Wektory Własne i Wartości Własne

Gabriel Tyszka

19 czerwca 2025

Spis treści

1 Definicja i Intuicja Geometryczna

- **Wektory własne** to szczególne wektory, które podczas przekształcenia liniowego pozostają na swoich "prostych". Oznacza to, że macierz jedyne co z nimi robi, to je rozciąga lub ściska, bez zmieniania ich kierunku (poza ewentualnym odwróceniem).
  - Na przykład, dla macierzy, której kolumny to (3,0) oraz (1,2) (przekształcającej wektor $\hat{\imath}$ na [3] a $\hat{\jmath}$ na [1, 2]), wektor $\hat{\imath}$ (czyli oś OX) jest wektorem własnym, ponieważ jest rozciągany 3 razy i pozostaje na osi OX. Dowolny wektor z osi OX również zostanie rozciągnięty 3 razy i pozostanie na tej podprzestrzeni.
  - Innym, mniej oczywistym, wektorem własnym dla tego przekształcenia jest wektor $[-1, 1]$, który jest rozciągany 2 razy, pozostając na swojej prostej. Dowolny wektor na tej prostej zachowa się podobnie.
  - Dowolny inny wektor (nie będący wektorem własnym) zostanie "przekręcony"i spadnie z prostej, którą rozpina.
- **Wartości własne** to liczby przypisane każdemu wektorowi własnemu. Określają one, ile razy wektor ten jest mnożony (rozciągany lub ściskany) przez przekształcenie.
  - Wartość własna może być większa niż 1 (rozciągnięcie, np. 2), mniejsza niż 1 (ściskanie, np 1/2), ujemna (odwrócenie i ściskanie/rozciąganie, np. $-1/2$) lub równa 1 (wektor pozostaje na miejscu). Ważne jest to, że wektor zostaje na swojej prostej.

2 Obliczanie Wektorów Własnych i Wartości Własnych (Koncepcja)

- Symbolicznie, relację między macierzą przekształcenia (A), wektorem własnym (v) i wartością własną (λ) wyraża równanie:
$$Av = \lambda v$$
Oznacza to, że iloczyn macierzy A i wektora v daje ten sam wynik, co przeskalowanie wektora v przez liczbę λ.
- Znalezienie v i λ sprowadza się do przekształcenia równania:
  - Prawą stronę (λv) można zapisać jako iloczyn macierzy λI (gdzie I to macierz identyczności) i wektora v.
  - Równanie przyjmuje postać: $Av - \lambda Iv = 0$, co można zapisać jako:
$$(A - \lambda I)v = 0$$

- Poszukujemy niezerowych wektorów własnych ($v \neq 0$). Niezerowy wektor pomnożony przez macierz może dać wektor zerowy tylko wtedy, gdy macierz ta "ściska"przestrzeń w mniejszą liczbę wymiarów.
- Ten warunek ściskania odpowiada **zerowemu wyznacznikowi macierzy** $(A - \lambda I)$. Znalezienie wartości λ, dla których $\det(A - \lambda I) = 0$, pozwala znaleźć wartości własne.

Przykład: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$:

- Obliczamy:
$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (3-\lambda)(2-\lambda)$$
- Przyrównując do zera:
$$(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \text{ lub } 3$$
- Dla $\lambda = 2$ mamy macierz $(A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Szukamy niezerowych wektorów $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ takich, że:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- Rozwiązanie: $x = -y$, czyli wszystkie wektory rozpięte przez $[-1, 1]$.

3 Szybka Metoda dla Macierzy 2×2

Dla macierzy 2×2 istnieje znacznie bardziej bezpośrednia metoda znajdowania wartości własnych. Opiera się ona na trzech kluczowych faktach:

1. **Ślad macierzy (trace)**: suma elementów na przekątnej macierzy jest równa sumie jej wartości własnych. W praktyce oznacza to, że średnia arytmetyczna wartości własnych odpowiada średniej elementów na przekątnej. Przykładowo, dla macierzy z przekątnymi 8 i 6, średnia wartości własnych wynosi 7.
2. **Wyznacznik macierzy (determinant)**: obliczany jako $ad - bc$, jest równy iloczynowi wartości własnych. Intuicyjnie, wartości własne opisują działanie operatora w określonych kierunkach, a wyznacznik opisuje globalną zmianę objętości lub pola powierzchni.
3. **Odzyskiwanie liczb ze średniej i iloczynu**: znając średnią m i iloczyn p dwóch liczb (czyli wartości własnych), można je odzyskać ze wzoru:
$$\lambda = m \pm \sqrt{m^2 - p}$$
Jest to bezpośrednie zastosowanie wzoru różnicy kwadratów: $m^2 - p = d^2$, gdzie d to odległość od średniej.

Te dane (średnia i iloczyn wartości własnych) można łatwo odczytać bezpośrednio z macierzy, bez potrzeby wyznaczania wielomianu charakterystycznego.

Przykłady zastosowania

- **Przykład 1: Macierz z przekątnymi 8 i 6 (hipotetyczna)**

$$\begin{aligned} m &= \frac{8+6}{2} = 7 \quad \text{(średnia)} \\ p &= 40 \quad \text{(wyznacznik)} \\ d &= \sqrt{7^2 - 40} = \sqrt{49 - 40} = \sqrt{9} = 3 \\ \lambda_{1,2} &= 7 \pm 3 \Rightarrow \{4, 10\} \end{aligned}$$

- **Przykład 2:** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$m = \frac{3+1}{2} = 2$$
$$p = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = -1$$
$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$$

- **Przykład 3:** $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

$$m = \frac{2+8}{2} = 5$$
$$p = 2 \cdot 8 - 7 \cdot 1 = 16 - 7 = 9$$
$$d = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$
$$\lambda_{1,2} = 5 \pm 4 \Rightarrow \{1, 9\}$$

- **Przykład 4: Macierze Pauliego (z mechaniki kwantowej)**

  Macierze Pauliego mają postać:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  - Średnia przekątnych (a więc i średnia wartości własnych): 0
  - Wyznacznik: -1 (dla każdej z macierzy)
  - Wartości własne:
  $$\lambda = 0 \pm \sqrt{0^2 - (-1)} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$
  - W fizyce wartości własne ± 1 opisują pomiar spinu w danym kierunku.