Ciencia de la Computación

Álgebra Abstracta

Docente LUIS FERNANDO DIAS BASURCO

Ejercicios de codificación y decodificación

Entregado el 23/11/2024

Cuela Rodríguez Alonzo Estéfano

Semestre III

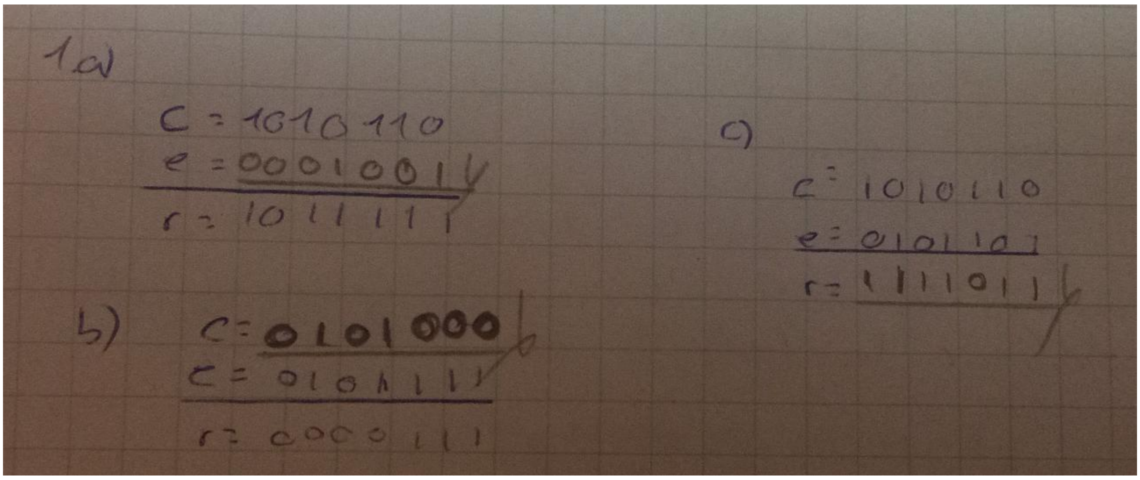
2024-2

"El alumno declara haber realizado el presente trabajo de acuerdo a las normas de la Universidad Católica San Pablo"

____

Ejercicios de Codificación y Decodificación

1. Sea C un conjunto de palabras codificadas, donde $C \in Z_2^7$. Se dan dos datos de los tres términos e (patrón de error), r (palabra recibida) y c (palabra codificada). Determine el tercer término
   a. $c = 1010110, r = 1011111$
   b. $e = 0101111, r = 0000111$
   c. $c = 1010110, e = 0101101$



2. Un canal simétrico binario tiene probabilidad p=0.05 de transmisión incorrecta. Si se transmite la palabra codificada c=011011101. ¿cuál es la probabilidad de que
   a. Recibamos 011111101
   b. Recibamos 111011100
   c. Ocurra un solo error
   d. Ocurra un error doble

2.

a)

c = 0110 11101

Recibamos 0111 11101

p = 0.05 → probabilidad de error

Comparamos 0110 11101 y 0111 11101

0110 11101] Hay 1 error en la cuarta pos
0111 11101]

- 1 todo bien

0.05 prob de error

0.95 sigue bien

$(0,95)^3(0.05)(0.95)^5 = 0,0332$

b) Recibamos 111011100

Comparamos 111011100 con 011011101

111011100] Dos errores 1 al inicio y
011011101] otro al final

$(0.05)(0.95)^7(0.05) = 0.00175$

c) Ocurra un error

Sabemos que c = 011011101 $\binom{9}{1}(0,05)(0.95)^8 \rightarrow 0.2985$

d) Ocurra un error doble (dos errores)

$\binom{9}{2}(0.05)(0.95)^7 = 1.2570$

Kanto

3. Sea $E: Z_2^3 \rightarrow Z_2^9$ la función de codificación para el código de repetición triple (9,3)
   a. Si $D: Z_2^9 \rightarrow Z_2^3$ es la función de decodificación correspondiente, aplique D para decodificar las palabras recibidas: (i) 111101100; (ii) 000100011; (iii) 010011111
   b. Encuentre tres palabras recibidas diferentes r para las que $D(r) = 000$
   c. Para $w = 101$, ¿cuánto vale $|D^{-1}(w)|$

3.

$E: \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^9$

a) Si $D: \mathbb{Z}_2^9 \to \mathbb{Z}_2^3$, decodificar

i) 111101100   111 101 100

101

ii) 000100011   000 100 011

000

iii) 010011111   010 011 111

011

b) Encontrar tres palabras diferentes r para las que $D(r)=000$

i) 010 000 100

000

ii) 000 000 000

000

iii) 011 000 000

000

c) Para $w=101$ ¿Cuánto vale $D^{-1}(w)$?

---/---/---

Para el 1er bit = 4 ó para las demás también hay 4 posibilidades

1 _ _ / 1 _ _ / 1 _ _

0   1   1

1   1   0

1   0   1

$4^3 = \underline{64}$

4. El código de cinco repeticiones (5m,m) tiene la función de codificación $E: Z_2^m \to Z_2^{5m}$, donde $E(w) = wwwww$. La decodificación con $D: Z_2^{5m} \to Z_2^m$ se realiza mediante la regla de la mayoría
   a. Si p=0.05 y m=3 ¿cuál es la probabilidad de la transmisión y decodificación correcta de la señal $w = 000$
   b. Responda la parte a. para el mensaje 110 en vez de 000
   c. Para m=2 decodifique la palabra recibida $r = 0111001001$

d. Si m=2, encuentre 3 palabras recibidas r tales que $D(r) = 00$

e. Si m=2, y $D: Z_2^{10} \to Z_2^2$ ¿cuánto vale $|D^{-1}(w)|$ para $w = 01$

19 11 24

4. $(5m, m)$ $E: \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^{5m}$

a) p=0.05 m=3
¿Cual es la probabilidad de la transmisión y decodificación correcta de la señal w=000

---/---/---/---/---

$$\left((0.95)^5 + \binom{5}{1}(0.95)^4(0.05) + \binom{5}{2}(0.95)^3(0.05)^2\right)^3$$

al cubo para las tres bits

0.9965

b) Responder la parte a para el mensaje 110 en vez de 000

Pues es lo mismo ya que analizamos los casos con 5 unos, 4 unos y 3 unos eso dos veces y el 0 ya lo conocemos = 0.9965

c) Para m=2, decodificar r=0111001001

$\mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^{10}$

01/11/00/10/01

01010/11001

01

d) Si m=2, encuentre 3 palabras diferentes para $D(r) = 00$

i) 00/00/00/00/00 → 00 0000000000

ii) 00/10/10/00/01 → 00 0010100001

iii) 11/01/00/10/00 → 00 1101001000

e. Si $m=2$ y $D: \mathbb{Z}_2^{10} \to \mathbb{Z}_2^2$ ¿Cuanto vale $D^{-1}(w)$ para $w=01$?

$$\_\,\_\,1\,\_\,\_\,1\,\_\,\_\,1\,\_\,\_\,1\,\_\,\_ \to \underline{0}\,\underline{1}$$

· Para el 1er bit

5 ceros	5 unos
$\binom{5}{5}$	$\binom{5}{5}$
4 ceros	4 unos
$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{4}$
3ceros	3unos
$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{1}$

$$\left[\binom{5}{5}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}\right]^2$$

$$1+5+10=16^2=\underline{256}$$

5. Si $W = Z_2^2$, sea $E: W \to Z_2^6$dado por $E(w) = www$,
   a. Enumere los elementos de $S(101010,1)$ y $S(111111,1)$
   b. Decodifique las palabras recibidas
      - 110101
      - 101011
      - 001111
      - 110000

5. $W = \mathbb{Z}_2^2$, sea $E: W \to \mathbb{Z}_2^6$

a. Enumere los elementos de $S(101010, 1)$ y $S(111111, 1)$

Como el radio es 1 entonces solo puede haber 1 error

$\binom{6}{1} + 1 = 7$ para $S(101010, 1)$

para $S(111111, 1)$ = como usa "y" entonces $= 7^2 = 49$

b) Decodificar $\mathbb{Z}_2^6 \to \mathbb{Z}_2^2$

- 110101 $\to$ 01
- 101011 $\to$ 10
- 001111 $\to$ 11
- 110000 $\to$ 00

6. Si $x \in Z_2^{10}$, determine $|S(x,1)|, |S(x,2)|$

6. Si $x \in Z_2^{10}$, determine $|S(x,1); S(x,2)|$

$$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}$$

$1+10+45=\underline{56}$

7. Sea $E: Z_2^5 \rightarrow Z_2^{25}$ una función de decodificación en que la distancia mínima entre las palabras codificadas es 9
   a. ¿Cuál es el valor de k tal que podamos detectar errores de peso $\leq$k?
   b. Si queremos corregir errores de peso n, ¿cuál es el valor máximo de n?

7. Sea $E = Z_2^5 \rightarrow Z_2^{25}$, la distancia mínima es 9

a) ¿Cual es el valor de K tal que podamos detectar errores de peso $\leq K$?

$K+1=9$

$K=\underline{8}$

b) ¿ Si queremes corregir errores de peso n, ¿Cual es el valor de n?

$2n+1=9$

$2n=8$

$n=\underline{4}$

8. Para cada una de las siguientes funciones de decodificación, encuentre la distancia mínima entre las palabras codificadas. Analice la capacidad de detección y corrección de errores de cada código
   a. $E: Z_2^2 \rightarrow Z_2^5$
      $00 \rightarrow 00001$
      $01 \rightarrow 01010$
      $10 \rightarrow 10100$
      $11 \rightarrow 11111$
   b. $E: Z_2^2 \rightarrow Z_2^{10}$
      $00 \rightarrow 00000\ 00000$
      $01 \rightarrow 00000\ 11111$
      $10 \rightarrow 11111\ 00000$
      $11 \rightarrow 11111\ 11111$

8. Encontrar la distancia minima, ~~entre~~ detección de errores y corrección de errores en

a) $E: \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^5$

e_1	00	$\to$ 00001	$d(e_1,e_2)=3$
e_2	01	$\to$ 01010	$d(e_1,e_3)=3$
e_3	10	$\to$ 10100	$d(e_2,e_3)=4$
e_4	11	$\to$ 11111	$d(e_2,e_4)=3$
			$d(e_3,e_4)=3$
			$d(e_1,e_4)=4$

distancia minima $=3$

$k+1=3$

$k=2$ detección de errores

$2k+1=3$ corrección de errores.

$k=1$

b. $E: \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^5$

e_1	00	$\to$ 00000 00000	$d(e_1,e_2)=5$
e_2	01	$\to$ 00000 11111	$d(e_1,e_3)=5$
e_3	10	$\to$ 11111 00000	$d(e_2,e_3)=10$
e_4	11	$\to$ 11111 11111	$d(e_2,e_4)=5$
			$d(e_3,e_4)=5$

distancia minima $=5$ $\quad d(e_1,e_4)=10$

$k+1=5$ detecta 4 errores

$2k+1=5$ corrige 2 errores

9. Use la matriz de paridad definida por las ecuaciones

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\\w_5\\w_6\end{bmatrix} = H\cdot\left(E(w)\right)^t = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Para decodificar las siguientes palabras recibidas si se sabe que $E: Z_2^3 \to Z_2^6$

a) 111101
b) 110101
c) 001111
d) 100100

9. $E:\mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^6$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\\w_5\\w_6\end{bmatrix} = H.(E(w))^t = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

a) 1111~~0~~1

$$\underset{3\times 6}{\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}}\underset{6\times 1}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

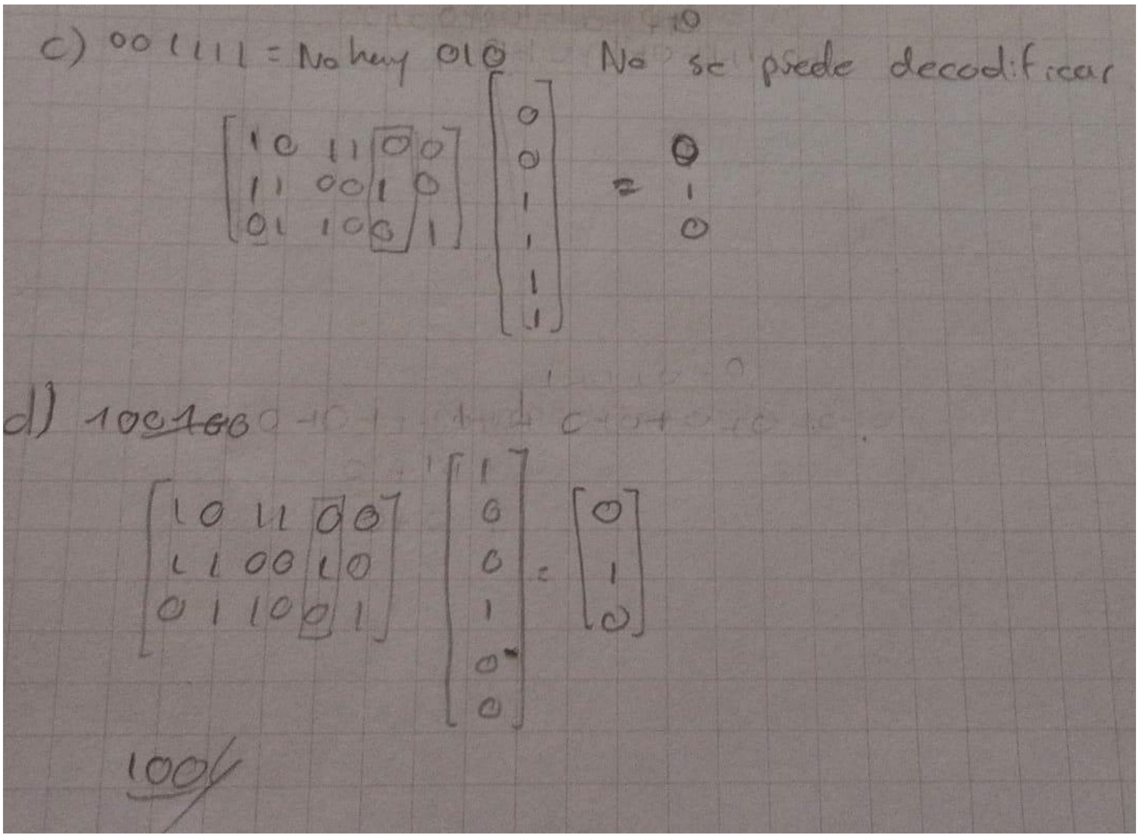
~~111~~

b) 110 101

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

No se puede decodificar

No esta en H



c) 001111 = No hay 010 No se puede decodificar

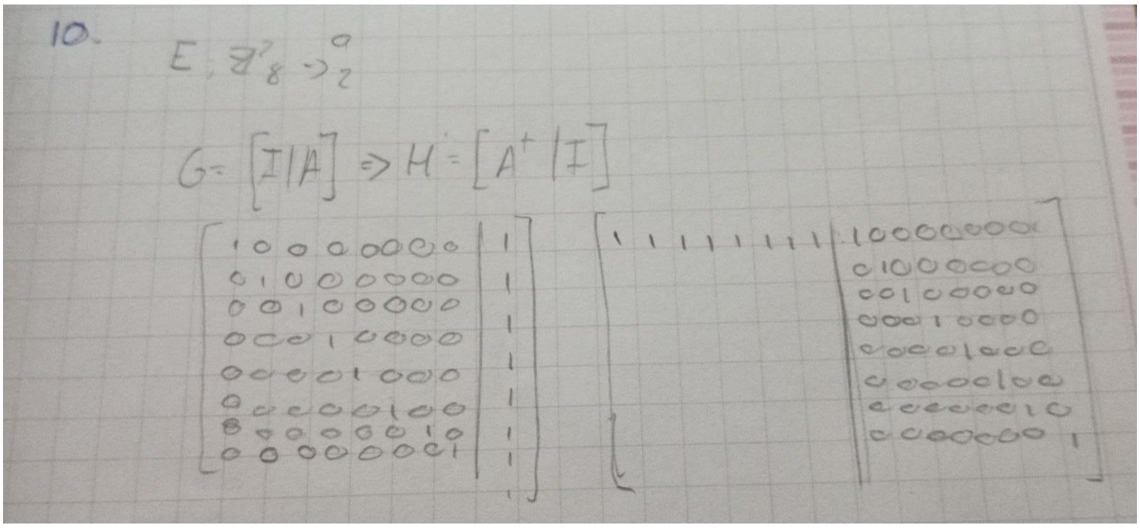
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

d) 100100

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

100%

10. Encuentre las matrices generadoras y de verificación de paridad para el esquema de codificación con verificación de paridad simple (9,8).
Para cualquier $w = w_1 w_2 \dots w_8 \in Z_2^8$, $E: Z_2^8 \rightarrow Z_2^9$, $E(w) = w_1 w_2 \dots w_8 w_9$ donde $w_9 = \sum_{i=1}^{8} w_i$ (suma módulo 2)



10.

$E: Z_8 \rightarrow {}^9_2$

$G = [I|A] \Rightarrow H = [A^t|I]$

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{array}\right]$$