

BÀI TẬP PHƯƠNG PHÁP SỐ MI3042

TUẦN 1.

Câu 1.

Tính định thức Vandermon trong định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm của đa thức nội suy.

Câu 2.

a) Chứng minh công thức truy hồi của đa thức Chebysev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

b) Chứng minh rằng $T_n(x)$ là đa thức đại số bậc n với hệ số cả $a_n = 2^{n-1}$.

Câu 3.

a) Xây dựng công thức xác định n mốc nội suy tối ưu trên đoạn $[-1,1]$ và trên đoạn $[a,b]$ bất kỳ.

b) Viết thuật toán xác định n mốc nội suy tối ưu sắp theo thứ tự tăng dần trong đoạn $[a,b]$ bất kỳ.

c) Áp dụng với $n=9$, $a=-1$, $b=1$; và với $n=12$, $a=3$, $b=6$.

TUẦN 2.

Câu 4.

a) Viết thuật toán tính giá trị đa thức bằng sơ đồ Horner tại một điểm $x=c$.

b) Viết thuật toán tính phép chia đa thức $P_n(x)$ cho đa thức bậc nhất dạng $x-c$ bằng sơ đồ Horner.

c) Viết thuật toán tính đạo hàm cấp k của $P_n(x)$ tại $x=c$ bằng sơ đồ Horner.

d) Sử dụng các thuật toán đã thiết lập trong các ý a), b), c) cho đầu vào là $P(x) = 3x^3 - 2x - 1$ và $c = 0$ và $c = 2.15$ để tính giá trị đa thức, tính thương và phần dư của phép chia đa thức và tính đạo hàm các cấp của đa thức tại c .

Câu 5.

a) Viết thuật toán tính phép nhân đa thức $P_n(x)$ với đa thức bậc nhất dạng $x-c$.

- b) Viết thuật toán xác định hệ số của đa thức tích $w_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$.
- c) Áp dụng thuật toán trong ý b) để xác định dạng chính tắc của đa thức tích với các giá trị đầu vào x_k lần lượt là 2; 2.4; 2.7; 3; 3.1; 3.4.

Câu 6.

Viết thuật toán xây dựng đa thức nội suy Lagrange tương ứng với bộ điểm $S = \{(x_i, y_i), i = \overline{0, n}\}$ cho trước.

Câu 7.

Tìm đa thức nội suy Lagrange tương ứng với bảng dữ liệu dưới đây:

x	1.2	1.5	1.7	1.8	2.1	2.3
y	0.892	1.179	1.358	1.445	1.688	1.839

TUẦN 3

Câu 8. Cho bảng dữ liệu:

x	1.2	1.5	1.7	1.9	2.1	2.4
y	0.7247	0.1415	-0.2577	-0.6466	-1.0097	-1.4748

- a) Tìm đa thức nội suy Newton tiến tương ứng với bảng dữ liệu trên.
 b) Sử dụng đa thức tìm được trong câu a) tính gần đúng $f(x)$, $f^{(3)}(x)$ tại $x = 1.8$

Câu 9. Cho bảng dữ liệu:

x	2.2	2.3	2.6	2.7	3	3.2
y	1.617	1.4914	1.031	0.8548	0.2822	-0.1167

- a) Tìm đa thức nội suy Newton lùi tương ứng với bảng dữ liệu trên.
 b) Sử dụng đa thức tìm được trong câu a) tính gần đúng $f(x)$, $f^{(4)}(x)$ tại $x = 2.4$

Câu 10.

- a) Viết thuật toán xác định đa thức nội suy Newton tiến (trường hợp mốc bất kỳ/mốc cách đều)
- b) Viết thuật toán xác định đa thức nội suy Newton lùi (trường hợp mốc bất kỳ/mốc cách đều)

Câu 11.

- a) Viết thuật toán trích xuất k điểm nội từ một danh sách các điểm nội suy cách đều cho trước phù hợp cho bài toán tính gần đúng giá trị hàm số tại điểm \bar{x} .
- b) Áp dụng thuật toán trên trích xuất 9 điểm nội suy phù hợp tính giá trị hàm số tại $\bar{x} = 3.52$ từ file data kèm theo.
- c) Xác định đa thức nội suy Newton tiến (hoặc lùi) tương ứng với tập các điểm nội suy đã trích xuất được, tính gần đúng $f(\bar{x})$, $f'(\bar{x})$.

TUẦN 4 + TUẦN 5.

Câu 12.

Cho tập các điểm nội suy trong bảng dữ liệu dưới đây.

x	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
y	9.4341319	9.4307764	9.4261142	9.421191	9.4170553	9.4147476	9.41529	9.4196762	9.4288617

- a) Lập đa thức nội suy Gauss 1 (hoặc Gauss 2) tương ứng với bảng dữ liệu trên
- b) Tính gần đúng giá trị hàm số tại $\bar{x} = 9.68$

Câu 13.

Cho tập các điểm nội suy trong bảng dữ liệu dưới đây.

x	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2
y	2.4347052	2.5473627	2.6495552	2.741261	2.8225627	2.8936474	2.9548	3.0064203	3.0489801

- a) Lập đa thức nội suy Stirlin tương ứng với bảng dữ liệu trên
- b) Tính gần đúng giá trị hàm số và đạo hàm của nó tại $\bar{x} = 1.63$.

Câu 14

Cho tập các điểm nội suy trong bảng dữ liệu dưới đây.

x	5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7
y	3.9931011	4.1278568	4.2723258	4.426064	4.5885338	4.7591118	4.93709	5.1216967

- a) Lập đa thức nội suy Bessel tương ứng với bảng dữ liệu trên
b) Tính gần đúng giá trị hàm số và đạo hàm của nó tại $\bar{x} = 1.63$.

Câu 15

- a) Viết thuật toán thiết lập đa thức nội suy Gauss 1 (Gauss 2)
b) Viết thuật toán thiết lập đa thức nội suy Stirlin
c) Viết thuật toán thiết lập đa thức nội suy Bessel

Câu 16.

- a) Trích xuất 9 điểm nội suy phù hợp tính giá trị hàm số tại $\bar{x} = 7.83$ từ file data kèm theo câu 11.
b) Xác định đa thức nội suy Stirlin tương ứng với tập các điểm nội suy đã trích xuất được, tính gần đúng $f(\bar{x})$, $f'(\bar{x})$.

Câu 17.

- a) Trích xuất 8 điểm nội suy phù hợp tính giá trị hàm số tại $\bar{x} = 7.83$ từ file data kèm theo câu 11.
b) Xác định đa thức nội suy Bessel tương ứng với tập các điểm nội suy đã trích xuất được, tính gần đúng $f(\bar{x})$, $f'(\bar{x})$.

TUẦN 6 + TUẦN 7

Câu 18.

- a) Viết thuật toán xác định tất cả các khoảng cách ly của phương trình $f(x) = \bar{y}$ từ tập dữ liệu cho trước.
b) Viết thuật toán xác định các khoảng đơn điệu của hàm số từ tập dữ liệu cho trước.
c) Viết thuật toán nội suy cho phương pháp hàm ngược giải bài toán nội suy ngược.
d) Viết thuật toán nội suy cho phương pháp lặp giải bài toán nội suy ngược.

Câu 19.

Cho file dữ liệu kèm theo. Giải phương trình $f(x) = \bar{y}$

- a) Bằng phương pháp hàm ngược với $\bar{y} = 2.5$.
- b) Bằng phương pháp lặp với $\bar{y} = 3.15$.

Câu 20.

- a) Xây dựng công thức xác định hàm ghép tron cấp 3, cấp 4 với tập dữ liệu cho trước.
- b) Viết thuật toán cho hàm ghép tron cấp $p, p \leq 4$ với tập dữ liệu cho trước.

Câu 21

Cho bảng dữ liệu

x	0	0.5236	1.5708	1.0472	3.1416
y	1	0.866	0	-0.866	-1

- a) Xác định hàm ghép tron cấp 2 với điều kiện biên $S'(0) = 0$.
- b) Xác định hàm ghép tron cấp 3 với điều kiện biên $S''(0) = -1, S''(0) = 1$.
- c) Xác định hàm ghép tron cấp 3 với điều kiện biên $S'(0) = S'(3.1416) = 0$.

Câu 22

- a) Viết thuật toán xác định hàm thực nghiệm bằng phương pháp bình phương tối thiểu biết tập cơ sở $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,m}$ và tập dữ liệu $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,n}$ đồng thời xác định sai số trung bình phương của hàm tìm được.
- b) Viết thuật toán xác định hàm thực nghiệm theo các dạng dưới đây bằng phương pháp bình phương tối thiểu biết tập cơ sở $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,m}$ và tập dữ liệu $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,n}$.
 - a. $y = ae^{b_1\varphi_1(x)+b_2\varphi_2(x)}$ trong đó, các hàm cơ sở không phải hàm đồng nhất
 - b. $y = ax^b$

Câu 23. Cho file dữ liệu kèm theo.

- a) Xác định hàm thực nghiệm dạng $y = ax + \frac{b}{x}$.
- b) Xác định hàm thực nghiệm dạng $y = ax^2 + b \cos x + c$
- c) Xác định hàm thực nghiệm dạng $y = ae^{bx+cx^2}$
- d) Xác định hàm thực nghiệm dạng $y = ax^b$

TUẦN 8-10

Câu 24.

Xây dựng công thức $p+1$ điểm tính gần đúng đạo hàm và công thức sai số tương ứng với $p = 3; 4; 5$.

Câu 25.

Viết thuật toán tính đạo hàm bằng công thức $p+1$ điểm tại các mốc nội suy trong một bảng dữ liệu cho trước.

Áp dụng tính đạo hàm tại các điểm cho file data câu 19.

Câu 26.

Viết thuật toán xác định hệ số của công thức $p+1$ điểm tính gần đúng đạo hàm.

Câu 27.

Tính gần đúng các tích phân dưới đây bằng phương pháp điểm giữa, phương pháp hình thang, phương pháp Simpson với sai số kèm theo.

- | | |
|---|--|
| a) $\int_0^2 e^{-x^2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}$ | c) $\int_2^5 \frac{dx}{\ln(\ln(2x))}, \quad \varepsilon = 10^{-7}$ |
| b) $\int_1^3 \frac{dx}{1+x^2}, \quad \varepsilon = 10^{-6}$ | d) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}, \quad \varepsilon = 0.5 \times 10^{-5}$ |

Câu 28.

Tính gần đúng tích phân dưới đây bằng công thức điểm giữa, công thức Simpson, công thức hình thang, công thức Newton-Cotez với $n = 4; 5; 6$ và đánh giá sai số.

- a) $\int_a^b f(x)dx$ biết $f(x)$ cho trong data câu 19 với $a = x_0, b = x_{40}$
- b) $\int_a^b [xf(x) + \sqrt{x}]dx$ biết hàm f cho trong bảng data câu 19 với $a = x_0, b = x_{60}$

Trả lời câu hỏi tương tự cho các file data câu 11 và data trong đề thi GK20251

Câu 29.

Viết thuật toán tính gần đúng tích phân xác định cho các bài toán

- a) Cho $f(x), a, b, \varepsilon$, tính $\int_a^b f(x)dx$ bằng các công thức đã học
- b) Cho tập điểm $S = \{(x_i, y_i), y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}\}$ tính $I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ và ΔI

Câu 30.

Xây dựng thuật toán xác định hệ số cho công thức Newton-Cotez biết n là bậc của đa thức xấp xỉ.

Câu 31.

Xây dựng công thức tính gần đúng tích phân kép trên miền hình chữ nhật và công thức sai số tương ứng của phương pháp hình thang và phương pháp Simpson.

Áp dụng tính tích phân sau:

- a) $\iint_D (e^{x^2} \cos(x+y)) dxdy, D = [0,1] \times [2,5]$
- b) $\iint_D \frac{1+xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy, D = [0,1] \times [1,3]$

TUẦN 11-12

Câu 32.

- a) Chứng minh tốc độ hội tụ của công thức Euler ẩn, công thức hình thang
- b) Xác định miền ổn định tuyệt đối của công thức Euler ẩn, công thức hình thang

c) Viết thuật toán tìm nghiệm số của phương trình vi phân cho bài toán bằng công thức Euler hiện, công thức Euler ẩn, công thức hình thang

✓ Bài toán 1. (từ 1 đến 3 chiều)

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y, z), & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(t, x, y, z), & y(t_0) = y_0 \\ z' = \eta(t, x, y, z), & z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad t \in [t_0, T].$$

✓ Bài toán 2. (đến cấp 3)

$$\begin{cases} y^{(k+1)} = f\left(t, y, \dots, y^{(k)}\right) \\ y(t_0) = y_{0,0}, \dots, y^{(k)}(t_0) = y_{0,k} \end{cases} \quad t \in [t_0, T].$$

Câu 33. Tìm nghiệm số của các bài toán sau bằng công thức Euler hiện, Euler ẩn và công thức hình thang.

a) $y'(t) = -2y, y(0) = 1, t \in [0, 100], h = 0.1$

b) $y'(t) = ty^3 \sin(t + y), y(0) = -0.2, t \in [0, 10], h = 0.1$

c) $y'' = (t + y)\cos(1 + y'), y(0) = 1, y'(0) = -1, t \in [0, 20], h = 0.1$

d) $y''' = \frac{(1 + ty')\sin(1 + yy')}{1 + y^2 + (y'')^2}, y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -1, t \in [0, 10], h = 0.05.$

e) $\begin{cases} x' = 0.5x(1-x) - 0.15xy, x(0) = 0.7 \\ y' = -0.3y + 0.2xy, y(0) = 0.5 \end{cases} \quad t \in [0, 2000], h = 0.1.$

f) $\begin{cases} x' = 0.4x\left(1 - \frac{x}{20}\right) + 0.4y - 0.3xz, x(0) = 12 \\ y' = 0.7y\left(1 - \frac{y}{25}\right) - 0.4y - 0.4yz, y(0) = 18 \\ z' = -0.3z + 0.35(x+y)z, z(0) = 8 \end{cases}$

TUẦN 13-15

Câu 34.

a) Xây dựng công thức RK2 với nắc 2 tương ứng $\alpha_2 = \frac{2}{3}$.

- b) Khảo sát tính hội tụ và cấp hội tụ của công thức xây dựng được từ câu a.
- c) Xác định miền hội tụ tuyệt đối của công thức xây dựng được từ câu a.
- d) Tìm nghiệm số của bài toán 33c bằng công thức đã xây dựng

Câu 35.

- a) Xây dựng công thức RK3 với nấc thứ 2 và nấc thứ 3 tương ứng $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_3 = \frac{2}{3}$
- b) Khảo sát tính hội tụ của công thức xây dựng được từ câu a.
- c) Xác định miền ổn định tuyệt đối của công thức xây dựng được từ câu a.
- d) Tìm nghiệm số của bài toán 33e bằng công thức đã xây dựng.

Câu 36.

Tìm nghiệm số của các bài toán trong câu 33 bằng công thức RK3, RK4 thông dụng.

Câu 37.

Viết thuật toán tìm nghiệm số của bài toán 1, bài toán 2 trong câu 32c bằng các công thức RK2, RK3, RK4 thông dụng hoặc đã xây dựng trong câu 34, 35.

Câu 38.

Xây dựng công thức dự báo hiệu chỉnh ABs-AMs với $s = \overline{2,5}$.

Viết thuật toán tìm nghiệm số của bài toán 1;2 trong câu 32c bằng các công thức sự báo hiệu chỉnh ABs-Ams, $s = \overline{2,5}$.

Câu 39.

Tìm nghiệm số của các bài toán trong câu 33 bằng các công thức dự báo hiệu chỉnh ABs-Ams, $s = \overline{2,5}$.

Câu 40.

Giải số bài toán biên cho phương trình $[p(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = -f(x)$ trên lưới đều với bước lưới $h = 0.1$ trong các trường hợp sau:

- a) $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = 4x^4 - 4x^2 + 5$, $f(x) = 1.25xe^{-x^2}$, $u'(0) = 1.5$, $u'(3) = 2$.
- b) $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = 4x^4 - 4x^2 + 5$, $f(x) = 1.25xe^{-x^2}$, $u(0) = 2$, $u(3) = 5$.

- c) $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = 4x^4 - 4x^2 + 5$, $f(x) = 1.25xe^{-x^2}$, $u'(0) - 2u(0) = -1$, $u'(3) - u(3) = -2.5$
- d) $p(x) = (x+1)^2$, $q(x) = x^4 + 1$, $f(x) = 1.25x^2 \cos x$, $u'(1) = 1.2$, $u'(3) = -1.15$
- e) $p(x) = 1 + \cos^2 x$, $q(x) = 2$, $f(x) = e^x \sin x$, $u'(1) - 1.5u(1) = 2$, $u'(4) - 3u(4) = 5$.
- f) $p(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $q(x) = \ln(1 + x^2)$, $f(x) = 3x \ln(x^2 + 3)$, $u(0) = u(3) = 1$.

Câu 41. Giải số bài toán giá trị riêng trên lưới đều với bước lưới $h = 0.1$ cho phương trình $[p(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = \lambda r(x)u(x)$ với $p(x), q(x)$ xác định trong câu 38 và

- a) $r(x) = (1 + \cos^2 x)$
 b) $r(x) = x^2 + x + 1$
 c) $r(x) = \ln(x^2 + 3)$

Câu 42.

Tìm nghiệm số của bài toán biên cho phương trình $u_t - u_{xx} = f(t, x)$ trong các trường hợp sau:

- a) $f(t, x) = 0$, $u(0, x) = \sin x$, $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ với $t \in [0, 2]$, bước lưới $\tau = h = 0.01$
 b) $f(t, x) = tx^2$, $u(0, x) = x$, $u(t, 0) = u(t, 2) = t^2$ với $t \in [0, 2]$, bước lưới $\tau = h = 0.01$
 c) $f(t, x) = t \sin(t + x)$, $u(0, x) = 0$, $u(t, 0) = u(t, 2) = 2t + 1$ với $t \in [0, 2]$, bước lưới $\tau = h = 0.01$