問題 1. 集合 $\{0,1\}$ に和と積を

$$\begin{aligned} 0+0=1+1&=0\\ 0+1=1+0&=1\\ 0\times 0=1\times 0=0\times 1&=0\\ 1\times 1&=1 \end{aligned}$$

で定める。体になることを示せ。（これは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に等しい。これを F_2 と書く。）

問題 2. F_2^n の要素の個数を求めよ。また、部分ベクトル空間

$$A=\{(a_1,\ldots,a_n)\in F_2^n \mid a_1+\cdots+a_n=0\}$$

の要素の個数を求めよ。さらに、$n=3$ のときの A の要素をすべて書け。

問題 3. p が素数のとき、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体になった。これを F_p と書く。このとき、F_p^n と

$$A=\left\{(a_1,\ldots,a_n)\in F_p^n \,\middle|\, a_1+\cdots+a_n=0\right\}$$

の要素の個数を求めよ。

問題 4. $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間になっているものをすべて選べ。また、部分ベクトル空間でないものについては、その理由を述べよ。

1. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+2y+3z=0\right\}$.
2. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y=y+z=0\right\}$.
3. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y^2+z^3=0\right\}$.
4. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, xy+yz+zx=0\right\}$.
5. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, xyz=0\right\}$.
6. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=0\right\}$.