Университет ИТМО

Факультет информационных технологий и программирования
Направление прикладной математики и информатики

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

курса «Методы оптимизации»

Выполнили студенты:

Мозжевилов Данил, Кучма Андрей
Группы: M3238, M3239

Санкт-Петербург, 14 апреля 2021 г.

Содержание

Лабораторная работа 1

Методы многомерной оптимизации

1.1. Постановка задачи и цель работы

1. Реализовать алгоритмы:

   - Метод градиентного спуска
   - Метод наискорейшего спуска
   - Метод сопряженных градиентов

   Оценить как меняется скорость сходимости, если для поиска величины шага используются различные методы одномерного поиска.

2. Проанализировать траектории методов для нескольких квадратичных функций: придумайте две-три квадратичные двумерные функции, на которых работа каждого из методов будет отличаться. Нарисовать графики с линиями уровня функций и траекториями методов.

3. Исследовать, как зависит число итераций, необходимое методам для сходимости, от следующих двух параметров:

   - числа обусловленности $k \geq 1$ оптимизируемой функции
   - размерности пространства n оптимизируемых переменных

   Сгенерировать от заданных параметров k и n квадратичную задачу размерности n с числом обусловленности k и запустить на ней методы многомерной оптимизации с некоторой заданной точностью. Замерить число итераций $T(n, k)$, которое потребовалось сделать методу до сходимости.

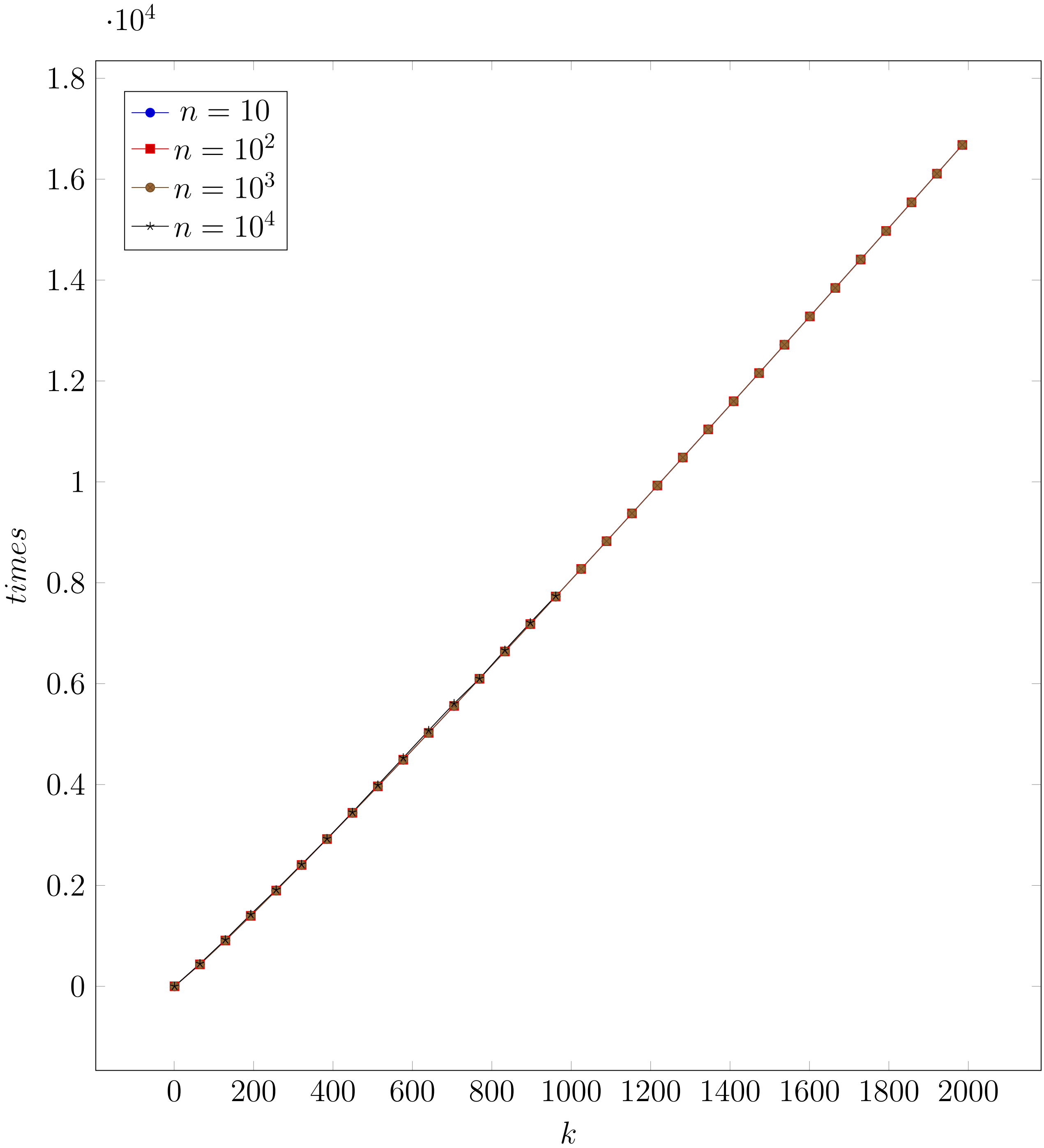
1.2. Исследование и иллюстрации работы градиентных методов на двумерных квадратичных функцкиях

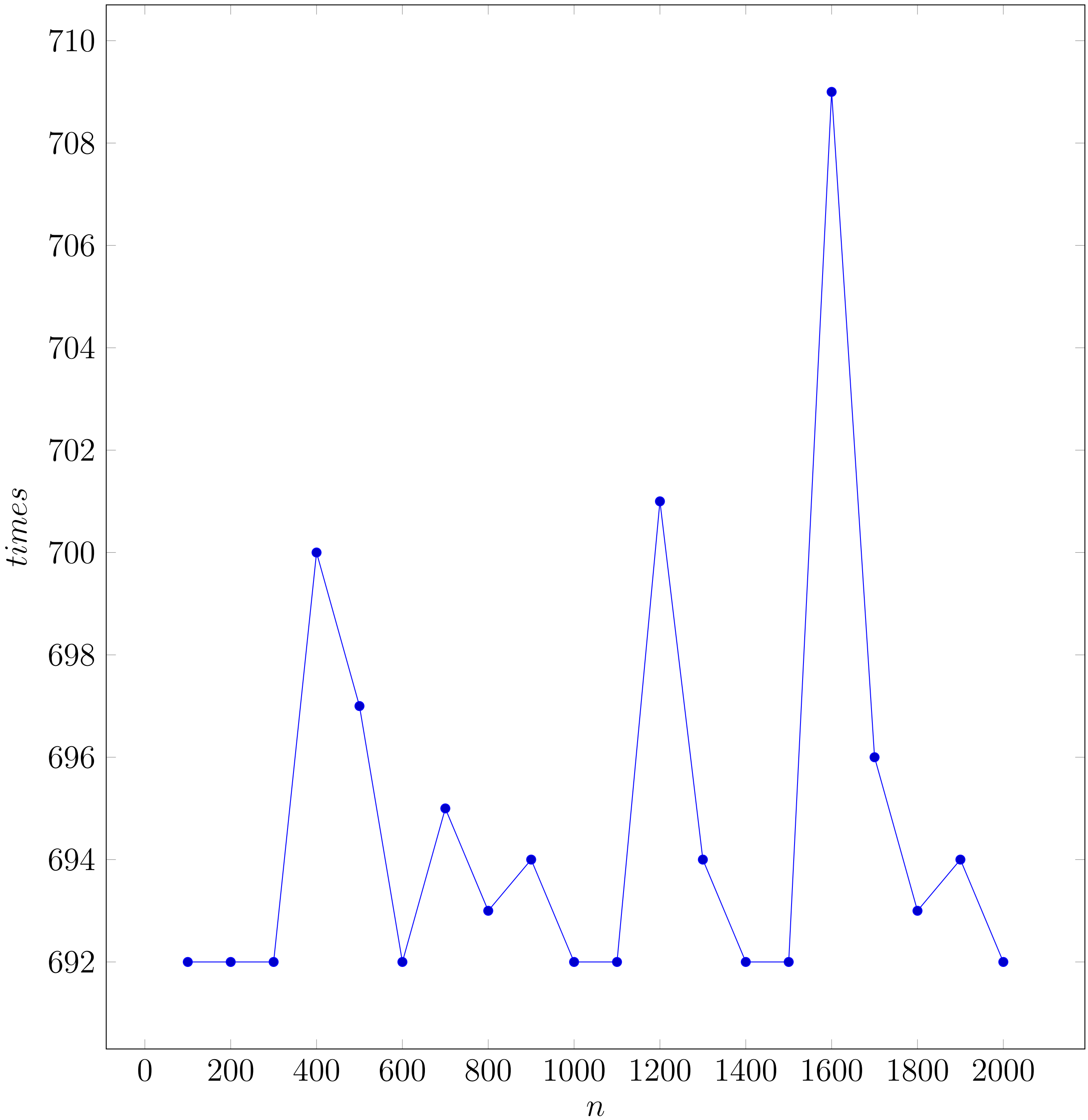
Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - xy + 4y^2 + 2x + y$. В матричном виде ее вид $f(x) = 1/2 * (Ax, x) + b * x$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) * (8-\lambda) - 1 = 15 - 10 * \lambda + \lambda^2 = (5 + \sqrt{10} - \lambda) * (5 + \sqrt{10} - \lambda)$. Собственные значение матрицы A положительны, следовательно квадратичная форма f положительно определенная, а следовательно выпукла вниз. Таким образом к этой квадратчной форме можно применить алгоритмы минимизации. Для начала найдем точку минимума функции аналитически.

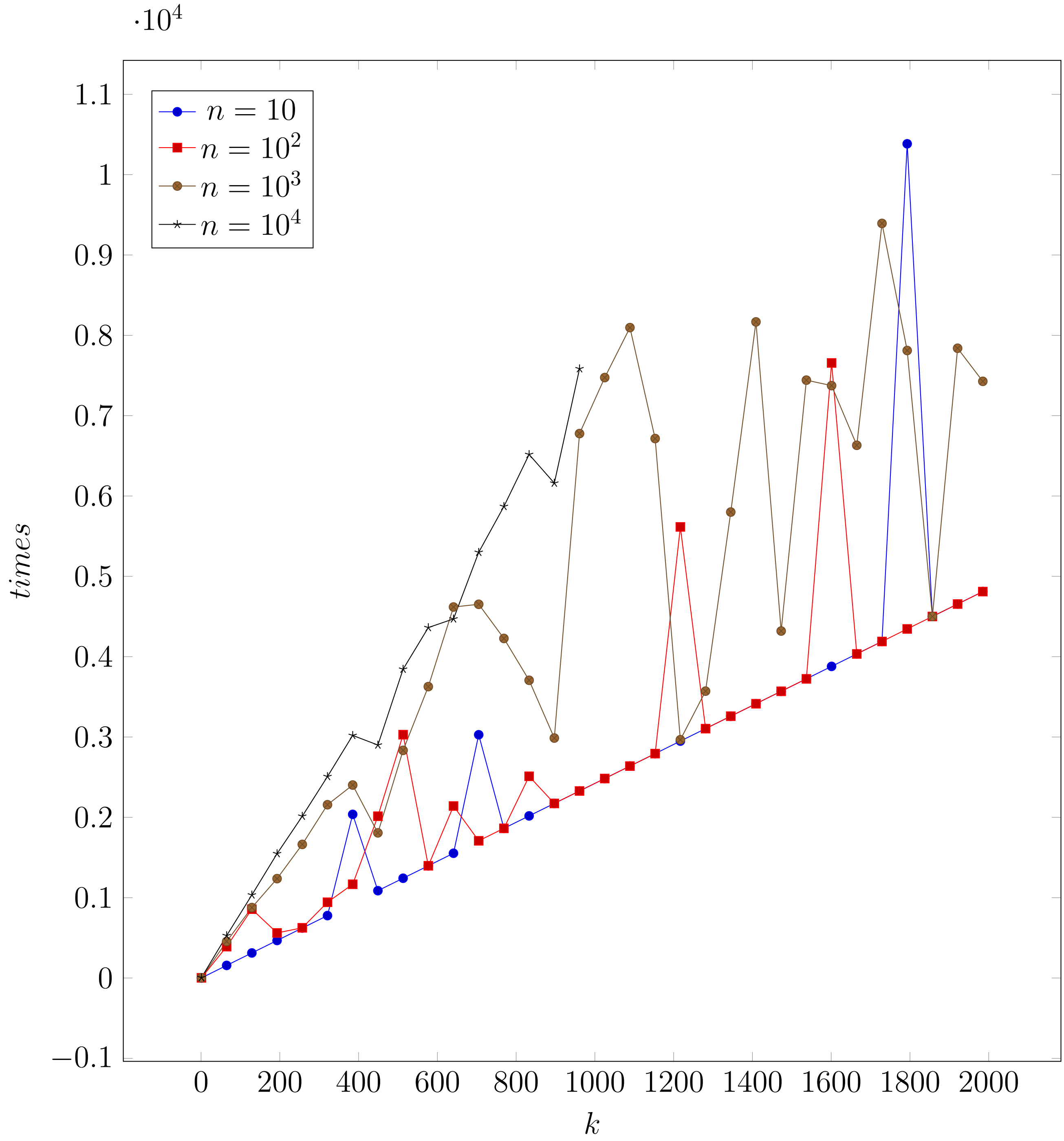
Надем точку, в которой градиент данной функции обращается в ноль. Это и будет точка минимума функции. $grad\ f = \begin{pmatrix} 2*x-y+2 & -x+8y+1 \end{pmatrix}^T = (0\ 0)^T$ Решив систему линейных уравнений, получаем $x = -17/15, y = -4/15$ и $min(f(x,y)) = -19/15$

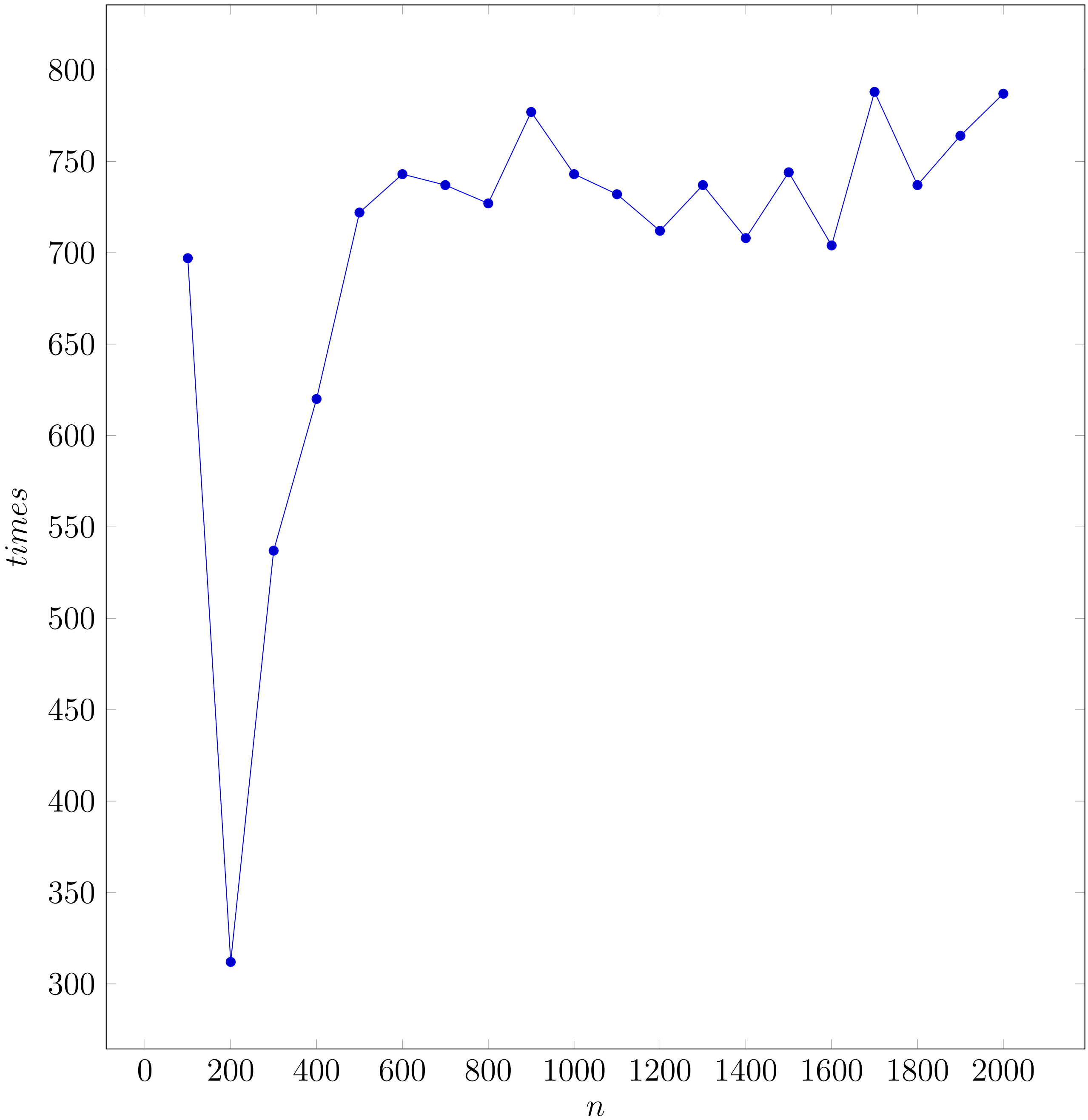
1.3. Метод градиентного спуска



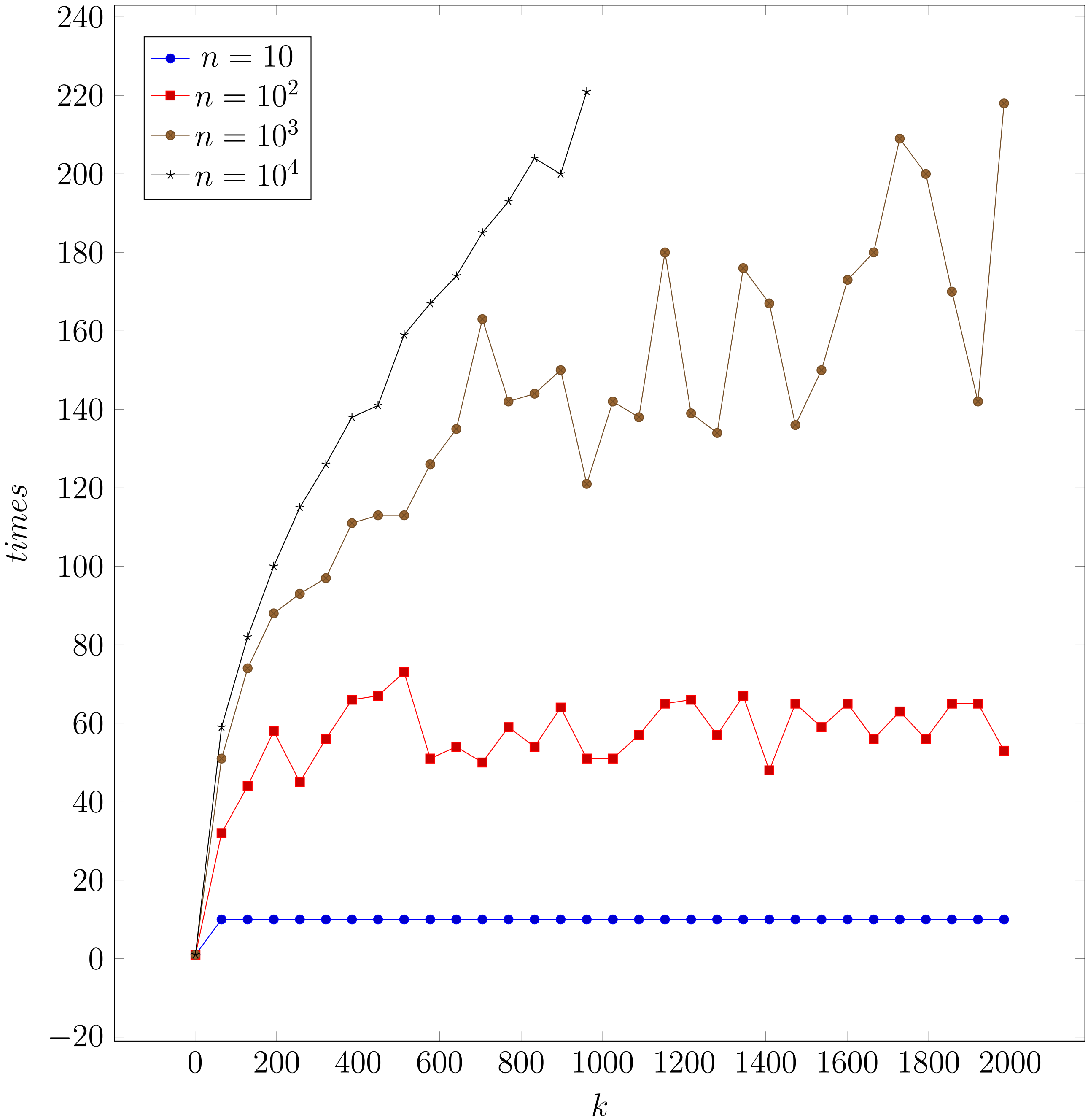

710
708
706
704
702
700
698
696
694
692
times
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
n

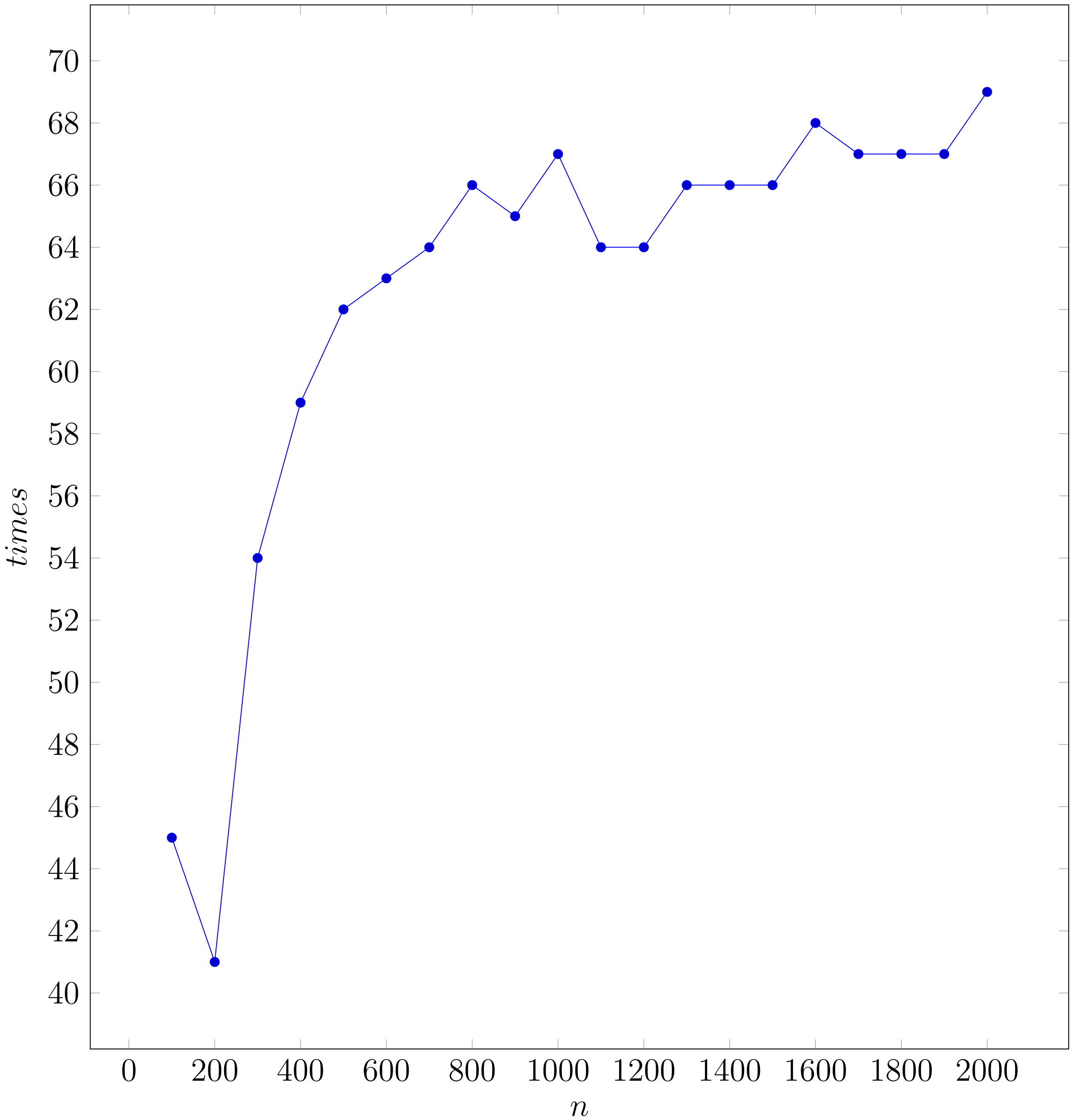
1.4. Метод наискорейшего спуска




times
n
800
750
700
650
600
550
500
450
400
350
300
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000

1.5. Метод сопряженных градиентов




70
68
66
64
62
60
58
56
54
52
50
48
46
44
42
40
times
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
n