R を 0 でない単位元を持つ可換環、F を体とする。

問題 1. R 加群、F ベクトル空間の定義を述べよ。

問題 2. n 個の F の元の列 $(a_1, \ldots, a_n)(a_i \in F)$ の集合を F^n と書く。和とスカラー倍を次のように定める。

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)\,,$$
$$a\,(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

で定める。F^n が F ベクトル空間であることを示せ。

問題 3.

$$A = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$$
$$B = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 1\}$$

とおく。

1. 部分ベクトル空間の定義を述べよ。
2. A が F^n の部分ベクトル空間であることを示せ。
3. B が F^n の部分ベクトル空間でないことを示せ。

問題 4. $\mathbb{R}$ は実数体、$\mathbb{C}$ は複素数体。
$\mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$ ベクトル空間になることを示せ。ただし、和は $\mathbb{C}$ の和、スカラー倍は、$a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}$ に対しそのスカラー倍を ax とすることで定めるものとする。