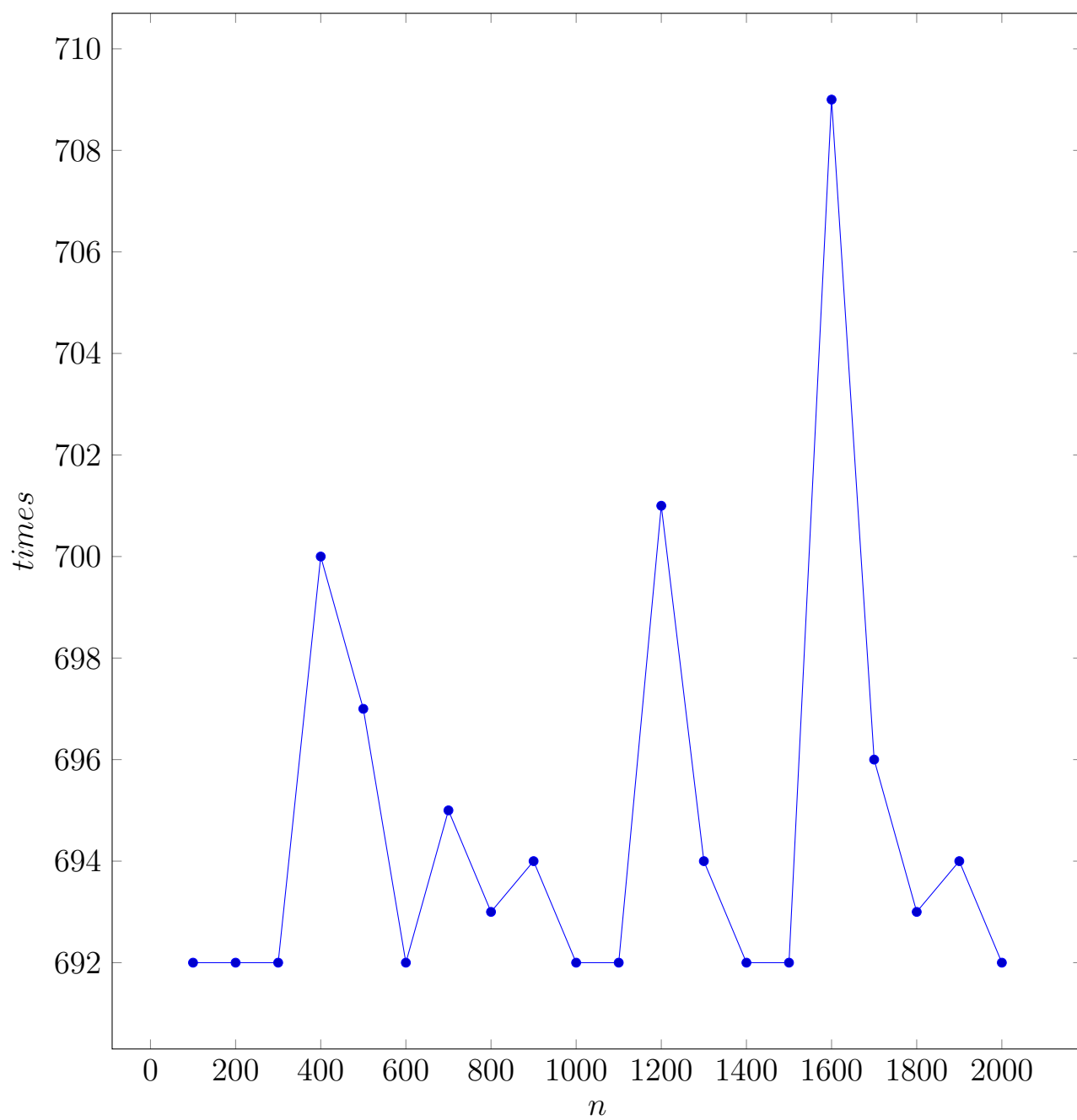
$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) * (8 - \lambda) - 1 = 15 - 10 * \lambda + \lambda^2 = (5 + \sqrt{10} - \lambda) * (5 - \sqrt{10} - \lambda)$. Собственные значения матрицы A положительны,

следовательно квадратичная форма f положительно определенная, а следовательно выпукла вниз. Таким образом к этой квадратичной форме можно применить алгоритмы минимизации. Для начала найдем точку минимума функции аналитически.

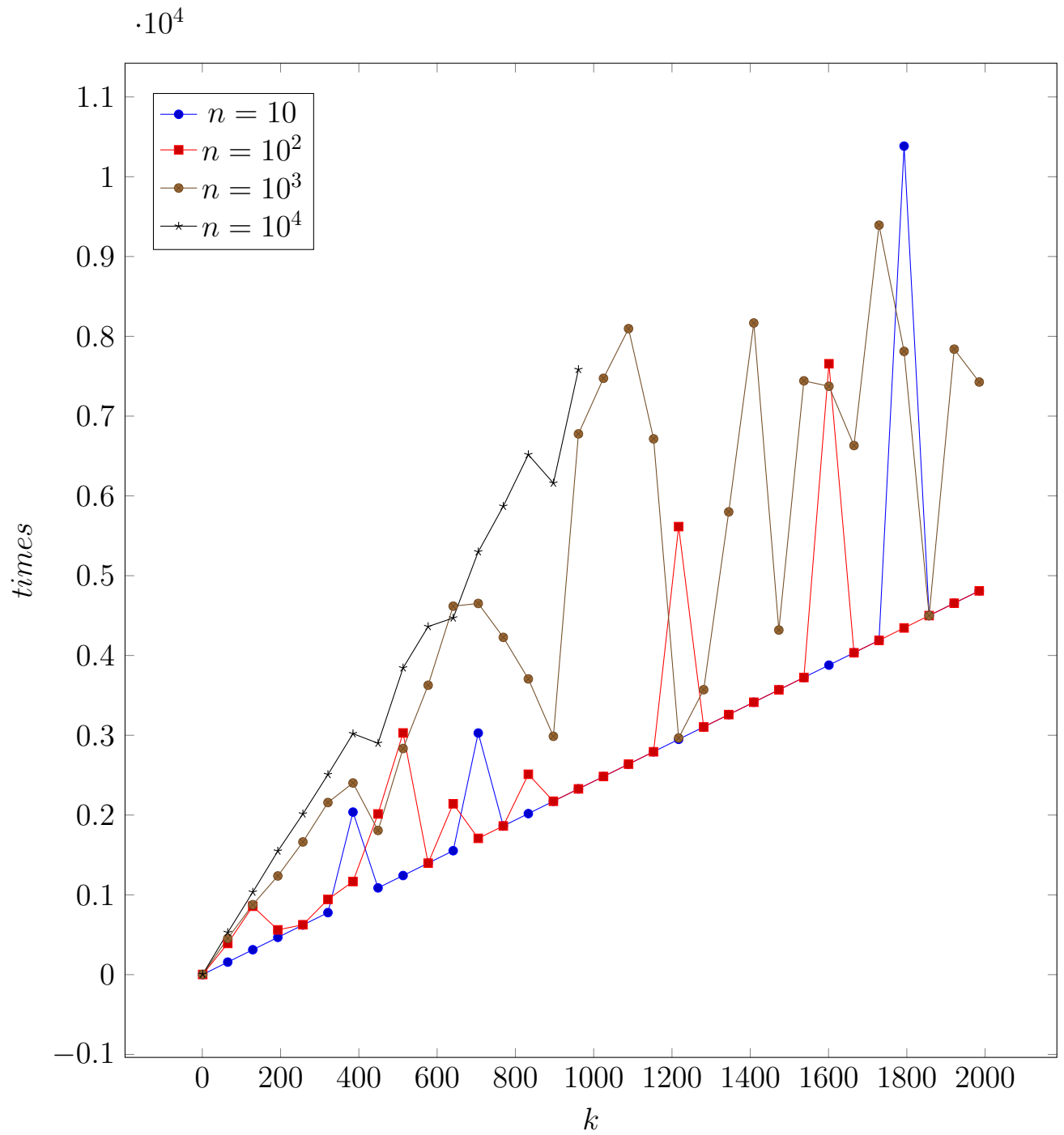
Надем точку, в которой градиент данной функции обращается в ноль. Это и будет точка минимума функции. $\text{grad } f = (2 * x - y + 2 \quad -x + 8y + 1)^T = (0 \ 0)^T$ Решив систему линейных уравнений, получаем $x = -17/15, y = -4/15$ и $\min(f(x, y)) = -19/15$

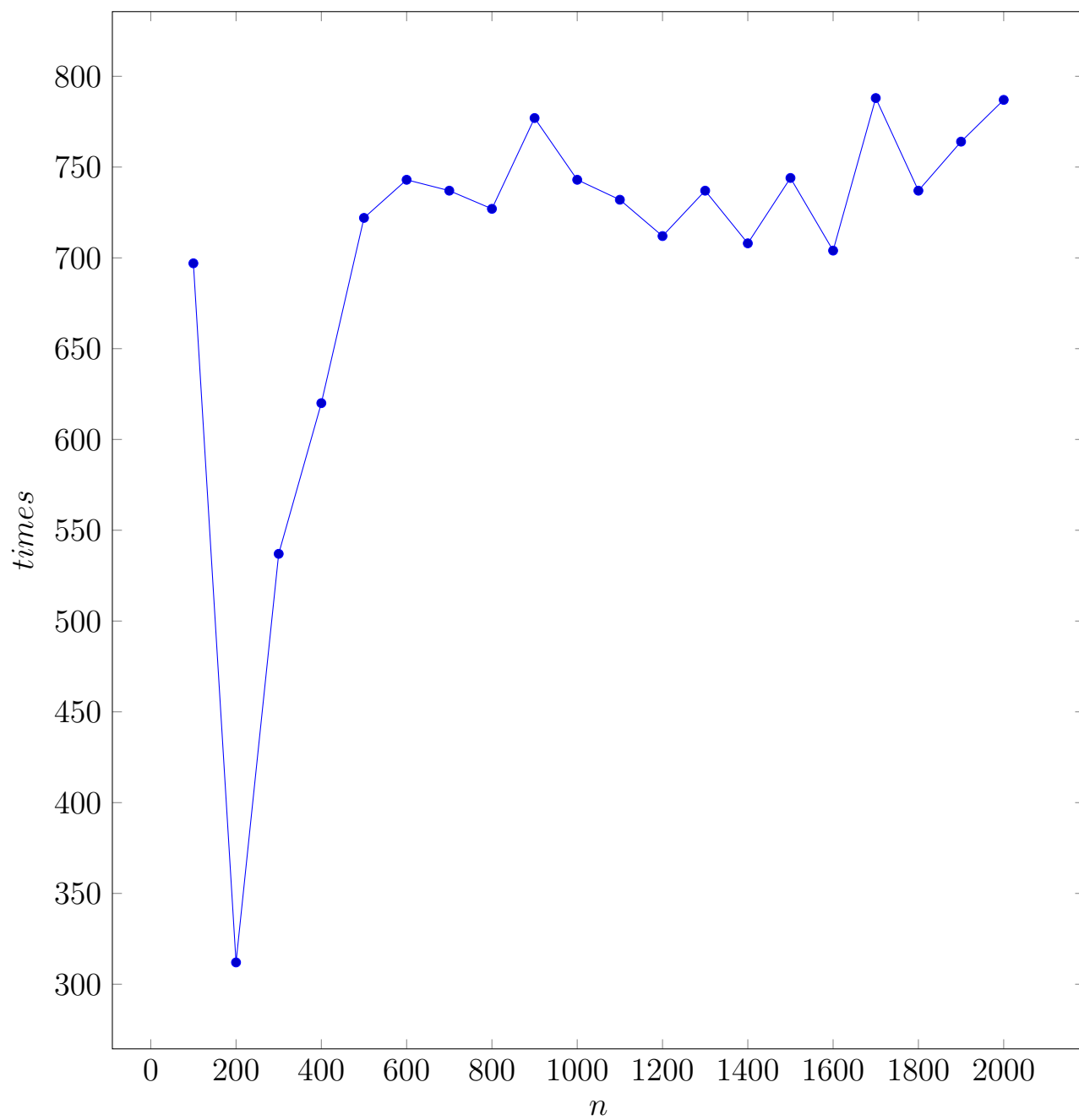
1.3. Метод градиентного спуска





1.4. Метод наискорейшего спуска





1.5. Метод сопряженных градиентов

