Bài số 3

BIẾN NGẪU NHIÊN MỘT CHIỀU VÀ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

I. BIẾN NGẪU NHIÊN MỘT CHIỀU

Ví dụ 1: Xét quá trình kiểm tra ba bộ phận điện tử, *N* chỉ " bộ phận không có lỗi ", *D* chỉ " bộ phận có lỗi " . Khi đó không gian mẫu của phép thử đó là:

S = { *NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DND, DDN, DDD* },

Nếu ta quan tâm tới ***số bộ phận có lỗi*** trong ba bộ phận được kiểm tra, thì mỗi điểm mẫu trong không gian mẫu sẽ xác định một giá trị (duy nhất) trong các số: 0, 1, 2, 3.

Như vậy, trong mỗi phép thử ngẫu nhiên, việc số hóa các điểm mẫu (quy tắc cho tương ứng mỗi điểm mẫu với một số thực) sẽ cho ta gặp nhiều thuận lợi trong việc mô tả, thống kê và đánh giá chúng. Và từ đó khái niệm biến ngẫu nhiên ra đời.

1.Định nghĩa: ***Biến ngẫu nhiên*** là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử trong không gian mẫu với duy nhất một số thực.

Ký hiệu: Dùng chữ in hoa, ví dụ *X* , để kí hiệu một biến ngẫu nhiên và chữ thường tương ứng x để chỉ các giá trị của biến ngẫu nhiên *X*.

Số thực x mà tồn tại điểm mẫu s sao cho $X(s) = x$ được gọi là một giá trị mà *X* có thể nhận.

Tập tất cả các giá trị mà X có thể nhận được gọi là ***tập giá trị của*** X .

Trong ví dụ kiểm tra các bộ phận điện tử ở trên, ta chú ý rằng biến ngẫu nhiên X có giá trị 2 đối với tất cả các phần tử trong tập con:

E = { *DDN, DND, NDD* }

của không gian mẫu *S*, tức là mỗi giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên *X* chỉ một biến cố, nó là tập con của không gian mẫu đối với phép thử đã cho.

Ví dụ 2. Các đại lượng sau là biến ngẫu nhiên

+ Số chấm xuất hiện khi gieo một con xúc sắc
+ Tuổi thọ của một thiết bị đang hoạt động
+ Số khách hàng có mặt tại một siêu thị trong một đơn vị thời gian

Ví dụ 3. Hai quả bóng được lấy lần lượt theo phương thức không hoàn lại từ một bình chứa 4 quả bóng đỏ (R) và 3 quả bóng đen (B) . Gọi Y là số bóng màu đỏ, khi đó các giá trị y của biến ngẫu nhiên Y là:

Không gian mẫu	$Y(s_i)$
s_1 : *RR*	2
s_2 : *RB*	1
s_3 : *BR*	1
s_4 : *BB*	0

Tập giá trị của biến ngẫu nhiên Y là $\{0;1;2\}$.

2. Phân loại biến ngẫu nhiên

Từ tính chất của tập giá trị của biến ngẫu ngẫu nhiên, người ta chia các biến ngẫu nhiên thành hai loại:

Biến ngẫu nhiên X được gọi là ***biến ngẫu nhiên rời rạc*** nếu tập giá trị của nó là tập đếm được.

Biến ngẫu nhiên X được gọi là ***biến ngẫu nhiên liên tục*** nếu các giá trị của nó có thể lấp đầy một hay một số khoảng hữu hạn hoặc vô hạn trên trục số.

Ví dụ 4.

+ Số chấm xuất hiện trên mặt con xúc sắc; sô học sinh vắng mặt trong buổi học : là các biến ngẫu nhiên rời rạc

+ Nhiệt độ không khí tại mỗi thời điểm nào đó; quãng đường mà một chiếc ô tô đi được với 5 lít xăng: là các biến ngẫu nhiên liên tục.

II.PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN MỘT CHIỀU

Xét phép thử gieo một đồng xu ba lần và phép thử gieo một con xúc sắc ba lần.

Gọi X : = số lần xuất hiện mặt sấp khi gieo một đồng xu 3 lần,

Y : = số lần ra 1 chấm khi gieo một con xúc sắc 3 lần.

Nhận xét: + Tập giá trị có thể của X, Y trùng nhau và bằng: $\{0, 1, 2, 3\}$.

+ Tuy nhiên $P\{X = i\} \neq P\{Y = i\}$.

Như vậy chỉ biết tập các giá trị có thể của một biến ngẫu nhiên là chưa đủ để xác định nó. Vì vậy, đối với một biến ngẫu nhiên ta cần biết xác suất để nó nhận giá trị bất kỳ, hay nhận giá trị trong một khoảng bất kỳ. Một hình thức cho phép làm điều đó được gọi là ***quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên***. Từ đó, khi ta biết quy luật phân bố xác suất của một biến ngẫu nhiên thì ta sẽ nắm được toàn bộ thông tin về biến ngẫu nhiên này.

Ta ký hiệu biến ngẫu nhiên X nhận giá x là $X = x$ và xác suất để X nhận giá trị x là $P(X = x)$.

1.Đối với biến ngẫu nhiên rời rạc.

Một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận mỗi giá trị của nó với một xác suất nhất định. Trong trường hợp tung đồng xu 3 lần, biến ngẫu nhiên X chỉ số lần xuất hiện mặt ngửa nhận giá trị 2 với xác suất 3/8 vì 3 trong 8 điểm mẫu đồng khả năng có kết quả là 2 ngửa, 1 sấp.

Đặt: $f(x) = P(X = x)$, khi đó $f(x)$ chính là hàm của các giá trị của X

a.*Hàm xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc.*

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có tập giá trị $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ Hàm số thực $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ được gọi là **hàm xác suất** (hoặc phân phối xác suất) của X nếu thoả mãn các điều kiện sau:

1. $f(x) \geq 0$ với mọi x trong tập giá trị của X

2. $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$

3. $f(x_i) = P(X = x_i)$.

Khi xét ***biến ngẫu nhiên rời rạc và có tập giá trị hữu hạn*** thì hàm phân phối xác suất hoàn toàn xác định bởi bảng phân phối xác suất. Bảng phân phối xác xuất gồm hai hàng:

+ Hàng thứ nhất liệt kê các giá trị có thể $x_1, x_2, \ldots, x_n$ của biến ngẫu nhiên X .

+ Hàng thứ hai liệt kê các xác xuất tương ứng $p_1, p_2, \ldots, p_n$

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_1)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Nếu biến ngẫu nhiên rời rạc X có tập giá trị hữu hạn $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ thì các biến cố $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots, \{X = x_n\}$ sẽ lập thành một nhóm biến cố đầy đủ xung khắc từng đôi một. Do đó:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ví dụ 5. Một kiện hàng gồm 8 chiếc máy vi tính giống nhau trong đó có 3 chiếc bị lỗi. Một trường học mua ngẫu nhiên 2 trong những chiếc máy vi tính này, tìm phân phối xác suất của số chiếc bị lỗi.

Giải:

+ Gọi X là biến ngẫu nhiên mà các giá trị X của nó là số máy vi tính bị lỗi trường học đó mua.

+ Khi đó tập giá trị của X là $\{0,1,2\}$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{C_3^0 C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28},$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28},$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{C_3^2 C_5^0}{C_8^2} = \frac{3}{28}.$$

+ Do đó bảng phân phối xác suất của X là:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

b.*<u>Hàm phân phối tích lũy.</u>*

Hàm phân phối tích lũy $F(x)$ của biến ngẫu nhiên rời rạc X với phân phối xác suất $f(x)$ là hàm số được xác định bởi:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t) \text{ với } -\infty < x < +\infty .$$

Ví dụ 6. Một đại lý ô tô bán một loại xe nhập ngoại trong đó có 50% được trang bị túi khí. Gọi X là số xe được trang bị túi khí trong 4 xe sẽ được bán ra.

a. Tìm công thức của hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X
b. Từ đó hàm phân phối tích lũy của biến ngẫu nhiên X .

Giải: + Ta có tập giá trị của X là $\{0,1,2,3,4\}$.

+ Vì xác suất để bán được một chiếc ô tô có trang bị túi khí là 0,5 nên số kết quả đồng khả năng trong không gian mẫu là $2^4 = 16$.

+ Do đó tất cả các xác suất đều có mẫu số là 16.

+ Số cách bán được x chiếc xe có trang bị túi khí và $(4-x)$ chiếc xe không được trang bị túi khí là C_4^x, trong đó $x \in \{0,1,2,3,4\}$.

a. Do đó hàm phân phối xác suất $f(x) = P(X = x)$ là:

$$f(x) = \frac{C_4^x}{16} \quad \text{với } x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

b. Tacó:

$$f(0) = \frac{1}{16},\ \ f(1) = \frac{1}{4},\ f(2) = \frac{3}{8},\ f(3) = \frac{1}{4},\ \text{và}\ \ f(4) = \frac{1}{16}$$

$$F(0) = f(0) = \frac{1}{16}$$

$$F(1) = f(0) + f(1) = \frac{5}{16}$$

$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16}$$

$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{15}{16}$$

$$F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$

+ Do đó:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \text{khi } x < 0 \\ \frac{1}{16} \ \ \text{khi } 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16} \ \ \text{khi } 1 \le \text{x} < 2 \\ \frac{11}{16} \ \ \text{khi } 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16} \ \ \text{khi } 3 \le x < 4 \\ 1 \ \ \text{khi } x \ge 4 \end{cases}$$

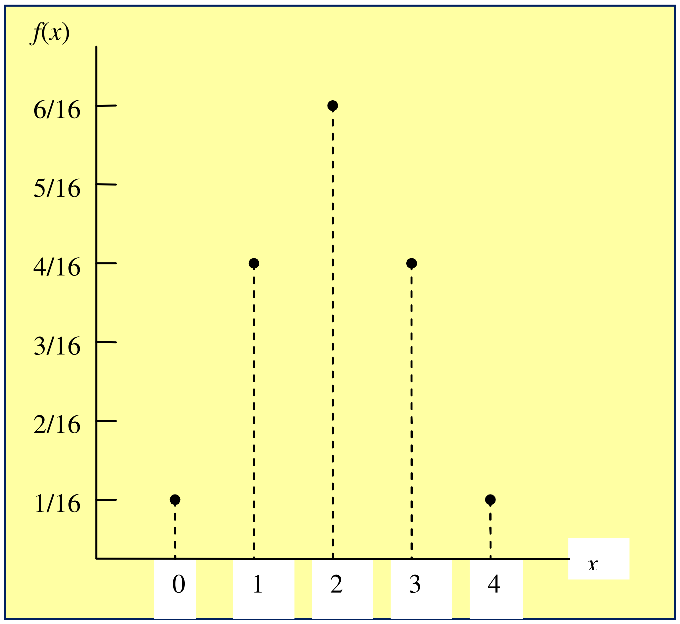
+ Để ý rằng:

$$f(2) = F(2) - F(1) = \frac{11}{16} - \frac{5}{16} = \frac{3}{8}.$$

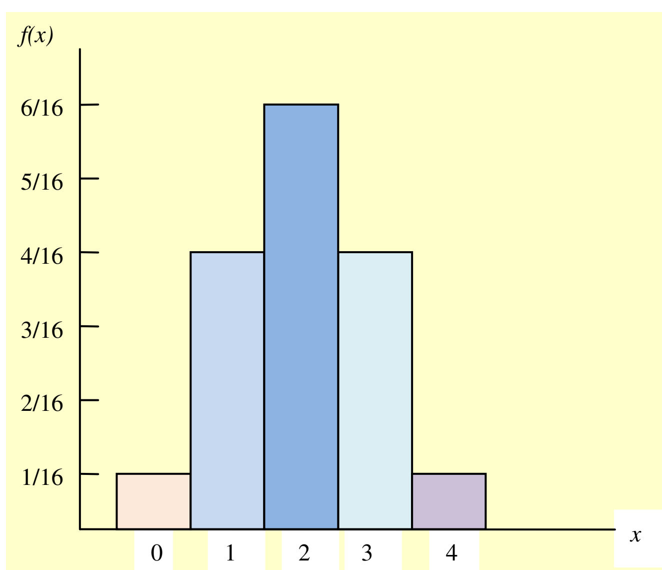
Chú ý: Ngoài ra ta cũng mô tả hàm phân phối xác suất dưới dạng biểu đồ bằng cách:

+ Vẽ các điểm (x, $f(x)$), sau đó nối các điểm này đến trục Ox bởi một đường nét đứt hoặc một đường liền nét ta được một **biểu đồ hình cây**.

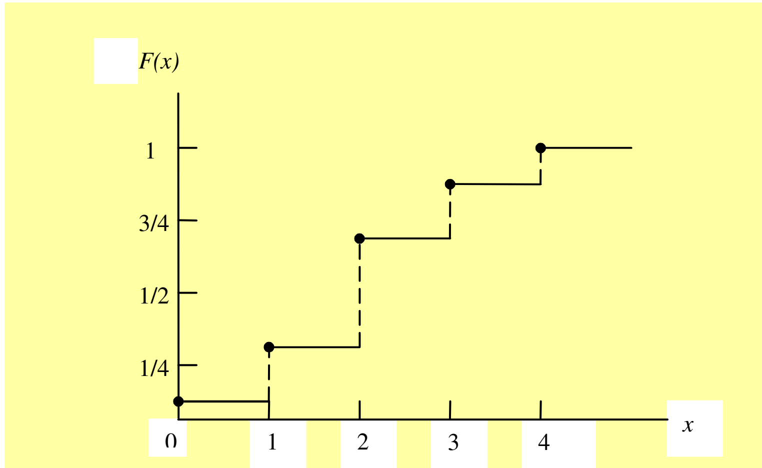
+ Thay vì vẽ các điểm (x, $f(x)$), bằng vẽ các hình chữ nhật sao cho đáy của chúng có bề rộng bằng nhau và mỗi giá trị x được đặt chính giữa đáy, còn chiều cao của chúng bằng xác suất tương ứng được cho bởi $f(x)$, các đáy được vẽ sao cho không có khoảng trống giữa các hình chữ nhật. Hình đó được gọi là một **biểu đồ xác suất**.



***Biểu đồ hình cây*.**



Biểu đồ xác suất



Hàm phân phối tích lũy rời rạc

2. **Đối với biến ngẫu nhiên liên tục**.

Đối với biến ngẫu nhiên liên tục ta không thể trình bày phân phối xác suất của nó dưới dạng bảng vì tập giá trị của nó không thể viết được dưới dạng liệt kê. Xác suất để biến ngẫu nhiên liên tục nhận một giá trị cụ thể trong tập giá trị của nó thì bằng 0. Chẳng hạn xét biến ngẫu nhiên mà các giá trị của nó là chiều cao của tất cả những người trên 21 tuổi. Giữa hai giá trị bất kì, chẳng hạn 163,5 và 164,5 cm hay 163,99 và 164,01 cm có vô số các giá trị, một trong chúng là 164 cm. Vì vậy có thể coi xác suất để chọn ngẫu nhiên một người mà người đó cao đúng 164 cm là 0. Nhưng xác suất để chiều cao của người đó nằm trong khoảng (163 cm, 165 cm) lại khác 0. Do đó đối với biến ngẫu nhiên liên tục ta quan tâm tới xác suất để biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong một khoảng hơn là nhận một giá trị xác định.

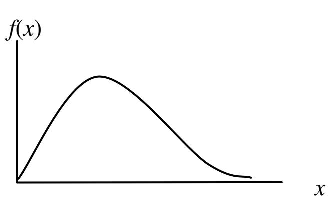
Chúng ta sẽ tập trung tính các xác suất để biến ngẫu nhiên liên tục nhận giá trị trong các khoảng khác nhau như $P(a < X < b)$, $P(W > c)$, … Chú ý rằng khi X là biến ngẫu nhiên liên tục thì:

$$P(a < X \le b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b).$$

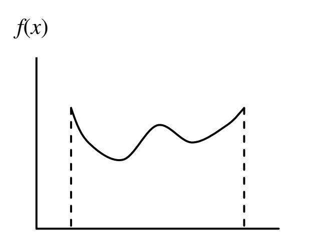
Do đó việc có tính đến điểm cuối của đoạn hay không là không quan trọng. Tuy nhiên khi X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì điều này không còn đúng nữa.

Mặc dù không thể trình bày phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục dưới dạng bảng nhưng chúng ta có thể mô tả nó bằng một công thức, đó là một hàm của các giá trị của biến ngẫu nhiên liên tục X mà ta kí hiệu là $f(x)$ được gọi là **hàm mật độ xác suất** hay đơn giản là **hàm mật độ** của X. Do ta có thể sử dụng diện tích để mô tả xác suất và xác suất là một số dương nên hàm mật độ phải nằm trên toàn bộ trục x .

Dưới đây là một số hàm mật độ điển hình:

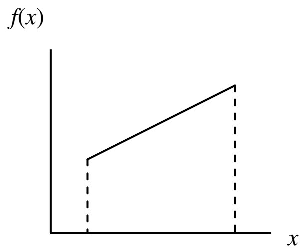


a)

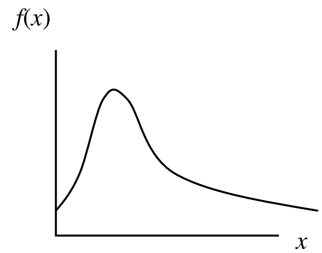


b)

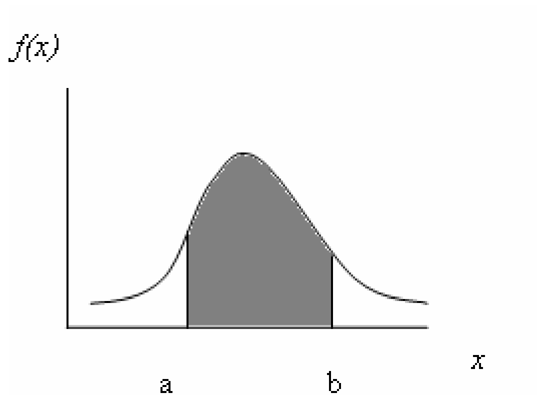
.



c)



d)



P(a < X < b)

Một hàm mật độ xác suất được xây dựng sao cho phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của nó, trục x và khoảng giá trị của X mà tại đó $f(x)$ xác định có diện tích bằng 1. Tập giá trị của X là một khoảng hữu hạn, nhưng ta có thể mở rộng nó thành một tập số thực bằng cách cho $f(x) = 0$ tại tất cả các điểm trong những phần mở rộng của khoảng. Ở Hình trên, xác suất để X nhận giá trị trong khoảng (a, b) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm mật độ, trục x và các đường thẳng $x = a$, $x = b$, nó được tính bởi tích phân sau:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx .$$

a. <u>Hàm mật độ xác suất</u>.

Hàm mật độ xác suất $f(x)$ của biến ngẫu nhiên liên tục X là hàm số thực xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn xác điều kiện sau:

1. $f(x) \geq 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Ví dụ 7. Giả sử sai số của nhiệt độ phản ứng (đơn vị ^{0}C) trong một thí nghiệm là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}, & -1<x<2\\ 0\quad, & x\notin(-1,2)\end{cases}$$

a) Chứng minh $f(x)$ thỏa mãn điều kiện 2 của Định nghĩa.

b) Tìm $P(0<X\le 1)$.

Giải:

a) Ta có: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^2}{9}\Big|_{-1}^{2}=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}=1$.

b) Đối với biến ngẫu nhiên liên tục việc có tính đến điểm cuối của đoạn hay không là không quan trọng nên ta có:

$$P(0<X\le 1)=\int_{0}^{1}\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^2}{9}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{9}.$$

b. <u>Hàm phân phối tích lũy.</u>

Hàm phân phối tích lũy $F(x)$ của biến ngẫu nhiên liên tục X với hàm mật độ $f(x)$ là hàm thực được xác định bởi:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\text{, với}\quad -\infty<x<+\infty.$$

Từ định nghĩa ta có ngay: $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

Ví dụ 8. Tìm $F(x)$ với hàm mật độ của Ví dụ 7 và sử dụng nó để tính P($0<X\le 1$).

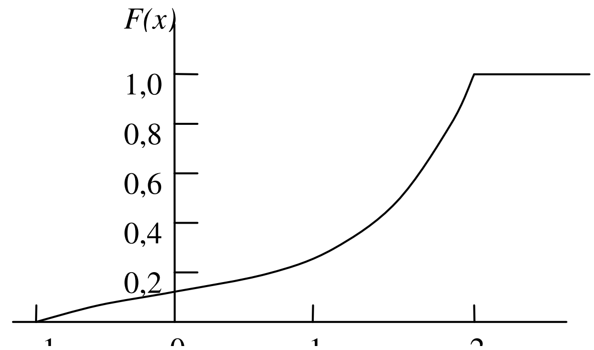
Giải:

+ Với -1 < x < 2 , ta có: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{x}\frac{t^2}{3}dt=\frac{t^2}{9}\Big|_{-1}^{x}=\frac{x^3+1}{9}$.

+ Do đó :
$$F(x)=\begin{cases}0\quad, & x\le 1\\ \dfrac{x^3+1}{9}, & -1<x<2\\ 1\quad, & x\ge 2\end{cases}$$

+ Hàm phân phối tích lũy $F(x)$ được biểu diễn bằng đồ thị như trong hình vẽ bên dưới.

$$P(\,0 < X \le 1\,) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$



3. <u>Tính chất của hàm của hàm phân phối xác suất.</u>

Hàm phân phối xác suất $F(x)$ của biến ngẫu nhiên X có các tính chất sau:

i. $0 \le F(x) \le 1, \quad \forall x$

ii. Hàm $F(x)$ là hàm không giảm, tức là $x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

iv. Nếu $f(x)$ liên tục thì ta có: $F'(x) = f(x), \quad \forall x$.

<u>Ý nghĩa của hàm phân phối xác suất</u>: Hàm phân phối xác suất $F(x)$ phản ánh mức độ tập trung xác suất về bên trái của điểm x.

<u>Về nhà:</u>

Tự đọc: Mục 3.4

Bài tập: Tr. **75**

Đọc trước các Mục 3.5 chuẩn bị cho **Bài số 4: Biến ngẫu nhiên hai chiều và phân phối xác suất**

Filename: Bai so 3
Directory: C:\Users\Math\Documents
Template: C:\Users\Math\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dotm
Title: Bài giảng Môn Toán 2-Giải tích nhiều biến
Tiến sỹ: Nguyễn Hữu Thọ
Subject:
Author: User
Keywords:
Comments:
Creation Date: 1/11/2011 11:08:00 PM
Change Number: 59
Last Saved On: 8/7/2011 12:53:00 PM
Last Saved By: Math
Total Editing Time: 333 Minutes
Last Printed On: 8/7/2011 12:53:00 PM
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 9
Number of Words: 2,132 (approx.)
Number of Characters: 12,158 (approx.)