Міністерство освіти і науки України

Національний університет "Львівська політехніка"

Кафедра: ОМП

Звіт

до розрахунково-графічної роботи № **2**

З дисципліни: **„ Теорія ймовірностей та математична статистика. "**

Варіант - 11

Виконав :

ст. гр. ПП-22

Кирилюк Дмитро

Перевірила:

доцент каф. ОМП

Білущак Г.І.

Львів 2024

3.11. а) Математичне сподівання випадкової величини ξ дорівнює 1, а дисперсія – 0,04. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити знизу ймовірності подій $A=\{0,5<\xi<1,5\}$, $B=\{\xi<2\}$.

Розв'язок:

$M\xi = 1$, $D\xi = 0,04$

$0,5 < \xi < 1,5 \ | -M\xi \Rightarrow -0,5 < \xi - 1 < 0,5 \Rightarrow |\xi - 1| < 0,5$

$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \leq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$; $P\{|\xi - 1| < 0,5\} \leq 1 - \frac{0,04}{0,25}$

$P\{|\xi - 1| < 0,5\} \leq 1 - 0,16$

• $P\{|\xi - 1| < 0,5\} \geq 0,84$

$P\{\xi < 2\} = 1 - P\{\xi \geq 2\} = 1 - P\{\frac{\xi}{2} \geq 1\} \geq 1 - M\left(\frac{\xi}{2}\right)$

$1 - M\left(\frac{\xi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} M\xi = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$

• $P\{\xi < 2\} \geq 0,5$

б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2 \ldots$, заданих розподілами

x_i	-3	0	3
p_i	$\frac{n}{n^3+1}$	$1-\frac{2n}{n^3+1}$	$\frac{n}{n^3+1}$

Чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел?

Розв'язок:

Умова 1: $\{\xi_n\}$ – попарно незалежна – виконується

Умова 2: $M\xi_n = -3 \cdot \frac{n}{n^3+1} + 0 + 3 \cdot \frac{n}{n^3+1} = 0$ – виконується

Умова 3: $M\xi_n^2 = (-3)^2 \cdot \frac{n}{n^3+1} + 0 + 3^2 \cdot \frac{n}{n^3+1} = \frac{9n + 9n}{n^3+1} = \frac{18n}{n^3+1}$

$D\xi_n = M\xi_n^2 - (M\xi_n)^2 = \frac{18n}{n^3+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ – виконується

Відповідь: ЗВЧ виконується для цієї послідовності.

4.11. Дано розподіл двовимірного дискретного випадкового вектора (ξ, η):

$\xi \backslash \eta$	-4	0	3	Σ
-1	0,1	~~a~~ 0,3	0	0,4
0	0,2	0,1	0,1	0,4
2	0	0,1	0,1	0,2
Σ	0,3	0,5	0,2	1

Знайти невідому сталу a, розподіл компонент, коваріацію, коеф. кореляції. Перевірити, чи компоненти є незалежними.

Розв'язок:

$$0,1 + a + 0 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0 + 0,1 + 0,1 = 1$$

• $a = 1 - 0,7 = 0,3.$

•

ξ	-1	0	2
$p_{i\cdot}$	0,4	0,4	0,2

•

η	-4	0	3
$p_{\cdot j}$	0,3	0,5	0,2

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta$$

$$M(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = -4 \cdot (-1) \cdot 0,1 + 0 + 0 +$$

$$+ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0,1 = 0,4 + 0,6 = 1$$

$$M\xi = \sum_i x_i p_{i\cdot} = -1 \cdot 0,4 + 0 + 2 \cdot 0,2 = 0$$

$$M\eta = \sum_j y_j p_{\cdot j} = -4 \cdot 0,3 + 0 + 3 \cdot 0,2 = -1,2 + 0,6 = -0,6$$

• $K_{\xi\eta} = 1 - 0 \cdot (-0,6) = 1$

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}; \quad M\xi^2 = (-1)^2 \cdot 0,4 + 0 + 2^2 \cdot 0,2 = 0,4 + 0,8 = 1,2$$

$$M\eta^2 = (-4)^2 \cdot 0,3 + 0 + 3^2 \cdot 0,2 = 4,8 + 1,8 = 6,6$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 1,2 - 0^2 = 1,2 = (1,0954)^2; \quad D\eta = 6,6 - (-0,6)^2 = 6,24 = (2,498)^2$$

• $\rho_{\xi\eta} = \frac{1}{1,0954 \cdot 2,498} = \frac{1}{2,7363} = 0,366$

• $0,1 \overset{?}{=} 0,3 \cdot 0,4; \quad 0,1 \neq 0,12 \Rightarrow$ компоненти залежні

5.11. Дано щільність двовимірного випадкового вектора (ξ, η):

$$f(x,y) = \begin{cases} ay, & (x,y) \in [0;2] \times [0;4] \\ 0, & (x,y) \notin [0;2] \times [0;4] \end{cases}$$

Знайти невідому сталу a, розподіл компонент, коваріацію, умовну щільність компоненти ξ за умови, що $\eta = y$.

Розв'язок:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1; \quad \int_0^2\int_0^4 ay\,dx\,dy = a\int_0^4 dy \int_0^2 y\,dx =$$

$$= a\int_0^4 yx\Big|_0^2 dy = a\int_0^4 2y\,dy = 2a\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = a\cdot 16 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{16}$$

• $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16}y, & (x,y) \in [0;2]\times[0;4] \\ 0, & (x,y) \notin [0;2]\times[0;4] \end{cases}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^4 \frac{1}{16}y\,dy = \frac{1}{16}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{1}{16}\cdot\frac{16}{2} = \frac{1}{2}$$

• $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{16}y\,dx = \frac{1}{16}yx\Big|_0^2 = \frac{1}{16}\cdot 2y = \frac{1}{8}y$$

• $$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}y, & y \in [0;4] \\ 0, & y \notin [0;4] \end{cases}$$

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\cdot\eta) - M\xi\cdot M\eta$$

$$M(\xi\cdot\eta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} xy\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^4 xy\cdot\frac{1}{16}y\,dx\,dy = \frac{1}{16}\int_0^2 dx\int_0^4 xy^2\,dy =$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^2 x\frac{y^3}{3}\Big|_0^4 dx = \frac{1}{16}\int_0^2 x\cdot\frac{64}{3}\,dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{2} = \frac{8}{3}$$

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2} = 1$$

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\,dy = \int_0^4 y\cdot\frac{1}{8}y\,dy = \frac{1}{8}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{1}{8}\cdot\frac{64}{3} = \frac{8}{3}$$

• $$K_{\xi\eta} = \frac{8}{3} - 1\cdot\frac{8}{3} = 0$$

$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$

$\bullet\ p(x|y) = \frac{\frac{1}{16}y}{\frac{1}{8}y} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

6.11. Перевірили 25 партій по 100 керамічних ваз у кожній. При цьому кількість бракованих ваз у кожній партії була такою: 0, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 3, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 1. Записати статистичний і варіаційний ряд. Знайти розмах вибірки, моду, медіану. Обчислити середнє значення, вибіркову і незміщену дисперсії, асиметрію, ексцес, коефіцієнт варіації, емпіричну функцію розподілу та полігон частот.

Розв'язок:

Статистичний ряд:

x_i	0	1	2	3
m_i	7	15	2	1

Варіаційний ряд:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3

Розмах: $R = x_{max} - x_{min} = 3 - 0 = 3$

Мода: $M_0 = 1$

Медіана: $M_e = x_{m+1}$; $n = 2m+1 \Rightarrow m = \frac{n-1}{2} = \frac{25-1}{2} = 12$

$M_e = x_{13} = 1$

Середнє значення: $\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i = \frac{1}{25}(0\cdot 7 + 1\cdot 15 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1) =$

$= \frac{1}{25}\cdot 22 = 0{,}88.$

Вибіркова дисперсія D_B: $\overline{x_B^2} = \frac{1}{25}(0^2\cdot 7 + 1^2\cdot 15 + 2^2\cdot 2 + 3^2\cdot 1) =$

$= \frac{1}{25}\cdot 32 = 1{,}28 \Rightarrow D_B = 1{,}28 - 0{,}88 = 0{,}4$

Незміщена дисперсія: $\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{25}{24}\cdot 0{,}4 = 0{,}417$

Асиметрія: $A = \frac{\mu_3}{S^3}$; $\mu_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3$; $M_1 = \overline{x_B}$, $M_2 = \overline{x_B^2}$

$M_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^3 m_i = \frac{1}{25}(0^3\cdot 7 + 1^3\cdot 15 + 2^3\cdot 2 + 3^3\cdot 1) = \frac{1}{25}\cdot 58 = 2{,}32$

$\mu_3 = 2{,}32 - 3\cdot 1{,}28\cdot 0{,}88 + 2\cdot 0{,}88^3 = 0{,}3037$; $S^3 = D_B^{1,5} = 0{,}253$

$A = \frac{0{,}3037}{0{,}253} = 1{,}2$

Ексцес: $E = \frac{\mu_4}{S^4} - 3$; $\mu_4 = M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4$

$$M_4 = \overline{X^4_в} = \frac{1}{25}\left(0^4\cdot 7 + 1^4\cdot 15 + 2^4\cdot 2 + 3^4\cdot 1\right) = \frac{1}{25}\cdot 128 = 5,12$$

$$\mu_4 = 5,12 - 4\cdot 2,32\cdot 0,88 + 6\cdot 1,28\cdot 0,88^2 - 3\cdot 0,88^4 =$$

$$= 1,1019;\quad S^4 = D_В^2 = 0,16$$

$$E = \frac{1,1019}{0,16} - 3 = 6,89 - 3 = 3,89$$

Коефіцієнт варіації:

– за середнім лінійним відхиленням:

$$V_{\hat\rho} = \frac{\hat\rho(x)}{\overline{X}_В}\cdot 100\%;\quad \hat\rho(x) = \frac{1}{n}\sum |x_i - \overline{x}_в|\cdot m_i$$

$$\hat\rho(x) = \frac{1}{25}\left(|0-0,88|\cdot 7 + |1-0,88|\cdot 15 + |2-0,88|\cdot 2 + |3-0,88|\cdot 1\right) =$$

$$= \frac{1}{25}\cdot 12,32 = 0,4928$$

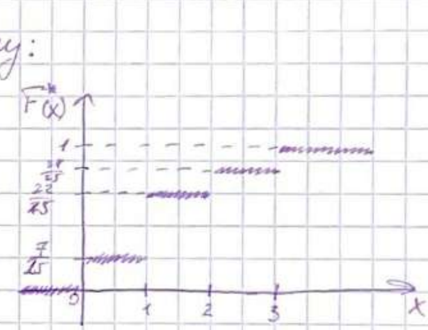
$$V_{\hat\rho} = \frac{0,4928}{0,88}\cdot 100\% = 56\%$$

– за середнім квадратичним відхиленням:

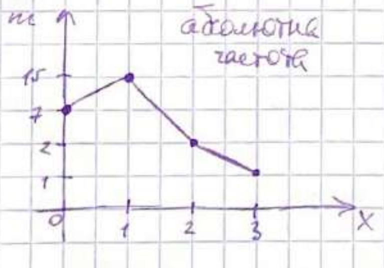
$$V_S = \frac{S}{\overline{X}_В} = \frac{\sqrt{D_В}}{\overline{X}_В} = \frac{0,633}{0,88} = 0,7187 = 71,87\%$$

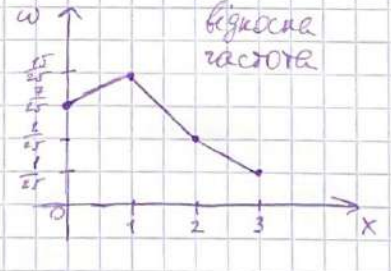
Емпірична функція розподілу:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{7}{25}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{22}{25}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{24}{25}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



Полігон частот:





7.11. Подані інтервали між послідовними імпульсами вздовж нервового волокна (одиниця виміру 1/50 сек.), одержані Ю. Фетом та проф. Б. Кацу (Лонд. ун-т): 3,0; 25,5; 5,5; 14,5; 18,0; 7,0; 27,5; 14,0; 2,0; 0,5; 47,0; 36,5; 2,5; 3,5; 5,5; 19,0; 10,5; 24,5; 19,0; 19,0; 0,5; 3,0; 6,5; 3,0; 0,5. Згрупувати дані. За згрупованими даними знайти середнє значення і порівняти його з дійсним середнім значенням. Побудувати гістограму.

Розв'язок:

$$n = 25 \Rightarrow k \le lg(n) \Rightarrow k \le 6,89 \Rightarrow k = 6$$

$$l = \frac{X_{max} - X_{min}}{k} = \frac{47,0 - 0,5}{6} = 7,75$$

інтервали	[0,5; 8,25)	[8,25; 16)	[16; 23,75)	[23,75; 31,5)	[31,5; 39,25)	[39,25; 47]
m_i / ω_i	$13\left(\frac{13}{25}\right)$	$3\left(\frac{3}{25}\right)$	$4\left(\frac{4}{25}\right)$	$3\left(\frac{3}{25}\right)$	$1\left(\frac{1}{25}\right)$	$1\left(\frac{1}{25}\right)$

Сер. знач. за згрупованими даними:

$$X_i^* = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$$

$$X_1^* = \frac{0,5 + 8,25}{2} = 4,375; \; X_2^* = 12,125; \; X_3^* = 19,875; \; X_4^* = 27,625;$$

$$X_5^* = 35,375; \; X_6^* = 43,125$$

$$\overline{X_B^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} X_i^* m_i = \frac{1}{25}\left(4,375 \cdot 13 + 12,125 \cdot 3 + 19,875 \cdot 4 + 27,625 \cdot 3 + \right.$$

$$\left. + 35,375 \cdot 1 + 43,125 \cdot 1\right) = \frac{1}{25} \cdot 334,125 = 13,365$$

Дійсне середнє значення:

$$\overline{X_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{25}\left(0,5 + 0,5 + \ldots + 36,5 + 47,0\right) = 12,72$$

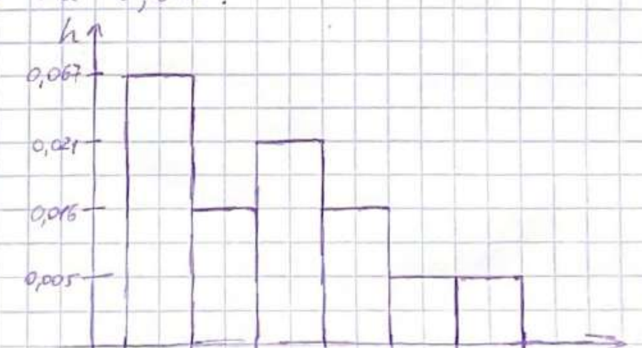
$\overline{X_B^*}$ і $\overline{X_B}$ відрізняються на 0,645.

$$h_i = \frac{\omega_i}{l};$$

$h_1 = 0,067$; $h_4 = 0,016$

$h_2 = 0,016$; $h_5 = 0,005$

$h_3 = 0,021$; $h_6 = 0,005$



10.11. Спостереження над випадковою величиною ξ, що нормально розподілене із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$, дали результати, наведені в завданні 7. Оцінити невідоме математичне сподівання ВВ ξ за допомогою довірчого інтервалу з надійністю 0,95.

Розв. язок:

$$I_\beta = \left(\overline{x}_в - t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{x}_в + t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right); \quad t_\beta = 0{,}95, \quad \sigma = 5, \quad n = 25$$

$$\overline{x}_в = \frac{1}{25}\left(3{,}0 + 25{,}5 + \ldots + 3{,}0 + 0{,}5\right) = 12{,}72$$

$$I_\beta = \left(12{,}72 - 0{,}95 \cdot \frac{5}{5}, 12{,}72 + 0{,}95 \frac{5}{5}\right)$$

$$I_\beta = (11{,}77 ; 13{,}67)$$

Відповідь: $(11{,}77 ; 13{,}67)$.

11.11. Дано дві реалізації двовимірних вибірок:

а)

x_i	-3	0	3	5
y_i	4	5	8	9

б)

$\xi \backslash \eta$	2	3	4	5	n_x
-1	1	–	–	–	1
0	1	2	1	–	4
1	–	–	2	–	2
2	–	–	1	1	2
n_y	2	2	4	1	9

Для кожної реалізації записати лінійне і квадратичне рівняння регресії.

Розв'язок:

а) Лінійне р-ня регресії: $n = 4$

x	y	x^2	y^2	xy
-3	4	9	16	-12
0	5	0	25	0
3	8	9	64	24
5	9	25	81	45
Σ 5	26	43	186	57

$\overline{x_B} = \frac{1}{4} \cdot 5 = 1,25$

$\overline{y_B} = \frac{1}{4} \cdot 26 = 6,5$

$\overline{x_B^2} = \frac{1}{4} \cdot 43 = 10,75$

$\overline{(xy)_B} = \frac{1}{4} \cdot 57 = 14,25$

$y = a_1 x + a_0$

$$\begin{cases} \overline{x_B^2} \cdot a_1 + \overline{x_B} \cdot a_0 = \overline{(xy)_B} \\ \overline{x_B}\, a_1 + a_0 = \overline{y_B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10,75a_1 + 1,25a_0 = 14,25 \\ 1,25a_1 + a_0 = 6,5 \end{cases}$$

З $\text{II} \Rightarrow a_0 = 6,5 - 1,25a_1 \rightarrow \text{I}$

$10,75a_1 + 1,25(6,5 - 1,25a_1) = 14,25$

$10,75a_1 + 8,125 - 1,5625a_1 = 14,25$

$9,1875a_1 = 6,125 \Rightarrow a_1 = 0,6667$, $a_0 = 6,5 - 0,8333 = 5,6667$

$y = 0,6667x + 5,6667$

а) Квадратичне р-ня регресії:

x^3	x^4	x^2y
-27	81	36
0	0	0
27	81	72
125	625	225
125	787	333

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{cases} 43a_2 + 5a_1 + 4a_0 = 26 \\ 125a_2 + 43a_1 + 5a_0 = 57 \\ 787a_2 + 125a_1 \; 43a_0 = 333 \end{cases}$$

Після використання методу Гаусса:

$$\begin{cases} 787a_2 + 125a_1 + 43a_0 = 333 \\ 23,1461a_1 - 1,83a_0 = 4,11 \\ 1,51a_0 = 8,13 \end{cases}$$

$a_0 = 5,4$

$a_1 = 0,604$

$a_2 = 0,032$

$y = 0,032x^2 + 0,604x + 5,4$

б) Лінійне р-ня регресії:

$$\overline{X_в} = \frac{1}{9}\left(-1\cdot1 + 0\cdot4 + 1\cdot2 + 2\cdot2\right) = \frac{1}{9}\cdot5 = \frac{5}{9}$$

$$\overline{X^2_в} = \frac{1}{9}\left(1\cdot1 + 0\cdot4 + 1\cdot2 + 4\cdot2\right) = \frac{1}{9}\cdot11 = \frac{11}{9}$$

$$\overline{y_в} = \frac{1}{9}\left(2\cdot2 + 3\cdot2 + 4\cdot4 + 5\cdot1\right) = \frac{1}{9}\cdot31 = \frac{31}{9}$$

$$\overline{xy_в} = \frac{1}{9}\left(1\cdot(-1)\cdot2 + 1\cdot0\cdot2 + 0 + 0 + 2\cdot1\cdot4 + 1\cdot2\cdot4 + 1\cdot2\cdot5\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(-2 + 8 + 8 + 10\right) = \frac{1}{9}\cdot24 = \frac{24}{9}$$

$y = a_1x + a_0$

$$\begin{cases} \frac{11}{9}a_1 + \frac{5}{9}a_0 = \frac{24}{9} \\ \frac{5}{9}a_1 + a_0 = \frac{31}{9} \end{cases} \qquad a_0 = \frac{31}{9} - \frac{5}{9}a_1$$

$$\frac{11}{9}a_1 + \frac{5}{9}\left(\frac{31}{9} - \frac{5}{9}a_1\right) = \frac{24}{9}$$

$$\frac{11}{9}a_1 + \frac{155}{81} - \frac{25}{81}a_1 = \frac{24}{9}$$

$$\left(\frac{99}{81} - \frac{25}{81}\right)a_1 = \frac{216}{81} - \frac{155}{81} \Rightarrow a_1 = \frac{61}{81}\cdot\frac{81}{74} = \frac{61}{74}$$

$$a_0 = \frac{31}{9} - \frac{5}{9}\cdot\frac{61}{74} = \frac{31}{9} - \frac{305}{666} = 3{,}444 - 0{,}458 = 2{,}987$$

$y = 0{,}824x + 2{,}987$.

б) Квадратичне р-ня регресії:

$$\overline{y}_{x=-1} = \frac{1}{1}\cdot(2\cdot1) = 2$$

$$\overline{y}_{x=0} = \frac{1}{4}\left(2\cdot1 + 3\cdot2 + 4\cdot1\right) = \frac{1}{4}\cdot12 = 3$$

$$\overline{y}_{x=1} = \frac{1}{2}\left(4\cdot2\right) = 4$$

$$\overline{y}_{x=2} = \frac{1}{2}\left(4\cdot1 + 5\cdot1\right) = 4{,}5$$

x	n_x	$\overline{y_x}$	$n_x\cdot x$	$n_x\cdot x^2$	$n_x\cdot x^3$	$n_x\cdot x^4$	$n_x\cdot\overline{y_x}$	$n_x\cdot\overline{y_x}\cdot x$	$n_x\cdot\overline{y_x}\cdot x^2$
-1	1	2	-1	1	-1	1	2	-2	2
0	4	3	0	0	0	0	12	0	0
1	2	4	2	2	2	2	8	8	8
2	2	4,5	4	8	16	32	9	18	36
Σ	9	13,5	5	11	17	35	31	24	46

$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} 11a + 5b + 9c = 31 \\ 17a + 11b + 5c = 24 \\ 35a + 17b + 11c = 46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35a + 17b + 11c = 46 \\ 2{,}743b - 0{,}343c = 1{,}66 \\ 5{,}5c = 16{,}75 \end{cases}$$

$a = -0{,}121$; $b = 0{,}985$; $c = 3{,}046$

$y = -0{,}121x^2 + 0{,}985x + 3{,}046$