（首页） 专业班级： 学号： 姓名：

教务处试卷编号：

备注：试卷背面为演草区（不准用自带草纸） 装 订 线

课程编号: 1713000130 考核方式： 考核时间：(2 学时、2 小时） 主考教师允许携带的用品:

大连海事大学 2019 --2020 学年第 1 学期《概率论与数理统计》期末测验参考答案

一．单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B 为随机事件，$P(A)=P(B)=0.5$，$P(A\cup B)=1$ 则必有 (C).

(A) $A\cup B=S$； (B) $AB=\phi$；(C) $P(A-B)=P(A)$； (D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0$.

设 A,B 为随机事件, $A\subset B$ 且 $P(B)>0$ (A).

(A) $P(A)\le P(A\,|\,B)$ ； (B) $P(A)\ge P(A\,|\,B)$ ； (C) $P(A)>P(A\,|\,B)$ ； (D) $P(A)<P(A\,|\,B)$.

2. 设 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4\end{pmatrix}$，则 X 的分布函数 $F(x)$ 在 $x=\sqrt{5}$ 的函数值为(C).

(A) 0.4； (B) 0.2； (C) 0.6； (D) 0.9.

3. 设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 是随机变量的分布函数，$f_1(x),f_2(x)$ 是相应的概率密度函数，则(B).

(A) $F_1(x)+F_2(x)$ 是分布函数； (B) $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 是分布函数； (C) $f_1(x)+f_2(x)$ 是概率密度函数； (D) $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 是概率密度函数.

4. 设 $f(x)=Ce^{-x^2+2x},x\in R$ 为 X 的概率密度函数，则常数 C 等于(C).

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi e}}$； (B) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$； (C) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi e}}$； (D) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 若随机变量 X 服从 $[0,5]$ 上的均匀分布，则方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根的概率为 3/5.

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0.4 & -1\le x<1\\ 0.8 & 1\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$，则 X 的分布律为 $\left[\begin{matrix}-1 & 1 & 3\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{matrix}\right]$.

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，$a$ 为任意实数，则 $P(X>a^2+2\,|\,X>a^2)=e^{-1}$.

4. 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且概率 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$ __0.2______.

5. 设随机变量 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi(1+x^2)}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，则 $Y=\ln X$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=\frac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}, y\in R$.

三、（12 分）某人从海事大学驾车前往老虎滩，有 80%的概率会选择途经星海湾大桥，20%的概率选择其它路线。 已知若选择途经星海湾大桥，行驶全程所需时间服从 $\mu=30$，$\sigma=5$ 的正态分布； 若选择其它路线，行驶全程所需时间服从 $\mu=40$，$\sigma=5$ 的正态分布。（单位：分钟）

（1）计算行驶全程所需时间不超过 35 分钟概率。 （2）已知 35 分钟后此人未到老虎滩，计算此人选择经过星海湾大桥行驶的概率。

(参考数据： $\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.24)=0.8925$，$\Phi(0.25)=0.5987$，$\Phi(0.5)=0.6915$)

解：记全程所需时间为 X 分钟，记事件 A 为“选择途经星海湾大桥”。$P\{A\}=0.8$.

（1）$P\{X\le 35\}=P\{A\}P\{X\le 35\,|\,A\}+P\{\bar{A}\}P\{X\le 35\,|\,\bar{A}\}=0.8\times P\{\frac{X-30}{5}\le\frac{35-30}{5}\,|\,A\}+0.2\times P\{\frac{X-40}{5}\le\frac{35-40}{5}\,|\,\bar{A}\}$

$=0.8\times\Phi(1)+0.2\times(1-\Phi(1))=0.2+0.6\times 0.8413=0.70478$ （2）$P\{A\,|\,X>35\}=\frac{P\{A\}P\{X>35\,|\,A\}}{P\{X>35\}}=\frac{0.8\times(1-\Phi(1))}{1-0.70478}=0.4301$

四（12 分）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0\\ 1-x, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，**(1)** 求随机变量 X 的分布函数 $F(x)$；　**(2)** $P\{X>-\frac{1}{4}\mid -\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}$.

解：（1）当 $x<-1$时，$F(x)=0$；当 $-1\le x<0$ 时，$F(x)=\int_{-1}^{x}(1+t)\,\mathrm{d}t=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$；当 $0\le x<1$时，$F(x)=\int_{-1}^{0}1+t\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}1-t\,\mathrm{d}t=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$；

当 $x\ge 1$时，$F(x)=1$；（2）$P\{X>-\frac{1}{4}\mid -\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}=\dfrac{P\{-\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}\}}{P\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}}=\dfrac{F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{4})}{F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{2})}=\dfrac{\frac{7}{8}-\frac{9}{32}}{\frac{7}{8}-\frac{1}{8}}=\dfrac{19}{24}$

五 (16 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ **(1)** 判断 X,Y 是否相互独立；　**(2)** 求 $Z=2X+Y$ Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 和分布函数 $F_Z(z)$；　**(3)** 求 $P\{Z>3\}$.

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-y}\,\mathrm{d}y=1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{1}e^{-y}\,\mathrm{d}x=e^{-y} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$　X,Y 相互独立。

(2)当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $0\le z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X+Y\le z\}=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{z}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-z}$；当 $z\ge 2$ 时，

$F_Z(z)=P\{2X+Y\le z\}=\int_0^{1}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\,\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}e^{2-z}+\frac{1}{2}e^{-z}$

$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-z}, 0\le z<2\\ \frac{1}{2}e^{2-z}-\frac{1}{2}e^{-z}, z\ge 2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$；　**(3)** $P\{Z>3\}=1-F(3)=\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-3}$

六 (10 分) 设 X 在 $(0,1)$ 中随机取一个数，当 X 取 x 时，随机变量 Y 等可能第在 $(x,1)$ 取值. 求：**(1)** (X,Y) 的概率密度函数；**(2)** $P\{X+Y>1\}$ **.**

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases},\quad f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases},\quad f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & 0<x<1, x<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad P\{X+Y>1\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}\,y\int_{1-y}^{y}\frac{1}{1-x}\mathrm{d}\,x=\ln 2$$

七（12 分） X 与 Y 同分布 $X\sim\begin{array}{c|ccc} X & -1 & 0 & 1\\ \hline P & 1/4 & 1/2 & 1/4\end{array}$ 且 $P\left\{XY=0\right\}=1$. 求（1）在 $X=1$ 条件下 Y 的分布律；（2）判定 X 与 Y 是否独立；（3）$P\left\{X+Y=1\right\}$，$P\left\{X=Y\right\}$.

解：（1） $P(Y=0\,|\,X=1)=1$ **；**（2） X 与 Y 不独立，例如 $P\left\{X=0,Y=0\right\}=0\neq\dfrac{1}{4}=P\left\{X=0\right\}P\left\{Y=0\right\}$；（3） $P\{X+Y=1\}=\dfrac{1}{2}$；$P\{X=Y\}=0$

八（8 分） 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{9}, & -1<x<2,\ \ 0<y<x+1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(1) 求 X 的概率密度函数 $f_X(x)$；(2) 设随机变量 $Z=X^2$，求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$； (3) 在 $X=1$ 条件下，求 $1<Y<4$ 的概率。

解：(1) $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{x+1}\frac{2}{9}\mathrm{d}\,y & -1<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{9}(x+1) & -1<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ (2) 设随机变量 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$. 当 $z<0$ 时， $F_Z(z)=P(Z\le z)=0$；当 $z\ge 4$ 时，

$F_Z(z)=P(Z\le z)=1$；当 $0\le z<1$ 时， $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X^2\le z)=P(-\sqrt{z}\le X\le\sqrt{z})=\displaystyle\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\frac{2}{9}(x+1)\,\mathrm{d}\,x=\frac{4}{9}\sqrt{z}$；

当 $1\le z<4$ 时， $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X^2\le z)=P(-1\le X\le\sqrt{z})=\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{z}}\frac{2}{9}(x+1)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{9}(z+2\sqrt{z}+1)$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{9}z^{-\frac{1}{2}}, & 0<z<1\\ \dfrac{1}{9}(1+z^{-\frac{1}{2}}), & 1<z<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) $f_{Y|X}(y\,|\,1)=\dfrac{f(1,y)}{f_X(1)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ $\quad P(1<Y<4\,|\,X=1)=\displaystyle\int_1^4 f_{Y|X}(y\,|\,1)\,\mathrm{d}\,y=\int_1^2\frac{1}{2}\mathrm{d}\,y=\frac{1}{2}$