Geometryczna Interpretacja i Zastosowania Całki Oznaczonej

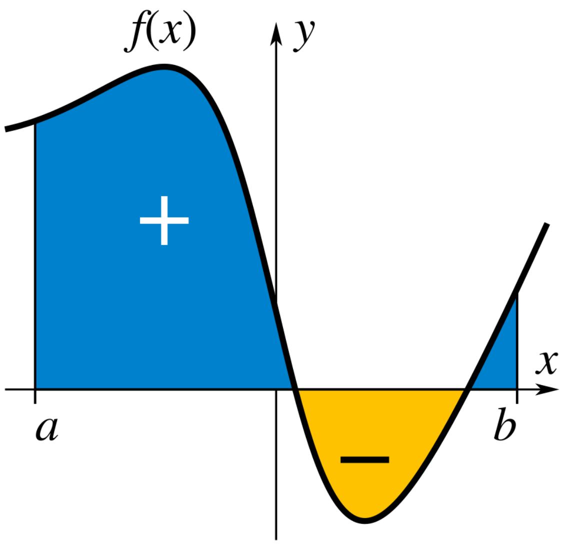
Gabriel Tyszka

22 czerwca 2025

Spis treści

1 Geometryczna Interpretacja Całki Oznaczonej

Pojedyncza całka oznaczona funkcji może być reprezentowana jako pole ze znakiem obszaru ograniczonego przez jej wykres i oś poziomą. Konwencjonalnie, obszary powyżej osi poziomej płaszczyzny są dodatnie, natomiast obszary poniżej są ujemne. Całka oznaczona funkcji oblicza pole ze znakiem regionu na płaszczyźnie, który jest ograniczony wykresem danej funkcji między dwoma punktami na osi rzeczywistej.



Rysunek 1: Całka oznaczona

Aby lepiej to zrozumieć, można sobie wyobrazić proces dzielenia poszukiwanej wielkości na nieskończenie wiele nieskończenie małych części, a następnie sumowanie tych części, aby uzyskać dokładne przybliżenie. Na przykład, aby znaleźć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ między $x = 0$ a $x = 1$, dzieli się interwał na małe części i sumuje pola prostokątów. Gdy liczba tych części dąży do nieskończoności, suma osiąga limit, który jest dokładną wartością poszukiwanego pola (w tym przypadku $2/3$). Można to zapisać jako:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}$$

co oznacza, że 2/3 jest wynikiem ważonej sumy wartości funkcji $\sqrt{x}$, pomnożonych przez nieskończenie małe szerokości kroku dx, w przedziale $[0, 1]$.

2 Zastosowania Całki Oznaczonej

Całki są szeroko stosowane w wielu dziedzinach.

2.1 Geometria i Objętość

- Obliczanie pola dwuwymiarowego obszaru o zakrzywionej granicy.
- Obliczanie objętości trójwymiarowego obiektu o zakrzywionej granicy.
- Objętość obiektu trójwymiarowego, takiego jak dysk lub podkładka, może być obliczona za pomocą całkowania dyskowego, wykorzystując równanie na objętość walca ($\pi r^2 h$). W przypadku prostego dysku utworzonego przez obrót krzywej wokół osi x, promień jest dany przez $f(x)$, a jego wysokość to różniczka dx. Używając całki z granicami a i b, objętość dysku jest równa:

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

2.2 Fizyka

- **Kinematyka:** Znajdowanie wielkości takich jak przemieszczenie, czas i prędkość. Na przykład, w ruchu prostoliniowym, przemieszczenie obiektu w przedziale czasu $[a, b]$ jest dane przez:

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)\, dt$$

  gdzie $v(t)$ to prędkość wyrażona jako funkcja czasu.
- **Praca:** Praca wykonana przez siłę $F(x)$ (daną jako funkcja położenia) z pozycji początkowej A do pozycji końcowej B wynosi:

$$W_{A\to B} = \int_A^B F(x)\, dx$$

- **Termodynamika:** Całkowanie termodynamiczne jest używane do obliczania różnicy energii swobodnej między dwoma danymi stanami.
- **Całki liniowe i powierzchniowe:** Całki liniowe są używane do sumowania elementów wzdłuż krzywej, często w kontekście pól wektorowych, np. praca wykonana przez pole siły. Całki powierzchniowe uogólniają całki podwójne na całkowanie po powierzchni (która może być zakrzywionym zbiorem w przestrzeni) i mają zastosowanie w fizyce, zwłaszcza w klasycznej teorii elektromagnetyzmu, do obliczania strumienia (np. strumienia płynu, elektrycznego czy magnetycznego).

2.3 Teoria Prawdopodobieństwa

- Całki są używane do określania prawdopodobieństwa, że pewna zmienna losowa mieści się w określonym zakresie.
- Całka pod całą funkcją gęstości prawdopodobieństwa musi wynosić 1, co stanowi test, czy funkcja bez wartości ujemnych może być funkcją gęstości.