大连海事大学 2017-2018（1）《概率论与数理统计》13003220 A1 答案

一．填空题（15 分，每小题 3 分）

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0,4]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max(X,Y)\geq 1\}=$ <u>15/16</u>.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布：$P\{X=-1\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，则 $P\{X=Y\}=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\geq 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}$，随机变量 Y_1,Y_2 满足 $Y_k=\begin{cases}1, X>k\\ 0, X\leq k\end{cases}$，$k=1,2$，则 $E(Y_1Y_2)=$ <u>e^{-2}</u>。

4. 已知一批零件的长度 X（单位:cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机抽取 16 个零件,得到长度的平均值为 40 （cm),则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 <u>$(40\pm 0.49)=(39.51,40.49)$</u> .

   (注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95.$)

5. 设总体 X 的均值 μ 与方差 σ^2 都存在，但均未知，X_1，X_2 是来自总体 X 的一个简单随机样本，则 $\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2$ 为 <u>σ^2</u> 的无偏估计.

二．选择题（15 分，每小题 3 分）

1. 设事件 A，B 相互独立，$\boldsymbol{P(B)=0.5,P(A-B)=0.3}$，则 $\boldsymbol{P(B-A)=}$（　B　）

   （A）0.1　　（B）0.2　　（C）0.3　　（D）0.4

2. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为[-1,3]上均匀分布的概率密度,

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x) & x\leq 0\\ bf_2(x) & x>0\end{cases}\qquad (a>0,b>0)$$

   为概率密度,则 a,b 应满足（　A　）

   (A) $\boldsymbol{2a+3b=4}$　　(B) $\boldsymbol{3a+2b=4}$

   (C) $\boldsymbol{a+b=1}$　　(D) $\boldsymbol{a+b=2}$

3. 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且 $X_1\sim N(0,1)$, $X_2\sim N(0,2^2)$, $X_3\sim N(5,3^2)$，$P_i=P\{-2\leq X_i\leq 2\},(i=1,2,3)$，则（　A　）

   （A）$P_1>P_2>P_3$　（B）$P_2>P_1>P_3$　（C）$P_3>P_2>P_1$　（D）$P_1>P_3>P_2$

4. 设 X_1，X_2，…，X_n 为独立同分布随机变量序列，且 $X_i\sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & 其它\end{cases}$，则下列选项正确的是（　B　）

（A）$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \dfrac{n}{\lambda}}{\dfrac{n}{\lambda^2}} \le x\right\} = \Phi(x)$；（B）$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$；

（C）$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \dfrac{1}{\lambda}}{\dfrac{1}{\lambda^2}} \le x\right\} = \Phi(x)$；（D）$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{n} \le x\right\} = \Phi(x)$；

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \ge 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 则（ D ）

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$ (B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$ (D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

三、（12 分）在电源电压不超过 200V, 在 200 至 240V 和超过 240V 三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 $0.2, 0.05$ 和 0.2 。假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220, 25^2)$，试求该电子元件损坏的概率。（已知 $\Phi(0.8) = 0.788$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数。）

解：设 A ={该电子元件损坏}，$B_1 = \{X \le 200\}$，$B_2 = \{200 < X \le 240\}$，$B_3 = \{X \ge 240\}$，…2 分

则 $P(B_1) = P\{X \le 200\} = P\{\dfrac{X-220}{25} \le \dfrac{200-220}{25}\} = \Phi(-0.8) = 1 - 0.788 = 0.212$

$P(B_2) = P\{200 < X \le 240\} = P\{\dfrac{200-220}{25} < \dfrac{X-220}{25} \le \dfrac{240-220}{25}\} = \Phi(0.8) - \Phi(-0.8) = 0.576$

$P(B_3) = 1 - P(B_1) - P(B_2) = 0.212$ ……………………5 分

由全概率公式，有

$P(A) = \sum\limits_{k=1}^{3} P(B_k) \cdot P(A \mid B_k) = 0.212 \times 0.2 + 0.576 \times 0.05 + 0.212 \times 0.2 = 0.1136$ ……5 分

四、(8 分) 设总体 X 在区间 $(0, 4)$ 上服从均匀分布，X_1，X_2，X_3，X_4 为其样本. 试求 $\max\limits_{1\le i\le 4}(X_i)$ 的概率密度函数.

解：令 $Y = \max\limits_{1\le i\le 4}(X_i)$，由 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ 得， …………………3 分

Y 的分布函数为 $F_Y(y) = [F(y)]^4$， …………………3 分

所以Y的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{4^3} & 0 \le y \le 4 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$ ……………………2 分

五、（15 分）设A，B为两个随机事件，且$P(A)=\dfrac{1}{5}$，$P(B|A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{3}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A发生, \\ 0, & A不发生,\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & B发生, \\ 0, & B不发生.\end{cases}$$

求（1）二维随机变量(X,Y)的概率分布；（2）X与Y的相关系数 ρ_{XY}；（3）$Z=X^2+Y^2$的概率分布.

解：（1）因为 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{15}$，　于是 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\dfrac{1}{5}$，　………2 分

则有　$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\dfrac{1}{15}$，

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\dfrac{2}{15}$，

$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\dfrac{2}{15}$，

$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\dfrac{2}{3}$，

（或　$P\{X=0,Y=0\}=1-\dfrac{1}{15}-\dfrac{2}{15}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{2}{3}$），　……………………4 分

即(X,Y)的概率分布为：

$X \backslash Y$	0	1
0	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2}{15}$
1	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

(2)：　X，Y的概率分布分别为

X	0	1
P	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

Y	0	1
P	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

则 $E(X)=\frac{1}{5}, E(Y)=\frac{1}{5}$， $D(X)=\frac{4}{25}$， $D(Y)=\frac{4}{25}$， $E(XY)=\frac{1}{15}$， ……………………2 分

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{75}$，从而

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{6}.$$ ……………………3 分

(3) Z 的可能取值为：0，1，2 .

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{4}{15},$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{15},$$ ……………………4 分

即 Z 的概率分布为：

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

六、（15 分）连续型随机变量（X，Y）$\sim f(x,y)=\begin{cases}ax^2y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & 其他\end{cases}$，求：(1) 常数 a 的值；(2) $f_X(x)$； (3) $f_{Y|X}(y|x)$； (4) 求 $Z=XY$ 的分布函数和概率密度。

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x ax^2ydy=\frac{a}{10}=1\Rightarrow a=10$ ……………3 分

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 10x^2ydy=5x^4 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$ ……………4 分

(3) $$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{2y}{x^2} & 0<x<1, 0\le y\le x\\ 0 & 其它\end{cases}$$ ……………3 分

(4) 当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$；

当 $0<z<1$ 时，$F_Z(z)=P\{XY\le z\}=1-P\{XY>z\}=1-\int_{\sqrt{z}}^1\int_{\frac{z}{x}}^x 10x^2ydydx=5z^2-4z^{\frac{5}{2}}$； ……………3 分

故 $$f_Z(z)=\begin{cases}10z-10z^{\frac{3}{2}}, & 0<z<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$ ……………2 分

七、(12 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta} & \theta\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中 θ 为未知参数，X_1，$X_2.....X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.（1）求 θ 的矩估计量；（2）求 θ 的最大似然估计量.

解：由题可得

（1）$E(X)=\int_\theta^1 \frac{x}{1-\theta}dx=\dfrac{1}{1-\theta}\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big|_\theta^1=\dfrac{1+\theta}{2}$

$$\frac{1+\hat{\theta}}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$$ ……………5 分

（2）构造似然函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\frac{1}{(1-\theta)^n},\theta\le x_i\le 1$$ ……………4 分

$\ln f=-n\ln(1-\theta)$　　$\dfrac{d\ln f}{d\theta}=\dfrac{n}{1-\theta}>0$，故取 ……………3 分

$$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

八、（8 分）某种饮料自动销售机售出的每杯饮料容量正常情形下服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，今随机取 36 杯，测得平均每杯 219ml，标准差为 14.2ml. 是否可以认为售出的饮料平均每杯为 220 ml（$\alpha=0.1$）？（参考数据：$t_{0.1}(35)=1.3062$，$t_{0.05}(35)=1.6896$，$t_{0.1}(36)=1.3055$，$t_{0.05}(36)=1.6883$）

解：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，

① 题意，提出原假设和备择假设

$$H_0:\mu=220,\quad H_1:\mu\ne 220$$ ……………2 分

②因为总体方差 σ^2 未知，故选取检验统计量为 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$， …… 2 分

③对于给定的显著性水平 $\alpha=0.1$，样本容量 $n=36$，查表可得，拒绝域为

$$|t|\ge t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.05}(35)=1.6896,$$ …………… 2 分

④由样本观察值可知，$n=36$，$\mu_0=220$，$\bar{x}=219$，$s=14.2$，从而

$$|t|=\left|\frac{219-220}{14.2/\sqrt{36}}\right|\approx 0.4225<1.6896$$ …………… 2 分

⑤得出结论. 因 t 未落入拒绝域，所以接受 H_0，认为每杯饮料是 220 ml.