Wyznaczanie Ekstremów Funkcji Wielu Zmiennych

Gabriel Tyszka

22 czerwca 2025

Spis treści

1 Metody Wyznaczania Ekstremów Funkcji Wielu Zmiennych

Istnieją dwie główne metody znajdowania ekstremów funkcji wielu zmiennych: metoda wykorzystująca pochodne cząstkowe (Test Drugiej Pochodnej Cząstkowej / Macierz Hessego) oraz Metoda Mnożników Lagrange'a.

1.1 Metoda z wykorzystaniem pochodnych cząstkowych (Macierz Hessego)

Aby znaleźć ekstrema funkcji wielu zmiennych, można użyć macierzy Hessego i jej wyznacznika.

1.1.1 Kroki metody:

1. **Znalezienie punktów krytycznych:** Najpierw identyfikuje się punkty krytyczne funkcji. Polega to na obliczeniu pierwszych pochodnych cząstkowych funkcji względem każdej zmiennej i przyrównaniu ich do zera. Ten krok pomaga zlokalizować punkty, w których szybkość zmian funkcji wynosi zero, co wskazuje na potencjalne ekstrema. Dla funkcji $f(x, y)$, należy obliczyć $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ i $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ i przyrównać je do zera.

2. **Utworzenie Macierzy Hessego:** Następnie oblicza się drugie pochodne cząstkowe: $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, oraz mieszaną pochodną $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (gdzie f_{yx} jest zwykle równe f_{xy}). Tworzy się Macierz Hessego (H):
$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

3. **Obliczenie wyznacznika Macierzy Hessego (D):** Wyznacznik Macierzy Hessego oblicza się jako $D = \det(H) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$.

4. **Klasyfikacja punktów krytycznych:** Analizuje się wartość D i f_{xx} w każdym punkcie krytycznym:
   - Jeśli $D > 0$ i $f_{xx} > 0$, funkcja ma **minimum lokalne** w punkcie krytycznym.
   - Jeśli $D > 0$ i $f_{xx} < 0$, funkcja ma **maksimum lokalne** w punkcie krytycznym.
   - Jeśli $D < 0$, funkcja ma **punkt siodłowy** w punkcie krytycznym.
   - Jeśli $D = 0$, test jest **niejednoznaczny** (nierozstrzygający).

1.1.2 Przykład 1: Klasyfikacja ekstremum

Znajdź ekstrema funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9$.

1. **Obliczanie pierwszych pochodnych cząstkowych i znajdowanie punktów krytycznych:** $f_x = 2x - 4$ $f_y = 2y - 6$ Przyrównując do zera: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ $2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$ Punkt krytyczny to $(2, 3)$.

2. **Obliczanie drugich pochodnych cząstkowych i tworzenie macierzy Hessego:** $f_{xx} = 2$ $f_{yy} = 2$ $f_{xy} = 0$ Macierz Hessego H to:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. **Obliczanie wyznacznika macierzy Hessego:** $D = \det(H) = (2)(2) - (0)^2 = 4$

4. **Analiza wyznacznika i f_{xx}:** Ponieważ $D > 0$ (konkretnie $D = 4 > 0$) i $f_{xx} = 2 > 0$, funkcja ma **minimum lokalne** w punkcie krytycznym $(2, 3)$.

1.2 Metoda Mnożników Lagrange'a

Metoda mnożników Lagrange'a to strategia używana do znajdowania lokalnych maksimów i minimów funkcji **związanych z ograniczeniami równościowymi**. Metoda ta przekształca problem optymalizacji z ograniczeniami w system równań, który można rozwiązać, aby znaleźć punkty optymalne.

1.2.1 Kroki metody:

1. **Zdefiniowanie funkcji celu i ograniczenia:** Niech $f(x, y, \dots)$ będzie funkcją celu, która ma być maksymalizowana lub minimalizowana. Niech $g(x, y, \dots) = 0$ będzie funkcją ograniczenia.

2. **Utworzenie funkcji Lagrange'a:** Konstruuje się funkcję Lagrange'a L poprzez połączenie funkcji celu i ograniczenia za pomocą mnożnika Lagrange'a λ: $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$. (Uwaga: jeśli ograniczenie jest już w formie $g(x, y) = 0$, to c jest równe 0, a funkcja Lagrange'a to $L = f - \lambda g$).

3. **Obliczenie pochodnych cząstkowych:** Znajduje się pochodne cząstkowe funkcji L względem każdej zmiennej $(x, y, \dots)$ oraz mnożnika Lagrange'a λ, i przyrównuje się je do zera: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$.

4. **Rozwiązanie układu równań:** Rozwiązuje się powstały układ równań, aby znaleźć punkty krytyczne (x, y, λ).

5. **Weryfikacja i klasyfikacja punktów krytycznych:** Podstawia się punkty krytyczne z powrotem do oryginalnej funkcji celu i funkcji ograniczenia, aby sprawdzić, czy spełniają ograniczenie i określić, czy odpowiadają maksimum czy minimum.

1.2.2 Przykład: Zastosowanie Mnożników Lagrange'a

Funkcja celu: $f(x, y) = x^2 + y^2$ Ograniczenie: $g(x, y) = x + y - 1 = 0$

1. **Zdefiniowanie funkcji celu i ograniczenia:** $f(x, y) = x^2 + y^2$ $g(x, y) = x + y - 1 = 0$

2. **Utworzenie funkcji Lagrange'a:** $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1)$

3. **Obliczenie pochodnych cząstkowych:** $\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2x$ $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2y$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0$

4. **Rozwiązanie układu równań:** Z $\lambda = 2x$ i $\lambda = 2y$, wynika $2x = 2y \Rightarrow x = y$. Podstawiając $x = y$ do równania ograniczenia: $x + y = 1 \Rightarrow x + x = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ Stąd, $y = \frac{1}{2}$. Punkt krytyczny to $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

5. **Weryfikacja i klasyfikacja punktów krytycznych:** Podstawiając $x = \frac{1}{2}$ i $y = \frac{1}{2}$ do funkcji celu: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jest minimum funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ z ograniczeniem $x + y = 1$.