

$\mathbb{N}$  は自然数全体のなす集合 (0 は含まない)、 $\mathbb{Z}$  は整数全体のなす集合、 $\mathbb{R}$  は実数全体のなす集合、 $\mathbb{R}_{>0}$  を正の実数の集合とする。

問題 1. 写像、単射、全射、全単射の定義を述べよ。また、次の写像  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  が全単射、単射、全射、いずれでもない、そもそも写像になっていない、のどれになっているか答えよ。

1.  $f(x) = x + a$ . ただし、 $a$  は整数。

2.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ .

3.

$$f(x) = \begin{cases} n/2 & (n \text{ が偶数}) \\ n & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} n^3 & (n \text{ が偶数}) \\ 2n & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

問題 2. 次の関数  $f$  と定義域  $A$  に対し、値域を答えよ。

1.  $f(x) = \sin x$ ,  $A = [-\pi/6, 3\pi/4]$ .

2.  $f(x) = \log x$ ,  $A = (0, 1]$ .

3.  $f(x) = 1/x$ ,  $A = (-3, 4) \setminus \{0\}$ .

問題 3. 次の関数  $f, g$  の合成  $g \circ f$  を計算せよ。

1.  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 1$ .

2.  $f(x) = 2 \log x$ ,  $g(x) = a^x$ . ただし、 $a > 0$  とする。

3.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$
$$g(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}.$$

ただし、 $ad - bc \neq 0$  とする。

問題 4. 全単射  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  を構成し、それが全単射になっていることを証明せよ。