

Podstawowe Elementy Kombinatoryki

Gabriel Tyszka

25 czerwca 2025

Spis treści

1	Permutacje	1
2	Wariacje	2
3	Kombinacje	2

Wprowadzenie

Kombinatoryka to dział matematyki zajmujący się sposobami wyboru i układania elementów zbioru zgodnie z określonymi regułami. Jest ona podstawą wielu dziedzin, takich jak rachunek prawdopodobieństwa, statystyka, informatyka czy teoria grafów.

W kombinatoryce najczęściej interesuje nas:

- Czy elementy mogą się powtarzać?
- Czy kolejność wyboru elementów ma znaczenie?
- Czy wybieramy wszystkie, czy tylko część elementów?

W zależności od odpowiedzi na te pytania rozróżniamy: **permutacje**, **wariacje** i **kombinacje**.

1 Permutacje

Permutacja to uporządkowane ustawienie wszystkich elementów zbioru. Oznacza to, że:

- wybieramy **wszystkie elementy** ze zbioru,
- **każdy element występuje tylko raz**,
- **kolejność ma znaczenie**.

Permutacje bez powtórzeń

Jeśli mamy n różnych elementów, to liczba ich możliwych permutacji wynosi:

$$P(n) = n!$$

gdzie $n!$ oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n .

Przykład: Ustawiamy 3 osoby (Ala, Bartek, Celina) w kolejce:

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Możliwe ustawienia: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Permutacje z powtórzeniami

Jeśli w zbiorze występują powtarzające się elementy, to liczbę permutacji obliczamy według wzoru:

$$P = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

gdzie:

- n – liczba wszystkich elementów,
- k_i – liczba powtórzeń danego elementu.

Przykład: Słowo „ANNA” ma 4 litery, w tym dwie „A” i dwie „N”:

$$P = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

2 Wariacje

Wariacja to uporządkowany wybór k elementów z n różnych elementów.

Cechy:

- wybieramy **część** elementów ($k < n$),
- **kolejność ma znaczenie**,
- **z lub bez powtórzeń**.

Wariacje bez powtórzeń

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Przykład: Ile jest możliwości wybrania 2 zawodników z 5, gdzie kolejność ma znaczenie?

$$V(5, 2) = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

Wariacje z powtórzeniami

Gdy można wybierać ten sam element wielokrotnie (np. cyfry w kodzie PIN):

$$V'(n, k) = n^k$$

Przykład: Ile jest możliwych 3-cyfrowych kodów PIN, jeśli każda cyfra od 0 do 9 może się powtarzać?

$$V'(10, 3) = 10^3 = 1000$$

3 Kombinacje

Kombinacja to sposób wyboru k elementów z n elementów, **gdzie kolejność nie ma znaczenia**.

Cechy:

- wybieramy k elementów,
- **kolejność nie ma znaczenia**,
- **z lub bez powtórzeń**.

Kombinacje bez powtórzeń

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Przykład: Ile 3-osobowych zespołów można utworzyć z 5 osób?

$$C(5, 3) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

Kombinacje z powtórzeniami

Gdy można wielokrotnie wybierać ten sam element:

$$C'(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$$

Przykład: Ile sposobów wybrania 3 cukierków spośród 4 smaków, jeśli smaki mogą się powtarzać?

$$C'(4, 3) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$$