Relacje Matematyczne

Gabriel Tyszka

26 czerwca 2025

Spis treści

1 Wprowadzenie do Relacji

Definicja: Relacją binarną z zbioru A do zbioru B nazywamy podzbiór $R \subseteq A \times B$.
Jeśli $(a, b) \in R$, mówimy, że a jest w relacji z b przez R.
A nazywamy *dziedziną* relacji R, a B — *przeciwdziedziną*.
Jeśli $A = B$, to relację R nazywamy *relacją binarną na zbiorze* A.

Oznaczenia:

- Jeśli $(a, b) \in R$, to zapisujemy aRb.
- Jeśli $(a, b) \notin R$, to zapisujemy aRb.

Omówienie

Zauważ, że relacja to po prostu podzbiór $A \times B$. Jeżeli $(a, b) \in R$, gdzie R jest relacją z A do B, to interpretujemy to tak, że a jest przyporządkowane do b. W tym sensie często można kojarzyć relacje z funkcjami.

W rzeczywistości funkcja jest szczególnym przypadkiem relacji.

Należy jednak uważać, ponieważ relacja może różnić się od funkcji na dwa sposoby. Jeżeli R jest dowolną relacją z A do B, to:

- Możliwe jest, że $(a, b) \in R$ oraz $(a, b') \in R$, gdzie $b' \neq b$, tzn. jeden element ze zbioru A może być powiązany z wieloma elementami ze zbioru B;
- Możliwe jest, że jakiś element $a \in A$ nie jest powiązany z żadnym elementem ze zbioru B.

1.1 Przykłady Relacji

Rozważmy następujące przykłady relacji w matematyce:

- Jeśli mamy zbiory $\mathbf{A = \{1, 2, 3, 4\}}$ i $\mathbf{B = \{1, 4, 9, 16\}}$. Relacja R ze zbioru A do zbioru B jest zdefiniowana regułą: $\mathbf{y = x^2}$. W postaci par uporządkowanych wyglądałaby ona następująco: $\mathbf{R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}}$.
- Inny przykład to zbiory $\mathbf{X = \{4, 36, 49, 50\}}$ i $\mathbf{Y = \{1, -2, -6, -7, 7, 6, 2\}}$. Relacja R, która stwierdza, że "(x, y) jest w relacji R, jeśli x jest kwadratem y", może być przedstawiona za pomocą par uporządkowanych: $\mathbf{R = \{(4, -2), (4, 2), (36, -6), (36, 6), (49, -7), (49, 7)\}}$.

1.2 Relacja Porządku

Aby relacja była uznana za **relację częściowego porządku** (ang. Partial Order), musi spełniać trzy warunki:

- **Zwrotność:** (a, a) $\in$ R dla każdego a $\in$ A (a jest w relacji z samym sobą).
- **Antysymetryczność:** Jeśli (a, b) $\in$ R i (b, a) $\in$ R, to a = b.
- **Przechodniość:** Jeśli (a, b) $\in$ R i (b, c) $\in$ R, to (a, c) $\in$ R dla wszystkich a, b, c $\in A$ (jeśli a jest w relaji z b i b jest w relacji z c to a jest w relacji z c).

Przykład relacji porządku (częściowego): Rozważmy relację **R = {(a, b) | a jest wielokrotnością b}** na zbiorze liczb całkowitych dodatnich.

- Jest to relacja **zwrotna**, ponieważ każda liczba jest wielokrotnością samej siebie (np. 5 jest wielokrotnością 5).
- Jest to relacja **antysymetryczna**, ponieważ jeśli a jest wielokrotnością b, a b jest wielokrotnością a, to a musi być równe b (np. jeśli 6 jest wielokrotnością 3, to 3 nie jest wielokrotnością 6; jeśli 6 jest wielokrotnością 6, a 6 jest wielokrotnością 6, to 6=6).
- Jest to relacja **przechodnia**. Jeśli a jest wielokrotnością b (np. 12 jest wielokrotnością 4), a b jest wielokrotnością c (np. 4 jest wielokrotnością 2), to a jest wielokrotnością c (12 jest wielokrotnością 2).