

問題 1. 群、環、体の定義を述べよ。

問題 2. n を正の整数とする。 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ とおく。通常の足し算を行った後 n で割った余りをとるという演算で $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が群になることを示せ。

問題 3. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に積を定義し環にせよ。さらに、 n が素数のとき、体になることを示せ。(積を上手く定義しないと体にはならない。)

問題 4. それぞれの場合の n に対して、 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ での方程式を解け。

1. $n = 2$ のとき、 $x^2 + 1 = 0$.
2. $n = 3$ のとき、 $x^2 + 1 = 0$.
3. $n = 17$ のとき、 $x^4 + 1 = 0$.
4. $n = 7$ のとき、 $xy = 4$.
5. $n = 8$ のとき、 $xy = 4$.