Liniowa Niezależność Wektorów

Gabriel Tyszka

21 czerwca 2025

Spis treści

1 Definicja Liniowej Niezależności Wektorów

W przestrzeni liniowej wektory nazywane są **liniowo niezależnymi**, jeśli żaden z nich nie może być przedstawiony jako kombinacja liniowa skończenie wielu innych wektorów ze zbioru. Jest to fundamentalna własność algebraiczna rodziny wektorów danej przestrzeni liniowej. Rodzina wektorów, która nie jest liniowo niezależna, nazywa się **liniowo zależną**.

Bardziej formalnie, niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K (np. liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$). Podzbiór S przestrzeni V nazywany jest **liniowo niezależnym**, gdy dla każdego skończonego podzbioru różnych wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ze zbioru S i każdego układu skalarów $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, zachodzi:

$$\text{Jeśli } a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}, \text{ to } a_i = 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wektor $\mathbf{0}$ oznacza tutaj wektor zerowy w przestrzeni V.

Zbiór wektorów jest **liniowo zależny** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka skończona liczba różnych wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ze zbioru S oraz takie skalary $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, z których co najmniej jeden jest niezerowy, że ich kombinacja liniowa jest równa wektorowi zerowemu:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Równoważnie, zbiór jest liniowo zależny, jeżeli pewien jego element należy do powłoki liniowej (ang. span) reszty zbioru, to znaczy pewien jego element jest kombinacją liniową pozostałej części rodziny. Oznacza to, że co najmniej jeden z wektorów jest "nadmiarowy"i nie dodaje niczego nowego do podprzestrzeni rozpinanej przez pozostałe wektory.

2 Interpretacja Geometryczna Niezależności

Geometrycznie, liniowa niezależność wektorów oznacza, że każdy wektor w zbiorze "dodaje nowy wymiar"do podprzestrzeni rozpinanej przez pozostałe wektory.

2.1 W przestrzeni 2D (płaszczyźnie)

Dwa wektory są liniowo niezależne, jeśli nie są równoległe. Jeśli są liniowo niezależne, ich kombinacje liniowe mogą rozpiąć całą płaszczyznę. W przeciwnym razie, jeśli są równoległe (tzn. leżą na tej samej linii przechodzącej przez początek układu), są liniowo zależne, a ich kombinacje liniowe mogą tworzyć jedynie wektory leżące na jednej linii. Przykład geograficzny ilustruje tę ideę: wektory "na północ"i "na wschód"są liniowo niezależne, ponieważ nie można opisać jednego za pomocą drugiego. Natomiast dodanie wektora "na północny wschód"czyni zbiór liniowo zależnym, ponieważ jest on kombinacją liniową dwóch pierwszych i staje się zbędny do opisania położenia na płaszczyźnie.

2.2 W przestrzeni 3D

Dwa wektory w przestrzeni 3D, które są liniowo niezależne, rozpinają płaszczyznę przechodzącą przez początek układu. Trzy wektory w przestrzeni 3D są liniowo niezależne, jeśli trzeci wektor nie leży na płaszczyźnie rozpiętej przez dwa pozostałe wektory. W takim przypadku, dodanie trzeciego wektora pozwala na dostęp do wszystkich trzech wymiarów przestrzeni. Jeśli trzeci wektor leży na płaszczyźnie rozpiętej przez dwa pierwsze, jest on liniowo zależny i nie dodaje niczego nowego do podprzestrzeni, co oznacza, że jest "nadmiarowy".

W ogólności, aby opisać dowolne położenie w n-wymiarowej przestrzeni, potrzeba n liniowo niezależnych wektorów. Koncepcja liniowej niezależności jest kluczowa dla definicji bazy przestrzeni, która jest zbiorem liniowo niezależnych wektorów tworzących (rozpinających) daną przestrzeń.

3 Przykład Wektorów Niezależnych w $\mathbb{R}^3$

Standardowymi wektorami bazowymi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są wektory:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1,0,0)\\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,0)\\ \mathbf{e}_3 &= (0,0,1)\end{aligned}$$

Te wektory są liniowo niezależne. Aby to wykazać, należy sprawdzić, czy jedynym sposobem, aby ich kombinacja liniowa była równa wektorowi zerowemu, jest użycie samych zerowych skalarów. Rozważmy równanie:

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

Podstawiając współrzędne wektorów, otrzymujemy:

$$a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

Co po wykonaniu działań daje:

$$(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$$

Z tego równania wynika, że $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, i $a_3 = 0$. Ponieważ wszystkie skalary muszą być zerowe, aby kombinacja liniowa wektorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ dała wektor zerowy, wektory te są liniowo niezależne. Geometrycznie, wektory te wskazują wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych osi (X, Y, Z) i razem rozpinają całą trójwymiarową przestrzeń $\mathbb{R}^3$.