

Rozkład Normalny: Podstawy i Właściwości

Gabriel Tyszka

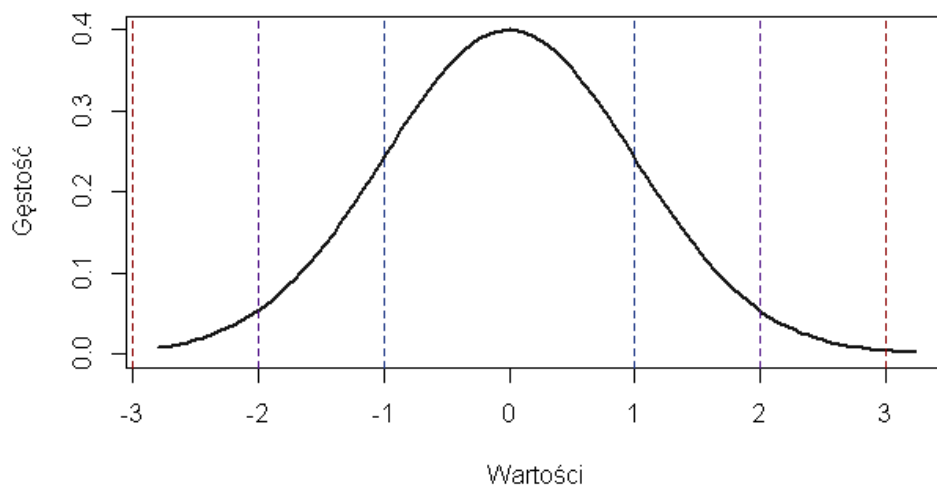
25 czerwca 2025

Spis treści

1	Wprowadzenie do Rozkładu Normalnego	1
2	Podstawowe Właściwości Rozkładu Normalnego	1
2.1	Reguła 3 sigm	2
3	Wzór Rozkładu Normalnego	2
4	Zastosowania Rozkładu Normalnego	3

1 Wprowadzenie do Rozkładu Normalnego

Rozkład normalny jest najczęściej spotykaną formą rozkładu zmiennych losowych i stanowi fundament statystyki i teorii prawdopodobieństwa. Nazywany jest również **rozkładem Gaussa** lub **krzywą dzwonową** (ang. Bell Curve).



2 Podstawowe Właściwości Rozkładu Normalnego

Rozkład normalny charakteryzuje się kilkoma kluczowymi właściwościami:

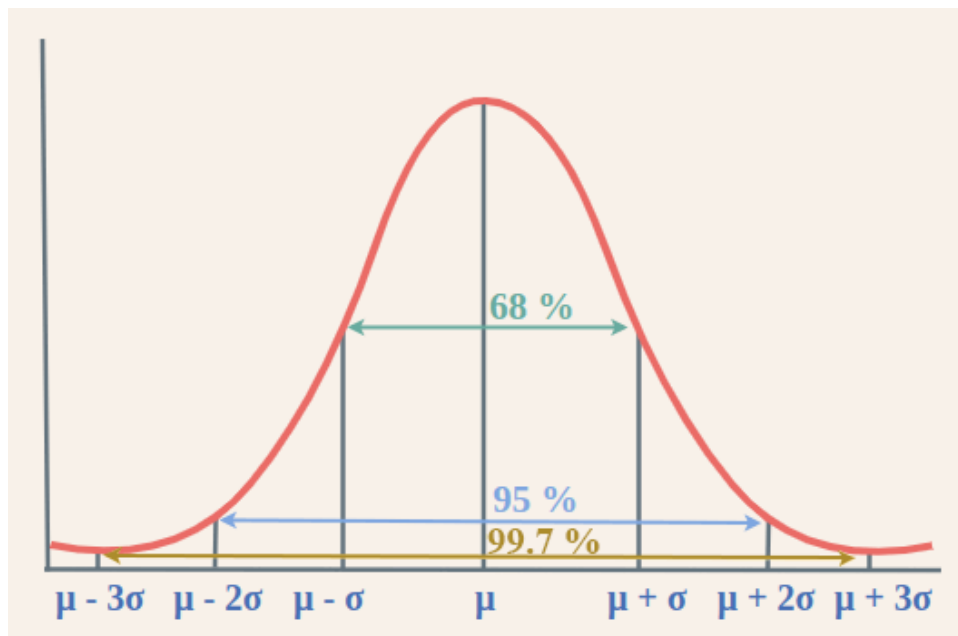
- **Symetria:** Rozkład normalny jest **symetryczny względem wartości oczekiwanej** μ . Lewa i prawa część rozkładu są lustrzanymi odbiciami siebie, a dane rozkładają się równomiernie wokół średniej wartości.
- **Średnia, Mediana i Moda:** W rozkładzie normalnym **średnia (mean), mediana (median) i dominanta (moda)** są równe i równe wartości oczekiwanej μ . Wszystkie te miary tendencji centralnej pokrywają się, co oznacza, że największe zagęszczenie danych występuje wokół średniej.
- **Modalność:** Rozkład normalny jest **jednomodalny**, co oznacza, że posiada dokładnie jedno maksimum – punkt, w którym funkcja gęstości osiąga wartość największą.

- **Pole pod krzywą:** Całkowite pole pod krzywą funkcji gęstości rozkładu normalnego wynosi **1**, co oznacza, że całkowite prawdopodobieństwo rozkładu wynosi 100%.
- **Reguła trzech sigm:** Przybliżone rozmieszczenie danych wokół średniej wyznacza tzw. **reguła 68-95-99,7**, która mówi, że:
 - około **68%** obserwacji znajduje się w przedziale jednego odchylenia standardowego od średniej ($\mu \pm \sigma$),
 - około **95%** obserwacji mieści się w przedziale dwóch odchyliń standardowych ($\mu \pm 2\sigma$),
 - około **99,7%** obserwacji mieści się w przedziale trzech odchyliń standardowych ($\mu \pm 3\sigma$).
- **Transformacje liniowe:** Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład normalny, to każda transformacja liniowa postaci $Y = aX + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$, również ma rozkład normalny.

2.1 Reguła 3 sigm

Odchylenie standardowe dzieli obszar krzywej normalnej na mniejsze części, a każda część określa procent danych, które mieszczą się w określonym regionie. Ta zasada jest również nazywana „regułą 3 sigm”.

- Około **68%** danych mieści się w granicach **jednego odchylenia standardowego** od średniej.
- Około **95%** danych mieści się w granicach **dwóch odchyliń standardowych** od średniej [4, 10].
- Około **99.7%** danych mieści się w granicach **trzech odchyliń standardowych** od średniej.



3 Wzór Rozkładu Normalnego

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa standardowego rozkładu normalnego (gdzie średnia $\mu = 0$ i odchylenie standardowe $\sigma = 1$) ma elegancką postać:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ogólny rozkład normalny, z parametrami μ (średnia) i σ (odchylenie standardowe), ma postać:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Znaczenie parametrów:

- μ : kontroluje położenie (przesunięcie w lewo/prawo) wykresu, czyli średnią rozkładu.
- σ : kontroluje rozciągnięcie lub ściśnięcie wykresu w poziomie, czyli odchylenie standardowe rozkładu.
- Czynniki $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ jest czynnikiem normalizującym, który zapewnia, że **całkowite pole pod krzywą wynosi 1**, co jest konieczne dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

4 Zastosowania Rozkładu Normalnego

Rozkład normalny jest szeroko stosowany w wielu dziedzinach do modelowania i analizowania szerokiego zakresu zjawisk. Przykłady danych, dla których można zastosować rozkład normalny, obejmują:

- Rozkład wzrostu ludzi.
- Rozkład błędów w dowolnym pomiarze.
- Rozkład ciśnienia krwi pacjentów.

Jest powszechnie stosowany w finansach, inżynierii, naukach przyrodniczych i społecznych.