$\mathbb{R}$ を実数体、F を体、V を有限次元 F ベクトル空間とする。

問題 1. $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ を

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。次に挙げるベクトルの組に対して、それが生成する部分空間の次元を答えよ。

1. v_1, v_2
2. v_1, v_2, v_3
3. v_1, v_2, v_3, v_4

問題 2. 次の $\mathbb{R}^4$ の部分空間について、基底を挙げ、それが実際に基底になっていることを示し、その部分空間の次元を答えよ。

1. $\left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z + w = 0\right\}$
2. $\left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y = z + w = 0\right\}$

問題 3. V_1,V_2 を V の部分空間とする。

1. $V_1 + V_2$ の定義を述べよ。
2. $V_1 \cap V_2$ が V の部分空間になることを示せ。
3. $V_1 + V_2$ の次元を V_1,V_2,$V_1 \cap V_2$ の次元で書き表せ。(答えだけでよい)
4. $V_1 \cup V_2$ は必ずしも V の部分空間になるとは限らない。反例を挙げ、反例になっていることを示せ。

問題 4. n を非負整数とする。V_n を次数 n 以下の x の実数係数多項式のなすベクトル空間とする。つまり、$V_n = \left\{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$ とする。

1. V_n の次元を求めよ。
2. V_n の部分空間 $U_n = \left\{f(x) \in V_n \;\middle|\; f(x) \text{ は偶関数}\right\}$ の次元を求めよ。
3. $a \in \mathbb{R}$ とする。V_n の部分空間 $W_n = \{f(x) \in V_n \mid f(a) = 0\}$ の次元を求めよ。