

# Линейная алгебра

Конспект лекций Баскакова А.В.

1 — 2 семестры



НИЯУ «МИФИ»

2020 г.

## Аннотация

Данное пособие предназначено для студентов первого курса (в основном второго семестра) **ИЯФиТ**.

Конспект представляет собой ответы на экзаменационные вопросы (касающиеся линейной алгебры) по курсу лекций **Баскакова Алексея Викторовича**, которые были предложены студентам в 2019–2020-х годах при подготовке к сдаче экзамена по *аналитической геометрии* и *линейной алгебре* в первом и втором семестрах соответственно.

Хочется особенно подчеркнуть, что данный сборник предназначен исключительно для реви-зии вопросов линейной алгебры первого курса нашего университета, поскольку автор не ставит своей задачей превзойти лекции по содержанию или же по форме изложения материала.

Таким образом, **пособие не может заменить ваши собственные конспекты лекций**.

Сам же курс лектора, по его собственным словам, основывается на учебнике «Линейная алгебра и некоторые её приложения», 1985 г. под авторством Головиной Л.И.

# Оглавление

<b>Обозначения</b>	<b>3</b>
<b>1 Перестановки</b>	<b>4</b>
1.1 Чётность перестановки . . . . .	4
1.1.1 Перестановка . . . . .	4
1.1.2 Чётность . . . . .	4
1.2 Изменение чётности перестановки при транспозиции . . . . .	4
1.2.1 Транспозиции . . . . .	4
1.2.2 Изменение чётности . . . . .	5
1.3 Обратная перестановка . . . . .	5
1.3.1 Обратная перестановка . . . . .	5
1.3.2 Чётность обратной перестановки . . . . .	5
<b>2 Определитель матрицы</b>	<b>6</b>
2.1 Определение определителя матрицы . . . . .	6
2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы . . . . .	6
2.2.1 Транспонированная матрица . . . . .	6
2.2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы . . . . .	7
2.3 Влияние элементарных преобразований на определитель матрицы . . . . .	7
2.4 Вычисление определителя треугольной матрицы . . . . .	8
2.4.1 Треугольный вид матрицы . . . . .	8
2.4.2 Приведение матрицы к верхнетреугольному виду . . . . .	9
2.5 Леммы о разложении определителя по последней строке . . . . .	10
2.5.1 Дополнительный минор, алгебраическое дополнение . . . . .	10
2.5.2 Лемма I . . . . .	10
2.5.3 Лемма II . . . . .	11
2.5.4 Лемма III . . . . .	11
2.6 Разложение определителя по любой строке или столбцу . . . . .	12
2.7 Фальшивое разложение определителя . . . . .	12
2.7.1 Определитель матрицы с одинаковыми строками/столбцами . . . . .	12
2.7.2 Теорема о произведении элементов матрицы одной строки на алгебраические дополнения элементов другой строки . . . . .	13
<b>3 Произведение матриц</b>	<b>14</b>
3.1 Свойства произведения матриц . . . . .	14
3.1.1 Определение произведения матриц . . . . .	14
3.1.2 Дистрибутивность . . . . .	14
3.1.3 Ассоциативность . . . . .	15
3.1.4 Некоммутативность (контрпример) . . . . .	15
3.2 Единичная матрица . . . . .	15

3.3	Теорема об определителе произведения матриц ( <i>без доказательства</i> ) . . . . .	16
3.4	Обратная матрица . . . . .	16
3.4.1	Определение обратной матрицы . . . . .	16
3.4.2	Критерий существования обратной матрицы . . . . .	16
3.4.3	Построение обратной матрицы через алгебраические дополнения . . . . .	17
3.4.4	Построение обратной матрицы методом ЭПС . . . . .	17

# Обозначения

Опр Определение

Пр Пример

$\boxed{\text{Л}}$  Лемма

$\textcircled{\text{Th}}$  Теорема

$\square$  Начало доказательства

$\blacksquare$  Конец доказательства

$\mathbb{N}$  Множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}$  Множество целых чисел

$\mathbb{R}$  Множество действительных чисел

$\forall$  Квантор всеобщности (любой, все)

$\exists$  Квантор существования (существует)

$\nexists$  Не существует

$\exists!$  Существует, причём единственный

$\in$  Элемент принадлежит множеству

$\subset$  Множество содержится во множестве

$\cup$  Объединение множеств

$\cap$  Пересечение множеств

$\sum_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$  Сумма по элементам  $\mathfrak{A}$

$\prod_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$  Произведение по элементам  $\mathfrak{A}$

$\overline{a, b}$  Целые числа на отрезке  $[a; b]$

$\textcircled{\text{R}}$  Противоречие

$\langle \dots \rangle$  Комментарий

# Глава 1

## Перестановки

### 1.1 Чётность перестановки

#### 1.1.1 Перестановка

##### Опр Перестановка

Расставим числа  $1, 2, 3, \dots, n$  в каком-то порядке, тогда (для  $n = 5$ ):

$$\begin{array}{l} (3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 2) \text{ — перестановка} \\ (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) \text{ — } \underline{\text{единичная перестановка}} \end{array}$$

Для  $n$  элементов существует  $n!$  перестановок

$$(i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_n)$$

#### 1.1.2 Чётность

##### Опр Инверсия

В перестановке  $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$  элементы  $i_k$  и  $i_p$  образуют инверсию, если  $k < p$ , но  $i_k > i_p$

##### Опр Чётность

Чётностью перестановки называется чётность числа инверсий.

### 1.2 Изменение чётности перестановки при транспозиции

#### 1.2.1 Транспозиции

##### Опр Транспозиция

Транспозицией перестановки называется перемена местами любых двух элементов перестановки.

##### Опр Элементарная транспозиция (ЭТ)

Перемена местами двух соседних элементов перестановки — элементарная транспозиция (ЭТ).

**Л** При элементарной транспозиции чётность перестановки меняется

□

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{k+1} & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Инверсии, которые  $i_k$  и  $i_{k+1}$  составляли с остальными элементами, сохранились. Инверсия, связанная с перестановкой  $i_k$  и  $i_{k+1}$  либо появилась, либо исчезла.

Таким образом, количество инверсий изменилось на 1, следовательно, чётность перестановки изменилась ■

### 1.2.2 Изменение чётности

**Th** При любой транспозиции чётность перестановки меняется

□

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & \widehat{i_k} & i_{k+1} & \cdots & i_{l-1} & \widehat{i_l} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Переставим элемент  $i_k$  со впереди стоящим элементом вплоть до места с номером  $l$  (всего  $[l - k]$  ЭТ).

Элемент  $i_l$  оказался на  $(l - 1)$ -ом месте. Перемещаем его элементарными транспозициями на  $k$ -ое место (всего  $[l - 1 - k]$  ЭТ).

Свели транспозицию к  $[(l - k) + (l - 1 - k)] = [2(l - k) - 1]$  — нечётному числу ЭТ  $\Rightarrow \Rightarrow$  сменили чётность нечётное число раз  $\Rightarrow$  чётность изменилась ■

## 1.3 Обратная перестановка

### 1.3.1 Обратная перестановка

**Опр** Обратная перестановка

Пусть переставили элементы  $\{1; 2; 3; \cdots; n\}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ i_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n \\ i_n \end{pmatrix}$$

Переставим столбцы так, чтобы нижняя строка превратилась в единичную перестановку:

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} j_n \\ n \end{pmatrix}$$

Получим перестановку  $(j_1 \ j_2 \ \cdots \ j_n)$ , называемую обратной к перестановке  $(i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_n)$ .

### 1.3.2 Чётность обратной перестановки

**Th** Чётность прямой и обратной перестановок совпадает

□ При перестановке столбцов совершается одинаковое число транспозиций над верхней и нижней перестановками ■

# Глава 2

## Определитель матрицы

### 2.1 Определение определителя матрицы

#### Опр Определитель матрицы

Для матрицы  $M$  размером  $n \times n$ :

$$|M| \equiv \det M = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

где  $\sigma(i_1 \dots i_n)$  — дефект перестановки  $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$ , численно равный количеству инверсий этой перестановки.

#### Пр

Пусть дана  $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Тогда её определитель  $\det M = \sum_{\substack{(1 \ 2) \\ (2 \ 1)}} (-1)^{\sigma(i_1 \ i_2)} a_{1i_1} a_{2i_2} = (-1)^{\sigma(1 \ 2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\sigma(2 \ 1)} a_{12} a_{21} =$   
 $= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

### 2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы

#### 2.2.1 Транспонированная матрица

#### Опр Транспонированная матрица

Матрица  $B_{n \times n}$  является транспонированной матрицей  $A_{n \times n}$ :

$$B_{n \times n} = A_{n \times n}^T, \text{ если } (\forall i \leq j, j \leq n) b_{ij} = a_{ji}$$

#### Пр

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$



## 2.2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы

**(Th)** Если для матрицы  $A$  матрица  $B = A^T$ , то  $|B| = |A|$ , т.е.  $|A^T| = |A|$

□

$$|B| = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} b_{1i_1} b_{2i_2} \dots b_{ni_n} = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \dots$$

Выставляя элементы  $a_{i_k k}$  в порядке возрастания первых индексов, получим перестановку  $(j_1 \ j_2 \ \dots \ j_n)$ , обратную к  $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$ . Причём,  $\sigma(j_1 \dots j_n) = \sigma(i_1 \dots i_n)$

$$\dots = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{\sigma(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = |A|$$

Таким образом,  $|A^T| = |A|$  ■

## 2.3 Влияние элементарных преобразований на определитель матрицы

**Опр** Умножение строки/столбца матрицы на число

**[Л]** Если для матриц  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  и  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$  на фиксированной строке  $l$ :

$$\begin{cases} a_{lj} = \lambda b_{lj}, & j = \overline{1, n} \\ a_{ij} = b_{ij}, & \begin{cases} i \neq l, \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \text{ и } j = \overline{1, n} \end{cases}, \text{ то } |A| = \lambda |B|$$

□

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{li_l} \dots a_{ni_n} = \\ &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} \dots \lambda b_{li_l} \dots a_{ni_n} = \\ &= \lambda \cdot \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} b_{1i_1} \dots b_{li_l} \dots b_{ni_n} = \\ &= \lambda |B| \end{aligned}$$

■

Поскольку  $|A| = |A^T|$ , то свойство верно и для столбцов.

**Опр** Перестановка строки/столбца матрицы

**[Л]** Если для матриц  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  и  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$  на фиксированных строках  $k$  и  $l$ :

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k \text{ и } i \neq l \\ a_{kj}, & \text{строка } l \\ a_{lj}, & \text{строка } k \end{cases}, \text{ то } |A| = -|B|$$

□

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_l \ i_k \dots i_n)} b_{1i_1} \dots b_{li_l} b_{ki_k} \dots b_{ni_n} = \\
&= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_l \ i_k \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ki_l} a_{li_k} \dots a_{ni_n} \\
|A| &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_k \ i_l \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ki_l} a_{li_k} \dots a_{ni_n} = \\
&= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1) \cdot (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_l \ i_k \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ki_l} a_{li_k} \dots a_{ni_n} = \\
&= -|B|
\end{aligned}$$

■

Поскольку  $|A| = |A^T|$ , то свойство верно и для столбцов.

**Опр Прибавление строк/столбцов другой матрицы**

**Л** Если для матриц  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $C \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$  на фиксированной строке  $l$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{ij} = c_{ij}, & i \neq l, j = \overline{1, n} \\ b_{ij} + c_{ij}, & \text{строка } l, j = \overline{1, n} \end{cases}, \text{ то } |A| = |B| + |C|$$

□

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{li_l} \dots a_{ni_n} = \\
&= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} \dots (b_{li_l} + c_{li_l}) \dots a_{ni_n} = \\
&= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} b_{1i_1} \dots b_{li_l} \dots b_{ni_n} + \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} c_{1i_1} \dots c_{li_l} \dots c_{ni_n} = \\
&= |B| + |C|
\end{aligned}$$

■

Поскольку  $|A| = |A^T|$ , то свойство верно и для столбцов.

## 2.4 Вычисление определителя треугольной матрицы

### 2.4.1 Треугольный вид матрицы

**Опр Верхнетреугольная матрица**

Матрица  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  имеет верхнетреугольный вид, если  $(\forall j = \overline{1, n}, \forall i = \overline{2, n} : i > j) a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Л** Определитель верхнетреугольной матрицы равен  $|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

□

$$|A| = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} = \dots$$

Заметим, что любая не единичная перестановка будет содержать нуль:

$$\dots = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

■

## 2.4.2 Приведение матрицы к верхнетреугольному виду

**Л** Любую матрицу можно привести к верхнетреугольному виду путём элементарных преобразований строк/столбцов

□ Применим метод математической индукции:

1)  $n = 1$ :

$$(1.1) \quad |a_{11}| = a_{11} \text{ — верно}$$

2) Пусть лемма верна для  $n = m$

3) Докажем её для  $n = m + 1$ :

(3.1) Если  $(\forall i = \overline{1, m+1}, \forall j = \overline{1, m+1}) a_{ij} = 0$  — уже верхнетреугольный вид

(3.2) Если  $\exists a_{i_0 j_0} \neq 0$ :

- Переставим строку  $i_0$  с первой строкой, а столбец  $j_0$  с первым столбцом

$$\begin{pmatrix} a_{i_0 j_0} & \dots & a_{1(m+1)}^* \\ a_{21}^* & \dots & a_{2(m+1)}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m+1)1}^* & \dots & a_{(m+1)(m+1)}^* \end{pmatrix}$$

- Занулим элементы, стоящие под  $a_{i_0 j_0}$ , поочерёдно вычтя из второй по  $(m+1)$ -ю строки первую, умноженную на соответственно:  $\frac{a_{21}^*}{a_{i_0 j_0}}, \frac{a_{31}^*}{a_{i_0 j_0}}, \dots, \frac{a_{(m+1)1}^*}{a_{i_0 j_0}}$

$$\begin{pmatrix} a_{i_0 j_0} & \dots & a_{1(m+1)}^* \\ 0 & & \\ 0 & \boxed{\text{Матрица}} & \\ \vdots & \boxed{\text{размером}} & \\ 0 & \boxed{m \times m} & \end{pmatrix}$$

- По предположению индукции можем привести матрицу размером  $m \times m$  к верхнетреугольному виду ■

## 2.5 Леммы о разложении определителя по последней строке

### 2.5.1 Дополнительный минор, алгебраическое дополнение

#### Опр Дополнительный минор

В квадратной матрице  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  вычеркнем строку  $k$ , столбец  $l$ . Определитель полученной матрицы называется дополнительным минором  $M_{kl}$ .

#### Пр

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{22} \left( A_{3 \times 3} \right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

#### Опр Алгебраическое дополнение

Алгебраическое дополнение, соответствующее элементу  $a_{kl}$ , равно  $A_{kl} = (-1)^{k+l} M_{kl}$

### 2.5.2 Лемма I

**[Л]** Если в матрице  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $(\forall j = \overline{1, n-1}) a_{nj} = 0$ , то  $|A| = a_{nn} A_{nn}$

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{(i_1 \cdots i_{n-1} \ i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_{n-1} \ i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \sum_{(i_1 \cdots i_{n-1} \ n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_{n-1} \ n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{(n-1)i_{n-1}} a_{nn} = \\ &= a_{nn} \cdot \sum_{(i_1 \cdots i_{n-1})} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_{n-1})} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{(n-1)i_{n-1}} = \\ &= a_{nn} M_{nn} = a_{nn} \cdot (-1)^{n+n} M_{nn} = a_{nn} A_{nn} \end{aligned}$$

■

### 2.5.3 Лемма II

**Л** Если в матрице  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $(\forall j \neq l) a_{nj} = 0$ , то  $|A| = a_{nl}A_{nl}$

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nl} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Переставим столбец  $l$  на место столбца  $n$  путём последовательных элементарных транспозиций (всего  $[n - l]$  ЭТ):

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{n-l} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(l-1)} & a_{1(l+1)} & \cdots & a_{1n} & a_{1l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nl} \end{vmatrix} \stackrel{\text{Лемма I}}{=} (-1)^{n-l} \cdot a_{nl} M_{nl} = \\ &= \left\langle (-1)^{n-l} = (-1)^{n+l} \right\rangle = a_{nl} \cdot (-1)^{n+l} M_{nl} = a_{nl} A_{nl} \end{aligned}$$

■

### 2.5.4 Лемма III

**Л** Определитель матрицы  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  равен  $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ni} A_{ni}$

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

По свойству прибавления строк другой матрицы можем представить определитель  $|A|$  как сумму определителей  $|A^{(i)}|$  матриц  $A^{(i)}$ , для которых элементы последней строки равны

$$a_{nj}^{(i)} = \begin{cases} a_{ni}, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}, \text{ а остальные элементы совпадают с элементами матрицы } A:$$

$$|A| = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{|A^{(1)}|} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{|A^{(2)}|} + \cdots + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{|A^{(n)}|}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^n |A^{(i)}| \stackrel{\text{Лемма II}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ni} A_{ni}$$

■

## 2.6 Разложение определителя по любой строке или столбцу

**Th** Для матрицы  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  ( $\forall k = \overline{1, n}$ )  $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki}$

□ Начиная со строки  $k$ , последовательно переставим строки вплоть до строки  $n$ :

$$\begin{aligned}
 |A| &= (-1)^{n-k} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & \cdots & a_{(k-1)n} \\ a_{(k+1)1} & \cdots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \xrightarrow{\text{Лемма III}} (-1)^{n-k} \cdot \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki} = \\
 &= (-1)^{n-k} \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} a_{ki} M_{ki} = \sum_{i=1}^n (-1)^{2n-k+i} a_{ki} M_{ki} = \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i} a_{ki} M_{ki} = \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki}
 \end{aligned}$$

■

## 2.7 Фальшивое разложение определителя

### 2.7.1 Определитель матрицы с одинаковыми строками/столбцами

**Л** Если матрица содержит одинаковые строки/столбцы, то её определитель равен нулю

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & V_1 & \cdots & V_1 & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & V_n & \cdots & V_n & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

При вычислении определителя матриц переставим одинаковые строки/столбцы местами, получим:

$$|A| = (-1) \cdot |A| \implies |A| = 0 \text{ (аналогично } |B| = 0)$$

■

## 2.7.2 Теорема о произведении элементов матрицы одной строки на алгебраические дополнения элементов другой строки

**(Th)** Если задана матрица  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , то  $(\forall j \neq k) \sum_{j=1}^n a_{lj} A_{kj} = 0$

□ Составим матрицу  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , в которой  $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k \\ a_{lj}, & i = k \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Поскольку  $B$  содержит две одинаковые строки, то  $|B| = 0$ . С другой стороны, разложив  $|B|$  по  $k$ -ой строке, получим  $|B| = \sum_{j=1}^n b_{kj} B_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{lj} A_{kj} = 0$  ■

# Глава 3

## Произведение матриц

### 3.1 Свойства произведения матриц

#### 3.1.1 Определение произведения матриц

##### Опр Произведение матриц

Если заданы матрицы  $A_{m \times n}$ ,  $B_{n \times k}$ , то произведением  $A \cdot B$  называется матрица  $C_{m \times k}$  такая, что:

$$\begin{aligned} A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} &= C_{m \times k} \\ (\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, k}) \quad c_{ij} &= \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj} \end{aligned}$$

#### 3.1.2 Дистрибутивность

##### Л Произведение матриц дистрибутивно

$$\underbrace{A_{n \times k} \left( \overbrace{\lambda B_{k \times m} + \mu C_{k \times m}}^{R\{r_{ij}\}} \right)}_{D\{d_{ij}\}} = \underbrace{\overbrace{\lambda AB}_{n \times m} + \overbrace{\mu AC}_{n \times m}}_{F\{f_{ij}\}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

□

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{t=1}^k a_{it} r_{tj} = \sum_{t=1}^k a_{it} (\lambda b_{tj} + \mu c_{tj}) = \lambda \sum_{t=1}^k a_{it} b_{tj} + \mu \sum_{t=1}^k a_{it} c_{tj} = p_{ij} + q_{ij} = f_{ij} \implies \\ &\implies D = F \end{aligned}$$

■



### 3.1.3 Ассоциативность

#### Л Произведение матриц ассоциативно

$$\begin{aligned} \left( \overbrace{A \cdot B}^{F\{f_{ij}\}} \right) \cdot C &= T \\ A \cdot \left( \overbrace{B \cdot C}^{G\{g_{ij}\}} \right) &= D \end{aligned}$$

$m \times k \quad k \times l \quad l \times n \quad m \times n$

Покажем, что  $T = D$ :

□

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \sum_{p=1}^l f_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^l c_{pj} \left( \sum_{q=1}^k a_{iq} b_{qp} \right) = \sum_{q=1}^k a_{iq} \left( \sum_{p=1}^l b_{qp} c_{pj} \right) = \sum_{q=1}^k a_{iq} g_{qj} = d_{ij} \implies \\ &\implies T = D \end{aligned}$$

■

### 3.1.4 Некоммутативность (контрпример)

#### Л Произведение матриц некоммутативно

В общем случае  $A \cdot B \neq B \cdot A$

Пр

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ \left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -14 & -1 \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \implies A \cdot B \neq B \cdot A \end{aligned}$$

## 3.2 Единичная матрица

#### Опр Единичная матрица

⟨Символ Кронекера⟩

Единичная матрица — матрица  $E \{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $(\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n}) e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

#### Л Если $\exists A \cdot E$ , то $A \cdot E = A$ (аналогично $E \cdot B = B$ )

□

$$\begin{aligned} A \cdot E &= C \\ m \times n \quad n \times n \quad m \times n \\ (\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}) c_{ij} &= \sum_{t=1}^n a_{it} \delta_{tj} = 0 + 0 + \dots + a_{ij} \delta_{jj} = a_{ij} \implies C = A \end{aligned}$$

■

### 3.3 Теорема об определителе произведения матриц (без доказательства)<sup>1</sup>

**(Th)** Если  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы одного порядка, то  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

### 3.4 Обратная матрица

#### 3.4.1 Определение обратной матрицы

Опр **Обратная матрица**

Если для матрицы  $A_{n \times n}$  существует матрица  $B_{n \times n}$  такая, что  $A \cdot B = B \cdot A = E$ , то матрицу  $B$  называют обратной к матрице  $A$  и обозначают  $B \equiv A^{-1}$

#### 3.4.2 Критерий существования обратной матрицы

**(Th)** Если у матрицы  $A_{n \times n}$ ,  $|A| \neq 0$ , то  $\exists! A^{-1} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

1) Существование:

- Докажем, что если  $|A| = 0$ , то  $\nexists A^{-1}$ :

□ Предположим противное —  $A^{-1}$  существует и  $|A| = 0$ :

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= E \\ |A| \cdot |A^{-1}| &= |E| \\ 0 = 1 &\implies \text{☹} \blacksquare \end{aligned}$$

- Докажем, что если  $|A| \neq 0$ , то  $\exists A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^*)^T$ , где  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $A^* = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$ :

Рассмотрим  $B = \frac{1}{|A|} (A^*)^T$  и докажем, что  $A \cdot B = B \cdot A = E$ :

□

$$A \cdot B = C, \quad |A| = \Delta$$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj} = \sum_{t=1}^n a_{it} \cdot \frac{1}{\Delta} A_{jt} = \frac{1}{\Delta} \sum_{t=1}^n a_{it} A_{jt} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \implies \\ &\implies C = E \end{aligned}$$

Аналогично  $B \cdot A = E$ , т.к. разложение для определителя справедливо и для столбцов ■

<sup>1</sup>Полное доказательство можно обнаружить в упомянутом в аннотации учебнике Л.И. Головиной (Глава III. Линейные операторы / §2. Действия над линейными операторами / Теорема 3).

2) Единственность:

□ Пусть для матрицы  $A$  существуют матрицы  $B$  и  $C$  такие, что 
$$\begin{cases} A \cdot B = B \cdot A = E \\ A \cdot C = C \cdot A = E \\ B \neq C \end{cases}$$

Тогда, 
$$\left. \begin{aligned} C \cdot A \cdot B &= (C \cdot A) \cdot B = E \cdot B = B \\ C \cdot A \cdot B &= C \cdot (A \cdot B) = C \cdot E = C \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = C \Rightarrow \text{☹} \blacksquare$$

### 3.4.3 Построение обратной матрицы через алгебраические дополнения

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1) A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 4 \quad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -2 \quad A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 1$$

$$2) A^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) |A| = 4 - 6 = -2$$

$$4) A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$5) A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

### 3.4.4 Построение обратной матрицы методом элементарных преобразований строк

Умножение  $k$ -ой строки на  $\alpha \in \mathbb{R}$

□ Соответствует левостороннему домножению на  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = k \text{ и } j = k \\ \delta_{ij}, & i \neq k \text{ или } j \neq k \end{cases}$$

$$\square B \cdot A = C$$

$$\begin{aligned} 1.1) \quad (i = k, j = \overline{1, n}) \quad c_{kj} &= \sum_{t=1}^n b_{kt} a_{tj} = \delta_{k1} a_{1j} + \delta_{k2} a_{2j} + \dots + \delta_{k(k-1)} a_{(k-1)j} + \alpha a_{kj} + \dots + \delta_{kn} a_{nj} = \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + \alpha a_{kj} + \dots + 0 = \\ &= \alpha a_{kj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.2) \quad (i \neq k, j = \overline{1, n}) \quad c_{ij} &= \sum_{t=1}^n b_{it} a_{tj} = \delta_{i1} a_{1j} + \cdots + \delta_{ii} a_{ij} + \cdots + \delta_{in} a_{nj} = \\
&= 0 + \cdots + 1 \cdot a_{ij} + \cdots + 0 = \\
&= a_{ij}
\end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } c_{ij} = \begin{cases} \alpha a_{ij}, & i = k, j = \overline{1, n} \\ a_{ij}, & i \neq k, j = \overline{1, n} \end{cases} \blacksquare$$

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\alpha=c]{k=2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4c & 5c & 6c \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4c & 5c & 6c \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Перемена местами  $l$ -ой и  $k$ -ой строк

Л Соответствует левостороннему домножению на  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k, i \neq l, j = \overline{1, n} \\ \delta_{kj}, & i = l, j = \overline{1, n} \\ \delta_{lj}, & i = k, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$\Box B \cdot A = C$$

$$2.1) \quad (i \neq k, i \neq l, j = \overline{1, n}) \quad c_{ij} = \sum_{t=1}^n b_{it} a_{tj} = 0 + \cdots + 0 + \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij}$$

$$2.2) \quad (i = l, j = \overline{1, n}) \quad c_{lj} = \sum_{t=1}^n b_{lt} a_{tj} = 0 + \cdots + 0 + \delta_{lk} a_{kj} = a_{kj}$$

$$2.3) \quad (i = k, j = \overline{1, n}) \quad c_{kj} = \sum_{t=1}^n b_{kt} a_{tj} = 0 + \cdots + 0 + \delta_{ll} a_{lj} = a_{lj}$$

$$\text{Таким образом, } c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k, i \neq l, j = \overline{1, n} \\ a_{kj}, & i = l, j = \overline{1, n} \\ a_{lj}, & i = k, j = \overline{1, n} \end{cases} \blacksquare$$

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[k=2]{l=1} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Добавление к  $k$ -ой строке  $l$ -ую, умноженную на  $\alpha \in \mathbb{R}$

**[Л]** Соответствует левостороннему домножению на  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha + \delta_{kl}, & i = k \text{ и } j = l \\ \delta_{ij}, & i \neq k \text{ или } j \neq l \end{cases}$$

$$\square B \cdot A = C$$

$$3.1) \quad (i = k \neq l, j = \overline{1, n}) \quad c_{kj} = \sum_{t=1}^n b_{kt} a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{kk} a_{kj} + a_{lj}(\alpha + 0) = a_{kj} + \alpha a_{lj}$$

$$3.2) \quad (i = k = l = q, j = \overline{1, n}) \quad c_{kj} = c_{lj} = c_{qj} = \sum_{t=1}^n b_{qt} a_{tj} = 0 + \dots + 0 + a_{qj}(\alpha + 1) = a_{qj} + \alpha a_{qj}$$

$$3.3) \quad (i \neq k, j = \overline{1, n}) \quad c_{ij} = \sum_{t=1}^n b_{it} a_{tj} = \sum_{t=1}^n b_{it} a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij}$$

$$\text{Таким образом, } c_{ij} = \begin{cases} a_{kj} + \alpha a_{lj}, & i = k, j = \overline{1, n} \\ a_{ij}, & i \neq k, j = \overline{1, n} \end{cases} \blacksquare$$

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[k=2]{l=1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 + \alpha & 5 + 2\alpha & 6 + 3\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha + \delta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 + \alpha & 5 + 2\alpha & 6 + 3\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[k=3]{l=3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 + 7\alpha & 8 + 8\alpha & 9 + 9\alpha \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \delta_{33} \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7(\alpha + 1) & 8(\alpha + 1) & 9(\alpha + 1) \end{pmatrix}$$

Таким образом, последовательное применение ЭП строк к матрице  $A$  эквивалентно последовательному домножению слева матрицы  $A$  на соответствующую матрицу  $B_i$

### Метод элементарных преобразований строк

Пусть имеется некая квадратная матрица  $A$ . Изобразим её и присоединённую к ней единичную матрицу:

$$(A \mid E)$$

Производя ЭП строк над обеими матрицами, добьёмся того, чтобы слева образовалась единичная матрица. Тогда справа образуется матрица, обратная  $A$ :

$$(A \mid E) \sim (E \mid A^{-1})$$

□ По доказанному выше, применение ЭП строк эквивалентно левому домножению на некоторую матрицу  $B_i$ . Таким образом, получим:

$$4.1) \quad A \sim B_m \cdots B_n A = E \implies (B_m \cdots B_n) = A^{-1}$$

$$4.2) \quad E \sim B_m \cdots B_n E = B_m \cdots B_n \implies E \sim A^{-1} \blacksquare$$

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$