КНУ Київський Національний Університет
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Випускна кваліфікаційна робота магістра

Якісний і чисельний аналіз рівнянь розподіленого порядку

Керівник: Гуляницький А. Л.
Виконав: Тимоханов Д. О.

19 травня 2020 р.

Зміст

Рівняння субдифузії розподіленого порядку

Рівняння дифузії

Розглянемо спершу звичне рівняння дифузії:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \sigma^2 \cdot \Delta u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

Добре відомо, що при $f \equiv 0$ середньоквадратичне відхилення частинок є лінійним в часі. На жаль, не всі дифузійні процеси мають цю властивість [?]. Тому рівняння (1) не підходить для моделювання будь-якої дифузії.

Рівняння субдифузії

Зміна фізичних припущень призводить [?] до так званого рівняння субдифузії:

$$ {}^{C}\mathrm{D}_0^{\alpha} u(x,t) = \sigma^2 \cdot \Delta u(x,t) + f(x,t) \tag{2} $$

де $0 < \alpha < 1$, ${}^{C}\mathrm{D}_0^{\alpha}$ — оператор дробового диференціювання Капуто:

$$ {}^{C}\mathrm{D}_0^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_s'(x,s)}{(t-s)^{\alpha}} \, \mathrm{d}s, \;\; 0 < \alpha < 1 \tag{3} $$

При $f \equiv 0$ рівняння (2) призводить до середньоквадратичного відхилення частинок, що зростає в часі як t^{α}. Звідси одразу видно важливу властивість субдифузії — нелокальність в часі.

Рівняння субдифузії розподіленого порядку

Але й субдифузійна модель не здатна моделювати всі дифузійні процеси. Одне з узагальнень цієї моделі — субдифузія розподіленого порядку:

$$\int_0^1 p(s) \cdot \tau^\alpha \cdot {}^{C}\mathrm{D}_0^\alpha u(x,t)\,\mathrm{d}\alpha = \sigma^2 \cdot \Delta u(x,t) + f(x,t) \tag{4}$$

тут $p(\cdot)$ — щільність розподілу порядку похідної. За рахунок вибору цієї щільності можна забезпечити, що середньоквадратичне відхилення частинок зростатиме як $(\log t)^v$ [], що узгоджується з експериментальними результатами. Така дифузія називається суперповільною.

Рівняння субдифузії розподіленого порядку

Розглядатимемо рівняння розподіленого порядку (4) разом з початковою та крайовою умовою в області $\Omega \times I$:

$$u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in \Omega \tag{5}$$

$$u(x,t)|_{x\in\partial\Omega} = 0 \ \ \forall t \in I \tag{6}$$

Про щільність $p(\cdot)$ приймаємо такі припущення:

- $p(\alpha) = p_{reg}(\alpha) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot \delta(\alpha - \alpha_i)$,
- $p_{reg} \in L^1((0;1))$, $p_{reg}(\alpha) \geq 0$ для майже всіх $\alpha \in (0;1)$, $\forall i \in \mathbb{N} \ \ p_i \geq 0$,
- $\exists \epsilon > 0: \ \operatorname{supp} p_{reg} \in [0; 1-\epsilon]$, $\forall i \in \mathbb{N} \ \ 0 < \alpha_i < 1 - \epsilon$,
- $\int_0^1 p_{reg}(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Простори Соболєва розподіленого порядку

Простори Соболєва

Означення

Простір Соболєва порядку $\alpha \in (0;1)$:

$$H^\alpha(I) = \left\{ v(t) \mid v \in L^2(I); \mathrm{D}_0^\alpha v \in L^2(I) \right\} \tag{7}$$

з нормою

$$\|v\|_\alpha = \left(\|v\|_{L^2(I)}^2 + \|\mathrm{D}_0^\alpha v\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

в цьому означенні D_0^α — оператор диференціювання Рімана-Ліувілля:

$$\mathrm{D}_0^\alpha u(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha} \mathrm{d}s \right), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{9}$$

Простори Соболєва розподіленого порядку

Природно спробувати узагальнити означення простору Соболєва на розподілені порядки:

Означення

Простір Соболєва розподіленого порядку зі щільністю $p(\cdot)$:

$$H^{p(\cdot)}(I) = \left\{ v(t) \mid \forall \alpha \in \left[0; \frac{\alpha_{max}}{2}\right) v \in H^{\alpha}(I); \|v\|_{p(\cdot)} < \infty \right\} \tag{10}$$

з нормою

$$\|v\|^2_{p(\cdot)} = \int_0^1 p(\alpha) \cdot \|v\|^2_{\frac{\alpha}{2}} \, \mathrm{d}\alpha \tag{11}$$

Простори розподіленого порядку на шкалі Соболєва

Позначимо:

$$\alpha_{max} = \max\left\{\operatorname{esssup}\{\operatorname{supp} p_{reg}(\alpha)\}, \sup_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i\right\} \tag{12}$$

З припущень про щільність, $\alpha_{max} < 1$.

Лема

Мають місце вкладення:

$$\forall\alpha \in \left[0; \frac{\alpha_{max}}{2}\right) \; H^{\frac{\alpha_{max}}{2}}(I) \subseteq H^{p(\cdot)}(I) \subseteq H^{\alpha}(I) \tag{13}$$

В загальному випадку ці вкладення строгі.

Простори Соболєва розподіленого порядку

Простори розподіленого порядку мають такі властивості:

Лема

$H^{p(\cdot)}(I)$ є повним простором.

Лема

$C_0^\infty(I)$ — щільна в $H^{p(\cdot)}(I)$ множина.

Іншими словами, простір $H^{p(\cdot)}(I)$ можна ототожнити з поповненням $C_0^\infty(I)$ за нормою $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$.

Альтернативне означення розподіленої норми

Виділення

Можна виділяти слова в тексті.

Важливе повідомлення

Дуже важливо.

Можна навіть використати колір теми.

Списки

- Просто елемент списку.

1. Нумерований елемент списку.

Важливо підсвічує сірим текстом.

Приклад

- Списки змінюють колір після зміни середовища.

Список літератури I

R. Hartshorne.
Algebraic Geometry.
Springer-Verlag, 1977.

M. Artin.
On isolated rational singularities of surfaces.
Amer. J. Math., 80(1):129–136, 1966.

R. Vakil.
The moduli space of curves and Gromov–Witten theory, 2006.
http://arxiv.org/abs/math/0602347

Список літератури II

- M. Atiyah og I. Macdonald.
  Introduction to commutative algebra.
  Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969

[5] J. Fraleigh.
A first course in abstract algebra.
Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1967

КНУ Київський Національний Університет
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Тимоханов Д. О.

Випускна кваліфікаційна робота магістра

Якісний і чисельний аналіз рівнянь розподіленого порядку