Pochodna funkcji jednej zmiennej: Pojęcie i Zastosowania

Gabriel Tyszka

22 czerwca 2025

Spis treści

1 Pojęcie pochodnej funkcji jednej zmiennej

Pochodna funkcji jest jednym z najbardziej fundamentalnych pojęć w analizie matematycznej, które mierzy "szybkość"funkcji, czyli tempo zmian jej wartości względem zmian jej argumentów. Intuicyjnie można ją rozumieć jako "zmianę"funkcji, gdy jej argument ulega zmianie.

Dla funkcji $y = f(x)$ określonej w otoczeniu punktu x_0, pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 nazywamy granicę (o ile istnieje):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

lub równoważnie, stosując oznaczenie h zamiast Δx:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

W powyższym wzorze Δx (lub h) oznacza **przyrost zmiennej niezależnej** x, natomiast $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ to **przyrost zmiennej zależnej** y. Wyrażenie $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nazywa się **ilorazem różnicowym** i jest funkcją przyrostu zmiennej niezależnej.

Jeżeli funkcja f ma pochodną dla każdego elementu swojej dziedziny U, to odwzorowanie przypisujące każdemu argumentowi jego pochodną w tym punkcie nazywa się **funkcją pochodną** funkcji f, często oznaczaną jako $f'(x)$.

1.1 Geometryczny sens pochodnej

Pochodna funkcji w danym punkcie ma również interpretację geometryczną. **Współczynnik kierunkowy stycznej** do wykresu funkcji w punkcie $A = (x, f(x))$ jest równy wartości pochodnej funkcji w tym punkcie. Wtedy współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie A jest równy $\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

1.2 Właściwości funkcji pochodnej

Pochodna funkcji posiada szereg fundamentalnych własności, zwanych regułami różniczkowania:

- Iloczyn pochodnej przez stałą: $(af)'(x) = af'(x)$.
- Pochodna sumy funkcji (addytywność): $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- Pochodna iloczynu funkcji (reguła Leibniza): $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Pochodna złożenia funkcji (reguła łańcuchowa): $f'(x) = h'(g(x))g'(x)$, dla $f(x) = h(g(x))$.
- Pochodna funkcji odwrotnej: $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$, o ile $f'(x) \neq 0$ i $f(x) = y$.
- Pochodna ilorazu funkcji (reguła ilorazu): $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, o ile $g(x) \neq 0$.

1.3 Pochodne wyższego rzędu

Jeżeli pierwsza pochodna funkcji $f'(x)$ również jest różniczkowalna na danym przedziale, to można obliczyć jej pochodną. Otrzymana w ten sposób funkcja nazywana jest **drugą pochodną** funkcji f, oznaczaną $f''(x)$ lub $f^{(2)}(x)$. Ogólnie, pochodną rzędu n definiuje się rekurencyjnie jako pochodną pochodnej rzędu $(n-1)$: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ [15].

2 Zastosowania pochodnej funkcji

Pochodne odgrywają kluczową rolę w całej analizie matematycznej i poza nią, będąc podstawowym narzędziem do badania funkcji i opisywania zjawisk.

2.1 W matematyce (badanie zmienności funkcji)

Pochodne są podstawowym narzędziem do:

- **Badania monotoniczności funkcji**: Jeśli pochodna $f'(x) > 0$ na danym przedziale (a, b), to funkcja f jest rosnąca na tym przedziale. Analogicznie, jeśli $f'(x) < 0$, funkcja jest malejąca oraz jeżeli $f'(x) = 0$ mamy doczynienia z punktem stacjonarnym.
- **Znajdowania ekstremów funkcji (minimów i maksimów)**: Miejsca zerowe pierwszej pochodnej są kluczowe w badaniu funkcji. Jeśli pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny w punkcie x_0, funkcja ma w nim maksimum. Jeśli zmienia znak z ujemnego na dodatni, funkcja ma w nim minimum.

- **Badania wypukłości funkcji**.
- **Rozwijania funkcji w szereg potęgowy** (szereg Taylora).
- **Obliczania rozmaitych przybliżeń** (metody numeryczne), w tym przybliżania przyrostu funkcji za pomocą różniczki.
- **Całkowania**: Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego mówi, że przez odwrócenie operacji pochodnej – czyli znalezienie funkcji pierwotnej – można wykonać całkowanie w sensie oznaczonym, co pozwala m.in. obliczać pola powierzchni, długości krzywych, objętości i prawdopodobieństwa.

2.2 W fizyce

Pochodne służą do definiowania podstawowych wielkości fizycznych i są podstawą równań różniczkowych opisujących zjawiska fizyczne.

- **Prędkość chwilowa**: Jest pochodną położenia (drogi s) ciała względem czasu t: $v = f'(t)$. Prędkość chwilowa w momencie t jest granicą średniej prędkości, gdy przedział czasu Δt dąży do zera.
- **Natężenie prądu**: Chwilowe natężenie prądu elektrycznego (I) jest pochodną ładunku (Q) przepływającego przez przewodnik względem czasu: $I = \frac{dQ}{dt}(t)$.
- **Gęstość rozkładu masy**: Gęstość masy $\mu(x)$ w punkcie x jest pochodną funkcji masy $M(x)$ (masy pręta liczonej od początku do punktu x) względem położenia: $\mu(x) = M'(x)$. Pojęcie to jest również używane w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce do definiowania gęstości prawdopodobieństwa.