<table>
<tr><td colspan="2">NHÓM 9</td><td rowspan="5">PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN
GVGD: Nguyễn Thanh Sơn
Trường ĐH Công nghệ Thông tin</td></tr>
<tr><td>Họ và tên</td><td>MSSV</td></tr>
<tr><td>1. Phạm Hoàng Phúc
2. Trương Thị Thanh Thanh
3. Đỗ Thị Thu Trang</td><td>20520278
20520767
20520816</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mã lớp học: CS112.M21.KHCL</td></tr>
</table>

- Để so sánh và xếp hạng về độ hiệu quả của thuật toán, người ta sử dụng đến 3 ký hiệu có liên quan đến tiệm cận như sau: O (big-oh), Ω (big-omega) và Θ (big-theta).
- Trước khi đi đến tìm hiểu kỹ hơn về từng ký hiệu thì ở đây, chúng ta sẽ sử dụng đến các hàm số sau:

$$t(n), g(n) \geq 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

  Trong đó:
    - $t(n)$: thời gian chạy của thuật toán.
    - $g(n)$: một số hàm số đơn giản.

1. Giới thiệu chung:

- $O\big(g(n)\big)$ là tập hợp của tất cả các hàm số có bậc cao nhất của nó nhỏ hơn hoặc bằng với bậc cao nhất của $g(n)$ (khi $n \to \infty$). Ví dụ:

$$n \in O(n^2), \qquad 100n + 5 \ \in O(n^2), \qquad \frac{1}{2}n(n-1) \in O(n^2)$$

  Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy 2 hàm số đầu đều có bậc cao nhất (bậc 1) nhỏ hơn bậc cao nhất của $g(n) = n^2$ (bậc 2) trong khi hàm số cuối cùng lại có bậc cao nhất bằng với bậc cao nhất của $g(n)$ (đều là bậc 2).

- $\Omega\big(g(n)\big)$ là tập hợp của tất cả các hàm số có bậc cao nhất của nó lớn hơn hoặc bằng với bậc cao nhất của $g(n)$ (khi $n \to \infty$). Ví dụ:

$$n^3 \in \Omega(n^2), \qquad \frac{1}{2}n(n-1) \ \in \Omega(n^2), \qquad 100n + 5 \notin \Omega(n^2)$$

- $\Theta\big(g(n)\big)$ là tập hợp của tất cả các hàm số có bậc cao nhất của nó bằng với bậc cao nhất của $g(n)$ (khi $n \to \infty$). Ví dụ:

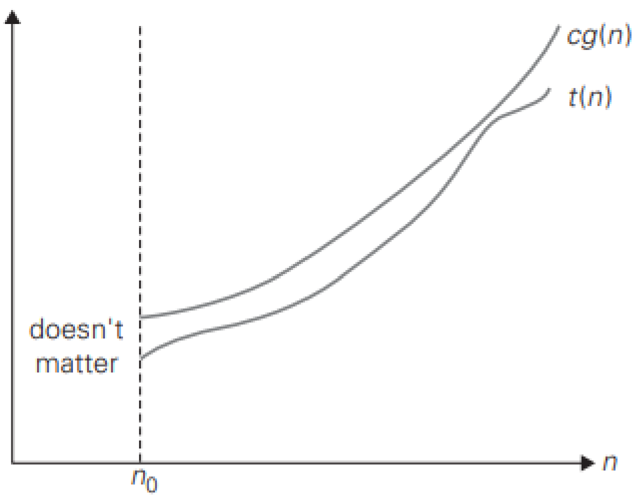
$$an^2 + bn + c \in \Theta(n^2) \ (\forall a > 0)$$

2. Ký hiệu O (big-oh):

- Một hàm số $t(n)$ được gọi là thuộc $O\big(g(n)\big)$, ký hiệu là $t(n) \in O\big(g(n)\big)$, nếu $t(n)$ bị giới hạn ở trên bởi một bội hằng số nào đó của $g(n)$ với mọi n vô cùng lớn. Hay nói cách khác, là nếu tồn tại một hằng số c dương và một số nguyên không âm n_0 thỏa:

$$t(n) \le cg(n)\ (\forall n \ge n_0)$$

- Định nghĩa trên được minh họa bởi hình dưới đây:



Big-oh notation: $t(n) \in O(g(n))$.

- Chúng ta sẽ lấy nhận định $100n + 5\ \in O(n^2)$ ở phần giới thiệu chung để chứng minh là đúng như sau:

$$100n + 5 \le 100n + n\ (\forall n \ge 5) = 101n \le 101n^2$$

Do đó, ta có thể lấy các giá trị c và n_0 tương ứng là 101 và 5.

- **<u>Lưu ý:</u>** Theo định nghĩa, chúng ta có thể tự do lựa chọn cho các giá trị c và n_0. Điều đó có nghĩa là các cách chứng minh khác nhau sẽ cho ra các giá trị c và n_0 khác nhau.

- Ví dụ như chúng ta có thể chứng minh nhận định $100n + 5\ \in O(n^2)$ là đúng theo một cách khác như sau:

$$100n + 5 \le 100n + 5n\ (\forall n \ge 1) = 105n \le 105n^2$$

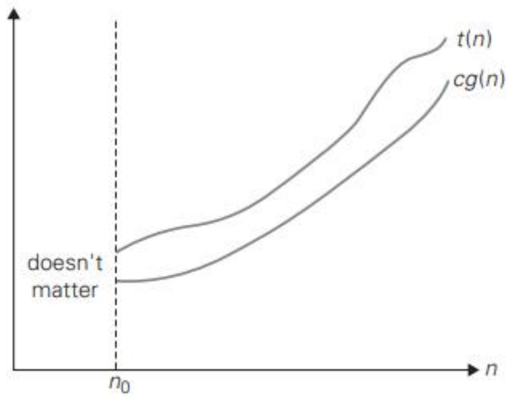
Do đó, giá trị của c và n_0 tương ứng lúc này là 105 và 1.

3. Ký hiệu Ω (big-omega):

- Một hàm số $t(n)$ được gọi là thuộc $\Omega\big(g(n)\big)$, ký hiệu là $t(n) \in \Omega\big(g(n)\big)$, nếu $t(n)$ bị giới hạn ở dưới bởi một bội hằng số nào đó của $g(n)$ với mọi n vô cùng lớn. Hay nói cách khác, là nếu tồn tại một hằng số c dương và một số nguyên không âm n_0 thỏa:

$$t(n) \geq cg(n)\ (\forall n \geq n_0)$$

- Định nghĩa trên được minh họa bởi hình dưới đây:



Big-omega notation: $t(n) \in \Omega(g(n))$.

- Ví dụ như chúng ta chứng minh nhận định $n^3 \in \Omega(n^2)$ là đúng như sau:

$$n^3 \geq n^2\ (\forall n \geq 0)$$

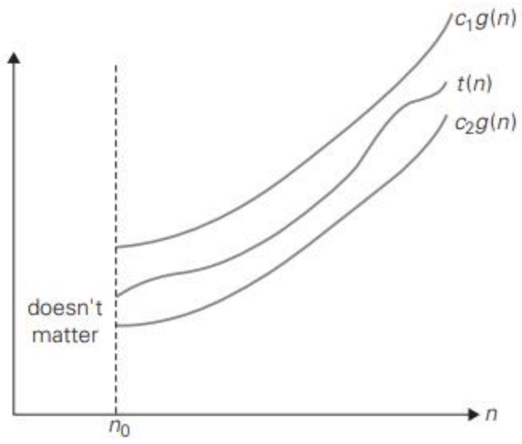
 Do đó, ta có thể lấy các giá trị c và n_0 tương ứng là 1 và 0.

4. Ký hiệu Θ (big-theta):

- Một hàm số $t(n)$ được gọi là thuộc $\Theta(g(n))$, ký hiệu là $t(n) \in \Theta(g(n))$, nếu $t(n)$ bị giới hạn cả ở trên và ở dưới bởi một vài bội hằng số nào đó của $g(n)$ với mọi n vô cùng lớn. Hay nói cách khác, là nếu tồn tại một vài hằng số c_1 và c_2 dương và một số nguyên không âm n_0 thỏa:

$$c_2 g(n) \leq t(n) \leq c_1 g(n) \ (\forall n \geq n_0)$$

- Định nghĩa trên được minh họa bởi hình dưới đây:



Big-theta notation: $t(n) \in \Theta(g(n))$.

- Ví dụ như chúng ta hãy cùng chứng minh nhận định $\frac{1}{2}n(n-1) \ \in \Theta(n^2)$ là đúng như sau:
  - Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên vế phải (chiều chặn ở trên) là đúng:

$$\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}n^2 \ (\forall n \geq 0)$$

  - Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên vế trái (chiều chặn ở dưới) là đúng:

$$\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \geq \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\frac{1}{2}n \ (\forall n \geq 2) = \frac{1}{4}n^2$$

  - Giao cả 2 bất đẳng thức lại với nhau ta được:

$$\frac{1}{4}n^2 \leq \frac{1}{2}n(n-1) \leq \frac{1}{2}n^2 \ (\forall n \geq 2)$$

  - Cuối cùng, chúng ta có thể chọn được $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_1 = \frac{1}{2}$ và $n_0 = 2$.