Metoda Bisekcji Rozwiązywania Równań Nieliniowych

Gabriel Tyszka

25 czerwca 2025

Spis treści

1 Metoda Bisekcji (Równego Podziału, Połowienia) 1
1.1 Idea Metody 1
1.2 Założenia Dostateczne dla Zbieżności 1
1.2.1 Opis Algorytmu 1
1.2.2 Właściwości Metody 2

1 Metoda Bisekcji (Równego Podziału, Połowienia)

1.1 Idea Metody

Podstawą metody bisekcji jest twierdzenie Darboux (o wartości pośredniej). Jeśli funkcja ciągła $f(x)$ zmienia znak na przedziale $[a, b]$, to znaczy $f(a) \cdot f(b) < 0$, to wewnątrz tego przedziału istnieje co najmniej jedno miejsce zerowe (pierwiastek) równania $f(x) = 0$. Metoda wykorzystuje ten fakt do systematycznego zawężania przedziału poszukiwań.

1.2 Założenia Dostateczne dla Zbieżności

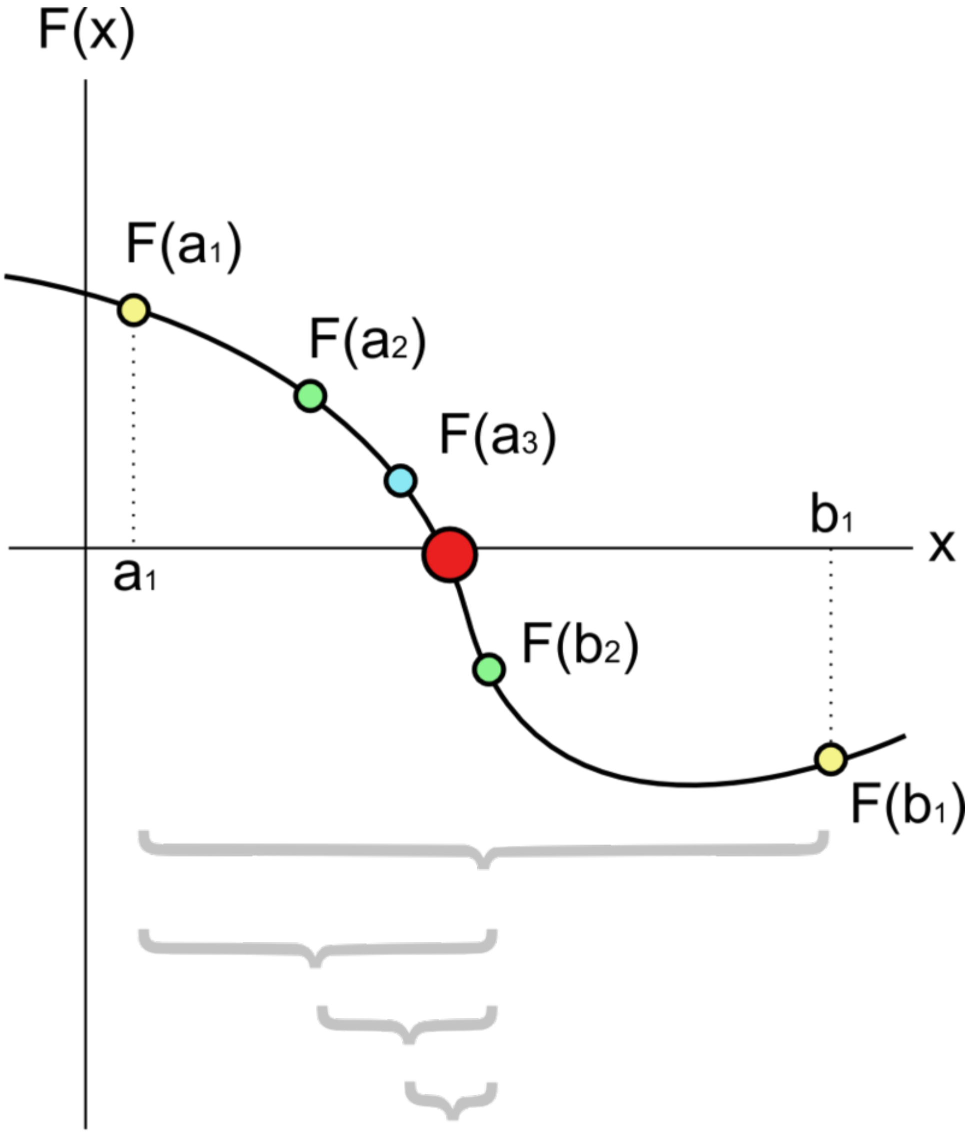
Aby metoda bisekcji była zbieżna, muszą być spełnione następujące warunki:

- Funkcja $f(x)$ musi być **ciągła** na przedziale $[a, b]$ ($f(x) \in C([a, b])$).
- Funkcja musi **zmieniać znak** na końcach przedziału, czyli $f(a) \cdot f(b) < 0$. Zakłada się, że w tym przedziale znajduje się dokładnie jedno miejsce zerowe.

1.2.1 Opis Algorytmu

Algorytm metody bisekcji przebiega następująco:

1. **Podział przedziału**: Oblicz punkt środkowy $c = (a + b)/2$.
2. **Sprawdzenie wartości w punkcie środkowym**:
   - Jeśli $f(c) = 0$, to $x = c$ jest dokładnym rozwiązaniem, a algorytm kończy działanie.
3. **Wybór nowego przedziału**:
   - Jeśli $f(c) \neq 0$, wybierz ten z podprzedziałów $[a, c]$ lub $[c, b]$, w którym funkcja zmienia znak.
   - Jeśli $f(a) \cdot f(c) < 0$, to pierwiastek leży w $[a, c]$, więc ustaw $b = c$.
   - Jeśli $f(c) \cdot f(b) < 0$, to pierwiastek leży w $[c, b]$, więc ustaw $a = c$.
4. **Powtórzenie**: Powtarzaj kroki 1-3, aż uzyskana zostanie żądana dokładność.



1.2.2 Właściwości Metody

- **Zbieżność metody**: Metoda bisekcji charakteryzuje się **zbieżnością liniową**. W każdym kroku iteracji szerokość przedziału poszukiwania miejsca zerowego zmniejsza się dwukrotnie. Oznacza to, że błąd w kroku $k+1$ wynosi $|e_{k+1}| = \frac{1}{2}|e_k|$. Stała zbieżności $C = 1/2$, a wykładnik zbieżności $p = 1$.

- **Efektywność metody**: W każdej iteracji metody bisekcji należy obliczyć tylko jedną wartość funkcji $f(c)$. Wartości $f(a)$ i $f(b)$ są albo niezmienione, albo zastępowane wartością $f(c)$ z poprzedniego kroku. Koszt jednej iteracji (K) wynosi 1, co daje wskaźnik efektywności $E = p^{1/K} = 1^{1/1} = \mathbf{1}$. Jest to najmniejszy wskaźnik efektywności spośród omawianych metod rozwiązywania równań nieliniowych.

- **Liczba kroków potrzebna do uzyskania zbieżności**: W metodzie bisekcji można z góry określić maksymalną liczbę iteracji k potrzebną do osiągnięcia zadanej dokładności ϵ. Jeśli początkowa szerokość przedziału wynosi $(b-a)$, to po k krokach pierwiastek leży w przedziale o długości $(b-a)/2^k$. Aby osiągnąć dokładność ϵ, należy wykonać co najmniej $k \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)$ iteracji.