Bài số 2

MỘT SỐ PHÉP TOÁN XÁC SUẤT

Trong Bài số 1 chúng ta đã được học một số khái niệm cơ bản về xác suất. Từ đó chúng ta sẽ thấy một số điểm sau:

1. ***Xác suất có thể thay đổi theo thời gian:*** Ví dụ, Ông Obama được bầu làm Tổng thống Mỹ vào tháng 11/2008. Từ trước lúc bầu cử mấy tháng, có sự cạnh tranh ác liết giữa ông ta và đối thủ chính của ông ta là McCain, và một người quan sát bên ngoài có thể nhân định là hai ông có khả năng được bầu cử ngang nhau (tức là xác suất được bầu của mỗi ông quãng 50% hay là $\frac{1}{2}$). Nhưng khi kết quả bầu cử được công bố trọn vẹn thì xác suất được bầu của Obama chuyển thành 100% (tức là 1). Trước đó một năm, ông Obama là một người chưa được nhiều người biết đến và còn phải tranh cử với bà Clinton và các ứng cử viên khác trong Đảng phái của mình, và khi đó, đối với người quan sát viên bên ngoài, xác suất được bầu làm Tổng thống của Obama không phải là 100%, cũng không phải là 50%, mà nhỏ hơn thế nhiều.
2. ***Xác suất phụ thuộc vào thông tin:*** Xét một trò chơi thường thấy trên Tivi: Có 3 cánh cửa, đằng sau một trong 3 cacnhs cửa đó là một món quà lớn, còn 2 cánh cửa còn lại không có gì. Người chơi được chọn một trong 3 cánh cửa, nếu chọn đúng thì được nhận quà. Sau khi người chơi đã chọn một cửa, người hướng dẫn chương trình đã mở một trong hai cánh cửa còn lại, nhưng sẽ chỉ mở cánh cửa không có quà. Sau đó người chới được quyền chọn, hoặc giữ lại cánh cửa mình đã chọn ban đầu, hoặc đổi lấy cái cửa chưa được mở còn lại. Theo bạn thì người chơi nên chọn phương án nào? Ta sẽ suy luận như sau: Gọi tên cánh cửa mà người chơi chọn lúc đầu là A, cửa không có quà mà người dẫn chương trình đã mở là B, và cửa còn lại là C. Vào thời điểm ban đầu, không có thông tin gì về cửa nào phía sau nó sẽ có quà, thông tin duy nhất là 1 trong 3 cánh cửa có quà. Không có cơ sở gì để nhận định cửa nào có nhiều khả năng hơn cửa nào, bởi vaayjvafof thời điểm này ta coi $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$. Nhưng sau khi cửa B được mở ra, thì ta có thêm thông tin mới là cửa B không có quà. Như vậy thông tin mới làm thay đổi xác suất của B: bây giờ ta có $P(B)=0$. Không chỉ xác suất của B thay đổi, mà tổng xác xuất của A và C bây giờ cũng thay đổi: $P(A)+P(C)=1$ thay vì bằng $\frac{2}{3}$ như trước. Như vậy ít ra trong hai số $P(A)$ hoặc $P(C)$ thay đổi, hoặc là cả hai. Xác suất $P(A)$ có thay đổi vì

thông tin mới này không? Câu trả lời là không (Tại sao???). Chỉ có $P(C)$ thay đổi: sau khi người dẫn chương trình mở cửa B thì ta có $P(A)=\frac{1}{3}$ và $P(C)=\frac{2}{3}$. Như vậy người chơi nên đổi cửa A lấy cửa C thì dễ thắng hơn. Để thấy rõ hơn việc cánh cửa còn lại có nhiều khả năng có quà hơn là cánh cửa mà người chơi chọn ban đầu, thay vì có 3 cánh cửa, ta hãy hình dung có 100 cánh cửa. Sau khi chọn 1 cửa, người dẫn chương trình mở 98 cánh cửa không có quà trong số 99 cánh cửa còn lại, chỉ để lại 1 cửa thôi. Khi đó, nếu được đổi, bạn sẽ giữ nguyên cửa của mình hay sẽ đổi lấy cánh cửa còn lại kia?

3. ***Xác suất phụ thuộc vào điều kiện.*** Để ý rằng, mọi xác suất đều có thể coi là xác suất có điều kiện, và đều phụ thuộc vào những điều kiện nào đó, có thể được nói ra hoặc không nói ra (điều kiện hiểu ngầm). Ví dụ: khi chúng ta nói: "khi tung cái xúc sắc S, xác suất để hiện lên mặt có 3 chấm là $\frac{1}{6}$", chúng ta ngầm hiểu S là một cái xúc sắc đều đặn, các mặt đều có khả năng xuất hiện như nhau. Nhưng nếu S là một cái xúc sắc méo mó, nhẹ bên này nặng bên kia (điều kiện khác đi), thì xác suất để khi tung lên nhận được mặt có 3 chấm sẽ (hầu như) khác $\frac{1}{6}$. Khi chúng ta biết thêm một điều kiện mới, tức là có thêm một thông tin mới, bởi vậy sự phụ thuộc vào điều kiện của xác suất cũng có thể coi là sự phụ thuộc vào thông tin.

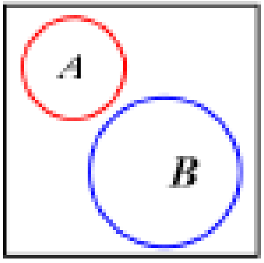
4. ***Xác suất phụ thuộc vào người quan sát.*** Cùng là một sự kiện, nhưng hai người quan sát khác nhau có thể sẽ tính ra hai kết quả xác suất khác nhau, và cả hai đều "có lý", bởi vì họ dựa trên những thông tin và phân tích khác nhau. Quay lại trò chơi trên Tivi: với người chơi thì $P(A)=\frac{1}{3}$, nhưng đối với người dẫn chương trình thì $P(A)$ không phải là $\frac{1}{3}$ mà là 0 hoặc 1, vì người đó biết ở đằng sau cửa A có quà hay không.

Việc tính xác suất của một biến cố nào đó sẽ dễ dàng hơn nếu ta dựa vào xác suất đã biết của các biến cố khác.

I. CÔNG THỨC CỘNG.

Mục đích: Trong một phép thử, đã biết xác xuất của một số biến cố nào đó ta có thể tính xác xuất của biến cố hợp của chúng.

1. *Trường hợp các biến cố xung khắc.*



Nếu A và B là 2 biến cố xung khắc (tức là $A \cap B = AB = \varnothing$) trong một phép thử thì ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Hệ quả:

i. Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ là các biến cố đôi một xung khắc nhau trong cùng một phép thử thì ta có:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

ii. Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một phân hoạch của không gian mẫu S, thì:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(S) = 1.$$

iii. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Ví dụ 1. Có một lô hành gồm 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ lô hàng ra 6 sản phẩm. Tìm xác suất để không có quá 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm được lấy ra.

Giải: Gọi

A là biến cố "không có phế phẩm trong 6 sản phẩm lấy ra"

B là biến cố "có đúng 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm lấy ra"

C là biến cố "không có quá 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm lấy ra"

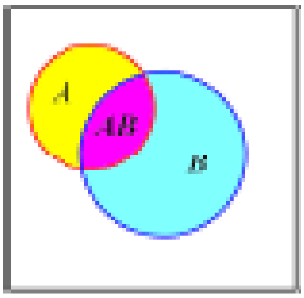
+ Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc

+ Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{C_8^6}{C_{10}^6} = \dfrac{2}{15}$

+ Xác suất của biến cố B là: $P(B) = \dfrac{C_2^1.C_8^5}{C_{10}^6} = \dfrac{8}{15}$

+ Nhận thấy: $C = A \cup B$ do đó: $P(C) = P(A) + P(B) = \dfrac{2}{3}$.

2. Trường hợp tổng quát.



Nếu A và B là hai biến cố tùy ý trong một phép thử thì ta có

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \mathrm{P}(AB)$$

Với 3 biến cố A,B,C ta có:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

Tương tự ta có thể nhận được công thức cộng xác suất trong trường hợp số biến cố tùy ý.

Ví dụ 2. Xác suất để Hồng thi đỗ môn toán là 2/3 và xác suất để cô ta thi đỗ môn tiếng Anh là 4/9. Giả thiết rằng xác xuất để thi đỗ cả 2 môn là 1/4. Tìm xác suất để
a) Hồng thi đỗ ít nhất một môn.
b) Hồng không đỗ môn nào
c) Hồng thi trượt ít nhật một môn
d) Hồng thi đỗ đúng một môn
Giải: Gọi:
M là biến cố "thi đỗ môn Toán",
E là biến cố "thi đỗ môn Tiếng Anh" , khi đó ME là biến cố "thi đỗ cả hai môn"
A là biến cố "thi đỗ ít nhất một môn", khi đó $A=M\cup E$
B là biến cố "không đỗ môn nào", khi đó $B=\overline{M}.\overline{E}=\overline{A}$
C là biến cố "trượt ít nhất một môn", khi đó $C=\overline{M}\cup\overline{E}$
D là biến cố "đỗ đúng một môn", khi đó $D=M.\overline{E}\cup\overline{M}.E$

Theo giả thiết ta có: $P(M)=\dfrac{2}{3},\ P(E)=\dfrac{4}{9},\ P(ME)=\dfrac{1}{4}$

Do đó:

$$P(A)=P(M\cup E)=P(M)+P(E)-P(M\cap E)=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{31}{36}.$$

$$P(B)=P(\overline{M}.\overline{E})=P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{5}{36}$$

$$P(C)=P(\overline{M}\cup\overline{E})=1-P(ME)=\frac{3}{4}$$

Để ý rằng: $A=D\cup ME$ hơn nữa $D\cap(ME)=\varnothing$ nên $P(D)=P(A)-P(ME)=\dfrac{11}{18}$

II. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN VÀ CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT.

1. Xác suất có điều kiện.

a. Định nghĩa: Xác suất của biến cố B được tính khi biết biến cố A nào đó đã xảy ra được gọi là **xác suất có điều kiện** và được ký hiệu là $P(B|A)$. Ký hiệu $P(B|A)$ thường được đọc là " xác suất để B xảy ra với điều kiện A đã xảy ra" hoặc đơn giản là "xác suất của B với điều kiện A".

Ví dụ 3. Một con xúc xắc được chế tạo sao cho khả năng xuất hiện một chấm chẵn gấp hai lần khả năng xuất hiện một chấm lẻ. Xét biến cố B nhận được số chính phương khi gieo một con xúc xắc đó.
Từ không gian mẫu $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, với xác suất xuất hiện mỗi số chấm chẵn và lẻ tương ứng là $\dfrac{1}{9}$ và $\dfrac{2}{9}$, do đó xác suất để B xảy ra là $\dfrac{1}{3}$.

Bây giờ ta chỉ xét biến cố B trong phép tung con xúc sắc với số chấm xuất hiện lớn hơn 3. Lúc này ta xét không gian mẫu thu gọn $A=\{4, 5, 6\}$ là tập con của S. Ta cần tính xác suất của biến cố B liên quan đến không gian mẫu A.

+ Trước hết ta phải tính xác suất mới cho các phần tử của A. Khi gán xác suất w cho chấm lẻ trong A và xác suất $2w$ cho hai chấm chẵn, ta có $5w = 1$ hay $w = \frac{1}{5}$.

+ Trong không gian A, ta thấy B chỉ chứa phần tử 4. Ký hiệu biến cố này bởi $B|A$, ta viết $B|A = \{4\}$ do đó $P(B|A) = \frac{2}{5}$.

Chú ý: Như vậy các biến cố có thể có xác suất khác nhau khi được xét trong các không gian mẫu khác nhau.

b. Công thức.

Xác suất có điều kiện của B với điều kiện A, ký hiệu $P(B|A)$, được xác định như sau:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{nếu } P(A) > 0.$$

Ví dụ 4. (xét lại Ví dụ 3) Một con xúc xắc được chế tạo sao cho khả năng xuất hiện một chấm chẵn gấp hai lần khả năng xuất hiện một chấm lẻ. Với biến cố $A = \{4, 5, 6\}$, xét biến cố B nhận được số chính phương khi gieo một con xúc sắc.

Ta có không gian mẫu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, với xác suất xuất hiện mỗi số chấm chẵn và lẻ tương ứng là $\frac{1}{9}$ và $\frac{2}{9}$.

Dễ thấy : $P(A) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$, hơn nữa $A \cap B = \{4\}$ suy ra $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$.

Khi đó theo công thức trên ta có:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}.$$

Ví dụ 5. Xác suất để một chuyến bay khởi hành đúng giờ là $P(D) = 0{,}83$, xác suất để nó đến đúng giờ là $P(A) = 0{,}82$, xác suất để nó khởi hành và đến đều đúng giờ là $P(D \cap A) = 0{,}78$. Tính xác suất để một chiếc máy bay:

a) Đến đúng giờ biết rằng nó đã khởi hành đúng giờ;

b) Khởi hành đúng giờ biết rằng nó sẽ đến đúng giờ.

c) Đến đúng giờ biết rằng nó khởi hành không đúng giờ

Giải:

a) Xác suất để một máy bay đến đúng giờ biết rằng nó đã khởi hành đúng giờ là:

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0{,}78}{0{,}83} = 0{,}94$$

b) Xác suất để một máy bay khởi hành đúng giờ biết rằng nó đã đến đúng giờ là:

$$P(D \mid A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}78}{0{,}82} = 0{,}95$$

c) Xác suất để máy bay đến đúng giờ khi nóp khởi hành không đúng giờ là:

$$P(A|D') = \frac{P(A \cap D')}{P(D')} = \frac{0,82 - 0,78}{0,17} = 0,24$$

Nhận xét: Xác suất để một chuyến bay đến đúng giờ bị giảm mạnh khi biết nó khởi hành không đúng giờ.

Trong phép thử gieo con xúc sắc ở Ví dụ 3 và Ví dụ 4 chúng ta thấy rằng $P(B|A)$=2/5 trong khi $P(B)$ =1/3, tức là $P(B|A) \neq P(B)$, điều này chỉ ra rằng B phụ thuộc vào A.

Bây giờ xét phép thử lấy ngẫu nhiên liên tiếp 2 con bài từ một cỗ bài gồm 52 con bài theo phương thức hoàn lại.

Gọi A là biến cố con bài thứ nhất là Át

Gọi B là biến cố con bài thứ 2 là Bích

Do con bài thứ nhất được đặt lại chỗ cũ nên không gian mẫu cho cả lần lấy thứ nhất và lần lấy thứ hai đều gồm 52 quân bài trong đó có 4 con Át và 13 con Bích. Do đó:

$$P(B|A) = \frac{1}{4} \text{ và } P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Tức là, $P(B \mid A) = P(B)$. Khi điều này đúng, các biến cố A và B được gọi là **độc lập**.

c. Sự độc lậpvà phụ thuộc của các biến cố. Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu sự xuất hiện của B không có tác động gì đến khả năng xuất hiện của A. Ở đây sự xuất hiện của A là *độc lập* với sự xuất hiện của B.

Định nghĩa: Hai biến cố A và B trong một phép thử được gọi là **độc lập với nhau** khi và chỉ khi

$$P(B \mid A) = P(B) \quad \text{hoặc} \quad P(A \mid B) = P(A)$$

Trong trường hợp ngược lại ta nói A và B ***phụ thuộc nhau***.

Điều kiện $P(B \mid A) = P(B)$ kéo theo $P(A \mid B) = P(A)$ và ngược lại.

Đối với phép thử là rút con bài ở trên , chúng ta đã chỉ ra rằng $P(B \mid A) = P(B) = 1/4$. Chúng ta cũng có thể thấy rằng $P(A \mid B) = P(A) = 1/13$.

2.Công thức nhân xác suất.

Từ công thức xác suất có điều kiện ta nhận được **quy tắc nhân quan trọng** sau, nó cho phép ta tính xác suất để hai biến cố cùng xảy ra.

Nếu trong một phép thử, các biến cố A và B có thể cùng xảy ra thì

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Hai biến cố A và B là độc lập với nhau khi và chỉ khi

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Tổng quát:

Nếu trong một phép thử, các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ có thể xảy ra thì:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1).P(A_2|A_1)\ldots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

Nếu các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ độc lập thì: $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1).P(A_2)\ldots P(A_k)$.

Ví dụ 6. Giả sử ta có một hộp chứa 20 chiếc cầu chì, trong đó có 5 chiếc bị hỏng. Nếu lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 chiếc theo phương thức không hoàn lại, thì xác suất để cả hai chiếc đều bị hỏng bằng bao nhiêu?

Giải: Gọi

A là biến cố "chiếc cầu chì thứ nhất bị hỏng"

B là biến cố "chiếc cầu chì thứ hai bị hỏng"

Khi đó $A\cap B$ là biến cố A xảy ra và sau đó B cũng xảy ra, $B \mid A$ là biến cố chiếc cầu chì thứ hai lấy ra là hỏng khi đã lấy được chiếc thứ nhất là hỏng.

Xác suất để lần lấy thứ nhất được chiếc cầu chì hỏng là $P(A)=\dfrac{1}{4}$.

Tiếp theo, xác suất để lấy được một cầu chì hỏng thứ hai từ bốn chiếc còn lại là:

$$P(B \mid A)=\frac{4}{19}.$$

Do đó xác suất để lấy được (theo thứ tự) cả hai chiếc cầu chì hỏng là:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}.$$

Ví dụ 7. Một thị trấn nhỏ có một chiếc xe cứu hỏa và một chiếc xe cấp cứu sẵn sàng dùng cho những trường hợp khẩn cấp. Xác suất để chiếc xe cứu hỏa sẵn có để dùng cho những trường hợp khẩn cấp là 0,98 và xác suất để chiếc xe cấp cứu khi được gọi là 0,92. Có một người bị thương do một tòa nhà đang cháy, tìm xác suất để cả chiếc xe cấp cứu và cứu hỏa đều sẵn sàng có thể dùng.

Giải: Gọi A và B lần lượt là biến cố chiếc máy cứu hỏa và chiếc xe cấp cứu sẵn có để dùng, khi đó $A\cap B$ la biến cố cả hai xe đều sẵn sàng làm nhiệm vụ.

Nhận thấy: A và B là hai biến cố độc lập do đó ta có:

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B) = 0{,}98.\ 0{,}92 = 0{,}9016.$$

Ví dụ 8. Lấy liên tiếp 3 con bài từ một bộ bài theo phương thức không hoàn lại. Tìm xác suất để biến cố $A_1\cap A_2\cap A_3$ xảy ra , trong đó A_1 là biến cố con bài thứ nhất là Át đỏ, A_2 là biến cố con bài thứ hai là 10 hoặc J, còn A_3 là biến cố con bài thứ ba có số lớn hơn 3 nhưng bé hơn 7.

Giải: Ta có các biến cố

A_1 : biến cố con bài thứ nhất là át đỏ,

A_2 : biến cố con bài thứ hai là 10 hoặc J,

A_3 : biến cố con bài thứ ba có số lớn hơn 3 nhưng bé hơn 7.

Khi đó:

$$P(A_1) = \frac{2}{52},\quad P(A_2|A_1) = \frac{8}{51},\quad P(A_3|A_1\cap A_2) = \frac{12}{50},$$

và ta có:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2) = \frac{2}{52}.\frac{8}{51}.\frac{12}{50} = \frac{8}{5525}.$$

Ví dụ 9. Hộp thứ nhất có 2 bi trắng và 10 bi đen. Hộp thứ hai có 8 bi trắng và 4 bi đen. Từ mỗi hộp lấy ra một viên bi. Tìm xác suất để:

a) Cả 2 viên bi lấy ra đều trắng

b) Một viên lấy ra là trắng, còn một viên là đen.

Giải: Gọi

T là biến cố "cả 2 viên bi lấy ra là trắng"

T_i là biến cố lấy được bi trắng từ hộp thứ $i, i=1,2$

D_i là biến cố lấy được bi đen từ hộp thứ $i, i=1,2.$

A là biến cố một viên bi lấy ra là trắng còn một viên là đen

Khi đó: T_1, T_2, D_1, D_2 là các biến cố đôi một độc lập; T_1D_2, T_2D_1 cũng là hai biến cố độc lập.

Ta có $T = T_1 \cap T_2$, $A = T_1D_2 \cup T_2D_1$

$$P(T_1) = \frac{1}{6},\ P(T_2) = \frac{2}{3},$$

$$P(D_1) = 1 - P(T_1) = \frac{5}{6},\ P(D_2) = 1 - P(T_2) = \frac{1}{3}$$

a)Xác suất để cả 2 bi lấy ra đều trắng là:

$$P(T) = P(T_1T_2) = P(T_1)P(T_2) = \frac{1}{9}.$$

b)Xác suất để một viên lấy ra là trắng còn một viên là đen

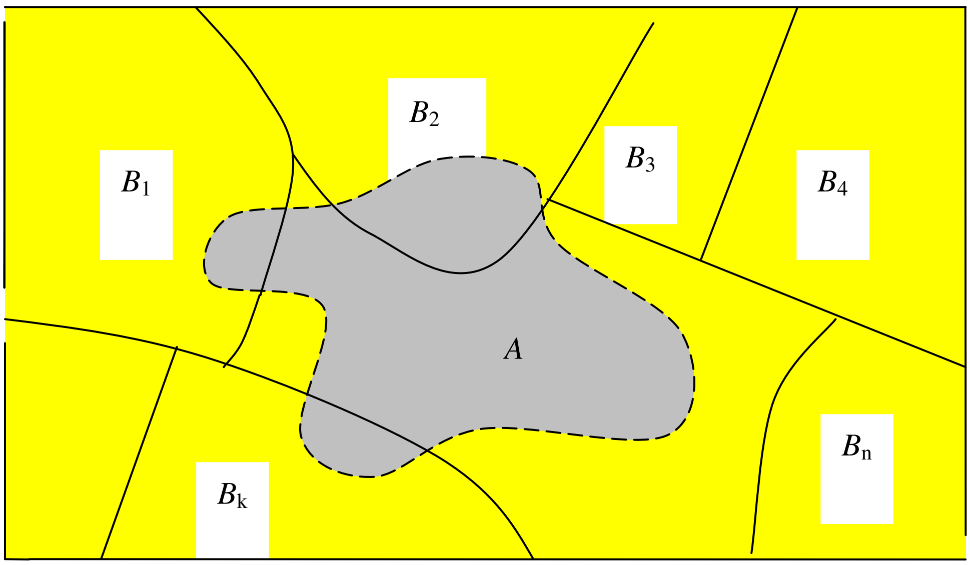
$$P(A) = P(T_1D_2) + P(T_2D_1 = P(T_1)P(D_2) + P(T_2)P(D_1) = \frac{11}{18}.$$

III.CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ VÀ CÔNG THỨC BAYES.

1. Công thức xác suất đầy đủ.

Nếu các biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_k$ là một phân hoạch của không gian mẫu *S* (tức là $B_1, B_2, ..., B_k$ là nhóm các biến cố đầy đủ đôi một xung khắc), trong đó $P(B_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$ thì với biến cố *A* bất kì của *S* ta có:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i).$$



Phân hoạch không gian mẫu S

Ví dụ 10. Trong một dây chuyền sản xuất, ba máy $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, và $\mathbf{B_3}$ tạo ra 30%, 45%, và 25% sản phẩm tương ứng. Theo phép thử trước đây biết tỷ lệ phế phẩm được tạo bởi mỗi máy tương ứng là 2%, 3% và 2%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Tính xác suất để nó là phế phẩm.

Giải: Xét các biến cố sau:

A: sản phẩm được chọn là phế phẩm

B_1: sản phẩm được làm bởi máy $\mathbf{B_1}$: $P(B_1) = 0,3$

B_2: sản phẩm được làm bởi máy $\mathbf{B_2}$: $P(B_2) = 0,45$

B_3 sản phẩm được làm bởi máy $\mathbf{B_3}$: $P(B_3) = 0,25$

+ Khi đó: B_1, B_2, B_3 là họ các biến cố đầy đủ đôi một xung khắc

+ Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

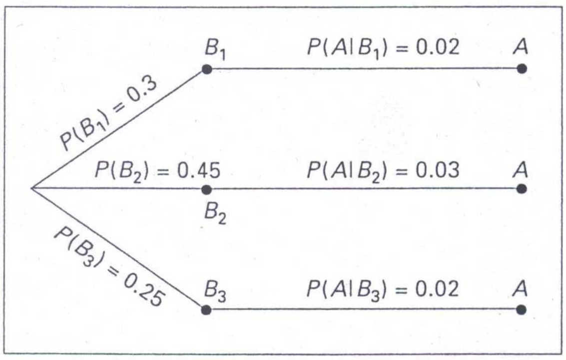
$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

+ Ta lại có:

$$P(B_1)P(A|B_1) = 0,3.\ 0,02 = 0,006$$
$$P(B_2)P(A|B_2) = 0,45.0,03 = 0,0135$$
$$P(B_3)P(A|B_3) = 0,25.\ 0,02 = 0,005.$$

+ Do đó

$$P(A) = 0,006 + 0,0135 + 0,005 = 0,0245.$$



2. Công thức Bayes.

Công thức Bayes, mang tên của linh mục và nhà Toán học người Anh Thomas Bayes (1702 – 1761), là công thức ngược, cho phép tính xác suất có điều kiện $P(B\,|\,A)$ khi biết xác suất có điều kiện $P(A\,|\,B)$ và một số thông tin khác.

a) ***Dạng đơn giản nhất*** của công thức này là: Với A và B là hai biến cố bất kỳ với xác suất khác không, khi đó ta luôn có:

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A\,|\,B)P(B)}{P(A)}.$$

Công thức trên là hệ quả trực tiếp từ công thức nhan xác suất:

$$P(A \cap B) = P(B\,|\,A).P(A) = P(A\,|\,B).P(B).$$

Công thức Bayes rất đơn giản nhưng nó có ý nghĩa rất sâu xa. Một trong những lỗi mà rất nhiều người mắc phải là lẫn lộn giữa $P(A|B)$ và $P(B|A)$, coi hai con số đó như là bằng nhau. Nhưng Công thức Bayes cho thấy hai con số đó có thể chênh lệch nhau rất nhiều nếu như $P(A)$ và $P(B)$ chênh nhau rất nhiều.

Kết hợp công thức trên với công thức xác suất đầy đủ cho $P(A)$ ta nhận được:

Định lý (Công thức Bayes tổng quát).

Nếu các biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_k$ là một phân hoạch của không gian mẫu S (tức là $B_1, B_2, \ldots, B_k$ là nhóm các biến cố đầy đủ đôi một xung khắc), trong đó $P(B_i) \neq 0$ với mọi i = 1, 2, …, k, thì với biến cố A bất kì của S mà $P(A) \neq 0$ ta có:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}, \text{ với } r = 1, 2, \ldots, k.$$

Ví dụ 11. Quay về Ví dụ 10, nếu chọn ngẫu nhiên một sản phẩm và thấy nó bị lỗi, thì xác suất để sản phẩm đó thuộc máy $\mathbf{B_3}$ bằng bao nhiêu?

Giải: + Sử dụng Công thức Bayes ta có

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$

+T hay các xác suất đã được tính trong Ví dụ 10 ta có

$$P(B_3|A) = \frac{0{,}005}{0{,}006 + 0{,}0135 + 0{,}005} = \frac{0{,}005}{0{,}0245} = \frac{10}{49}$$

Kết quả này cho ta thấy nếu sản phẩm bị lỗi được chọn thì chắc nó không được làm bởi máy B_3.

Ví dụ 12. Có một loại bệnh mà tỷ lệ người mắc bệnh là $\frac{1}{1000}$. Giải sử có một loại xét nghiệm mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng cho phản ứng dương tính, nhưng tỷ lệ phản ứng dương tính nhầm là 5% (tức là trong số những người không mắc bệnh có 5% số người thử cho phản ứng dương tính). Hỏi khi một người xét nghiệm bị phản ứng dương tính, thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu?

Giải: + Đa số người được hỏi sẽ trả lời là 95%. Tuy nhiên như vậy là không chính xác.

+ Gọi

K là biến cố "không bị bệnh", ta có $P(K) = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}$

D là biến cố "phản ứng dương tính"

+ Khi đó theo đề bài $P(D|K) = \frac{5}{100}$ (xác suất không bị bệnh mà có phản ứng dương tính)

+ Và $P(K|D)$ sẽ cho xác suất của những người phản ứng dương tính nhưng không bị bệnh.

+ Theo Công thức Bayes:

$$P(K|D) = \frac{P(K).P(D|K)}{P(K).P(D|K) + P(\overline{K}).P(D|\overline{K})}.$$

$$P(K \mid D) = \frac{\frac{999}{1000}.\frac{5}{100}}{\frac{999}{1000}.\frac{5}{100} + \frac{1}{1000}.1} \approx \frac{98}{100}.$$

+ Vậy khi xét nghiệm dương tính, xác suất thực sự mắc bệnh là: $\frac{2}{100}$.

Về nhà:

Bài tập: Tr. 44, 53, 60

Đọc trước các Mục 3.1 đến **3.4** chuẩn bị cho **Bài số 3:**

Biến ngẫu nhiên một chiều và phân phối xác suất

Filename: Bai so 2
Directory: C:\Users\Math\Documents
Template: C:\Users\Math\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dotm
Title: Bài giảng Môn Toán 2-Giải tích nhiều biến
Tiến sỹ: Nguyễn Hữu Thọ
Subject:
Author: User
Keywords:
Comments:
Creation Date: 1/11/2011 11:08:00 PM
Change Number: 134
Last Saved On: 8/2/2011 5:31:00 PM
Last Saved By: Math
Total Editing Time: 951 Minutes
Last Printed On: 8/2/2011 5:32:00 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 11
Number of Words: 3,111 (approx.)
Number of Characters: 17,733 (approx.)