BÀI GIẢNG

LÝ THUYẾT XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Hà Nội - 2011

MỞ ĐẦU

Lý thuyết Xác suất Thống kê là một bộ phân của Toán học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên và ứng dụng chúng vào thực tế. Ta có thể hiểu hiện tượng ngẫu nhiên là hiện tương không thể nói trước được nó có thể xảy ra hay không khi thực hiện một lần quan sát. Tuy nhiên, nếu tiến hành quan sát khá nhiều lần một hiệ tượng ngẫu nhiên trong các phép thử như nhau, ta có thể rút ra những kết luận khoa học về hiện tượng này.

Lý thuyết Xác suất cũng là cơ sở để nghiên cứu Thống kê – môn học nghiên cứu các phương pháp thu thập thông tin, chọn mẫu, xử lý thông tin nhằm rút ra các kết luận hoặc quyết định cần thiết.

Lý thuyết Xác suất Thống kê ngày phát triển theo tiến trình phát triển của xã hội, nó đóng vai trò rất quan trọng trong hầu hết mọi lĩnh vực của thế giới hiện đại, từ khoa học, công nghệ, đến kinh tế, chính trị, đến sức khỏe, môi trường,…

Ngày nay, máy tính đã giúp cho việc tính toán các vấn đề xác suất thống kê ngày càng trở nên dễ dàng, một khi đã có số liệu đúng đắn và mô hình hợp lý. Thế nhưng, bản thân máy tính không biết mô hình nào là hợp lý. Đấy là vấn đề của người sử dụng: cần phải hiểu được bản chất của các khái niệm và mô hình xác suất thống kê, thì mới có thể dùng chúng được. Chính vì vậy, mặc dù đã được giới thiệu ở bậc học Phổ thông, Lý thuyết Xác suất Thống kê được giảng dạy cho hầu hết các nhóm ngành ở bậc Đại học.

Chương trình học Môn Lý thuyết Xác suất Thống kế
tại Trường Đại học Thủy Lợi

1. ***Định nghĩa về xác suât***
2. ***Đại lượng ngẫu nhiên và phân phối xác suât***
3. ***Kỳ vọng và phương sai***
4. ***Một số phân phối xác suất thường gặp***
5. ***Mẫu ngẫu nhiên đơn giản và các hàm phân phối mẫu của các thống kê thường gặp***
6. ***Bài toán ước lượng***
7. ***Kiểm định giả thiết***
8. ***Hồi quy và tương quan tuyến tính***

Giáo trình chính:

Giáo trình ***Lý thuyết Xác suất Thống kê***, Bản dịch (*đã chỉnh lý lần thứ nhất*) - Tài liệu lưu hành nội bộ của Trường Đại học Thủy Lợi – (Bản dich từ "***Probability and statisics for Engineers and Scientists***" của Walpole. H. Myers, L. Myers)

Bài số 1

NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

I. NHẮC LẠI VÀ BỔ XUNG VỀ GẢI TÍCH TỔ HỢP

Những kiến thức phần này liên quan tới việc đếm các điểm mẫu.

1.Quy tắc cộng. Giải sử một công việc nào có k trường hợp để thực hiện:

Trường hợp 1 có n_1 cách thực hiện

Trường hợp 2 có n_2 cách thực hiện …..

Trường hợp k có n_k cách thực hiện

Khi đó ta có: $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ cách thực hiện công việc đã cho.

2.Quy tắc nhân. Giải sử một công việc nào đó được chia thành k giai đoạn:

Có n_1 cách thực hiện giai đoạn thứ nhất

Có n_2 cách thực hiện giai đoạn thứ hai…..

Có n_k cách thực hiện giai đoạn thứ k

Khi đó ta có: $n = n_1.n_2...n_k$ cách thực hiện công việc đã cho.

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách lựa chọn bữa ăn gồm có xúp, sandwich, món tráng miệng, và một đồ uống từ 4 món xúp, 3 kiểu sandwich, 5 món tráng miệng, và 4 đồ uống?
Giải: Do $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ và $n_4 = 4$, có $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 4 \times 3 \times 5 \times 4 = 240$ cách khác nhau để chọn bữa ăn.

3. Hoán vị.

a. Định nghĩa: Hoán vị của n phần tử là một bộ có thứ tự **gồm k phần tử khác nhau** chọn từ n phần tử đã cho **hoặc gồm đúng n phần tử đã cho**.

b. Công thức 1: Số các hoán vị của n phần tử phân biệt là $P_n = n!$.

c. Công thức 2: Số những hoán vị của n phần tử phân biệt được lấy k lần liên tiếp là

$${}_kP_r = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$ (còn gọi là chỉnh hợp chập k của n phần tử)

Ví dụ 2. Một đề tài nhánh của Hội Hóa học Mỹ có bao nhiêu cách bố trí 3 báo cáo viên cho 3 cuộc họp khác nhau nếu họ đều có thể thu xếp được bất kỳ một trong 5 ngày?
Giải: Tổng số cách bố trí bằng

$${}_5P_3 = \frac{5!}{2!} = (5)(4)(3) = 60.$$

Những hoán vị xuất hiện khi sắp xếp các phần tử theo một vòng tròn được gọi là những **hoán vị vòng quanh**.

d. Công thức 3: Số những hoán vị của n phần tử phân biệt được sắp xếp theo một vòng tròn là : $(n-1)!$.

Cho đến bây giờ ta đã xét hoán vị của những phần tử phân biệt. Trường hợp có các phần tử giống nhau thì sẽ thế nào.

e. Công thức 4: Số những hoán vị phân biệt của n phần tử mà trong đó n_1 phần tử thuộc kiểu thứ nhất, n_2 phần tử thuộc kiểu thứ hai, ... , n_k phần tử thuộc kiểu thứ k k là:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách sắp khác nhau để tạo thành một xâu đèn của cây thông Noel có 3 bóng đèn đỏ, 4 bóng đèn vàng, và 2 bóng đèn xanh với 9 ổ cắm?

Giải: Tổng số sắp xếp phân biệt là

$$\frac{9!}{3!4!2!} = 1260.$$

4. Phân hoạch. Tổ hợp.

Ta thường quan tâm đến số cách phân hoạch một tập gồm *n* phần tử thành *r* tập con được gọi là các **ngăn**. Một phân hoạch được hoàn thành khi giao của mọi cặp trong *r* tập con là tập rỗng $\varnothing$ và hợp của tất cả những tập con là tập ban đầu. Thứ tự của các phần tử bên trong một ngăn là không quan trọng.

a. Công thức 1: Ta phân hoạch một tập gồm n phần tử thành k ngăn sao cho:

có n_1 phần tử trong ngăn thứ nhất,

có n_2 phần tử trong ngăn thứ hai,...

có n_k phần tử trong ngăn thứ k

Khi đó số cách phân hoạch là:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

trong đó $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu cách phân cho 7 nhà khoa học vào một buồng ba và hai buồng đôi của một khách sạn?

Giải: Tổng số phân hoạch có thể có là

$$\binom{7}{3,\ 2,\ 2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210.$$

Trong nhiều bài toán ta quan tâm đến số cách chọn r phần tử từ n phần tử mà không quan tâm đến thứ tự. Những phép chọn này được gọi là các **tổ hợp**. Một tổ hợp thực chất là một phân hoạch có hai ngăn, một ngăn chứa r đối tượng được chọn còn ngăn kia chứa $(n-r)$ đối tượng còn lại.

b. Công thức 2: Số các tổ hợp của n phần tử phân biệt được tạo ra khi lấy r phần tử cùng một lúc là

$$\binom{n}{r} = C_n^k = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ví dụ 5. Hãy tìm số ủy ban gồm 2 nhà Hóa học và 1 nhà Vật lí mà có thể tạo được từ 4 nhà Hóa học và 3 nhà Vật lý.

Giả:

Số cách chọn 2 trong 4 nhà hóa học là $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$.

Số cách chọn 1 trong 3 nhà vật lí là $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$.

Sử dụng quy tắc nhân với $n_1 = 6$ và $n_2 = 3$, ta có thể tạo được: $n_1n_2 = (6)(3) = 18$ ủy ban với 2 nhà Hóa học và 1 nhà Vật lí. ▪

c. Chú ý: Ta có

i) Quy ước: $0! = 1$

ii) $C_n^k = C_n^{n-k}$

iii) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

5. Nhị thức Newton. $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

II. BIẾN CỐ VÀ QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

1.Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu.

Ví dụ mở đầu: Khi cho cuộn dây quay đều trong từ trường của một thanh nam châm, kết quả là chắc chắn xuất hiện dòng điện trong cuộn dây

Đây là một ***phép thử không ngẫu nhiên***.

Khi gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất, ta không đoán chắc chắn được kết quả. Chỉ biết được kết quả là xuất hiện số chấm trong {1, …, 6}.

Đây là một ***phép thử ngẫu nhiên***.

Như vậy: Một phép thử ngẫu nhiên luôn thỏa hai đặc tính:

1. ***Không biết chắc kết quả nào sẽ xảy ra***

2. Nhưng biết được các kết quả sẽ xảy ra

Ta còn gặp rất nhiều phép thử ngẫu nhiên khác như: quan sát thị trường chứng khoán, chơi xổ số và các trò may rủi, thống kê tai nạn và bảo hiểm, thống kê khách hàng đến các máy rút tiền ATM, đếm số lần gọi đến các tổng đài, xét chất lượng sản phẩm, quan sát thời tiết, xét khả năng phòng thủ trong quân sự,…

Việc thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản để quan sát một hiện tượng nào đó được gọi là một ***phép thử ngẫu nhiên***, ở đây các kết quả của nó không dự đoán trước được. Do bài giảng này chỉ xét các phép thử ngẫu nhiên, nên ta gọi tất chúng là phép thử.

a. Định nghĩa. Tập hợp tất cả những kết quả có thể của một phép thử thống kê được gọi là **không gian mẫu** và được ký hiệu bởi S (hoặc Ω).

Mỗi kết quả trong không gian mẫu được gọi là một **phần tử** của không gian mẫu, hoặc đơn giản là một **điểm mẫu**.

b. Cách mô tả không gian mẫu:

+ Khi không gian mẫu có hữu hạn phần tử, ta có thể ***liệt kê*** những phần tử .

+ Khi không gian mẫu có vô hạn phần tử, hoặc các phần tử có thuộc tính chung: ta có thể mô tả bằng ***mệnh đề*** hoặc ***quy tắc***

+ Ta cũng có thể dùng ***sơ đồ hình cây.***

Ví dụ 6. Khi tung một đồng xu không gian mẫu S có thể viết là: $S = \{H, T\}$, trong đó H và T tương ứng với "heads" và "tails", nghĩa là "ngửa" và "sấp".

Ví dụ 7. Khi gieo một con xúc sắc:

+ Nếu ta quan tâm đến số chấm xuất hiện trên mỗi mặt thi không gian mẫu là: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

+ Nếu ta quan tâm đến mặt chẵn hay lẻ (số chấm xuất hiện trên mặt là chẵn hay lẻ) thì không gian mẫu là: $S = \Omega = \{chan, le\}$

Ví dụ 8. Khi tung hai đồng xu, với ký hiệu S: sấp còn N: ngửa khi đó không gian mẫu là:

$$\Omega = \{SS, SN, NN, NS\}$$

Ví dụ 9. Lấy ngẫu nhiên một điểm nằm trong miền hình chữ nhật trên mặt phẳng tọa độ Oxy với kích thước $[0;3]\times[0;2]$, khi đó không gian mẫu là:

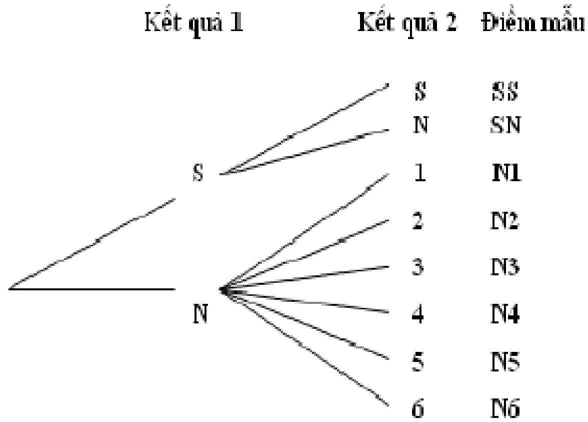
$$S = \Omega = \left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 2\right\}$$

Ví dụ 10. Xét phép thử là tung một đồng xu.

+ Nếu xuất hiện mặt sấp xuất thì ta tung đồng xu đó lần thứ hai.

+ Nếu xuất hiện mặt ngửa thì ta tiếp tục tung một con xúc xắc được tung một lần.

Trong trường hợp này ta đi xây dựng sơ đồ cây như hình vẽ để xác định không gian mẫu. Bây giờ, những con đường khác nhau dọc theo các cành cây đi tới những điểm mẫu khác biệt.



Từ đó ta xác định được không gian mẫu là :

$$\Omega = \left\{SS; NN; N1; N2; N3; N4; N5; N6\right\}.$$

c. Cách xây dựng không gian mẫu :

+ Đặt tên cho các phần tử có mặt hoặc các bước hình thành phép thử

+Mô tả điểm mẫu theo các kết quả xảy ra trong phép thử.

2. Biến cố

a. Định nghĩa. Các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là **biến cố**. Như vậy biến cố của một phép thử chính là mỗi tập con của không gian mẫu.

Ký hiệu biến cố : Dùng các chữ in hoa như A, B, C…

Chú ý

- Mỗi điểm mẫu là một biến cố và được gọ là ***biến cố sơ cấp***.
- ***Biến cố không thể*** là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử, ký hiệu là $\varnothing$.
- ***Biến cố chắc chắn*** là biến cố luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử, nó tương ứng với chính không gian mẫu S (hay Ω) nên ký hiệu là S (hay Ω).

b. Quan hệ giữa các biến cố. Cho A và B là hai biến cố của một phép thử với không gian mẫu S. Khi đó :

- Biến cố A được gọi là ***kéo theo*** biến cố B, ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B cũng xảy ra.
- Biến cố A được gọi là ***tương đương*** với biến cố B, ký hiệu $A = B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại.
- ***Biến cố đối*** của biến cố A, ký hiệu $\overline{A}$, là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

• ***Hợp (tổng) của hai biến cố*** A và B, ký hiệu là $A \cup B$ (hoặc $A + B$) là biến cố xảy ra nếu có ít nhất một biến cố nào đó trong các biến cố A hoặc B xảy ra. Nói cách khác : $A \cup B$ là biến cố gồm các điểm mẫu hoặc thuộc A hoặc thuộc B.

Định nghĩa hợp của n biến cố cũng được định nghĩa tương tự : $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

• ***Giao (tích) của hai biến cố*** A và B, kí hiệu $A \cap B$ (hoặc AB) là biến cố xảy ra nếu cả A và B cùng xảy ra. Nói cách khác $A \cap B$ là biến cố gồm các điểm mẫu thuộc cả A và B.

Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố liên quan đến cùng một phép thử, thì ***giao*** (hay ***tích***) của chúng, ký hiệu là $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

• Hai biến cố A và B được gọi là ***xung khắc*** nếu $A \cap B = \varnothing$.

Ví dụ 11. A là biến cố "*ra số chấm chẵn*" khi gieo một con xúc xắc , thì $\overline{A}$ = "*ra số chấm lẻ*"

Ví dụ 12. Xét biến cố $A = \{2, 4, 6\}$, biến cố $B = \{4, 5, 6\}$ và biến cố $C = \{1,2,4,6\}$ là những tập con của cùng không gian mẫu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Khi đó:

+ Ta có A kéo theo C, tức là $A \subset C$
+ $\overline{A} = \{1,3,5\}$, $\overline{B} = \{1,2,3\}$, $A \cap B = \{4,6\}$, $A \cup B = \{2,4,5,6\}$.

Ví dụ 13. Xét phép thử : T = gieo một con xúc xắc cân đối và các biến cố :

A_i = "*Xuất hiện i chấm*",
A = "*Xuất hiện chấm chẵn*",
B = "*Xuất hiện chấm chia hết cho* 3".

Khi đó

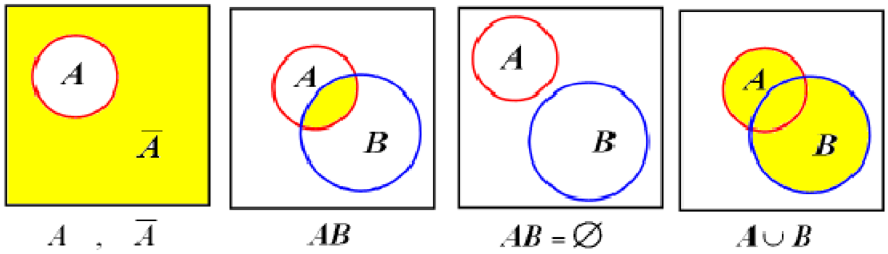
+ $A = A_2 \cup A_4 \cup A_6$, $B = A_3 \cup A_6$,
+ $AB = A_6$.
+ Các biến cố : $A_1, A_2, \ldots, A_6$ đôi một xung khắc.

Ví dụ 14. Có ba xạ thủ **A, B, C** cùng bắn vào một mục tiêu. Gọi :

A là biến cố "xạ thủ **A** bắn trúng"
B là biến cố "xạ thủ **B** bắn trúng"
C là biến cố "xạ thủ **C** bắn trúng"

Khi đó: $M = ABC$ là biến cố "cả ba xạ thủ bắn trúng"
$N = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ là biến cố "cả ba xạ thủ bắn trượt"
$P = A \cup B \cup C$ là biến cố "có ít nhất một xạ thủ bắn trúng"
$Q = AB \cup BC \cup CA$ là biến cố "có ít nhất hai xạ thủ bắn trúng"
$R = A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$ là biến cố "có đúng một xạ thủ bắn trúng"
$U = \overline{A}\overline{B} \cup \overline{B}\overline{C} \cup \overline{C}\overline{A}$ là biến cố "có nhiều nhất một xạ thủ bắn trúng"
$V = A\overline{B}\overline{C}$ là biến cố "chỉ có xạ thủ **A** bắn trúng".

<u>Chú ý:</u> Ta cũng có thể sử dụng sơ đồ Ven để biểu diễn quan hệ giữa các biến cố



c. Một số hằng đẳng thức.

- Tính giao hoán: $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$
- Tính kết hợp: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $ABC = (AB)C = A(BC)$
- Tính phân phối: $(A \cup B)C = AC \cup BC$, $AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$
- $A \cup A = A$, $AA = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A\varnothing = \varnothing$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- Luật De Morgan:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

III. XÁC SUẤT CỦA MỘT BIẾN CỐ

1. Mở đầu về xác suất.

Việc biến cố ngẫu nhiên xảy ra hay không trong kết quả của một phép thử là điều không thể biết hoặc đoán trước được. Tuy nhiên bằng những cách khác nhau ta có thể định lượng khả năng xuất hiện của biến cố, đó là xác suất xuất hiện của biến cố. Xác suất của biến cố là con số đặc trưng khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử.

Dựa vào bản chất của phép thử (đồng khả năng) ta có thể suy luận về khả năng xuất hiện của biến cố, với cách tieps cận này ta có ***định nghĩa xác suất theo phương pháp cổ điển.***

Khi thực hiện nhiều lần lặp lại độc lập một phép thử ta có thể tính được tần suất xuất hiện (số lần xuất hiện) của một biến cố nào đó. Tần suất thể hiện khả năng xuất hiện của biến cố, với cách tiếp cận này ta có ***định nghĩa xác suất theo thống kê.***

Trường hợp ta biểu diễn không gian mẫu và các biến cố bởi các miền hình học có độ đo ta sẽ có ***định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học.***

2. Xác xuất của của một biến cố

Ta chỉ xét những phép thử mà không gian mẫu có hữu hạn phần tử: chẳng hạn xét phép thử với không gian mẫu

$$S = \Omega = \{s_1, s_2, \ldots s_k\}.$$

Khi đó, với mỗi điểm mẫu (biến cố sơ cấp) s_i được gán tương ứng với một số thực p_i thỏa mãn $\begin{cases} p_i \in [0;1] \\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \end{cases}$, số thực p_i được gọi là ***xác suất của điểm mẫu*** (biến cố sơ cấp) s_i. Nếu ta có lý do để tin rằng một điểm mẫu nào đó rất có khả năng xảy ra khi phép thử được tiến hành, xác suất được gán sẽ gần 1. Mặt khác, một xác suất gần 0 được gán cho một điểm mẫu mà dường như không xuất hiện. Trong nhiều phép thử, như tung một đồng xu hay một xúc xắc, tất cả những điểm mẫu có cùng khả năng xuất hiện cũng được gán các xác suất bằng nhau. Đối với những điểm bên ngoài không gian mẫu, tức là đối với các biến cố mà không thể xuất hiện, ta gán cho xác suất bằng 0.

Ta chú ý rằng, mỗi biến cố là tập con của không gian mẫu S, nên một biến cố A của phép thử là một tập gồm các điểm mẫu (biến cố sơ cấp), mỗi biến số sơ cấp trong A còn gọi là một khả năng thuận lợi cho A.

a. Định nghĩa. Xét phép thử với không gian mẫu S và A biến cố trong phép thử đó. Khi đó ***xác suất của biến cố*** A là tổng xác xuất của tất cả các diểm mẫu trong A, **ký hiệu là** $P(A)$.

Từ định nghĩa ta có:

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(S) = P(\Omega) = 1$
3. $P(\varnothing) = 0$.

Ví dụ 15. Một đồng xu được tung 2 lần. Xác suất để ít nhất một mặt ngửa xuất hiện là bao nhiêu?
Giải:
+ Không gian mẫu đối với phép thử này là

$$S = \{SS, SN, NS, SS\}.$$

+ Nếu đồng xu cân đối, mỗi kết cục như vậy có thể đồng khả năng xuất hiện. Do đó, ta gán một xác suất w cho mỗi điểm mẫu. Khi ấy $4w = 1$, hay $w = 1/4$.
+ Nếu A biểu thị biến cố ít nhất một mặt ngửa xuất hiện, thì

$$A = \{NN, NS, SN\}$$

+ Và $P(A) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Ví dụ 16. Một con súc sắc được đổ chì sao cho khả năng xuất hiện một chấm chẵn gấp 2 lần khả năng xuất hiện một chấm lẻ. Gọi E là biến cố số chấm nhỏ hơn 4 xuất hiện trong một lần tung xúc xắc, hãy tìm $P(E)$?
Giải:
+ Không gian mẫu là $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
+ Ta gán một xác suất w cho mỗi số chấm lẻ và một xác suất $2w$ cho mỗi số chấm chẵn.
+ Do tổng của các xác suất phải bằng 1 nên ta có $9w = 1$ hay $w = 1/9$.
+ Từ đó, các xác suất 1/9 và 2/9 được gán cho mỗi số chấm chẵn và lẻ tương ứng.
+ Do đó:

$$E = \{1, 2, 3\} \quad \text{và} \quad P(E) = \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}.$$

Ví dụ 17. Trong Ví dụ 16 gọi A là biến cố xuất hiện số chấm chẵn và cho B là biến cố xuất hiện số chấm chia hết cho 3. Hãy tìm $P(A\cup B)$ và $P(A\cap B)$.

Giải:

+ Ta có $A = \{2, 4, 6\}$ và $B = \{3, 6\}$, từ đó $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ và $A \cap B = \{6\}$.

+ Do xác suất cho mỗi số chấm lẻ là $\frac{1}{9}$ và mỗi số chấm chẵn $\frac{2}{9}$, nên ta có

$$P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \quad \text{và} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{9}.$$

Trường hợp không gian mẫu có hữu hạn phần tử và các biến cố sơ cấp đồng khả năng.

b. <u>Định nghĩa xác suất theo lối cổ điển</u>

Giải sử phép thử có N biến cố sơ cấp đồng khả năng, trong đó biến cố A có chứa n biến cố sơ cấp đồng khả năng. Khi đó xác suất của biến cố A được xác định bởi

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

<u>Các bước tìm xác suất của một biến cố A:</u>

1.Đếm số biến số sơ cấp đồng khả năng trong không gian mẫu: N

2. Đếm số biến số sơ cấp đồng khả năng trong biến cố A : n

3. Từ đó $P(A) = \frac{n}{N}$.

Ví dụ 18. Một đống kẹo trộn lẫn 6 chiếc bạc hà, 4 chiếc kẹo bơ và 3 chiếc chocolate. Nếu một người chọn ngẫu nhiên một trong những chiếc kẹo này, hãy tìm xác suất để được

a. Một chiếc bạc hà;

b. Một chiếc kẹo bơ hoặc một chocolate.

Giải: Gọi M, T, và C là các biến cố mà người chọn được, tương ứngmột chiếc bạc hà, kẹo bơ, hoặc chocolate. Tổng số kẹo bằng 13 và tất cả đều đồng khả năng để chọn.

a. Do 6 trong 13 chiếc là bạc hà, xác suất của biến cố M chọn được ngẫu nhiên một bạc hà là

$$P(M) = \frac{6}{13}.$$

b. Do 7 trong 13 chiếc kẹo là bơ hoặc chocolate, suy ra

$$P(T \cup C) = \frac{7}{13}.$$

Ví dụ 19. Lấy ngẫu nhiêu 5 cây Tú Lơ Khơ trong bộ 52 cây. Hãy tìm xác suất để trong đó có 2 cây Át và 3 cây J.

Giải: Gọi C là biến cố "Trong 5 cây có 2 cây Át và 3 cây J"

+ Số cách chia riêng 2 cây từ 4 cây Át bằng: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

+ Số cách chia riêng 3 cây từ 4 cây J bằng : $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$.

+ Theo quy tắc nhân ta có $n = (6)(4) = 24$ trường hợp rút ra có 2 Át và 3 J.

+ Mà tổng số trường hợp lấy ngẫu nhiên 5 cây bài (tất cả đều đồng khả năng) là

$$N=\binom{52}{5}=\frac{52!}{5!47!}=2598960.$$

+ Do đó xác suất của biến cố C là:

$$P(C)=\frac{24}{2598960}=0,9.10^{-5}.$$

<u>Hạn chế của định nghĩa xác suất theo lối cổ điển</u>

1.Nó chỉ xét cho trường hợp không gian mẫu có hữu hạn các biến cố

2. Các biến cố sơ cấp trong không gian mẫu "đồng khả năng"

Tuy nhiên không phải lúc nào không gian mẫu cũng thỏa mãn điều đó.

Nếu các kết quả của phép thử không đồng khả năng thì các xác suất sẽ được xác định dựa vào kinh nghiệm trước đó hoặc dựa trên các bằng chứng của phép thử. Chẳng hạn như, nếu tung một đồng xu không cân bằng thì chúng ta có thể ước lượng xác suất xuất hiện mặt ngửa hay mặt sấp bằng cách tung đồng xu nhiều lần và ghi lại các kết quả. Dựa vào định nghĩa **xác suất theo tần suất**, xác suất thực tế là tỷ lệ mặt sấp hoặc ngửa xuất hiện trong nhiều phép thử.

b. <u>Định nghĩa xác suất theo tần suất (theo lối thống kê)</u>

Thực hiện một phép thử N lần. Giải sử biến cố A xuất hiện n lần. Khi đó n được gọi là tấn số của biến cố A và tỷ số $\frac{n}{N}$ được gọi là ***tần suất xuất hiện của biến cố*** A trong hành loạt phép thử. Cho số lần thực hiện phép thử tăng lên vô hạn, tần suất của biến cố A dần về số xác định thì số đó gọi là xác suất của biến cố A, khi đó:

$$P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N}.$$

Ví dụ 20. Ví dụ về tung một đồng xu nhiều lần:

Người tung	Số lần tung	Số lần xuất hiện mặt sấp	Tần suất xuất hiện mặt sấp
Mai	**4040**	**2048**	**0,5069**
Hồng	**12000**	**6019**	**0,5016**
Đào	**24000**	**12012**	**0,5005**

Tần suất dần tới số 0.5

c. <u>Định nghĩa xác suất theo hình học</u>

Xét phép thử có không gian mẫu S được biểu diễn bởi miền hình học S có độ đo $|S|$ khác không, biến cố A được biểu diễn bởi miền hình học A. Khi đó xác suất của biến cố A được xác định bởi:

$$P(A)=\frac{|A|}{|S|}.$$

<u>Về nhà:</u>

Tự đọc Chương 1

Bài tập: Mục 2.1+2.2: Tr. 25; Mục 2.3: tr. 35; Mục 2.4: tr. 43

Tr. **Đọc trước các Mục 2.1** đến **2.8** chuẩn bị cho **Bài số 2: Các phép toán về xác suất**

Filename: Bai so 1
Directory: C:\Users\Math\Documents
Template:
C:\Users\Math\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.do
tm
Title: Bài giảng Môn Toán 2-Giải tích nhiều biến
Tiến sỹ: Nguyễn Hữu Thọ
Subject:
Author: User
Keywords:
Comments:
Creation Date: 1/11/2011 11:08:00 PM
Change Number: 91
Last Saved On: 7/30/2011 8:14:00 PM
Last Saved By: Math
Total Editing Time: 512 Minutes
Last Printed On: 7/30/2011 8:15:00 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 13
Number of Words: 3,436 (approx.)
Number of Characters: 19,589 (approx.)