Formy Kwadratowe, Określoność i Kryterium Sylvestera

Gabriel Tyszka

20 czerwca 2025

Spis treści

1 Czym jest forma kwadratowa?

Forma kwadratowa to specyficzny rodzaj funkcji h, która odwzorowuje wektor x z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (np. trójwymiarowy wektor $[x_1, x_2, x_3]^T$) na pojedynczą wartość rzeczywistą (skalar).

Definicja 1: Funkcja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest nazywana formą kwadratową, jeśli można ją przedstawić w postaci $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, gdzie A jest rzeczywistą macierzą symetryczną o wymiarach $n \times n$. Macierz A jest nazywana macierzą formy kwadratowej h.

Równoważnie, wzór na formę kwadratową można wyrazić w postaci sumy:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Kluczowa cecha: Z powyższej definicji wynika, że wszystkie człony w wyrażeniu formy kwadratowej muszą być **stopnia drugiego** (kwadratowe). Oznacza to, że każdy składnik musi być iloczynem dwóch zmiennych (np. x_1x_2) lub zmiennej podniesionej do kwadratu (np. x_1^2).

Przykłady form kwadratowych:

- $h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$
- $h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$

Przykłady funkcji, które NIE są formami kwadratowymi:

- $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2$: Nie jest formą kwadratową ze względu na obecność terminu liniowego x_2 (stopnia pierwszego).
- $g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1$: Nie jest formą kwadratową ze względu na obecność stałego terminu $+1$ (stopnia zerowego).

2 Określoność formy kwadratowej

W klasie wszystkich form kwadratowych szczególną rolę odgrywają formy określone. Określoność formy kwadratowej $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ opisuje znak wartości, jaką forma przyjmuje dla niezerowych wektorów $\mathbf{x}$.

Definicje rodzajów określoności:

- **Dodatnio określona:** jeżeli $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- **Ujemnie określona:** jeżeli $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- **Dodatnio półokreślona:** jeżeli $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **Ujemnie półokreślona:** jeżeli $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

- **Nieokreślona:** jeżeli nie zachodzi żaden z poprzednich warunków. Oznacza to, że forma przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne (lub zero, ale nie spełnia warunków półokreśloności dla wszystkich $\mathbf{x}$) [3].

Przykłady form kwadratowych:

- **Forma nieokreślona:**
$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$
ponieważ
$$h_1(1,0,0) = -1 \quad \text{(wartość ujemna)}, \quad h_1(0,1,0) = 1 \quad \text{(wartość dodatnia)}$$

- **Forma dodatnio określona:**
$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$
ponieważ $h(x_1, x_2) > 0$ dla każdego $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

- **Forma ujemnie określona:**
$$g(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$$
ponieważ $g(x_1, x_2) < 0$ dla każdego $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

3 Kryterium Sylvestera

Kryterium Sylvestera jest jedną z najczęściej stosowanych metod badania określoności form kwadratowych. Opiera się na znakach minorów wiodących (wyznaczników głównych) macierzy A formy kwadratowej.

Niech $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą symetryczną formy kwadratowej $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Minory wiodące D_j to wyznaczniki podmacierzy uzyskanych przez wzięcie pierwszych j wierszy i pierwszych j kolumn macierzy A.

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix}$$

Warunki określoności według Kryterium Sylvestera:

1. **Dodatnio określona:** Forma kwadratowa h jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej minory wiodące są dodatnie: $D_j > 0$ dla $j = 1, \ldots, n$.

2. **Ujemnie określona:** Forma kwadratowa h jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy minory wiodące naprzemiennie zmieniają znak, zaczynając od ujemnego: $(-1)^j D_j > 0$ dla $j = 1, \ldots, n$. Oznacza to, że $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$ itd.

Przykład: Dla formy kwadratowej $h(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2$ mamy macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Minory wiodące wynoszą:

- $D_1 = 3 > 0$
- $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2 > 0$
- $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3(1 \cdot 2 - 0 \cdot 0) - 1(1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1)) + (-1)(1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) = 3(2) - 1(2) - 1(1) =$
  $6 - 2 - 1 = 3 > 0$

Ponieważ wszystkie $D_j > 0$, forma h jest dodatnio określona.

Twierdzenie Forma kwadratowa $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, gdzie $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jest:

1. **dodatnio półokreślona** wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne, tj.
$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_p} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_pi_1} & a_{i_pi_2} & \cdots & a_{i_pi_p} \end{vmatrix} \geq 0,$$
dla $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, $1 \leq p \leq n$.

2. **ujemnie półokreślona** wtedy i tylko wtedy, gdy
$$(-1)^p \begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_p} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_pi_1} & a_{i_pi_2} & \cdots & a_{i_pi_p} \end{vmatrix} \geq 0,$$
dla $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, $1 \leq p \leq n$.

Przykład Dla formy kwadratowej $h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 2x_3^2$ mamy macierz A:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Badamy jej minory główne:

- **Trzy minory główne stopnia jeden** (elementy na przekątnej): $a_{11} = -1$ $a_{22} = -2$ $a_{33} = -2$
- **Trzy minory główne stopnia dwa**: $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - (-1)(-1) = 2 - 1 = 1 > 0$
  $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-2) - 0 \cdot 0 = 4 - 0 = 4 > 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 1 > 0$
- **Jeden minor główny stopnia trzy** (wyznacznik całej macierzy) [8]: $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1((-2)(-2)-$
  $0 \cdot 0) - (-1)((-1)(-2) - 0 \cdot 1) + 1((-1) \cdot 0 - (-2) \cdot 1) = -1(4) + 1(2) + 1(2) = -4 + 2 + 2 = 0$ [8]

Zauważmy, że dla $p = 1$ (minory stopnia jeden) $(-1)^1 \cdot (\text{minor główny}) \geq 0$ daje nam $-(-1) \geq 0$, $-(-2) \geq 0$, $-(-2) \geq 0$, co jest spełnione ($1 \geq 0$, $2 \geq 0$, $2 \geq 0$). Dla $p = 2$ (minory stopnia dwa) $(-1)^2 \cdot (\text{minor główny}) \geq 0$ daje nam $1 \cdot 1 \geq 0$, $1 \cdot 4 \geq 0$, $1 \cdot 1 \geq 0$, co jest spełnione. Dla $p = 3$ (minor stopnia trzy) $(-1)^3 \cdot (\text{minor główny}) \geq 0$ daje nam $-1 \cdot 0 \geq 0$, co jest spełnione. Z twierdzenia wynika, że forma kwadratowa h jest ujemnie półokreślona.