Университет ИТМО

Факультет информационных технологий и программирования
Направление прикладной математики и информатики

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

курса «Методы оптимизации»

Выполнили студенты:

Мозжевилов Данил, Кучма Андрей
Группы: M3238, M3239

Санкт-Петербург, 14 апреля 2021 г.

Содержание

Лабораторная работа 1

Методы многомерной оптимизации

1.1. Постановка задачи и цель работы

1. Реализовать алгоритмы:

   - Метод градиентного спуска
   - Метод наискорейшего спуска
   - Метод сопряженных градиентов

   Оценить как меняется скорость сходимости, если для поиска величины шага используются различные методы одномерного поиска.

2. Проанализировать траектории методов для нескольких квадратичных функций: придумайте две-три квадратичные двумерные функции, на которых работа каждого из методов будет отличаться. Нарисовать графики с линиями уровня функций и траекториями методов.

3. Исследовать, как зависит число итераций, необходимое методам для сходимости, от следующих двух параметров:

   - числа обусловленности $k \geq 1$ оптимизируемой функции
   - размерности пространства n оптимизируемых переменных

   Сгенерировать от заданных параметров k и n квадратичную задачу размерности n с числом обусловленности k и запустить на ней методы многомерной оптимизации с некоторой заданной точностью. Замерить число итераций $T(n, k)$, которое потребовалось сделать методу до сходимости.

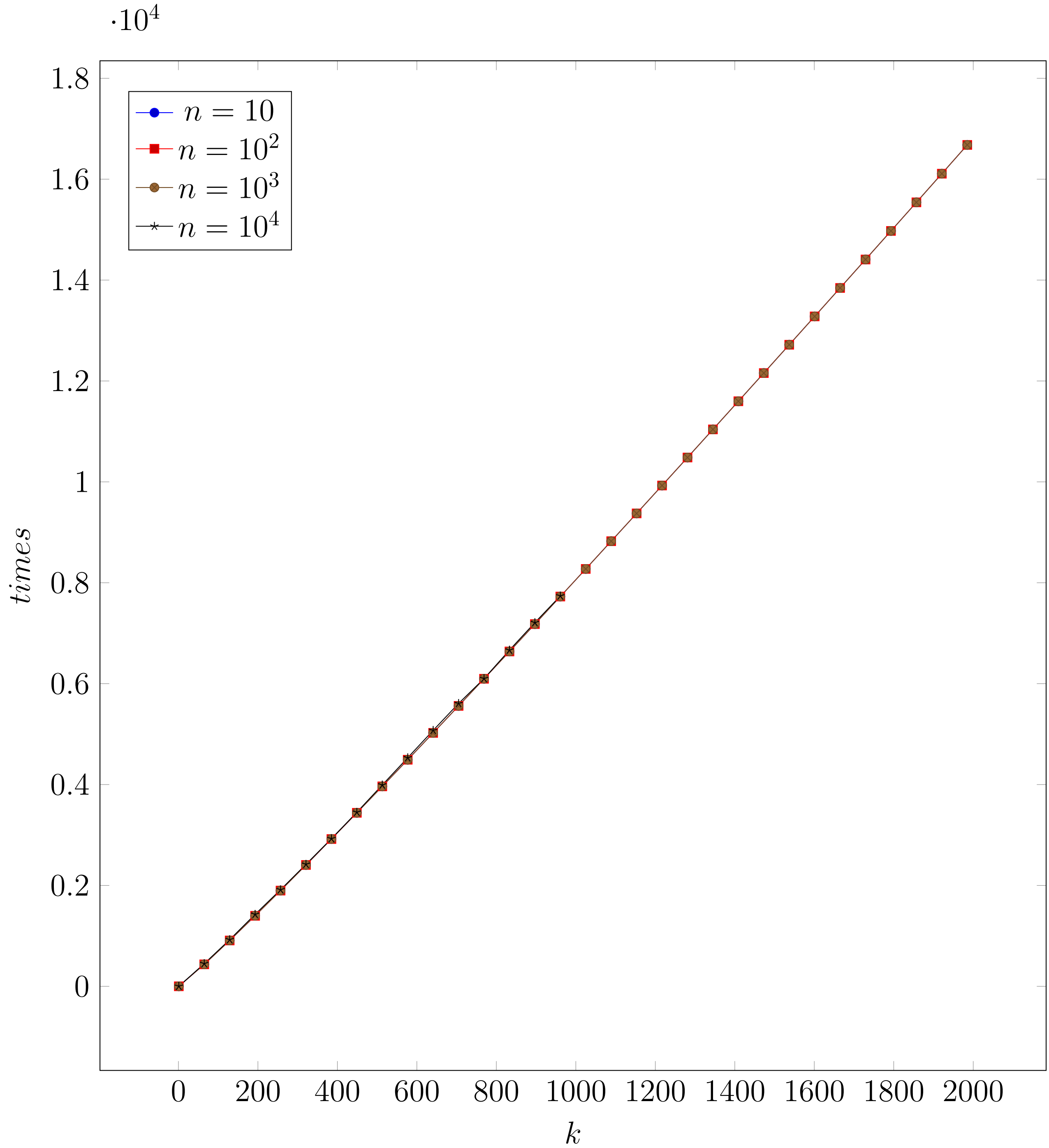
1.2. Исследование и иллюстрации работы градиентных методов на двумерных квадратичных функцкиях

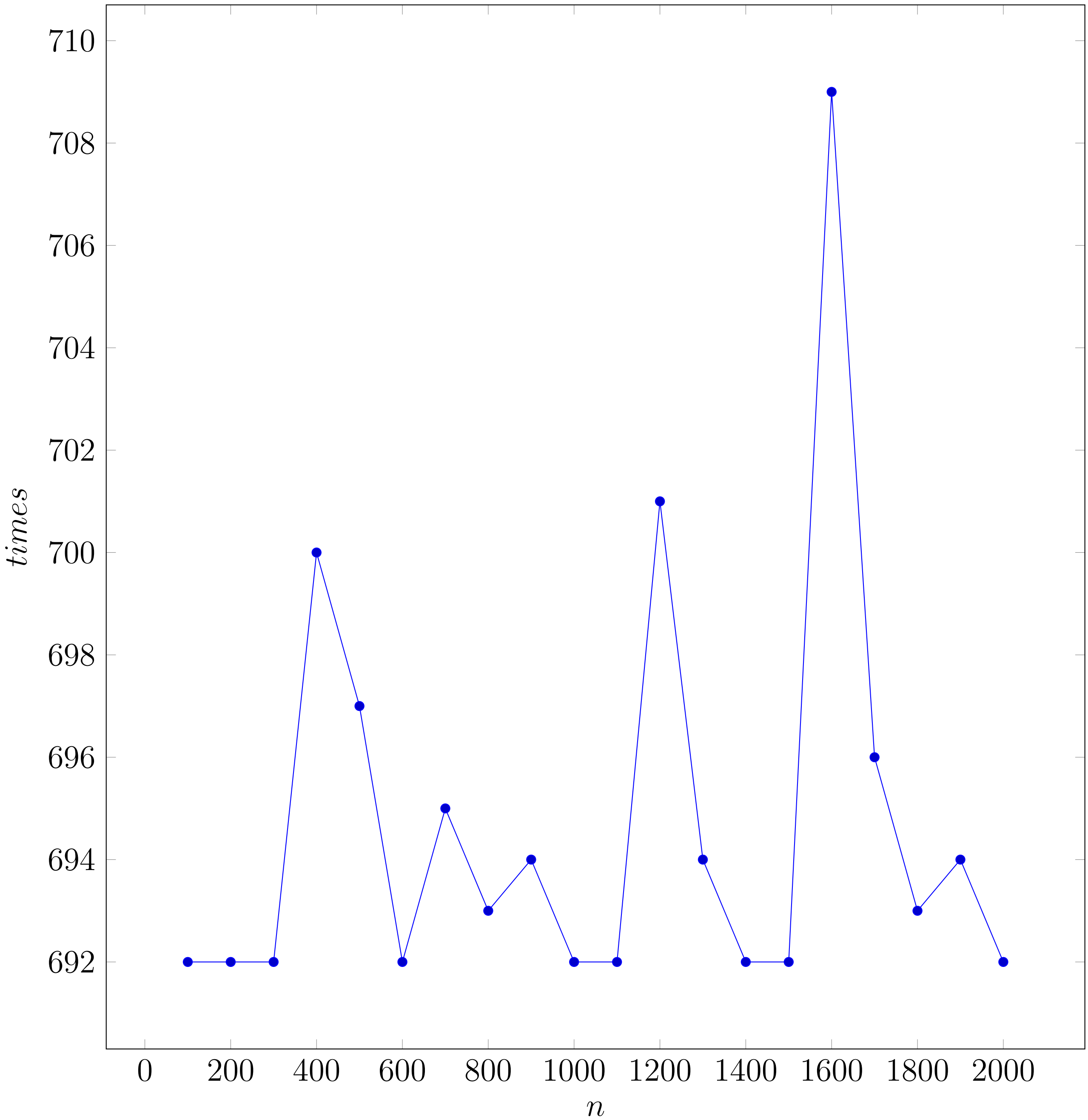
Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - xy + 4y^2 + 2x + y$. В матричном виде ее вид $f(x) = 1/2 * (Ax, x) + b * x$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) * (8 - \lambda) - 4 = 12 - 10 * \lambda + \lambda^2 = (5 + \sqrt{13} - \lambda) * (5 + \sqrt{13} - \lambda)$. Собственные значение матрицы A положительны, следовательно квадратичная форма f положительно определенная, а следовательно выпукла вниз. Таким образом к этой квадратчной форме можно применить алгоритмы минимизации. Для начала найдем точку минимума функции аналитически.

Надем точку, в которой градиент данной функции обращается в ноль. Это и будет точка минимума функции. $grad\ f = \begin{pmatrix} 2 * x - y + 2 & -x + 8y + 1 \end{pmatrix}^T = (0\ 0)^T$ Решив систему линейных уравнений, получаем $x = -17/15, y = -4/15$ и $min(f(x,y)) = -19/15$

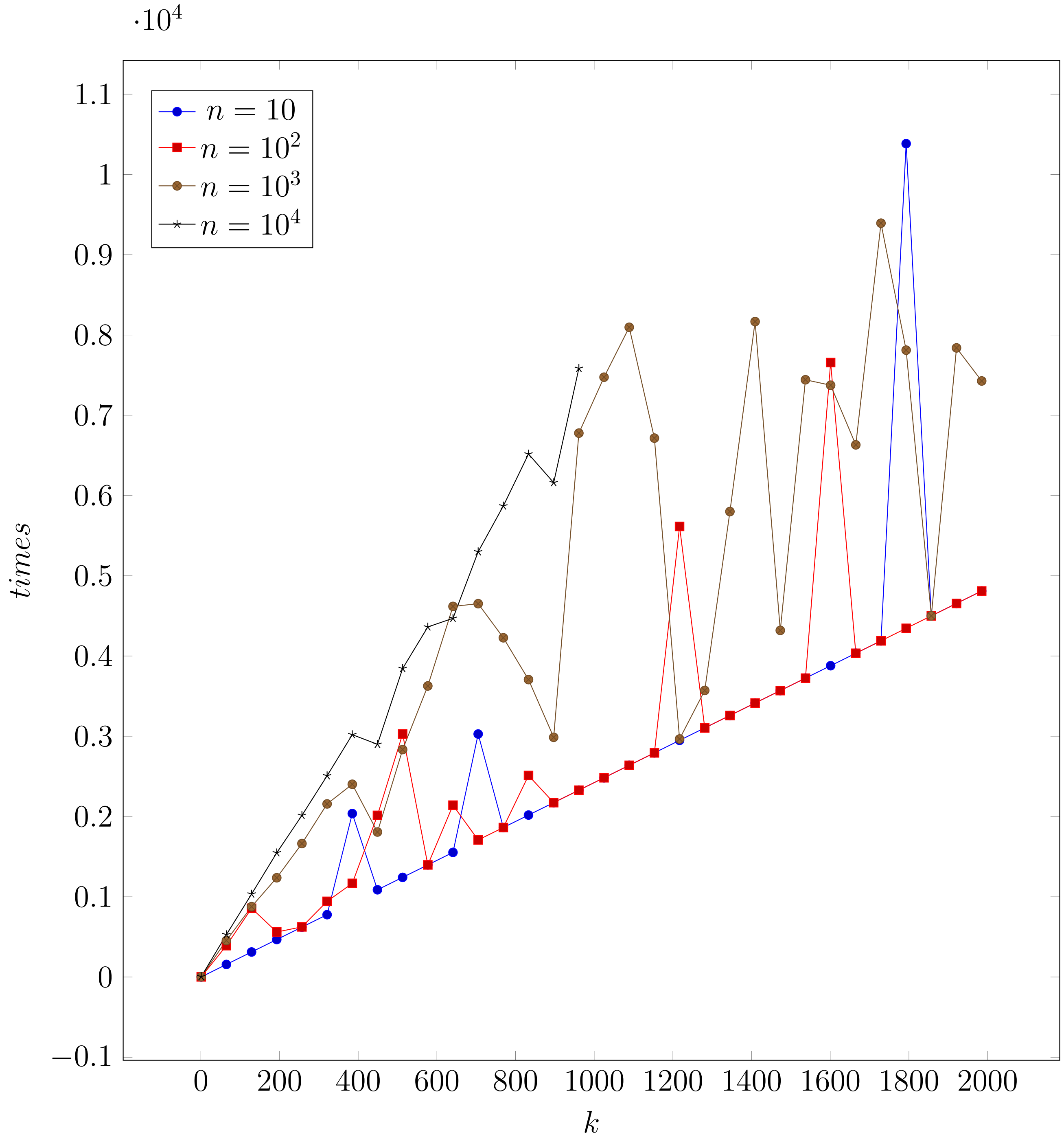
1.3. Метод градиентного спуска

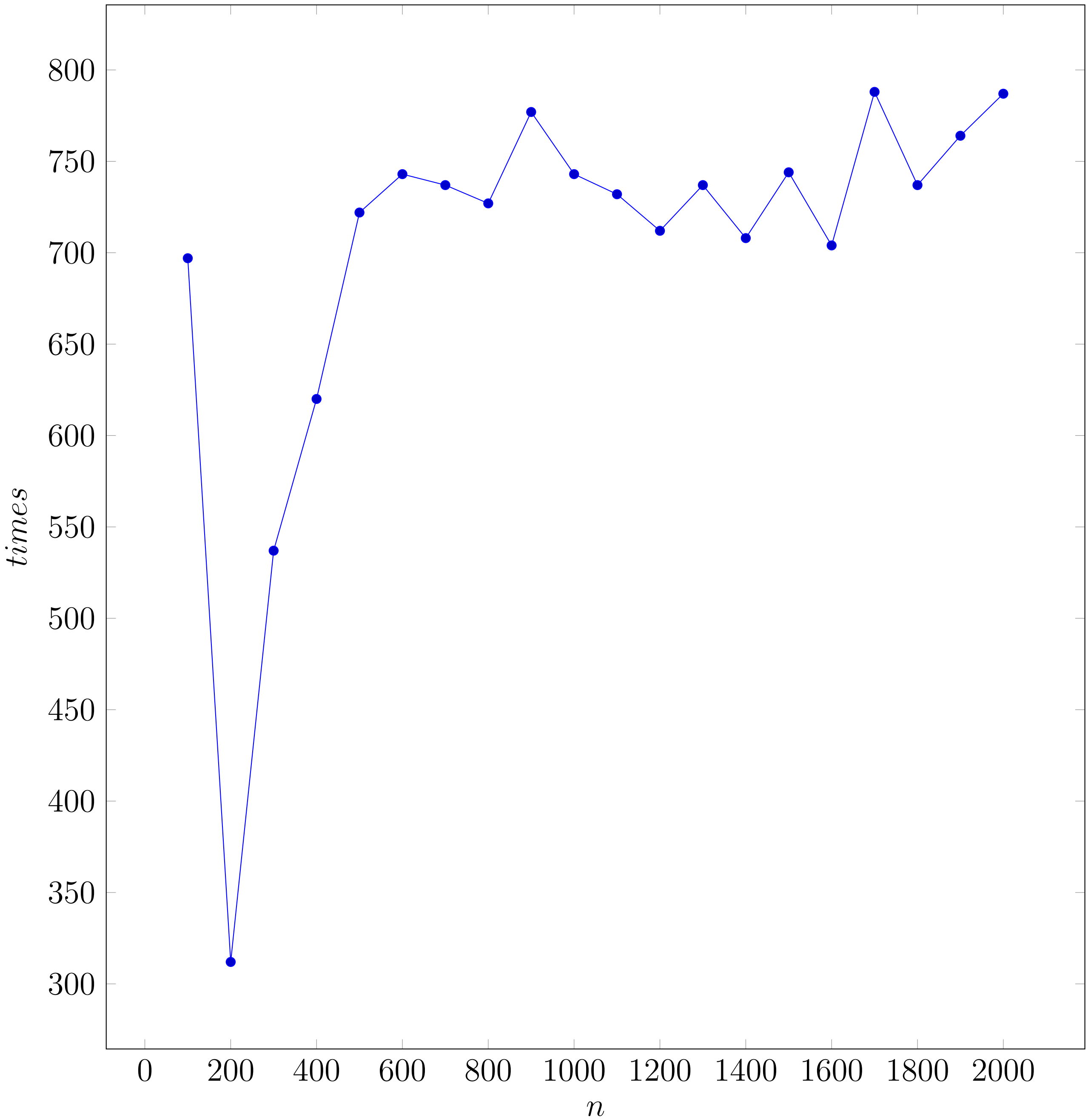




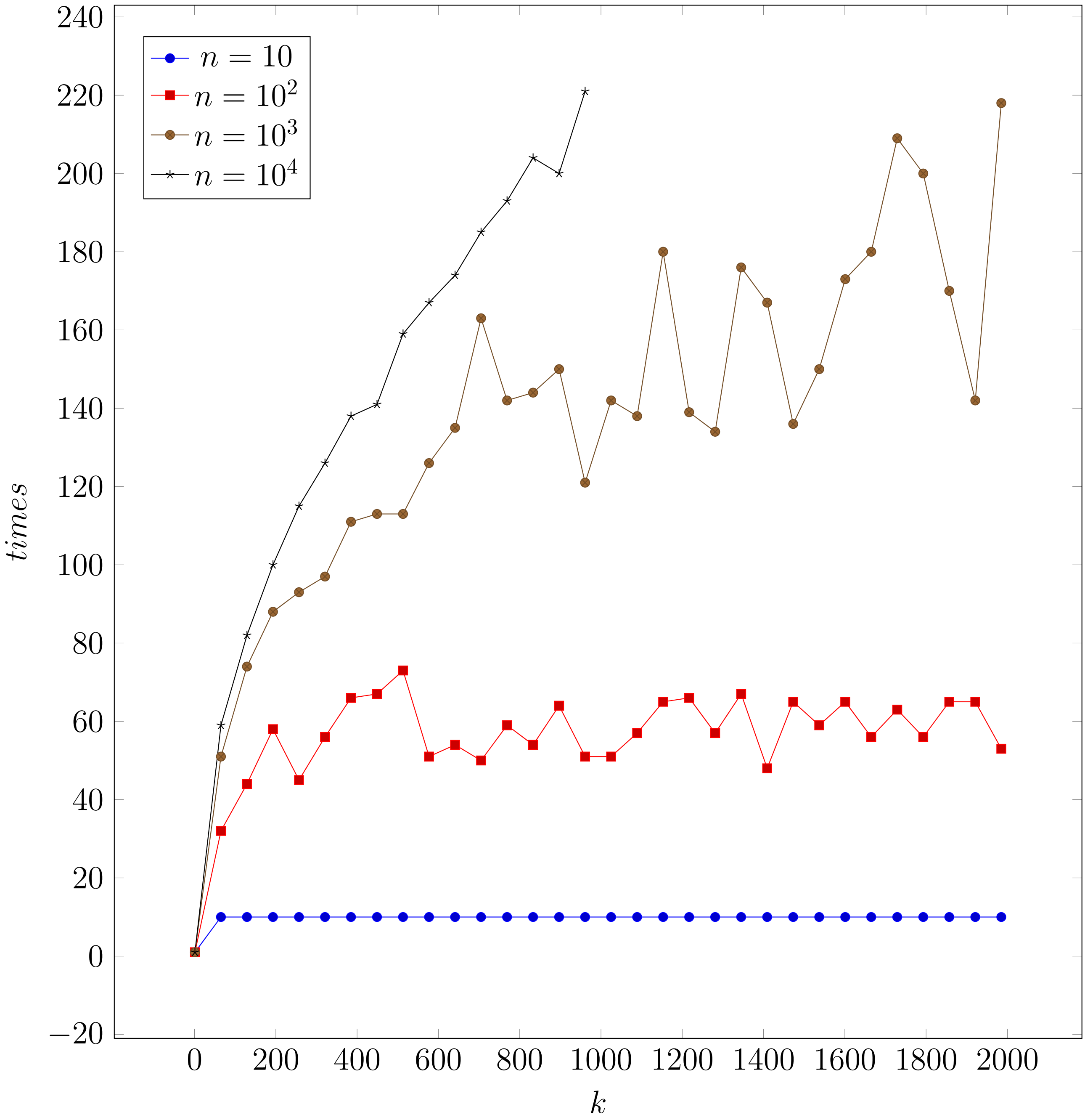
710
708
706
704
702
700
698
696
694
692
times
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
n

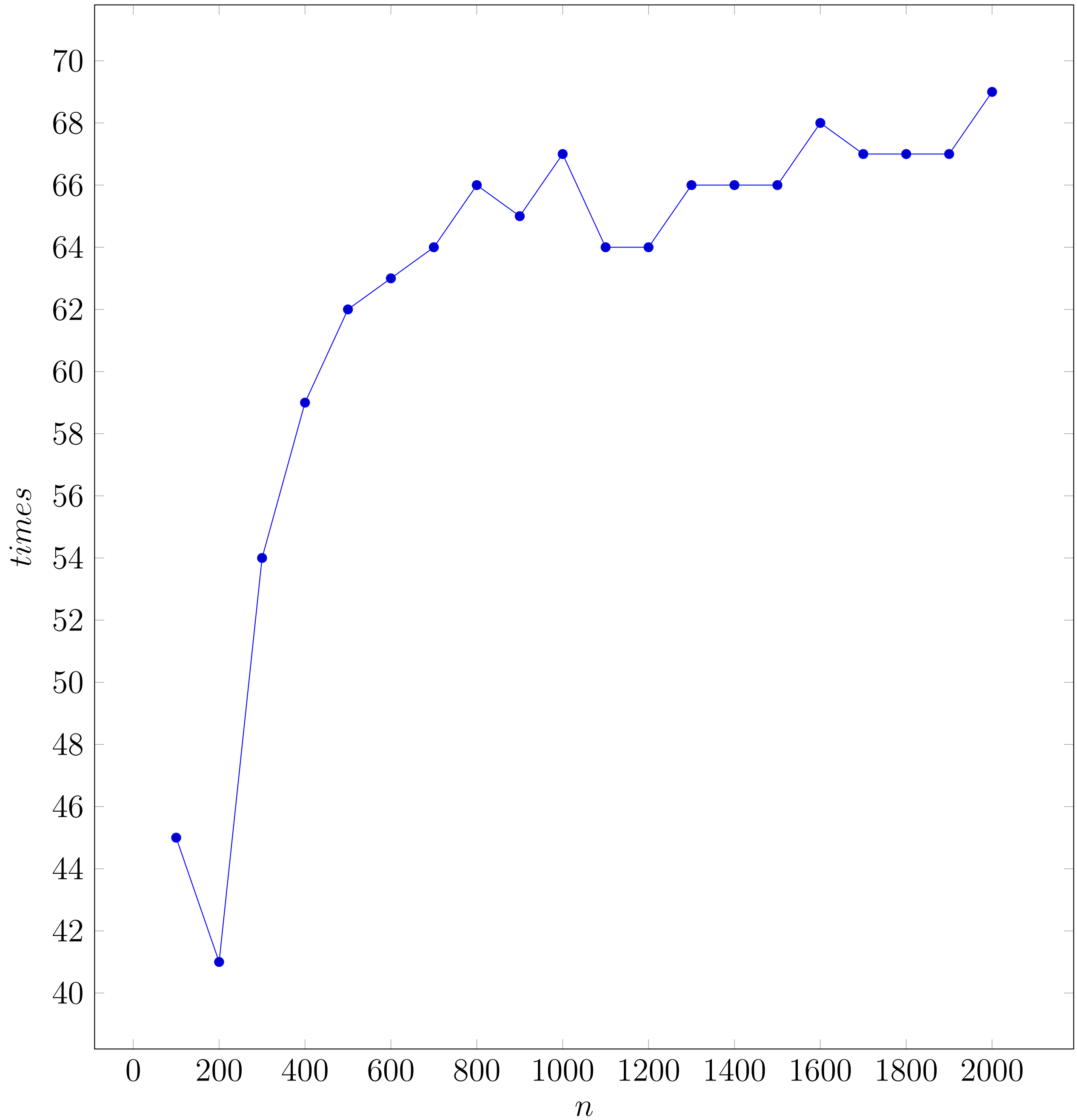
1.4. Метод наискорейшего спуска




800
750
700
650
600
550
500
450
400
350
300
times
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
n

1.5. Метод сопряженных градиентов





70
68
66
64
62
60
58
56
54
52
50
48
46
44
42
40
times
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
n