选课序号

专业班级：

姓名：

学号

装　订　线

大连海事大学 2020-2021（2）《概率论与数理统计》试卷 A

参考答案及评分标准

一、　选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B 为随机事件，$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 A,B 相互独立的充分必要条件是(　C　).

(A) $P(A|B)+P(\bar{A}|B)=1$　　(B) $P(A|B)+P(A|\bar{B})=1$

(C) $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$　　(D) $P(A|\bar{B})+P(\bar{A}|\bar{B})=1$

2. 设离散型随机变量 X 服从分布律 $P(X=k)=\dfrac{C}{k!}$，$k=0,1,2,...$，则常数 C 必为(　C　).

(A) 1　　(B) e

(C) e^{-1}　　(D) e^{-2}

3. 已知随机变量 X 和 Y 方差相等且不为 0，则 X 和 Y 相关系数为 1 的充分必要条件是(　D　).

(A) $\mathrm{cov}(X+Y,X)=0$　　(B) $\mathrm{cov}(X+Y,2Y)=0$

(C) $\mathrm{cov}(X+Y,X-Y)=0$　　(D) $\mathrm{cov}(X-Y,X)=0$

4. 设 $X_1,X_2,...,X_{100}$ 是来自正态总体 $N(0,4)$ 的简单随机样本，则统计量

$$\frac{1}{80}(\sum_{i=1}^{20}X_i)^2+\frac{1}{320}(\sum_{i=21}^{100}X_i)^2$$

服从的分布为(　A　).

(A) $\chi^2(2)$；　(B) $\chi^2(100)$；　(C) $N(0,2)$；　(D) $N(0,400)$.

5. 设随机变量 X 期望与方差均存在但未知，X_1,X_2,X_3 是来自 X 的简单随机样本，下列关于 $E(X)$ 的无偏估计中，最有效的是(　D　)。

(A) $\dfrac{X_1}{2}+\dfrac{X_2}{2}$　　(B) $\dfrac{X_1}{6}+\dfrac{5X_2}{6}$；

(C) $\dfrac{X_1}{4}+\dfrac{X_2}{2}+\dfrac{X_3}{4}$　　(D) $\dfrac{X_1}{3}+\dfrac{X_2}{3}+\dfrac{X_3}{3}$

二、填空题（每题 3 分, 共 15 分）

1. 设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.5$, $P(A\overline{B})=0.3$ ，则 $P(B\,|\,A)=\underline{0.4}$

2. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=-2\}=\dfrac{1}{2}$ ，$P\{X=1\}=a$ ，$P\{X=3\}=b$. 若 $E(X)=0$, 则 $D(X)=\underline{4.5}$

3. 设随机变量 X 的方差为 2, 则由切比雪夫不等式可得 $P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq 4\right\}\leq\underline{0.125}$.

4. 设 $X_1,X_2,...,X_n,...$ 为相互独立的随机变量序列，均服从期望为 3，方差为 9 的同一分布，则随机变量序列 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ ，$n=2,3,4,.....$ 依概率收敛于 $\underline{18}$

5. 设随机变量 X 服从标准正态分布，随机变量 $Y=X+b$ ，其中 b 为未知参数。设 Y_1 ，Y_2 ，…，Y_{16} 为来自总体 Y 的简单随机样本，样本均值为 $\bar{y}=17.5$ ，则未知参数 b 的置信度为 0.9 的双侧置信区间为<u>(17.08875,17.91125)</u>。

（参考数据：$t_{0.1}(15)=1.3406$ ；$t_{0.05}(15)=1.7531$ ；$z_{0.1}=1.282$ ；$z_{0.05}=1.645$ ）

三、(8 分) 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光，电梯于每个整点的第 5 分钟，25 分钟和 55 分钟从底层起行，假如一游客在早上八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在（0,60）内服从均匀分布，求该乘客等候时间的数学期望.

解：①（1 分）X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60} & 0<x<60\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

②（3 分）设该乘客等候时间为 Y ，

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X,0<X\leq 5\\ 25-X,5<X\leq 25\\ 55-X,25<X\leq 55\\ 65-X,55<X\leq 60\end{cases}$$

③（4 分）

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^5(5-x)\times\frac{1}{60}\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\times\frac{1}{60}\mathrm{d}x+\int_{25}^{55}(55-x)\times\frac{1}{60}\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\times\frac{1}{60}\mathrm{d}x$$

$=\dfrac{5}{24}+\dfrac{10}{3}+\dfrac{15}{2}+\dfrac{5}{8}=\dfrac{35}{3}$=11.6667（分钟）

（解法2：全期望公式, 解题思路如果与之相似可酌情给分）$E(Y)=E(E(Y\,|\,X))$

$=E(Y\,|\,0<X<5)P(0<X<5)+E(Y\,|\,5<X<25)P(5<X<25)$

$+E(Y\,|\,25<X<55)P(25<X<55)+E(Y\,|\,55<X<60)P(55<X<60)$

$=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{12}+10\times\dfrac{1}{3}+15\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{2}\times\dfrac{1}{12}$

$=\dfrac{35}{3}$

选课序号

专业班级：

姓名：

学号

装　订　线

四、（22 分）据统计某城市有 20%的居民未接种疫苗，30%的居民已接种 1 剂疫苗，50%的居民已接种 2 剂疫苗。不同居民接种疫苗情况是相互独立的。已知未接种疫苗的人、只接种 1 剂疫苗和接种 2 剂疫苗的人，其病毒抗体检测为阳性的概率分别为 0.001，0.5 和 0.95。

（1）利用中心极限定理，近似计算 200 名居民中已接种疫苗剂量总数超过 270 剂的概率。

(参考数据：$\Phi(0.059)=0.523$；$\Phi(0.509)=0.694$；$\Phi(0.905)=0.817$)

（2）利用泊松定理，近似计算 3 万名居民中“未接种疫苗但病毒抗体检测为阳性”的人为 5 人的概率。

解

①（8 分）设 X_i 为第 i 位居民已注射疫苗剂量。$i=1,2,...,200$。X_i 的分布律为：

$$P(X_i=0)=0.2\text{；}\ P(X_i=1)=0.3\text{；}\ P(X_i=2)=0.5\text{，}$$

由此得到 $E(X_i)=1.3$；$E(X_i^2)=2.3; D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=0.61$

记已接种疫苗剂量总数 $S=\sum_{i=1}^{200}X_i$，由中心极限定理可知 $S\overset{\text{近似}}{\sim}N(260,122)$

$$P(S>270)=P\left(\frac{S-260}{\sqrt{122}}>\frac{270-260}{\sqrt{122}}\right)\approx 1-\Phi(0.905)\approx 1-0.817=0.183$$

②（4 分）每名居民是“未接种疫苗但病毒抗体检测为阳性”的概率为

$$p=0.2\times 0.001=0.0002$$

记 Z 为 3 万名居民中“未接种疫苗但病毒抗体检测为阳性”的人数，则

$$Z\sim b(30000,0.0002)$$

由泊松定理，Z 近似服从参数为 6 的泊松分布。由此

$$P(Z=5)\approx\frac{6^5}{5!}e^{-6}\approx 0.160623$$

（3）随机选择一位居民，记随机变量 X 为其已接种疫苗的剂量数；记随机变量 Y 为：

$$Y=\begin{cases}0 & 若此人病毒抗体检测为阳性\\ 1 & 若此人病毒抗体检测为阴性\end{cases}$$

求二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律和边缘分布律。

（4）随机选择一位居民，检验报告显示其病毒抗体为阳性，求此人已接种 2 剂疫苗的概率。

③（6 分）

Y \ X	0	1	2	$p_{\cdot j}$
0	0.0002	0.15	0.475	0.6252
1	0.1998	0.15	0.025	0.3748
$p_{i\cdot}$	0.2	0.3	0.5	

④（4 分）由贝叶斯公式或者直接通过联合分布律：

$$P(X=2\mid Y=0)=\frac{P(X=2,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{0.475}{0.6252}=0.7597569$$

选课序号

专业班级：

姓名：

学号

装

订

线

五、(**18 分**) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x>0,y>0,x+y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 X 的概率密度函数；(2) 当 $X=1$ 时，计算 $Y>0.4$ 的概率；（3）求 $P(X^2+Y^2<2)$；(4) 计算 X 和 Y 的相关系数。(5) 说明 X 和 Y 是否相互独立。

①（3 分） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ （未写成分段函数形式扣 2 分）

②（4 分） $f_{Y|X}(y\,|\,1)=\dfrac{f(1,y)}{f_X(1)}=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$；

$$P(Y>0.4\,|\,X=1)=\int_{0.4}^{+\infty} f_{Y|X}(y\,|\,1)\,\mathrm{d}\,y=\int_{0.4}^{1}1\,\mathrm{d}\,y=0.6$$

③（3 分）(X,Y) 服从均匀分布，因此落入扇形区域的概率为

$$P(X^2+Y^2<2)=\frac{\frac{1}{4}\times 2\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

④（6 分） $E(X)=\int_0^2 x(1-\dfrac{x}{2})\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{2}{3}$； $E(X^2)=\int_0^2 x^2(1-\dfrac{x}{2})\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{2}{3}$； $D(X)=\dfrac{2}{9}$

同理可知 $E(Y)=\dfrac{2}{3}$； $D(Y)=\dfrac{2}{9}$；

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^2\mathrm{d}\,x\int_0^{2-x}\frac{1}{2}xy\,\mathrm{d}\,y=\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{9}$$

$$\rho=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{1}{2}$$

⑤（2 分） X 和 Y 相关系数不为 0，因此 X 和 Y 不独立。

（用分布函数或密度函数证明不独立，如计算无误不扣分）

六、**(14 分)** 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1-\theta, & 0<x<1\\ \theta, & 1<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中 $0<\theta<1$ 为未知参数，选取容量为 6 的简单随机样本，样本观察值为：0.2， 0.3， 0.4， 0.8， 1.1， 1.9

（1）求参数 θ 的矩估计值；（2）求参数 θ 的最大似然估计值。

解：①（7 分）$E(X)=(1-\theta)\int_0^1 xdx+\theta\int_1^2 xdx=\theta+\dfrac{1}{2}$

令 $\hat{E}(X)=\bar{X}$；$\hat{\theta}_{矩}=\bar{X}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{47}{60}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{60}$

②（7 分）$L(\theta)=\prod_{i=1}^{6} f(x_i)=(1-\theta)^4\theta^2$；$\ln L(\theta)=4\ln(1-\theta)+2\ln\theta$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{4}{1-\theta}+\dfrac{2}{\theta}=0$，解得 $\hat{\theta}_{似}=\dfrac{1}{3}$

（注：也可以不求对数似然函数，令 $\dfrac{dL(\theta)}{d\theta}=2\theta(1-\theta)^4-4\theta^2(1-\theta)^3=0$，解得 $\hat{\theta}_{似}=\dfrac{1}{3}$）

七、 **(8 分)** 某厂生产乐器用合金弦线，其抗拉强度 X 服从均值为 10560（单位：kg/cm²）的正态分布，现从一批产品中抽取 10 根，测得其抗拉强度的样本均值 $\bar{x}=10631.4$，样本方差为 $s^2=6560.49$。在显著性水平 0.05 下，这批产品的抗拉强度 X 的均值与 10560 是否有显著差异？

（参考数据 $t_{0.025}(9)=2.262$；$t_{0.05}(9)=1.833$；）

解：①（2 分）提出假设与备择假设 $H_0:\mu=10560$ $H_1:\mu\neq 10560$

（写成 H_0：$\mu\leq 10560$ 扣一分，后续若正确不再扣分，写成 H_0：$\mu\geq 10560$ 不得分）

②（2 分）使用检验统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

③（2 分）确定拒绝域为 $\{|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$

④（1 分）代入数据 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{10631.4-10560}{\sqrt{656.049}}=\dfrac{71.4}{25.61345}=2.7876>t_{0.025}(9)=2.262$

⑤（1 分）落入拒绝域，拒绝 $H_0:\mu=10560$，即在显著性水平 0.05 下，认为这批产品的抗拉强度的均值与 10560 有显著差异。

(利用区间估计和假设检验关系解题的可以酌情给分；)