

# Линейная алгебра

Конспект лекций Баскакова А.В.

1 — 2 семестры



НИЯУ «МИФИ»

2020 г.

## Аннотация

Данное пособие предназначено для студентов первого курса (в основном второго семестра) **ИЯФиТ**.

Конспект представляет собой ответы на экзаменационные вопросы (касающиеся линейной алгебры) по курсу лекций **Баскакова Алексея Викторовича**, которые были предложены студентам в 2019–2020-х годах при подготовке к сдаче экзамена по *аналитической геометрии* и *линейной алгебре* в первом и втором семестрах соответственно.

Хочется особенно подчеркнуть, что данный сборник предназначен исключительно для реви-зии вопросов линейной алгебры первого курса нашего университета, поскольку автор не ставит своей задачей превзойти лекции по содержанию или же по форме изложения материала.

Таким образом, **пособие не может заменить ваши собственные конспекты лекций**.

Сам же курс лектора, по его собственным словам, основывается на учебнике «Линейная алгебра и некоторые её приложения», 1985 г. под авторством Головиной Л.И.

# Оглавление

<b>Обозначения</b>	<b>3</b>
<b>1 Перестановки</b>	<b>4</b>
1.1 Чётность перестановки . . . . .	4
1.1.1 Перестановка . . . . .	4
1.1.2 Чётность . . . . .	4
1.2 Изменение чётности перестановки при транспозиции . . . . .	4
1.2.1 Транспозиции . . . . .	4
1.2.2 Изменение чётности . . . . .	5
1.3 Обратная перестановка . . . . .	5
1.3.1 Обратная перестановка . . . . .	5
1.3.2 Чётность обратной перестановки . . . . .	6
<b>2 Определитель матрицы</b>	<b>7</b>
2.1 Определение определителя матрицы . . . . .	7
2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы . . . . .	7
2.2.1 Транспонированная матрица . . . . .	7
2.2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы . . . . .	8
2.3 Влияние элементарных преобразований на определитель матрицы . . . . .	8
2.4 Вычисление определителя треугольной матрицы . . . . .	10
2.4.1 Треугольный вид матрицы . . . . .	10
2.4.2 Приведение матрицы к верхнетреугольному виду . . . . .	10
2.5 Леммы о разложении определителя по последней строке . . . . .	11
2.5.1 Дополнительный минор, алгебраическое дополнение . . . . .	11
2.5.2 Лемма I . . . . .	12
2.5.3 Лемма II . . . . .	12
2.5.4 Лемма III . . . . .	13
2.6 Разложение определителя по любой строке или столбцу . . . . .	13
2.7 Фальшивое разложение определителя . . . . .	14

2.7.1	Определитель матрицы с одинаковыми строками/столбцами . . . . .	14
2.7.2	Теорема о произведении элементов матрицы одной строки на алгебраические дополнения элементов другой строки . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Произведение матриц</b>	<b>16</b>
3.1	Свойства произведения матриц . . . . .	16
3.1.1	Определение произведения матриц . . . . .	16
3.1.2	Дистрибутивность . . . . .	16
3.1.3	Ассоциативность . . . . .	17
3.1.4	Некоммутативность (контрпример) . . . . .	17
3.2	Единичная матрица . . . . .	17
3.3	Теорема об определителе произведения матриц <i>(без доказательства)</i> . . . . .	18
3.4	Обратная матрица . . . . .	18
3.4.1	Определение обратной матрицы . . . . .	18
3.4.2	Критерий существования обратной матрицы . . . . .	18
3.4.3	Построение обратной матрицы через алгебраические дополнения . . . . .	19
3.4.4	Построение обратной матрицы методом ЭПС . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Ранг матрицы</b>	<b>23</b>
4.1	Определение ранга матрицы . . . . .	23
4.1.1	Минор . . . . .	23
4.1.2	Ранг матрицы . . . . .	23
4.2	Влияние элементарных преобразований строк на ранг матрицы . . . . .	24
4.3	Вычисление ранга с помощью ЭП строк . . . . .	25
4.4	Свойство базисных строк и базисных столбцов матрицы . . . . .	25
4.4.1	Базисный минор матрицы . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Системы линейных алгебраических уравнений</b>	<b>28</b>
5.1	Решение, совместность, определённость . . . . .	28
5.2	Влияние ЭП на решение СЛАУ . . . . .	29
5.3	Теорема Крамера решения СЛАУ . . . . .	30

# Обозначения

Опр Определение

Пр Пример

$\boxed{\text{Л}}$  Лемма

$\textcircled{\text{Th}}$  Теорема

$\square$  Начало доказательства

$\blacksquare$  Конец доказательства

$\mathbb{N}$  Множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}$  Множество целых чисел

$\mathbb{R}$  Множество действительных чисел

$\forall$  Квантор всеобщности (любой, все)

$\exists$  Квантор существования (существует)

$\nexists$  Не существует

$\exists!$  Существует, причём единственный

$\in$  Элемент принадлежит множеству

$\subset$  Множество содержится во множестве

$\cup$  Объединение множеств

$\cap$  Пересечение множеств

$\sum_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$  Сумма по элементам  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$

$\prod_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$  Произведение по элементам  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$

$\overline{a, b}$  Целые числа на отрезке  $[a; b]$

$\text{\textcircled{X}}$  Противоречие

$\langle \dots \rangle$  Комментарий

# Глава 1

## Перестановки

### 1.1 Чётность перестановки

#### 1.1.1 Перестановка

Опр **Перестановка**

Расставим числа  $1, 2, 3, \dots, n$  в каком-то порядке, тогда (для  $n = 5$ ):

$$\begin{aligned} (3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 2) & \text{ — перестановка} \\ (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) & \text{ — единичная перестановка} \end{aligned}$$

Для  $n$  элементов существует  $n!$  перестановок

$$(i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_n)$$

#### 1.1.2 Чётность

Опр **Инверсия**

В перестановке  $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$  элементы  $i_k$  и  $i_p$  образуют инверсию, если  $k < p$ , но  $i_k > i_p$

Опр **Чётность**

Чётностью перестановки называется чётность числа инверсий.

### 1.2 Изменение чётности перестановки при транспозиции

#### 1.2.1 Транспозиции

Опр **Транспозиция**

Транспозицией перестановки называется перемена местами любых двух элементов перестановки.

### Опр Элементарная транспозиция (ЭТ)

Перемена местами двух соседних элементов перестановки — элементарная транспозиция (ЭТ).

**Л** При элементарной транспозиции чётность перестановки меняется

□

$$\begin{array}{cccccccc} (i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n) \\ & & & & \Downarrow & & & \\ (i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{k+1} & i_k & \cdots & i_n) \end{array}$$


Инверсии, которые  $i_k$  и  $i_{k+1}$  составляли с остальными элементами, сохранились. Инверсия, связанная с перестановкой  $i_k$  и  $i_{k+1}$  либо появилась, либо исчезла.

Таким образом, количество инверсий изменилось на 1, следовательно, чётность перестановки изменилась. ■

## 1.2.2 Изменение чётности

**Th** При любой транспозиции чётность перестановки меняется

□

$$(i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad \widehat{i_k} \quad i_{k+1} \quad \cdots \quad i_{l-1} \quad \widehat{i_l} \quad \cdots \quad i_n)$$


Переставим элемент  $i_k$  со впереди стоящим элементом вплоть до места с номером  $l$  (всего  $[l - k]$  ЭТ).

Элемент  $i_l$  оказался на  $(l - 1)$ -ом месте. Перемещаем его элементарными транспозициями на  $k$ -ое место (всего  $[l - 1 - k]$  ЭТ).

Свели транспозицию к  $[(l - k) + (l - 1 - k)] = [2(l - k) - 1]$  — нечётному числу ЭТ  $\Rightarrow \Rightarrow$  сменили чётность нечётное число раз  $\Rightarrow$  чётность изменилась. ■

## 1.3 Обратная перестановка

### 1.3.1 Обратная перестановка

Опр Обратная перестановка

Пусть переставили элементы  $\{1; 2; 3; \cdots; n\}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ i_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n \\ i_n \end{pmatrix}$$

Переставим столбцы так, чтобы нижняя строка превратилась в единичную перестановку:

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} j_n \\ n \end{pmatrix}$$

Получим перестановку  $(j_1 \quad j_2 \quad \cdots \quad j_n)$ , называемую обратной к перестановке  $(i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_n)$ .

### 1.3.2 Чётность обратной перестановки

**Th** Чётность прямой и обратной перестановок совпадает

□ При перестановке столбцов совершается одинаковое число транспозиций над верхней и нижней перестановками. ■



## Глава 2

# Определитель матрицы

## 2.1 Определение определителя матрицы

### Опр Определитель матрицы

Для матрицы  $M$  размером  $n \times n$ :

$$|M| \equiv \det M = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

где  $\sigma(i_1 \dots i_n)$  — дефект перестановки  $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$ , численно равный количеству инверсий этой перестановки.

### Пр

Пусть дана матрица  $M_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Тогда её определитель  $\det M_{2 \times 2} = \sum_{\substack{(1 \ 2) \\ (2 \ 1)}} (-1)^{\sigma(i_1 \ i_2)} a_{1i_1} a_{2i_2} = (-1)^{\sigma(1 \ 2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\sigma(2 \ 1)} a_{12} a_{21} =$   
 $= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$

## 2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы

### 2.2.1 Транспонированная матрица

### Опр Транспонированная матрица

Матрица  $B_{n \times n}$  является транспонированной матрицей  $A_{n \times n}$ :

$$B_{n \times n} = A_{n \times n}^T, \text{ если } (\forall i \leq j, j \leq n) b_{ij} = a_{ji}$$

### Пр

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

## 2.2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы

**Th** Если для матрицы  $A$  матрица  $B = A^T$ , то  $|B| = |A|$ , т.е.  $|A^T| = |A|$

□

$$|B| = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} b_{1i_1} b_{2i_2} \dots b_{ni_n} = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \dots$$

Выставляя элементы  $a_{i_k k}$  в порядке возрастания первых индексов, получим перестановку  $(j_1 \ j_2 \ \dots \ j_n)$ , обратную к  $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)$ . Причём,  $\sigma(j_1 \dots j_n) = \sigma(i_1 \dots i_n)$

$$\dots = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{\sigma(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = |A|$$

Таким образом,  $|A^T| = |A|$  ■

## 2.3 Влияние элементарных преобразований на определитель матрицы

**Опр** Умножение строки/столбца матрицы на число

**Л** Если для матриц  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  и  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$  на фиксированной строке  $l$ :

$$\begin{cases} a_{lj} = \lambda b_{lj}, & j = \overline{1, n} \\ a_{ij} = b_{ij}, & i \neq l, j = \overline{1, n} \end{cases}, \text{ то } |A| = \lambda |B|$$

□

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{li_l} \dots a_{ni_n} = \\ &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} \dots \lambda b_{li_l} \dots a_{ni_n} = \\ &= \lambda \cdot \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} b_{1i_1} \dots b_{li_l} \dots b_{ni_n} = \\ &= \lambda |B| \end{aligned}$$
■

Поскольку  $|A| = |A^T|$ , то свойство верно и для столбцов.

**Опр** Перестановка строки/столбца матрицы

**Л** Если для матриц  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  и  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$  на фиксированных строках  $k$  и  $l$ :

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k \text{ и } i \neq l \\ a_{kj}, & \text{строка } l \\ a_{lj}, & \text{строка } k \end{cases}, \text{ то } |A| = -|B|$$

□

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_l \ i_k \dots i_n)} b_{1i_1} \dots b_{li_l} b_{ki_k} \dots b_{ni_n} = \\
&= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_l \ i_k \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ki_l} a_{li_k} \dots a_{ni_n} \\
|A| &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_k \ i_l \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ki_l} a_{li_k} \dots a_{ni_n} = \\
&= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1) \cdot (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_l \ i_k \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ki_l} a_{li_k} \dots a_{ni_n} = \\
&= -|B|
\end{aligned}$$

■

Поскольку  $|A| = |A^T|$ , то свойство верно и для столбцов.

### Опр Прибавление строк/столбцов другой матрицы

**Л** Если для матриц  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $C \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$  на фиксированной строке  $l$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{ij} = c_{ij}, & i \neq l, j = \overline{1, n} \\ b_{lj} + c_{lj}, & \text{строка } l, j = \overline{1, n} \end{cases}, \text{ то } |A| = |B| + |C|$$

□

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} \dots a_{li_l} \dots a_{ni_n} = \\
&= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} \dots (b_{li_l} + c_{li_l}) \dots a_{ni_n} = \\
&= \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} b_{1i_1} \dots b_{li_l} \dots b_{ni_n} + \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} c_{1i_1} \dots c_{li_l} \dots c_{ni_n} = \\
&= |B| + |C|
\end{aligned}$$

■

Поскольку  $|A| = |A^T|$ , то свойство верно и для столбцов.

## 2.4 Вычисление определителя треугольной матрицы

### 2.4.1 Треугольный вид матрицы

**Опр** Верхнетреугольная матрица

Матрица  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  имеет верхнетреугольный вид, если  $(\forall j = \overline{1, n}, \forall i = \overline{2, n}: i > j) a_{ij} = 0$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Л** Определитель верхнетреугольной матрицы равен  $|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

□

$$|A| = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = \dots$$

Заметим, что любая не единичная перестановка будет содержать нуль:

$$\dots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

■

### 2.4.2 Приведение матрицы к верхнетреугольному виду

**Л** Любую матрицу можно привести к верхнетреугольному виду путём элементарных преобразований строк/столбцов

□ Применим метод математической индукции:

1)  $n = 1$ :

$$(1.1) |a_{11}| = a_{11} \text{ — верно}$$

2) Пусть лемма верна для  $n = m$

3) Докажем её для  $n = m + 1$ :

(3.1) Если  $(\forall i = \overline{1, m+1}, \forall j = \overline{1, m+1}) a_{ij} = 0$  — уже верхнетреугольный вид

(3.2) Если  $\exists a_{i_0 j_0} \neq 0$ :

- Переставим строку  $i_0$  с первой строкой, а столбец  $j_0$  с первым столбцом

$$\begin{pmatrix} a_{i_0 j_0} & \cdots & a_{1(m+1)}^* \\ a_{21}^* & \cdots & a_{2(m+1)}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m+1)1}^* & \cdots & a_{(m+1)(m+1)}^* \end{pmatrix}$$

- Занулим элементы, стоящие под  $a_{i_0 j_0}$ , поочерёдно вычтя из второй по  $(m+1)$ -ю строки первую, умноженную на соответственно:  $\frac{a_{21}^*}{a_{i_0 j_0}}, \frac{a_{31}^*}{a_{i_0 j_0}}, \dots, \frac{a_{(m+1)1}^*}{a_{i_0 j_0}}$

$$\begin{pmatrix} a_{i_0 j_0} & \cdots & a_{1(m+1)}^* \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \text{Матрица} \\ \text{размером} \\ t \times t \end{matrix}} \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

- По предположению индукции можем привести матрицу размером  $t \times t$  к верхнетреугольному виду.

■

## 2.5 Леммы о разложении определителя по последней строке

### 2.5.1 Дополнительный минор, алгебраическое дополнение

#### Опр Дополнительный минор

В квадратной матрице  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  вычеркнем строку  $k$ , столбец  $l$ . Определитель полученной матрицы называется дополнительным минором  $M_{kl}$ .

#### Пр

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{22}(A_{3 \times 3}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

#### Опр Алгебраическое дополнение

Алгебраическое дополнение, соответствующее элементу  $a_{kl}$ , равно  $A_{kl} = (-1)^{k+l} M_{kl}$

### 2.5.2 Лемма I

**[Л]** Если в матрице  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $(\forall j = \overline{1, n-1}) a_{nj} = 0$ , то  $|A| = a_{nn}A_{nn}$

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{(i_1 \cdots i_{n-1} i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_{n-1} i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \sum_{(i_1 \cdots i_{n-1} n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_{n-1} n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{(n-1)i_{n-1}} a_{nn} = \\ &= a_{nn} \cdot \sum_{(i_1 \cdots i_{n-1})} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_{n-1})} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{(n-1)i_{n-1}} = \\ &= a_{nn} M_{nn} = a_{nn} \cdot (-1)^{n+n} M_{nn} = a_{nn} A_{nn} \end{aligned}$$

■

### 2.5.3 Лемма II

**[Л]** Если в матрице  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $(\forall j \neq l) a_{nj} = 0$ , то  $|A| = a_{nl}A_{nl}$

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nl} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Переставим столбец  $l$  на место столбца  $n$  путём последовательных элементарных транспозиций (всего  $[n-l]$  ЭТ):

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{n-l} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(l-1)} & a_{1(l+1)} & \cdots & a_{1n} & a_{1l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nl} \end{vmatrix} \stackrel{\text{Лемма I}}{=} (-1)^{n-l} \cdot a_{nl} M_{nl} = \\ &= \langle (-1)^{n-l} = (-1)^{n+l} \rangle = a_{nl} \cdot (-1)^{n+l} M_{nl} = a_{nl} A_{nl} \end{aligned}$$

■

## 2.5.4 Лемма III

**Л** Определитель матрицы  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  равен  $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ni} A_{ni}$

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

По свойству прибавления строк другой матрицы можем представить определитель  $|A|$  как сумму определителей  $|A^{(i)}|$  матриц  $A^{(i)}$ , для которых элементы последней строки равны

$$a_{nj}^{(i)} = \begin{cases} a_{ni}, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}, \text{ а остальные элементы совпадают с элементами матрицы } A:$$

$$|A| = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{|A^{(1)}|} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{|A^{(2)}|} + \cdots + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{|A^{(n)}|}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^n |A^{(i)}| \stackrel{\text{Лемма II}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ni} A_{ni}$$

■

## 2.6 Разложение определителя по любой строке или столбцу

**Th** Для матрицы  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  ( $\forall k = \overline{1, n}$ )  $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki}$

□ Начиная со строки  $k$ , последовательно переставим строки вплоть до строки  $n$ :

$$\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{n-k} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & \cdots & a_{(k-1)n} \\ a_{(k+1)1} & \cdots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \langle n\text{-я строка} \rangle \longrightarrow & a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{array} \right| \stackrel{\text{Лемма III}}{=} (-1)^{n-k} \cdot \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki} = \\
&= (-1)^{n-k} \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} a_{ki} M_{ki} = \sum_{i=1}^n (-1)^{2n-k+i} a_{ki} M_{ki} = \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i} a_{ki} M_{ki} = \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki}
\end{aligned}$$

■

## 2.7 Фальшивое разложение определителя

### 2.7.1 Определитель матрицы с одинаковыми строками/столбцами

**Л** Если матрица содержит одинаковые строки/столбцы, то её определитель равен нулю

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & V_1 & \cdots & V_1 & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & V_n & \cdots & V_n & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

При вычислении определителя матриц переставим одинаковые строки/столбцы местами, получим:

$$|A| = (-1) \cdot |A| \implies |A| = 0 \text{ (аналогично } |B| = 0)$$

■

### 2.7.2 Теорема о произведении элементов матрицы одной строки на алгебраические дополнения элементов другой строки

**Th** Если задана матрица  $A \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , то  $(\forall l \neq k) \sum_{j=1}^n a_{lj} A_{kj} = 0$



□ Составим матрицу  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , в которой  $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k \\ a_{lj}, & i = k \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Поскольку  $B$  содержит две одинаковые строки, то  $|B| = 0$ . С другой стороны, разложив  $|B|$  по  $k$ -ой строке, получим  $|B| = \sum_{j=1}^n b_{kj} B_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{lj} A_{kj} = 0$  ■

## Глава 3

# Произведение матриц

### 3.1 Свойства произведения матриц

#### 3.1.1 Определение произведения матриц

Опр **Произведение матриц**

Если заданы матрицы  $A_{m \times n}$ ,  $B_{n \times k}$ , то произведением  $A \cdot B$  называется матрица  $C_{m \times k}$  такая, что:

$$\begin{aligned} A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} &= C_{m \times k} \\ (\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, k}) \quad c_{ij} &= \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj} \end{aligned}$$

#### 3.1.2 Дистрибутивность

**Л** **Произведение матриц дистрибутивно**

$$\underbrace{A_{n \times k} \left( \overbrace{\lambda \underbrace{B_{k \times m}}_{R\{r_{ij}\}} + \mu \underbrace{C_{k \times m}}_{Q\{q_{ij}\}}} \right)}_{D\{d_{ij}\}} = \underbrace{\overbrace{\lambda \underbrace{AB}_{n \times m}}_{P\{p_{ij}\}} + \overbrace{\mu \underbrace{AC}_{n \times m}}_{Q\{q_{ij}\}}}_{F\{f_{ij}\}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

□

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{t=1}^k a_{it} r_{tj} = \sum_{t=1}^k a_{it} (\lambda b_{tj} + \mu c_{tj}) = \lambda \sum_{t=1}^k a_{it} b_{tj} + \mu \sum_{t=1}^k a_{it} c_{tj} = p_{ij} + q_{ij} = f_{ij} \implies \\ &\implies D = F \end{aligned}$$

■

### 3.1.3 Ассоциативность

**Л** Произведение матриц ассоциативно

$$\begin{aligned} \left( \overbrace{A \cdot B}^{F\{f_{ij}\}} \right) \cdot C &= T \\ A \cdot \left( \overbrace{B \cdot C}^{G\{g_{ij}\}} \right) &= D \end{aligned}$$

$m \times k \quad k \times l \quad l \times n \quad m \times n$

Покажем, что  $T = D$ :

□

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \sum_{p=1}^l f_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^l c_{pj} \left( \sum_{q=1}^k a_{iq} b_{qp} \right) = \sum_{q=1}^k a_{iq} \left( \sum_{p=1}^l b_{qp} c_{pj} \right) = \sum_{q=1}^k a_{iq} g_{qj} = d_{ij} \implies \\ &\implies T = D \end{aligned}$$

■

### 3.1.4 Некоммутативность (контрпример)

**Л** Произведение матриц некоммутативно

В общем случае  $A \cdot B \neq B \cdot A$

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -14 & -1 \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \implies A \cdot B \neq B \cdot A$$

## 3.2 Единичная матрица

Опр Единичная матрица

⟨Символ Кронекера⟩

Единичная матрица — матрица  $E \{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $(\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n}) e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

**Л** Если  $\exists A \cdot E$ , то  $A \cdot E = A$  (аналогично  $E \cdot B = B$ )

□

$$\begin{aligned} A \cdot E &= C \\ m \times n \quad n \times n \quad m \times n \\ (\forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}) c_{ij} &= \sum_{t=1}^n a_{it} \delta_{tj} = 0 + 0 + \dots + a_{ij} \delta_{jj} = a_{ij} \implies C = A \end{aligned}$$

■

### 3.3 Теорема об определителе произведения матриц (без доказательства)<sup>1</sup>

**Th** Если  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы одного порядка, то  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

### 3.4 Обратная матрица

#### 3.4.1 Определение обратной матрицы

Опр Обратная матрица

Если для матрицы  $A_{n \times n}$  существует матрица  $B_{n \times n}$  такая, что  $A \cdot B = B \cdot A = E$ , то матрицу  $B$  называют обратной к матрице  $A$  и обозначают  $B \equiv A^{-1}$ .

#### 3.4.2 Критерий существования обратной матрицы

**Th** Если у матрицы  $A_{n \times n}$ ,  $|A| \neq 0$ , то  $\exists! A^{-1}$ :  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

□

1) Существование:

- Докажем, что если  $|A| = 0$ , то  $\nexists A^{-1}$ :

Предположим противное —  $A^{-1}$  существует и  $|A| = 0$ :

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= E \\ |A| \cdot |A^{-1}| &= |E| \\ 0 = 1 &\implies \text{☹} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Полное доказательство можно обнаружить в упомянутом в аннотации учебнике Л.И. Головиной (Глава III. Линейные операторы / §2. Действия над линейными операторами / Теорема 3).

- Докажем, что если  $|A| \neq 0$ , то  $\exists A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T$ , где  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $A^* = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$ :

Рассмотрим  $B = \frac{1}{|A|}(A^*)^T$  и докажем, что  $A \cdot B = B \cdot A = E$ :

$$\underset{n \times n}{A} \cdot \underset{n \times n}{B} = \underset{n \times n}{C}, |A| = \Delta$$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj} = \sum_{t=1}^n a_{it} \cdot \frac{1}{\Delta} A_{jt} = \frac{1}{\Delta} \sum_{t=1}^n a_{it} A_{jt} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \implies \\ &\implies C = E \end{aligned}$$

Аналогично  $B \cdot A = E$ , т.к. разложение для определителя справедливо и для столбцов.

2) Единственность:

Пусть для матрицы  $A$  существуют матрицы  $B$  и  $C$  такие, что 
$$\begin{cases} A \cdot B = B \cdot A = E \\ A \cdot C = C \cdot A = E \\ B \neq C \end{cases}$$

Тогда, 
$$\begin{cases} C \cdot A \cdot B = (C \cdot A) \cdot B = E \cdot B = B \\ C \cdot A \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = C \cdot E = C \end{cases} \implies B = C \implies \text{☹}$$

■

### 3.4.3 Построение обратной матрицы через алгебраические дополнения

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1) A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 4 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -2 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1$$

$$2) A^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies (A^*)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) |A| = 4 - 6 = -2$$

$$4) A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$5) A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

### 3.4.4 Построение обратной матрицы методом элементарных преобразований строк

Умножение  $k$ -ой строки на  $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Л}}$  Соответствует левостороннему домножению на  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = k \text{ и } j = k \\ \delta_{ij}, & i \neq k \text{ или } j \neq k \end{cases}$$

$$\square \quad B \cdot A = C$$

$$\begin{aligned} 1.1) \quad (i = k, j = \overline{1, n}) \quad c_{kj} &= \sum_{t=1}^n b_{kt} a_{tj} = \delta_{k1} a_{1j} + \delta_{k2} a_{2j} + \cdots + \delta_{k(k-1)} a_{(k-1)j} + \alpha a_{kj} + \cdots + \delta_{kn} a_{nj} = \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 + \alpha a_{kj} + \cdots + 0 = \\ &= \alpha a_{kj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2) \quad (i \neq k, j = \overline{1, n}) \quad c_{ij} &= \sum_{t=1}^n b_{it} a_{tj} = \delta_{i1} a_{1j} + \cdots + \delta_{ii} a_{ij} + \cdots + \delta_{in} a_{nj} = \\ &= 0 + \cdots + 1 \cdot a_{ij} + \cdots + 0 = \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } c_{ij} = \begin{cases} \alpha a_{ij}, & i = k, j = \overline{1, n} \\ a_{ij}, & i \neq k, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

■

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\alpha=c]{k=2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4c & 5c & 6c \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4c & 5c & 6c \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Перемена местами  $l$ -ой и  $k$ -ой строк

$\boxed{\text{Л}}$  Соответствует левостороннему домножению на  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k, i \neq l, j = \overline{1, n} \\ \delta_{kj}, & i = l, j = \overline{1, n} \\ \delta_{lj}, & i = k, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$\square \quad B \cdot A = C$$

$$2.1) \quad (i \neq k, i \neq l, j = \overline{1, n}) \quad c_{ij} = \sum_{t=1}^n b_{it} a_{tj} = 0 + \cdots + 0 + \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij}$$

$$2.2) \quad (i = l, j = \overline{1, n}) \quad c_{lj} = \sum_{t=1}^n b_{lt} a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{kk} a_{kj} = a_{kj}$$

$$2.3) \quad (i = k, j = \overline{1, n}) \quad c_{kj} = \sum_{t=1}^n b_{kt} a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{ll} a_{lj} = a_{lj}$$

$$\text{Таким образом, } c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k, i \neq l, j = \overline{1, n} \\ a_{kj}, & i = l, j = \overline{1, n} \\ a_{lj}, & i = k, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

■

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[k=2]{l=1} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Добавление к  $k$ -ой строке  $l$ -ую, умноженную на  $\alpha \in \mathbb{R}$

Л Соответствует левостороннему домножению на  $B \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha + \delta_{kl}, & i = k \text{ и } j = l \\ \delta_{ij}, & i \neq k \text{ или } j \neq l \end{cases}$$

$$\square \quad B \cdot A = C$$

$$3.1) \quad (i = k \neq l, j = \overline{1, n}) \quad c_{kj} = \sum_{t=1}^n b_{kt} a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{kk} a_{kj} + a_{lj}(\alpha + 0) = a_{kj} + \alpha a_{lj}$$

$$3.2) \quad (i = k = l = q, j = \overline{1, n}) \quad c_{kj} = c_{lj} = c_{qj} = \sum_{t=1}^n b_{qt} a_{tj} = 0 + \dots + 0 + a_{qj}(\alpha + 1) = a_{qj} + \alpha a_{qj}$$

$$3.3) \quad (i \neq k, j = \overline{1, n}) \quad c_{ij} = \sum_{t=1}^n b_{it} a_{tj} = \sum_{t=1}^n b_{it} a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij}$$

$$\text{Таким образом, } c_{ij} = \begin{cases} a_{kj} + \alpha a_{lj}, & i = k, j = \overline{1, n} \\ a_{ij}, & i \neq k, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

■

Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[k=2]{l=1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 + \alpha & 5 + 2\alpha & 6 + 3\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha + \delta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 + \alpha & 5 + 2\alpha & 6 + 3\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

## Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[k=3]{l=3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+7\alpha & 8+8\alpha & 9+9\alpha \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \delta_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7(\alpha + 1) & 8(\alpha + 1) & 9(\alpha + 1) \end{pmatrix}$$

Таким образом, последовательное применение ЭП строк к матрице  $A$  эквивалентно последовательному домножению слева матрицы  $A$  на соответствующую матрицу  $B_i$ .

## Метод элементарных преобразований строк

Пусть имеется некая квадратная матрица  $A$ . Изобразим её и единичную матрицу:

$$(A \mid E)$$

Производя ЭП строк над обеими матрицами, добьёмся того, чтобы слева образовалась единичная матрица. Тогда справа образуется матрица, обратная  $A$ :

$$(A \mid E) \sim (E \mid A^{-1})$$

□ По доказанному выше, применение ЭП строк эквивалентно левому домножению на некоторую матрицу  $B_i$ . Таким образом, получим:

$$4.1) A \sim B_m \cdots B_n A = E \Rightarrow (B_m \cdots B_n) = A^{-1}$$

$$4.2) E \sim B_m \cdots B_n E = (B_m \cdots B_n) \Rightarrow E \sim A^{-1}$$

■

## Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Таким образом, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -2+2 \\ 3-3 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$



# Глава 4

## Ранг матрицы

### 4.1 Определение ранга матрицы

#### 4.1.1 Минор

##### Опр Минор

В матрице  $A$  выделим строки  $i_1, i_2, \dots, i_r$  и столбцы  $j_1, j_2, \dots, j_r$ . Определитель, составленный из выделенных элементов матрицы  $A$ , называется минором  $M_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$ .

Порядок минора — количество  $r$  выделенных строк и столбцов.

Для краткости некоторый минор порядка  $r$  соответствующей матрицы  $A$  будем обозначать как  $M^r(A)$ , а соответствующую матрицу минора как  $A(M^r)$ .

##### Пр

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{12}^{23}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

$$A(M_{12}^{23}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Обратим внимание читателя на то, что понятие *минора* матрицы **отличается** от понятия *дополнительного минора* матрицы, вводившегося ранее.

В частности, минор некого порядка можно вычислить для любой матрицы, а дополнительный минор — только для квадратной.

#### 4.1.2 Ранг матрицы

##### Опр Ранг матрицы

Ранг матрицы  $A$  — максимальный порядок отличного от нуля минора.

То есть, если  $\text{rank } A = r$ , то  $\exists \{i_1, \dots, i_r\}$  и  $\{j_1, \dots, j_r\} : M_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} \neq 0$ , а любой другой минор более высокого порядка равен нулю.

## 4.2 Влияние элементарных преобразований строк на ранг матрицы

**Th<sup>1</sup>** При ЭП строк ранг матрицы не увеличивается

□ Пусть  $\text{rank } A = r$ .

1) Переставим строки  $l$  и  $k$ .  $A \rightarrow B$ .

- Рассмотрим минор матрицы  $B$  порядка  $r + 1$ . Он либо совпадает с соответствующим минором матрицы  $A$ , либо отличается порядком строк.

Отсюда,  $M^{r+1}(B) = \pm M^{r+1}(A) = 0 \implies \text{rank } B \leq r$ .

2) Умножим  $k$ -ю строку  $A$  на  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $A \rightarrow B$ .

- Рассмотрим минор матрицы  $B$  порядка  $r + 1$ . Он либо совпадает с минором  $A$  (если  $k$ -я строка не вошла), либо отличается в  $\lambda$  раз.

Отсюда,  $M^{r+1}(B) = \begin{cases} \lambda \cdot M^{r+1}(A) = 0 \\ M^{r+1}(A) = 0 \end{cases} \implies \text{rank } B \leq r$ .

3) Прибавим к  $k$ -ой строке  $l$ -ю, умноженную на  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $A \{a_{ij}\} \rightarrow B \{b_{ij} \mid b_{kj} = a_{kj} + \lambda a_{lj}\}$ .

- Рассмотрим минор матрицы  $B$  порядка  $r + 1$ :

а) Если  $k$ -я строка не вошла, то  $M^{r+1}(B) = M^{r+1}(A) = 0$ .

б) Если  $k$ -я строка вошла, то из *лемм о влиянии ЭП на определитель матрицы* получим  $M^{r+1}(B) = |B(M^{r+1})| = |A(M^{r+1})| + \lambda \cdot 0 = 0$ .

Отсюда,  $\text{rank } B \leq r$ .

■

**Th<sup>2</sup>** При ЭП строк ранг матрицы не изменяется

□ ЭП обратимы.

- $A \xrightarrow{\text{ЭП}} B$ . По **Th<sup>1</sup>**  $\text{rank } B \leq \text{rank } A$

- $B \xrightarrow{\text{ЭП}} A$ . По **Th<sup>1</sup>**  $\text{rank } A \leq \text{rank } B$

Отсюда,  $\text{rank } B = \text{rank } A$ .

■

## 4.3 Вычисление ранга с помощью ЭП строк

**Th<sup>3</sup>** У матрицы ступенчатого вида ранг равен числу ненулевых строк

□ Пусть у матрицы ступенчатого вида  $r$  ненулевых строк (без ограничения общности, пусть это строки  $1, \dots, r$ ). Пусть тогда  $k_1, \dots, k_r$  — ненулевые столбцы, в которых стоят начала ступенек.

$$M_{1 \dots r}^{k_1 \dots k_r} = \begin{vmatrix} a_{1k_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{2k_2} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{rk_r} \end{vmatrix} = \prod_{n=1}^r a_{nk_n} \neq 0$$

Это минор порядка  $r$ . Любой другой минор большего порядка равен нулю. ■

Таким образом, приводя матрицу ЭП строк к ступенчатому виду, можно определить её ранг.

## 4.4 Свойство базисных строк и базисных столбцов матрицы

### 4.4.1 Базисный минор матрицы

**Опр** Базисный минор, базисные строки/столбцы

Если для матрицы  $A$ ,  $\text{rang } A = r$ , то  $M^r(A) \neq 0$  — базисный минор.

Строки и столбцы матрицы  $A$ , входящие в базисный минор, называются базисными строками и базисными столбцами соответственно.

**Л<sup>1</sup>** Для квадратной матрицы  $A$ ,  $|A| \neq 0 \iff$  строки  $A$  линейно независимы

□  $\langle \Rightarrow \rangle$  Предположим противное: существуют линейно зависимые строки.

Пусть всего  $n$  строк:  $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m, \dots, \vec{A}_n$ . Пусть  $\vec{A}_m = \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq m}}^n \alpha_k \vec{A}_k$ .

Вычитая поочерёдно из этой строки все  $\alpha_k \vec{A}_k$  ( $k = \overline{1, n}, k \neq m$ ), произведём над этой строкой ЭП-я и в итоге получим нулевую строку  $\implies |A| = 0 \implies \mathfrak{X}$

Значит, все строки линейно независимы. ■

□  $\langle \Leftarrow \rangle$  Приведём матрицу к ступенчатому виду.

Нулевых строк нет (они линейно независимы), поэтому матрица имеет верхнетреугольный

вид  $\implies a_{kk} \neq 0$  ( $\forall k = \overline{1, n}$ )  $\implies |A| = \prod_{k=1}^n a_{kk} \neq 0$  ■

Th<sup>1</sup>

## Строки, входящие в базисный минор, линейно независимы

Пусть  $\text{rank } A = r \implies \exists M^r(A) \neq 0$ . Пусть, для определённости, это минор  $M_{1 \dots r}^{1 \dots r}$ .

□ По [Л<sup>1</sup>], т.к.  $M_{1 \dots r}^{1 \dots r} \neq 0$ , то строки матрицы минора будут линейно независимы.

Теперь рассмотрим матрицу из первых  $r$  строк матрицы  $A$ . Докажем, что они линейно независимы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Предположим противное: одна из этих строк (пусть  $r$ -я) является линейной комбинацией других.

$$\forall k = \overline{1, n} : a_{rk} = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i a_{ik}, \text{ причём } r \leq n$$

Это будет верно и для  $\forall k = \overline{1, r}$ . Следовательно,  $r$ -я строка матрицы минора  $M_{1 \dots r}^{1 \dots r}$  является линейной комбинацией других  $\implies \text{✗}$ .

Значит, строки, входящие в базисный минор, линейно независимы. ■

(То же самое относится и к базисным столбцам).

**Л<sup>2</sup>** Если в матрице  $A$  есть  $m$  штук линейно независимых строк, то существует  $M^m(A) \neq 0$

□ Приведём эту матрицу к ступенчатому виду. Найдутся  $l_1, \dots, l_m$  и  $k_1, \dots, k_m$  — ненулевые строки и столбцы соответственно. Таким образом, ранг матрицы  $A$  равен  $m$  и нужный минор имеет вид  $M_{l_1 \dots l_m}^{k_1 \dots k_m} = M^m(A) \neq 0$ . ■

Далее будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\vec{A} = (a_1 \ \cdots \ a_n) \text{ — вектор-строка}$$

$$\underset{\downarrow}{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — вектор-столбец}$$

$\mathbf{b}$  — любой вектор (вектор-строка ИЛИ вектор-столбец)

## Опр Линейная оболочка системы векторов

Линейной оболочкой данной системы векторов  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$  называется множество

$$L(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) = \left\{ \mathbf{x} \mid \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R} : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i \right\}$$

**Л<sup>3</sup>** Если система векторов  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$  – линейно независима, а  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\} \cup \{\mathbf{b}\}$  – линейно зависима, то  $\mathbf{b} \in L(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k)$

$$\square \quad \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}\} \text{ – линейно зависимы } \iff \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^k, \mu : \sum_{i=1}^k |\lambda_i| + |\mu| \neq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

1) Если  $\mu = 0$ , то  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$  – линейно зависимы, что противоречит условию.

2) Если  $\mu \neq 0$ , то, поделив сумму на  $\mu \neq 0$ , получим  $\mathbf{b} \in L(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k)$ .

■

**Th<sup>2</sup>** Если  $\vec{A}_{m_1}, \dots, \vec{A}_{m_r}$  – строки, входящие в базисный минор матрицы  $A$  (т.е.  $\text{rank } A = r$ ), то  $(\forall k \neq m_i, i = \overline{1, r}) \vec{A}_k \in L(\vec{A}_{m_1} \cdots \vec{A}_{m_r})$

□ Докажем, что  $\{\vec{A}_{m_1}, \dots, \vec{A}_{m_r}, \vec{A}_k\}$  – линейно зависима система.

Предположим противное: тогда имеем в матрице  $A$   $(r+1)$  штук линейно независимых строк. По **Л<sup>2</sup>** можно найти минор  $M^{r+1}(A) \neq 0$ , т.е.  $\text{rank } A \neq r \implies \text{Ж}$ .

Следовательно,  $\{\vec{A}_{m_1}, \dots, \vec{A}_{m_r}\} \cup \{\vec{A}_k\}$  – лин. зав., но из **Th<sup>1</sup>**  $\{\vec{A}_{m_1}, \dots, \vec{A}_{m_r}\}$  – лин. нез. Значит, по **Л<sup>3</sup>**  $\vec{A}_k \in L(\vec{A}_{m_1} \cdots \vec{A}_{m_r})$ .

■

## Глава 5

# Системы линейных алгебраических уравнений

[illegible]

Система линейных алгебраических уравнений  
на неизвестные  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \mathbf{x}$

## 5.1 Решение, совместность, определённости

## Опр Решение СЛАУ

Решением системы линейных алгебраических уравнений называется совокупность  $n$  штук значений неизвестных  $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ , при подстановке которых все уравнения системы обращаются в тождества.

## Опр Совместная и несовместная СЛАУ

Совместной называется система, имеющая хотя бы одно решение; не имеющая — несовместной.

## Опр Определённость и неопределённость СЛАУ

Определённой называется система, имеющая единственное решение; имеющая более одного — неопределённой.

## 5.2 Влияние элементарных преобразований на решение системы линейных алгебраических уравнений

Переформулируем уже знакомые элементарные преобразования с языка матриц на язык СЛАУ:

- 1) Перестановка уравнений;
- 2) Умножение уравнения на  $\lambda \neq 0$ ;
- 3) Прибавление к  $k$ -му уравнению  $l$ -го умноженного на  $\mu$ .

**Л** Если ЭП-ем перейти от системы  $A$  к системе  $B$ , то любое решение  $A$  будет являться решением  $B$

□ Пусть  $x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$  — некоторое решение системы  $A$ .

- (1) Справедливость леммы очевидна;
- (2) Пусть изменили  $k$ -ое уравнение:

В системе  $A$ :  $\sum_{t=1}^n a_{kt} x_t^{(0)} = b_k$ .

В системе  $B$ :  $\sum_{t=1}^n (\lambda a_{kt}) x_t = \lambda b_k$ . Подставим решение  $A$ :

$$\lambda \cdot \sum_{t=1}^n a_{kt} x_t^{(0)} \stackrel{A}{=} \lambda \cdot b_k \text{ — решение } B;$$

- (3) Пусть изменили  $k$ -ое уравнение:

В системе  $A$ :  $\sum_{t=1}^n a_{kt} x_t^{(0)} = b_k$  и  $\sum_{t=1}^n a_{lt} x_t^{(0)} = b_l$ .

В системе  $B$ :  $\sum_{t=1}^n (a_{kt} x_t + (\mu a_{lt}) x_t) = b_k + \mu b_l$ . Подставим решение  $A$ :

$$\sum_{t=1}^n a_{kt} x_t^{(0)} + \mu \sum_{t=1}^n a_{lt} x_t^{(0)} \stackrel{A}{=} b_k + \mu b_l \text{ — решение } B.$$

■

**Th** Если система  $B$  получена из системы  $A$  путём ЭП-ий, то они эквивалентны

□ Поскольку ЭП-я обратимы, то утверждение следует из **Л**.

■

### 5.3 Теорема Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений

**Th** Если в системе одинаковое количество уравнений и неизвестных, а определитель  $|A|$  основной матрицы системы не равен нулю, то система является определённой

[illegible]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{X}_{\downarrow} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{\downarrow} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

□ Введём  $\Delta_i$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{B}_{\downarrow} & \mathbf{A}_{2\downarrow} & \cdots & \mathbf{A}_{n\downarrow} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

• • •

$$\Delta_i = \left| \begin{array}{cccccc} \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_{i-1} & \mathbf{B} & \mathbf{A}_{i+1} & \cdots & \mathbf{A}_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & a_{nn} \end{array} \right| \quad \text{и } T, D.$$

$$1) \quad A \cdot \underset{\downarrow}{\mathbf{X}} = \underset{\downarrow}{\mathbf{B}}$$

$\mathbf{X}_{\downarrow} = A^{-1} \cdot \mathbf{B}_{\downarrow}$ , пусть  $A^{-1} = C\{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $c_{ij} = \frac{A_{ji}}{\Delta}$ , где  $A_{ji}$  — алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы  $A^T$ ,

$$\Delta = \det A.$$

$$\text{Отсюда, } (\forall p = \overline{1, n}) \ x_p = \sum_{t=1}^n c_{pt} b_t = \frac{1}{\Delta} \underbrace{\sum_{t=1}^n A_{tp} \cdot b_t}_{\text{Разложение } \Delta_p \text{ по } p\text{-му столбцу}} \iff x_p \cdot \Delta = \Delta_p \iff x_p \cdot \left( \sum_{t=1}^n A_{tp} \cdot a_{tp} \right) = \Delta_p.$$

$\Delta_p.$

Так как получили новую систему  $\mathbf{X}_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \\ \vdots \\ \Delta_n/\Delta \end{pmatrix}$  путём ЭП исходной системы, то по [Th] они эквивалентны. Значит, единственность решения доказана.

2) Покажем, что полученное выражение — решение исходной системы.





.....

.....

.....