Twierdzenia dotyczące rozwiązywania układów równań liniowych

Gabriel Tyszka

20 czerwca 2025

Spis treści

1 Twierdzenie Cramera

1.1 Cel i zakres zastosowania

Twierdzenie Cramera jest potężnym narzędziem do rozwiązywania układów równań liniowych. Stosuje się je wyłącznie do układów, w których **liczba równań jest równa liczbie niewiadomych**. Układ taki zapisujemy w postaci macierzowej:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

gdzie:

- A — macierz współczynników układu,
- $\mathbf{x}$ — wektor niewiadomych,
- $\mathbf{b}$ — wektor wyrazów wolnych.

Macierz A jest kwadratowa o wymiarze $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.2 Główne założenia i wzory na rozwiązania

Twierdzenie Cramera: Jeżeli $\det(A) = W \neq 0$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorami:

$$x_i = \frac{W_{x_i}}{W}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie:

- $W = \det(A)$ — wyznacznik macierzy współczynników,
- W_{x_i} — wyznacznik macierzy powstałej przez zastąpienie i-tej kolumny A wektorem $\mathbf{b}$.

Przykładowo, wyznacznik W_{x_1}:

$$W_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.3 Przykład obliczeniowy

Rozważmy układ:

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 2x_3 = 16 \\ 5x_1 - 3x_2 - 7x_3 = -22 \\ 0x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 11 \end{cases}$$

1. Macierz współczynników:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -7 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

   Wyznacznik $W = \det(A) = -533 \neq 0$, więc istnieje jedno rozwiązanie.

2. Wektor wyrazów wolnych:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ -22 \\ 11 \end{pmatrix}$$

3. Obliczamy wyznaczniki W_{x_i}:

$$W_{x_1} = \det \begin{pmatrix} 16 & 1 & 2 \\ -22 & -3 & -7 \\ 11 & -5 & 7 \end{pmatrix} = -533$$

$$W_{x_2} = \det \begin{pmatrix} 8 & 16 & 2 \\ 5 & -22 & -7 \\ 0 & 11 & 7 \end{pmatrix} = -1066$$

$$W_{x_3} = \det \begin{pmatrix} 8 & 1 & 16 \\ 5 & -3 & -22 \\ 0 & -5 & 11 \end{pmatrix} = -1599$$

4. Rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-533}{-533} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1066}{-533} = 2$$

$$x_3 = \frac{-1599}{-533} = 3$$

1.4 Uwagi przy $W = 0$

- Jeśli $W = 0$ i wszystkie $W_{x_i} = 0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.
- Jeśli $W = 0$ i przynajmniej jeden $W_{x_i} \neq 0$, to układ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań).

2 Twierdzenie Kroneckera-Capellego

2.1 Cel i zakres stosowania

Twierdzenie Kroneckera-Capellego pozwala określić liczbę rozwiązań dowolnego układu równań liniowych, niezależnie od wymiaru macierzy.

Układ ma postać:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2.2 Macierze i pojęcia

- Macierz współczynników:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Macierz uzupełniona:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- Rząd macierzy: wymiar największego niezerowego minoru macierzy.

2.3 Treść twierdzenia

Twierdzenie Kroneckera-Capellego: Układ ma co najmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(U).$$

Jeżeli przyjmiemy:

$$\text{n} = \text{liczba niewiadomych.}$$

$$\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(U) = r.$$

Otrzymujemy:

- Jeśli $\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(U) = r = n$, to układ ma **dokładnie jedno rozwiązanie**.
- Jeśli $\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(U) = r < n$, to układ ma **nieskończenie wiele rozwiązań** z $n-r$ parametrami.
- Jeśli $\mathrm{rz}(A) \neq \mathrm{rz}(U)$, to układ jest **sprzeczny** (brak rozwiązań).

2.4 Przykład obliczeniowy

Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 1x_2 + 7x_3 = 12 \end{cases}$$

Liczba niewiadomych:

$$\text{n} = 3.$$

1. Macierz współczynników:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Macierz uzupełniona:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Obliczamy rzędy obu macierzy:

$$\det A = \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Wyznacznik jest niezerowy, dlatego rząd macierzy A wynosi 3 (taki był wymiar wyznacznika 3×3).

$$\mathrm{rz}(A) = 3.$$

Ponieważ rząd macierzy współczynników jest największy z możliwych, to rząd macierzy uzupełnionej również wynosi 3. (Z macierzy uzupełnionej możemy wyciągnąć minor, który jest równy wyznacznikowi macierzy A). Zatem:

$$\mathrm{rz}(U) = 3.$$

4. Zastosowanie Twierdzenia Kroneckera-Capellego:

$$\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(U) = 3.$$

oraz

$$\text{n} = 3.$$

Zgodnie z Twierdzeniem Kroneckera-Capellego rozważany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie (liczba niewiadomych = rząd macierzy współczynników = rząd macierzy uzupełnionej). Możemy ten układ rozwiązać np. stosując wzory Cramera. Otrzymamy wówczas, że:

5. Rozwiązania:

$$x_1 = 64$$

$$x_2 = -\frac{67}{3}$$

$$x_3 = -\frac{95}{3}$$