

\mathbb{R} を実数体、 F を体、 V を F ベクトル空間とする。

問題 1. $v_1, \dots, v_n \in V$ が、(F 上) 一次独立であることの定義を述べよ。

問題 2. $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ を

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。次のうち、 \mathbb{R} 上一次独立になるベクトルの組をすべて選べ。

1. v_1, v_2
2. v_1, v_2, v_3
3. v_2, v_3
4. v_1, v_2, v_4
5. v_1, v_2, v_3, v_4

問題 3. $u = (a, b), v = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ が \mathbb{R} 上一次独立である必要十分条件が $ad - bc \neq 0$ であることを示せ。
(ヒント：対偶)

問題 4. 1 と $\sqrt{2}$ が \mathbb{Q} 上一次独立であるとはどういうことか、一次独立の定義に従い述べよ。また、これを示せ。