

# Interpretacja Ekonomiczna i Zastosowania Ekonomiczne Pochodnej Funkcji

Gabriel Tyszką

22 czerwca 2025

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Interpretacja Ekonomiczna Pochodnej Funkcji</b>	<b>1</b>
1.1	Wielkość Krańcowa a Wielkość Przeciętna . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Zastosowania Ekonomiczne Pochodnej Funkcji</b>	<b>1</b>
2.1	Funkcja Kosztu . . . . .	1
2.2	Funkcja Produkcji . . . . .	2
2.3	Funkcja Konsumpcji . . . . .	2
2.4	Funkcja Użyteczności . . . . .	2

## 1 Interpretacja Ekonomiczna Pochodnej Funkcji

### 1.1 Wielkość Krańcowa a Wielkość Przeciętna

Wielkość krańcowa funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x_0$  jest definiowana jako pochodna pierwszego rzędu tej funkcji w tym punkcie, czyli  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ . Funkcja  $f'(x)$  jest nazywana funkcją krańcową.

Ważną cechą wielkości krańcowej jest to, że dla funkcji jednej zmiennej, dla małych przyrostów argumentu  $\Delta x$ , wielkość krańcowa jest w przybliżeniu równa przyrostowi funkcji, gdy argument wzrasta o jednostkę. Oznacza to, że jeśli argument  $x$  zwiększy się o jednostkę w stosunku do poziomu wyjściowego, to funkcja  $f(x)$  wzrośnie o wartość odpowiadającą wielkości krańcowej ( $f(x_0 + 1) \approx f(x_0) + f'(x_0)$ ). Jest to miara szybkości zmian wartości funkcji w punkcie.

Wartość pochodnej odróżnia się od **wielkości przeciętnej (względnej, średniej)**, która jest definiowana jako iloraz przyrostu funkcji do przyrostu argumentu (iloraz różnicowy funkcji):  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ . Wielkość przeciętna określa czułość funkcji na przyrost zmiennej, jednak daje jedynie pogląd na przeciętną prędkość zmiany wartości funkcji w danym przedziale. Zmiany te niekoniecznie muszą zachodzić równomiernie. Przejście do granicy w ilorazie różnicowym, czyli obliczenie pochodnej, pozwala uzyskać dokładniejszą charakterystykę szybkości zmian funkcji.

## 2 Zastosowania Ekonomiczne Pochodnej Funkcji

Pojęcie wielkości krańcowych jest szeroko stosowane w ekonomii do analizy zachowań podmiotów gospodarczych i procesów ekonomicznych.

### 2.1 Funkcja Kosztu

W krótkim okresie, gdy przynajmniej jeden czynnik produkcji jest stały, koszt całkowity  $C(x)$  może być przedstawiony jako funkcja wielkości produkcji  $x$ .

- **Koszt przeciętny (jednostkowy)**: To iloraz funkcji kosztu całkowitego do wielkości produkcji,  $C_p(x) = C(x)/x$ . Określa koszt wytworzenia jednostki produktu.
- **Koszt krańcowy**: To koszt wytworzenia dodatkowej jednostki produktu, czyli przyrost kosztów spowodowany zwiększeniem produkcji o jednostkę. W przypadku ciągłej zmiany wielkości produkcji, koszt krańcowy jest pochodną funkcji kosztu całkowitego  $C'(x)$  w punkcie  $x$ . Funkcja  $C'(x)$  jest nazywana funkcją kosztu krańcowego.

## 2.2 Funkcja Produkcji

Funkcja produkcji określa relacje między wielkością produkcji a liczbą zaangażowanych czynników produkcji, takich jak kapitał ( $K$ ) i praca ( $L$ ), np.  $Q = f(K, L)$ , gdzie  $Q$  to całkowita wielkość produkcji.

- **Produkt przeciętny (AP - Average Product):** To średnia wielkość produkcji całkowitej przypadająca na jednostkę zmiennego czynnika wytwórczego, np.  $AP_L = Q/L$  dla pracy.
- **Produkt marginalny (krańcowy) (MP - Marginal Product):** To przyrost produkcji ( $\Delta Q$ ) wynikający z zatrudnienia dodatkowego pracownika ( $\Delta L$ ) lub dodatkowej jednostki zmiennego czynnika produkcji. Jest to pochodna funkcji produkcji względem zmiennego czynnika, np.  $MP_L = dQ/dL$ .
- **Prawo malejących dochodów:** Głosi, że jeśli następuje wzrost nakładów jednego czynnika produkcji (przy stałości pozostałych), to począwszy od pewnego poziomu, przyrosty produkcji zaczynają maleć.

## 2.3 Funkcja Konsumpcji

Funkcja konsumpcji przedstawia poziom zamierzonych łącznych wydatków konsumpcyjnych przy różnych poziomach dochodu gospodarstw domowych.

- **Przeciętna skłonność do konsumpcji:** To stosunek wydatków konsumpcyjnych ( $C$ ) do dochodu ( $D$ ),  $K_p = C/D$ . Informuje, jaka część dochodu jest przeznaczana na konsumpcję.
- **Krańcowa skłonność do konsumpcji:** To stosunek przyrostu wydatków konsumpcyjnych do przyrostu dochodu, czyli pochodna  $dC/dD$ . Ta wielkość informuje, jaka część przyrostu dochodu zostanie przeznaczona na wydatki konsumpcyjne.

## 2.4 Funkcja Użyteczności

Funkcja użyteczności przyporządkowuje wartości pieniężnej (lub koszykowi towarów) użyteczność, czyli satysfakcję lub komfort psychiczny. Chociaż jest to pojęcie psychologiczne, pewne ogólne własności są wspólne.

- **Postulat niedosytu:** Wzrost ilości towaru w koszyku zwiększa użyteczność koszyka. Oznacza to, że pochodna funkcji użyteczności  $U(x_1, \dots, x_n)$  względem ilości danego towaru  $x_i$  jest dodatnia, czyli  $dU/dx_i > 0$ .
- **Krańcowa użyteczność:** Pochodna  $\partial U/\partial x_i$  jest nazywana krańcową użytecznością towaru w koszyku.
- **Malejąca krańcowa użyteczność:** Oznacza, że każdy dodatkowy procent wzrostu bogactwa (lub spożycia danego towaru) powoduje coraz mniejszy przyrost użyteczności. To implikuje, że druga pochodna funkcji użyteczności względem ilości towaru jest ujemna.