大连海事大学 2016-2017（1）《概率论与数理统计》13003220 A 答案

注：平时成绩满分 20 分，占总成绩的 20%；本试卷满分 100 分，占总成绩的 80%。

一．选择题（15 分，每小题 3 分）

1.

2．设随机变量(X,Y)服从二维正态分布，且X与Y不相关，$f_X(x), f_Y(y)$分别表示X,Y的概率密度,则在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$为（ C ）

(A) $f_X(x)f_Y(y)$ (B) $f_Y(y)$ (C) $f_X(x)$ (D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

3. 设两个随机变量X与Y相互独立且同分布，$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$，则下列各式成立的是（ C ）.

(A) $X=Y$； (B) $P\{X=Y\}=1$； (C) $P\{X=Y\}=\dfrac{5}{8}$； (D) $P\{X=Y\}=0$.

4. 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,其中μ，σ^2均未知，现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值$\overline{x}=5(\text{cm})$,样本标准差为$s=1(\text{cm})$，则$\mu$的置信水平为 0.95 的置信区间为（ A ）.

(A)$\left(5 \pm \dfrac{1}{4} t_{0.025}(15)\right)$ (B)$\left(5 \pm \dfrac{1}{4} t_{0.05}(16)\right)$ (C)$\left(5 \pm \dfrac{1}{4} t_{0.05}(15)\right)$ (D)$\left(5 \pm \dfrac{1}{4} t_{0.025}(16)\right)$

5. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n \geq 2)$是来自总体$N(0,1)$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，S^2为样本方差，则（ D ）

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$；(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$； (C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$ (D) $\dfrac{3X_1^2}{\sum_{i=2}^{4} X_i^2} \sim F(1,3)$

二． 填空题（15 分，每小题 3 分）

1. 设工厂甲和工厂乙的产品的次品率分别为1%和2%，现从由甲和乙的产品分别占60%和40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品属甲厂生产的概率是$\dfrac{3}{7}$。

2. 口袋里有 7 个白球，3 个黑球，每次从中任取一个不放回，则首次取出白球的取球次数X的概率分布列为

X	1	2	3	4
P	$\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{7}{30}$	$\dfrac{7}{120}$	$\dfrac{1}{120}$

3. 设随机变量X满足$E(X)=D(X)=\lambda$，已知$E[(X-1)(X-2)]=1$，则$\lambda=$ 1 。

4. 某电子计算机主机有 100 个终端，每个终端有 80% 的时间被使用，若各个终端是否被使用是相互独立的，则由中心极限定理，至少有 15 个终端空闲的概率为（用标准正态的分布函数表示）$\underline{\Phi(1.25)}$

5. 设母体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，X_1，X_2，$\cdots$，X_n 为 X 的一个样本, 则 σ^2 的矩估计量为 $\underline{\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.

三、**（14 分）** 已知连续型随机变量 $X \sim f_X(x)=\begin{cases}Ax^2 & 0\le x\le 2\\ 0 & 其他\end{cases}$，求（1）常数 A；（2）已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 独立，且 $P(A\cup B)=3/4$，求常数 a；（3）$Y=X^2$ 的密度函数 $f_Y(y)$。（4）$E(\frac{1}{X^2})$

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_0^2 kx^2dx=1$，得 $k=3/8$。 ……………………3 分

（2）

由于事件 A 和 B 独立，且显然有 $P(A)=P(B)$，

则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=2P(A)-[P(A)]^2=\frac{3}{4}$，

可得 $P(A)=\frac{1}{2}$ 或 $P(A)=\frac{3}{2}$（舍去），

显然 $0<a<2$，有 $P(A)=P\{X>a\}=\int_a^2\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}x^3\Big|_a^2=1-\frac{a^3}{8}=\frac{1}{2}$，

故 $a=\sqrt[3]{4}$.

……………………4 分

（3）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=\begin{cases}0 & y<0\\ P\{|X|\le\sqrt{y}\} & y\ge 0\end{cases}$ ……………………………2 分

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \int_0^{\sqrt{y}}\frac{3x^2}{8}dx=\frac{y\sqrt{y}}{8} & 0\le y<4\\ 1 & y\ge 4\end{cases}$$ ……………………………2 分

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3\sqrt{y}}{16} & 0<y<4\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（4）$$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\int_0^2\frac{3}{8}dx=\frac{3}{4}.$$ ………………………3 分

四、(12分) 已知随机变量 X、Y 以及 XY 的分布律如下：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

求(1)（X，Y）的分布律；(2) $P\{X=2Y\}$；(3) ρ_{XY}。

(1)

Y \ X	0	1	2	$P_{.j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
$P_{i.}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

……………………………….5分

(2) $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}$ …………………3分

(3) $$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{12}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}}{\sqrt{\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)}}=0$$ …………………4分

五、(10分) 设(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-3x-4y}, & x>0, y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求：（1）X 的边缘概率密度；（2）$P\{0<X<1, 0<Y<1\}$.

解：（1） $$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12e^{-3x-4y}dy, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}3e^{-3x}, x>0\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$ ……………5分

(3) $P\{0<X<1, 0<Y<1\} = \int_0^1\int_0^1 12e^{-3x-4y}dxdy = (1-e^{-3})(1-e^{-4})$ ……………5 分

六、（**12 分**）随机变量 $(X,Y) \sim N(2,0,2^2,3^2,\frac{1}{2})$,记 $Z = \frac{X}{2}+\frac{Y}{3}$. (1)求 $E(Z)$ 与 $D(Z)$ 及 Z 服从什么分布；(2)计算 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}，并说明 X 与 Z 是否相互独立.

解：(1) $E(Z) = E(\frac{X}{2}+\frac{Y}{3}) = \frac{E(X)}{2}+\frac{E(Y)}{3} = \frac{2}{2}+\frac{0}{3} = 1$, ……………2 分

$D(Z) = D(\frac{X}{2}+\frac{Y}{3}) = \frac{D(X)}{4}+\frac{D(Y)}{9}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 1+1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times3=3$ ；…3 分

从而 $Z \sim N(1,3)$；……………1 分

(2) 由于 X，Z 是 X,Y 的函数，因而 (X,Z) 服从二维正态分布。 ……………1 分

$$\rho_{XZ} = \frac{\text{cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}} = \frac{\frac{1}{2}D(X)+\frac{1}{3}\text{cov}(X,Y)}{2\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$ ……………3 分

由于相关系数不为零，X 与 Z 不独立. ……………2 分

七、（12 分）设总体 X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, 0<x<1 \\ 0, \quad\quad 其它 \end{cases}$，其中 $0<\theta<+\infty$ 是未知参数. $X_1,X_2,....,X_n$ 来自总体 X 的样本，$x_1,x_2,x_3,...,x_n$ 为样本值. 求参数 θ 的最大似然估计量。

解：设最大似然函数

$$L(\theta) = (\frac{1}{\theta})^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}}，\ 0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1$$ ……………………4 分

$$\ln L(\theta) = -n\ln\theta+\frac{1-\theta}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)，\quad 0<x_1,\cdots,x_n<1$$ ……………………3 分

则令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta}-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$

得 $\widehat{\theta_{最}} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$ …………4 分

因而 θ 的最大似然估计量为：$\widehat{\theta_{最}} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)$ …………………………1 分

八：（10 分）要求一种元件平均使用寿命不得低于 1000h，生产者从一批这种元件中随机抽取 25 件，测

得其寿命的平均值为 950h. 已知该种元件寿命服从标准差为 $\sigma = 100\,\mathrm{h}$ 的正态分布，试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下判断这批元件是否合格？（参考数据：$t_{0.05}(9) = 1.8331$，$t_{0.05}(10) = -1.8125$，$z_{0.05} = 1.645$，$z_{0.025} = 1.960$）

解：（1）做假设：$H_0 : \mu \geq 1000 = \mu_0$　　$H_1 : \mu < 1000 = \mu_0$　　σ^2 已知　　…….2 分

（2）取检验统计量：$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{25}} = \dfrac{\overline{X} - 1000}{100 / \sqrt{25}} \sim N(0,1)$　　…………. 3 分

（3）$\alpha = 0.05$，拒绝域为：$z = \dfrac{\overline{X} - 1000}{100 / \sqrt{25}} < -z_{0.05} = -1.645$　　………………………. 2 分

（4）$z = \dfrac{\overline{x} - 1000}{100 / \sqrt{25}} = \dfrac{950 - 1000}{20} = -2.5 < -1.645$　　……………………. 2 分

（5）拒绝 H_0，即在显著性水平 0.05 下，认为这批元件不合格。　　…………………………1 分