Міністерство освіти і науки України

Національний університет “Львівська політехніка”

Кафедра: ОМП

Звіт

до розрахунково-графічної роботи №1

З дисципліни: **„ Теорія ймовірностей та математична статистика. ”**

Варіант - 11

Виконав :

ст. гр. ПП-22

Кирилюк Дмитро

Перевірив:

доцент каф. ОМП

Білущак Г.І.

Львів 2024

1.11. У шаховому турнірі беруть участь 20 осіб. Їх за жеребкуванням розподілено на 2 групи по 10 осіб. Скільки існує при цьому способів, щоб четверо найсильніших гравців потрапили по двоє у різні групи?

Комбінації:

- розподілення найсильніших: $C_4^2 \cdot C_2^2 = C_4^2$
- розподілення простих: $C_{16}^8 \cdot C_8^8 = C_{16}^8$

$$C_4^2 \cdot C_{16}^8 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{16!}{8! \cdot 8!} = \frac{12}{2} \cdot \frac{518\,918\,400}{40\,320} =$$

$$= 6 \cdot 12\,870 = 77\,220$$

Відповідь: 77 220.

Кирилюк 1

2.11. Гральну кісточку підкидають. Результат експерименту - сума очок, що випали. Розглянемо події: M - сума очок дорівнює 11; N - сума очок не менша 3; K - число очок ділиться на 5. 1) Які з даних подій сумісні, а які - ні? 2) Описати події: $M \cap N$, $N \cap K$, $M \cup N$, $M \cup K$, $\overline{N}$, $\overline{K}$, $M \cup N \cup K$, $M \cap N \cap K$.

$M = \{11\}$; $N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;
$K = \{5, 10\}$

Відповідь: 1) сумісні: M і N, N і K; несумісні: M і K.
2) $M \cap N = \{11\}$, $N \cap K = \{5, 10\}$, $M \cup N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; $M \cup K = \{5, 10, 11\}$; $\overline{N} = \{2\}$, $\overline{K} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$; $M \cup N \cup K = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; $M \cap N \cap K = \{11\} \cap K = \varnothing$.

3.11. Партія з 50 виробів містить 5 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед 4 виробів буде: а) саме 2 браковані; б) жодного бракованого.

$$N(\Omega) = C_{50}^{4} = \frac{50!}{4! \cdot 46!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{24} = 230\,300$$

$$N(A) = C_5^2 \cdot C_{45}^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{45!}{2! \cdot 43!} = 9\,900$$

$$N(B) = C_{45}^4 = \frac{45!}{4! \cdot 41!} = 148\,995$$

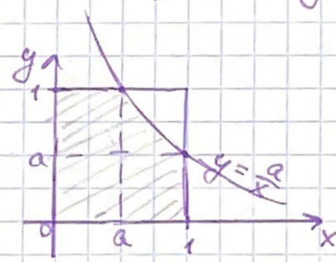
$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \approx 0,043$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} \approx 0,65$$

Відповідь: а) 0,043; б) 0,65.

4.11. Усередині квадрата із вершинами в точках $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ навмання вибирається точка $M(x,y)$. Знайти ймовірність того, що $xy < a$, якщо $0 < a < 1$.

$$\Omega: \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$



$$A: \quad xy < a \Rightarrow y < \frac{a}{x}$$

$$S(A) = a + \int_a^1 \frac{a\,dx}{x} = a + a\int_a^1 \frac{dx}{x} = a + a\ln x \Big|_a^1 =$$

$$= a + a(\underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(a)) = a - a\ln(a) = a(1 - \ln(a))$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{a(1-\ln(a))}{1} = a(1 - \ln(a)).$$

Відповідь: $a(1-\ln(a))$.

Кирилюк 2

5.11. Вироби, які виготовляє завод, з імовірністю 0,09 мають дефект. Працюють два контролери, причому виріб потрапляє до кожного з них з однаковою імовірністю. Перший контролер бракує поганий виріб з імовірністю 0,85, а другий – 0,91. Яка імовірність того, що довільно взятий виріб буде забраковано?

H_1 – бракований виріб потрапив до першого контролера

H_2 – бракований виріб потрапив до другого контролера

$x + x = 0,09; \quad 2x = 0,09 \Rightarrow x = 0,045$

$P(H_1) = P(H_2) = 0,045$

A – виріб забракований контролером

$P(A|H_1) = 0,85; \quad P(A|H_2) = 0,91.$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) =$$
$$= 0,045 \cdot 0,85 + 0,045 \cdot 0,91 = 0,0792$$

Кирилюк 3

Відповідь: 0,0792.

6.11. Завод виготовляє деталі, серед яких 5% бракованих. Що імовірніше: що серед 10 деталей буде саме 2 бракованих чи серед 5 деталей буде не менше 1 бракованої.

$n_1 = 10, \ k_1 = 2, \ p = 0,05, \ q = 0,95$

Використовуємо теорему Пуассона $(p < 0,1)$

$\lambda_1 = n_1 p = 0,5 \le 10$

$$P_{10}(2) = \frac{0,5^2}{2!} e^{-0,5} = 0,075816$$

$n_2 = 10$, $k \geq 1$, $\lambda_2 = n_2 p = 0,5$

$$P_{10}(k \geq 1) = \sum_{k=1}^{10} P_{10}(k) = 1 - P_{10}(0) = 1 - 0,606531 =$$
$$= 0,393469$$

Відповідь: імовірність буде "серед 5 деталей буде не менше однієї бракована".

7.11. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ_1, яка може набувати лише два значення: x_1 з імовірністю $p_1 = 0,9$ і x_2, якщо $x_1 < x_2$ і $M\xi_1 = 3,1$; $D\xi_1 = 0,09$

$$p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - p_1 = 0,1.$$
$$M\xi_1 = x_1 p_1 + x_2 p_2 \, ; \quad D\xi_1 = M\xi_1^2 - (M\xi_1)^2$$
$$D\xi_1 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - (M\xi)^2$$
$$\begin{cases} 0,9x_1 + 0,1x_2 = 3,1 \\ 0,9x_1^2 + 0,1x_2^2 - 9,61 = 0,09 \end{cases}$$
$$x_2 = \frac{3,1 - 0,9x_1}{0,1} = 31 - 9x_1$$
$$0,9x_1^2 + 0,1(961 - 558x_1 + x_1^2) - 9,7 = 0$$
$$x_1^2 - 55,8x_1 + 96,1 - 9,7 = 0$$
$$x_1^2 - 55,8x_1 - 86,4 = 0$$
$$D = 3113,64 - 345,6 = 2768,04 = 52,61^2$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{55,8 - 52,61}{2} = 1,592 \\ x_1^{(2)} &= \frac{55,8 + 52,61}{2} = 54,205 \\ x_2^{(1)} &= 31 - 14,328 = 16,67 \\ x_2^{(2)} &= 31 - 487,845 = -456,85 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{підходить (1) варіант}$$

Відповідь:

ξ_1	1,59	16,67
P	0,9	0,1

Кирилюк 4

8.11. Серед людей, які проживають на даній території, 35% мають карі очі. Яка ймовірність, що серед 350 людей буде рівно 100 кароких?

Розв'язок:

$n = 350$; $p = 0,35$, $q = 0,65$; $k = 100$ $\Rightarrow$ лок. теор. Муавра-Лапласа

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{100-122,5}{\sqrt{79,625}} = -\frac{22,5}{8,923} = -2,52$$

$$\varphi(-2,52) = \varphi(2,52) = 0,0167$$

$$P_{350}(100) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{0,0167}{8,923} = 0,00187$$

Відповідь: 0,00187.

9.11. Один раз підкидаємо дві гральні кістки. Випадкова величина ξ набуває значення, що дорівнює більшому з чисел, які випали. Побудувати для неї ряд розподілу, многокутник розподілу та функцію розподілу. Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

$$\Omega\xi = \{1,2,3,4,5,6\}; \quad p_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$p_2 = \underset{(2)}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{(1)}{\frac{1}{6}} + \underset{(1)}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{(2)}{\frac{1}{6}} + \underset{(2)}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{(2)}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{36}$$

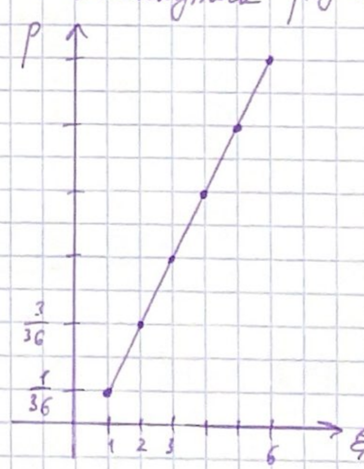
$$p_3 = \underset{(3)}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{(1)}{\frac{1}{6}} + \underset{(3)}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{(2)}{\frac{1}{6}} + \underset{(1)}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{(3)}{\frac{1}{6}} + \underset{(2)}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{(3)}{\frac{1}{6}} + \underset{(3)}{\frac{1}{6}}\cdot\underset{(3)}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{36}$$

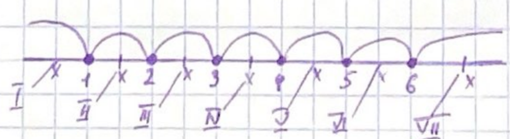
$$p_4 = \frac{7}{36}; \quad p_5 = \frac{9}{36}; \quad p_6 = \frac{11}{36}$$

$$\sum_i p_i = 1$$

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Многокутник розподілу





5 Кириляк

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{1}{36}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{4}{36}, & 2 < x \le 3 \\ \frac{9}{36}, & 3 < x \le 4 \\ \frac{16}{36}, & 4 < x \le 5 \\ \frac{25}{36}, & 5 < x \le 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

$$M\xi_1 = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4,47$$

$$M\xi_1^2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 16 \cdot \frac{7}{36} + 25 \cdot \frac{9}{36} + 36 \cdot \frac{11}{36} = 22,61$$

$$D\xi_1 = M\xi_1^2 - (M\xi_1)^2 = 22,61 - (4,47)^2 = 2,65$$

$$\sigma\xi_1 = \sqrt{D\xi_1} = 1,63$$

10.11. Функція розподілу випадкової величини ξ_1 задається формулою: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 2(x-1), & x \in (-1; 1,5] \\ 1, & x > 1,5 \end{cases}$

Знайти моду, медіану, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ_1. Побудувати криву розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1; 1,5] \\ 2, & x \in (-1; 1,5] \end{cases}$$

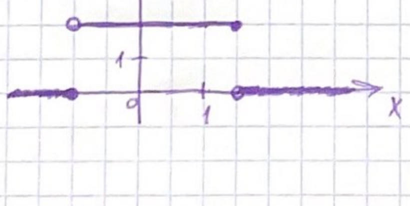
Мода: $p(x) \to max \Rightarrow x \in (-1; 1,5]$.

Медіана: $F(m) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(m-1) = \frac{1}{2}$; $m - 1 = \frac{1}{4}$; $m = 1,25$.

$$M\xi_1 = \int_{-1}^{1,5} x\, p(x)\, dx = \int_{-1}^{1,5} 2x\, dx = x^2 \Big|_{-1}^{1,5} = 2,25 - 1 = 1,25.$$

$$M\xi_1^2 = \int_{-1}^{1,5} x^2 p(x)\, dx = \int_{-1}^{1,5} 2x^2\, dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_{-1}^{1,5} = \frac{2}{3}(3,375 - 1) = 1,583$$

$$D\xi_1 = M\xi_1^2 - (M\xi_1)^2 = 1,583 - 1,563 = 0,02$$



Кирилюк 6

11.11. Задано щільність розподілу ВВ ξ_1:

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} A\sqrt{x}, & x \in (0,4) \\ 0, & x \notin (0,4) \end{cases}$$

Знайти сталу A, а також $M\eta$ і $D\eta$, якщо $\eta = \xi_1^2$.

$$\int_0^4 f_{\xi_1}(x)\,dx = 1; \quad \int_0^4 A\sqrt{x}\,dx = 1; \quad A\frac{2x\sqrt{x}}{3}\Big|_0^4 = 1;$$

$$A \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 2}{3} = 1; \quad A = \frac{3}{16};$$

$$M\eta = \int_0^4 f(x)\cdot f_{\xi_1}(x)\,dx; \quad f(x) = x^2$$

$$M\eta = \int_0^4 x^2 \cdot \frac{3}{16}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{16}\int_0^4 x^2\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{16}\cdot\frac{2x^3\sqrt{x}}{7}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{6}{112}x^3\sqrt{x}\Big|_0^4 = \frac{6}{112}\cdot 128 = \frac{768}{112} = \frac{192}{28} = \frac{48}{7} = 6{,}86$$

$$M\eta^2 = \frac{3}{16}\int_0^4 x^4\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{16}\cdot\frac{2\cdot x^5\sqrt{x}}{11}\Big|_0^4 = \frac{6}{176}x^5\sqrt{x}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{6}{176}\cdot 2048 = \frac{12\,288}{176} = 69{,}82$$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = 69{,}82 - 47{,}06 = 22{,}76$$

Відповідь: $A = \frac{3}{16}$; $M\eta = 6{,}86$; $D\eta = 22{,}76$.

Кириллюк