МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Кафедра ОМП

Звіт

до розрахунково-графічної роботи **№ 1**

з дисципліни: “**Алгебра і геометрія**.”

Варіант № 11

Виконав:

ст. гр. ПП-12

Кирилюк Дмитро

Перевірив:

доцент каф. ОМП

Пахолок Б. Б.

Львів-2023

__Завдання 1__. ***Для даного визначника:***

а) знайти мінори та алгебричні доповнення елементів a_{ij};

б) обчислити визначник, розкладаючи його за елементами i-го рядка;

в) обчислити визначник, розкладаючи за елементами j-го стовпця;

г) обчислити визначник, утворивши попередньо нулі в i-му рядку.

1.11 $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=2$

а) M_{22} – ?; A_{22} – ?

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -12+4+0-0+18-8 = -8+10 = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2$$

б) $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3+0+2-0-0+2 = 7$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -12+4+0-0+18-8 = -8+10 = 2$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0+2+0-0+9+4 = 15$$

$$M_{24} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0-6+2-0-6+4 = -6$$

$$2\cdot(-7) + (-1)\cdot 2 + 2\cdot(-15) + 3\cdot(-6) = -14-2-30-18 = -64$$

в) $a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 18 - 6 + 18 + 4 =$$
$$= 44$$

$$M_{22} = 2$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 0 + 12 - 0 - 12 - 24 =$$
$$= -48$$

$$M_{42} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 0 - 18 - 0 - 4 + 12 =$$
$$= -18$$

$$1 \cdot (-44) + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-48) + 1 \cdot (-18) =$$
$$= -44 - 2 - 18 = -64$$

2)
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (1) \cdot (-1) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{vmatrix} \cdot (0,6) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6,4 \end{vmatrix} = -64$$

<u>Завдання 2</u>. Дано дві матриці A та B. Знайти:

а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

2.11

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

а) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -2 & -28 & 14 \\ 3 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

б) $$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 \\ 18 & -18 & 22 \\ 4 & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

в) $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 16 + 6 - 16 - 16 + 2 - 48 = -10 - 46 = -56$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-4) = 8$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+8) = -7$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(8-1) = -7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(24+8) = -32$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 2 = -18$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{56} \begin{pmatrix} -8 & -7 & -10 \\ 8 & 0 & -32 \\ 8 & -7 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{5}{28} \\ -\frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{9}{28} \end{pmatrix}$$

г) $$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{5}{28} \\ -\frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{9}{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

д) $$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Завдання 3</u>. Перевірити на сумісність систему рівнянь і, у випадку сумісності, розв'язати її:

а) за формулами Крамера;

б) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);

в) за методом Гауса.

$$\textbf{3.11.} \quad \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$$

Перевірка на сумісність:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_1 = 7 \neq 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2 \neq 0$$

$$\Delta = M_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 24 + 9 + 4 - 12 + 63 = 102 \neq 0$$

$$\operatorname{rang} A = 3$$

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -1 & 13 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \end{array}\right); \quad M_1 = 7 \neq 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2 \neq 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 102 \neq 0$$

$$\operatorname{rang} A_p = 3$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p = 3$. Система сумісна.

а) $n = m$;

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 24 + 9 + 4 - 12 + 63 = 102 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{102}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{102}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{102}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 26 - 120 + 9 - 20 - 12 + 117 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 13 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & -10 & 1 \end{vmatrix} = 21 + 78 + 30 + 6 - 39 + 210 = 306$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 13 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -10 \end{vmatrix} = -140 + 24 - 117 - 52 + 120 + 63 = -102$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{306}{102} = 3, \quad x_3 = \frac{-102}{102} = -1$$

Перевірка:

$0 + 12 - (-1) = 13$

$0 + 6 - 3 = 3$

$0 - 9 - 1 = -10$

б) $n = m$, $\det A \neq 0$

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 29$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -24$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{102}\begin{pmatrix} 11 & -1 & 14 \\ 3 & 9 & -24 \\ -13 & 29 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{102}\begin{pmatrix} 11 & -1 & 14 \\ 3 & 9 & -24 \\ -13 & 29 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{102}\begin{pmatrix} 0 \\ 306 \\ -102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

в) $$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 & \big| \cdot(-3) \cdot (-2) \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 & \big| \cdot 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 & \big| \cdot 7 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 2x_2 + 24x_3 = -18 & \big| \cdot 29 \\ -29x_2 + 9x_3 = -96 & \big| \cdot 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 2x_2 + 24x_3 = -18 \\ 714x_3 = -714 \end{cases}$$

$x_3 = -1$; $2x_2 = -18 + 24 = 6$;

$x_2 = 3$; $7x_1 = 13 - 1 - 12 = 0$;

$x_1 = 0$.

Завдання 4. Розв'язати матричне рівняння $AXB = C$, якщо:

4.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.11. $AXB = C$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C; \quad X \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}; \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -18 & -16 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -38 & 80 \\ 19 & -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}75 & 10 \\ 2{,}375 & -5{,}5 \end{pmatrix}$$

<u>Завдання 5</u>. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь.

$$\textbf{5.11.}\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

5.11.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \Big| \cdot (-5) \cdot (-3) \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 & \Big| \cdot 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 & \quad \Big| \cdot 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 - 7x_3 = 0 \\ -2x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = c$; $2x_2 = -7c$; $x_2 = -\frac{7c}{2} = -3{,}5c$

$2x_1 = x_3 - 2x_2 = c + 7c = 8c$; $x_1 = 4c$

Завдання 6. Знайти скалярний та векторний добутки векторів $\vec{m}$ та $\vec{n}$, косинус та синус кута між ними, а також $\text{пр}_{\vec{m}}\vec{n}$, якщо:

6.11. $\vec{a} = (1; 3; -4),\ \vec{b} = (2; 3; -2),\ \vec{m} = 2\vec{a} + 4\vec{b},\ \vec{n} = 3\vec{a} - \vec{b}.$

$$\vec{m} = (2, 6, -8) + (8, 12, -8) = (10; 18; -16)$$

$$\vec{n} = (3, 9, -12) - (2, 3, -2) = (1, 6, -10)$$

1) $(\vec{m}, \vec{n}) = 10 + 108 + 160 = 278$

2) $[\vec{m}, \vec{n}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 18 & -16 \\ 1 & 6 & -10 \end{vmatrix} = -84\vec{i} + 84\vec{j} + 42\vec{k} =$

$= (-84, 84, 42)$

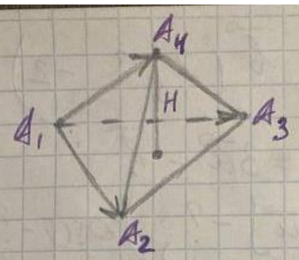
3) $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{m}, \vec{n})}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{278}{\sqrt{680} \cdot \sqrt{137}} = \dfrac{139\sqrt{23\,290}}{23\,290}$

4) $\sin\varphi = \dfrac{|[\vec{m}, \vec{n}]|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{15\,876}{\sqrt{680} \cdot \sqrt{137}} = \dfrac{3969\sqrt{23\,290}}{11\,645}$

5) $\text{пр.}_{\vec{m}}\,\vec{n} = \dfrac{(\vec{m}, \vec{n})}{|\vec{m}|} = \dfrac{278}{\sqrt{680}} = \dfrac{139\sqrt{170}}{170}$

Завдання 7. ***Вершини піраміди знаходяться в точках A_1, A_2, A_3 та A_4. Знайти площу грані $A_1A_2A_3$, висоту піраміди, опущеної з точки A_4, а також об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.***

7.11.



$A_1(-1, -2, -3)$

$A_2(3, 0, 0)$

$A_3(3, -2, -5)$

$A_4(4, 0, 0)$

1) $S_{\Delta A_1A_2A_3}$ - ?, 2) H - ?, 3) $V_{A_1A_2A_3A_4}$ - ?

$$\overline{A_1A_2} = (4, 2, 3)$$

$$\overline{A_1A_3} = (4, 0, -2)$$

$$[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 20\bar{j} - 8\bar{k}$$

$$|[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}]| = \sqrt{16 + 400 + 64} = 4\sqrt{30}$$

1) $S_{\Delta A_1A_2A_3} = 2\sqrt{30}$

$$\overline{A_1A_4} = (5, 2, 3)$$

$$(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -20 + 24 - 24 + 16 = -4$$

3) $V = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$

2) $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$; $H = \frac{3V}{S_{осн}} = \frac{2}{2\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$

<u>Завдання 8</u>. Чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Якщо вектори некомпланарні, то яку трійку вони утворюють?

8.11. $\bar{a}(-2, 3, 1)$, $\bar{b}(2, 1, -2)$, $\bar{c}(-1, -2, 0)$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0+6-4+1-0+8 = 11$$

$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0 \Rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некомпланарні й утворюють праву трійку.

<u>Завдання 9</u>. Довести, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворюють базу, та знайти координати вектора $\vec{x}$ в цій базі, якщо:

9.11. $\vec{e_1}(1, 1, -1)$, $\vec{e_2}(3, 2, -1)$, $\vec{e_3}(4, -1, 2)$

$\vec{x}(8, -2, 2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-4+3+8-6-1 = 4 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ утв. базу

$$\vec{x} = \alpha \cdot \vec{e_1} + \beta \cdot \vec{e_2} + \gamma \cdot \vec{e_3}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 4\gamma = 8 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = -2 \mid \cdot(-1) \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 4\gamma = 8 \\ \beta + 5\gamma = 10 \mid \cdot(-2) \\ 2\beta + 6\gamma = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 4\gamma = 8 \\ \beta + 5\gamma = 10 \\ -4\gamma = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \\ \beta = 10 - 5\gamma = \frac{20}{2} - \frac{25}{2} = -\frac{5}{2} \\ \alpha = 8 - 3\beta - 4\gamma \end{matrix}$$

$$\alpha = 8 + \frac{15}{2} - \frac{20}{2} = \frac{31}{2} - \frac{20}{2} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$$

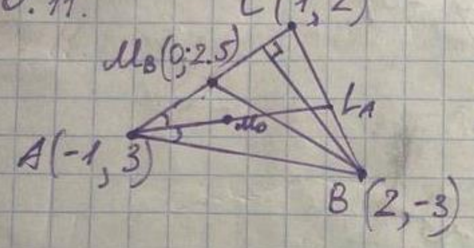
$$\vec{x} = 2\frac{1}{2} \cdot \vec{e_1} - 2\frac{1}{2} \cdot \vec{e_2} + 5\frac{1}{2} \cdot \vec{e_3}$$

$$\vec{x}\left(2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$$

<u>Завдання 10</u>. Записати рівняння медіани та висоти, довжину медіани та висоти, проведені в трикутнику ABC з вершини B, а також рівняння бісектриси кута A, якщо:

10.11. $A(-1;3),\ B(2;-3),\ C(1;2).$

10.11.



$M_B(0;2.5)$

$BM_B: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{5,5}$

$5,5x-11=-2y-6$

$5,5x+2y-5=0$

$BM_B:\ 11x+4y-10=0$ – р-ня медіани т. B

$AC: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1};\ -x-1=2y-6$

$AC:\ x+2y-5=0$

$h_B: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2};\ 2x-4=y+3$

$h_B:\ 2x-y-7=0$ – р-ня висоти т. B

$|BM_B| = \sqrt{(-2)^2+5,5^2} = \sqrt{34,25}$ – довж. медіани т. B

$|h_B| = d(B,AC) = \frac{|2-6-5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ – довж. висоти т. B

$AB: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-6};\ -6x-6=3y-9;\ 6x+3y-3=0$

$AB:\ 2x+y-1=0$

$AB: 2x+y-1=0$; $AC: x+2y-5=0$

$M_0(x_0, y_0)$

$$d(M_0, AB) = \frac{|2x_0+y_0-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$$d(M_0, AC) = \frac{|x_0+2y_0-5|}{\sqrt{1+4}}$$

$$|2x+y-1| = |x+2y-5|$$

1. $2x+y-1 = x+2y-5$

1. $x-y+4=0$

2. $2x+y-1 = -x-2y+5$

$3x+3y-6=0 \quad |:3$

2. $x+y-2=0$

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

$1-1=0$

$$\delta(B, 1.) = \frac{2+3+4}{\sqrt{\dots}} = \frac{9}{\sqrt{\dots}} > 0$$

$$\delta(C, 1.) = \frac{1-2+4}{\sqrt{\dots}} = \frac{3}{\sqrt{\dots}} > 0$$

$$\delta(B, 2.) = \frac{2-3-2}{\sqrt{\dots}} = \frac{-3}{\sqrt{\dots}} < 0$$

$$\delta(C, 2.) = \frac{1+2-2}{\sqrt{\dots}} = \frac{1}{\sqrt{\dots}} > 0$$

$L_A: x+y-2=0$ – р-ня бісектриси т. A

***Завдання 11*. Дослідити взаємне розташування прямих L_1 та L_2:**

а) якщо прямі паралельні, то знайти відстань між ними;

б) якщо прямі перетинаються, то знайти кут між ними та точку їх перетину.

11.11. $L_1: 2x-3y+1=0$; $L_2: -x-y+4=0$

Умова паралельності: $\frac{2}{-1} \neq \frac{-3}{-1}$

$$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ -x-y+4=0 \quad |\cdot 2 \end{cases} \qquad + \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ -2x-2y+8=0 \end{cases}$$

$-5y+9=0$; $5y=9$; $y=1,8$

$x=-y+4=-1,8+4=2,2$

$(2.2; 1.8)$ – точка перетину L_1 і L_2.

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} = \frac{-2+3}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{26}}{26}\right)$ – кут між L_1 і L_2

Завдання 12. *Знайти:*

а) рівняння площини π, що проходить через точки $M_1,\ M_2,\ M_3$;

б) рівняння прямої L, що проходить через точки $M_0,\ M_1$;

в) відстань від точки M_0 до площини π та відстань від точки M_2 до прямої L;

г) рівняння площини, яка паралельна π, та проходить через точку M_0;

д) загальне рівняння прямої L;

е) проекцію точки M_0 на площину π та точку, симетричну точці M_0 відносно π;

є) проекцію точки M_2 на пряму L та точку, симетричну точці M_2 відносно L;

ж) кут між площиною π та прямою L.

12.11. $M_1(2,1,4),\ M_2(3,5,-2),\ M_3(-7,-3,2),\ M_0(-3,1,8)$.

а) $$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ 1 & 4 & -6 \\ -9 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (x-2)\cdot(-32) - (y-1)\cdot(-56) + (z-4)\cdot 32 = 0$$

$$-32x + 64 + 56y - 56 + 32z - 128 = 0$$

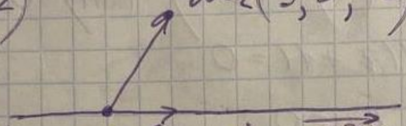
$$-32x + 56y + 32z - 120 = 0 \quad | :(-8)$$

$$\pi:\ 4x - 7y - 4z + 15 = 0$$

б) $$L:\ \frac{x+3}{2+3} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-8}{4-8},\quad L:\ \frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-8}{-4}$$

в) 1) $$d(M_0, \pi) = \frac{|4(-3) - 7 - 4\cdot 8 + 15|}{\sqrt{16+49+16}} = \frac{|-12-7-32+15|}{\sqrt{81}} = \frac{36}{9} = 4$$

в) 2) $M_2(3, 5, -2)$ $\quad \overline{M_0M_2}(6, 4, -10)$



$L \quad M_0(-3, 1, 8) \quad \vec{s}(5, 0, -4)$

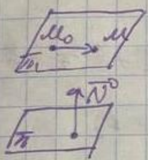
$$d(M_2, L) = \frac{\left|\left[\overline{M_0M_2}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|}$$

$$\left[\overline{M_0M_2}, \vec{s}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 4 & -10 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i}(-16) - \bar{j}\cdot 26 + \bar{k}\cdot(-20) =$$

$$= -8\bar{i} - 13\bar{j} - 10\bar{k}$$

$$d(M_2, L) = \frac{\sqrt{64+169+100}}{\sqrt{25+16}} = \frac{\sqrt{333}}{\sqrt{41}}$$

г)



$\pi_1 \parallel \pi \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$

$\overrightarrow{M_0M}(x+3, y-1, z-8)$

$\vec{N}(4, -7, -4)$

$4(x+3) - 7(y-1) - 4(z-8) = 0$

$4x + 12 - 7y + 7 - 4z + 32 = 0$

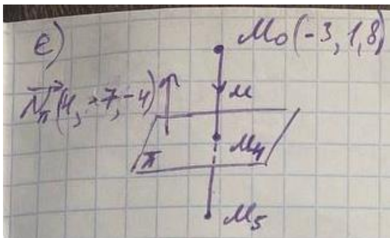
$\pi_1: 4x - 7y - 4z + 51 = 0$

д) $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-8}{-4}$

$\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{0}$, $\quad \frac{x+3}{5} = \frac{z-8}{-4}$

$$\begin{cases} 5y - 5 = 0 \\ -4x - 12 = 5z - 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 1 = 0 \\ 4x + 5z - 28 = 0 \end{cases}$$

e)



$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-8}{-4}$$

$$\begin{cases} x=4t-3 \\ y=-7t+1 \\ z=-4t+8 \\ 4x-7y-4z+15=0, \end{cases}$$

$$16t-12+49t-7+16t-32+15=0$$

$$81t=36;\quad t=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$$

$$x=\frac{16}{9}-3=-\frac{11}{9};\quad y=-\frac{28}{9}+1=-\frac{19}{9};$$

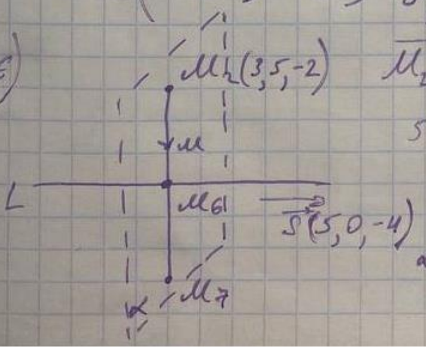
$$z=-\frac{16}{9}+8=\frac{56}{9}$$

$$M_4\left(-\frac{11}{9},-\frac{19}{9},\frac{56}{9}\right)$$

$$\frac{M_0+M_5}{2}=M_4;\quad M_5=2M_4-M_0=\left(-\frac{22}{9}+3;-\frac{38}{9}-1;\frac{112}{9}-8\right)$$

$$M_5\left(-\frac{5}{9},-\frac{47}{9},\frac{40}{9}\right)$$

ε)



$\overrightarrow{M_2M} \perp \vec{s}$; $\overrightarrow{M_2M}(x-3,y-5,z+2)$

$$5(x-3)-4(z+2)=0$$

$$5x-15-4z-8=0$$

$$\alpha: 5x-4z-23=0$$

$$\begin{cases} x = 5t - 3 \\ y = 1 \\ z = -4t + 8 \\ 5x - 4z - 23 = 0 \end{cases}$$

$$25t - 15 + 16t - 32 - 23 = 0$$

$$41t = 70 \;, \; t = \frac{70}{41}$$

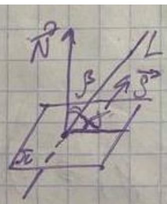
$$x = \frac{350}{41} - 3 = \frac{227}{41} \;, \quad z = -\frac{280}{41} + 8 = \frac{48}{41}$$

$$M_6\left(\frac{227}{41}, 1, \frac{48}{41}\right)$$

$$\frac{M_2 + M_7}{2} = M_6 \Rightarrow M_7 = 2M_6 - M_2 = \left(\frac{454}{41} - 3, 2 - 5, \frac{96}{41} + 2\right)$$

$$M_7\left(\frac{331}{41}, -3, \frac{178}{41}\right)$$

ж)



$$\cos\beta = \frac{20 - 0 + 16}{\sqrt{16+49+16}\cdot\sqrt{25+16}} = \frac{36}{9\cdot\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}} = \sin\gamma$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$$

Завдання 13.

а) Довести, що прямі L_1 та L_2 є мимобіжними;

б) записати рівняння площини, що проходить через L_1, паралельно до L_2;

в) обчислити відстань між L_1 та L_2;

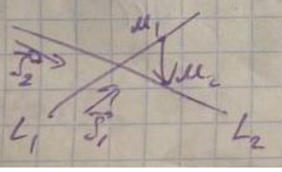
г) записати рівняння спільного перпендикуляра до прямих L_1 та L_2.

13.11. $L_1: \ x = 2t+3, \ y = -t, \ z = 4t+1, \quad L_2: \ \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-3}$.

а) L_1 і L_2 мимобіжні, якщо $L_1 \not\parallel L_2$ і L_1 не перетинається з L_2.

$L_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{4}$

$\dfrac{0}{2} \neq \dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{-3}{4} \Rightarrow L_1 \not\parallel L_2$



$M_1(3, 0, 1), \ M_2(1, -2, 3)$

$\overrightarrow{M_1M_2}(-2, -2, 2)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 0 - 0 - 12 + 8 = -6 \neq 0 \Rightarrow$$

L_1 мимобіжна з L_2.

б)

$\overrightarrow{M_0M}(x-3, y, z-1)$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

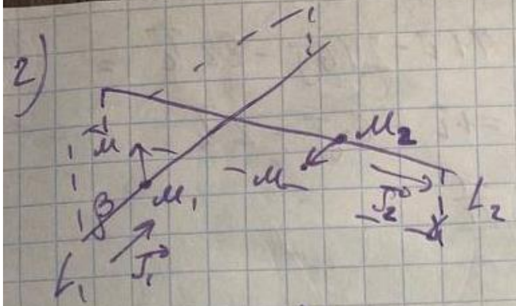
$(x-3)\cdot(-1) - y\cdot(-6) + (z-1)\cdot 2 = 0$

$-x + 3 + 6y + 2z - 2 = 0$

$\alpha: x - 6y - 2z - 1 = 0$

в) $d(M_2, \alpha) = \dfrac{|1 + 12 - 6 - 1|}{\sqrt{1 + 36 + 4}} = \dfrac{6}{\sqrt{41}} = \dfrac{6\sqrt{41}}{41}$

2)



$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)\cdot 26 - y\cdot(-8) + (z-1)\cdot(-11) = 0$$

$$26x - 78 + 8y - 11z + 11 = 0$$

$$\beta:\ 26x + 8y - 11z - 67 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\cdot(-20) - (y+2)\cdot 3 + (z-3)\cdot(-1) = 0$$

$$-20x + 20 - 3y - 6 - z + 3 = 0$$

$$\gamma:\ 20x + 3y + z - 17 = 0$$

$$\begin{cases} 26x + 8y - 11z - 67 = 0 \\ 20x + 3y + z - 17 = 0 \end{cases}$$