XỬ LÝ TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN

NGUYỄN LINH TRUNG, HUỲNH HỮU TUỆ

(Bản thảo: Ngày 27 tháng 5 năm 2021)

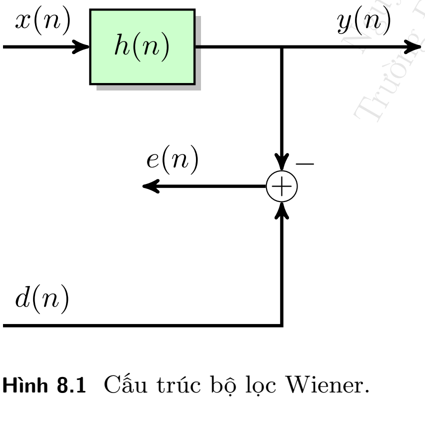
8 Lọc tối ưu

Trong chương này, ta sử dụng một hệ thống tuyến tính bất biến $h(n)$ để ước lượng một tín hiệu ngẫu nhiên dừng bậc hai $d(n)$ bằng cách lọc một tín hiệu quan sát được $x(n)$.

Bộ lọc này có tên là bộ lọc Wiener có đáp ứng xung $h_{\text{opt}}(n)$. Đáp ứng xung này là lời giải của bài toán tối ưu hóa sai số trung bình phương:

$$\boxed{h_{\text{opt}}(n) = \arg\left[\min_{h(n)}\left\{\mathbb{E}\left((d(n) - y(n))^2\right)\right\}\right]}. \tag{8.1}$$

Bộ lọc Wiener được minh họa trong hình 8.1.



Hình 8.1 Cấu trúc bộ lọc Wiener.

Bài toán (8.1) đã được Kolmogorov và Wiener giải quyết đầu những năm 40 của thế kỷ trước. Kolmogorov giải cho trường hợp thời gian rời rạc và Wiener cho trường hợp thời gian liên tục. Bộ lọc này đúng ra phải có tên Kolmogorov-Wiener, nhưng vì thói quen lịch sử, người ta gọi nói là bộ lọc Wiener.

8.1 Lọc Wiener không nhân quả

Trước tiên, ta tìm $h_{\text{opt}}(n)$ cho trường hợp $h(n)$ không nhân quả, tức là không áp đặt bất cứ điều kiện gì lên $h(n)$, $h(n)$ hiện hữu từ $-\infty$ đến ∞. Để tính $h_{\text{opt}}(n)$, ta khai triển sai số trung bình phương:

$$\mathcal{E}(n) \triangleq \mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\}, \tag{8.2}$$

với sai số

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k). \tag{8.3}$$

Như vậy, $h_{\text{opt}}(n)$ là đáp án $h(n)$ làm cho $\mathcal{E}(n)$ đạt tối thiểu.

Để tính $h_{\text{opt}}(n)$, ta lấy đạo hàm từng phần của $\mathcal{E}(n)$ đối với tất cả $h(m)$:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial h(m)} = \frac{\partial}{\partial h(m)} \mathbb{E}\left[e^2(n)\right] = 2\,\mathbb{E}\left\{e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial h(m)}\right\}, \quad m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{8.4}$$

và tìm được lời giải $h_{\text{opt}}(n)$ của bài toán với điều kiện

$$\frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial h(m)} = 0, \quad m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \tag{8.5}$$

hay cũng là

$$\mathbb{E}\left\{e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial h(m)}\right\} = 0, \quad m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{8.6}$$

Với $e(n)$ được cho bởi (8.3), ta có

$$\frac{\partial e(n)}{\partial h(m)} = -x(n-m), \tag{8.7}$$

nên (8.6) tương ứng với

$$\boxed{\mathbb{E}\left\{e(n)x(n-m)\right\} = R_{ex}(m) = 0, \quad m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots} \tag{8.8}$$

Kết quả (8.8) được gọi là **nguyên lý trực giao** giữa sai số $e(n)$ và dữ liệu $x(n)$: *Sai số của một bộ lọc tuyến tính tối ưu là trực giao với tất cả dữ liệu được bộ lọc sử dụng.*

Lưu ý rằng, dưới giả thuyết dữ liệu $x(n)$ có trị trung bình $\mathbb{E}\{x(n)\}$ triệt tiêu, tính trực giao là tương đương với tính không tương quan.

Ta có

$$
\begin{aligned}
R_{ex}(m) &\triangleq \mathbb{E}\left\{e(n)x(n-m)\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[d(n)-y(n)\right]x(n-m)\right\} \\
&= R_{dx}(m) - R_{yx}(m). \qquad (8.9)
\end{aligned}
$$

Vì $y(n)$ là đầu ra của bộ lọc $h(n)$, được kích thích bởi đầu vào $x(n)$, ta có

$$
\begin{aligned}
R_{yx}(m) &\triangleq \mathbb{E}\left\{y(n)x(n-m)\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)x(n-m)\right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,\mathbb{E}\left\{x(n-k)x(n-m)\right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)R_{xx}(m-k) \\
&= h(m) * R_{xx}(m). \qquad (8.10)
\end{aligned}
$$

Các kết quả (8.9) và (8.10) cho ta $h_{\text{opt}}(n)$ là đáp án của hệ phương trình

$$h_{\text{opt}}(m) * R_{xx}(m) = R_{dx}(m), \quad m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \qquad (8.11a)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(k)R_{xx}(m-k) = R_{dx}(m), \quad m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots. \qquad (8.11b)$$

Do hệ (8.11) có vô số phương trình, ta tìm $h_{\text{opt}}(n)$ bằng cách áp dụng biến đổi $\mathcal{Z}$ lên hai vế của (8.11)

$$S_{xx}(z)H_{\text{opt}}(z) = S_{dx}(z). \qquad (8.12)$$

Từ đó ta có đáp án

$$\boxed{H_{\text{opt}}(z) = \frac{S_{dx}(z)}{S_{xx}(z)}.} \qquad (8.13)$$

Tiếp theo, từ định nghĩa (8.2), ta sẽ tính sai số trung bình phương tối thiểu tương ứng khi bộ lọc là tối ưu

$$\mathcal{E}_{\text{opt}} = \mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\}\Big|_{h=h_{\text{opt}}}. \qquad (8.14)$$

Trước hết, với sai số $e(n)$ được cho bởi (8.3), ta khai triển sai số bình phương như sau:

$$
\begin{aligned}
e^2(n) &= \left(d(n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right)^2 \\
&= d^2(n) - 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)d(n)x(n-k) + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right)^2 \\
&= d^2(n) - 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)d(n)x(n-k) \\
&\qquad + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(n-l) \right) \\
&= d^2(n) - 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)d(n)x(n-k) \\
&\qquad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(n-k)x(n-l).
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

Lấy trung bình sai số bình phương để được

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\} &= \mathbb{E}\left\{d^2(n)\right\} - 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,\mathbb{E}\left\{d(n)x(n-k)\right\} \\
&\qquad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\,\mathbb{E}\left\{x(n-k)x(n-l)\right\} \\
&= R_{dd}(0) - 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)R_{dx}(k) \\
&\qquad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)R_{xx}(l-k).
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

Sau đó, ta thay thế bộ lọc tối ưu $h_{\text{opt}}(n)$ tìm được từ (8.13) vào (8.16), để tính sai số trung bình phương tối thiểu theo (8.14), ta có được

$$
\boxed{\mathcal{E}_{\text{opt}} = R_{dd}(0) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(k)R_{dx}(k).}
\tag{8.17}
$$

Tiếp theo, trong ví dụ (8.2) ta áp dụng bộ lọc Wiener không nhân quả để loại nhiễu trong tín hiệu.

Ví dụ 8.19 Loại nhiễu bằng bộ lọc Wiener không nhân quả

Cho một tín hiệu ngẫu nhiên $s(n)$ và tín hiệu quan sát $x(n)$ bị tác động bởi nhiễu cộng $b(n)$, theo mô hình sau:

$$x(n) = s(n) + b(n). \tag{8.18}$$

Từ $x(n)$, ta muốn tái tạo $s(n)$, tức là $d(n) = s(n)$. Ta áp dụng bộ lọc Wiener không nhân quả, như trên hình 8.2.

Giả sử $b(n)$ và $s(n)$ có trị trung bình triệt tiêu và độc lập với nhau. Lúc đó

$$\begin{aligned} R_{xx}(n) &\triangleq \mathbb{E}\left\{x(m)x(m-n)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{[s(m)+b(m)][s(m-n)+b(m-n)]\right\} \\ &= R_{ss}(n) + R_{bb}(n), \end{aligned} \tag{8.19}$$

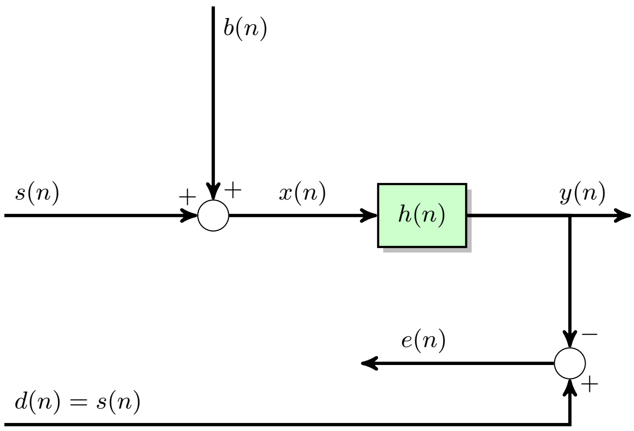
$$\begin{aligned} R_{dx}(n) &\triangleq \mathbb{E}\left\{d(m)x(m-n)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{s(m)[s(m-n)+b(m-n)]\right\} \\ &= R_{ss}(n). \end{aligned} \tag{8.20}$$

Cuối cùng, sử dụng (8.13), ta tìm được bộ lọc tối ưu $H_{\text{opt}}(z)$ dùng để loại nhiễu $b(n)$ như sau:

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{S_{ss}(z)}{S_{ss}(z) + S_{bb}(z)}. \tag{8.21}$$

Kết quả (8.21) cho thấy hai tình huống khá tự nhiên. Lúc nhiễu rất nhỏ, $S_{bb}(z) \to 0$, $H_{\text{opt}}(z)$ không cần phải loại nhiễu, tức là $H_{\text{opt}}(z) \to 1$. Lúc nhiễu rất lớn, $S_{bb}(z) \to \infty$, $H_{\text{opt}}(z)$ không thể loại được nhiễu nữa, tức là $H_{\text{opt}}(z)$ ngừng lọc, tức là $H_{\text{opt}}(z) \to 0$.

Ở trên, $H_{\text{opt}}(z)$ là không nhân quả, cho nên đối với tất cả các bộ lọc tuyến tính bất biến, $\mathcal{E}_{\text{opt}}$ thật sự là tối ưu. Để thấy rõ điểm này, ta áp dụng tính toán số cụ thể cho ví dụ 8.19, như trong ví dụ 8.20 dưới đây.



Hình 8.2 Loại nhiễu bằng bộ lọc Wiener không nhân quả.

Ví dụ 8.20 Loại nhiễu bằng bộ lọc Wiener không nhân quả (tính toán số)

Cho các hàm tương quan

$$R_{ss}(n) = \frac{28}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}, \qquad n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{8.22}$$

$$R_{bb}(n) = 8\delta(n). \tag{8.23}$$

Ta suy ra các hàm mật độ phổ công suất tương ứng

$$S_{ss}(z) = \frac{7}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}, \tag{8.24}$$

$$S_{bb}(z) = 8, \tag{8.25}$$

và từ đó

$$\begin{aligned} S_{xx}(z) &= S_{ss}(z) + S_{bb}(z) \\ &= \frac{7}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)} + 8 \\ &= \frac{17 - 4z^{-1} - 4z}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)} \\ &= \frac{16(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Sử dụng các kết quả trên để tìm bộ lọc tối ưu theo (8.21), ta có

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{S_{ss}(z)}{S_{xx}(z)} = \frac{7/16}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)}. \tag{8.27}$$

Biết rằng

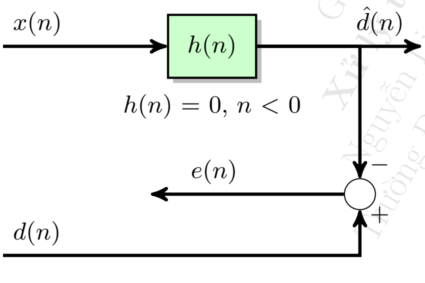
$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}\right\} = |a|^n, \tag{8.28}$$

ta suy ra

$$h_{\text{opt}}(n) = \frac{7}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{|n|}, \quad n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{8.29}$$

8.2 Lọc Wiener nhân quả

Cho $x(n)$ là tín hiệu quan sát được. Ta muốn sử dụng một bộ lọc tuyến tính bất biến nhân quả $h(n)$, tức $h(n) = 0$ với $n < 0$, để ước lượng tín hiệu $d(n)$.



Hình 8.3 Bộ lọc Wiener nhân quả.

Bộ lọc Wiener nhân quả là lời giải của bài toán tối ưu sau:

$$h_{\text{opt}}(n) = \arg \min_{\substack{h(n) \\ h(n)=0, n<0}} \mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\}. \tag{8.30}$$

Ta tính $\mathbb{E}\{e^2(n)\}$ như trong trường hợp không nhân quả. Do $\hat{d}(n)$ là đáp ứng của hệ thống với đầu vào $x(n)$, ta có

$$\hat{d}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k). \tag{8.31}$$

Do đó, ta khai triển sai số và sai số bình phương thành

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \hat{d}(n) \\ &= d(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k), \qquad (8.32) \\ e^2(n) &= d^2(n) - 2\sum_{k=0}^{\infty} h(k)d(n)x(n-k) \\ &\quad + \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} h(k)x(n-l)\right). \qquad (8.33) \end{aligned}$$

Suy ra sai số trung bình phương

$$\mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\} = R_{dd}(0) - 2\sum_{k=0}^{\infty} h(k)R_{dx}(k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\sum_{l=0}^{\infty} h(l)R_{xx}(k-l) \qquad (8.34)$$

Bộ lọc $h_{\text{opt}}^{\text{causal}}(n)$ là đáp án của bài toán

$$\frac{\partial}{\partial h(m)}\mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\} = 0, \quad m = 0, 1, \dots \qquad (8.35)$$

Do đó, từ (8.11), bộ lọc Wiener nhân quả thỏa mãn các điều kiện:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} h_{\text{opt}}^{\text{causal}}(k)R_{xx}(n-k) = R_{dx}(n), \quad n = 0, 1, \dots} \qquad (8.36)$$

Xét trường hợp thú vị tương ứng với đầu vào $x(n)$ trắng, tức là

$$R_{xx}(n) = \delta(n). \qquad (8.37)$$

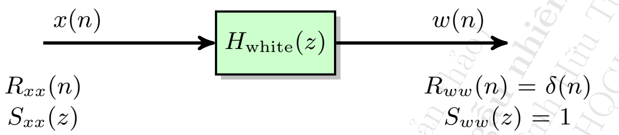
Lúc đó, các điều kiện (8.11) cho bộ lọc Wiener không nhân quả trở thành

$$h_{\text{opt}}(n) = R_{dx}(n), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \qquad (8.38)$$

và các điều kiện (8.36) cho bộ lọc Wiener nhân quả $h_{\text{opt}}^{\text{causal}}(n)$ trở thành

$$
\begin{aligned}
h_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{causal}}(n) &= \begin{cases} R_{dx}(n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} h_{\mathrm{opt}}(n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \\
&= h_{\mathrm{opt}}(n) u(n). \qquad (8.39)
\end{aligned}
$$

Kết quả (8.39) là thú vị vì nó gợi ý cho ta rằng nếu $x(n)$ không trắng, ta trước tiên làm trắng nó bằng bộ lọc làm trắng $H_{\mathrm{white}}(z)$ như trong hình 8.4. Sau đây, ta sẽ đi tìm bộ lọc này.



Hình 8.4 Bộ lọc trắng.

Trong trường hợp hệ thống thực ($h(n)$ là thực), ta có: Mối liên hệ giữa mật độ phổ công suất đầu vào và đầu ra của hệ thống tuyến tính cho ta

$$S_{xx}(z) H_{\mathrm{white}}(z) H_{\mathrm{white}}(z^{-1}) = S_{ww}(z) = 1. \qquad (8.40)$$

Với tín hiệu giá trị thực $x(n)$, ta cũng biết rằng

$$R_{xx}(n) = R_{xx}(-n), \qquad (8.41)$$

và từ đó

$$S_{xx}(z) = S_{xx}(z^{-1}). \qquad (8.42)$$

Để đơn giản hóa vấn đề, ta chỉ xét trường hợp $S_{xx}(z)$ có dạng hữu tỉ. Tính chất (8.42) của $S_{xx}(z)$ cho phép ta triển khai $S_{xx}(z)$ như sau:

$$S_{xx}(z) = A \frac{(1 - az^{-1})(1 - az)(1 - bz^{-1})(1 - bz) \cdots}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)(1 - \beta z^{-1})(1 - \beta z) \cdots}. \qquad (8.43)$$

Giả thử các thông số $a, b, \alpha, \beta, \ldots$ có biên độ nhỏ hơn 1. Trường hợp có biên độ bằng 1 được xem là đặc biệt, có thể xem như là trường hợp giới hạn $a \to 1$ (hoặc $\alpha \to 1$). Như thế, $S_{xx}(z)$ có thể phân tích thành tích của 2 hàm có dạng

$$S_{xx}(z) = S_{xx}^{+}(z) S_{xx}^{-}(z), \tag{8.44}$$

trong đó

$$S_{xx}^{+}(z) = \sqrt{A}\frac{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})\cdots}{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z^{-1})\cdots}, \tag{8.45a}$$

$$S_{xx}^{-}(z) = \sqrt{A}\frac{(1-az)(1-bz)\cdots}{(1-\alpha z)(1-\beta z)\cdots}. \tag{8.45b}$$

Trong mặt phẳng z, tất cả trị không và trị cực của $S_{xx}^{+}(z)$ đều nằm trong vòng tròn đơn vị. Tất cả trị không và trị cực của $S_{xx}^{-}(z)$ đều nằm ngoài vòng tròn đơn vị. Ngoài ra, ta thấy

$$S_{xx}^{+}(z) = S_{xx}^{-}(z^{-1}), \tag{8.46a}$$

$$S_{xx}^{+}(z^{-1}) = S_{xx}^{-}(z). \tag{8.46b}$$

Các kết quả (8.44) và (8.46) cho ta cách thiết kế bộ lọc trắng bởi

$$H_{\text{whiten}}(z) = \frac{1}{S_{xx}^{+}(z)}, \tag{8.47}$$

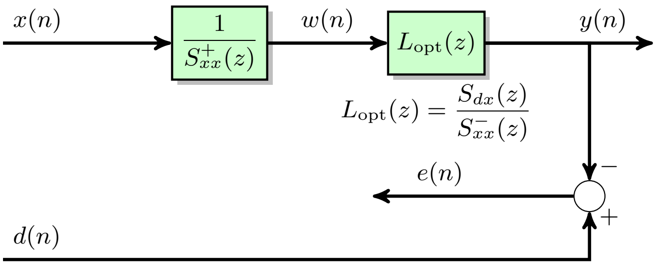
không những thõa mãn điều kiện (8.40) để làm trắng tín hiệu đầu vào $x(n)$ ($R_{ww} = \delta(n)$) mà còn là một bộ lọc vừa ổn định vừa nhân quả và có pha tối thiểu, là những tính chất quan trọng, căn bản để thiết kế trong thực tiễn.

Sau khi đã làm trắng dữ liệu bằng bộ lọc trắng như ở trên, ta sẽ áp dụng bộ lọc Wiener không nhân quả $L_{\text{opt}}(z)$ trên dữ liệu đã làm trắng $w(n)$, như trong hình 8.5.

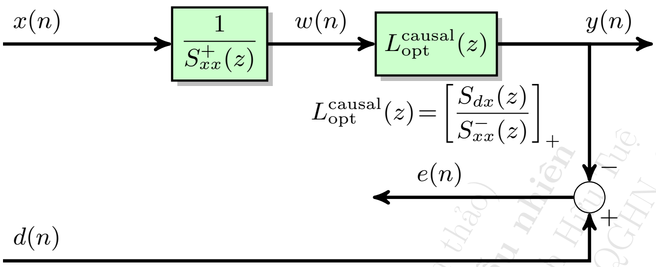
Theo kết quả (8.39), $L_{\text{opt}}^{\text{causal}}(z)$ chính là phần nhân quả của bộ lọc tối ưu Wiener không nhân quả $L_{\text{opt}}(z)$.

Để tìm $L_{\text{opt}}(z)$, trước tiên ta dùng $R_{xx}(n)$ và $R_{dx}(n)$ để tính $R_{ww}(n)$ và $R_{dw}(n)$. Ta cũng có thể suy nhanh kết quả bằng để ý rằng bộ lọc kết chuỗi $\frac{1}{S_{xx}^{+}(z)} L_{\text{opt}}(z)$ chính là bộ lọc Wiener dùng $x(n)$ để ước lượng $d(n)$, tức là

$$\frac{1}{S_{xx}^{+}(z)} L_{\text{opt}}(z) = H_{\text{opt}}(z) = \frac{S_{dx}(z)}{S_{xx}(z)}. \tag{8.48}$$



(a) Không nhân quả



(b) Nhân quả

Hình 8.5 Lọc Wiener bằng cách làm trắng dữ liệu trước, cho cả nhân quả và không nhân quả.

Do đó

$$L_{\text{opt}}(z) = \frac{S_{dx}(z)S^+_{xx}(z)}{S_{xx}(z)} = \frac{S_{dx}(z)}{S^-_{xx}(z)} \tag{8.49}$$

Lấy biến đổi ngược của $L_{\text{opt}}(z)$ để có $l_{\text{opt}}(n)$, xong rồi ta chỉ lấy phần nhân quả của $l_{\text{opt}}(n)$ để có bộ lọc Wiener nhân quả:

$$l^{\text{causal}}_{\text{opt}}(n) = l_{\text{opt}}(n)u(n). \tag{8.50}$$

Ta có thể đơn giản hóa ký hiệu như sau:

$$L^{\text{causal}}_{\text{opt}}(z) = [L_{\text{opt}}(z)]_+ = \left[\frac{S_{dx}(z)}{S^-_{xx}(z)}\right]_+. \tag{8.51}$$

Ví dụ 8.21 Lọc Wiener nhân quả bằng bộ lọc làm trắng (tính toán số)

Xét lại ví dụ 8.20, nhưng bây giờ ta muốn có một bộ lọc Wiener nhân quả

$$S_{xx}(z) = \frac{16(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)} \tag{8.52}$$

$$S_{dx}(z) = S_{ss}(z) = \frac{7}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)} \tag{8.53}$$

Ta suy ra

$$S_{xx}^{+}(z) = \frac{4(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \tag{8.54}$$

$$S_{xx}^{-}(z) = \frac{4(1-\frac{1}{4}z)}{1-\frac{1}{2}z}. \tag{8.55}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} L_{\text{opt}}(z) &= \frac{S_{dx}(z)}{S_{xx}^{-}(z)} \\ &= \frac{7}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)} \frac{1-\frac{1}{2}z}{4(1-\frac{1}{4}z)} \\ &= \frac{7/4}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)} = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{4}z} \end{aligned} \tag{8.56}$$

$L_{\text{opt}}(z)$ ổn định, cho nên $l_{\text{opt}}(n)$ không nhân quả, $\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ là phần nhân quả và $\frac{2}{1-\frac{1}{4}z}$ là phần phản nhân quả. Ta suy ra

$$l_{\text{opt}}(n) = \begin{cases} 2(4)^n, & n < 0, \\ 2, & n = 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & n \geq 1, \end{cases} \tag{8.57}$$

$$l_{\text{opt}}^{\text{causal}}(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & n \geq 1. \end{cases} \tag{8.58}$$

Vì vậy,

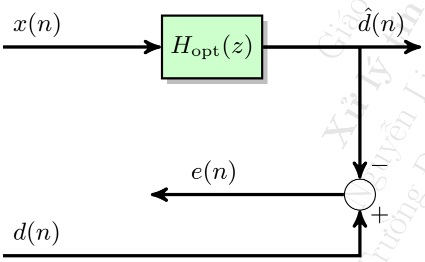
$$L_{\text{opt}}^{\text{causal}}(z) = 2 + \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \tag{8.59}$$

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}^{\text{causal}}(z) &= \frac{1}{S_{ss}^{+}(z)} L_{\text{opt}}^{\text{causal}}(z) \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{4(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{1}{2(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}. \end{aligned} \tag{8.60}$$

8.3 Tính chất của bộ lọc Wiener

8.3.1 Tính chất của $\mathcal{E}_{\text{opt}}$ trong lọc Wiener

Ta biết bộ lọc Wiener là một bộ lọc tuyến tính bất biến sử dụng dữ liệu $x(n), x(n-1), \ldots, x(-\infty)$ để ước lượng một tín hiệu $d(n)$, bằng cách tối thiểu hóa sai số trung bình phương giữa tín hiệu ta muốn ước lượng và tín hiệu ước lượng $\hat{d}(n)$:



$$h_{\text{opt}}(n) = \arg\left[\min_{h(n)} \mathbb{E}\left\{\left(d(n) - \hat{d}(n)\right)^2\right\}\right] \tag{8.61}$$

Sai số trung bình phương tối thiểu $\mathcal{E}_{\min}$ là sai số trung bình bình phương tương ứng với $h_{\text{opt}}(n)$. Vì vậy thỉnh thoảng ta dùng ký hiệu $\mathcal{E}_{\text{opt}}$ để thay thế cho $\mathcal{E}_{\min}$.

Viết rõ ra, sai số trung bình phương

$$\mathcal{E} = \mathbb{E}\left\{\left(d(n) - \sum h(k)x(n-k)\right)^2\right\} \tag{8.62}$$

là một hàm bậc 2 của $h(k)$, vì vậy nghiệm của hệ phương trình (8.61) sẽ cho $\mathcal{E}$ trị tối thiểu. Bởi vì, $h(n)$ là một chuỗi vô hạn, để chứng minh tính chất này, ta cần dùng kỹ thuật tính toán biến phân (calculus of variations), nên ta chỉ cần chấp nhận kết quả này. Trong trường hợp $h(n)$ là một chuỗi hữu hạn với N thành phần, ta có thể chứng minh tính chất tối thiểu của $\mathcal{E}(h_{\text{opt}})$ bằng phương pháp tính toán đa biến (xem phần tiếp theo).

8.3.2 Tính chất $\mathcal{E}_{\text{opt}}$ với lọc Wiener nhân quả

Ta đã xây dựng bộ lọc Wiener với hai cấu trúc khác nhau: nhân quả và không nhân quả. Trong phần sau, ta sẽ xét thêm cấu trúc bộ lọc có chiều dài hữu hạn N, là cấu trúc thích hợp nhất trong thực tiễn. Trong ba cấu trúc này, cả ba đều là tuyến tính và bất biến. Như thế, cấu trúc không nhân quả là tối ưu tuyệt đối bởi vì bài toán tối thiểu hóa trung bình phương không có thêm ràng buộc nào, ngoài hai tính chất là tuyến tính và bất biến. Ngoài ra, đối với bộ lọc FIR, lại có thêm một ràng buộc nữa là $h(n) = 0$ với $n \geq N$. Ta có thể suy ra:

$$\mathcal{E}_{\text{min}}^{\text{non-causal}} \leq \mathcal{E}_{\text{min}}^{\text{causal}} \leq \mathcal{E}_{\text{min}}^{\text{FIR}}. \tag{8.63}$$

Xét lại hai ví dụ 8.19 và 8.20, phương trình (8.19) cho ta

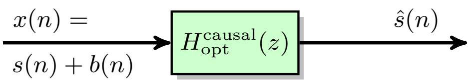
$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{min}} &= R_{ss}(0) - \sum_{k=\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(k) R_{ss}(k) \\
&= \frac{28}{3} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{7}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|} \frac{28}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \\
&= \frac{28}{3} - \frac{28}{5} = \frac{56}{15}, \\
\mathcal{E}_{\text{min}}^{\text{causal}} &= R_{ss}(0) - \sum_{k=0}^{\infty} h_{\text{opt}}^{\text{causal}}(k) R_{ss}(k) \\
&= \frac{28}{3} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} \frac{28}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Ta thấy ngay $\mathcal{E}_{\text{min}} < \mathcal{E}_{\text{min}}^{\text{causal}}$.

8.3.3 Biểu diễn bộ lọc Wiener theo đệ quy

Trở lại ví dụ 8.21, bộ lọc Wiener nhân quả có hàm truyền xác định bởi phương trình 8.60

$$H_{\text{opt}}^{\text{causal}}(z) = \frac{1}{2(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{\hat{S}(z)}{X(z)} \tag{8.64}$$



Trong miền thời gian ta có

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{4}\hat{s}(n-1) + \frac{1}{2}x(n), \tag{8.65}$$

với

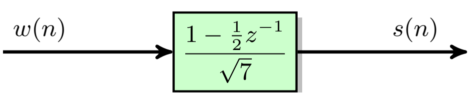
$$x(n) = s(n) + b(n). \tag{8.66}$$

Nhiễu quan sát $b(n)$ là trắng, có trị trung bình bằng 0. Tín hiệu $\hat{s}(n)$ là ước lượng của $s(n)$, sử dụng toàn bộ dữ liệu quan sát được cho đến thời điểm n, tức là $\{x(k)\}$, $k = n, n-1, \ldots$. Tín hiệu $\hat{s}(n-1)$ là ước lược của $s(n-1)$ sử dụng tất cả dữ liệu quan sát được cho đến $n-1$.

Mặt khác, với

$$S_{ss}(z) = \frac{7}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z)}, \tag{8.67}$$

ta thấy tín hiệu ngẫu nhiên $s(n)$ có thể tạo ra bởi một nhiễu trắng $w(n)$ có $S_{ww}(z) = 1$ như mô tả bởi hình sau:



Mô hình trong miền thời gian của $s(n)$ là

$$s(n) = \frac{1}{2}s(n-1) + \sqrt{7}w(n). \tag{8.68}$$

Như thế, ta có ba phương trình (tập hợp lại đây cho dễ theo dõi):

Mô hình hệ thống (8.68):

$$s(n) = \frac{1}{2}s(n-1) + \sqrt{7}w(n),$$

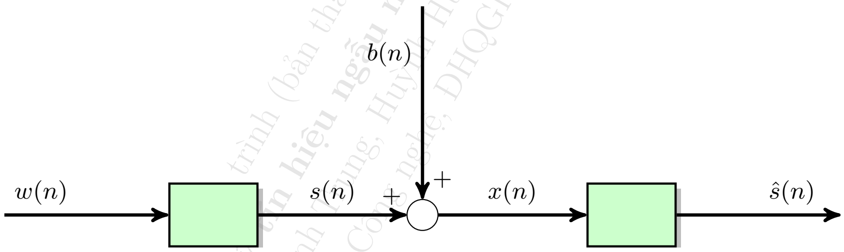
Mô hình quan sát (8.66):

$$x(n) = s(n) + b(n),$$

Mô hình ước lượng dựa vào quan sát (8.65):

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{4}\hat{s}(n-1) + \frac{1}{2}x(n).$$

Mô hình (8.65) chính là bộ lọc Wiener nhân quả tương ứng với ví dụ ta đang xét



Như bài toán đã đặt ra, ta biết mô hình của hệ thống, ta quan sát được $x(n)$, ta biết $w(n)$ là trắng và độc lập với nhiễu quan sát $b(n)$ cũng là trắng. Cho đến thời điểm $n-1$, ta quan sát được $\{x(k)\}$, $k = n-1, n-2, \ldots$ và dựa vào dữ liệu quan sát này, ta ước lượng được $\hat{s}(n-1)$. Mô hình hệ thống (8.68) cho thấy, sau khi ước lượng được $\hat{s}(n-1)$ dựa vào (8.68), ta có thể dự báo $s(n)$, được ký hiệu là $\hat{s}(n|n-1)$ như sau:

$$\hat{s}(n|n-1) = \frac{1}{2}\hat{s}(n-1). \tag{8.69}$$

Dựa vào mô hình quan sát (8.66), tại $n-1$ ta có thể dự báo $x(n)$, được ký hiệu là $\hat{x}(n|n-1)$, bằng

$$\hat{x}(n|n-1) = \hat{s}(n|n-1) = \frac{1}{2}\hat{s}(n-1). \tag{8.70}$$

Cuối cùng, mô hình ước lượng dựa vào quan sát (8.65) trở thành

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{2}\hat{s}(n-1) + \frac{1}{2}\left[x(n) - \hat{x}(n|n-1)\right]. \tag{8.71}$$

Phương trình (8.71) chính là bộ lọc Wiener nhân quả đặt dưới dạng đệ quy. Nó tương ứng với mô hình của hệ thống

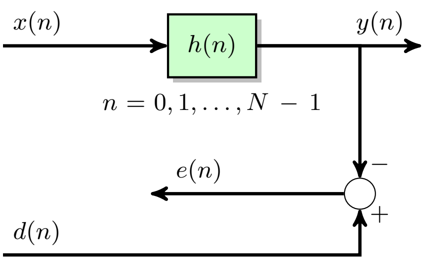
$$\hat{s}(n) = a\hat{s}(n-1) + K\left[x(n) - \hat{x}(n|n-1)\right]. \tag{8.72}$$

Bộ lọc Wiener dưới dạng này có tên là bộ lọc Kalman mà ta sẽ nghiên cứu trong mục 8.5. Dạng của nó giống dạng của mô hình hệ thống trong đó đầu vào $w(n)$ được thay bởi tích của sai số dự báo nhân với một hệ số K được gọi là độ khuếch đại Kalman. Ta thấy bộ lọc Wiener là dạng đặc biệt của bộ lọc Kalman. Cả hai bộ lọc đều tuyến tính và tối ưu theo nghĩa trung bình phương. Về cơ bản, chúng khác nhau ở tính chất bất biến và không dừng. Ngoài ra, bộ lọc Wiener được xây dựng trong miền tần số, trong khi bộ lọc Kalman được xây dựng trong miền thời gian.

8.4 Lọc FIR tối ưu

Trong hai phần trước, ta đã giải bài toán ước lượng tuyến tính trong hai trường hợp không nhân quả và nhân quả. Đối với các vấn đề thực tiễn, ta thường giới hạn chiều dài của bộ lọc gồm N thành phần, như trên Hình 8.6, tức là tìm một bộ lọc tối ưu có chiều dài N trong đó đầu ra giờ được cho bởi tổng hữu hạn

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k). \tag{8.73}$$



Hình 8.6 Bộ lọc FIR Wiener tối ưu.

Ta tìm $\{h(n)\}$ tối thiểu hóa sai số trung bình phương

$$h_{\text{opt}}(n) = \arg \min_{\substack{h(n)\\ n=0,\ldots,N-1}} \mathbb{E}\left\{e^2(n)\right\}. \tag{8.74}$$

Bộ lọc tối ưu này cũng mang tên Wiener, được gọi là bộ lọc FIR Wiener tối ưu. Để tính đáp án tối ưu $h_{\text{opt}}(n)$, với $n = 0, 1, \ldots, N-1$, ta sẽ sử dụng các biểu diễn ma trận và véc-tơ. Với $\mathbf{h} = (h_0, \ldots, h_{N-1})^T$ là véc-tơ bộ lọc, $\mathbf{x}(n) = (x(n), x(n-1), \ldots, x(n-N+1))$ là véc-tơ đầu vào, ta có đầu ra $y(n)$ (vô hướng) được viết bằng

$$\begin{aligned} y(n) &= h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + \cdots + h_{N-1} x(n-N+1) \\ &= \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{h}. \end{aligned} \tag{8.75}$$

Do đó, sai số trung bình phương được khai triển thành

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n) &= \mathbb{E}\left\{(d(n) - \mathbf{h}^T\mathbf{x}(n))^2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{d^2(n) + \mathbf{h}^T\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{h} - 2\mathbf{h}^T d(n)\mathbf{x}(n)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{d^2(n)\right\} + \mathbf{h}^T\,\mathbb{E}\left\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right\}\mathbf{h} - 2\mathbf{h}^T\,\mathbb{E}\left\{d(n)\mathbf{x}(n)\right\} \\ &= \sigma_d^2 + \mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{h} - 2\mathbf{h}\mathbf{P}. \end{aligned} \tag{8.76}$$

Trong (8.76), ta có $\mathbf{P}$ là véc-tơ tương quan giữa $d(n)$ và $\mathbf{x}(n)$, gồm N thành phần, được cho bởi

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{d(n)x(n)\} \\ \mathbb{E}\{d(n)x(n-1)\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{d(n)x(n-N+1)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) \\ \mathbf{P}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(N-1) \end{bmatrix} \tag{8.77}$$

và $\mathbf{R}$ là ma trận tự tương quan của đầu vào $\mathbf{x}(n)$, có kích thước $N \times N$, được cho bởi

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbb{E}\left\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right\} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{x(n)x(n)\} & \cdots & \mathbb{E}\{x(n-N+1)x(n)\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\{x(n)x(n-N+1)\} & \cdots & \mathbb{E}\{x(n-N+1)x(n-N+1)\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(N-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(N-1) & r_{xx}(N-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.78}$$

với

$$r_{xx}(k) = \mathbb{E}\{x(n)x(n-k)\}. \tag{8.79}$$

Nếu $x(n)$ là một chuỗi trắng, ta có

$$r_{xx}(n) = \delta(n), \quad \text{tức là } \mathbf{R} = \mathbf{I}. \tag{8.80}$$

Biết rằng

$$\mathbf{h}_{\mathrm{opt}} = \arg\left[\min_{\mathbf{h}} \mathbb{E}\left\{e^2(\mathbf{h})\right\}\right] \tag{8.81}$$

nên $\mathbf{h}_{\mathrm{opt}}$ là đáp án của hệ phương trình

$$\nabla_{\mathbf{h}} \mathcal{E}(\mathbf{h}) \triangleq \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_0}, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_1}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_{N-1}}\right]^T = \mathbf{0} \tag{8.82}$$

với

$$\mathcal{E}(\mathbf{h}) = \sigma_d^2 + \mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{h} - 2\mathbf{h}^T\mathbf{P}. \tag{8.83}$$

Ta suy ra

$$\nabla_{\mathbf{h}} \mathcal{E}(\mathbf{h}) = 2\mathbf{R}\mathbf{h} - 2\mathbf{P} = \mathbf{0} \tag{8.84}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{h}_{\mathrm{opt}} = \mathbf{P}. \tag{8.85}$$

Ma trận tự tương quan thường là xác định dương, cho nên $\mathbf{R}^{-1}$ hiện hữu, do đó

$$\mathbf{h}_{\mathrm{opt}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}. \tag{8.86}$$

Ta tính được

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\min} &= \mathcal{E}(\mathbf{h}_{\mathrm{opt}}) \\
&= \sigma_d^2 + \mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} - 2\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} \\
&= \sigma_d^2 - \mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} \\
&= \sigma_d^2 - \mathbf{P}^T\mathbf{h}_{\mathrm{opt}} && (8.87) \\
&\le \sigma_d^2. && (8.88)
\end{aligned}$$

Các kết quả (8.83), (8.84) và (8.86) là nền tảng để triển khai và xây dựng cấu trúc bộ lọc tự thích nghi sẽ được trình bày trong chương 9.