Линейная алгебра

Конспект лекций Баскакова А.В.

1 — 2 семестры

НИЯУ «МИФИ»

2020 г.

Аннотация

Данное пособие предназначено для студентов первого курса (в основном второго семестра) **ИЯФиТ**.

Конспект представляет собой ответы на экзаменационные вопросы (касающиеся линейной алгебры) по курсу лекций **Баскакова Алексея Викторовича**, которые были предложены студентам в 2019–2020-х годах при подготовке к сдаче экзамена по *аналитической геометрии* и *линейной алгебре* в первом и втором семестрах соответственно.

Хочется особенно подчеркнуть, что данный сборник предназначен исключительно для ревизии вопросов линейной алгебры первого курса нашего университета, поскольку автор не ставит своей задачей превзойти лекции по содержанию или же по форме изложения материала.

Таким образом, **пособие не может заменить ваши собственные конспекты лекций**.

Сам же курс лектора, по его собственным словам, основывается на учебнике «Линейная алгебра и некоторые её приложения», 1985 г. под авторством Головиной Л.И.

Оглавление

Обозначения

<u>**Опр**</u>	Определение
<u>**Пр**</u>	Пример
$\boxed{\textbf{Л}}$	Лемма
Th	Теорема
$\square$	Начало доказательства
$\blacksquare$	Конец доказательства
$\mathbb{N}$	Множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	Множество целых чисел
$\mathbb{R}$	Множество действительных чисел
$\forall$	Квантор всеобщности (любой, все)
$\exists$	Квантор существования (существует)
$\nexists$	Не существует
$\exists!$	Существует, причём единственный
$\in$	Элемент принадлежит множеству
$\subset$	Множество содержится во множестве
$\cup$	Объединение множеств
$\cap$	Пересечение множеств
$\sum\limits_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$	Сумма по элементам $\mathfrak{AB}$
$\prod\limits_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$	Произведение по элементам $\mathfrak{AB}$
$\overline{a, b}$	Целые числа на отрезке $[a; b]$
☠	Противоречие
$\langle \cdots \rangle$	Комментарий

Глава 1

Перестановки

1.1 Чётность перестановки

1.1.1 Перестановка

Опр Перестановка

Расставим числа $1, 2, 3, \ldots, n$ в каком-то порядке, тогда (для $n = 5$):

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ — перестановка}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ — единичная перестановка}$$

Для n элементов существует $n!$ перестановок

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

1.1.2 Чётность

Опр Инверсия

В перестановке $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ элементы i_k и i_p образуют инверсию, если $k < p$, но $i_k > i_p$

Опр Чётность

Чётностью перестановки называется чётность числа инверсий.

1.2 Изменение чётности перестановки при транспозиции

1.2.1 Транспозиции

Опр Транспозиция

Транспозицией перестановки называется перемена местами любых двух элементов перестановки.

Опр Элементарная транспозиция (ЭТ)

Перемена местами двух соседних элементов перестановки — элементарная транспозиция (ЭТ).

Л **При элементарной транспозиции чётность перестановки меняется**

□
$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{k+1} & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Инверсии, которые i_k и i_{k+1} составляли с остальными элементами, сохранились. Инверсия, связанная с перестановкой i_k и i_{k+1} либо появилась, либо исчезла.

Таким образом, количество инверсий изменилось на 1, следовательно, чётность перестановки изменилась ■

1.2.2 Изменение чётности

Th **При любой транспозиции чётность перестановки меняется**

□
$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_{l-1} & i_l & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Переставим элемент i_k со впереди стоящим элементом вплоть до места с номером l (всего $[l-k]$ ЭТ).

Элемент i_l оказался на $(l-1)$-ом месте. Перемещаем его элементарными транспозициями на k-ое место (всего $[l-1-k]$ ЭТ).

Свели транспозицию к $[(l-k)+(l-1-k)] = [2(l-k)-1]$ — нечётному числу ЭТ $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ сменили чётность нечётное число раз $\Longrightarrow$ чётность изменилась ■

1.3 Обратная перестановка

1.3.1 Обратная перестановка

Опр **Обратная перестановка**

Пусть переставили элементы $\{1; 2; 3; \cdots; n\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ i_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n \\ i_n \end{pmatrix}$$

Переставим столбцы так, чтобы нижняя строка превратилась в единичную перестановку:

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} j_n \\ n \end{pmatrix}$$

Получим перестановку $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$, называемую обратной к перестановке $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$.

1.3.2 Чётность обратной перестановки

Th **Чётность прямой и обратной перестановок совпадает**

□ При перестановке столбцов совершается одинаковое число транспозиций над верхней и нижней перестановками ■

Глава 2

Определитель матрицы

2.1 Определение определителя матрицы

<u>**Опр**</u> **Определитель матрицы**

Для матрицы M размером $n \times n$:

$$|M| \equiv \det M = \sum_{(i_1\, i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)}\, a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}\,,$$

где $\sigma(i_1 \cdots i_n)$ — дефект перестановки $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$, численно равный количеству инверсий этой перестановки.

<u>**Пр**</u>

Пусть дана $\underset{2\times 2}{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда её определитель $\det \underset{2\times 2}{M} = \sum\limits_{\substack{(1\ 2)\\(2\ 1)}} (-1)^{\sigma(i_1\ i_2)} a_{1i_1} a_{2i_2} = (-1)^{\sigma(1\ 2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\sigma(2\ 1)} a_{12}a_{21} =$
$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы

2.2.1 Транспонированная матрица

<u>**Опр**</u> **Транспонированная матрица**

Матрица $\underset{n\times n}{B}$ является транспонированной матрицей $\underset{n\times n}{A}$:

$$\underset{n\times n}{B} = \underset{n\times n}{A}^{\mathrm{T}}, \text{ если } (\forall\, i \le j,\ j \le n)\, b_{ij} = a_{ji}$$

<u>**Пр**</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2.2.2 Теорема об определителе транспонированной матрицы

Th **Если для матрицы A матрица $B = A^{\mathrm{T}}$, то $|B| = |A|$, т.е. $\left|A^{\mathrm{T}}\right| = |A|$**

□

$$|B| = \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} b_{1i_1} b_{2i_2} \cdots b_{ni_n} = \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \ldots$$

Выставляя элементы $a_{i_k k}$ в порядке возрастания первых индексов, получим перестановку $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$, обратную к $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$. Причём, $\sigma(j_1 \cdots j_n) = \sigma(i_1 \cdots i_n)$

$$\ldots = \sum_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\sigma(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = |A|$$

Таким образом, $\left|A^{\mathrm{T}}\right| = |A|$ ■

2.3 Влияние элементарных преобразований на определитель матрицы

Опр **Умножение строки/столбца матрицы на число**

Л **Если для матриц $A\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ и $B\left\{b_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ на фиксированной строке l:**

$$\begin{cases} a_{lj} = \lambda b_{lj}, & j = \overline{1,n} \\ a_{ij} = b_{ij}, & \begin{cases} i \neq l, \\ i = \overline{1,n} \end{cases} \text{ и } j = \overline{1,n} \end{cases}, \text{ то } |A| = \lambda\,|B|$$

□

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{li_l} \cdots a_{ni_n} = \\ &= \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots \lambda b_{li_l} \cdots a_{ni_n} = \\ &= \lambda \cdot \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} b_{1i_1} \cdots b_{li_l} \cdots b_{ni_n} = \\ &= \lambda\,|B| \end{aligned}$$

■

Поскольку $|A| = \left|A^{\mathrm{T}}\right|$, то свойство верно и для столбцов.

Опр **Перестановка строки/столбца матрицы**

Л **Если для матриц $A\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ и $B\left\{b_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ на фиксированных строках k и l:**

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k \text{ и } i \neq l \\ a_{kj}, & \text{строка } l \\ a_{lj}, & \text{строка } k \end{cases}, \text{ то } |A| = -|B|$$

□

$$|B| = \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_l \, i_k \cdots i_n)} b_{1i_1} \cdots b_{li_l} b_{ki_k} \cdots b_{ni_n} =$$
$$= \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_l \, i_k \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ki_l} a_{li_k} \cdots a_{ni_n}$$

$$|A| = \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_k \, i_l \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ki_l} a_{li_k} \cdots a_{ni_n} =$$
$$= \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1) \cdot (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_l \, i_k \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ki_l} a_{li_k} \cdots a_{ni_n} =$$
$$= -|B|$$

■

Поскольку $|A| = \left|A^{\mathrm{T}}\right|$, то свойство верно и для столбцов.

Опр **Прибавление строк/столбцов другой матрицы**

$\boxed{\text{Л}}$ **Если для матриц $A\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$, $B\left\{b_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$, $C\left\{c_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ на фиксированной строке l:**

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{ij} = c_{ij}, & i \neq l,\ j = \overline{1,n} \\ b_{lj} + c_{lj}, & \text{строка } l,\ j = \overline{1,n} \end{cases}, \text{ то } |A| = |B| + |C|$$

□

$$|A| = \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{li_l} \cdots a_{ni_n} =$$
$$= \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots (b_{li_l} + c_{li_l}) \cdots a_{ni_n} =$$
$$= \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} b_{1i_1} \cdots b_{li_l} \cdots b_{ni_n} + \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} c_{1i_1} \cdots c_{li_l} \cdots c_{ni_n} =$$
$$= |B| + |C|$$

■

Поскольку $|A| = \left|A^{\mathrm{T}}\right|$, то свойство верно и для столбцов.

2.4 Вычисление определителя треугольной матрицы

2.4.1 Треугольный вид матрицы

Опр **Верхнетреугольная матрица**

Матрица $A\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ имеет верхнетреугольный вид, если $\left(\forall j = \overline{1,n},\ \forall i = \overline{2,n} : i > j\right) a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Л}}$ **Определитель верхнетреугольной матрицы равен $|A| = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$**

□

$$|A| = \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = \ldots$$

Заметим, что любая не единичная перестановка будет содержать нуль:

$$\ldots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

■

2.4.2 Приведение матрицы к верхнетреугольному виду

$\boxed{\text{Л}}$ **Любую матрицу можно привести к верхнетреугольному виду путём элементарных преобразований строк/столбцов**

□ Применим метод математической индукции:

1) $n = 1:$

(1.1) $|a_{11}| = a_{11}$ — верно

2) Пусть лемма верна для $n = m$

3) Докажем её для $n = m + 1$:

(3.1) Если $\left(\forall\, i = \overline{1, m+1},\ \forall\, j = \overline{1, m+1}\right)\, a_{ij} = 0$ — уже верхнетреугольный вид

(3.2) Если $\exists\, a_{i_0 j_0} \neq 0:$

- Переставим строку i_0 с первой строкой, а столбец j_0 с первым столбцом

$$\begin{pmatrix} a_{i_0 j_0} & \cdots & a^{\star}_{1(m+1)} \\ a^{\star}_{21} & \cdots & a^{\star}_{2(m+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{\star}_{(m+1)1} & \cdots & a^{\star}_{(m+1)(m+1)} \end{pmatrix}$$

- Занулим элементы, стоящие под $a_{i_0 j_0}$, поочерёдно вычтя из второй по $(m+1)$–ю строки первую, умноженную на соответственно: $\dfrac{a^{\star}_{21}}{a_{i_0 j_0}}, \dfrac{a^{\star}_{31}}{a_{i_0 j_0}}, \ldots, \dfrac{a^{\star}_{(m+1)1}}{a_{i_0 j_0}}$

$$\begin{pmatrix} a_{i_0 j_0} & \cdots & a^{\star}_{1(m+1)} \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\begin{matrix}\text{Матрица} \\ \text{размером} \\ m \times m\end{matrix}}} \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

- По предположению индукции можем привести матрицу размером $m \times m$ к верхнетреугольному виду ■

2.5 Леммы о разложении определителя по последней строке

2.5.1 Дополнительный минор, алгебраическое дополнение

Опр **Дополнительный минор**

В квадратной матрице $A\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ вычеркнем строку k, столбец l. Определитель полученной матрицы называется дополнительным минором M_{kl}.

Пр

$$\underset{3\times 3}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{22}\left(\underset{3\times 3}{A}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}$$

Опр **Алгебраическое дополнение**

Алгебраическое дополнение, соответствующее элементу a_{kl}, равно $\mathrm{A}_{kl}=(-1)^{k+l}\mathrm{M}_{kl}$

2.5.2 Лемма I

Л **Если в матрице $A\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$, $\left(\forall\, j=\overline{1,n-1}\right)\, a_{nj}=0$, то $|A|=a_{nn}\mathrm{A}_{nn}$**

□

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\substack{(n-1)\\1}} & a_{\substack{(n-1)\\2}} & \cdots & a_{\substack{(n-1)\\(n-1)}} & a_{\substack{(n-1)\\n}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{(i_1\cdots i_{n-1}\ i_n)}(-1)^{\sigma(i_1\cdots i_{n-1}\ i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}= \\ &=0+0+0+\cdots+0+\sum_{(i_1\cdots i_{n-1}\ n)}(-1)^{\sigma(i_1\cdots i_{n-1}\ n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{\substack{(n-1)\\i_{n-1}}}a_{nn}= \\ &=a_{nn}\cdot\sum_{(i_1\cdots i_{n-1})}(-1)^{\sigma(i_1\cdots i_{n-1})}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{\substack{(n-1)\\i_{n-1}}}= \\ &=a_{nn}\mathrm{M}_{nn}=a_{nn}\cdot(-1)^{n+n}\mathrm{M}_{nn}=a_{nn}\mathrm{A}_{nn} \end{aligned}$$

■

2.5.3 Лемма II

$\boxed{\text{Л}}$ **Если в матрице $A\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$, $(\forall\, j \neq l)\; a_{nj} = 0$, то $|A| = a_{nl}\mathrm{A}_{nl}$**

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nl} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Переставим столбец l на место столбца n путём последовательных элементарных транспозиций (всего $[n-l]$ ЭТ):

$$|A| = (-1)^{n-l} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(l-1)} & a_{1(l+1)} & \cdots & a_{1n} & a_{1l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nl} \end{vmatrix} \overset{\textit{Лемма I}}{=\!=\!=} (-1)^{n-l} \cdot a_{nl}\mathrm{M}_{nl} =$$

$$= \left\langle (-1)^{n-l} = (-1)^{n+l} \right\rangle = a_{nl} \cdot (-1)^{n+l}\mathrm{M}_{nl} = a_{nl}\mathrm{A}_{nl}$$

■

2.5.4 Лемма III

$\boxed{\text{Л}}$ **Определитель матрицы $A\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ равен $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}\mathrm{A}_{ni}$**

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

По свойству прибавления строк другой матрицы можем представить определитель $|A|$ как сумму определителей $\left|A^{(i)}\right|$ матриц $A^{(i)}$, для которых элементы последней строки равны $a_{nj}^{(i)} = \begin{cases} a_{ni}, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$, а остальные элементы совпадают с элементами матрицы A:

$$|A| = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{\left|A^{(1)}\right|} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}}_{\left|A^{(2)}\right|} + \cdots + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\left|A^{(n)}\right|}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} \left|A^{(i)}\right| \overset{\textit{Лемма II}}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\mathrm{A}_{ni}$$

■

2.6 Разложение определителя по любой строке или столбцу

Th **Для матрицы $A\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ $(\forall\, k=\overline{1,n})$ $|A|=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}\mathrm{A}_{ki}$**

□ Начиная со строки k, последовательно переставим строки вплоть до строки n:

$$|A| = (-1)^{n-k}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)\,1} & \cdots & a_{(k-1)\,n} \\ a_{(k+1)\,1} & \cdots & a_{(k+1)\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \longleftarrow \langle n\text{–я строка}\rangle \end{array} \overset{\textit{Лемма III}}{=\!=\!=} (-1)^{n-k}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\mathrm{A}_{ki} =$$

$$= (-1)^{n-k}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}a_{ki}\mathrm{M}_{ki} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{2n-k+i}a_{ki}\mathrm{M}_{ki} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki}\mathrm{M}_{ki} = \sum_{i=1}^{n}a_{ki}\mathrm{A}_{ki}$$

■

2.7 Фальшивое разложение определителя

2.7.1 Определитель матрицы с одинаковыми строками/столбцами

Л **Если матрица содержит одинаковые строки/столбцы, то её определитель равен нулю**

□

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & V_1 & \cdots & V_1 & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & V_n & \cdots & V_n & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

При вычислении определителя матриц переставим одинаковые строки/столбцы местами, получим:

$$|A| = (-1)\cdot|A| \implies |A| = 0 \text{ (аналогично } |B| = 0)$$

■

2.7.2 Теорема о произведении элементов матрицы одной строки на алгебраические дополнения элементов другой строки

Th **Если задана матрица $A\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$, то $(\forall\, j\neq k)\sum\limits_{j=1}^{n}a_{lj}\mathrm{A}_{kj}=0$**

□ Составим матрицу $B\left\{b_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$, в которой $b_{ij}=\begin{cases}a_{ij}, & i\neq k\\ a_{lj}, & i=k\end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{l1} & \cdots & a_{ln}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{l1} & \cdots & b_{ln}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{k1} & \cdots & b_{kn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1n} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{l1} & \cdots & a_{ln}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{l1} & \cdots & a_{ln}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Поскольку B содержит две одинаковые строки, то $|B|=0$. С другой стороны, разложив $|B|$ по k–ой строке, получим $|B|=\sum\limits_{j=1}^{n}b_{kj}\mathrm{B}_{kj}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{lj}\mathrm{A}_{kj}=0$ ■

Глава 3

Произведение матриц

3.1 Свойства произведения матриц

3.1.1 Определение произведения матриц

Опр **Произведение матриц**

Если заданы матрицы $\underset{m\times n}{A}$, $\underset{n\times k}{B}$, то произведением $A\cdot B$ называется матрица $\underset{m\times k}{C}$ такая, что:

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}=\underset{m\times k}{C}$$
$$(\forall\, i=\overline{1,m}\,,\,\forall\, j=\overline{1,k})\; c_{ij}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}$$

3.1.2 Дистрибутивность

$\boxed{\text{Л}}$ **Произведение матриц дистрибутивно**

$$\underbrace{\underset{n\times k}{A}\left(\overbrace{\lambda\underset{k\times m}{B}+\mu\underset{k\times m}{C}}^{R\{r_{ij}\}}\right)}_{D\{d_{ij}\}}=\underbrace{\overbrace{\lambda\underset{n\times m}{AB}}^{P\{p_{ij}\}}+\overbrace{\mu\underset{n\times m}{AC}}^{Q\{q_{ij}\}}}_{F\{f_{ij}\}}\quad(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$$

$\square$

$$d_{ij}=\sum_{t=1}^{k}a_{it}r_{tj}=\sum_{t=1}^{k}a_{it}\left(\lambda b_{tj}+\mu c_{tj}\right)=\lambda\sum_{t=1}^{k}a_{it}b_{tj}+\mu\sum_{t=1}^{k}a_{it}c_{tj}=p_{ij}+q_{ij}=f_{ij}\implies$$
$$\implies D=F$$

$\blacksquare$

3.1.3 Ассоциативность

$\boxed{\text{Л}}$ **Произведение матриц ассоциативно**

$$\left(\overbrace{\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times l}{B}}^{F\{f_{ij}\}}\right)\cdot\underset{l\times n}{C}=\underset{m\times n}{T}$$

$$\underset{m\times k}{A}\cdot\left(\overbrace{\underset{k\times l}{B}\cdot\underset{l\times n}{C}}^{G\{g_{ij}\}}\right)=\underset{m\times n}{D}$$

Покажем, что $T=D$:

$\square$

$$t_{ij}=\sum_{p=1}^{l}f_{ip}c_{pj}=\sum_{p=1}^{l}c_{pj}\left(\sum_{q=1}^{k}a_{iq}b_{qp}\right)=\sum_{q=1}^{k}a_{iq}\left(\sum_{p=1}^{l}b_{qp}c_{pj}\right)=\sum_{q=1}^{k}a_{iq}g_{qj}=d_{ij}\implies$$

$$\implies T=D$$

$\blacksquare$

3.1.4 Некоммутативность (контрпример)

$\boxed{\text{Л}}$ **Произведение матриц некоммутативно**

В общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$

Пр

$A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\-3&0\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}A\cdot B&=\begin{pmatrix}3&1\\-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\-14&-1\end{pmatrix}\\ B\cdot A&=\begin{pmatrix}2&1\\-3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\-9&-3\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\implies A\cdot B\neq B\cdot A$$

3.2 Единичная матрица

Опр **Единичная матрица**

Единичная матрица — матрица $E\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $(\forall\, i=\overline{1,n},\forall\, j=\overline{1,n})\; e_{ij}=\overset{\langle\text{Символ Кронекера}\rangle}{\delta_{ij}}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$

$\boxed{\text{Л}}$ **Если $\exists\, A\cdot E$, то $A\cdot E=A$ (аналогично $E\cdot B=B$)**

$\square$

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{E}=\underset{m\times n}{C}$$

$$(\forall\, i=\overline{1,m},\forall\, j=\overline{1,n})\; c_{ij}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}\delta_{tj}=0+0+\dots+a_{ij}\delta_{jj}=a_{ij}\implies C=A$$

$\blacksquare$

3.3 Теорема об определителе произведения матриц *(без доказательства)*[1]

Th **Если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$**

3.4 Обратная матрица

3.4.1 Определение обратной матрицы

Опр **Обратная матрица**

Если для матрицы $\underset{n\times n}{A}$ существует матрица $\underset{n\times n}{B}$ такая, что $A \cdot B = B \cdot A = E$, то матрицу B называют обратной к матрице A и обозначают $B \equiv A^{-1}$

3.4.2 Критерий существования обратной матрицы

Th **Если у матрицы $\underset{n\times n}{A}$, $|A| \neq 0$, то $\exists!\, A^{-1} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$**

1) Существование:

- Докажем, что если $|A| = 0$, то $\nexists\, A^{-1}$:
  $\square$ Предположим противное — A^{-1} существует и $|A| = 0$:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= E \\ |A| \cdot \left|A^{-1}\right| &= |E| \\ 0 &= 1 \implies ☠ \blacksquare \end{aligned}$$

- Докажем, что если $|A| \neq 0$, то $\exists\, A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^{\mathrm{T}}$, где $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $A^* = \{\mathrm{A}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$:

  Рассмотрим $B = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^{\mathrm{T}}$ и докажем, что $A \cdot B = B \cdot A = E$:

  $\square$

  $\underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{B} = \underset{n\times n}{C}$, $|A| = \Delta$

$$\begin{aligned} c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot \frac{1}{\Delta}\mathrm{A}_{jt} = \frac{1}{\Delta}\sum_{t=1}^{n} a_{it}\mathrm{A}_{jt} = \\ = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\cdot\Delta, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \implies \\ \implies C = E \end{aligned}$$

  Аналогично $B \cdot A = E$, т.к. разложение для определителя справедливо и для столбцов $\blacksquare$

[1]Полное доказательство можно обнаружить в упомянутом в аннотации учебнике Л.И. Головиной (Глава III. Линейные операторы / §2. Действия над линейными операторами / Теорема 3).

2) Единственность:

$\square$ Пусть для матрицы A существуют матрицы B и C такие, что $\begin{cases} A\cdot B = B\cdot A = E \\ A\cdot C = C\cdot A = E \\ B\neq C \end{cases}$

Тогда, $\left.\begin{array}{l} C\cdot A\cdot B = \big(C\cdot A\big)\cdot B = E\cdot B = B \\ C\cdot A\cdot B = C\cdot\big(A\cdot B\big) = C\cdot E = C \end{array}\right\} \implies B = C \implies$ ☠ $\blacksquare$

3.4.3 Построение обратной матрицы через алгебраические дополнения

<u>Пр</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1) $\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1}\mathrm{M}_{11} = 4 \qquad \mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2}\mathrm{M}_{12} = -3$

   $\mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1}\mathrm{M}_{21} = -2 \qquad \mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2}\mathrm{M}_{22} = 1$

2) $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \big(A^*\big)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

3) $|A| = 4 - 6 = -2$

4) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\big(A^*\big)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5) $A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

   $A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

3.4.4 Построение обратной матрицы методом элементарных преобразований строк

Умножение k–ой строки на $\alpha\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Л}}$ **Соответствует левостороннему домножению на $B\ \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$,**

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = k \text{ и } j = k \\ \delta_{ij}, & i\neq k \text{ или } j\neq k \end{cases}$$

$\square$ $B\cdot A = C$

1.1) $\big(i = k,\ j = \overline{1,n}\big)$ $c_{kj} = \sum\limits_{t=1}^{n} b_{kt}a_{tj} = \delta_{k1}a_{1j} + \delta_{k2}a_{2j} + \dots + \delta_{k(k-1)}a_{(k-1)j} + \alpha a_{kj} + \dots + \delta_{kn}a_{nj} =$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 + \alpha a_{kj} + \dots + 0 =$$
$$= \alpha a_{kj}$$

$$1.2)\ \left(i \neq k,\ j = \overline{1,n}\right)\ c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{it}a_{tj} = \delta_{i1}a_{1j} + \dots + \delta_{ii}a_{ij} + \dots + \delta_{in}a_{nj} = $$
$$= 0 + \dots + 1 \cdot a_{ij} + \dots + 0 =$$
$$= a_{ij}$$

Таким образом, $c_{ij} = \begin{cases} \alpha a_{ij}, & i = k,\ j = \overline{1,n} \\ a_{ij}, & i \neq k,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$ ■

<u>**Пр**</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{\alpha = c}{\overset{k=2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4c & 5c & 6c \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4c & 5c & 6c \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Перемена местами l–ой и k–ой строк

$\boxed{\text{Л}}$ **Соответствует левостороннему домножению на $B\ \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$,**

$$b_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq k,\ i \neq l,\ j = \overline{1,n} \\ \delta_{kj}, & i = l,\ j = \overline{1,n} \\ \delta_{lj}, & i = k,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

□ $B \cdot A = C$

$$2.1)\ \left(i \neq k,\ i \neq l,\ j = \overline{1,n}\right)\ c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{it}a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij}$$

$$2.2)\ \left(i = l,\ j = \overline{1,n}\right)\ c_{lj} = \sum_{t=1}^{n} b_{lt}a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{kk}a_{kj} = a_{kj}$$

$$2.3)\ \left(i = k,\ j = \overline{1,n}\right)\ c_{kj} = \sum_{t=1}^{n} b_{kt}a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{ll}a_{lj} = a_{lj}$$

Таким образом, $c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k,\ i \neq l,\ j = \overline{1,n} \\ a_{kj}, & i = l,\ j = \overline{1,n} \\ a_{lj}, & i = k,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$ ■

<u>**Пр**</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{k=2}{\overset{l=1}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Добавление к k–ой строке l–ую, умноженную на $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Л}}$ Соответствует левостороннему домножению на $B\,\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$,
$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha + \delta_{kl}, & i = k \text{ и } j = l \\ \delta_{ij}, & i \neq k \text{ или } j \neq l \end{cases}$$

$\square$ $B \cdot A = C$

3.1) $\left(i = k \neq l,\ j = \overline{1, n}\right)$ $c_{kj} = \sum\limits_{t=1}^{n} b_{kt}a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{kk}a_{kj} + a_{lj}(\alpha + 0) = a_{kj} + \alpha a_{lj}$

3.2) $\left(i = k = l = q,\ j = \overline{1, n}\right)$ $c_{kj} = c_{lj} = c_{qj} = \sum\limits_{t=1}^{n} b_{qt}a_{tj} = 0 + \dots + 0 + a_{qj}(\alpha + 1) = a_{qj} + \alpha a_{qj}$

3.3) $\left(i \neq k,\ j = \overline{1, n}\right)$ $c_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{n} b_{it}a_{tj} = \sum\limits_{t=1}^{n} b_{it}a_{tj} = 0 + \dots + 0 + \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij}$

Таким образом, $c_{ij} = \begin{cases} a_{kj} + \alpha a_{lj}, & i = k,\ j = \overline{1, n} \\ a_{ij}, & i \neq k,\ j = \overline{1, n} \end{cases}$ $\blacksquare$

<u>**Пр**</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{k=2}{\overset{l=1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+\alpha & 5+2\alpha & 6+3\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha + \delta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+\alpha & 5+2\alpha & 6+3\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

<u>**Пр**</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{k=3}{\overset{l=3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+7\alpha & 8+8\alpha & 9+9\alpha \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \delta_{33} \end{pmatrix} \implies B{\cdot}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7(\alpha+1) & 8(\alpha+1) & 9(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

Таким образом, последовательное применение ЭП строк к матрице A эквивалентно последовательному домножению слева матрицы A на соответствующую матрицу B_i

Метод присоединённой матрицы

Пусть имеется некая квадратная матрица A. Изобразим её и присоединённую к ней единичную матрицу:
$$\left(A \mid E\right)$$