Przestrzenie Metryczne: Definicja i Przykłady

Gabriel Tyszka

21 czerwca 2025

Spis treści

1 Definicja Metryki i Przestrzeni Metrycznej **1**

2 Przykłady Różnych Metryk w $\mathbb{R}^2$ **1**

2.1 Metryka euklidesowa (standardowa, d_2) 1

2.2 Metryka taksówkowa (Manhattan, d_1) 2

2.3 Metryka maksimum (L_∞, Czebyszewa, d_∞) 2

1 Definicja Metryki i Przestrzeni Metrycznej

Przestrzeń metryczna to fundamentalne pojęcie w matematyce, które uogólnia intuicyjne rozumienie odległości. Jest to zbiór, w którym zdefiniowane jest pojęcie odległości między jego elementami, nazywanymi zazwyczaj punktami. Odległość ta jest mierzona przez funkcję zwaną **metryką**. Przestrzenie metryczne stanowią ogólne środowisko do badania wielu koncepcji analizy matematycznej i geometrii.

Formalnie, **przestrzeń metryczna** to uporządkowana para (M, d), gdzie M jest zbiorem, a d jest **metryką** na M. Metryka d jest funkcją $d : M \times M \to \mathbb{R}$, która spełnia następujące aksjomaty dla wszystkich punktów $x, y, z \in M$:

1. **Nieujemność i tożsamość nierozróżnialnych punktów**: Odległość punktu od samego siebie wynosi zero: $d(x, x) = 0$. Dodatkowo, odległość między dwoma różnymi punktami jest zawsze dodatnia: Jeśli $x \neq y$, to $d(x, y) > 0$. Ten warunek może być równoważnie zapisany jako $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. **Symetria**: Odległość od x do y jest zawsze taka sama jak odległość od y do x: $d(x, y) = d(y, x)$.
3. **Nierówność trójkąta**: $d(x, z) \leq d(x, y)+d(y, z)$. Jest to naturalna właściwość zarówno fizycznych, jak i metaforycznych pojęć odległości: można dotrzeć do z z x przez punkt y, ale to nie skróci podróży w porównaniu z bezpośrednią ścieżką.

Elastyczność pojęcia metryki pozwala na interpretowanie jej nie tylko jako fizycznej odległości, ale także jako kosztu zmiany stanu, czy stopnia różnicy między dwoma obiektami (na przykład odległość Hamminga między ciągami znaków).

2 Przykłady Różnych Metryk w $\mathbb{R}^2$

Płaszczyzna euklidesowa $\mathbb{R}^2$ może być wyposażona w wiele różnych metryk. Poniżej przedstawiono kilka przykładów:

2.1 Metryka euklidesowa (standardowa, d_2)

Jest to najbardziej znana i intuicyjna odległość, znana ze szkolnej matematyki. Jest definiowana jako długość odcinka prostego łączącego dwa punkty. Dla punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) w $\mathbb{R}^2$, metryka euklidesowa jest dana wzorem:

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2.2 Metryka taksówkowa (Manhattan, d_1)

Znana również jako odległość Manhattana, jest definiowana jako suma absolutnych różnic współrzędnych. Można ją sobie wyobrazić jako odległość, którą taksówka musiałaby pokonać wzdłuż ulic biegnących równolegle do osi, aby przejść z jednego punktu do drugiego w siatce ulicznej miasta. Dla punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2):

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

2.3 Metryka maksimum (L_∞, Czebyszewa, d_∞)

Ta metryka, nazywana również odległością Czebyszewa, jest definiowana jako maksymalna z absolutnych różnic współrzędnych. Może być interpretowana jako minimalna liczba ruchów, które król w szachach musiałby wykonać, aby przejść z jednego punktu do drugiego w danej przestrzeni. Dla punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2):

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$