Funkcje Wypukłe i Wklęsłe w Optymalizacji

Gabriel Tyszka

21 czerwca 2025

Spis treści

1 Pojęcie Funkcji Wypukłej

W matematyce, funkcja rzeczywista jest nazywana **wypukłą**, jeśli odcinek linii między dowolnymi dwoma różnymi punktami na wykresie funkcji leży powyżej lub na wykresie między tymi dwoma punktami. Równoważnie, funkcja jest wypukła, jeśli jej *epigraf* (zbiór punktów na wykresie funkcji lub powyżej niego) jest zbiorem wypukłym. Mówiąc prościej, wykres funkcji wypukłej ma kształt filiżanki ($\cup$). Funkcje wypukłe odgrywają ważną rolę w wielu obszarach matematyki, a szczególnie w problemach optymalizacji. Na przykład, ściśle wypukła funkcja na zbiorze otwartym ma co najwyżej jedno minimum.

2 Pojęcie Funkcji Wklęsłej

Funkcja f jest nazywana **wklęsłą** (lub ściśle wklęsłą), jeśli $-f$ (funkcja f pomnożona przez -1) jest wypukła (lub ściśle wypukła). Wykres funkcji wklęsłej ma kształt czapki ($\cap$).

3 Wybrana Charakterystyka Wypukłości Funkcji

Jedną z fundamentalnych i najczęściej używanych definicji funkcji wypukłej jest ta oparta na nierówności. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ (gdzie X jest wypukłym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni wektorowej) jest nazywana *wypukłą* wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:

1. Dla wszystkich $0 \leq t \leq 1$ i wszystkich $x_1, x_2 \in X$ zachodzi nierówność:

$$f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

   Prawa strona tej nierówności reprezentuje prostą linię między punktami $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ na wykresie funkcji f, w zależności od parametru t. Lewa strona reprezentuje wartość funkcji f w punkcie leżącym na odcinku (x_1, x_2) na osi x.

   Warunek ten wymaga, aby prosta linia łącząca dowolne dwa punkty na wykresie funkcji f znajdowała się powyżej wykresu funkcji (lub pokrywała się z nim).

   Funkcja f jest nazywana *ściśle wypukłą*, jeśli w powyższej nierówności znak "$\leq$" zostanie zastąpiony znakiem "$<$". Funkcja ściśle wypukła oznacza, że prosta linia między dowolną parą punktów na wykresie f znajduje się ściśle powyżej tego wykresu, z wyjątkiem punktów końcowych (gdzie się przecina z wykresem).

3.1 Dodatkowe Właściwości i Charakterystyki

- Druga Pochodna: Funkcja dwukrotnie różniczkowalna jednej zmiennej jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej druga pochodna jest nieujemna na całej jej dziedzinie ($f''(x) \geq 0$). Wizualnie, funkcja wypukła "zakrzywia się w górę", bez żadnych zagięć w drugą stronę (punktów przegięcia). Dla funkcji ściśle wypukłej, warunek $f''(x) > 0$ we wszystkich punktach jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym. Na przykład, funkcja $f(x) = x^4$ jest ściśle wypukła, choć jej druga pochodna $f''(x) = 12x^2$ wynosi zero dla $x = 0$. Dla funkcji wklęsłej, ponieważ jest ona definiowana jako funkcja, której przeciwieństwo jest wypukłe, dwukrotnie różniczkowalna funkcja jednej zmiennej jest wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy jej druga pochodna jest niepozytywna na całej jej dziedzinie ($f''(x) \leq 0$).

- Styczna: Funkcja różniczkowalna jednej zmiennej jest wypukła na przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres leży powyżej wszystkich swoich stycznych: $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$ dla wszystkich x i y w przedziale.

4 Przykład Zastosowania Wypukłości do Zagadnień Optymalizacji

Wypukłość jest kluczowym pojęciem w **optymalizacji wypukłej**, która jest poddziedziną optymalizacji matematycznej, zajmującą się problemem minimalizacji funkcji wypukłych na zbiorach wypukłych (lub, równoważnie, maksymalizacji funkcji wklęsłych na zbiorach wypukłych).

Kluczowe właściwości, które sprawiają, że funkcje wypukłe są użyteczne w optymalizacji, to:

- Każde lokalne minimum funkcji wypukłej jest również globalnym minimum.
- Jeśli funkcja celu jest *ściśle* wypukła, to problem ma co najwyżej jeden punkt optymalny (minimum).
- Zbiór rozwiązań optymalnych jest zbiorem wypukłym.

4.1 Przykład Zastosowania: Optymalizacja Portfela

Jednym z przykładów zastosowań optymalizacji wypukłej jest **optymalizacja portfela**. W finansach, zarządzanie portfelem często polega na znalezieniu alokacji aktywów, która minimalizuje ryzyko (zazwyczaj mierzone wariancją) dla danego poziomu oczekiwanego zwrotu, lub maksymalizuje zwrot dla danego poziomu ryzyka. Problem ten może być sformułowany jako problem optymalizacji wypukłej, gdzie funkcja ryzyka (np. wariancja portfela) jest funkcją wypukłą, a ograniczenia (np. budżet, oczekiwany zwrot) definiują zbiór wypukły. Dzięki temu, że problem jest wypukły, możemy być pewni, że każde znalezione lokalne optimum jest również globalnym optimum, co jest niezwykle cenne w praktyce.