

# Metody Całkowania Numerycznego

Gabriel Tyszk

25 czerwca 2025

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie do Kwadratur</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kwadratury Interpolacyjne</b>	<b>1</b>
2.1	Metody Newtona-Cortesa . . . . .	1
2.2	Metoda prostokątów . . . . .	2
2.3	Metoda trapezów . . . . .	2
2.4	Metoda parabol (Simpsona) . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Kwadratury Gaussa</b>	<b>3</b>
3.1	Kwadratury Gaussa-Legendre'a . . . . .	3
3.2	Kwadratury Gaussa-Czebyszewa . . . . .	3
3.3	Całki nieskończone . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Kwadratury Monte Carlo</b>	<b>4</b>
4.1	Naiwne Monte Carlo (Średnia całkowita funkcji) . . . . .	4
4.2	Metoda chybił-trafił (hit-or-miss) . . . . .	4

## 1 Wprowadzenie do Kwadratur

Metody numeryczne oferują algorytmy do obliczania całek oznaczonych, które są nazywane kwadraturami. Kwadratury są przybliżeniem funkcjonalu całkowego i w rachunku numerycznym ich wartości muszą być obliczalne za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych. Standardowo, ogranicza się je do postaci sumy wartości funkcji  $f$  w określonych węzłach  $x_i$ , pomnożonych przez odpowiednie współczynniki  $A_i$ , czyli:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^N A_i f(x_i)$$

gdzie  $x_i$  to węzły kwadratury, a  $A_i$  to współczynniki kwadratury.

## 2 Kwadratury Interpolacyjne

### 2.1 Metody Newtona-Cortesa

Kwadratury Newtona-Cortesa to kwadratury interpolacyjne, które opierają się na węzłach równoodległych. W metodach tych funkcja podcałkowa  $f(x)$  jest aproksymowana wielomianem Lagrange'a stopnia  $n$ , a następnie ten wielomian jest całkowany:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx$$

gdzie  $L_n(x)$  to wielomian Lagrange'a. Współczynniki kwadratury Newtona-Cortesa  $A_i$  są wyprowadzane przez transformację zmiennych i całkują wielomiany bazowe Lagrange'a:

$$A_i = h \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t-j}{i-j} dt$$

Rząd kwadratury zależy od  $n$ : jeśli  $n$  jest nieparzyste, rząd wynosi  $n + 1$ ; jeśli  $n$  jest parzyste, rząd wynosi  $n + 2$ . W praktyce stosuje się złożone metody Newtona-Cotesa, gdzie przedział całkowania jest dzielony na podprzedziały, a w każdym z nich funkcja jest aproksymowana kolejnym wielomianem Lagrange'a.

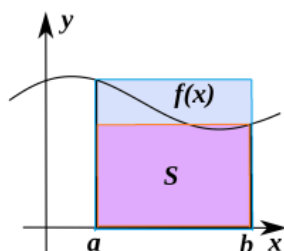
## 2.2 Metoda prostokątów

Metoda prostokątów opiera się na definicji całki Riemanna. Przybliżona wartość całki dla skończonej liczby  $n$  prostokątów wynosi:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

gdzie  $f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$  to pole prostokąta. Wybór  $t_i$  może być różny, np. wartość lewego węzła  $x_i$ , prawego węzła  $x_{i+1}$ , lub wartość średnia  $(x_i + x_{i+1})/2$ . Dla węzłów równoodległych, gdzie  $h = x_{i+1} - x_i = (b-a)/n$ , wzór upraszcza się do:

$$Q(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)$$

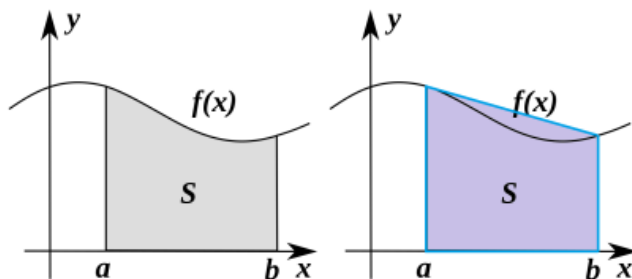


## 2.3 Metoda trapezów

Kwadratura trapezów przybliża funkcję podcałkową na przedziale całkowania  $[a, b]$  wielomianem pierwszego stopnia (prostą). Węzłami kwadratury są granice całkowania  $a$  i  $b$ . Geometrycznie, pole pod wykresem funkcji jest przybliżane polem trapezu, co daje wzór:

$$Q(f) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b - a)$$

$$Q(f) = \frac{h}{2} \left( f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

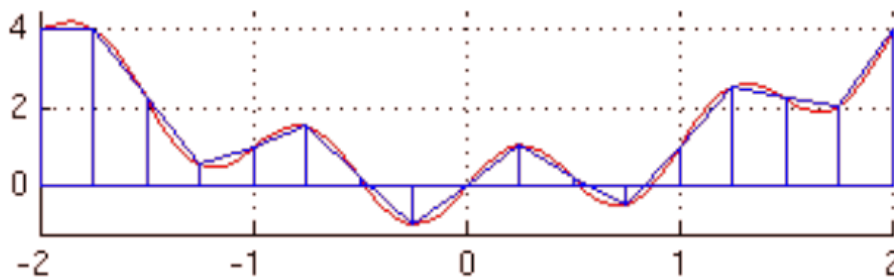


### Złożona Metoda Trapezów

W praktyce funkcje podcałkową aproksymujemy nie jednym wielomianem, a łamaną, czyli stosujemy interpolację skłajaną. Geometrycznie wygląda to następująco

W rezultacie otrzymujemy formułę:

$$Q(f) = \frac{h}{2} \left( f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$



## 2.4 Metoda parabol (Simpsona)

Metoda Simpsona przybliża funkcję podcałkową wielomianem drugiego stopnia (parabolą). Bazując na wartościach funkcji  $y_0, y_1, y_2$  w trzech punktach  $x_0, x_1, x_2$ , przybliżona wartość całki wynosi:

$$Q(f) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

W złożonej metodzie Simpsona, liczba równoodległych węzłów  $x_0, \dots, x_n$  musi być nieparzysta ( $n = 2k$ ), ponieważ jedna parabola wymaga trzech węzłów. Wzór na złożoną kwadraturę Simpsona to:

$$Q(f) = \frac{h}{3} \left( f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^k f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right)$$

## 3 Kwadratury Gaussa

Kwadratury Gaussa są kwadraturami interpolacyjnymi, które za węzły przyjmują miejsca zerowe wybranego wielomianu ortogonalnego. Charakteryzują się maksymalnym rzędem dla ustalonej liczby węzłów: jeśli wybrany jest wielomian  $\phi_{n+1}(x)$  o  $n+1$  węzłach, rząd kwadratury Gaussa wynosi  $2(n+1)$ , co oznacza dokładność dla każdego wielomianu stopnia nie większego niż  $2n+1$ . W praktyce korzysta się z tablic współczynników  $A_i$ .

### 3.1 Kwadratury Gaussa-Legendre'a

Stosuje się je do całkowania funkcji na przedziale  $[-1, 1]$  z funkcją wagową  $p(x) = 1$  [18]. Odpowiednimi wielomianami ortogonalnymi są wielomiany Legendre'a. Aby całkowanie odbywało się na dowolnym przedziale  $[a, b]$ , stosuje się liniową zamianę zmiennych:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt$$

### 3.2 Kwadratury Gaussa-Czebyszewa

Te kwadratury wykorzystują wielomiany Czebyszewa i służą do obliczania całek typu  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , gdzie funkcja wagowa  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  jest osobliwa na granicach całkowania  $-1$  i  $1$ . Jawna postać wielomianów Czebyszewa to  $T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x))$ . Wzory na współczynniki  $A_k$  i węzły  $x_k$  tych kwadratur są jawne:

$$A_k = \frac{\pi}{n+1}, \quad x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$$

### 3.3 Całki nieskończone

Dla całek nieskończonych stosuje się kwadratury Gaussa-Hermite'a (dla  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx$ ) oraz kwadratury Gaussa-Laguerre'a (dla  $\int_0^{\infty} f(x)e^{-x} dx$ ).

## 4 Kwadratury Monte Carlo

Metody Monte Carlo to klasa algorytmów obliczeniowych, które opierają się na powtarzanym losowym próbkowaniu w celu uzyskania wyników numerycznych. Zostały opracowane przez Stanisława Ulama. Są szczególnie przydatne, gdy funkcje mają wiele zmiennych, ponieważ unikają wykładniczego wzrostu liczby wymaganych wartości funkcji, typowego dla metod deterministycznych. Konwergencja metody Monte Carlo wynosi  $1/\sqrt{n}$ , co oznacza, że czterokrotne zwiększenie liczby wartości funkcji zmniejsza błąd o połowę, niezależnie od liczby wymiarów.

### 4.1 Naiwne Monte Carlo (Średnia całkowa funkcji)

Metoda ta opiera się na pojęciu wartości średniej funkcji. Zakłada się, że dla wystarczająco dużej liczby  $n$  losowo wybranych punktów  $z_i$  (mających rozkład równomierny na przedziale  $[a, b]$ ), średnia wartość funkcji  $f_{sr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(z_i)$  jest dobrym przybliżeniem średniej całkowej. Wartość szukanej całki oblicza się jako:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \cdot f_{sr} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(z_i)$$

Metoda ta może być uogólniona do obliczania całek wielokrotnych w wielowymiarowej objętości  $V$ , gdzie:

$$\int f dV \approx V \langle f \rangle \pm V \frac{\sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}}{\sqrt{n}}$$

gdzie  $\langle f \rangle \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$  oraz  $\langle f^2 \rangle \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^2(x_i)$ .

### 4.2 Metoda chybił-trafił (hit-or-miss)

Ta metoda wykorzystuje geometryczną interpretację całki jako pola powierzchni pod wykresem funkcji. Algorytm polega na wielokrotnym losowym "strzelaniu" w prostokąt ograniczający pole pod wykresem funkcji. Prawdopodobieństwo trafienia w obszar pod wykresem jest równe stosunkowi pola tego obszaru do pola prostokąta. Proces obejmuje  $n$  losowań par  $(x_i, y_i)$  (punktów w prostokącie), zliczanie "trafień"  $k$  (punktów, dla których  $y_i$  znajduje się między osią OX a  $f(x_i)$ ), a następnie obliczenie przybliżonej całki jako:

$$Q(f) = \frac{k}{n} \cdot (b-a) \cdot (\max(f(x)) - \min(f(x)))$$

W przypadku funkcji przyjmujących wartości ujemne lub gdy prostokąt nie przecina osi OX, stosuje się odpowiednie korekty.