

\mathbb{N} を自然数全体のなす集合 (0 は含まない)、 \mathbb{Z} を整数全体のなす集合、 \mathbb{R} を実数全体のなす集合、 $\mathbb{R}_{>0}$ を正の実数の集合とする。

問題 1. 写像、単射、全射、全単射の定義を述べよ。また、次の写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ が全単射、単射、全射、いずれでもない、そもそも写像になっていない、のどれになっているか答えよ。

1. $f(x) = x + a$. ただし、 a は整数。

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

3.

$$f(x) = \begin{cases} n/2 & (n \text{ が偶数}) \\ n & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} n^3 & (n \text{ が偶数}) \\ 2n & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

問題 2. 次の関数 f と定義域 A に対し、値域を答えよ。

1. $f(x) = \sin x$, $A = [-\pi/6, 3\pi/4]$.

2. $f(x) = \log x$, $A = (0, 1]$.

3. $f(x) = 1/x$, $A = (-3, 4) \setminus \{0\}$.

問題 3. 次の関数 f, g の合成 $g \circ f$ を計算せよ。

1. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$.

2. $f(x) = 2 \log x$, $g(x) = a^x$. ただし、 $a > 0$ とする。

3.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$
$$g(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}.$$

ただし、 $ad - bc \neq 0$ とする。

問題 4. 全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を構成し、それが全単射になっていることを証明せよ。