Zbiory Wypukłe i Punkty Ekstremalne w Przestrzeni Kartezjańskiej

Gabriel Tyszka

21 czerwca 2025

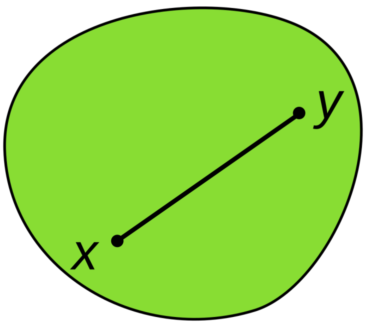
Spis treści

1 Wprowadzenie do Zbiorów Wypukłych

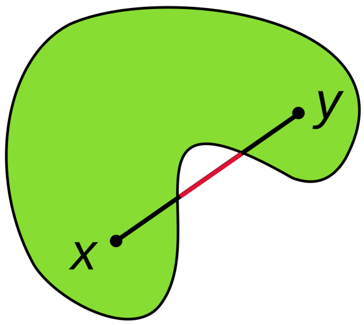
W matematyce, zwłaszcza w geometrii i analizie funkcjonalnej, pojęcie zbioru wypukłego jest fundamentalne. Zbiory wypukłe to obiekty, które w pewnym sensie „nie zaginają się do wewnątrz” ani nie posiadają „dziur”. Ich właściwości sprawiają, że są one szeroko stosowane w optymalizacji, teorii gier i innych dziedzinach. Zbiory wypukłe mogą być interpretowane jako zbiory wektorów, współrzędnych lub punktów w przestrzeni, w tym w przestrzeni kartezjańskiej.

2 Definicja Zbioru Wypukłego

Intuicyjnie, zbiór punktów jest **wypukły**, jeśli dla dowolnych dwóch punktów wybranych z wnętrza tego zbioru, odcinek prostej łączący te punkty również w całości leży w tym zbiorze. Jeśli weźmiemy dwa punkty ze zbioru i narysujemy prostą linię, która je łączy, każdy punkt na tej linii musi również znajdować się wewnątrz zbioru. Jeśli dla jakiejkolwiek pary punktów odcinek ten częściowo wykracza poza zbiór, to zbiór ten jest **niewypukły** (często nazywany też wklęsłym, choć niektórzy autorzy odradzają to nazewnictwo).



Rysunek 1: Zbiór wypukły



Rysunek 2: Zbiór niewypukły

Matematycznie, zbiór X jest **wypukły**, jeśli dla dowolnych dwóch elementów a i b należących do X, każdy wektor c leżący na prostej między a i b również należy do X. Ten wektor c można zapisać jako kombinację afiniczną:

$$c = a + \theta(b - a)$$

gdzie θ (theta) jest liczbą z przedziału $[0, 1]$.

- Jeśli $\theta = 0$, to $c = a$.
- Jeśli $\theta = 1$, to $c = b$.
- Jeśli θ znajduje się między 0 a 1 (np. $\theta = 0.5$), to c jest wektorem leżącym gdzieś pomiędzy a i b (np. $(a + b)/2$ dla $\theta = 0.5$).

Taka definicja oznacza również, że zbiory wypukłe nie mają żadnych przerw ani "dziur"między swoimi elementami. Zbiory wypukłe są również niezmienne pod względem przekształceń afinicznych i są spójne drogami (a zatem także spójne) w rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni wektorowo-topologicznej.

2.1 Przykłady Zbiorów Wypukłych w Przestrzeni Kartezjańskiej

W przestrzeni kartezjańskiej, zbiory wypukłe obejmują szeroki zakres kształtów i struktur. Oto kilka przykładów:

- **Koło (lub kula) o promieniu mniejszym niż jeden** (zbiór wszystkich wektorów o długości mniejszej niż jeden). Każdy odcinek łączący dwa punkty wewnątrz takiego koła (lub kuli) w całości pozostaje wewnątrz niego.
- **Solidny sześcian**.
- **Solidne wielokąty foremne**, **solidne trójkąty** oraz **przecięcia solidnych trójkątów** na płaszczyźnie euklidesowej.
- **Bryły Archimedesa i bryły platońskie** w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.
- **Zbiór wielomianów stopnia drugiego** (wszystkie możliwe równania kwadratowe). Choć jest to zbiór nieskończony, spełnia definicję wypukłości: dowolna kombinacja afiniczna dwóch wielomianów stopnia drugiego nadal jest wielomianem stopnia drugiego.

3 Wierzchołek (Punkt Ekstremalny) Zbioru

Wierzchołek zbioru wypukłego, zwany również **punktem ekstremalnym**, jest szczególnym typem punktu w zbiorze, który charakteryzuje się tym, że nie może leżeć ściśle pomiędzy dwoma **innymi** punktami należącymi do tego samego zbioru.

Formalnie, punkt p należący do zbioru wypukłego C jest **punktem ekstremalnym**, jeśli nie da się go przedstawić jako $p = (1 - t)x + ty$ dla jakichkolwiek dwóch *różnych* punktów $x, y \in C$ i dowolnego $t \in (0, 1)$ (czyli t ściśle między 0 a 1). Gdyby taki punkt p leżał ściśle pomiędzy x i y, to musiałoby to oznaczać, że $x = p$ i $y = p$, co zaprzecza warunkowi, że x i y są *różne* od p. Krótko mówiąc, punkt ekstremalny to taki, którego nie da się "rozłożyć"na mniejszy odcinek wewnątrz zbioru.

Istotna właściwość, znana jako twierdzenie Kreina-Milmana, mówi, że jeśli C jest zwartym (to znaczy domkniętym i ograniczonym) zbiorem wypukłym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to C jest otoczką wypukłą swoich punktów ekstremalnych.

3.1 Przykłady Punktów Ekstremalnych

- **Trójkąt na płaszczyźnie** (wraz z jego wnętrzem): Jest to zwarty zbiór wypukły. Jego jedynymi punktami ekstremalnymi są **trzy wierzchołki** trójkąta. Żaden z wierzchołków nie leży ściśle pomiędzy dwoma *innymi* punktami należącymi do trójkąta. Natomiast każdy punkt leżący na krawędzi (ale nie wierzchołek) lub wewnątrz trójkąta można zawsze przedstawić jako punkt na odcinku łączącym dwa *inne* punkty w trójkącie.

- **Zamknięty dysk jednostkowy** (np. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$): Jedynymi punktami ekstremalnymi tego dysku są **punkty leżące na okręgu jednostkowym** ($x^2 + y^2 = 1$). Żaden punkt leżący na obwodzie dysku nie może być położony ściśle pomiędzy dwoma innymi punktami *wewnątrz* dysku (wliczając sam obwód). Każdy punkt we wnętrzu dysku zawsze można umieścić na odcinku łączącym dwa inne punkty dysku.