

# Tirocinio di Teoria dei Sistemi – Compito 2

Si consideri un sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(t) \in \mathbb{R},$$

descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si scelgano alcune coppie di valori per  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ; ottenendo casi diversi per lo spettro di  $A$ :

- due autovalori reali e distinti, entrambi negativi,
- due autovalori reali e distinti, uno negativo e uno non negativo,
- due autovalori complessi coniugati ...

1) Calcolare l'espressione della matrice Gramiana di raggiungibilità nei casi prescelti, eventualmente aiutandosi con programmi di calcolo simbolico quali Maxima, Mathematica o altro; occorre esprimere la Gramiana sotto forma reale, senza utilizzare coefficienti complessi.

2) Per ciascuno dei casi individuati, scegliere un ingresso  $u_0(\cdot)$ , e trovare la risposta forzata  $\bar{x}$  al tempo  $\bar{t}$  a tale ingresso ( $\bar{x} = \phi(\bar{t}, 0, u_0(\cdot))$ ). Eseguire questo passo direttamente tramite simulazione in Matlab, ottenendo così un valore approssimato per  $\bar{x}$ .

3) Per ciascuno dei casi individuati, utilizzando l'espressione della matrice Gramiana calcolata al punto 1), per un insieme di tempi  $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  (che includa  $\bar{t}$ ) calcolare il controllo  $u_{T_i}^*(\cdot)$  che, partendo da  $x(0) = 0$ , ottiene  $x(T_i) = \bar{x}$ , minimizzando l'indice di costo:

$$J_{T_i}(u) = \int_0^{T_i} \|u(\tau)\|_2^2 d\tau.$$

È possibile eseguire questo passo numericamente in Matlab.

4) Attraverso simulazione in Matlab, valutare l'effetto degli ingressi di controllo ottimi calcolati al punto 3), calcolando numericamente i corrispondenti valori dell'indice di costo. Visualizzare l'andamento di  $J_{T_i}(u^*)$ , al variare di  $T_i$  in  $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ , confrontandolo con  $J_{\bar{t}}(u_0)$ . Visualizzare anche, per alcuni casi scelti, gli andamenti di  $u^*(\cdot)$  e della corrispondente risposta nello stato  $x^*(\cdot)$ , nel tempo, ma anche nel piano degli stati, nell'intervallo  $[0, T_i]$ .

Nota: indipendentemente dai programmi software utilizzati, si richiede un risultato esatto per il solo punto 1).