TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH – MARKETING
BỘ MÔN TOÁN THỐNG KÊ

Giáo Trình

TOÁN CAO CẤP

Nhóm biên soạn:
Nguyễn Huy Hoàng (Chủ biên)
Nguyễn Trung Đông

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2020

MỤC LỤC

Trang

Lời mở đầu...8

Một số ký hiệu...10

Chương 1. Ma trận – Định thức……………………………………………………………...12

1.1. Ma trận……………………………………………………………….............12

1.1.1. Định nghĩa ma trận..12

1.1.2. Ma trận bằng nhau..…………………………………………………....12

1.1.3. Các ma trận đặc biệt...13

1.1.4. Các phép toán trên ma trận……..15

1.1.5. Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng..18

1.2. Định thức……………………………………………………………….........20

1.2.1. Định nghĩa định thức ma trận vuông cấp n……………………………...20

1.2.2. Định lý khai triển định thức theo một hàng hay một cột bất kỳ................21

1.2.3. Các tính chất định thức………...23

1.2.4. Định lý sự thay đổi của định thức qua các phép biến đổi………………...24

1.2.5. Phần bù đại số và ma trận phụ hợp……………………………………...25

1.3. Ma trận nghịch đảo……………………………………………………….......26

1.3.1. Định nghĩa ma trận nghịch đảo……………………………………….....26

1.3.2. Giải thuật tìm ma trận nghịch đảo...26

1.3.3. Định lý sự tồn tại của ma trận nghịch đảo...28

1.3.4. Một số tính chất của ma trận nghịch đảo………………………………... 28

1.4. Hạng ma trận…..……………………………………………………….........29

1.4.1. Định nghĩa tổng quát hạng của một ma trận……………….…………...29

1.4.2. Tính chất..29

1.4.3. Phương pháp tìm hạng của ma trận...29

1.4.4. Một số bất đẳng thức về hạng của ma trận...30

1.5. Bài tập……..………………………………………………………………......32

Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính…………………………………………………39

2.1. Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính……………………………………………...39
2.1.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính tổng quát………..………………39
2.1.2. Định nghĩa nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính………….……..40
2.1.3. Hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác………………………….……..40
2.1.4. Hệ phương trình tuyến tính dạng hình thang……………………….……..41
2.1.5. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử ẩn Gauss.……..42
2.2. Hệ phương trình Cramer…………………………………………………………45
2.2.1. Định nghĩa hệ phương trình Cramer……………………………….…..…..45
2.2.2. Các phương pháp giải hệ phương trình Cramer......................................46
2.3. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát..47
2.3.1. Nhận xét về sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát...47
2.3.2. Định lý Kronecker – Capelli 47
2.4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất…………………………………………50
2.4.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.................................50
2.4.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất……………………..50
2.5. Một số bài toán ứng dụng trong kinh tế……….…………………………….....51
2.5.1. Mô hình cân bằng thị trường...51
2.5.2. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân…………………………..……...54
2.5.3. Mô hình input – output của Leontief……………………………………..58
2.6. Bài tập………………………………………………………………………….....64
Chương 3. Không gian vectơ……………………………………………………….......71
3.1. Các khái niệm căn bản……………………………………………………………71
3.1.1. Định nghĩa không gian vectơ………………………………..……………71
3.1.2. Định nghĩa tổ hợp tuyến tính của các vectơ………………...……………71
3.1.3. Định nghĩa không gian vectơ con của một không gian vectơ……………72
3.1.4. Định nghĩa không gian con sinh bởi một tổ hợp tuyến tính……………...72
3.1.5. Định nghĩa độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính…………………...73
3.2. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ…………………………………………..74
3.2.1. Định nghĩa cơ sở của một không gian vectơ…..…………………………74
3.2.2. Ma trận chuyển cơ sở...74
3.2.3. Tính chất...75
3.2.4. Mệnh đề..76

3.3. Bài tập…………………………………………………………………..…..79

Chương 4. Phép tính vi phân hàm một biến……………………………………………84

4.1. Giới hạn của dãy số thực……………………………………………………...84

4.1.1. Định nghĩa dãy, giới hạn của dãy số thực……………..……………………84

4.1.2. Các tính chất và các định lý về giới hạn của dãy số thực……….…………84

4.1.3. Một số dãy số thực đặc biệt…………………………………………………86

4.2. Hàm số một biến số……………………..……………………………………..89

4.2.1. Các khái niệm cơ bản về hàm số….………………………………………..89

4.2.2. Hàm số hợp...89

4.2.3. Hàm số ngược………………………………………………………..…..90

4.2.4. Các hàm số sơ cấp cơ bản...90

4.2.5. Dáng điệu hàm số 92

4.2.6. Một số hàm trong kinh tế...93

4.3. Giới hạn hàm số...95

4.3.1. Các định nghĩa giới hạn..95

4.3.2. Giới hạn của các hàm sơ cấp cơ bản...97

4.3.3. Các dạng vô định..97

4.3.4. Các giới hạn cơ bản...98

4.4. Vô cùng bé và vô cùng lớn..99

4.4.1. Định nghĩa...99

4.4.2. Các tính chất...100

4.5. Hàm số liên tục…………………………………………………………...101

4.5.1. Định nghĩa về hàm số liên tục..101

4.5.2. Tính chất liên tục của hàm sơ cấp……..…………………………...102

4.5.3. Các phép toán của hàm liên tục tại một điểm.......................................103

4.6. Đạo hàm…………………………………...103

4.6.1. Khái niệm về đạo hàm..103

4.6.2. Bảng công thức các đạo hàm cơ bản…………………………………106

4.6.3. Các quy tắc tính đạo hàm…………………………………………….106

4.6.4. Đạo hàm hàm hợp……………………………………………………...107

4.6.5. Đạo hàm của hàm ngược………………………………………………108

4.6.6. Đạo hàm một phía……………………………………………...…108

4.6.7. Đạo hàm cấp cao……………………………………………………………109
4.7. Vi phân……………………………………………...110
4.7.1. Định nghĩa vi phân...110
4.7.2. Sự liên hệ giữa vi phân và đạo hàm…………………………..……..……110
4.7.3. Tính bất biến của biểu thức vi phân cấp 1……………………………111
4.7.4. Các quy tắc tính vi phân………………………………………………..111
4.7.5. Vi phân cấp cao………………………………………………………...111
4.8. Các định lý cơ bản về hàm số khả vi…...112
4.8.1. Định lý Fermat 112
4.8.2. Định lý Rolle …………………..………………………………………112
4.8.3. Định lý Lagrange………………………………………………………112
4.8.4. Định lý Cauchy………………………………………………………...113
4.9. Một số ứng dụng của đạo hàm và vi phân.………………………………….…..113
4.9.1. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 113
4.9.2. Tính gần đúng…………….……….…………………………………...115
4.9.3. Khảo sát tính tăng, giảm và cực trị của hàm số…..……………………115
4.9.4. Khai triển Taylor – Maclaurin……………….…………………………116
4.9.5. Ứng dụng trong bài toán kinh tế……………………………………..…119
4.10. Bài tập…………………………………………………………..……………122

Chương 5. Tích phân………………………….…………………..……………...129

5.1. Tích phân bất định……………………….…………………………….……..129
5.1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định……………..…………….…………129
5.1.2. Bảng công thức các tích phân cơ bản…….……………………………130
5.1.3. Các phương pháp tính tích phân bất định….…………………..……130
5.2. Tích phân xác định……………..………………………………………………137
5.2.1. Định nghĩa các tính chất của tích phân xác định……………….…...…...137
5.2.2. Các tính chất cơ bản của tích phân xác định..140
5.2.3. Công thức NewTon – Leibnitz ……………………………………....…140
5.2.4. Các phương pháp tính tích phân xác định..141
5.2.5. Ứng dụng tích phân xác định...142
5.3. Tích phân suy rộng...144

5.3.1. Tích phân suy rộng loại 1: Định nghĩa và phương pháp tính................144
5.3.2. Tích phân suy rộng loại 2: Định nghĩa và phương pháp tính...............146
5.3.3. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng..148
5.4. Bài tập……………………………………………………………..……..………151

Chương 6. Phép tính vi phân hàm nhiều biến………………………………………..156

6.1. Các khái niệm…………..……………………………………………………...156
6.1.1. Hàm số hai biến số.......……………………………………………...156
6.1.2. Định nghĩa hàm n biến số…...………………………………………157
6.1.3. Hàm số hợp…………………………………..………….……………158
6.1.4. Một số hàm trong kinh tế………….…………………………………..158
6.2. Giới hạn và liên tục của hàm số……..…………………………..…………….161
6.2.1. Giới hạn của hàm nhiều biến số……..……………………………...…161
6.2.2. Hàm số liên tục...163
6.3. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần...164
6.3.1. Đạo hàm riêng……..………………………..164
6.3.2. Vi phân và ứng dụng vi phân để tính gần đúng....................................171
6.4. Cực trị hàm nhiều biến...175
6.4.1. Cực trị tự do..175
6.4.2. Cực trị có điều kiện..183
6.4.3. Ứng dụng trong kinh tế...188
6.5. Bài tập……………………………………………………………...……………196

Chương 7. Phương trình vi phân………………………………………………………203

7.1. Phương trình vi phân cấp 1……………………………………………….......203
7.1.1. Các khái niệm………..…..……………………………………………….203
7.1.2. Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến……………………………203
7.1.3. Phương trình vi phân cấp 1 dạng đẳng cấp…..……………………..….204
7.1.4. Phương trình vi phân cấp 1 dạng tuyến tính……………………………206
7.1.5. Phương trình vi phân cấp 1 dạng Bernoulli…….……………………….208
7.2. Phương trình vi phân cấp 2…………………………………………………….209
7.2.1. Các khái niệm chung……………………………………………………209
7.2.2. Phương trình vi phân cấp 2 có thể giảm cấp được...............................209
7.2.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng thuần nhất................211

7.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất…...212
7.3. Một số ứng dụng trong kinh tế..218
7.3.1. Tìm hàm $y = f(x)$ khi biết hệ số co dãn...218
7.3.2. Mô hình cân bằng thị trường với kỳ vọng về giá………….…………..218
7.4. Bài tập……………………………………………………...…………….221

Một số đề tham khảo………………………………………………………….……..225

Phụ lục 1.Tập số, tổng, tích hữu hạn, hằng đẳng thức, bất đẳng thức, chứng minh bằng phương pháp quy nạp……………………………………..…………………………………....238

Phụ lục 2.Tập hợp và ánh xạ……………………….…………………………….......241

Phụ lục 3. Tính toán ma trận bằng máy tính cá nhân…………………………….......247

Tài liệu tham khảo…………………………………………………………………..249

LỜI MỞ ĐẦU

Các bạn đang có trong tay cuốn **" Giáo trình Toán cao cấp"** dành cho sinh viên hệ đại trà, trường đại học Tài chính – Maketing. Đây là giáo trình dành cho sinh viên khối ngành kinh tế và quản trị kinh doanh với thời lượng 4 tín chỉ (60 tiết giảng), được biên soạn dựa trên cuốn sách cùng tên dành cho chương trình CLC; chính vì vậy chúng tôi cố gắng lựa chọn các nội dung căn bản, trọng yếu và có nhiều ứng dụng trong kinh tế và quản trị kinh doanh; nội dung giảng dạy không trùng lặp với nội dung sinh viên đã được trang bị ở chương trình phổ thông; chú trọng ý nghĩa và khả năng áp dụng của kiến thức; giáo trình được biên tập trên cơ sở tham khảo nhiều giáo trình quốc tế cũng như trong nước (xem phần tài liệu tham khảo), cũng như kinh nghiệm giảng dạy nhiều năm của các tác giả;

Nội dung giáo trình, được thiết kế phù hợp với chương trình đào tạo đại học đại trà, và trình độ của sinh viên khối ngành kinh tế và quản trị kinh doanh. Giáo trình bao gồm 7 chương, một số đề tự luyện và một số phụ lục cần thiết.

Chương 1. Trình bày về ma trận, phép toán trên ma trận, định thức, ma trận nghịch đảo, hạng của ma trận, áp dụng vào giải mô hình cân đối liên ngành (Input – Output). Một số ví dụ và bài tập rèn luyện.

Chương 2. Trình bày về hệ phương trình tuyến tính và ứng dụng giải mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa có liên quan. Một số ví dụ và bài tập rèn luyện

Chương 3. Trình bày về không gian vectơ; Một số ví dụ và bài tập rèn luyện.

Chương 4. Trình bày về phép tính vi phân hàm một biến : Giới hạn dãy số, giới hạn hàm số, hàm số liên tục, đạo hàm và vi phân, ứng dụng trong toán học và kinh tế. Một số ví dụ và bài tập rèn luyện.

Chương 5. Trình bày về nguyên hàm, tích phân bất định, tích phân xác định, tích phân suy rộng và ứng dụng trong phân tích kinh tế. Một số ví dụ và bài tập rèn luyện.

Chương 6. Trình bày về phép tính vi phân hàm nhiều biến : Hàm số nhiều biến; đạo hàm riêng, vi phân toàn phần và ứng dụng trong phân tích kinh tế. Bài toán cực trị tự do và cực trị có điều kiện, phương pháp nhân tử Lagrange; Một số mô hình ứng dụng trong kinh tế; Một số ví dụ và bài tập rèn luyện.

Chương 7. Trình bày về phương trình vi phân cấp 1 và phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng và ứng dụng trong phân tích kinh tế; Một số ví dụ và bài tập rèn luyện.

Phần cuối, chúng tôi biên soạn một số đề tham khảo để sinh viên có cơ hội thử sức, tự rèn luyện và một số phụ lục khi cần có thể tự tra cứu.

Do đối tượng người đọc là sinh viên chuyên ngành kinh tế và quản trị kinh doanh nên chúng tôi không quá đi sâu về lý thuyết mà chủ yếu quan tâm vào ý nghĩa và áp dụng trong kinh tế quản trị kinh doanh của khái niệm và kết quả toán học, chúng tôi cũng sử dụng nhiều ví dụ để người học dễ hiểu, dễ áp dụng, nhưng vẫn đảm bảo sự chặt chẽ và logic của toán học. Giáo trình do Giảng viên cao cấp, TS. Nguyễn Huy Hoàng và ThS. Nguyễn Trung Đông là các giảng viên của Bộ môn Toán – Thống kê, Khoa Kinh tế - Luật, trường đại học Tài chính – Marketing, đã có nhiều năm kinh nghiệm giảng dạy toán dành cho sinh viên khối ngành kinh tế và quản trị kinh doanh, cùng biên tập.

Lần đầu biên soạn, nên giáo trình này không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của các độc giả để lần sau giáo trình được hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp xin gởi về địa chỉ email:

hoangtoancb@ufm.edu.vn và nguyendong@ufm.edu.vn.

Xin trân trọng cảm ơn Thư viện, Trường đại học Tài chính – Marketing đã hỗ trợ và tạo điều kiện cho giáo trình sớm đến tay bạn đọc!

Tp. HCM, Tháng 06 năm 2020

Các tác giả

MỘT SỐ KÝ HIỆU

1. $\mathbb{N}$: Tập số tự nhiên.
2. $\mathbb{Z}$: Tập số nguyên.
3. $\mathbb{Q}$: Tập số hữu tỉ.
4. $\mathbb{R}$: Tập số thực.
5. $\mathbb{C}$: Tập số phức.
6. $M_{m\times n}$: Tập hợp các ma trận có kích thước cấp (cỡ) $m\times n$.
7. M_n : Tập hợp các ma trận vuông cấp n.
8. (i) : Dòng i (hàng i).
9. c_j : Cột j.
10. $:=$ Phép gán (phép thay thế).
11. $\sim$: Đổi chỗ (hoán vị).
12. $\mathrm{Det}(A)=|A|$: Định thức của ma trận A.
13. I hoặc E : Ma trận đơn vị.
14. $r(A)=\mathrm{rank}(A)$: Hạng của ma trận A.
15. Dim : Số chiều.
16. lim : Giới hạn.
17. $f'_{x_i}=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$: Đạo hàm riêng của hàm f theo biến x_i.
18. $\underline{\underline{L}}$: Sử dụng quy tắc L’hospital.
19. KGVT : Không gian vectơ.
20. Max : Giá trị lớn nhất.
21. Min : Giá trị nhỏ nhất.

22. Q : Sản lượng.

23. D : Demand (Cầu).

24. S : Supply (Cung).

25. Q_D : Lượng cầu.

26. Q_S : Lượng cung.

27. P : Giá bán.

28. L : Lao động (nhân công).

29. MPL : Hàm sản phẩm cận biên của lao động.

30. K : Vốn.

31. MPK : Hàm sản phẩm cận biên của vốn.

32. π : Lợi nhuận.

33. TR : Tổng doanh thu.

34. MR : Doanh thu biên (doanh thu cận biên).

35. TC : Tổng chi phí.

36. FC : Chi phí cố định.

37. VC : Chi phí biến đổi (chi phí khả biến).

38. MC : Chi phí biên (chi phí cận biên).

39. AC : Chi phí trung bình.

40. TU : Tổng hữu dụng (Hàm lợi ích).

41. MU : Hàm hữu dụng biên (hàm lợi ích biên).

42. $E_{Y|X}$: Hệ số co dãn của Y theo X.

Chương 1

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

1.1. Ma trận

1.1.1. Định nghĩa ma trận

Một bảng số hình chữ nhật gồm có m dòng (hàng) và n cột được gọi là ma trận có cấp (cỡ) $m\times n$.

$$\text{Ký hiệu: } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n} \qquad (1.1)$$

với

i : gọi là chỉ số dòng (hàng).

j : gọi là chỉ số cột.

a_{ij} : là phần tử nằm ở dòng i và cột j trong ma trận A.

Ví dụ 1. Cho các ma trận

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp (2×3).

$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp (3×2).

$C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp (3×3) (ma trận vuông cấp 3).

1.1.2. Ma trận bằng nhau

Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng cấp và có tất cả các phần tử tương ứng vị trí bằng nhau.

Cho hai ma trận: $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij}=b_{ij} \\ \forall i=1,2,\ldots,m;\ \forall j=1,\ 2,\ldots,n \end{cases} \qquad (1.2)$$

Ví dụ 2. Cho hai ma trận: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & b\\ a & -4\end{pmatrix}$. Tìm a, b để hai ma trận A, B bằng nhau.

Giải

Ta có hai ma trận A và B đều có cấp là (2×2). Do đó $A=B \Leftrightarrow \begin{cases} a=3\\ b=-2\end{cases}$.

1.1.3. Các ma trận đặc biệt

1.1.3.1. Ma trận không

Ma trận không là ma trận mà các phần tử đều là số không.

Ví dụ 3. Cho các ma trận không

$$0_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ là ma trân không cấp } (2\times 3).$$

$$0_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ là ma trận không cấp } (3\times 2).$$

1.1.3.2. Ma trận vuông

Ma trận vuông là ma trận có số hàng và số cột bằng nhau. Ma trận vuông cấp $n\times n$ được gọi tắt là ma trận vuông cấp n. Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu là M_n. Với ma trận vuông $A\in M_n$, các phần tử $a_{11}, a_{22},...,a_{nn}$ được gọi là thuộc *đường chéo* (*chính*) của ma trận A. *Các phần tử* $a_{n1}, a_{n-1,2},...,a_{1n}$ *được gọi là thuộc đường chéo phụ* của ma trận A.

Ví dụ 4. Cho ma trận vuông cấp 3: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ có các phần tử $a_{11}=1, a_{22}=5, a_{33}=9$ thuộc đường chéo chính còn các phần tử $a_{31}=7, a_{22}=5, a_{13}=3$ thuộc đường chéo phụ.

1.1.3.3. Ma trận chéo

Ma trận chéo là ma trận vuông mà mọi phần tử không thuộc đường chéo chính đều là bằng 0.

Ví dụ 5. Cho ma trận chéo cấp 3 : $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

1.1.3.4. Ma trận đơn vị cấp

Ma trận đơn vị là ma trận chéo mà mọi phần tử thuộc đường chéo chính đều bằng 1. Ký hiệu I_n là ma trận đơn vị cấp n.

Ví dụ 6. Cho các ma trận đơn vị

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; ...; I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.3.5. Ma trận tam giác trên (dưới)

Ma trận tam giác trên (dưới) là ma trận vuông mà các phần tử ở phía dưới (hoặc ở phía trên) đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ 7. Cho các ma trận cấp 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ là ma trận tam giác trên.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ là ma trận tam giác dưới.}$$

1.1.3.6. Ma trận bậc thang (ma trận hình thang)

Ma trận bậc thang là ma trận ứng với hai dòng bất kỳ số hạng khác không đầu tiên của hàng dưới phải nằm bên phải số hạng khác không đầu tiên của hàng trên.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

với $r < n$ và $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}$ gọi là các phần tử chéo.

Ví dụ 8. Cho ma trận bậc thang như sau: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Lưu ý: Ma trận tam giác trên là ma trận bậc thang đặc biệt.

1.1.3.7. Ma trận chuyển vị

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \in M_{m\times n}$, chuyển vị của A, ký hiệu A^T, là ma trận cấp $n\times m$ xác định bởi $A^T = \left(a_{ji}\right)_{n\times m} \in M_{n\times m}$.

Nhận xét : Ma trận chuyển vị của A là ma trận nhận được từ A bằng cách chuyển hàng của A thành cột của A^T.

Tính chất

(i) $\left(A^T\right)^T = A$,

(ii) $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$,

(iii) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$.

Định nghĩa: Ma trận vuông A được gọi là một *ma trận đối xứng* nếu $A = A^T$.

Ví dụ 9. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ là ma trận cấp } \left(2\times 3\right).$$

Ta có

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ là ma trận chuyển vị của ma trận } A \text{ có cấp là } \left(3\times 2\right).$$

1.1.4. Các phép toán trên ma trận

1.1.4.1. Nhân một số thực với ma trận

Nhân số thức với ma trận là nhân số đó với tất cả các phần tử của ma trận:

Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và $\forall k \in \mathbb{R}$ ta có:

$$kA = (k\cdot a_{ij})_{m\times n} \qquad (1.3)$$

Đặc biệt $(-1)A = -A = \left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$.

1.1.4.2. Cộng hai ma trận cùng cấp

Cộng hai ma trận cùng cấp là cộng các phần tử tương ứng các vị trí với nhau:

Cho hai ma trận : $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. Ta có

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n} \tag{1.4}$$

Ví dụ 10. Cho hai ma trận:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Tính $2A,\ -4B,\ A+B,\ 2A-4B.$

Giải

Ta có

$$2A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix},\ -4B=\begin{pmatrix}-4 & 4 & -4\\ 4 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

và

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 6 & 5\end{pmatrix},\ \ 2A-4B=\begin{pmatrix}6 & 0 & 10\\ 4 & 14 & 8\end{pmatrix}.$$

1.1.4.3. Các tính chất

Cho ba ma trận A, B, C cùng cấp và $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

a) $A+B=B+A$

b) $(A+B)+C=A+(B+C)$

c) $A+0=A$

d) $A+(-A)=0$

e) $1\cdot A=A$

f) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

g) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

h) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A).$

1.1.4.4. Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A=\left(a_{ij}\right)\in M_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)\in M_{n\times p}$. Ta định nghĩa ma trận tích của hai ma trận A, B là ma trận cấp $m\times p$, ký hiệu $AB=\left(c_{ij}\right)\in M_{m\times p}$, xác định bởi

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\ ,\ \forall i=\overline{1,m},\ \forall j=\overline{1,p} \tag{1.5}$$

Tính chất

(i) Tính kết hợp : Cho $A\in M_{m\times n}, B\in M_{n\times p}$ và $C\in M_{p\times q}$, ta có

$$A(BC) = (AB)C.$$

(ii) Tính phân phối : Với mọi ma trận $A, B \in M_{m\times n}$ và $C \in M_{n\times p}$, ta có

$$(A + B)C = AC + BC,$$

và với mọi ma trận $C \in M_{m\times n}$ và $A, B \in M_{n\times p}$, ta có

$$C(A + B) = CA + CB.$$

(iii) Với mọi ma trận $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ và với mọi $k \in \mathbb{R}$, ta có

$$k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

Hệ quả. *Cho A là ma trận vuông cấp n. Ta có $A^n = A\times A\times\cdots\times A$ (nhân n lần).*

Ví dụ 11. Cho hai ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3x2},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2x3}.$$

Tính AB và $(AB)^2$.

Giải

Ta có

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 123 & 148 & 36 \\ -36 & 35 & -60 \\ 217 & 235 & 123 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 12. Cho hai ma trận vuông cấp 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tính AB và BA.

Giải

Ta có

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 1 & 24 \\ -7 & -9 & -2 & -9 \\ 18 & 20 & -7 & 33 \\ 10 & 7 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 & 6 \\ 6 & 8 & 5 & 12 \\ -10 & -6 & -15 & -13 \\ 9 & 23 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

1.1.5. Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng

1.1.5.1. Ba phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận

i) Phép biến đổi loại 1: Đổi chỗ 2 hàng của ma trận.

$$A \xrightarrow{(i)\sim(i^{/})} B$$

ii) Phép biến đổi loại 2: Nhân một số thực khác không với một hàng.

$$A \xrightarrow[\alpha\neq 0]{(i):=\alpha(i)} B$$

iii) Phép biến đổi loại 3: Thay 1 hàng bất kỳ bằng chính nó rồi cộng với một số thực nhân cho hàng khác.

$$A \xrightarrow{(i):=(i)+\alpha(i^{/})} B.$$

Ví dụ 13. Cho ma trận vuông cấp 3 như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Phép biến đổi loại 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\sim(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

Phép biến đổi loại 2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2):=\frac{1}{2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

Phép biến đổi loại 3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2):=(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

1.1.5.2. Liên hệ giữa phép biến đổi sơ cấp trên hàng và phép nhân ma trận

Cho ma trận $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và ma trận đơn vị cấp m: $I_m=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Định nghĩa:

$$I(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 && 1 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 1 && 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \text{dòng } i \\ \\ \text{dòng } j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$I(i,\alpha)=\left(\begin{array}{ccccc} 1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && \alpha && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \text{dòng } i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$I(i,j,\alpha)=\left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && \alpha && \\ &&& \ddots &&& \\ && 0 && 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \text{dòng } i \\ \\ \text{dòng } j \\ \\ \\ \end{array}$$

Lưu ý:

+) Phép hoán vị hai hàng của ma trận A được coi là thực hiện phép nhân ma trận $I(i,j)\times A$.

+) Phép nhân một hàng của ma trận A với số thực $\alpha\neq 0$ được coi là phép nhân ma trận $I(i,\alpha)\times A$.

+) Phép cộng vào hàng i hàng j đã nhân với α $(i\neq j)$ được coi là phép nhân ma trận $I(i,j,\alpha)\times A$.

1.2. Định thức

Xét ma trận vuông cấp n : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Với mỗi số hạng a_{ij} (số hạng nằm ở hàng i và cột j), ma trận nhận được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j được gọi là *ma trận bù* của A *đối với số hạng* a_{ij}, ký hiệu là A_{ij}.

Ví dụ 14. Cho ma trận vuông cấp 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Ta có thể thành lập các ma trận bù cấp 2, chẳng hạn

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix};\ A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix};\ A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.2.1. Định nghĩa định thức ma trận vuông cấp n

Định thức của ma trận vuông $A \in M_n$, ký hiệu $\det(A)$ hay $|A|$, là số thực được định nghĩa bằng quy nạp theo n như sau :

- Với $n = 1$, nghĩa là $A = (a_{11})$, thì $\det(A) = a_{11}$.
- Với $n \geq 2$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, thì :

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n})$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \qquad (1.6)$$

Xét một số trường hợp đặc biệt:

- Với $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Ta có

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) + a_{12} \det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Với $n = 3$, ta có: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Tính định thức của ma trận vuông cấp 3 bằng quy tắc 6 đường chéo (quy tắc Sarrus)

Cho ma trận vuông cấp 3 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Xây dựng ma trận $A'_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Định thức của A

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

3 số hạng mang dấu cộng trong định thức là tích các phần tử nằm trên ba đường song song với đường chéo chính.

3 số hạng mang dấu âm trong định thức là tích các phần tử nằm trên ba đường song song với đường chéo phụ.

Ví dụ 15. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2.$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 5 + 4\cdot 1\cdot 4) - (5\cdot 2\cdot 4 + 4\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3) = -1.$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}0\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-5)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 31.$

1.2.2. Định lý khai triển định thức theo một hàng hay một cột bất kỳ

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $1 \le i_0, j_0 \le n$. Khi đó:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \det(A_{i_0 j}). \qquad (1.7)$$

$$\det\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}a_{ij_0}\det\left(A_{ij_0}\right). \qquad (1.8)$$

Công thức (1.7) gọi là công thức khai triển theo hàng i_0 và công thức (1.8) là công thức khai triển theo cột j_0.

Ví dụ 16. Tính các định thức

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}$

Tính định thức của ma trận A. Chúng ta khai triển định thức này theo hàng 1 :

$$\left|A\right|=(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}3&4&1\\4&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix}2&4&1\\3&1&2\\4&2&3\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+3}3\begin{vmatrix}2&3&1\\3&4&2\\4&1&3\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}4\begin{vmatrix}2&3&4\\3&4&1\\4&1&2\end{vmatrix}$$

$$=-36+8+12+176=160.$$

b) $B=\begin{pmatrix}1&3&0&a\\2&b&0&0\\3&4&c&5\\d&0&0&0\end{pmatrix}$

Tính định thức của ma trận B. Chúng ta khai triển định thức này theo hàng 4 :

$$\left|B\right|=(-1)^{4+1}d\begin{vmatrix}3&0&a\\b&0&0\\4&c&5\end{vmatrix}=-d(-1)^{3+2}c\begin{vmatrix}3&a\\b&0\end{vmatrix}=-abcd.$$

c) $C=\begin{pmatrix}1&-1&-2&0\\2&m&0&2\\3&0&4&3\\4&2&1&0\end{pmatrix}$

Tính định thức của ma trận C. Chúng ta khai triển định thức này theo cột 4 :

$$\left|C\right|=(-1)^{2+4}2\begin{vmatrix}1&-1&-2\\3&0&4\\4&2&1\end{vmatrix}+(-1)^{3+4}3\begin{vmatrix}1&-1&-2\\2&m&0\\4&2&1\end{vmatrix}=-48-9m.$$

1.2.3. Các tính chất định thức

i) Tính chất 1. Cho ma trận vuông A. Ta có $\det(A) = \det(A^T)$.

Ví dụ 17. Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta có: $\det(A) = \det(A^T) = -46.$

ii) Tính chất 2. Cho A, B là hai ma trận vuông. Ta có

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B).$$

Ví dụ 18. Cho hai ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

a) Tính AB và BA.

b) Tính $\det(A), \det(B), \det(AB), \det(BA)$

Giải

a) Ta có: $AB = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{pmatrix};\ BA = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}$

b) Ta có: $\det(A) = -2;\ \det(B) = 2; \det(AB) = \det(BA) = -4.$

iii) Tính chất 3. Cho I là ma trận đơn vị cấp n. Ta có $\det(I) = 1$.

iv) Tính chất 4. Cho ba ma trận $A, B, C \in M_n$ thỏa mãn:

$$[C]_{1j} = [A]_{1j} + [B]_{1j} \text{ và } [C]_{ij} = [A]_{ij} = [B]_{ij},\ \ i = 2,3,...,n;\ j = 1,2,...,n.$$

Ta có: $\det(C) = \det(A) + \det(B).$

Ví dụ 19. Cho ba ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & c & a \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng: $\det(C) = \det(A) + \det(B).$

Giải

Ta có: $\det(A) = -a + 2b - c; \det(B) = -a - b + 2c; \det(C) = -2a + b + c$

Vậy $\det(C) = \det(A) + \det(B).$

v) Tính chất 5. Cho số thực $k \in \mathbb{R}$ và ma trận $A \in M_n$. Ta có $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Ví dụ 20. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ta có:

$$\det(A) = -46 \Rightarrow \det(2A) = 2^3 \det(A) = -368.$$

1.2.4. Định lý sự thay đổi của định thức qua các phép biến đổi

i) Nếu $A \xrightarrow{(i)\sim(i')} B$ thì $\det(B) = -\det(A)$.

ii) Nếu $A \xrightarrow{(i):=\alpha(i)} B$ thì $\det(B) = \alpha \det(A)$ (với $\alpha \neq 0$).

iii) Định thức của ma trận có 2 dòng hoặc hai cột tỉ lệ với nhau thì bằng 0.

iv) Nếu $A \xrightarrow{(i):=(i)+\alpha(i')} B$ thì $\det(B) = \det(A)$.

v) Định thức của ma trận tam giác trên bằng tích các số hạng nằm trên đường.

Ví dụ 21. Cho ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Thực hiện phép biến đổi loại 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)\sim(2)]{} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = B.$$

Ta có: $\det(A) = -21; \det(B) = 21;\ \det(B) = -\det(A)$

b) Thực hiện phép biến đổi loại 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1):=2(1)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = B$$

Ta có: $\det(A) = -21; \det(B) = -42 = 2\det(A)$.

c) Thực hiện phép biến đổi loại 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2):=(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = B$$

Ta có: $\det(A) = \det(B) = -21$.

1.2.5. Phần bù đại số và ma trận phụ hợp

Cho ma trận vuông cấp n : $A = \left(a_{ij}\right)_n$

+) Định thức cấp $(n-1)$ thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j, lấy dấu $(+)$ nếu $(i+j)$ chẵn, lấy dấu $(-)$ nếu $(i+j)$ lẻ, được gọi là *phần bù đại số của phần tử* a_{ij} $\left(\forall i, j = 1, 2, ..., n\right)$, ký hiệu là $A_{ij}^* = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$.

+) Ma trận ký hiệu A^*, được định nghĩa như sau :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$

Trong đó : A_{ij}^* $\left(\forall i, j = 1, 2, ..., n\right)$ là phần bù đại số của phần tử a_{ij}, được gọi *là ma trận phụ hợp* của ma trận A.

Chú ý : Nếu A là ma trận vuông cấp n thì A^* cũng là ma trận vuông cấp n.

Ví dụ 22. Cho ma trận vuông cấp 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Ta có ma trận phụ hợp cấp 3 như sau: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & A_{31}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{32}^* \\ A_{13}^* & A_{23}^* & A_{33}^* \end{pmatrix}$

Với

$$A_{11}^* = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3;\ A_{12}^* = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6;\ A_{13}^* = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21}^* = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 14;\ A_{22}^* = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -19;\ A_{23}^* = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31}^* = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8;\ A_{32}^* = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 10;\ A_{33}^* = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

Vậy: $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 14 & -8 \\ 6 & -19 & 10 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3. Ma trận nghịch đảo

1.3.1. Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Cho $A, B \in M_n$, ta nói A, B là hai *ma trận nghịch đảo của nhau* nếu $AB = BA = I_n$. Khi đó, ta nói A và B là các *ma trận khả nghịch*.

Ký hiệu $B = A^{-1}$ hay $A = B^{-1}$.

Tính chất: *Ma trận $A \in M_n$ khả nghịch khi và chỉ khi* $\det(A) \neq 0$.

Ví dụ 23. Định m để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ 3 & m & 4 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$$

Giải

Từ ma trận A ta biến đổi như sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ 3 & m & 4 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[(3):=(3)-2(1)]{(2):=(2)-3(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ 0 & m+6 & 4-3m \\ 0 & 7 & -m \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} m+6 & 4-3m \\ 7 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 15m - 28$$

Ma trận khả nghịch khi vào chỉ khi $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{15+\sqrt{113}}{2} \wedge m \neq \dfrac{15-\sqrt{113}}{2}$.

Ví dụ 24. Cho ma trận $A \in M_n$ thỏa mãn $A^2 - 2A + I_n = 0$. Chứng minh rằng ma trận A khả nghịch.

Giải

Từ đẳng thức $A^2 - 2A + I_n = 0$, ta có $I_n = A(2I_n - A)$ (*)

Lấy định thức hai vế của (*), ta có

$$1 = \det(I_n) = \det[A(2I_n - A)] = \det(A)\det(2I_n - A).$$

Suy ra $\det(A) \neq 0$. Vậy A khả nghịch.

1.3.2. Giải thuật tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp 1. Tìm A^{-1} bằng định thức.

+) Bước 1. Cho $A \in M_n$, $\det A \neq 0$.

+) Bước 2. Tính các phần bù đại số của A đối với phần tử a_{ij} $\left(A_{ij}^* = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|\right)$.

+) Bước 3. Đặt $A^* = \left(A_{ji}^*\right)_n \in M_n$. Khi đó :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* \tag{1.9}$$

Phương pháp 2. Dùng phép biến đổi sơ cấp theo hàng.

+) Bước 1. Lập ma trận $\left(A\middle|I_n\right)$ là ma trận gồm n hàng và 2n cột, trong đó n cột đầu của $\left(A\middle|I_n\right)$ chính là ma trận A, n cột cuối của $\left(A\middle|I_n\right)$ là ma trận đơn vị I_n.

+) Bước 2. Bằng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng, ta có thể chuyển ma trận $\left(A\middle|I_n\right)$ về ma trận $\left(I_n\middle|B\right)$ và khi đó $B = A^{-1}$.

Nếu ma trận A không chuyển được về ma trận đơn vị thì ma trận A không khả nghịch.

Ví dụ 25. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau bằng phương pháp định thức

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta có $\det(A) = 1$, do đó A khả nghịch và A^{-1} được tính bởi công thức sau

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & A_{31}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{32}^* \\ A_{13}^* & A_{23}^* & A_{33}^* \end{pmatrix},$$

với $A_{ij}^* = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$,

$$A_{11}^* = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12}^* = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13}^* = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21}^* = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22}^* = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23}^* = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31}^* = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32}^* = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33}^* = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 26. Tìm ma trận nghịch đảo sau bằng phương pháp biến đổi sơ cấp trên hàng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải

Thực hiện các phéo biến đổi sơ cấp trên dòng như sau

$$\left(A|I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3):=(3)+2(1)]{(2):=(2)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1):=(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2):=(2)-2(3)]{(1):=(1)-3(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(I_3 | A^{-1}\right)$$

Vậy ma trận nghịch đảo của A là :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.3. Định lý sự tồn tại của ma trận nghịch đảo

Nếu ma trận A khả nghịch thì ma trận nghịch đảo A^{-1} tồn tại duy nhất.

1.3.4. Một số tính chất của ma trận nghịch đảo

Nếu A, B là những ma trận vuông cấp n khả nghịch thì

i) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A,$

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$

iii) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$

iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ *với* $\alpha \neq 0.$

Ví dụ 27. Giải phương trình ma trận $XA = B$ với

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&1\\-2&3&1\end{pmatrix} \text{ và } B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\4&5&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

Giải

Theo ví dụ 26, ta có

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&4&-3\\-1&3&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Từ phương trình ma trận nhân bên phải hai vế cho A^{-1}, ta được

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\4&5&1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4&-3\\-1&3&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-8&30&-21\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

1.4. Hạng của ma trận

1.4.1. Định nghĩa tổng quát hạng của một ma trận

Cho ma trận $A \in M_{m\times n}$, ta gọi hạng của ma trận A bằng r nếu

i) Mọi định thức con của A cấp lớn hơn r đều bằng 0.

ii) Trong A tồn tại một định thức con cấp r khác 0.

Ta ký hiệu hạng của ma trận A là $\text{rank}(A)$ hay vắn tắt là $r(A)$. Khi A là ma trận 0, ta quy ước $r(A)=0$.

Lưu ý rằng : $0 \le r(A) \le \min\{m,n\}$.

1.4.2. Tính chất

i) Hạng của ma trận không thay đổi qua các phép biến đổi sơ cấp trên hàng, nghĩa là nếu B là ma trận nhận được từ A sau hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp thì $r(A)=r(B)$.

ii) Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị, nghĩa là $r(A)=r(A^T)$.

iii) Nếu A là ma trận bậc thang theo hàng thì hạng của A bằng số hàng khác không của nó.

1.4.3. Phương pháp tìm hạng của ma trận : Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận A về dạng ma trận bậc thang theo hàng B. Khi đó, $r(A)$ bằng số hàng khác không của ma trận B.

Ví dụ 28. Cho ma trận:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 4 & 2\\ 3 & 6 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

Tìm hạng của ma trận A.

Giải.

Biến ma trận A về ma trận bậc thang theo hàng

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 4 & 2\\ 3 & 6 & -3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[(3):=(3)-3(1)]{(2):=(2)+(1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

Ma trận B là ma trận bậc thang có hai dòng khác dòng không nên $r(A)=r(B)=2.$

Ví dụ 29. Biện luận theo m hạng của ma trận sau:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & m\\ 3 & 8 & 5\end{pmatrix}$$

Giải

Biến ma trận A về ma trận bậc thang theo dòng (hoặc ma trận tam giác trên)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & m\\ 3 & 8 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[(3):=(3)-3(1)]{(2):=(2)-2(1)}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -5 & m-4\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3):=5(3)-(2)}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -5 & m-4\\ 0 & 0 & -1-m\end{pmatrix}=B$$

Ma trận B là ma trận bậc thang theo dòng, ta có $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B).$

Biện luận

Nếu $m=-1$ thì $\operatorname{rank}(A)=2$.

Nếu $m\neq-1$ thì $\operatorname{rank}(A)=3$.

1.4.4. Một số bất đẳng thức về hạng của ma trận

a) Cho A và B là hai ma trận vuông cấp n. Khi đó

i) $r(A+B)\le r(A)+r(B).$

ii) $r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}.$

iii) Nếu ma trận B khả nghịch thì $r(AB)=r(BA)=r(A).$

b) Cho ma trận $A \in M_{m\times n}$ và ma trận $B \in M_{n\times p}$. Khi đó $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$.

Ví dụ 30. Cho A là ma trận cấp 3×2, B là ma trận cấp 2×3 sao cho

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Tìm hạng của ma trận AB.

b) Chứng minh ma trận BA khả nghịch và tìm BA.

Giải

a) Tìm hạng của ma trận AB.

Thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận AB, biến ma trận AB về ma trận bậc thang như sau.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3):=4(2)+(1)]{(2):=4(2)-(1)} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 0 & 18 & 18 \\ 0 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)-(2)} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy hạng của ma trận AB là $r(AB) = 2$.

b) Chứng minh ma trận BA khả nghịch và tìm BA.

Ta có

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 9AB$$

Ta có : $2 = r(AB) = r\left[(AB)\right]^2 = r\left[A(BA)B\right] \le r(BA) \le 2$

Vậy $r(BA) = 2$ nên BA là ma trận khả nghịch.

Ta có

$$(BA)^3 = (BA)(BA)(BA) = B(AB)^2A = 9B(AB)A = 9(BA)^2$$

Nhân hai vế của đẳng thức cho $(BA)^{-1}$ hai lần, ta được

$$BA = 9I_2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.5. Bài tập

Bài số 1. Thực hiện các phép tính trên các ma trận sau :

1. Tính $5A-3B+2C$, biết :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix} \text{ và } C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Tính AB, BA biết : $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

3. Tính AB, BA biết : $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

Đáp số: 1) $5A-3B+2C=\begin{pmatrix}6 & 11\\ -11 & 3\\ 27 & 15\end{pmatrix}$.

2) $AB=\begin{pmatrix}-1 & -8 & 10\\ 1 & -2 & 5\\ 9 & 22 & -15\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}-15 & 19\\ 10 & -3\end{pmatrix}$.

3) $AB=\begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}29 & -56 & 27\\ 17 & -36 & 19\\ 14 & -25 & 11\end{pmatrix}$.

Bài số 2. Cho $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Tính $f(A)$ với $f(x)=x^2-5x+3$.

Đáp số : $f(A)=\begin{pmatrix}-3 & -1 & -3\\ -6 & -3 & -5\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

Bài số 3. Cho các ma trận : $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. Có thể thành lập được tích của các ma trận nào trong các ma trận trên
2. Tính AB, ABC.

3. Tính $(AB)^3$, C^n với $n \in \mathbb{N}$.

4. Tìm ma trận chuyển vị của A và tính A^TC

Đáp số : 1) AB, BA, BC, CA; 2) $AB = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $ABC = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $(AB)^3 = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$, $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *4)* $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A^TC = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Bài số 4. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X sao cho $3A + 2X = I_3$.

Đáp số : $X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ -6 & -4 & 12 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Bài số 5. Tính các định thức sau :

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

Đáp số : 1) -5*; 2)* 10*; 3)* 160*; 4)* $abcd$*; 5)* $xyzuv$*; 6)* 394.

Bài số 6. Chứng tỏ rằng các định thức sau bằng không

1. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} x & p & ax+bp \\ y & q & ay+bq \\ z & r & az+br \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & (a+b)^2 \\ bc & b^2+c^2 & (b+c)^2 \\ ca & c^2+a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$

Hướng dẫn : 1) Lấy cột 1 cộng cột 2; 2) Từ cột 3, ta tách làm hai ma trận có cùng cột 1 và 2 ; 3) Lấy cột 2 cộng 2 lần cột 1; 4) Lấy cột 1 cộng cột 2 và cột 3.

Bài số 7. Chứng minh rằng : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

Hướng dẫn : Biến đổi sơ cấp hoặc dùng qui tắc 6 đường chéo.

Bài số 8. Tìm x sao cho :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0.$$

Đáp số : $x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4$.

Bài số 9. Tính định thức cấp n sau:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & ... & 2 \\ 2 & 2 & 2 & ... & 2 \\ 2 & 2 & 3 & ... & 2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 2 & 2 & ... & n \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_1+2b_2 & \cdots & a_1+2b_n \\ a_2+2b_1 & a_2+2b_2 & \cdots & a_2+2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+2b_1 & a_n+2b_2 & \cdots & a_n+2b_n \end{vmatrix}$

Đáp số : 1) $n!$; 2) $(a+n-1)(a-1)^{n-1}$; 3) ; 4) 0.

Bài số 10. Cho hai ma trận: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính $\left(B^{-1}AB\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ rồi suy ra A^n.

Đáp số : $\left(B^{-1}AB\right)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$.

Bài số 11. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \in M_2$.

Chứng minh rằng : $A^2 - 2A + I_2 = 0$. Suy ra A^{-1}.

Hướng dẫn : Tính trực tiếp ta có điều phải chứng minh rồi suy ra A^{-1}.

Bài số 12. Tìm a để ma trận sau khả nghịch và tính A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Đáp số : $a \neq 3$; $A^{-1} = \dfrac{1}{a-3}\begin{pmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & a-1 \end{pmatrix}$.

Bài số 13. Tìm m sao cho các ma trận sau khả nghịch

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Đáp số : 1) $m \neq 1 \wedge m \neq 3$; 2) $m \neq 1 \wedge m \neq -3$.

Bài số 14. Tìm x sao cho :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x+2 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ x & 1 & x & x-2 \\ 0 & 0 & x^5+1 & x^{100} \end{vmatrix} = 0.$$

Đáp số : $x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$.

Bài số 15. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau (nếu có) :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$3.\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 4.\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Đáp số : 1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$;

3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Bài số 16. Cho ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận: $(I - A)^{-1}$.

Đáp số: $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,05 & 0,8 & 0,75 \\ 0,75 & 2 & 1,25 \\ 0,8 & 0,8 & 2 \end{pmatrix}$.

Bài số 17. Cho các ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận X, sao cho : $XA = B$.

Đáp số : $X = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Bài số 18. Giải phương trình: $AX = B$, Với

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\\ 6 & 5\end{pmatrix}$$

Đáp số: $X=\begin{pmatrix}-198 & 24\\ -124 & 14\\ 20 & -3\end{pmatrix}.$

Bài số 19. Tìm A sao cho $AB=BA$, với

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Đáp số: $A=\begin{pmatrix}2n+m & 3n\\ 2n & m\end{pmatrix}.$

Bài số 20. Tính hạng của các ma trận sau :

1. $\begin{pmatrix}1 & -5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1\\ 4 & 9 & 10 & 5 & 2\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9\\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1\\ 4 & 9 & 10 & 5 & 2\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}0 & 1 & -3 & 4 & -5\\ 1 & 0 & -2 & 3 & -4\\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12\\ 4 & 3 & 5 & 0 & 5\end{pmatrix}$

Đáp số : 1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 4.

Bài số 21. Tùy theo m, tìm hạng của các ma trận sau

1. $\begin{pmatrix}m & 5m & -m\\ 2m & m & 10m\\ -m & -2m & -3m\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ m & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & m\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ m & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & m & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Đáp số : 1) $m=0$, $\text{rank}=0$; $m\neq 0, \text{rank}=2$; *2)* $m=0$, $\text{rank}=02$; $m\neq 0, \text{rank}=3$;

3) $m=7$, $\text{rank}=2$; $m\neq 7, \text{rank}=3$; *4)* $m=1$, $\text{rank}=3$; $m\neq 1, \text{rank}=4$.

Bài số 22*. Tính A^n, biết rằng

1. $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$

Đáp số : 1) $A^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$*; 2)* $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$*;*

3) $A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 4^n-3^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ *; 4)* $A^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6}+\sin\frac{n\pi}{6} & -2\sin\frac{n\pi}{6} \\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6}-\sin\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$.

Bài số 23*. Tìm a, b sao cho $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Đáp số : $a = \sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)$; $b = \sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài số 24*. Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng $\det(A^n + B^n)$ chia hết cho 2^{n+1} .

Hướng dẫn : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài số 25*. Cho A, B, C là ba ma trận vuông cấp 2 với các phần tử của ma trận là số thực. Chứng minh rằng:

$$(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = 0.$$

Hướng dẫn: Đặt A, B, C *rồi đi tính trực tiếp ta có điều phải chứng minh.*

Chương 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1. Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

2.1.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Hệ phương trình tuyến tính là một hệ thống gồm m phương trình bậc nhất theo n ẩn số có dạng tổng quát như sau :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các *ẩn* cần tìm, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (gọi là các *hệ số*) và $b_i \in \mathbb{R}$ (gọi là các *hệ số tự do*), $i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \tag{2.2}$$

trong đó ta gọi A là *ma trận các hệ số*, $\overline{A}$ là *ma trận bổ sung* (*ma trận các hệ số mở rộng*), X là *ma trận ẩn* và B là *ma trận các hệ số tự do*. Khi đó, hệ phương trình tuyến tính (2.1) được viết lại dưới dạng phương trình ma trận là $AX = B.$

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 9 \\ 3x - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases} \tag{2.3}$$

Đặt

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4 & 3\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}10\\ 9\\ 7\end{pmatrix},$$

$$\overline{A}=\left(A\middle|B\right)=A=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -3 & 4 & 10\\ 2 & -1 & 1 & -2 & 9\\ 3 & -2 & 4 & 3 & 7\end{array}\right),$$

Hệ phương trình tuyến tính (2.3) được dưới dạng ma trận là $AX = B$.

2.1.2. Định nghĩa nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính

i) Ta gọi bộ n số có thứ tự $\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right) \in \mathbb{R}^n$ là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (2.1) nếu ta thay $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$ vào (2.1) thì tất cả các đẳng thức trong (2.1) đều được thỏa.

ii) Hai hệ phương trình tuyến tính có cùng số ẩn được gọi là tương đương khi tập nghiệm của chúng bằng nhau.

2.1.3. Hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác

Cho hệ phương trình gồm n phương trình và n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases}a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n\end{cases} \tag{2.4}$$

Trong đó $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} \neq 0$.

Hệ phương trình (2.4) được gọi là hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác.

Chú ý: Ma trận hệ số A là ma trận tam giác trên.

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác

$$\begin{cases}x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 5\\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & -1\\ & & & & 3x_3 & = & 9\end{cases}$$

Chúng ta giải ngược từ dưới lên trên, tức là từ phương trình cuối cùng lên tới phương trình đầu tiên.

Hệ trên có nghiêm duy nhất là $x_1 = 22, x_2 = -2, x_3 = 3.$

Nhận xét: Hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác luôn có nghiệm duy nhất.

2.1.4. Hệ phương trình tuyến tính dạng hình thang

Cho hệ phương trình gồm m phương trình và n ẩn số (với $m < n$) có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.5)$$

Trong đó $a_{11}, a_{22}, ..., a_{mm} \neq 0$.

Hệ phương trình (2.5) được gọi là hệ phương trình tuyến tính dạng hình thang.

Chú ý: Ma trận hệ số A là ma trận hình thang (bậc thang).

Để giải hệ phương trình tuyến tính dạng hình thang đầu tiên chúng ta giữ lại vế trái các ẩn $x_1, x_2, ..., x_m$ (gọi là các ẩn chính hay là các ẩn cơ sở) và chuyển sáng vế phải các ẩn $x_{m+1}, ..., x_n$ (gọi là các ẩn tự do). Khi đó hệ phương trình (2.5) tương đương:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1,m+1}x_m \cdots -a_{1n}x_n \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2,m+1}x_m \cdots -a_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{mm}x_m = b_m - a_{m,m+1}x_m \cdots -a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (2.6)$$

Các ẩn tự do nhận một giá trị tùy ý

$$x_{m+1} = c_{m+1}, ..., x_n = c_n \quad (\forall c_{m+1}, ..., c_n \in \mathbb{R})$$

Khi đó hệ phương trình (2.6) có dạng hình thang, giải ra ta được:

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, ..., x_m = c_m$$

Tuy nhiên, cứ với mỗi bộ giá trị của các ẩn tự do chúng ta thu được một bộ giá trị ẩn chính nên hệ có vô số nghiệm.

Ví dụ 3. Cho hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 10 \\ \qquad x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên tương đượng với hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = x_3 - 2x_4 + 10 \\ \qquad x_2 = -3x_3 + x_4 + 8 \end{cases}$$

Các ẩn chính (x_1, x_2) và các ẩn tự do là (x_3, x_4).

Cho $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ ta thu được hệ phương trình dạng tam giác:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = \alpha - 2\beta + 10 \\ \quad\quad x_2 = -3\alpha + \beta + 8 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1 = 13\alpha - 6\beta - 22 \\ x_2 = -3\alpha + \beta + 8 \end{cases}$$

Vậy hê ban đầu có vô số nghiệm

$$W = \left\{ \left(13\alpha - 6\beta - 22, -3\alpha + \beta + 8, \alpha, \beta\right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.1.5. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử ẩn Gauss

Để giải một hệ phương trình tuyến tính chúng ta sẽ sử dụng các phép biến đổi tương đương của hệ phương trình để đưa hệ ban đầu về hệ phương trình có dạng tam giác hoặc hình thang (hay ma trận hệ số A có dạng tam giác hoặc hình thang) cụ thể đối với hệ phương trình tuyến tính như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.7)$$

Không mất tính tổng quát, chúng ta luôn có giả thiết $a_{11} \neq 0$ (vì nếu chưa có ta có thể đổi phương trình khác để có điều kiện đó).

Để ma trận hệ số A có dạng tam giác hoặc hình thang, đầu tiên, chúng ta làm cho các phần tử ở cột thứ nhất, hàng thứ hai trở đi biến thành 0 bằng cách nhân hàng 1 với $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$ rồi cộng với hàng i $(i = 2, 3, \ldots)$, sau $(m-1)$ phép biến đổi như vậy ta thu được hệ phương trình tương đương.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\quad + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ \quad\quad + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \quad (2.8)$$

Trong đó: $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j};\ b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1;\ i = 2, 3, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$

Ở đây, ta còn nói "khử ẩn x_1", tiếp theo bằng cách làm tương tự, chúng ta "khử ẩn x_2" từ phương trình thứ ba trở đi đối với hệ (2.8). Sau đó, lại "khử ẩn x_3" từ phương trình thứ tư trở đi (nếu có)…Quá trình "khử ẩn" theo cách nêu trên là quá trình lặp lại, sau hữu hạn bước biến đổi quá trình sẽ dừng lại ở một trong các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1. Hệ phương trình nhận được có dạng tam giác (hệ có nghiệm duy nhất) hay ma trận hệ số A có dạng tam giác.

Trường hợp 2. Hệ phương trình nhận được có hình thang (hệ có vô số nghiệm) hay ma trận hệ số A có dạng hình thang (bậc thang).

Trường hợp 3. Trong hệ xuất hệ phương trình có dạng

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \text{ với } b \neq 0.$$

Khi đó hệ vô nghiệm.

Chú ý: Trong qua trình biến đổi trong hệ có xuất hiện phương trình có dạng

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

Khi đó chúng ta có thể loại bỏ phương trình này ra khỏi hệ phương trình.

Về mặt thực hành, để giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp Gauss ta làm như sau: Xác định ma trận hệ số mở rộng $\overline{A} = \left(A \middle| B\right)$; Tiếp theo, sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để biến đổi ma trận hệ số A về ma trận tam giác trên hoăc ma trận hình thang.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Giải

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận các hệ số mở rộng của hệ

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3):=(3)-2(1)]{(2):=(2)-4(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

ta nhận được hệ phương trình tương đương, trong đó hàng $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ cho ta phương trình : $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2.$

Phương trình này vô nghiệm, nên hệ đã cho vô nghiệm

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_4 = -3 \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 9x_4 = -14 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -22 \end{cases}$$

Giải

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận các hệ số mở rộng của hệ

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & -3 & 9 & -14 \\ 2 & 8 & -4 & -2 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(4):=(4)-3(1) \\ (5):=(5)-2(1)}]{\substack{(2):=(2)-2(1) \\ (3):=(3)-(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & -29 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & -33 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(5):=(5)-3(2)]{\substack{(3):=(3)-(2) \\ (4):=(4)-2(2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(4):=(4)+(3) \\ (5):=(5)+(3)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(5):=(5)-(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad \overline{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Hệ ban đầu tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 5 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = -11 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_4 = -4 \end{cases}$$

Giải từng phương trình của hệ này từ dưới lên, ta được nghiệm $\left(\frac{29}{3}, -2, \frac{17}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình tuyến tính sau :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}$$

Giải

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận các hệ số mở rộng của hệ

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\sim(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(4):=(4)-12(1)]{\substack{(2):=(2)-3(1)\\(3):=(3)-(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 10 & 25 & -50 & -70 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3):=(3)-(2)\\(4):=(4)-5(2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Bỏ hai hàng cuối, ta được ma trận bổ sung của hệ phương trình tương đương

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & -14 \end{array}\right)$$

Chọn x_1, x_2 làm các ẩn cơ sở, x_3, x_4 trở thành ẩn tự do. Cho $x_3 = m, x_4 = n$; $m, n \in \mathbb{R}$. Ta được

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 + 2m - 4n \\ 2x_2 = -14 - 5m + 10n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - \frac{1}{2}m + n \\ x_2 = -7 - \frac{5}{2}m + 5n \end{cases}$$

Hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm với họ nghiệm

$$W = \left\{ \left(-\frac{1}{2}m + n - 2 \, , -\frac{5}{2}m + 5n - 7 \, , m \, , n \right) / \, m, n \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.2. Hệ phương trình Cramer

2.2.1. Định nghĩa hệ phương trình Cramer

Hệ phương trình Cramer là hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn số và định thức của ma trận các hệ số khác 0.

Ví dụ 7. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 5 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Hệ phương trình có 3 phương trình, 3 ẩn và $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ nên nó là hệ phương trình Cramer.

2.2.2. Các phương pháp giải hệ phương trình Cramer

Ngoài phương pháp chung là phương pháp khử ẩn liên tiếp Gauss đã trình bày ở phần trên, đối với hệ Cramer có thêm hai phương pháp như sau:

i) Phương pháp 1. Dùng ma trận nghịch đảo A^{-1} để giải phương trình ma trận :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

ii) Phương pháp 2. Dùng định thức (công thức Cramer). Xét A_i, $i = \overline{1,n}$ là ma trận nhận được từ A bằng cách thay cột thứ i bằng cột các hệ số tự do. Khi đó, hệ Cramer có nghiệm duy nhất $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$, $i = \overline{1,n}$.

Ví dụ 8. Cho hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -7x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \end{cases}$$

1) Giải hệ bằng phương pháp ma trận nghịch đảo.
2) Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer (định thức)

Giải

1) Dùng ma trận nghịch đảo A^{-1} : Ma trận các hệ số

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

có định thức $\det(A) \neq 0$ nên khả nghịch,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 22 & -53 & -12 \\ 9 & 22 & 5 \end{pmatrix}$$

và nghiệm duy nhất của hệ được xác định bởi

$$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 22 & -53 & -12 \\ 9 & 22 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 10 \\ x_3 & = & -4 \end{cases}$$

2) Dùng định thức.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1,\ \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -10,\ \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Nghiệm của hệ phương trình là

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -1;\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 10;\ x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -4.$$

2.3. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

2.3.1. Nhận xét về sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Phương pháp Gauss là phương pháp dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để chuyển ma trận các hệ số mở rộng $\overline{A} = (A|B)$ thành ma trận $\overline{A}^{/} = (A^{/}|B^{/})$ sao cho $A^{/}$ là ma trận bậc thang theo hàng.

Khả năng 1. Ma trận $A^{/}$ có một hàng 0 với hệ số tự do tương ứng khác 0, nghĩa là trong ma trận $\overline{A}^{/}$ có hàng dạng : $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0|b)$, $b \neq 0$. Hàng này tương ứng với phương trình :

$$0x_1 \quad + \quad 0x_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad 0x_n \quad = \quad b.$$

Phương trình này vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Khả năng 2. Mọi hàng 0 của $A^{/}$ đều có hệ số tự do tương ứng bằng 0 nên ta có thể bỏ đi mà không làm mất nghiệm của hệ. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất hay vô số nghiệm.

2.3.2. Định lý Kronecker – Capelli

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m *phương trình theo* n *ẩn số,* $AX = B$. *Với* $\overline{A} = (A|B)$, *ta có* *i) Nếu* $\text{rank}(A) < \text{rank}(\overline{A})$ *thì hệ vô nghiệm.*

ii) Nếu $\text{rank}(A) = \text{rank}(\overline{A}) = n$ *thì hệ có duy nhất nghiệm.*

iii) Nếu $\text{rank}(A) = \text{rank}(\overline{A}) < n$ *thì hệ có vô số nghiệm.*

Ví dụ 9. Giải và biện hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + mx_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + mx_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Giải

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận các hệ số mở rộng của hệ

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & m & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\sim(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ m & 1 & m & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3):=(3)-m(1)]{(2):=(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 & 1-m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3):=(3)+(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \end{array}\right)$$

Hệ phương trình (*) tương đương

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (m-1)x_2 + (m-1)x_3 = 0 \\ (m-1)x_3 = 1-m \end{cases} \qquad (**)$$

Ta giải và biện luận hệ phương trình (**) từ dưới lên trên

Trường hợp 1. Nếu $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì hệ phương trình (**) tương đương

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Trường hợp 2. Nếu $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì hệ phương trình (**) tương đương

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3$$

Chọn x_1 làm ẩn chính (ẩn cơ sở), x_2, x_3 làm ẩn tự do.

Gán $x_2 = a,\ x_3 = b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra $x_1 = 1 - a - b$.

Vậy hệ có vô số nghiệm vả tập nghiệm là

$$W = \left\{ (1 - a - b, a, b) \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ví dụ 10. Định m để hệ phương trình tuyến tính sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + mx_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 = m \\ mx_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình trên có ma trận hệ số

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ m & 1 & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[(3):=(3)-m(1)]{(2):=(2)-m(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1-2m & 1-m^2 \\ 0 & 1-2m & m-m^2 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\det(A) = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 1-2m & 1-m^2 \\ 1-2m & m-m^2 \end{vmatrix} = (m-1)(1-2m)$$

Hệ phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \wedge m \neq \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 10. Cho hệ phương trình tuyến tính sau :

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 = c_3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu hệ có nghiệm thì định thức của ma trận hệ số mở rộng luôn bằng 0.

Giải

Ta có ma trận hệ số và ma trận hệ số mở rộng là

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}; \overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\overline{A})$.

Ta lại có $\operatorname{rank}(A) \le \operatorname{Min}\{3,2\} = 2$ suy ra $\operatorname{rank}(\overline{A}) \le 2$ mà ma trận $\overline{A}$ là ma trận vuông cấp 3 nên $\det(\overline{A}) = 0$.

2.4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

2.4.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính được gọi là thuần nhất khi tất cả các hệ số tự do bằng 0, nghĩa là hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

2.4.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (2.9) có ít nhất một nghiệm gồm toàn các số 0. Do đó, đối với hệ phương trình thuần nhất, ta chỉ có hai khả năng :

- Hệ có duy nhất một nghiệm (nghiệm gồm toàn số 0) mà ta gọi là nghiệm tầm thường.
- Hệ có ít nhất một nghiệm không tầm thường. Khi đó hệ có vô số nghiệm.

Để giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất bằng phương pháp Gauss, ta chỉ cần thực hiện các phép biến đổi trên ma trận các hệ số.

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi sơ cấp trên dòng ma trận các hệ số

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4):=(4)-3(1)]{\substack{(2):=(2)-3(1) \\ (3):=(3)-4(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2):=-(2)]{\substack{(3):=(3)-3(2) \\ (4):=(4)+2(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Chọn x_1, x_2 làm các ẩn cơ sở, x_3, x_4 trở thành các ẩn tự do và ta được hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4 \\ \qquad x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

Cho $x_3 = a, x_4 = b$ tùy ý, ta được

$$\begin{cases} x_1 = 8a - 7b \\ x_2 = -6a + 5b \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đã cho có vô số nghiệm và họ nghiệm:

$$W = \left\{\left(8a - 7b\,, -6a + 5b\,, a\,, b\right) / \, a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

2.5. Một số bài toán ứng dụng trong kinh tế

2.5.1. Mô hình cân bằng thị trường

Giả sử chúng ta nghiên cứu thị trường bao gồm n hàng hóa có liên quan: hàng hóa 1, 2,..., n. Khái niệm này được hiểu là khi giá của một mặt hàng nào đó thay đổi thì nó không những ảnh hưởng tới lượng cung $\left(Q_{S_i}\right)$ và lượng cầu $\left(Q_{D_i}\right)$ của bản thân mặt hàng đó, mà nó còn ảnh hưởng tới giá và lượng cung, lượng cầu của các mặt hàng còn lại. Người ta thường biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá của các hàng hóa bởi hàm cung và hàm cầu như sau:

$$Q_{S_i} = S_i\left(P_1, P_2, ..., P_n\right), \ i = 1, 2, ..., n;$$
$$Q_{D_i} = D_i\left(P_1, P_2, ..., P_n\right), \ i = 1, 2, ..., n.$$

Trong đó $P_1, P_2, ..., P_n$ là ký hiệu thứ tự là giá của hàng hóa 1, 2,..., n.

Mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa có liên quan (cân bằng cung cầu) được xác định bởi:

$$Q_{S_i} = Q_{D_i}, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.10}$$

Nếu giả thiết các Q_{S_i} và Q_{D_i} $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$ có dạng tuyến tính, thì mô hình trên chính là một hệ gồm có n phương trình và n ẩn $P_1, P_2, ..., P_n$.

Giải hệ phương trình chúng ta tìm được bộ giá cân bằng thị trường:

$$\overline{P} = \left(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n\right)$$

Thay vào Q_{S_i} (hoặc Q_{D_i}) chúng ta thu được bộ lượng cân bằng thị trường:

$$\overline{Q} = \left(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, ..., \overline{Q}_n\right)$$

Ví dụ 12. Cho biết hàm cung, hàm cầu của thị trường hai loại hàng hóa như sau:

$$Q_{S_1} = -2 + 3P_1;\ Q_{D_1} = 8 - 2P_1 + P_2$$

$$Q_{S_2} = -1 + 2P_2;\ Q_{D_2} = 11 + P_1 - P_2$$

Với

Q_{S_1}, Q_{S_2} là lượng cung hàng hóa 1 và 2.

Q_{D_1}, Q_{D_2} là lượng cầu hàng hóa 1 và 2.

P_1, P_2 là giá của hàng hóa 1 và 2.

Khi thị trường cân bằng hãy thiết lập hệ phương trình tuyến tính với ẩn số là P_1 và P_2.

Sử dụng quy tắc Cramer (phương pháp định thức) xác định giá và lượng cân bằng của hai mặt hàng.

Giải

Áp dụng công thức (2.10), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 3P_1 = 8 - 2P_1 + P_2 \\ -1 + 2P_2 = 11 + P_1 - P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5P_1 - P_2 = 10 \\ -P_1 + 3P_2 = 12 \end{cases}$$

Giải hệ bằng quy tắc Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 14;\ D_{P_1} = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 42;\ D_{P_2} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = 70$$

Vậy bộ giá cân bằng là:

$$\left(\overline{P}_1 = \frac{D_{P_1}}{D} = \frac{42}{14} = 3;\ \overline{P}_2 = \frac{D_{P_2}}{D} = \frac{70}{14} = 5\right)$$

Lượng cân bằng là:

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_{D_1} = \overline{Q}_{S_1} = -2 + 3\overline{P}_1 = -2 + 3.3 = 7$$

$$\overline{Q}_2 = \overline{Q}_{D_2} = \overline{Q}_{S_2} = -1 + 2\overline{P}_2 = -1 + 2.5 = 9$$

Ví dụ 13. Giả sử thị trường gồm hai loại hàng hóa: hàng hóa 1 và hàng hóa 2 có hàm cung và cầu như sau:

$$Q_{S_1} = -2 + 2P_1;\ Q_{D_1} = 1 - P_1 + P_2$$

$$Q_{S_2} = -5 + 3P_1;\ Q_{D_2} = 2 + 5P_1 - P_2$$

trong đó:

Q_{S_i} $(i = 1, 2)$: là lượng cung hàng hóa i.

Q_{D_i} $(i = 1, 2)$: là lượng cầu hàng hóa i.

P_i $(i = 1, 2)$: là giá hàng hóa i.

Bằng phương pháp ma trận nghịch đảo, hãy xác định bộ giá và lượng cân bằng thị trường của hai hàng hóa nói trên.

Giải

Áp dụng công thức (2.10), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 2P_1 = 1 - P_1 + P_2 \\ -5 + 3P_2 = 2 + 5P_1 - P_2 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} 3P_1 & - & P_2 & = & 3 \\ -5P & + & 4P_2 & = & 7 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên bằng quy tắc Cramer

Đặt các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix};\ \ X = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 7;\ \ A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương: $AX = B$

Suy ra

$$X = A^{-1}.B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 19 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ \frac{36}{7} \end{pmatrix}$$

Vậy bộ giá cân bằng là:

$$\left(\overline{P}_1 = \frac{19}{7};\ \overline{P}_2 = \frac{36}{7}\right)$$

tương ứng với bộ lượng cân bằng là:

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_{D_1} = \overline{Q}_{S_1} = -2 + 2\frac{19}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\overline{Q}_2 = \overline{Q}_{D_2} = \overline{Q}_{S_2} = -5 + 3\frac{36}{7} = \frac{73}{7}$$

Ví dụ 14. Xét thị trường gồm ba loại hàng hóa gồm chè, cafe, cacao có hàm cung và hàm cầu tương ứng như sau:

$$Q_{S_1} = -10 + P_1;\ Q_{D_1} = 20 - P_1 - P_3 \qquad \text{(chè)}$$

$$Q_{S_2} = 2P_2;\ Q_{D_2} = 40 - 2P_2 - P_3 \qquad \text{(café)}$$

$$Q_{S_3} = -5 + 3P_3;\ Q_{D_3} = 10 - P_1 + P_2 - P_3 \qquad \text{(ca cao)}$$

Hãy thiết lập mô hình cân bằng thị trường của ba loại hàng hóa trên. Sử dụng quy tắc Cramer xác định giá và lượng cafe ở trạng thái cân bằng thị trường.

Giải

Áp dụng công thức (2.10), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \\ Q_{S_3} = Q_{D_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 \quad\quad\quad + \quad P_3 = 30 \\ \quad\quad 4P_2 + \quad P_3 = 40 \\ P_1 - P_2 + 4P_3 = 15 \end{cases}$$

Xác định giá và lượng cafe ở trạng thái cân bằng thị trường bằng quy tắc Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 30;\ D_{P_2} = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 1 \\ 0 & 40 & 1 \\ 1 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 280$$

Vậy giá cafe ở trạng thái cân bằng thị trường là:

$$\overline{P}_2 = \frac{D_{P_2}}{D} = \frac{280}{30} = \frac{28}{3}$$

và lượng cân bằng là:

$$\overline{Q}_2 = \overline{Q}_{S_2} = 2.\frac{28}{3} = \frac{56}{3}.$$

2.5.2. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân

Xét mô hình cân bằng thu nhập quốc dân ở dạng đơn giản, với các ký hiệu: Y là tổng thu nhập quốc dân, G là chi tiêu chính phủ, I là đầu tư hộ gia đình và C là tiêu dùng của các hộ gia đình.

Chúng ta giả thiết rằng chi tiêu Chính phủ và đầu tư là cố định $G = G_0$ và

$I = I_0$, còn chi tiêu hộ gia đình có dạng tuyến tính:

$$C = aY + b \ \left(0 < a < 1,\ b > 0\right).$$

Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng hệ phương trình tuyến tính gồm hai phương trình, 2 ẩn Y và C:

$$\begin{cases} Y = G_O + I_O + C \\ C = aY + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y \quad - \quad C \quad = \quad G_O + I_O \\ -aY \quad + \quad C \quad = \quad b \end{cases}$$

Giải hệ bằng quy tắc Cramer, chúng ta xác định được mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng của nền kinh tế.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0 \ \text{(do } 0 < a < 1\text{)}$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} G_O + I_O & -1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = G_O + I_O + b\,;$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & G_O + I_O \\ -a & b \end{vmatrix} = b + a\left(G_O + I_O\right)$$

Vậy

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{G_O + I_O + b}{1 - a}$$

$$\overline{C} = \frac{D_C}{D} = \frac{b + a\left(G_O + I_O\right)}{1 - a}$$

Tiếp theo, xét mô hình trong trường hợp thu nhập chịu thuế với thuế suất t% (thường biểu diễn dưới dạng thập phân). Khi đó, thu nhập sau thuế là:

$$Y_d = Y - tY = \left(1 - t\right)Y$$

và hàm chi tiêu khi đó có dạng:

$$C = aY_d + b = a\left(1 - t\right)Y + b$$

Ngoài ra, chúng ta cũng xem xét mô hình với ảnh hưởng của yếu tố xuất khẩu X và nhập khẩu M. Khi đó, mô hình có dạng:

$$\begin{cases} Y = G_O + I_O + C + X - M \\ C = a\left(1 - t\right).Y + b \end{cases}$$

Chú ý

Hai yếu tố xuất khẩu $\left(X\right)$ và nhập khẩu $\left(M\right)$ có thể cho dưới dạng hàm của thu nhập Y hoặc là giá trị cố định cho trước.

Chúng ta vẫn biến đổi đưa mô hình về hệ gồm 2 phương trình, 2 ẩn Y và C.

Ví dụ 15. Cho mô hình sau:

$$C = 0,8Y_d + 250;$$

$$I = I_0; \; G = G_0;$$

$$Y_d = (1-t)Y \text{ (} t \text{ là thuế suất thu nhập).}$$

a) Sử dụng quy tắc Cramer, hãy xác định mức thu nhập quốc dân và chi tiêu ở trạng thái cân bằng.

b) Tính mức thu nhập quốc dân và chi tiêu ở trạng thái cân bằng với $I_0 = 150$, $G_0 = 500$ (đơn vị: tỉ VNĐ) và $t = 0,15$ (15%).

Giải

Đầu tiên ta xác định mô hình cân bằng:

$$\begin{cases} Y = G_O + I_O + C \\ C = 0,8Y + 250 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} \quad Y \quad - \; C = G_O + I_O \\ -0,8(1-t)Y + C = 250 \end{cases}$$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -0,8(1-t) & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0,8(1-t);$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} G_O + I_O & -1 \\ 250 & 1 \end{vmatrix} = G_O + I_O + 250;$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & G_O + I_O \\ -0,8(1-t) & 250 \end{vmatrix} = 250 + 0,8(1-t)(G_O + I_O).$$

a) Vậy thu nhập quốc dân và chi tiêu cân bằng là:

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{G_O + I_O + 250}{1 - 0,8(1-t)}$$

$$\overline{C} = \frac{D_C}{D} = \frac{0,8(1-t)(G_O + I_O) + 250}{1 - 0,8(1-t)}$$

Nhận xét: $\overline{Y}$ và $\overline{C}$ phụ thuộc vào I_0, G_0 và t.

b) Với $I_0 = 150$, $G_0 = 500$, $t = 0,15$ chúng ta có:

$$\overline{Y} = \frac{150+500+250}{1-0,8(1-0,15)} = \frac{900}{0,32} = 2812,5 \text{ (tỉ VNĐ)}$$

$$\overline{C} = \frac{0,8(1-0,15)(150+500)+250}{1-0,8(1-0,15)} = \frac{692}{0,32} = 2162,5 \text{ (tỉ VNĐ).}$$

Ví dụ 16. Xét mô hình cân bằng:

$$Y = C + I_0 + G_0 + X_0 - M$$

Với $C = a(1-t)Y,\ (0 < a < 1)$, t là thuế suất

$M = b(1-t)Y,\ (0 < b < 1)$

a) Hãy xác định mức thu nhập và chi tiêu quốc dân ở trạng thái cân bằng $\overline{Y}$, $\overline{C}$ bằng quy tắc Cramer.

b) Tính $\overline{Y}$ và $\overline{C}$ khi $t = 0,1;\ a = 0,85;\ b = 0,1;\ I_0 = 250;\ G_0 = 400$ và $X_0 = 100$. Đơn vị tính I_0, G_0, X_0 là tỉ VNĐ; t là %.

Giải

a) Ta thiết lập hệ 2 phương trình 2 ẩn Y và C :

Ta có

$$\begin{cases} Y = C + I_O + G_O + X_O - b(1-t)Y \\ C = a(1-t)Y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [1+b(1-t)]Y - C = I_O + G_O + X_O \\ -a(1-t)Y + C = 0 \end{cases}$$

Các định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1+b(1-t) & -1 \\ -a(1-t) & 1 \end{vmatrix} = 1 + (1-t)(b-a);$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} I_O + G_O + X_O & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I_O + G_O + X_O;$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1+b(1-t) & I_O + G_O + X_O \\ -a(1-t) & 0 \end{vmatrix} = a(1-t)(G_O + I_O + X_O).$$

Vậy thu nhập và chi tiêu quốc dân cân bằng là:

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{G_O + I_O + X_O}{1+(1-t)(b-a)}$$

$$\overline{C} = \frac{D_C}{D} = \frac{a(1-t)(G_O + I_O + X_O)}{1+(1-t)(b-a)}$$

b) Khi $t = 0,1; a = 0,85; b = 0,1; I_0 = 250; G_0 = 400$ và $X_0 = 100$.

Ta có:

$$\overline{Y} = \frac{250+400+100}{1+(1-0,1)(0,1-0,85)} = \frac{750}{0,325} \approx 2307,6923 \text{(tỉ VNĐ)}$$

$$\overline{C} = \frac{0,85(1-0,1)(250+400+100)}{1+(1-0,1)(0,1-0,85)} = \frac{573,75}{0,325} \approx 1765,3846 \text{(tỉ VNĐ)}.$$

2.5.3. Mô hình input – output của Leontief

Trong phần này, chúng tôi xin giới thiệu một mô hình kinh tế, công cụ chủ yếu để giải mô hình này là các phép toán đối với ma trận và định thức.

2.5.3.1. Giới thiệu mô hình

Trong một nền kinh tế hiện đại, việc sản xuất một loại sản phẩm hàng hóa nào đó (output) đòi hỏi phải sử dụng các loại hàng hóa khác nhau để làm nguyên liệu đầu vào (input) của quá trình sản xuất và việc xác định tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành sản xuất trong tổng thể nền kinh tế là quan trọng, nó bao gồm:

– Cầu trung gian từ phía các nhà sản xuất sử dụng loại sản phẩm đó cho quá trình sản xuất.

– Cầu cuối cùng từ phía những người sử dụng sản phẩm để tiêu dùng hoặc xuất khẩu, bao gồm các hộ gia đình, Nhà nước, các tổ chức xuất khẩu,...

Xét một nền kinh tế có n ngành sản xuất, ngành $1,2,...,n$. Để thuận tiện cho việc tính chi phí cho các yếu tố sản xuất, ta phải biểu diễn lượng cầu của tất cả các loại hàng hóa ở dạng giá trị, tức là đo bằng tiền. Tổng cầu về sản phẩm hàng hóa của ngành i $(i = 1, 2,..., n)$ được ký hiệu, x_i và xác định bởi:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} + b_i \;\; (i = 1,2,...,n) \qquad (2.11)$$

Trong đó:

x_{ik} : là giá trị sản phẩm của ngành i mà ngành k cần sử dụng cho quá trình sản xuất của mình (giá trị cầu trung gian).

b_i : là giá trị sản phẩm của ngành i dành cho nhu cầu tiêu dùng và xuất khẩu (giá trị cầu cuối cùng).

Tuy nhiên, trong thực tế, ta thường không có thông tin về giá trị cầu trung gian x_{ik}, nhưng người ta lại chủ động trong việc xác định tỉ phần chi phí đầu vào của sản xuất.

Gọi

a_{ik}: là tỉ phần chi phí đầu vào của ngành k đối với sản phẩm của ngành i, nó được tính bởi công thức:

$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Trong đó

+) $0 \le a_{ik} \le 1$, và ở đây, giả thiết a_{ik} là cố định đối với mỗi ngành sản xuất i, $(k = 1, 2, ..., n)$. Người ta còn gọi a_{ik} là hệ số chi phí đầu vào và ma trận.

+) $A = (a_{ik})_n$ được gọi là ma trận hệ số chi phí đầu vào (ma trận hệ số kỹ thuật).

+) Giả sử $a_{ik} = 0,3$ có nghĩa là để sản xuất ra 1 đồng giá trị sản phẩm của mình, ngành k đã phải chi 0,3 đồng để mua sản phẩm của ngành i phục vụ cho quá trình sản xuất. Đặt

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ta gọi X là ma trận tổng cầu và B là ma trận cầu cuối cùng. Khi đó, từ đẳng thức (2.11), thay $x_{ik} = a_{ik} \cdot x_k$ chúng ta có:

$$x_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n + b_i \ (i = 1, 2, ..., n)$$

Hay biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Tức là

$$X = AX + B \tag{2.12}$$

2.5.3.2. Phương pháp giải

Từ (2.12), ta có $(I - A)X = B$

Trong đó, I là ma trận đơn vị cấp n, nếu $(I-A)$ không suy biến thì:

$$X = (I-A)^{-1} B \tag{2.13}$$

Công thức (2.13) được gọi là công thức tính ma trận tổng cầu.

+) Ma trận $(I-A)$ được gọi là ma trận Leontief. Như vậy, nếu chúng ta biết ma trận hệ số kỹ thuật A và ma trận cầu cuối cùng thì sẽ xác định được giá trị tổng cầu của các ngành sản xuất.

+) Ma trận $C = (I-A)^{-1} = (c_{ij})_{n\times n}$, và gọi là ma trận hệ số chi phí toàn bộ. Hệ số c_{ij} cho biết: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành j, thì ngành i cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là c_{ij}.

2.5.3.3. Các ví dụ

Ví dụ 17. Giả sử trong một nền kinh tế có hai ngành sản xuất: ngành 1 và ngành 2 có ma trận hệ số kỹ thuật là:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Cho biết giá trị cầu cuối cùng đối với sản phẩm của ngành 1 và ngành 2 thứ tự là 10, 20 tỉ đồng. Hãy xác định giá trị tổng cầu đối với mỗi ngành.

Giải

Gọi

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ là ma trận tổng cầu.}$$

Với x_1 là giá trị tổng cầu của ngành 1, x_2 là giá trị tổng cầu của ngành 2.

Theo giả thiết ma trận cầu cuối B có dạng: $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Ta có:

$$I - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Ma trận phụ hợp tương ứng :

$$(I-A)^* = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của $I - A$

$$\left(I-A\right)^{-1}=\frac{1}{0,6}\begin{pmatrix}0,9 & 0,3\\ 0,4 & 0,8\end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức (2.13) để tính ma trận tổng cầu: $X=\left(I-A\right)^{-1}B$

Vậy ma trận tổng cầu là:

$$X=\frac{1}{0,6}\begin{pmatrix}0,9 & 0,3\\ 0,4 & 0,8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix}=\frac{1}{0,6}\begin{pmatrix}15\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\ \dfrac{100}{3}\end{pmatrix}$$

Hay:

Giá trị tổng cầu của ngành 1 là $x_1=25$ tỉ đồng.

Giá trị tổng cầu của ngành 2 là $x_2=\dfrac{100}{3}$ tỉ đồng.

Ví dụ 18. Giả sử trong một nền kinh tế có 3 ngành sản xuất: ngành 1, ngành 2 và ngành 3. Biết ma trận hệ số kĩ thuật là:

$$A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,1 & 0,2\\ 0,2 & 0,3 & 0,2\\ 0,1 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix}$$

và giá trị cầu cuối cùng đối với sản phẩm của từng ngành thứ tự là 40, 40 và 110 (đơn vị tính: ngàn tỉ đồng). Hãy xác định giá trị tổng cầu của từng ngành sản xuất.

Giải

Gọi

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\text{ là ma trận tổng cầu.}$$

Với x_1 là giá trị tổng cầu của ngành 1, x_2 là giá trị tổng cầu của ngành 2, x_3 là giá trị tổng cầu của ngành 3.

Theo giả thiết ma trận cầu cuối B có dạng: $B=\begin{pmatrix}40\\ 40\\ 110\end{pmatrix}$

Ta có:

$$I-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,4 & 0,1 & 0,2\\ 0,2 & 0,3 & 0,2\\ 0,1 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6 & -0,1 & -0,2\\ -0,2 & 0,7 & -0,2\\ -0,1 & -0,4 & 0,7\end{pmatrix}$$

Định thức của ma trận $I - A$

$$|I - A| = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & -0,4 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,2$$

Ma trận phụ hợp tương ứng:

$$(I - A)^* = \begin{pmatrix} 0,41 & 0,15 & 0,16 \\ 0,16 & 0,40 & 0,16 \\ 0,15 & 0,25 & 0,40 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của $I - A$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0,2}\begin{pmatrix} 0,41 & 0,15 & 0,16 \\ 0,16 & 0,40 & 0,16 \\ 0,15 & 0,25 & 0,40 \end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức (2.13) để tính ma trận tổng cầu:

$$X = (I - A)^{-1} B = \frac{1}{0,2}\begin{pmatrix} 0,41 & 0,15 & 0,16 \\ 0,16 & 0,40 & 0,16 \\ 0,15 & 0,25 & 0,40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Vậy

Giá trị tổng cầu của ngành 1 là $x_1 = 200$ ngàn tỉ đồng.

Giá trị tổng cầu của ngành 2 là $x_2 = 200$ ngàn tỉ đồng.

Giá trị tổng cầu của ngành 2 là $x_3 = 300$ ngày tỉ đồng.

Ví dụ 19. Trong mô hình input – output mở biết ma trận kỹ thuật số như sau

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & m & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

a) Nêu ý nghĩa phần tử nằm ở hàng 2 cột 1 của ma trận A.

b) Tìm yêu cầu của ngành kinh tế mở khi $m = 0,2$ biết sản lượng của 3 ngành là 300, 250, 220.

c) Tìm m biết rằng khi sản lượng của 3 ngành là 400, 400, 300 thì ngành kinh tế thứ nhất cung cấp cho ngành kinh tế mở là 130.

d) Với m tìm được ở câu c). Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ và nêu ý nghĩa phần tử nằm ở hàng 3 cột 2 của ma trận này.

Giải

a) Ý nghĩa $a_{21} = 0,3$: Hệ số này cho biết để sản xuất ra một đơn vị giá trị ngành 1 thì ngành 2 phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm có giá trị là 0,3.

b) Gọi X là ma trận giá trị sản lượng của 3 ngành.

Từ giả thiết đề cho, ta có

$$X = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 220 \end{pmatrix}$$

Giá trị sản lượng cầu cuối:

$$B = (I - A)X = \begin{pmatrix} 124 \\ 91 \\ 41 \end{pmatrix}$$

c) Gọi Y là ma trận giá trị sản lượng của 3 ngành

$$Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

Từ giả thiết đề bài, ta có:

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + b_1$$

hay

$$400 = 0,2 \cdot 400 + 400m + 0,3 \cdot 300 + 130 \Leftrightarrow m = 0,25.$$

d) Với $m = 0,25$. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ:

$$C = (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,751 & 0,769 & 0,849 \\ 0,743 & 1,538 & 0,663 \\ 0,716 & 0,769 & 1,711 \end{pmatrix}$$

Hệ số $c_{32} = 0,769$ cho biết: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành 2 thì ngành 3 cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là $0,769$.

2.6. Bài tập

Bài số 1. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng quy tắc (phương pháp) Cramer

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

Đáp số : 1) $(3, 1, -1)$*; 2)* $(2, -1, 1)$*; 3)* $(-1, -2, 2)$*; 4)* $(2, -2, 3)$*;*

5) $\left(2, \frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$*; 6)* $\left(5, -\frac{11}{4}, \frac{37}{2}, -\frac{63}{4}\right)$*; 7)* $(2, 0, 0, 0)$.

Bài số 2. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Gauss

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9 \\ 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 22 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 - x_4 = 10 \end{cases}$

Đáp số : 1) $(1, 2, -3)$*; 2)* $(2, -1, 3)$*; 3)* $(2, 1, 1)$*; 4)* $(3, -2, 1)$*;*

5) $(1, -2, -4)$*; 6)* $\left(\frac{10}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{2}\right)$*; 7)* $(11m + 11, 5m + 4, m, 1)$*; 8)* $(-17, 24, 33, 14)$.

Bài số 3. Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

Đáp số : 1) $(0, 0, 0)$*; 2)* $(-5a + 4b, 7a - 7b, a, b)$*; 3)* $(0, 0, 0)$*;*

4) $(0, 0, 0, 0)$*; 5)* $(-6a, -15a, -20a, 11a)$*; 6)* $(0, 0, 0, 0)$*;*

7) $(0, 0, 0, 0)$*; 8)* $(3a - 13b, 19a - 20b, 17a, 17b)$.

Bài số 4. Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính sau

1. $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = m \\ 2x_1 + (m+1)x_2 + (m+1)x_3 = m+1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 + mx_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (m+1)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (m+1)x_3 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + mx_4 = 0 \end{cases}$

Đáp số : 1) TH1: $m \neq 1 \wedge m \neq -2$ *: hệ có nghiệm duy nhất; TH2 :* $m = 1$ *: hệ vô số nghiệm; TH3 :* $m = -2$ *: hệ vô nghiệm. 2) hệ vô số nghiệm với mọi m;*

3) TH1: $m \neq 0 \wedge m \neq -3$ *: hệ có nghiệm duy nhất; TH2 :* $m = 0$ *: hệ vô số nghiệm; TH3 :* $m = -3$ *: hệ vô nghiệm. 4) hệ vô số nghiệm với mọi m.*

Bài số 5. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

Đáp số : 1) $(-64, 8, -18)$*; 2)* $\left(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$*; 3)* $(0, 0, -1, 0)$.

Bài số 6. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Đáp số : $m \neq -3 \wedge m \neq 2$.

Bài số 7. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

Định k để hệ phương trình vô nghiệm.

Đáp số : $k = -2$.

Bài số 8. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = k \end{cases}$$

Định k để hệ phương trình có vô số nghiệm

Đáp số : $k = 0$.

Bài số 9. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$$

Định m để hệ phương trình vô nghiệm.

Đáp số : $m = 0$.

Bài số 10. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^{2019} = 0$ và $A + 2019B = AB$. Chứng minh rằng hệ phương trình thuần nhất có ma trận hệ số B có vô số nghiệm.

Hướng dẫn: Từ $|A| = 0$ *suy ra* $|B| = 0$.

Bài số 11. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^{2019} = 0$ và $B(3A + 2I) = 5A$. Chứng minh rằng hệ phương trình thuần nhất có ma trận hệ số B có vô số nghiệm.

Hướng dẫn: Từ $|A| = 0$ *suy ra* $|B| = 0$.

Bài số 12. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^{2019} = 0$ và $B(A - I) = A + 3I$. Chứng minh rằng hệ phương trình thuần nhất có ma trận hệ số B có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn: Từ $|A| = 0$ *suy ra* $|B| \neq 0$.

Bài số 13. Xét thị trường ba loại hàng hóa với hàm cung và hàm cầu như sau:

$$Q_{S_1} = -60 + 6P_1 - 2P_3;\ Q_{D_1} = 120 - 5P_1 + P_2$$

$$Q_{S_2} = -30 - P_1 + 9P_2 - P_3;\ Q_{D_2} = 160 + P_1 - 6P_2 + P_3$$

$$Q_{S_3} = -20 - 2P_1 + 8P_3;\ Q_{D_3} = 140 + P_2 - 4P_3$$

Hãy xác định bộ giá trị và lượng cân bằng thị trường của ba hàng hóa đó bằng phương pháp ma trận nghịch đảo.

Đáp số: $\overline{P}_1 = \dfrac{19910}{933};\ \overline{P}_2 = \dfrac{16760}{933};\ \overline{P}_3 = \dfrac{17155}{933};$

$$\overline{Q}_1 = \frac{29170}{933};\ \overline{Q}_2 = \frac{28595}{311};\ \overline{Q}_3 = \frac{78760}{933}.$$

Bài số 14. Xét thị trường có 4 loại hàng hóa. Biết hàm cung và cầu của 4 loại hàng hóa trên là

$$Q_{S_1} = 20P_1 - 3P_2 - P_3 - P_4 - 30;\ Q_{D_1} = -11P_1 + P_2 + 2P_3 + 5P_4 + 115$$

$$Q_{S_2} = -2P_1 + 18P_2 - 2P_3 - P_4 - 50;\ Q_{D_2} = P_1 - 9P_2 + P_3 + 2P_4 + 250$$

$$Q_{S_3} = -P_1 - 2P_2 + 12P_3 - 40;\ Q_{D_3} = P_1 + P_2 - 7P_3 + 3P_4 + 150$$

$$Q_{S_4} = -2P_2 - P_3 + 18P_4 - 15;\ Q_{D_4} = P_1 + 2P_3 - 10P_4 + 180$$

Tìm điểm cân bằng thị trường.

Đáp số : $P_1 = 10,\ P_2 = 15,\ P_3 = 15,\ P_4 = 10$.

Bài số 15. Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t là:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

a) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t.

b) Biết $x(t) = (800, 1500, 700)$, tìm sản lượng mỗi ngành năm t.

Hướng dẫn: a) $C = [I - A(t)]^{-1}$; b) $X(t) = [I - A(t)]^{-1} x(t)$.

Bài số 16. Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

a) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận này.

b) Năm $(t+1)$ nhu cầu sản phẩm cuối cùng của các ngành là $(180,150,100)$ (tỷ VNĐ). Tính giá trị sản lượng của các ngành, biết rằng các hệ số chi phí năm $(t+1)$ và năm t như nhau.

Hướng dẫn: a) $C = \left[I - A(t)\right]^{-1}$; b) $X(t+1) = \left[I - A(t+1)\right]^{-1} x(t+1)$.

Bài số 17. Xét mô hình cân bằng thu nhập quốc dân: $Y = G_0 + I_0 + C;\ C = 0,4Y + 30.$

Hãy xác định mức thu nhập và chi tiêu quốc dân ở trạng thái cân bằng bằng quy tắc Cramer, biết $I_0 = 200,\ G_0 = 500$ (triệu USD).

Đáp số: $\overline{Y} = \dfrac{3650}{3}; \overline{C} = \dfrac{3100}{6}.$

Bài số 18. Xét mô hình: $Y = G_0 + I_0 + C;\ C = 0,8Y_d;\ Y_d = (1-t)Y$

Hãy xác định mức thu nhập và chi tiêu quốc dân ở trạng thái cân bằng bằng quy tắc Cramer, biết $I_0 = 200,\ G_0 = 500$ (triệu USD) và thuế suất thu nhập $t = 0,1.$

Đáp số: $\overline{Y} = 17500/3;\ \overline{C} = 4200.$

Bài số 19. Cho mô hình thu nhập quốc dân:

$$\begin{cases} Y = C + I + G_0 \\ C = b_0 + b_1 Y \\ I = a_0 + a_1 Y - a_2 R_0 \end{cases} \quad (a_0, a_1, b_0, b_1 > 0;\ a_1 + b_1 < 1)$$

trong đó: G_0 là chi tiêu chính phủ; R_0 là lãi suất; I là đầu tư; C : tiêu dùng; Y : thu nhập

1) Sử dụng quy tắc Cramer để xác định $\overline{Y}, \overline{C}$ ở trạng thái cân bằng.

2) Với $b_0 = 200;\ b_1 = 0,7;\ a_0 = 100;\ a_1 = 0,2;\ a_2 = 10;\ R_0 = 7;\ G_0 = 500.$

Tính $\overline{Y}, \overline{C}$.

Đáp số: 1) $\overline{Y} = \dfrac{a_0 + a_2 R_0 + G_0 + b_0}{1 - a_1 - b_1}; \overline{C} = \dfrac{b_0 - a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_2 b_1 R_0 + b_1 G_0}{1 - a_1 - b_1};$

2) $\overline{Y} = 7300;\ \overline{C} = 5310.$

Chương 3

KHÔNG GIAN VECTƠ

3.1. Các khái niệm căn bản

3.1.1. Định nghĩa không gian vectơ

Cho V là tập các phần tử khác rỗng trên đó có trang bị hai phép toán : Một phép toán trong mà ta gọi là *phép cộng hai phần tử của* V và một phép toán ngoài mà ta gọi là *phép nhân số thực với một phần tử của* V,

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (u,v) &\mapsto u+v \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \bullet : \mathbb{R} \times V &\to V \\ (k,u) &\mapsto ku \end{aligned}. \tag{3.1}$$

Tập V cùng với hai phép toán trên được gọi là một *không gian vectơ* trên $\mathbb{R}$ nếu các phép toán trên V thỏa các tính chất sau, với mọi $u,v,w \in V;\ h,k \in \mathbb{R}$,

i) $u+v=v+u$

ii) $(u+v)+w=u+(v+w)$

iii) $\exists! 0 \in V : u+0=u$,

iv) $\exists -u \in V : u+(-u)=0$

v) $h(ku)=(hk)u$

vi) $h(u+v)=hu+hv$

vii) $(h+k)u=hu+ku$

viii) $1.u=u$

Khi đó, không gian vectơ V còn được ký hiệu là $(V,+,\bullet)$ hay vắn tắt, V.

Ví dụ 1. Cho $V = M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ với hai phép toán: cộng hai ma trận và nhân số thực cho ma trận. Ta chứng minh được V là một không gian vectơ.

Ví dụ 2. Cho $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) / x,y,z \in \mathbb{R}\}$ với hai phép toán: cộng hai vectơ và nhân số thực cho vectơ như sau:

+) $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

+) $k(x_1,y_1,z_1)=(kx_1,ky_1,kz_1)$

Ta chứng minh được $\mathbb{R}^3$ là một không gian vectơ.

3.1.2. Định nghĩa tổ hợp tuyến tính của các vectơ

Cho $(V,+,\bullet)$ là một không gian vectơ, với $u_1,u_2,...,u_n \in V$ và $k_1,k_2,...,k_n \in \mathbb{R}$, ta gọi $k_1u_1+k_2u_2+...+k_nu_n$ là một *tổ hợp tuyến tính* các vectơ $u_1,u_2,...,u_n$.

Nếu $u \in V$ và $u = k_1u_1 + k_2u_2 + ... + k_nu_n$ thì u được gọi là biểu thị tuyến tính qua các vectơ $u_1, u_2, ..., u_n$.

Ví dụ 3. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, ta có tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 là

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = (k_1 + k_3, k_1 + k_2, k_2 + k_3) \in \mathbb{R}^3.$$

3.1.3. Định nghĩa không gian vectơ con của một không gian vectơ

Cho V là một không gian vectơ, $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. Nếu với $\forall u, v \in W$, $k \in \mathbb{R}$ mà $u + v$, $ku \in W$ thì ta nói W là một *không gian vectơ con* hay vắn tắt là *không gian con* của V, ký hiệu $W \leq V$.

Ví dụ 4. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, xét tập $W = \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$. Ta dễ dàng chứng minh được W là không gian con của $\mathbb{R}^2$.

Thật vậy, ta có $(0,0) \in W$ nên $W \neq \emptyset$. (1)

Lấy $u = (a,0)$, $v = (b,0) \in W$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $k \in \mathbb{R}$

Ta có:

$u + v = (a + b, 0) \in W$ vì $a + b \in \mathbb{R}$ (2)

$ku = (ka, 0) \in$ vì $ka \in \mathbb{R}$ (3)

Từ (1), (2), (3), ta có $W \leq \mathbb{R}^2$.

3.1.4. Định nghĩa không gian con sinh bởi một tổ hợp tuyến tính

Cho V là một không gian vectơ và $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$ thì tập W các tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_n$ trở thành một không gian vectơ con của V,

$$W = \{k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n / k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}\} \leq V. \quad (3.2)$$

và ta nói W sinh bởi S hay S sinh ra W, ký hiệu

$$W = \langle S \rangle = \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle = Span\, S. \quad (3.3)$$

Hệ quả

Tập hợp tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất theo n ẩn số là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 5. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có tập nghiệm

$$W = \{(8m - 7n, -6m + 5n, m, n), m, n \in \mathbb{R}\}$$

Biểu diễn tập nghiệm dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} W &= \{(8m, -6m, m, 0) + (-7n, 5n, 0, n), m, n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{m(8, -6, 1, 0) + n(-7, 5, 0, 1), m, n \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle u_1 = (8, -6, 1, 0), u_2 = (-7, 5, 0, 1)\rangle. \end{aligned}$$

Ta có tập nghiệm W được sinh bởi hai véctơ u_1, u_2 nên $W \le \mathbb{R}^4$.

3.1.5. Định nghĩa độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính

Cho V là một không gian vectơ và $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$. Hệ S *độc lập tuyến tính* nếu $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$, $k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n = 0$ thì $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.

Ngược lại, nếu S không độc lập tuyến tính, ta nói S *phụ thuộc tuyến tính*, nghĩa là $\exists k_i \neq 0 : k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n = 0$.

Ví dụ 6. Các vectơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

a) $u_1 = (0,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (1,5,3)$

b) $u_1 = (1,1,2); u_2 = (1,2,5); u_3 = (0,1,3)$

Giải

a) Xét hệ phương trình thuần nhất sau:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

b) Xét hệ phương trình nhất sau:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên bằng phương pháp Gauss, ta có nghiệm tổng quát của hệ trên là $x_1 = m; x_2 = -m; x_3 = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Vậy u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính.

3.2. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ

3.2.1. Định nghĩa cơ sở của một không gian vectơ

Cho V là một không gian vectơ và $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$. S là một cơ sở của V nếu S thỏa hai điều kiện sau :

i) $\langle S \rangle = V$, và

ii) S độc lập tuyến tính.

Tính chất

Cho V là một không gian vectơ và $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$. S là một cơ sở của V nếu

Ma trận $A = \left([u_1]_{S_0} \quad [u_1]_{S_0} \quad \cdots \quad [u_1]_{S_0} \right)$, với S_0 là một cơ sở chính tắc của V, có định thức khác 0.

Khi đó, ta nói V là một không gian vectơ hữu hạn chiều và người ta chứng minh được rằng bất cứ một cơ sở nào khác của V cũng phải có đúng n vectơ và giá trị n này được gọi là số chiều của V, ký hiệu $\dim V = n$.

Hơn nữa, $\forall v \in V, \exists k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R} : v = k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n$. Khi đó, $k_1, k_2, ..., k_n$ được gọi là tọa độ của v đối với cơ sở S. Ký hiệu

$$[v]_S = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

3.2.2. Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $S_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $S_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *là hai cơ sở của không gian vectơ* V. *Khi đó, với mọi* $v \in V$ *ta có* $[v]_{S_1} = A[v]_{S_2}$, *trong đó*

$$A = \left([v_1]_{S_1} \quad [v_2]_{S_1} \quad \cdots \quad [v_n]_{S_2} \right). \tag{3.5}$$

Ma trận A được ký hiệu là $P(S_1 \to S_2)$ *và được gọi là ma trận đổi cơ sở từ* S_1 *sang* S_2.

3.2.3. Tính chất

Cho S_0, S_1, S_2 là 3 cơ sở của không gian vec tơ V, trong đó S_0 là cơ sở chính tắc

i) $P(S_2 \to S_1) = \left[P(S_1 \to S_2)\right]^{-1}$, (3.6)

ii) $P(S_1 \to S_2) = P(S_1 \to S_0) \cdot P(S_0 \to S_2)$. (3.7)

Ví dụ 7. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở

$$S_1 = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$$
$$S_2 = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (2,1,2), v_3 = (1,2,2)\}$$

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S_1 sang S_2.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S_2 sang S_1.

c) Tìm tọa độ của $u = (1,3,5)$ trong cơ sở S_2.

Giải

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S_1 sang S_2

Ta có $P(S_1 \to S_2) = \left([v_1]_{S_1} \ \ [v_2]_{S_1} \ \ [v_3]_{S_1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S_2 sang S_1

Ta có $P(S_2 \to S_1) = \left[P(S_1 \to S_2)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Tìm tọa độ của $u = (1,3,5)$ trong cơ sở S_2

Đặt $[u]_{S_2} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$

Xét hệ phương trình: $u = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 1 \\ k_2 + 2k_3 = 3 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 7 \\ k_2 = -5 \\ k_3 = 4 \end{cases}$$

Vậy $[u]_{S_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.2.4. Mệnh đề

Cho một hệ vectơ $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ *trong không gian* $\mathbb{R}^n$.

i) Nếu $m < n$ *thì S không sinh ra* $\mathbb{R}^n$.

ii) Nếu $m > n$ *thì S phụ thuộc tuyến tính.*

Ví dụ 8. Hệ vectơ nào sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

a) $u_1 = (2,1); u_2 = (3,0)$.

b) $u_1 = (1,2,5); u_2 = (1,3,2)$.

c) $u_1 = (1,2,1); u_2 = (-1,1,2); u_3 = (1,-2,3)$.

d) $u_1 = (1,6,4); u_2 = (2,4,-1); u_3 = (-1,2,5); u_4 = (2,0,5)$.

Giải

a) $u_1 = (2,1); u_2 = (3,0)$

Lập ma trận

$$A = \left([u_1]_{S_0}\ [u_2]_{S_0}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Vậy u_1, u_2 là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

b) $u_1 = (1,2,5); u_2 = (1,3,2)$

Ta thấy S gồm 2 vectơ $u_1 = (1,2,5); u_2 = (1,3,2)$ nên theo mệnh đề (3.2.4) ta có S không sinh ra $\mathbb{R}^3$. Vậy S không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

c) $u_1 = (1,2,1); u_2 = (-1,1,2); u_3 = (1,-2,3)$

Lập ma trận

$$A = \left([u_1]_{S_0}\quad [u_2]_{S_0}\quad [u_3]_{S_0}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$$

Vậy u_1, u_2, u_3 là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

d) $u_1 = (1,6,4); u_2 = (2,4,-1); u_3 = (-1,2,5); u_4 = (2,0,5)$

Ta thấy S gồm 4 vectơ $u_1 = (1,6,4); u_2 = (2,4,-1)$; $u_3 = (-1,2,5); u_4 = (2,0,5)$

nên theo mệnh đề (3.2.4) ta có S không không độc lập tuyến tính.

Vậy S không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 9. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho hệ vectơ

$$S = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,2), u_3 = (1,2,3)\}$$

a) Chứng minh rằng S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của $u = (0,0,1)$ trong cơ sở $\mathbb{R}^3$.

Giải

a) Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Lập ma trận : $A = \left([u_1]_{S_0} \quad [u_2]_{S_0} \quad [u_3]_{S_0}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ta có : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Vậy S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của $u = (0,0,1)$ trong cơ sở $\mathbb{R}^3$

Đặt $[u]_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Xét hệ phương trình sau: $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = u$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy $[u]_S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 10. Xác định một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm W của các hệ sau

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

Giải hệ trên bằng phương pháp Gauss, ta được

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2):=(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Chọn x_1, x_2 làm ẩn cơ sở x_3 làm ẩn tự do, $x_3 = m$ (với m tùy ý).

Ta được nghiệm tổng quát của hệ là : $W = \{(-5m, 4m, m) | m \in \mathbb{R}\}$.

Vậy không gian nghiệm $W = \{m(-5,4,1) | m \in \mathbb{R}\} = \langle(-5,4,1)\rangle$ được sinh ra bởi 1 vectơ độc lập tuyến tính. Nên ta có $\dim W = 1$.

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

Giải hệ trên bằng phương pháp Gauss, ta được

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -7 & -4 \\ -2 & -7 & -3 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3):=(3)+2(1) \\ (4):=(4)-3(1)}]{(2):=(2)+5(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Chọn x_1, x_2 làm ẩn cơ sở x_3 làm ẩn tự do, $x_3 = m$ (với m tùy ý).

Ta được nghiệm tổng quát của hệ là $W = \left\{(-\frac{1}{3}m, -\frac{1}{3}m, m) | m \in \mathbb{R}\right\}$.

Vậy không gian nghiệm $W = \left\{-\frac{1}{3}m(1,1,-3) | m \in \mathbb{R}\right\} = \langle(1,1,-3)\rangle$ được sinh ra bởi 1 vectơ độc lập tuyến tính. Nên ta có $\dim W = 1$.

3.3. Bài tập

Bài số 1. Chứng minh các tập sau là không gian vectơ

1. $\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) / x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n} \right\}$ với hai phép toán sau

   Phép cộng: $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

   Phép nhân: $k(x_1, x_2, ..., x_n) = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$

2. $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$,với hai phép toán cộng hai ma trận và nhân một số thực với một ma trận.

Hướng dẫn : Dùng định nghĩa.

Bài số 2. Hỏi các tập dưới đây là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không?

1. Các vectơ có dạng $(a, 0, 0)$.
2. Các vectơ có dạng $(a, 1, 1)$.

Đáp số : 1) là không gian con; 2) không là không gian con.

Bài số 3. Cho không gian vectơ V trên trường số thưc $\mathbb{R}$, α là một vectơ cố định thuộc V. Chứng minh rằng tập hợp $W = \{ r\alpha | r \in R \}$ là một không gian con của V.

Hướng dẫn : Dùng định nghĩa về không gian con.

Bài số 4. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (0, 1, -3)$. Xét xem vectơ $u = (2, -3, 3)$ có phải là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2 hay không ?

Đáp số : $u = (2, -3, 3)$ *là tổ hợp tuyến tính của* u_1, u_2

Bài số 5. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, xét xem vectơ u có phải là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 hay không

1. $u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (0,1,1), u = (1,2,1)$
2. $u_1 = (-2,1,0), u_2 = (3,-1,1), u_3 = (2,0,-2), u = (1,3,1)$.

Đáp số : 1) u *là tổ hợp tuyến tính của* u_1, u_2, u_3;

2) u *là tổ hợp tuyến tính của* u_1, u_2, u_3.

Bài số 6. Hãy biểu diễn x thành tổ hợp tuyến tính của u, v, w. Trong đó

1. $x = (7, -2, 15),\ u = (2, 3, 5),\ v = (3, 7, 8),\ w = (1, -6, 1)$.
2. $x = (1, 4, -7, 7), u = (4, 1, 3, -2), v = (1, 2, -3, 2), w = (16, 9, 1, -3)$.

Đáp số : 1) $x = 6u - 2v + w$ *; 2)* $x = 3u + 5v - w$.

Bài số 7. Trong không gian các ma trận thực vuông cấp hai $M_2(\mathbb{R})$, cho bốn vectơ

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hỏi vectơ u có phải là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 hay không ?

Đáp số : u *là tổ hợp tuyến tính của* u_1, u_2, u_3.

Bài số 8. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1,-2,3), u_2 = (0,1,-3)$. Tìm m để vectơ $u = (1, m, -3)$ là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2.

Đáp số : $m = 0$.

Bài số 9. Hãy xác định m sao cho x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w :

1. $u = (2, 3, 5)$, $v = (3, 7, 8)$, $w = (1, -6, 1)$, $x = (7, -2, m)$.
2. $u = (3, 2, 5)$, $v = (2, 4, 7)$, $w = (5, 6, m)$, $x = (1, 3, 5)$.

Đáp số : 1) $m = 15$ *; 2)* $m \neq 12$.

Bài số 10. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, các hệ vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

1. $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)$.
2. $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (2,3,1)$.

Đáp số : 1) độc lập; 2) phụ thuộc.

Bài số 11. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, các hệ véctơ sau là độc lập hay phụ thuộc tuyến tính

1. $u_1 = (-1, 2, 0, 1), u_2 = (1, 2, 3, -1), u_3 = (0, 4, 3, 0)$.
2. $u_1 = (1, 2, 3, 2), u_2 = (-1, 2, 1, -2), u_3 = (1, -3, -2, 2)$.
3. $u_1 = (1, 0, 0, -1), u_2 = (2, 1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 2, 1)$.

Đáp số : 1) phụ thuộc; 2) phụ thuộc; 3) độc lập.

Bài số 12. Trong không gian các ma trận thực vuông cấp hai $M_2(\mathbb{R})$, cho hệ gồm 4 ma trận như sau:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng hệ trên độc lập tuyến tính.

Hướng dẫn : Xét hệ thuần nhất tương ứng và chứng minh nó có nghiệm duy nhất.

Bài số 13. Biểu thị ma trận $E=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các ma trận sau

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Đáp số : $E=3A-2B-C$.

Bài số 14. Mỗi hệ vectơ sau đây có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không

1. $\{v_1=(1,1,1), v_2=(2,2,0), v_3=(3,0,0)\}$.
2. $\{v_1=(2,-1,3), v_2=(4,1,2), v_3=(8,-1,8)\}$.

Đáp số : 1) sinh ra $\mathbb{R}^3$*; 2) không sinh ra* $\mathbb{R}^3$.

Bài số 15. Hệ vectơ nào trong các hệ vectơ sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

1. $S=\{\alpha_1=(1,2,3),\ \alpha_2=(0,2,3)\}$.
2. $S=\{\alpha_1=(1,2,3),\ \alpha_2=(0,2,3),\ \alpha_3=(0,0,5)\}$.
3. $S=\{\alpha_1=(1,1,2),\ \alpha_2=(1,2,5),\ \alpha_3=(0,1,3)\}$.
4. $S=\{\alpha_1=(-1,0,1), \alpha_2=(-1,1,0), \alpha_3=(1,-1,1), \alpha_4=(2,0,5)\}$.

Đáp số : 1) không là cơ sở; 2) là cơ sở; 3) không là cơ sở; 4) không là cơ sở.

Bài số 16. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, xét hệ vectơ:

$$S=\{\alpha_1=(1,1,1), \alpha_2=(1,1,2), \alpha_3=(1,2,3)\}$$

1. Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2. Tìm tọa độ của $x=(6,9,14)$ trong cơ sở S.
3. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang cơ sở chính tắc.

Đáp số : 1) $|A_S|=-1$*; 2)* $[x]_S^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; 3) $P(S\to S_0)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Bài số 17. Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$, cho hệ vector

$$S=\{u_1=(1,6,9),\ u_2=(1,-4m,-1),\ u_3=(-1,-2,-5)\}.$$

1. Định m để hệ vector trên là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2. $m=-1$, tìm tọa độ $x=(1,2,3)$ đối với cơ sở S.

3. Với $m = 0$, tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang cơ sở chính tắc.

Đáp số: 1) $m \neq 1$; *2)* $[x]_S = \begin{pmatrix} -0,125 \\ 0,25 \\ -0,875 \end{pmatrix}$; *3)* $P(S \to S_0) = \begin{pmatrix} -0,125 & 0,375 & -0,125 \\ 0,75 & 0,25 & -0,25 \\ -0,375 & 0,625 & -0,375 \end{pmatrix}$.

Bài số 18. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của các hệ phương trình thuần nhất sau:

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

Đáp số : 1) cơ sở $W = \{u_1 = (-1,-1,4,0),\ u_2 = (0,-1,0,1)\}$ và số chiều $\dim W = 2$.

2) cơ sở $W = \{(-1,1,1)\}$ và số chiều $\dim W = 1$.

3) $W = \{(0,0,0)\}$ và số chiều $\dim W = 0$.

4) cơ sở $W = \{(3,-4,1\}$ và số chiều $\dim W = 1$.

Bài số 19. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét tập hợp :

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$$

1. Chứng tỏ rằng W là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.
2. Tìm một cơ sở và số chiều cho W.
3. Kiểm tra xem các vectơ sau có nằm trong W không ?

$u=(1,\,1,\,0,-1)$, $v=(1,\,0,\,0,\,-1)$, $w=(1,\,0,\,-1,\,0)$.

Đáp số : 1) Dùng định nghĩa;

2) cơ sở của $W\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,01)\}$*,* $\dim W=3$*;*

3) $u\in W;\ v,w\notin W$.

Bài số 20. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ :

$$S=\{\alpha_1=(0,1,1,1),\ \alpha_2=(1,0,1,1),\ \alpha_3=(1,1,0,1),\ \alpha_4=(1,1,1,0)\}$$

1. Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.
2. Tìm tọa độ của vectơ $x=(1,1,1,1)$ trong S.

Đáp số : 1) $|A_S|=-3$*; 2)* $[x]_S^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Bài số 21. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$S_1=\{u_1=(1,1,0),u_2=(0,1,1),u_3=(1,0,1)\}$$

$$S_2=\{v_1=(2,1,1),v_2=(1,2,1),v_3=(1,1,2)\}$$

tìm ma trận đổi cơ sở từ cơ sở S_1 đến S_2 và ma trận đổi cơ sở từ cơ sở S_2 đến S_1.

Đáp số: $P(S_1\to S_2)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $P(S_2\to S_1)=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

Bài số 22. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các hệ vectơ

$$S_1=\{u_1=(1,1,1),u_2=(1,1,2),u_3=(1,2,3)\}$$

$$S_2=\{v_1=(2,1,-1),v_2=(3,2,5),v_3=(1,-1,m)\}$$

1. Chứng minh rằng S_1 là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2. Tìm m để S_2 là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
3. Với $m=0$. Tìm ma trận chuyển $P(S_1\to S_2)$ và $P(S_2\to S_1)$.

Đáp số : 1) $|A_S|=-1$*; 2)* $m\neq -20$.

3) $P(S_1\to S_2)=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $P(S_2\to S_1)=\begin{pmatrix}1/4 & 0 & 0\\ 1/4 & 2/5 & 3/5\\ -1/4 & -1/5 & -4/5\end{pmatrix}$.

Chương 4

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

4.1. Giới hạn của dãy số thực

4.1.1. Định nghĩa dãy, giới hạn của dãy số thực

Cho hàm số

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) = x_n \end{aligned}$$

Ký hiệu: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n\}$.

Định nghĩa: Cho $a \in \mathbb{R}$, dãy $\{x_n\}$ có giới hạn là a

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \qquad (4.1)$$

ký hiệu : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Dãy có giới hạn được gọi là dãy hội tụ, ngược lại được gọi là dãy phân kỳ.

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa tính giới hạn của dãy số có số hạng tổng quát: $x_n = \dfrac{3n+1}{n}$.

Giải

Ta có

$$x_n = 3 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow x_n - 3 = \frac{1}{n}$$

Theo định nghĩa giới hạn của dãy số (4.1), ta có

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \text{ xét } |x_n - 3| = \left|\frac{3n+1}{n} - 3\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \varepsilon \Leftrightarrow n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 3.$$

4.1.2. Các tính chất và các định lý về giới hạn của dãy số thực

4.1.2.1. Giới hạn duy nhất: Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.

4.1.2.2. Định lý

i) $\{x_n\}$ *hội tụ thì* $\{x_n\}$ *bị chặn* $\Leftrightarrow \exists M > 0, |x_n| < M$.

ii) $\{x_n\}$ *hội tụ thì* $\{|x_n|\}$ *hội tụ tuyệt đối :* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

4.1.2.3. Định lý (tiêu chuẩn kẹp)

Cho 3 dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$

Nếu $x_n \le y_n \le z_n, \ \forall n \ge n_0$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

4.1.2.4. Định nghĩa

i) $\{x_n\}$ là dãy tăng : $x_n \le x_{n+1}$, tăng nghiêm cách (nghiêm ngặt) : $x_n < x_{n+1}$.

ii) $\{x_n\}$ là dãy giảm : $x_n \ge x_{n+1}$, giảm nghiêm cách (nghiêm ngặt) : $x_n > x_{n+1}$.

Dãy tăng và dãy giảm gọi chung là dãy đơn điệu.

4.1.2.5. Định lý

Một dãy tăng và bị chặn trên thì có giới hạn. Một dãy giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

4.1.2.6. Các phép tính về giới hạn

Giả sử các dãy số x_n và y_n có giới hạn hữu hạn như sau:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Ta có

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda a$ (λ là hằng số),

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ ($b \ne 0$.

4.1.2.7. Số e

Cho hai dãy số : $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \ y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

i) $\{x_n\}$ là dãy tăng.

ii) $\{y_n\}$ là dãy giảm.

iii) $x_n < y_n$.

Định nghĩa: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

4.1.2.8. Giới hạn vô cùng

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A, \exists n_0, \forall n \ge n_0 \Rightarrow x_n \ge A$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A, \ \exists n_0, \forall n \ge n_0 \Rightarrow x_n \le A$.

4.1.2.9. Một số giới hạn thường dùng

i) $p>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}=0$, iv) $\alpha\in\mathbb{R},\ p>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n}=0$,

ii) $a>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, v) $|x|<1,\ \lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,

Ví dụ 2. Tính giới hạn của dãy số có số hạng tổng quát: $x_n=\dfrac{1}{n}\sin n$

Giải

Ta có: $-\dfrac{1}{n}\le\dfrac{1}{n}\sin n\le\dfrac{1}{n}$, mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

Vậy : $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Ví dụ 3. Tính giới hạn: $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt[3]{n^2+1}-1\right)^3}{\sqrt[3]{n^6+2n+1}}$

Giải

Ta có

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-1\right)^3}{\sqrt[3]{n^6\left(1+\frac{2}{n^5}+\frac{1}{n^6}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-\frac{1}{n^{2/3}}\right)^3}{n^2\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n^5}+\frac{1}{n^6}\right)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-\frac{1}{n^{2/3}}\right)^3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n^5}+\frac{1}{n^6}\right)}}=1.$$

4.1.3. Một số dãy số thực đặc biệt

4.1.3.1. Cấp số cộng

a. Định nghĩa: Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases}x_1=a\\ x_{n+1}=x_n+r\end{cases},\quad n\in\mathbb{N}^*$$

gọi là cấp số cộng; r cộng là công sai.

b. Tính chất: Cho cấp số cộng $\{x_n\}$ với công sai là r. Khi đó, ta có

$$x_n = x_1 + (n-1)r.$$

c. Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng: Cho cấp số cộng $\{x_n\}$ với công sai là r, đặt

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Ta có

$$s_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n) = nx_1 + \frac{n(n-1)}{2}r.$$

4.1.3.2. Cấp số nhân

a. Định nghĩa: Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n \cdot q \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

gọi là cấp số nhân; q cộng là công bội.

b. Tính chất: Cho cấp số nhân $\{x_n\}$ với công bội là q. Khi đó, ta có

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$$

c. Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân: Cho cấp số nhân $\{x_n\}$ với công bội là r, đặt

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Ta có

$$s_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \quad (q \neq 1)$$

d. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $s_n = \dfrac{x_1}{1-q}, \quad (q \neq 1)$

Ví dụ 4. Xây dựng công thức tính số tiền trong tương lai.

Giả sử đầu mỗi tháng bạn gởi vào tài khoản tiết kiệm ở ngân hàng a triệu đồng. Hỏi sau n tháng số tiền bạn có là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất $i\%$ /tháng.

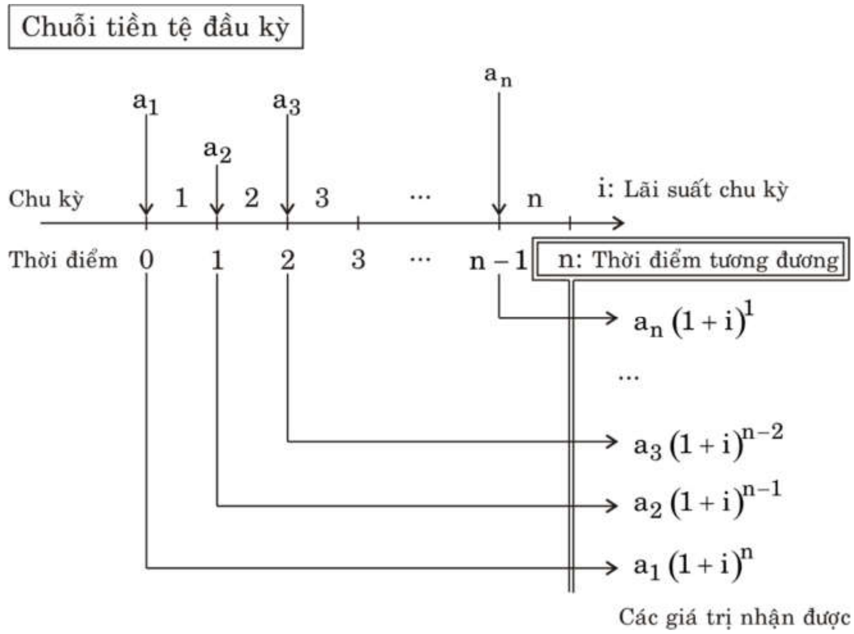
Giải

Gọi V_n là số tiền nhận được trong tương lai

Xét chuỗi tiền tệ $a_1, a_2, ..., a_n$ đầu tư vào đầu các chu kỳ đánh số lần lượt là 0, 1, …, $n-1$ nhằm mục đích thành lập một khoản vốn vào cuối chu kỳ thứ n mà ta chọn làm *thời điểm tương đương*.

Tổng các giá trị nhận được của các kỳ khoản vào cuối kỳ thứ n gọi là *giá trị nhận được* của chuỗi tiền tệ đầu kỳ, ký hiệu V_n.

Ta có sơ đồ của chuỗi tiền tệ sau:



Tổng số tiền nhận được trong tương lai

$$V_n = a_n(1+i) + a_{n-1}(1+i)^2 + \cdots + a_1(1+i)^n$$

Trong trường hợp này, các kỳ khoản có chung giá trị là a, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$. Giá trị nhận được V_n trở thành

$$V_n = a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots + a(1+i)^n$$

Áp dụng công thức tổng của cấp số nhân với $x_1 = a(1+i)$ và công bội là $q = 1+i$

Ta có

$$V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Áp dụng:

+) Số tiền đầu mỗi tháng gởi ngân hàng (kỳ khoản): $a = 3$ triệu.

+) Số tháng (số kỳ khoản): $n = 60$ tháng.

+) Lãi suất: $i = 0,75\%$ /tháng

Ta cần tính V_{60}

Áp dụng công thức:

$$V_{60} = 3(1+0,75\%)\frac{(1+0,75\%)^{60} - 1}{0,75\%} = 227,9695$$

Vậy sau 5 năm (60 tháng) số tiền sẽ là 227,9695 triệu đồng.

4.2. Hàm số một biến số

4.2.1. Các khái niệm cơ bản về hàm số

Các đại lượng biến thiên nhận giá trị bằng các số thực, thường được ký hiệu bởi các chữ cái thường như $x, y, z,...$ được gọi là các biến số.

Tập các giá trị mà biến nhận được gọi là *Miền biến thiên* hay *Tập xác định* của biến số đó. Người ta thường ký hiệu tập xác định bởi các chữ cái in hoa như $X, Y, Z,...$ dễ nhận thấy $X, Y, Z,...$ là tập con của tập số thực $\mathbb{R}$.

Cho x và y là hai biến số, nếu có một quy luật f tương ứng mỗi giá trị của biến số $x \in X$ với một giá trị *xác định* và *duy nhất* của biến số $y \in Y$, thì f được gọi là một hàm số xác định trên X, lấy giá trị trên Y và viết là $y = f(x)$. Hay ta còn nói, f là một hàm đi từ X vào Y. Khi đó, x gọi là đối số hay biến độc lập, y gọi là hàm số hay biến phụ thuộc. Tập X gọi là tập xác định của hàm số ký hiệu là D_f. Nó thường là một khoảng hay đoạn số thực.

Tập $f\left(X\right) = \left\{y = f(x) \in Y \middle| x \in D_f\right\} \subseteq Y \subset \mathbb{R}$, được gọi là tập giá trị của hàm số và ký hiệu là W_f.

Tập $G_f = \left\{M(x,y) \middle| y = f(x),\ x \in D_f\right\}$, gọi là đồ thị của hàm số $f(x)$. Nó thường là một đường thẳng hoặc đường cong trong mặt phẳng.

Chú ý: Khi hàm số, thường người ta chưa cho trước tập xác định, khi đó tập xác định của hàm số $f(x)$ được hiểu như sau:

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} | y = f(x) \text{ có nghĩa}\}$$

và gọi là tập xác định tự nhiên của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 5. Cho hàm số:

$$y = f(x) = \frac{3}{x-2}$$

Tập xác định tự nhiên của nó là $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x - 2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{2\right\}$.

4.2.2. Hàm số hợp

Giả sử có hai hàm số $X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} Y$, trong đó hàm $u = f(x)$ xác định trong miền X và nhận giá trị trong miền U, hàm $y = g(u)$ xác định trong miền U và nhận giá trị trong miền Y.

Khi đó, hàm số cho tương ứng mỗi giá trị x thuộc miền X với một và chỉ một giá trị y theo quy luật: $y = g(u) = g\left[f(x)\right]$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $y = g(u)$ và $u = f(x)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x) = x^3$, $g(x) = x + 1$ khi đó ta có:

$$f\left[g(x)\right] = \left[g(x)\right]^3 = (x+1)^3 \text{ và } g\left[f(x)\right] = f(x) + 1 = x^3 + 1$$

4.2.3. Hàm số ngược

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên X và nhận giá trị trên Y. Nếu với mọi $y_0 \in Y$ đều tồn tại duy nhất $x_0 = g(y_0) \in X$ thì g được gọi là hàm ngược của hàm số $f(x)$.

Ký hiệu: $x = f^{-1}(y)$.

Theo thói quen sử dụng ký hiệu hàm số chúng ta thường viết: $y = f^{-1}(x)$

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x) = x^3$. Hàm ngược của $f(x)$ là $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Chú ý: Hai hàm ngược của nhau thì đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất.

4.2.4. Các hàm số sơ cấp cơ bản

4.2.4.1 Hàm số lũy thừa và hàm số căn thức

a. Hàm số lũy thừa: $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}$

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

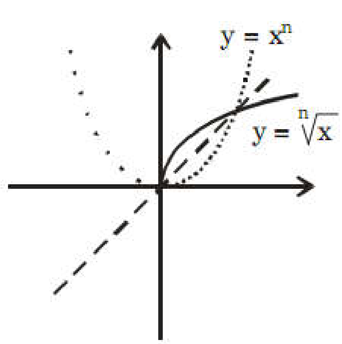
b. Hàm số căn thức: $y = \sqrt[n]{x}$

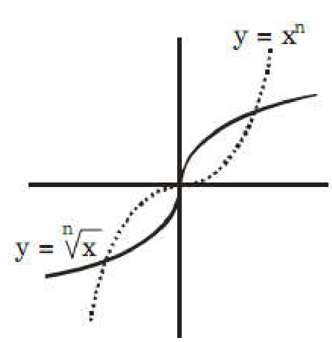
Tập xác định $D = \mathbb{R}$ Khi n là số lẻ

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \text{, với mọi } a, b \in \mathbb{R}$$

Tập xác định $D = [0, +\infty)$ Khi n là số chẵn

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \text{, với mọi } a, b \ge 0$$





4.2.4.2. Hàm số mũ và hàm số logarit

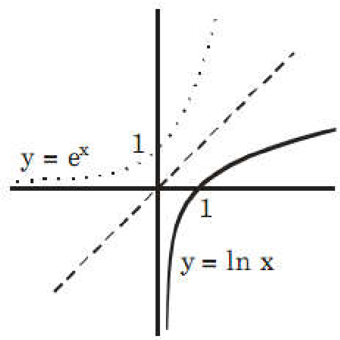
a. Hàm số mũ : $y = e^x$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

b. Hàm số logarit : $y = \ln x$ là hàm ngược của hàm e^x

Tập xác định : $D = (0, +\infty)$

$$b = \ln a \Leftrightarrow a = e^b \quad \text{với mọi } a > 0, b \in \mathbb{R}$$



Các hàm mũ và logarit cơ số $0 < a \neq 1$ bất kỳ được khảo sát bằng cách chuyển về các hàm mũ và logarit cơ số e thông qua các đẳng thức sau

$a^b = e^{b\ln a}$, với mọi $b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$.

$\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$, với mọi $b > 0, 0 < a \neq 1$.

4.2.4.3. Hàm số lượng giác và lượng giác ngược

a. Các hàm lượng giác: $y = \sin x,\ y = \cos x$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, tuần hòan với chu kỳ 2π

b. Các hàm lượng giác ngược: $y = \arcsin x,\ y = \arccos x$

Hàm số $y = \sin x$ thu hẹp trên miền $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ cho ta hàm lượng giác ngược là $y = \arcsin x$. Tập xác định: $D = [-1, 1]$.

$$b = \arcsin x \Leftrightarrow \sin b = a \text{ , với mọi } -1 \leq a \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$$

Hàm số $y = \cos x$ thu hẹp trên miền $[0, \pi]$ cho ta hàm lượng giác ngược là $y = \arccos x$. Tập xác định: $D = [-1, 1]$

$$b = \arccos x \Leftrightarrow \cos b = a \text{, với mọi } -1 \le a \le 1,\ 0 \le b \le \pi$$

c. Các hàm lượng giác: $y = \tan x,\ y = \cot x$ tuần hòan với chu kỳ π

Tập xác định của hàm số $y = \tan x$, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$

Tập xác định của hàm số $y = \cot x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{ n\pi | n \in \mathbb{Z} \}$

d. Các hàm lượng giác ngược: $y = \operatorname{arctan} x,\ y = \operatorname{arccot} x$

Hàm số $y = \tan x$ thu hẹp trên miền $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ cho ta hàm lượng giác ngược $y = \arctan x$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$b = \arctan a \Leftrightarrow \tan b = a \text{, với mọi } a \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}.$$

Hàm số $y = \cot x$ thu hẹp trên miền $(0, \pi)$ cho ta hàm lượng giác ngược $y = \operatorname{arccot} x$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$b = \operatorname{arccot} a \Leftrightarrow \cot b = a \text{, với mọi } a \in \mathbb{R}, 0 < b < \pi.$$

4.2.5. Dáng điệu hàm số

4.2.5.1. Hàm đơn điệu

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tăng (đồng biến) trên khoảng (a, b) nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \text{, ta có : } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm giảm (nghịch biến) trên khoảng (a, b) nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \text{, ta có : } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Hàm số tăng (giảm) được gọi là hàm số đơn điệu.

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$. Ta có

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \ x_1 < x_2 \text{ ta có } f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2)$$

Vậy hàm số đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

4.2.5.2. Hàm số chẵn và hàm số lẻ

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên miền xác định X nếu với mọi $x \in X$ ta luôn có $-x \in X$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên miền xác định X nếu với mọi $x \in X$ ta luôn có $-x \in X$ và $f(-x) = -f(x)$.

Ví dụ 9. Hàm số $f(x) = \sin x$ là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$ và hàm $g(x) = \cos x$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

4.2.5.3. Hàm số bị chặn

Hàm số $f(x)$ được gọi là bị chặn dưới, (bị chặn trên) trên miền xác định X nếu tồn tại số thực m, (M) sao cho $f(x) \geq m$, $(f(x) \leq M)$, $\forall x \in X$.

Hàm số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới được gọi là hàm số bị chặn.

Ví dụ 10. Hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ bị chặn trên bởi 1 và bị chặn dưới bởi -1 trên $\mathbb{R}$.

4.2.5.4. Hàm số tuần hoàn

Hàm số $f(x)$ xác định trên miền X được gọi là hàm số tuần hoàn nếu $\exists T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sao cho $\forall x \in X$, ta luôn có $x + T \in X$ và $f(x+T) = f(x)$. Số $T > 0$ nhỏ nhất thỏa mãn định nghĩa được gọi là chu kỳ của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 11.

Hàm số $\sin x$ và $\cos x$ là các hàm tuần toàn trên $\mathbb{R}$ với chu kỳ $T = 2\pi$ vì:

$$\sin(x + k2\pi) = \sin(x) \text{ và } \cos(x + k2\pi) = \cos(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Hàm số $\tan x$ và $\cot x$ là các hàm tuần toàn với chu kỳ $T = \pi$ vì:

$$\tan(x + k\pi) = \tan(x), \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ và } \cot(x + k2\pi) = \cot(x),\ x \neq k\pi.$$

4.2.6. Một số hàm trong kinh tế

4.2.6.1. Hàm sản xuất ngắn hạn

Để tiến hành sản xuất, đầu tiên chúng ta cần các yếu tố đầu vào là vốn (K) và lao động (L). Trong ngắn hạn, người ta giả thiết K là không thay đổi, khi đó sản lượng đầu ra Q sẽ phụ thuộc hàm số vào yếu tố đầu vào L và gọi là *hàm sản xuất ngắn hạn:*

$$Q = f(L),\ L \geq 0$$

Ví dụ 12. Cho hàm sản xuất ngắn hạn

$$Q = 120.L^{\frac{2}{3}};\ \ Q = a.L^{\alpha}(a > 0, 0 < \alpha < 1)$$

4.2.6.2. Hàm chi phí (tổng chi phí)

+) Chi phí TC phụ thuộc đầu ra Q: $TC = TC(Q)$, $Q \geq 0$

Ví dụ 13. Cho hàm chi phí phụ thuộc vào sản lượng Q

$$TC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 1500,\ Q \geq 0$$

$$TC(Q) = 30.e^{0,3Q} + 200$$

$$TC(Q) = 3Q^2 + 7Q + 243$$

+) Chi phí TC phụ thuộc đầu vào L:

$$TC = p_L.L = TC(L),\ L \geq 0$$ (p_L giá thuê một đơn vị lao động).

Ví dụ 14. Cho hàm chi phí phụ thuộc vào lao động L

$$TC(L) = p_L \cdot L = 3.L \quad (L \geq 0,\ p_L = 3).$$

4.2.6.3. Hàm doanh thu (tổng doanh thu)

Doanh thu TR phụ thuộc đầu ra Q:

$$TR = P.Q = TR(Q),\ Q \geq 0$$ (P ký hiệu là giá hàng hóa).

Ví dụ 15. Cho hàm doanh thu phụ thuộc vào sản lượng Q

$$TR(Q) = 1200Q - 3Q^2,\ Q \geq 0$$

Doanh thu TR phụ thuộc đầu vào L :

$$TR = P.Q = P.f(L) = TR(L),\ L \geq 0$$ (P ký hiệu là giá hàng hóa)

Ví dụ 16. Cho hàm doanh thu phụ thuộc vào lao động L

$$TR(L) = 5.300\sqrt{L} = 1500\sqrt{L},\ L \geq 0 \ (P = 5;\ Q = 300\sqrt{L}).$$

4.2.6.4. Hàm lợi nhuận (tổng lợi nhuận)

Lợi nhuận π được tính bằng hiệu giữa doanh thu TR và chi phí TC:

+) Lợi nhuận π phụ thuộc đầu ra: $\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$

Ví dụ 17. Cho hàm doanh thu $TR(Q) = 1200Q - 3Q^2,\ Q \geq 0$ và hàm chi phí

$$TC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 1500,\ Q \geq 0$$

Suy ra hàm lợi nhuận phụ thuộc vào sản lượng Q

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = -Q^3 + 3Q^2 + 1060Q - 1500,\quad Q \geq 0$$

+) Lợi nhuận π phụ thuộc đầu vào: $\pi(L) = TR(L) - TC(L)$.

Ví dụ 18. Cho hàm sản xuất: $Q = 300\sqrt{L}$, giá một đơn vị lao động là 3, giá sản phẩm là 5. Xác định hàm lợi nhuận. Ta có

+) Hàm doanh thu : $TR(L) = PQ = 5.300\sqrt{L} = 1500\sqrt{L}$

+) Hàm chi phí: $TC(L) = p_L L = 3L$

+) Suy ra hàm lợi nhuận phụ thuộc vào lao động L

$$\pi(L) = TR(L) - TC(L) = 1500\sqrt{L} - 3.L,\ L \ge 0.$$

4.2.6.5. Hàm chi tiêu

Chi tiêu C phụ thuộc thu nhập Y: $C = C(Y),\ Y \ge 0.$

Ví dụ 19. Cho hàm chi tiêu phụ thuộc vào mức thu nhập như sau:

$$C(Y) = aY + b\ \ (0 < a < 1,\ b > 0),\ Y \ge 0.$$

4.2.6.6. Hàm tiết kiệm

Tiết kiệm S phụ thuộc thu nhập Y: $S = S(Y),\ Y \ge 0.$

Ví dụ 20. Cho hàm tiết kiệm phụ thuộc vào mức thu nhập như sau:

$$S(Y) = 0{,}3Y + 0{,}1.\sqrt{Y} + 100,\ Y \ge 0.$$

4.2.6.7. Hàm cung và hàm cầu một loại hàng hóa

Lượng cung và lượng cầu hàng hóa phụ thuộc vào giá hàng hóa:

+) Hàm cung: $Q_S = S(P),\ P > 0.$

+) Hàm cầu: $Q_D = D(P),\ P > 0.$

Ví dụ 21. Cho hàm cung và hàm cầu dạng tuyến tính như sau:

+) Hàm cung: $S(P) = aP - b\ \ (a, b > 0).$

+) Hàm cầu: $D(P) = -cP + d\ \ (c, d > 0).$

4.3. Giới hạn hàm số

4.3.1. Các định nghĩa giới hạn

4.3.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f có giới hạn là L khi x tiến tới a

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Ký hiệu : $\lim_{x \to a} f(x) = L.$

4.3.1.2. Định lý

Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D \setminus \{x_0\}, x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to L. \quad (4.3)$$

Ví dụ 22. Chứng minh rằng không tồn tại $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}.$

Giải

Lấy $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ khi $n \to \infty$ và $x_n^{/} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$ khi $n \to \infty$

Khi đó ta có

$$f\left(x_n\right) = \sin\left(2n\pi\right) = 0 \text{ và } f\left(x_n^{/}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

Vậy khi $x \to 0$ thì hàm $f\left(x\right)$ không có giới hạn.

4.3.1.3. Các phép toán về giới hạn

Nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ và $k \in \mathbb{R}$ là hằng số, thì ta có

i) $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) + g(x)\right] = A + B$,

ii) $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) - g(x)\right] = A - B$,

iii) $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = A \cdot B$,

iv) $\lim\limits_{x \to a}\left[kf(x)\right] = kA$,

v) $\lim\limits_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

với điều kiện vế phải không xuất hiện các dạng vô định $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $\infty - \infty$.

4.3.1.4. Định lý giới hạn kẹp

Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)$ khi $x \to a$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

Vậy $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Ví dụ 23. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin x$.

Giải

Ta có

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin x \le \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

mà

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0.$$

Theo tiêu chuẩn kẹp, ta có $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin x = 0$.

4.3.1.5. Giới hạn một phía

Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f có giới hạn là L khi x tiến tới a từ bên phải, ký hiệu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L,$ ta có

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon.$$

f có giới hạn là L khi x tiến tới a từ bên trái, ký hiệu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L,$ ta có

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < a - x < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon.$$

4.3.2. Giới hạn của các hàm sơ cấp cơ bản

4.3.2.1. Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{khi } \alpha > 0 \\ \infty & \text{khi } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \lim_{x \to \infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{khi } \alpha > 0 \\ 0 & \text{khi } \alpha < 0 \end{cases}$$

4.3.2.2. Hàm số mũ

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{khi } a > 1 \\ +\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 1 \\ 0 & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

4.3.2.3. Hàm số logarit

+) Với $a > 1$: $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty;\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty.$

+) Với $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty;\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty.$

4.3.2.4. Các hàm lượng giác

Các hàm lượng giác $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ không có giới hạn khi $x \to \pm\infty.$

Hàm số $\tan x$ có giới hạn vô hạn khi $x \to \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Hàm số $\cot x$ có giới hạn vô hạn khi $x \to k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

4.3.3. Các dạng vô định

Dạng $\dfrac{0}{0}$ và $\dfrac{\infty}{\infty}$ xảy ra khi ta tính giới hạn của biểu thức $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó cả hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ cùng có giới hạn là 0 hoặc cùng có giới hạn là ∞.

Dạng $\infty - \infty$ xảy ra khi ta tính giới hạn của biểu thức $f(x) - g(x)$, trong đó cả hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ cùng dấu và cùng có giới hạn là ∞.

Dạng $0\cdot\infty$ xảy ra khi ta tính giới hạn của biểu thức $f(x)\cdot g(x)$, trong đó hàm $f(x)$ có giới hạn là 0 và hàm $g(x)$ có giới hạn là ∞ hoặc ngược lại.

Dạng 1^∞, 0^0, ∞^0 xảy ra khi ta tính giới hạn của biểu thức $[f(x)]^{g(x)}$, trong đó hàm $f(x)$ là một hàm dương. Ta thường gặp:

+) Dạng 1^∞ nếu $f(x)\to 1$ và $g(x)\to\infty$;

+) Dạng 0^0 nếu $f(x)\to 0$ và $g(x)\to 0$;

+) Dạng ∞^0 nếu $f(x)\to +\infty$ và $g(x)\to 0$.

4.3.4. Các giới hạn cơ bản

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

k) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Ví dụ 24. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-4x+2}-\sqrt{3x^2+4x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-e^x\right)\left(1-\cos 3x\right)}{x^3+\sin^4 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-4x+2}-\sqrt{3x^2+4x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+3}{\sqrt{3x^2-4x+2}+\sqrt{3x^2+4x-1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{\left(\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{-4}{2\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-e^x\right)\left(1-\cos 3x\right)}{x^3+\sin^4 2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-9x^3\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\left(\frac{1-\cos 3x}{9x^2}\right)}{x^3\left(1+\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^4 16x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-9\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\left(\frac{1-\cos 3x}{9x^2}\right)}{1+\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^4 16x} = -\frac{9}{2}$$

(vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$)

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = e^2.$

4.4. Vô cùng bé và vô cùng lớn

4.4.1. Định nghĩa

Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là *vô cùng bé* khi $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0.$

Cho hai hàm số $\alpha(x), \beta(x)$ là hai vô cùng bé trong quá trình $x \to a$.

Giả sử tồn tại hữu hạn giới hạn:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k, \left(k \in \mathbb{R}\right)$$

+) Nếu $k=0$ thì ta nói $\alpha(x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn so với $\beta(x)$ và ký hiệu $\alpha(x)=o\left[\beta(x)\right]$.

+) Nếu $k \neq 0$ thì ta nói $\alpha(x), \beta(x)$ là hai vô cùng bé cùng bậc.

+) Nếu $k=1$ thì ta nói $\alpha(x), \beta(x)$ là hai vô cùng bé *tương đương* và ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là *vô cùng lớn* khi $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \infty$.

4.4.2. Các tính chất

a. Nếu $\alpha(x)$ là một vô cùng lớn khi $x \to a$ và $\alpha(x) \neq 0$ thì $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ là một vô cùng bé khi $x \to a$ và ngược lại.

b. Điều kiện cần và đủ để $f(x)$ có giới hạn là $b, (b \in \mathbb{R})$ khi và chỉ khi $f(x) = b + \alpha(x)$ trong đó $\alpha(x)$ là một vô cùng bé khi $x \to a$.

c. Giả sử khi $x \to a$ ta có các vô cùng bé tương đương:

$$\alpha(x) \sim \alpha^*(x) \text{ và } \beta(x) \sim \beta^*(x)$$

khi đó, nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$ thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$.

Ví dụ 25. Áp dụng vô cùng bé tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{e^x\cos x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3x + 4x^3}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{e^x\cos x - 1}$

Ta có:

$$e^{\sin x} - 1 \sim \sin x;\ e^x\cos x - 1 \sim x$$

Vậy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{e^x\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3x + 4x^3}$

Ta có:

$$\sin 2x \sim 2x;\ \arcsin^2 x \sim x^2;\ \arctan^2 x \sim x^2;$$

$$\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x \sim 2x;\ 3x + 4x^3 \sim 3x$$

Vậy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x-\arctan^2 x}{3x+4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

4.5. Hàm số liên tục

4.5.1. Các định nghĩa về hàm số liên tục

4.5.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0\in D$

i) f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in D, \left|x-x_0\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon. \qquad (4.4)$$

ii) f liên tục trên $D \Leftrightarrow f$ liên tục tại mọi điểm $x\in D$.

4.5.1.2. Định lý

Cho hàm số $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0\in D$

f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \forall (x_n)\subset D,\ x_n\to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)$. (4.5)

4.5.1.3. Hệ quả

f không liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \exists\left(x_n\right)\subset D,\ \left(x_n\to x_0\right)\wedge\left(f(x_n)\not\to f(x_0)\right)$. (4.6)

4.5.1.4. Liên tục một phía

i) f liên tục trái (phải) tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\right)$.

ii) f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại x_0.

Ví dụ 26. Xét tính liên tục của hàm số sau

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$$

Giải

Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi giá trị $x\neq 0$. Xét tại $x=0$ ta có

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1$$

Hàm số trên không liên tục tại 0 (vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$).

Ví dụ 27. Định m để hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+1 & \text{khi } x<1 \\ 3x+m & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$$

Giải

Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi giá trị $x\neq 1$. Xét tại $x=1$ ta có

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(3x+m\right)=3+m$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-3x+1)=-1$$

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)\Leftrightarrow 3+m=-1\Leftrightarrow m=-4.$$

4.5.2. Tính chất liên tục của hàm sơ cấp

4.5.2.1. Tính chất 1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng đóng $\left[a,b\right]$ và $f(a)\neq f(b)$ thì nó nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$, nghĩa là với mọi λ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ luôn tồn tại ít nhất số $c\in\left(a,b\right)$ sao cho $f(c)=\lambda$.

4.5.2.2. Tính chất 2. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng đóng $\left[a,b\right]$ và $f(a)\cdot f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in\left(a,b\right)$ sao cho $f(c)=0$ (hay c là nghiệm của phương trình $f(x)=0$).

4.5.2.3. Tính chất 3. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a,b\right]$ thì

+) $f(x)$ bị chặn trên $\left[a,b\right]$;

+) $f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\left[a,b\right]$, tức là tồn tại $c,d\in\left[a,b\right]$ sao cho

$$f(c)\le f(x)\le f(d),\ \forall x\in\left[a,b\right].$$

4.5.2.4. Tính chất 4. Nếu hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trên khoảng X thì

+) Miền giá trị của hàm số $y=f(x)$ là một khoảng Y;

+) Hàm số $y=f(x)$ có hàm số ngược $x=f^{-1}(y)$;

+) Hàm số ngược $x=f^{-1}(y)$ là hàm liên tục và đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trên Y.

Ví dụ 28. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x + 1 = 0$ có nghiệm trên đoạn $[0,1]$.

Giải

Đặt

$$f(x) = x^5 - 3x + 1$$

Ta nhận thấy hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ và đồng thời $f(0)\cdot f(1) = -1 < 0$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong đoạn $[0,1]$.

4.5.3. Các phép toán của hàm liên tục tại một điểm

4.5.3.1. Định lý 1

Cho hai hàm số $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0 \in D$

i) f, g liên tục tại x_0 thì $f \pm g, fg, kf\ (k \in \mathbb{R}), \frac{f}{g}, \left(g(x_0) \neq 0\right)$ đều liên tục tại x_0.

ii) f, g liên tục trên D thì $f \pm g, fg, kf\ (k \in \mathbb{R}), \frac{f}{g}, \left(g(x_0) \neq 0\right)$ đều liên tục trên D.

4.5.3.2. Định lý

Cho hàm số $D \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} D' \subset \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

i) f liên tục tại $x_0 \in D$ và g liên tục tại $y_0 = f(x_0) \in D' \Rightarrow g[f(x)]$ liên tục tại x_0.

ii) f liên tục trên D và g liên tục trên $D' \Rightarrow g[f(x)]$ liên tục trên D.

4.6. Đạo hàm

4.6.1. Khái niệm về đạo hàm

4.6.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của điểm x_0 (một khoảng đủ nhỏ chứa x_0).

Ký hiệu $\Delta x = x - x_0$ gọi là *số gia của đối số* (với $|\Delta x|$ đủ nhỏ), tương ứng $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là *số gia của hàm số.*

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4.7)$$

thì hàm số $f(x)$ được gọi là có đạo hàm tại điểm x_0 và kết quả của giới hạn này, được gọi là *đạo hàm* của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, ký hiệu là $f^{/}(x_0)$ hay $y^{/}(x_0)$.

Ví dụ 29. Tính đạo hàm của hàm số sau bằng định nghĩa

$$f(x)=x^3$$

Giải

Tập xác định của hàm số: $D_f=\mathbb{R}$

Với $x_0\in\mathbb{R}$, xét giới hạn

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2$$

Vậy $f^{/}(x_0)=3x_0^2$.

Ví dụ 30. Cho hàm số:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 3x}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

Tính đạo hàm của hàm số tại điểm 0.

Giải

Xét giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos 3x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{9x^2}\cdot 9=\frac{9}{2}.$$

Vậy hàm số có đạo hàm $f^{/}(0)=\dfrac{9}{2}$.

4.6.1.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

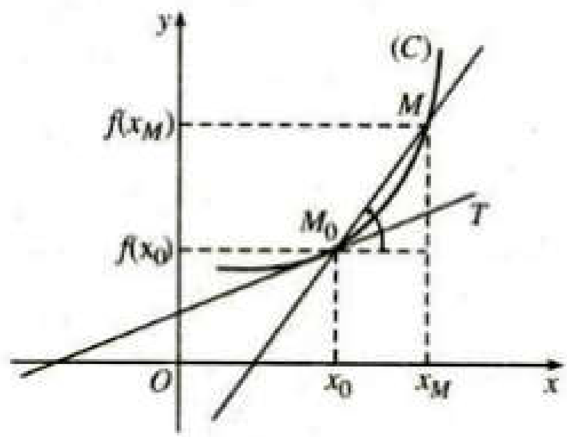
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị (C), một điểm M_0 cố định thuộc (C) có hoành độ x_0. Với mỗi điểm M thuộc (C) khác M_0, ta ký hiệu x_M là hoành độ của nó và k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn hạn hữu hạn $k_0=\lim\limits_{x_M\to x_0}k_M$. Khi đó đường thẳng

M_0T đi qua M_0 và có hệ số góc là k_0 là vị trí giới hạn của cát tuyến M_0M khi M di chuyển dọc theo (C) dần đến M_0.

Đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0, còn M_0 còn gọi là tiếp điểm.

Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, f(x_0))$. Ta có $f'(x_0) = \tan\alpha$

Phương trình tiếp tuyến đó là: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.



Ví dụ 31. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \sqrt{2}$.

Giải

Với $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow f(x_0) = f\left(\sqrt{2}\right) = 2$

Hệ số góc:

$$f'(x_0) = f'\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x^2$ có dạng:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Hay

$$y - 2 = 2\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow y = 2\sqrt{2}x - 2.$$

4.6.1.3. Ý nghĩa của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một lân cận của điểm x_0: $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi của giá trị hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, khi đối số x thay đổi một lượng nhỏ. Nói cách khác, tại điểm x_0 khi đối số x thay đổi một lượng nhỏ thì giá trị hàm số $f(x)$ sẽ thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $f'(x_0)$.

4.6.2. Bảng công thức các đạo hàm cơ bản

Dưới đây là bảng công thức tính đạo hàm của một số hàm sơ cấp cơ bản

1. $(c)' = 0$ (với c là hằng số)	9. $(\cos x)' = -\sin x$
2. $(x)' = 1$	10. $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	11. $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$	12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(e^x)' = e^x$	13. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	14. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	15. $(\text{arccot}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
8. $(\sin x)' = \cos x$	

4.6.3. Các quy tắc tính đạo hàm

Cho hai hàm số $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x \in (a,b)$ thì các hàm $f \pm g,\ gf,\ \dfrac{f}{g},\ (g(x) \neq 0)$ có đạo hàm x và

a) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x}{g^2(x)})$.

Ví dụ 32. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5 - 3x^3 + 4x^2 - x + 2$

b) $y = \frac{1-3x}{x+2}$

Giải

a) $y = x^5 - 3x^3 + 4x^2 - x + 2$

Đạo hàm của hàm số trên: $y' = 5x^4 - 9x^2 + 8x - 1$

b) $y = \frac{1-3x}{x+2}$

Đạo hàm của hàm số trên: $y' = \frac{(1-3x)'(x+2) - (1-3x)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{-7}{(x+2)^2}$.

Lưu ý

Nếu hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

4.6.4. Đạo hàm hàm hợp

Cho hàm số $(a,b) \xrightarrow{f} (c,d) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

Nếu f có đạo tại $x \in (a,b)$ và g có đạo hàm tại $y = f(x) \in (c,d)$ thì $g[f(x)]$ có đạo hàm tại $x \in (a,b)$ và $(g[f(x)])' = g'[f(x)] \cdot f'(x)$.

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, nếu $u = u(x)$ là một hàm có đạo hàm thì ta có bảng các công thức như sau:

1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$	8. $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
2. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	9. $(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$
3. $(e^u)' = e^u u'$	10. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
4. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	11. $(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
5. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$	12. $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	13. $(\text{arccot}\, u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	

Ví dụ 33. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \left(x^4 - 6x + 5\right)^{100}$

b) $y = \arctan(x^2 + 2x)$

Giải

a) $y = \left(x^4 - 6x + 5\right)^{100}$

Đạo hàm của hàm số trên

$$y' = 100\left(x^4 - 6x + 5\right)^{99}(4x^3 - 6)$$

b) $y = \arctan(x^2 + 2x)$

Đạo hàm của hàm số trên

$$y' = \frac{\left(x^2 + 2x\right)'}{1 + (x^2 + 2x)^2} = \frac{2x + 2}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1}$$

4.6.5. Đạo hàm của hàm ngược

Cho hàm số $f:(a,b) \to (c,d)$ song ánh khả vi thì $f^{-1}:(c,d) \to (a,b)$ khả vi và

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]},\ y \in (c,d). \qquad (4.8)$$

Ví dụ 34. Cho hàm số $f(x) = e^x$

Hàm ngược của hàm $f(x)$ là $f^{-1}(x) = \ln x$ và $f'(x) = e^x$.

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm ngược, ta có

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

4.6.6. Đạo hàm một phía

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận phải tại x_0. Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0 là giới hạn (nếu có) của tỉ số

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

khi $\Delta x \to 0^+$. Khi ấy đạo hàm phải tại x_0 được ký hiệu $f'_+(x)$.

Vậy

$$f_+^{/}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Tương tự

$$f_-^{/}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Hàm số có đạo hàm tại 0 khi và chỉ khi hàm số vừa có đạo hàm bên phải và hàm số vừa có đạo hàm bên trái, nghĩa là $f_+^{/}(x_0) = f_-^{/}(x_0)$.

Ví dụ 35. Cho hàm số : $f(x) = |x|$. Hàm số có đạo hàm tại 0 hay không?

Giải

Ta có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(0 + \Delta x\right) - f\left(0\right)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Đạo hàm bên phải:

$$f_+^{/}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f\left(0 + \Delta x\right) - f\left(0\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Đạo hàm bên trái:

$$f_-^{/}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f\left(0 + \Delta x\right) - f\left(0\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Tại điểm 0 hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm vì $f_+^{/}(0) \neq f_-^{/}(0)$.

4.6.7. Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số $f : \left(a, b\right) \to \mathbb{R}$, khả vi tại trên (a,b)

Ta có

$$\begin{aligned} f^{/} : \left(a, b\right) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{/}(x) = y^{/} \end{aligned}$$

Nếu $f^{/}$ khả vi tại x, ta viết $\left(f^{/}\right)^{/}(x) = f^{//}(x)$

Qui nạp : $f^{(n)} : \left(a, b\right) \to \mathbb{R}$, khả vi trên $\left(a, b\right)$, ta viết $\left(f^{(n)}\right)^{/}(x) = f^{(n+1)}(x)$.

Qui ước : $f^{(0)} = f$.

Mệnh đề : Nếu u, v là hai hàm khả vi cấp n trên khoảng (a, b). Ta có

$$\left(u\cdot v\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)} \tag{4.9}$$

Ví dụ 36. Tính đạo hàm cấp n của hàm số sau :

$$f(x)=\frac{1}{x+2}$$

Giải

Đạo hàm cấp 1

$$f^{/}(x)=(-1)(x+2)^{-2}$$

Đạo hàm cấp 2

$$f^{//}(x)=(-1)(-2)(x+2)^{-3}$$

Đạo hàm cấp 3

$$f^{(3)}(x)=(-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4}$$

Dự đoán đạo hàm cấp n

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)}.$$

4.7. Vi phân của hàm số

4.7.1. Định nghĩa vi phân

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên X. Giả sử $f(x)$ liên tục tại $x_0\in X$. Nếu số gia của hàm số $f(x)$ tại x_0 có thể biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta f(x)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x) \tag{4.10}$$

trong đó, A là một hằng số, $\alpha\left(\Delta x\right)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn Δx thì ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 và giá trị $A\cdot\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, ký hiệu là $df\left(x_0\right)$. Như vậy, ta có

$$df(x_0)=A\cdot\Delta x \tag{4.11}$$

4.7.2. Sự liên hệ giữa vi phân và đạo hàm

Hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và khi đó

$$df(x_0)=f^{/}\left(x_0\right)\cdot\Delta x \tag{4.12}$$

Nếu hàm số khả vi tại mọi điểm trong khoảng X thì ta nói hàm số khả vi trong X. Khi đó, ta có một hàm số xác định trên X gọi là biểu thức vi phân của hàm số, ký hiệu: $df(x)$ hay dy.

$$df(x) = dy = A \cdot \Delta x \tag{4.13}$$

Đặc biệt nếu $y = x$ thì $dx = \Delta x$. Do đó, biểu thức vi phân của hàm số $y = f(x)$ thường được viết dưới dạng:

$$df(x) = f^{/}(x)dx \tag{4.14}$$

4.7.3. Tính bất biến của biểu thức vi phân cấp 1

Xét hàm số hợp $y = f(x),\ x = x(t)$. Biểu thức vi phân của hàm số là

$$dy = y_t^{/}dt = \left(y_x^{/} \cdot x_t^{/}\right)dt = y_x^{/}dx \tag{4.15}$$

Như vậy, biểu thức vi phân giữ nguyên dạng trong trường hợp x là biến độc lập, cũng như x là biến trung gian.

4.7.4. Các quy tắc tính vi phân

Nếu các hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ khả vi tại điểm x_0 thì tại điểm đó ta có:

a. $d(u + v) = du + dv$

b. $d(u - v) = du - dv$

c. $d(ku) = kdu$ (k là hằng số)

d. $d(uv) = vdu + udv$

e. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad (v \neq 0)$

Ví dụ 37. Tính vi phân của hàm số $y = x\cos\frac{x}{2}$ tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$ khi $\Delta x = 0,01$.

Giải

Ta có: $y^{/} = \cos\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$

Tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$, ta có $y^{/}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

Vậy

$$dy\left(\frac{\pi}{2}\right) = y^{/}\left(\frac{\pi}{2}\right)\Delta x = \frac{4 - \pi}{400\sqrt{2}}.$$

4.7.5. Vi phân cấp cao

Định nghĩa: Vi phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ là vi phân của vi phân cấp $(n-1)$ của hàm số đó, ký hiệu là $d^n y$ hay $d^n f(x)$:

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$$

Khi x là biến độc lập, ta có:

$$d^n y = f^{(n)}(x)\left(dx\right)^n. \qquad (4.16)$$

Ví dụ 38. Tính vi phân cấp 2 của hàm số: $y = e^{2x}$

Giải

Ta có

$$dy = \left(e^{2x}\right)^{/} dx = 2e^{2x}dx.$$

$$d^2y = d\left(dy\right) = \left(2e^{2x}\right)^{/}\left(dx\right)^2 = 4e^{2x}\left(dx\right)^2.$$

4.8. Các định lý cơ bản về hàm số khả vi

4.8.1. Định lý Fermat

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trong lân cận điểm x_0 và đạt cực trị tại x_0. Nếu tại x_0 tồn tại đạo hàm $f^{/}\left(x_0\right)$ thì $f^{/}\left(x_0\right) = 0.$

4.8.2. Định lý Rolle

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $\left[a,b\right]$ và khả vi trên khoảng $\left(a,b\right)$. Nếu $f\left(a\right) = f\left(b\right)$ thì tồn tại điểm $c \in \left(a,b\right)$ sao cho $f^{/}\left(c\right) = 0.$

Ví dụ 39. Cho hàm số $f\left(x\right) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2$.

Chứng minh rằng phương trình $f^{/}(x) = 0$ có nghiệm.

Giải

Hàm số $f(x)$ xác định và khả vi trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, $f(1) = f(2) = 0.$

Theo kết quả của định lý Rolle, tồn tại $c \in \left(1,2\right)$ thỏa mãn $f^{/}\left(c\right) = 0.$

Vậy phương trình $f^{/}(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $\left(1,2\right)$.

4.8.3. Định lý Lagrange

Nếu hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $\left[a,b\right]$ và khả vi trên khoảng $\left(a,b\right)$ thì tồn tại điểm $c \in \left(a,b\right)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f^{/}(c)\left(b-a\right).$$

Ví dụ 40. Chứng minh rằng: $\ln\left(1+x\right) < x,\ x > 0.$

Giải

Đặt

$$f(x) = \ln\left(1+x\right) - x \text{ với } x > 0.$$

Ta có f liên tục và có đạo hàm:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \text{ trên } \left(0, x\right)$$

Áp dụng định lý Lagrange ta có

$$f(x) - f(0) = (x-0)f'(c),\ c \in \left(0, x\right)$$

hay

$$\ln(1+x) - x = x\left(\frac{-c}{1+c}\right) < 0$$

Vậy

$$\ln\left(1+x\right) < x,\ x > 0.$$

4.8.4. Định lý Cauchy

Nếu các hàm số $f(x), g\left(x\right)$ xác định, liên tục trên đoạn $\left[a, b\right]$ và khả vi trên khoảng $\left(a, b\right)$ và $g(x) \neq 0, \forall x \in \left(a, b\right)$ thì tồn tại điểm $c \in \left(a, b\right)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{4.17}$$

4.9. Một số ứng dụng của đạo hàm và vi phân

4.9.1. Quy tắc L'hospital khử dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Cho hai hàm số $f, g : \left(a, b\right) \to \mathbb{R}$ là hai hàm khả vi, với $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \left\{-\infty, +\infty\right\}$.

Nếu $\lim\limits_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ và $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$ hay $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = \infty$

thì $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

Ví dụ 41. Tính các giới hạn hàm số sau :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arctan 2x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\arctan 2x}$ (có dạng $\dfrac{0}{0}$)

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x}-1\right)'}{\left(\arctan 2x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}}{\dfrac{2}{1+4x^2}}=\dfrac{3}{2}$

Theo quy tắc L'Hospital, ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\arctan 2x}=\frac{3}{2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{x}$ (có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Xét $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left[\ln(2x+1)\right]'}{x'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{2x+1}=0$

Theo quy tắc L'Hospital, ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{x}=0.$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ (có dạng $0\cdot\infty$)

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$ (có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0.$

Theo quy tắc L'Hospital, ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0.$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ (có dạng 0^0)

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

Theo câu c), ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=e^0=1.$

4.9.2. Tính gần đúng

Chúng ta có kết quả là số gia hàm số tại điểm x_0 xấp xỉ với vi phân của hàm số tại điểm đó:

Ta có:

$$\Delta f\left(x_0\right) \approx df\left(x_0\right) \Leftrightarrow f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right) \approx f^{/}\left(x_0\right)\Delta x$$

Vậy

$$f\left(x_0+\Delta x\right) \approx f\left(x_0\right)+f^{/}\left(x_0\right)\Delta x. \tag{4.18}$$

Ví dụ 42. Tính gần đúng biểu thức sau:

$$A=\ln\left(1,005\right)$$

Giải

Đặt :

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f^{/}(x)=\frac{1}{x}$$

Với $x_0=1,\ \Delta x=0,005$

Ta có :

$$f(x) \approx f(x_0)+f^{/}(x_0)\Delta x$$

Suy ra

$$A=\ln\left(1,005\right) \approx \ln(1)+\frac{1}{1}\cdot 0,005=0,005\,.$$

4.9.3. Khảo sát tính tăng, giảm và cực trị của hàm số

Cho hàm số : $y=f(x)$

+) Bước 1. Tìm tập xác định

+) Bước 2. Tính đạo hàm và tìm điểm dừng

+) Bước 3. Tính giới hạn tại các đầu mút

+) Bước 4. Kẻ bảng biến thiên

+) Bước 5. Kết luận

Ví dụ 43. Khảo sát tính tăng, giảm và cực trị của hàm số sau :

$$f(x)=x\ln x$$

Bước 1. Tập xác định : $D=\left(0,+\infty\right)$

Bước 2. Đạo hàm : $f^{/}(x)=\ln x+1$

Cho $f^{/}(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow x=e^{-1}\in D$

Bước 3. Giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty;\ \lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$$

Bước 4. Bảng biến thiên

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$y^{/}$		$-$	0	$+$	
y	0		CT		$+\infty$

Bước 5. Kết luận

+) Hàm số giảm (nghịch biến) : $\left(0,\ e^{-1}\right)$

+) Hàm số tăng (đồng biến) : $\left(e^{-1},+\infty\right)$

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=e^{-1}$ với $f_{\min}=-e^{-1}$.

4.9.4. Khai triển Taylor – Maclaurin

Cho hàm số $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ khả vi đến cấp $n+1$. Khi ấy với $x_0,\ x\in(a,b)$ ta có công thức khai triển Taylor tại x_0 của hàm số $f(x)$ cóa dạng như sau :

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{/}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x) \qquad (4.19)$$

với

$$P(x)=f(x_0)+\frac{f^{/}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ gọi là đa thức Taylor.}$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1 \text{ gọi là phần dư.}$$

Tại $x_0=0$ thì công thức khai triển Taylor được gọi là công thức khai triển Maclaurin:

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{/}(0)}{1!}x+\frac{f^{//}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x) \qquad (4.20)$$

với phần dư

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\ c=\theta x,\ 0<\theta<1.$$

Một số công thức khai triển Maclaurin cơ bản

a) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}$

b) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$

c) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\cos\theta x\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

d) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\sin\theta x\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

e) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$$

Ví dụ 44. Khai triển Taylor của hàm số sau tới lũy thừa bậc 3

$$f(x)=\arctan x \text{ tại } x_0=1$$

Giải

Ta có : $f^{/}(x)=\frac{1}{1+x^2};\ f^{//}(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2};f^{///}(x)=\frac{-2(1-2x^2-3x^4)}{(1+x^2)^4}$

Với $x_0=1$, ta có $f^{/}(1)=\frac{1}{2};\ f^{//}(1)=-\frac{1}{2};\ f^{///}(1)=\frac{1}{2}$

Áp dụng công thức khai triển Taylor tại $x_0=1$, ta có

$$f(x)=f(1)+\frac{f^{/}(1)}{1!}(x-1)+\frac{f^{//}(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3+R_4(x)$$

Vậy:

$$\arctan x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3+R_4(x).$$

Ví dụ 45. Tính gần đúng số e với sai số không vượt quá 10^{-4}.

Giải

Đặt : $f(x)=e^x$

Ta có : $f^{/}(x)=e^x;\ f^{//}(x)=e^x;...;f^{(n)}(x)=e^x$

Suy ra

$$f^{(n)}(0)=1,\ n\in\mathbb{N}$$

Vậy

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Với $x=1$, ta có $e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$

Ta có sai số

$$\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-4}$$

Suy ra $(n+1)!>30000\Leftrightarrow n\geq 7$

Do đó

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=2,718253968.$$

Ví dụ 46. Dùng công thức khai triển Maclorent tính giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2+2x^4}{x(x-\tan x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6e^x+x^3-3x^2-6x-6}{x-\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-3\arctan x-x^3+x^4}{x(x-\tan x)}$

Giải

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2+2x^4}{x(x-\tan x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)-x^2+2x^4}{x\left(x-x-\frac{x^3}{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-23}{4}=-\frac{23}{4}.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{6e^x+x^3-3x^2-6x-6}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{6\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)+x^3-3x^2-6x-6}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)}=12.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-3\arctan x-x^3+x^4}{x(x-\tan x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-3\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)-x^3+x^4}{x\left(x-x-\dfrac{x^3}{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}(-3)=-3.$

4.9.5. Ứng dụng trong bài toán kinh tế

4.9.5.1. Hàm cận biên

Hàm cận biên của đại lượng $y=f(x)$ theo đại lượng x tại x_0, ký hiệu là $Mf(x_0)$, là độ biến đổi của đại lượng y khi đại lượng x tăng lên 1 đơn vị tại x_0.

Biểu thức toán học của hàm cận biên

$$Mf(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0). \qquad (4.21)$$

Tổng quát ta có, hàm cận biên của đại lượng $y=f(x)$ theo đại lượng x, là

$$Mf(x)=f'(x). \qquad (4.22)$$

Chú ý : *Trong thực tế, lượng cận biên $Mf(x_0)$ của $y=f(x)$ theo x tại x_0 xấp xỉ bằng độ biến đổi của y khi x tăng 1 một đơn vị từ trạng thái $x=x_0$.*

4.9.5.2. Hệ số co dãn

Hệ số co dãn của đại lượng $y=f(x)$ theo đại lượng x tại x_0, ký hiệu $E_{y|x}$, là độ biến đổi của y khi x tăng lên một đơn vị (1%).

Biểu thức của hệ số co dãn

$$E_{y|x}=f'(x)\cdot\frac{x}{y}\,(\%). \qquad (4.23)$$

4.9.5.3. Bài toán tối ưu trong kinh tế

Bài toán **:** Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D=D(P)$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $TC=TC(Q)$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức sản lượng Q để xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải quyết bài toán **:** Với một mức sản lượng Q, để **bán hết sản phẩm**, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D=Q$. Do đó, ta có

$D(P)=Q\Leftrightarrow P=D^{-1}(Q)$, mặt khác **doanh thu** của xí nghiệp là

$TR(Q)=P\times Q=D^{-1}(Q)\times Q$ và **lợi nhuận** thu được của xí nghiệp là

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = D^{-1}(Q) \times Q - TC(Q).$$

Vậy theo yêu cầu bài toán, ta cần tìm Q sao cho π đạt **giá trị lớn nhất**.

Ví dụ 47. Cho hàm tổng chi phí $TC(Q) = 0,1Q^2 + 0,3Q + 100, \ (Q \geq 0)$

a) Tìm hàm chi phí biên $MC(Q)$.

b) Tính chi phí biên tại mức sản lượng $Q_0 = 120$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Giải

a) Hàm chi phí biên: $MC(Q) = TC^{/}(Q) = 0,2Q + 0,3, \ (Q \geq 0)$.

b) Tại mức sản lượng $Q_0 = 120$, ta có $MC(120) = 24,3$.

Ý nghĩa: Tại mức sản lượng là 120 khi ta tăng Q lên một đơn vị thì chi phí tăng lên 24,3 đơn vị.

Ví dụ 48. Cho hàm cầu của một loại sản phẩm là $Q_D = 1000 - 5P$. Tính hệ số co dãn của cầu theo giá tại mức giá là 120 đơn vị và nêu ý nghĩa.

Giải

Đạo hàm của sản lượng Q theo mức giá P là $Q^{/}\left(P\right) = -5$

Áp dụng công thức hệ số co dãn của cầu theo giá, ta có

$$E_D = Q^{/}(P) \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{5P}{1000 - 5P}$$

Tại mức giá $P = 120$, ta có $E_D = -1,5$, nghĩa là khi đang bán với đơn giá $P = 120$, nếu ta tăng giá lên 1%, thì lượng cầu sẽ giảm đi khoảng 1,5%.

Ví dụ 49. Cho hàm sản xuất $Q = 120L^2 - L^3, \ L > 0$. Hãy xác định mức sử dụng lao động để sản lượng tối đa.

Giải

Đạo hàm cấp 1: $Q^{/}(L) = 240L - 3L^2$.

Giải phương trình:

$$Q^{/}(L) = 240L - 3L^2 = 0 \Leftrightarrow L = 80 \text{ (nhận) hay } L = 0 \text{ (loại)}.$$

Hàm số có điểm dừng: $L = 80$

Đạo hàm cấp 2 : $Q^{//}(L) = 240 - 6L$, tại $L = 80$.

Xét tại $L = 80$, ta có $Q^{//}(80) = -240 < 0$

Vậy khi lao động là $L = 80$ thì sản lượng cực đại, với $Q_{max} = 256000$.

Ví dụ 50. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu của xí nghiệp là $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 40000$. Hãy xác định mức sản lượng Q và giá bán tương ứng sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải

Với một mức sản lượng Q, để **bán hết sản phẩm**, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó, ta có

$$Q_D = Q \Leftrightarrow 656 - \frac{1}{2}P = Q \Leftrightarrow P = 1312 - 2Q,$$

Mặt khác **doanh thu** của xí nghiệp là

$$TR(Q) = P \times Q = (1312 - 2Q) \times Q = -2Q^2 + 1312Q$$

và **lợi nhuận** thu được của xí nghiệp là

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = -2Q^2 + 1312Q - (Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 40000$$

$$= -Q^3 + 75Q^2 + 312Q - 40000$$

Bây giờ ta tìm $Q > 0$ sao cho π đạt giá giạ lớn nhất.

Đạo hàm cấp 1: $\pi^{/}(Q) = -3Q^2 + 150Q^2 + 312$

Suy ra

$$\pi^{/}(Q) = 0 \Leftrightarrow -3Q^2 + 150Q + 312 = 0 \Leftrightarrow Q = -2 \text{ (loại) hay } Q = 52$$

Mặt khác, $\pi^{//}(Q) = -6Q + 150$

Xét tại $Q = 52$, ta có $\pi^{//}(52) = -162 < 0$.

Vậy $\pi(Q)$ đạt cực đại tại $Q = 52$.

Khi đó, ta có các kết quả phù hợp sau :

Lợi nhuận : $\pi = 38416$,

Đơn giá : $P = 1208$,

Tổng chi phí : $TC = 24400$.

Kết luận:

Để đạt lợi nhuận cao nhất, xí nghiệp cần sản xuất với mức sản lượng $Q = 52$. Khi đó lợi nhuận tương ứng là $\pi = 38416$.

4.10. Bài tập

Bài số 1. Dùng định nghĩa để chứng minh rằng các dãy sau có giới hạn là 0 khi $n \to \infty$

1. $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

2. $x_n = \dfrac{2n}{n^3 + 1}$

3. $x_n = (-1)^n \left(0,999\right)^n$

Hướng dẫn : 1) $\left|x_n\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ *; 2)* $\left|x_n\right| < \dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$*; 3)* $\left|x_n\right| = 0,999^n < \varepsilon$.

Bài số 2. Chứng minh rằng các dãy sau hội tụ

1. $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4}\right)....\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$

2. $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, ...,\ x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ (n căn)

Hướng dẫn : Chương minh dãy tăng bị chặn trên.

Bài số 3. Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3n^3}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2+1} + 2n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 2}}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+2}}{2^n + 3^{n+1}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}}{1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}\right)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)....\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n,\quad |q| < 1$

Đáp số : 1) $\dfrac{1}{3}$*; 2) 9; 3) 3; 4)* $\dfrac{1}{2}$*; 5)* $\dfrac{4}{3}$*; 6) 1 ; 7)* $\dfrac{1}{2}$*; 8) 0.*

Bài số 4. Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-\left(1+x\right)}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\left(x+a_1\right)\left(x+a_2\right)}-x\right)$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\tan8x}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\cot x\right)$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{xosx}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$

15. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-4^x}{x^2+2x}$

17. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x^2]{\cos x}$

18. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[\sin x]{\cos x}$

19. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+\sin 2x}$

Đáp số : 1) $\dfrac{4}{3}$*; 2)* $\dfrac{n}{m}$ *; 3)* $\dfrac{1}{2}$ *; 4)* $\dfrac{1}{n!}$ *; 5)* $-\dfrac{1}{2}$ *; 6)* $\dfrac{a_1+a_2}{2}$ *; 7)* $\dfrac{5}{8}$*; 8) 0; 9)* $\dfrac{1}{4}$*; 10) 1; 11)* $-\dfrac{1}{2}$*; 12)* $\dfrac{1}{12}$*; 13) 1; 14)* $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$*;15) 1; 16)* $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$*; 17)* $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ *; 18) 1; 19)* e^2.

Bài số 5. Xét tính liên tục các hàm số sau

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & \text{khi } x\neq0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

Đáp số: 1) Liên tục bên phải tại 0; 2) Liên tục tại 0.

Bài số 6. Định a để hàm số sau liên tục tại 0

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}, & x\neq0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

Đáp số : $a=1$.

Bài số 7. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số sau : $f(x) = x|x|$

Đáp số : $f^{/}(x) = 2|x|$

Bài số 8. Chứng minh hàm số : $y = \left(x^2+1\right)\left(e^x+2\right)$ thỏa mãn phương trình

$$y^{/} - \frac{2xy}{x^2+1} = e^x\left(x^2+1\right)$$

Hướng dẫn : Tính đạo hàm rồi thay vào đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Bài số 9. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. Chứng minh $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 3f^{/}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$.

Hướng dẫn : Tính đạo hàm rồi thay vào đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Bài số 10. Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$. Chứng minh $f^{(n)}(0) = \dfrac{(-1)^n n(n-1)}{2^{n-2}}$.

Hướng dẫn : Sử dụng công thức tính đạo hàm $\left(u \cdot v\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$.

Bài số 11. Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Tính $f^{(2019)}\left(0\right)$.

Hướng dẫn : Tính đạo hàm cấp 1,2,3,..,rồi dự đoán đạo hàm cấp n.

Bài số 12. Cho hàm số $f(x) = 1 + x^m (x-1)^n$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng phương trình $f^{/}(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng (0, 1).

Hướng dẫn : Sử dụng định lý Rolle

Bài số 13. Ứng dụng đạo hàm chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta có

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln\left(1+x\right) < x$$

Hướng dẫn : xét $f(x) = \ln(1+x) - x;\ g(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$, *tính đạo hàm.*

Bài số 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0, \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng : $f^{/}\left(x\right)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn : Dùng định nghĩa tính đạo hàm tại 0.

Bài số 15. Tính đạo hàm $y^{/}\left(x\right)$ của các hàm được xác định như sau

1. $x=\ln\left(1+t^2\right),\ y=t-\arctan t$

2. $x^3+\ln y-x^2e^y=0$

Hướng dẫn : 1) Dùng công thức đạo hàm theo tham số;

2) Dùng công thức đạo hàm hàm ẩn.

Bài số 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}0 & \text{khi} \quad x=0,\\ \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{khi} \quad x\neq 0.\end{cases}$. Tính $f'\left(0\right)$

Hướng dẫn : Dùng định nghĩa đạo hàm.

Bài số 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax+b & \text{khi} \quad x>2,\\ x^2 & \text{khi} \quad x\leq 2.\end{cases}$

Tìm giá trị của a và b để hàm số f có đạo hàm tại mọi điểm.

Đáp số : $a=4,\ b=-8.$

Bài số 18. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2 & \text{khi} \quad x>1,\\ 2-x & \text{khi} \quad x\leq 1.\end{cases}$

Hàm số f có đạo hàm tại điểm 1 không?

Đáp số : Hàm số không có đạo hàm tại 1.

Bài số 19. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ m & \text{khi } x=0\end{cases}.$

Tìm m để hàm f liên tục tại $x=0$. Với m tìm được hãy tính $f'\left(0\right)$.

Đáp số: $m=1;\ f'(0)=\dfrac{1}{2}.$

Bài số 20. Cho hàm số : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^{2x}-1}{x}, & x\neq 0,\\ 2\ln\left(m\right), & x=0.\end{cases}$

1. Định m để hàm số sau liên tục tại 0

2. Với m vừa tìm được ở câu 1. Tính $f'\left(0\right)$.

Đáp số : 1) $m=3;$ 2) $f'\left(0\right)=2\ln^2 3.$

Bài số 21. Tính vi phân của các hàm số sau

1. $y = \frac{a}{x} + \arctan\frac{x}{a}$

2. $y = x + \sqrt{x^2 + a^2}$

3. $y^5 + y = x^2 + 1$

4. $x + y = e^y$

Hướng dẫn : Tính đạo hàm rồi thế vào biểu thức vi phân

Bài số 22. Tính gần đúng

1. $\sqrt[4]{17}$ 2. $\arctan(0,97)$ 3. $\tan(46)$ 4. $\sqrt[5]{32,002}$

Đáp số : 1) 2,03125; 2) 0,7704; 3) 1,0349; 4) 2,000025.

Bài số 23. Tính đạo hàm cấp n của hàm số sau

1. $f(x) = \sin x$

2. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

3. $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$

4. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

Đáp số : 1) $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$*; 2)* $f^{(n)}(x) = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

3) $f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

4) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$.

Bài số 24. Khai triển Maclorent các hàm số sau tới lũy thừa bậc 5.

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

2. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

4. $f(x) = x + \sqrt{x+1}$

Đáp số : 1) $-1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5$*. 2)* $-2x - 2x^3 - 2x^5$.

3) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{15}{16}x^3+\frac{31}{32}x^4+\frac{63}{64}x^5$.

4) $1+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5$.

Bài số 25. Khai triển Taylor của hàm số sau tại điểm $x_0=2$ tới lũy thừa bậc 4.

$$f(x)=\frac{x}{x-1}$$

Đáp số : $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+(x-2)^4$.

Bài số 26. Khảo sát tính tăng giảm và cực trị của hàm số sau

1. $f(x)=\left(x-5\right)e^x$
2. $f(x)=(2x+1)\sqrt[3]{x^2}$
3. $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$
4. $f(x)=\sqrt{x}\ln x$

Bài số 27. Giả sử giá thành để sản xuất x cặp quần jean được cho bởi hàm

$$C\left(x\right)=2000+3x+0,01x^2+0,0002x^3$$

1. Xác định hàm chi phí biên.
2. Tìm $C'\left(100\right)$ và giải thích ý nghĩa. Giá trị này dự báo điều gì?
3. So sánh giá $C\left(100\right)$ với giá thành để sản xuất sản phẩm thứ 101.

Đáp số: 1) $C'\left(x\right)=3+0,02x+0,0006x^2$*; 2)* $C'\left(100\right)=11$*;*

3) $C\left(101\right)-C\left(100\right)=11,0702\approx C'\left(100\right)$.

Bài số 28. Cho hàm sản xuất ngắn hạn $Q=30\sqrt{L};\ L\geq 0$

1. Tìm hàm sản phẩm cận biên của lao động MPL.
2. Tại $L_0=144$, nếu L tăng thêm một đơn vị thì Q sẽ thay đổi bao nhiêu đơn vị?
3. Tại mức sử dụng lao động nào đó, nếu L tăng thêm 1%, hỏi sản lượng sẽ thay đổi bao nhiêu %?

Hướng dẫn: 1) Tính $MPL=Q'_L$; 2) $MPL(144)=1,25$; 3) $\varepsilon_{Q/L}=0,5$.

Bài số 29. Cho hàm cầu của một loại hàng hoá là $Q_D=6P-P^2$. Tính hệ số co dãn tại $P_0=5$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Đáp số : $E_D = -4$.

Bài số 30. Cho biết hàm sản xuất ngắn hạn $Q = 100\sqrt[5]{L^3}$, $L > 0$ và giá của sản phẩm là $P = 5$ USD, giá thuê lao động là $P_L = 3$ USD. Hãy tìm mức sử dụng lao động để lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $L = 100000$.

Bài số 31. Cho biết hàm tổng chi phí là $TC(Q) = 4Q^3 + 5Q^2 + 500;\ Q > 0$ và hàm cầu $Q = 11160 - P$. Hãy xác định mức sản lượng Q và giá bán tương ứng để lợi nhuận đạt cực đại.

Đáp số: $Q = 30,\ P = 11130.$

Bài số 32. Cho biết hàm tổng chi phí là $TC(Q) = Q^3 - 8Q^2 + 57Q + 2;\ Q > 0$ và hàm cầu đảo $P = 45 - \frac{1}{2}Q$. Hãy xác định mức sản lượng Q và giá bán tương ứng để lợi nhuận đạt cực đại.

Đáp số: $Q = 4,\ P = 43.$

Bài số 33. Một công ty có hàm cầu về sản phẩm và hàm tổng chi phí là:

$$P = 2750 - \frac{45}{8}Q;\ TC(Q) = \frac{Q^3}{30} - 15Q^2 + 2500Q$$

trong đó P là giá và Q là sản lượng.

1. Tính sản lượng và giá bán để tối đa hóa lợi nhuận.
2. Tính và nêu ý nghĩa hệ số co dãn của cầu sản phẩm tại mức giá và sản lượng tối ưu?
3. Tìm giá bán để tối đa hóa sản lượng bán ra mà công ty không bị lỗ?

Đáp số: 1) $\pi_{max} = \pi(200) \approx 158333;$ 2) $\varepsilon = \frac{-13}{9}$ *; 3) 305,778.*

Bài số 34. Cho biết hàm cầu ngược và hàm chi phí của một nhà độc quyền như sau:

$P = 200 - Q,\ TC = Q^2$ (trong đó P là giá, Q là sản lượng)

1. Tìm mức sản lượng và mức giá để lợi nhuận cực đại.
2. Tính hệ số co dãn của cầu tại mức tối đa hóa lợi nhuận.

Đáp số: 1) $Q = 50,\ P = 150$ *; 2)* -3.

Chương 5

TÍCH PHÂN

5.1. Tích phân bất định

5.1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b), nếu:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b).$$

Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm khác của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b) thì

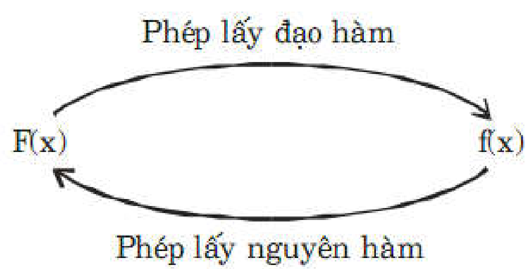
$$G(x) = F(x) + C, \text{ với C là hằng số.}$$

Họ tất cả các nguyên hàm của của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b) được gọi là tích phân bất định của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b).

Ký hiệu: $\int f(x)dx$.

Vậy

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \tag{5.1}$$



Tính chất

a) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

c) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là hằng số

d) Tính bất biến của biểu thức tích phân:

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$ trong đó $u = \varphi(x)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số: $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)$. Tính đạo hàm của hàm số trên rồi suy ra nguyên hàm của tích phân sau: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx$.

Giải

Ta có

$$F^{/}(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}=f(x)$$

Suy ra

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C.$$

5.1.2. Bảng công thức các tích phân cơ bản

a) $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq -1)$

b) $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

c) $\int e^{x}dx=e^{x}+C$

d) $\int \sin x dx=-\cos x+C$

e) $\int \cos x dx=\sin x+C$

f) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$

g) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\arccos x+C$

k) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$

l) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=-\text{arc}\cot x+C$

5.1.3. Các phương pháp tính tích phân bất định

5.1.3.1. Sử dụng bảng tích phân cơ bản và phương pháp khai triển

Ta có thể tính tích phân của một hàm phức tạp bằng cách khai triển nó thành tổng (hiệu) tích phân của các hàm đơn giản.

Ví dụ 2. Tính tích phân bất định

$$\int x\sqrt[3]{x-1}dx$$

Giải

Nếu ta khai triển $x=x-1+1$, ta chuyển tích phân trên về tổng 2 tích phân sau:

$$\int x\sqrt[3]{x-1}dx=\int(x-1+1)\sqrt[3]{x-1}dx$$

$$= \int (x-1)\sqrt[3]{x-1}dx + \int \sqrt[3]{x-1}dx$$

$$= \int (x-1)^{4/3} dx + \int (x-1)^{1/3} dx$$

$$= \frac{3}{7}(x-1)^{7/3} + \frac{3}{4}(x-1)^{4/3} + C$$

5.1.3.2. Phương pháp đổi biến số

Xét tích phân bất định $I = \int f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là một hàm số liên tục. Để tính tích phân này ta có thể chuyển sang một tích phân khác bằng cách thay $x = \varphi(t)$. Với giả thiết hàm $x = \varphi(t)$ đơn điệu có đạo hàm liên tục, ta có: $dx = \varphi^{/}(t)dt$

Vậy

$$I = \int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi^{/}(t)dt = \int g(t)dt \qquad (5.2)$$

với $g(t) = f[\varphi(t)]\varphi^{/}(t)$

Nếu ta tính được tích phân $\int g(t)dt = G(t) + C$ thì $I = \int g(t)dt = G\left[\varphi^{-1}(x)\right] + C.$

Công thức (5.2) được gọi là công thức đổi biến số.

Ví dụ 3. Cho tích phân

$$\int f(ax+b)dx$$

Đặt $t = ax + b \Rightarrow dt = adx$

Ta có

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt$$

Hệ quả

a) $\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$

b) $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

c) $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

d) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

e) $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

f) $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

g) $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}dx = \frac{1}{a}\arcsin(ax+b)+C = -\frac{1}{a}\arccos(ax+b)+C$

i) $\int \frac{1}{1+(ax+b)^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(ax+b)+C = -\frac{1}{a}\operatorname{arccot}(ax+b)+C$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

b) $J = \int \frac{1}{1+\sin x}dx$

Giải

a) $I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

Ta có thể đổi biến như sau. Đặt

$$x = t^6 \ \ (t>0),\ \ dx = 6t^5dt$$

Áp dụng công thức (5.2), ta có

$$I = \int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}dt = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= 6\left(t-\arctan t\right)+C = 6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

b) $J = \int \frac{1}{1+\sin x}dx$

Ta có thể đổi biến như sau. Đặt

$$t = \tan\frac{x}{2},\text{ ta có } x = 2\arctan t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Áp dụng công thức (5.2), ta có

$$J=\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=2\int\frac{1}{(t+1)^2}dt=-\frac{2}{t+1}+C=-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}+C.$$

5.1.3.3. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục.

Ta có

$$d\left(uv\right)=vdu+udv\Leftrightarrow udv=d\left(uv\right)-vdu$$

Lấy tích phân 2 vế, ta có

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (5.3)$$

hay

$$\int v(x)u^{/}(x)dx=u(x)v(x)-\int u(x)v^{/}(x)dx \qquad (5.4)$$

với $u=u(x)\Rightarrow du=u^{/}(x)dx;\ v=v(x)\Rightarrow dv=v^{/}(x)dx$

Công thức (5.4) được gọi là công thức tích phân từng phần.

Ví dụ 5. Tính các tích phân bất định sau

a) $I=\int x\ln xdx$

b) $I=\int xe^{x}dx$

c) $I=\int x\sin xdx$

d) $I=\int x\arctan xdx$

Giải

a) $I=\int x\ln xdx$

Đặt $u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx;\ dv=xdx\to v=\frac{1}{2}x^2$

Vậy

$$I=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

b) $I=\int xe^{x}dx$

Đặt $u = x \to du = dx; \; dv = e^x dx \to v = e^x$

Vậy

$$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

c) $I = \int x \sin x dx$

Đặt $u = x \to du = dx; \; dv = \sin x dx \to v = -\cos x$

Vậy

$$I = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

d) $I = \int x \arctan x dx$

Đặt $u = \arctan x \to du = \dfrac{1}{1+x^2}dx; \; dv = xdx \to v = \dfrac{1}{2}x^2$

Vậy

$$I = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

5.1.3.4. Phương pháp tính tích phân của các hàm hữu tỉ

a. Tích phân của phân thức hữu tỉ với mẫu bậc nhất

Xét tích phân $\int \dfrac{P(x)}{ax+b}dx$, với $P(x)$ là một đa thức. Ta biểu diễn biểu thức dưới dấu tích phân dưới dạng:

$$\frac{P(x)}{ax+b} = Q(x) + \frac{c}{ax+b}$$

Trong đó: $Q(x)$ là thương của phép chia đa thức và c là phần dư của phép chia. Tích phân của đa thức $Q(x)$ có thể tính dễ dàng, còn tích phân của phân thức thứ hai được tính theo công thức:

$$\int \frac{c}{ax+b}dx = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Ví dụ 6. Tính tích phân

$$I = \int \frac{x^3 + 3x^2}{1 - 2x} dx$$

Giải

Biểu thức dưới dấu tích phân ta lấy tử chia cho mẫu, ta được

$$I = \int \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{7}{8} + \frac{7}{8}\frac{1}{1-2x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{7}{8}x - \frac{7}{16}x \ln|1 - 2x| + C$$

b. Tích phân của phân thức hữu tỉ với mẫu bậc hai

Xét tích phân $\int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} dx$, với $P(x)$ là một đa thức. Ta biểu diễn biểu thức dưới dấu tích phân dưới dạng:

$$\frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} = Q(x) + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Trong đó: $Q(x)$ là thương của phép chia đa thức và $Ax + B$ là phần dư của phép chia. Tích phân của đa thức $Q(x)$ có thể tính dễ dàng.

Để tính tích phân $I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ ta biến đổi như sau:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{2}\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right)\frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Khi đó ta được:

$$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2}\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right)\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|ax^2 + bx + c\right| + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) J$$

Tích phân: $J = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ được tính như sau:

Xét tam thức bậc 2 ở mẫu ta có $\Delta = b^2 - 4ac$

+) Trường hợp 1. Tam thức bậc 2 ở mẫu có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 :

$$J = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} dx$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{x_1 - x_2}\int \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right) dx = \frac{1}{a}\frac{1}{x_1 - x_2}\ln\left|\frac{x - x_1}{x - x_2}\right| + C.$$

+) Trường hợp 2. Tam thức bậc 2 ở mẫu có nghiệm kép x_0:

$$J = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x - x_0)^2} dx = -\frac{1}{a} \frac{1}{x - x_0} + C.$$

+) Trường hợp 3. Tam thức bậc 2 ở mẫu vô nghiệm :

$$J = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C.$$

Ví dụ 7. Tính tích phân

a) $I = \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$

b) $J = \int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx$

c) $K = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$

Giải

a) $I = \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} dx$

$$= \int \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}\right) dx = \ln\left|\frac{x - 2}{x - 1}\right| + C.$$

b) $J = \int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx = \int \frac{1}{(x + 3)^2} dx = -\frac{1}{x + 3} + C.$

c) $K = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{1}{(x - 1)^2 + 2^2} dx = \frac{1}{2} \arctan\frac{x - 1}{2} + C.$

5.1.3.5. Phương pháp tính tích phân của các hàm lượng giác

a. Tích phân có dạng: $I = \int \sin^m x \cos^n x dx$

Nếu một trong hai số m, n là số lẻ thì tích phân loại này có thể đưa về tích phân của đa thức bằng cách đổi biến số:

+) Nếu m là số lẻ thì ta đặt: $t = \cos x$, ta có $d(\cos x) = -\sin x dx$.

+) Nếu n là số lẻ thì ta đặt: $t = \sin x$, ta có $d(\sin x) = \cos x dx$.

+) Nếu m, n là số chẵn thì ta sử dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Ví dụ 8. Tính tích phân:

$$I = \int \sin^4 x \cos^5 x dx$$

Giải

Đặt $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Ta có

$$I = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx dx = \int t^4 \left(1-t^2\right)^2 dt = \int \left(t^8 - 2t^6 + t^4\right) dt$$
$$= \frac{1}{9}t^9 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

b. Nếu hàm dưới dấu tích phân không chẵn, không lẻ theo $\sin x, \cos x$

Để tính tích phân loại này ta có thể đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, khi đó:

Ta có

$$x = 2\arctan t,\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ví dụ 9. Tính tích phân

$$I = \int \frac{1}{a\sin x + b\cos x + c} dx \text{ (a, b, c là hằng số cho trước)}$$

Giải

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, khi đó:

$$x = 2\arctan t,\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ta có

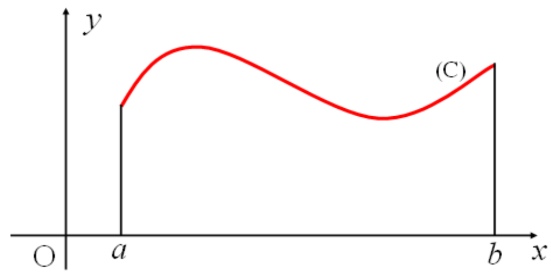
$$I = \int \frac{1}{a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} + c} \frac{2}{1+t^2} dt = 2\int \frac{1}{(c-b)t^2 + 2at + b + c} dt$$

Đây là tích phân của phân thức hữu tỉ có mẫu là tam thức bậc 2.

5.2. Tích phân xác định

5.2.1. Định nghĩa các tính chất của tích phân xác định

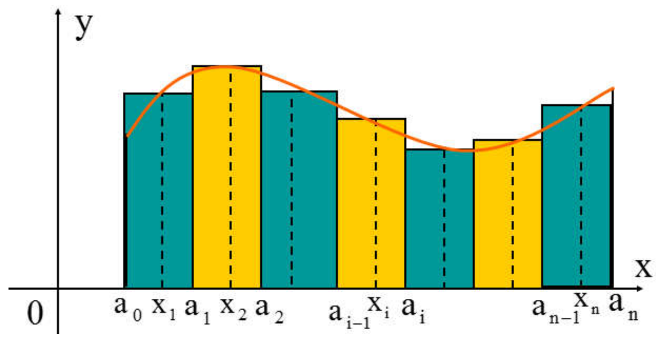
Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường thẳng $x = a, x = b$ và đường cong $(C): y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a, b\right]$.



Chia đoạn $\left[a,b\right]$ thành n đoạn nhỏ đều nhau

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b \quad \text{với } a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Trên mỗi đoạn $\left[a_{i-1}, a_i\right]$ lấy điểm x_i tùy ý



Diện tích của n hình chữ nhật nhỏ

$$S_n = f(x_1)(a_1 - a_0) + f(x_2)(a_2 - a_1) + \cdots + f(x_n)(a_n - a_{n-1})$$

hay

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Diện tích hình thang cong S

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Đặt

$$\int_a^b f(x)dx = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{5.5}$$

Trong đó a là cận dưới, b là cận trên và $f(x)$ là hàm lấy tích phân

Trường hợp đặc biệt $a = 0,\ b = 1,\ x_i = a_i$, ta có

$$\int_0^1 f(x)dx = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \tag{5.6}$$

Ví dụ 10. Dùng định nghĩa tính các tích phân xác định sau:

a) $I = \int_0^1 x dx$

b) $J = \int_0^1 x^2 dx$

c) $K = \int_0^1 x^3 dx$

Giải

a) $I = \int_0^1 x dx$

Dùng công thức (5.6), ta có

$$I = \int_0^1 x dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

b) $J = \int_0^1 x^2 dx$

Dùng công thức (5.6), ta có

$$J = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

c) $K = \int_0^1 x^3 dx$

Dùng công thức (5.6), ta có

$$K = \int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)^2\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

5.2.2. Các tính chất cơ bản của tích phân xác định

a) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

b) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

c) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

d) $\int\limits_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$

e) $\int\limits_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx$

f) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$ với k là hằng số

g) Nếu $a < b$ và $f(x) \le g(x),\ \forall x \in [a,b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$

5.2.3. Công thức NewTon – Leibnitz

Với $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm bất kỳ của hàm số liên tục $f\left(x\right)$, ta có công thức:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \quad (5.7)$$

Công thức (5.7) được gọi là công thức Newton – Leibnitz.

Ví dụ 11. Tính các tích phân xác định sau

a) $I = \int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

b) $J = \int\limits_{-2}^{2} \dfrac{1}{x^2 - 4x + 20}dx$

Giải

a) $I = \int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$. Ta có

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)\Big|_0^{\sqrt{5}} = \ln\left(\sqrt{5} + 3\right) - \ln 2 = \ln\frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$$

b) $J=\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2-4x+20}dx$. Ta có

$$J=\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2-4x+20}dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{(x-2)^2+4^2}dx=\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x-2}{4}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{\pi}{16}.$$

5.2.4. Các phương pháp tính tích phân xác định

5.2.4.1. Phương pháp đổi biến

Giả sử ta cần tính tích phân:

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

Thay $x=\varphi(t), dx=\varphi^{/}(t)dt$ với giả thiết hàm số $\varphi(t)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

+) Hàm số $\varphi(t)$ xác định, liên tục và có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[\alpha,\beta\right]$

+) $\varphi\left(\alpha\right)=a, \varphi\left(\beta\right)=b$, tức là cận $x=a$ tương ứng với cận $t=\alpha$ và cận $x=b$ tương ứng với cận $t=\beta$.

+) Khi t biến thiên trên đoạn $\left[\alpha,\beta\right]$ hàm số $x=\varphi(t)$ nhận giá trị không vượt ra ngoài đoạn $\left[a,b\right]$.

Khi đó, ta có

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi^{/}(t)dt=\int_\alpha^\beta g(t)dt \qquad (5.8)$$

Với $g(t)=f\left[\varphi(t)\right]\varphi^{/}(t)$.

Ví dụ 12. Tính tích phân xác định sau

$$I=\int_1^e\frac{(\ln x+1)^3}{x}dx$$

Giải

Đặt

$$t=\ln x+1\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$$

Đổi cận

Với $x=1$ thì $t=1$ và $x=e$ thì $t=2$

Ta có

$$I=\int_1^2 t^3dt=\frac{1}{4}t^4\Big|_1^2=\frac{1}{4}\left(2^4-1^4\right)=\frac{15}{4}.$$

5.2.4.2. Phương pháp tích phân từng phần

Nếu các hàm $u(x)$, $v(x)$ khả vi liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì ta có

$$\int_a^b u(x)v^/(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u^/(x)dx \tag{5.9}$$

với $u=u(x)\Rightarrow du=u^/(x)dx;\ v=v(x)\Rightarrow dv=v^/(x)dx$

Ví dụ 13. Tính tích phân xác định sau

$$I=\int_1^e x\ln xdx$$

Giải

Đặt $u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx;\ dv=xdx\to v=\frac{1}{2}x^2$

$$I=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.$$

5.2.5. Ứng dụng tích phân

5.2.5.1. Ứng dụng tích phân bất định

Cho hai đại lượng kinh tế x,y và hàm cận biên $Mf(x)$ với điều kiện đầu $y_0=f(x_0)$. Tìm hàm $y=f(x)$ như sau

$$y=f(x)=\int Mf(x)dx \tag{5.10}$$

Ví dụ 14. Cho hàm sản phẩm biên của lao động $MPL=40L^{0,5}$. Tìm hàm sản xuất ngắn hạn $Q=f(L)$, biết $Q(100)=4000$.

Giải

Áp dụng công thức (5.10), ta có

$$Q(L)=\int MPLdL=40\int L^{0,5}dL=\frac{80}{3}L^{1,5}+c$$

Từ giả thiết : $Q(100)=4000\Leftrightarrow c=-\frac{68000}{3}$

Vậy

$$Q(L)=\frac{80}{3}L^{1,5}-\frac{68000}{3}.$$

Ví dụ 15. Cho hàm chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là : $MC(Q)=8e^{0,2Q}$ và chi phí cố định $FC=50$. Tìm hàm tổng chi phí.

Giải

Áp dụng công thức (5.10), ta có

$$TC(Q)=\int MC(Q)dQ=8\int e^{0,2Q}dQ=40e^{0,2Q}+c$$

Từ chi phí cố định : $FC=50\Leftrightarrow c=10$

Vậy

$$TC(Q)=40e^{0,2Q}+10.$$

5.2.5.2. Ứng dụng tích phân xác định

Cho hàm cung $Q_s=S(P)$ và hàm cầu $Q_D=D(P)$. Tính thặng dư người tiêu dùng và thặng dư nhà sản xuất như sau

Thặng dư của người tiêu dùng (Consumers' Surplus)

$$CS=\int_0^{Q_0}D^{-1}(Q)dQ-P_0Q_0 \tag{5.11}$$

Thặng dư của nhà sản xuất (Producers' Surplus)

$$PS=P_0Q_0-\int_0^{Q_0}S^{-1}(Q)dQ \tag{5.12}$$

Trong đó (P_0,Q_0) là điểm cân bằng của thị trường.

Ví dụ 16. Cho hàm cung và hàm cầu đối với một loại sản phẩm như sau:

$$Q_S=\sqrt{P}-1;\ Q_D=\sqrt{113-P}$$

Tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Giải

Tìm điểm cân bằng của thị trường ta giải phương trình sau

$$Q_D=Q_S\Leftrightarrow\sqrt{113-P}=P-57$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge 57\\ P^2-113P+3136=0\end{cases}\Leftrightarrow P=64\to Q=7$$

Ta có điểm cân bằng thị trường là $P_0=64,\ Q_0=7$

Tính thặng dư của người tiêu dùng ta áp dụng công thức (5.11)

$$CS = \int_0^{Q_0} D^{-1}(Q)dQ - P_0Q_0 = \int_0^7 (113 - Q^2)dQ - 448 = \frac{686}{3}.$$

Tính thặng dư của nhà sản xuất ta áp dụng công thức (5.12)

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} S^{-1}(Q)dQ = 448 - \int_0^7 (Q+1)^2 dQ = \frac{833}{3}.$$

5.3. Tích phân suy rộng

Khái niệm: Một tích phân được gọi là tích phân xác định nếu thỏa mãn hai điều kiện sau

i) Hàm lấy tích phân bị chặn

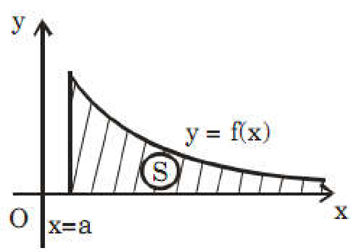
ii) Miền lấy tích phân bị chặn

Nếu một tích phân vi phạm một trong hai điều kiện trên được gọi là tích phân suy rộng

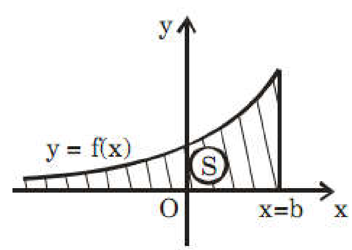
5.3.1. Tích phân suy rộng loại 1: Định nghĩa và phương pháp tính

Nếu một tích phân có miền lấy tích phân không bị chặn thì ta gọi tích phân đó là tích phân suy rộng loại 1.

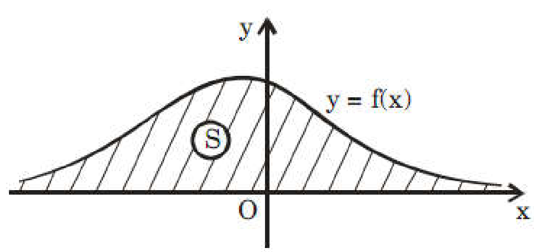
Ví dụ 17. Cho các tích phân suy rộng loại 1: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$; $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$



$$S = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$



$$S = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$



$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

a) Cho $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ hàm số dương thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 1.

Ta có :

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_a^{t} f(x)dx \tag{5.13}$$

b) Cho $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ hàm số dương thì $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 1.

Ta có :

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^{b} f(x)dx \tag{5.14}$$

c) Cho $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ hàm số dương thì $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 1.

Ta có :

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx\\ &= \lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^{0} f(x)dx + \lim_{s\to+\infty}\int\limits_0^{s} f(x)dx\end{aligned} \tag{5.15}$$

Nếu các giới hạn này không tồn tại hay bằng $\pm\infty$, ta nói tích phân suy rộng này phân kỳ còn nếu giới hạn này bằng một hằng số ta nói tích phân suy rộng này hội tụ.

Ví dụ 18. Tính các tích phân suy rộng sau

a) $I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2-2x+2}dx$

b) $J = \int\limits_{-\infty}^{-2} \dfrac{1}{x^2+4x+5}dx$

c) $K = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2-4x+13}dx$

Giải

a) $I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2-2x+2}dx$

Áp dụng công thức (5.13), ta có

$$I = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{(x-1)^2+1}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\arctan(x-1)\Big|_1^t\right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\arctan(t-1) = \frac{\pi}{2}.$$

b) $J = \int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{x^2+4x+5}dx$

Áp dụng công thức (5.14), ta có

$$J = \lim_{t\to-\infty}\int_t^{-2}\frac{1}{(x+2)^2+1}dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\arctan(x+2)\Big|_t^{-2}\right)$$

$$= -\lim_{t\to-\infty}\arctan(t+2) = \frac{\pi}{2}.$$

c) $K = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+13}dx$

Áp dụng công thức (5.15), ta có

$$K = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2-4x+13}dx + \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+13}dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{(x-2)^2+3^2}dx + \lim_{s\to+\infty}\int_0^s\frac{1}{(x-2)^2+3^2}dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)\Bigg|_t^0 + \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)\Bigg|_0^s$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{3}\left[\arctan\left(\frac{-2}{3}\right) - \arctan\left(\frac{t-2}{3}\right)\right] +$$

$$+ \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{3}\left[\arctan\left(\frac{s-2}{3}\right) - \arctan\left(\frac{-2}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{3}.$$

5.3.2. Tích phân suy rộng loại 2: Định nghĩa và phương pháp tính

Nếu một tích phân có hàm lấy tích phân không bị chặn thì ta gọi tích phân đó là tích phân suy rộng loại 2.

Ví dụ 19. Cho tích phân suy rộng loại 2: $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ và $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2} = \infty$

a) $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 2.

Ta có :

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int\limits_t^b f(x)dx \tag{5.16}$$

b) $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 2.

Ta có :

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int\limits_a^t f(x)dx \tag{5.17}$$

Ví dụ 20. Tính các tích phân suy rộng sau

a) $I=\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}dx$

b) $J=\int\limits_1^e \frac{1}{x\ln x}dx$

Giải

a) $I=\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}dx$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt[2]{2-x}}=+\infty,$ áp dụng công thức (5.17), ta có

$$I=\lim_{t\to 2^-}\int\limits_1^t \frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}dx=\lim_{t\to 2^-}\left[-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(2-x)^3}\right]\Bigg|_1^t$$

$$=\lim_{t\to 2^-}\frac{4}{3}\left[1-\sqrt[4]{(2-t)^3}\right]=\frac{4}{3}.$$

b) $J=\int\limits_1^e \frac{1}{x\ln x}dx$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x\ln x}=+\infty,$ áp dụng công thức (5.16), ta có

$$J=\lim_{t\to 1^+}\int\limits_t^e \frac{1}{\ln x}d(\ln x)=\lim_{t\to 1^+}\left[\ln(\ln x)\right]\Big|_t^e=\lim_{t\to 1^+}\left[\ln(\ln e)-\ln(\ln t)\right]=+\infty.$$

5.3.3. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng

5.3.3.1. Mệnh đề

i) Cho hàm số $f:(0,1] \to \mathbb{R}$. Ta có

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ hội tụ khi và chỉ khi } \alpha < 1$$

ii) Cho hàm số $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$. Ta có

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ hội tụ và chỉ khi } \alpha > 1$$

5.3.3.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

Hệ quả 1. Cho $f, g: (a,b] \to \mathbb{R}$ là hai hàm số dương

i) Nếu $f(x) \le g(x),\ \forall x \in (a,b]$ và $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,+\infty)$ thì $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng bản chất.

Lưu ý:

+) Trường hợp: $L = 0$: Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

+) Trường hợp: $L = +\infty$: Nếu $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Hệ quả 2. Cho $f, g: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ là hai hàm số dương

i) Nếu $f(x) \le g(x),\ x \ge a$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,+\infty)$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng bản chất.

Lưu ý:

+) Trường hợp: $L = 0$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

+) Trường hợp: $L = +\infty$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Ví dụ 21. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$ c) $\int_{0}^{1} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}dx$

b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}dx$ d) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$

Giải

a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$

Sử dụng tiêu chuẩn bất đẳng thức để khảo sát sự hội tụ, ta có

$$\frac{x}{x^3+1} \le \frac{1}{x^2}, \ \forall x \ge 1$$

Ta có: $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ là tích phân hội tụ vì $\alpha = 2 > 1$. Suy ra $\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$ là tích phân hội tụ.

b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}dx$

Đặt : $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$ chọn $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$. Sử dụng tiêu chuẩn giới hạn để khảo sát sự hội tụ, ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \in (0,+\infty)$$

Ta có: $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}dx$ là tích phân kỳ vì $\alpha = 1/2 < 1$. Suy ra $\int_{1}^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}dx$ là tích phân phân kỳ.

c) $\int_{0}^{1} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}dx$

Đặt $f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}$ chọn $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$. Sử dụng tiêu chuẩn giới hạn để khảo sát sự hội tụ, ta có

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1} = 1 \in (0,+\infty)$$

Ta có: $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ là tích phân hội tụ vì $\alpha = 1/2 < 1$. Suy ra $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}dx$ là tích phân hội tụ.

d) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$

Đặt $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}$ chọn $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$. Sử dụng tiêu chuẩn giới hạn để khảo sát sự hội tụ, ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{\sin x}-1} = 1 \in (0,+\infty)$$

Ta có: $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ là tích phân hội tụ vì $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Suy ra $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$ là tích phân hội tụ.

5.3.3.3. Mệnh đề

i) Nếu $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và ta nói $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

ii) Nếu $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ mà $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ bán hội tụ.

Ví dụ 22. Khảo sát sự hội tụ của tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-4\sin^2 2x}{x\sqrt[3]{x^2+2x}}dx$$

Giải

Ta có

$$\left|\frac{1-4\sin^2 2x}{x\sqrt[3]{x^2+2x}}\right| \le \frac{5}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{5}{x^{5/3}}, \ \forall x \ge 1.$$

Ta có: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/3}}dx$ là tích phân hội tụ vì $\alpha = \frac{5}{3} > 1$. Suy ra

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{1-4\sin^2 2x}{x\sqrt[3]{x^2+2x}}\right|dx \text{ là tích phân hội tụ.}$$

Vậy

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-4\sin^2 2x}{x\sqrt[3]{x^2+2x}}dx \text{ là tích phân hội tụ tuyệt đối.}$$

5.4. Bài tập

Bài số 1. Chứng minh $F(x)=|x|-\ln\left(1+|x|\right)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}.$$

Hướng dẫn : xét $x>0$, $x<0$, $x=0$.

Bài số 2. Tìm a, b, c để hàm số $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{3-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt{3-2x}$.

Đáp số : $a=\frac{2}{5}, b=-\frac{1}{5}, c=-\frac{3}{5}$.

Bài số 3. Tích các tích phân bất định sau

1) $\int\frac{(2x+1)^2}{x}dx$

2) $\int\frac{x^2}{(1+x)^8}dx$

3) $\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

4) $\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

5) $\int x^2e^{-x}dx$

6) $\int x^2\sin x dx$

7) $\int\sqrt{4-x^2}dx$

8) $\int\frac{1}{4x^2+9}dx$

9) $\int\frac{1}{3+2\cos x+\sin x}dx$

10) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{4+\cos^2 x}}dx$

11) $\int\frac{x}{x^2-5x+4}dx$

12) $\int\frac{1}{x^2-4x+13}dx$

13) $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

14) $\int x^5e^{-x}dx$

Đáp số : 1) 1) $2x^2+4x+\ln|x|+C$; 2) $-\frac{1}{7(x+1)^7}+\frac{1}{3(x+1)^6}-\frac{1}{5(x+1)^5}+C$;

3) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$; 4) $e^x+1-\ln(e^x+1)+C$; 5) $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$;

6) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$; 7) $\frac{1}{2}\sin\left(2\arccos x\right)-\arccos x+C$;

8) $\frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3}+C$; 9) $\frac{1}{2}\sin\left(2\arccos x\right)-\arccos x+C$; 9) $\arctan\left(\dfrac{\tan\frac{x}{2}+1}{2}\right)+C$;

10) $\ln\left(\cos x+\sqrt{4+\cos^2 x}\right)+C$; 11) $-\frac{1}{3}\ln\left|x-1\right|+\frac{4}{3}\ln\left|x-4\right|+C$;

12) $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)+C$; 13) $\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left|2+\cos x\right|+C$;

14) $-x^5e^{-x}-5x^4e^{-x}-20x^3e^{-x}-60x^2e^{-x}-120xe^{-x}-120e^{-x}+C.$

Bài số 4. Tính các tích phân xác định sau bằng định nghĩa

1) $I=\int\limits_0^1 e^x dx$ 2) $I=\int\limits_0^{\pi/2}\cos x dx$

Đáp số: 1) $e-1$; 2) 1.

Bài số 5. Tính các tích phân xác định sau

1) $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$ 7) $\int\limits_0^1 e^{x-e^x}dx$

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos^2 x}dx$ 8) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

3) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ 9) $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$

4) $\int\limits_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx$ 10) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$

5) $\int\limits_1^6 \frac{1}{1+\sqrt{3x-2}}dx$ 11) $\int\limits_0^2 \frac{1}{3+2\cos x}dx$

6) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$ 12) $\int\limits_0^1 \frac{1}{(2x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$

Đáp số : 1) $\frac{45}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right)$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $2+\frac{2}{3}\ln\frac{2}{5}$; 6) $\ln\frac{3}{2}$; 7) $e^{-1}-e^{-e}$;

8) $\frac{\pi}{4}$; 9) $e-2$; 10) $\frac{\pi^2}{4}-2$; 11) $\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{\tan 1}{\sqrt{5}}\right)$; 12) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{6+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}+1}\right)$.

Bài số 6. Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

Áp dụng:

1) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$

2) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Hướng dẫn : Đặt $t=\pi-x$ *; 1)* π *; 2)* $\frac{\pi^2}{4}$.

Bài số 7*. Tính các tích phân xác định sau

1) $\int_0^{1} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\cos x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

4) $\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

5) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{9+4\cos^4 x}dx$

6) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(e^x+1\right)}dx$

Đáp số : 1) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$; 2) ; 3) $\frac{\pi}{8}\ln 2$; 4) $\frac{\pi}{8}\ln 2$; 5) ; 6) $\frac{\pi}{4}$.

Bài số 8. Tính các tích phân suy rộng

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

2) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}dx$

3) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$

4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}dx$

7) $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$

8) $\int_0^{+\infty} \frac{2x-1}{e^{3x}}dx$

9) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$

10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+8}dx$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{(x+2)^2}dx$ 11) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6) $\displaystyle\int_{-3}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+10}dx$ 12) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

Đáp số : 1) $\dfrac{\pi^2}{8}$*; 2)* $\dfrac{\pi}{2}$*; 3)* $\dfrac{1}{2}$*; 4)* $-\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right)$*; 5)* $+\infty$*;*

6) $\dfrac{\pi}{2}$*;7)* $\dfrac{1}{4}$*; 8)* $-\dfrac{1}{9}$*; 9) 1; 10)* $\dfrac{\pi}{2}$*;11)* $\dfrac{256}{15}$*; 12) 2.*

Bài số 9. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng sau

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^5}dx$ 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+e^x}dx$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+2x+1}dx$ 7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{2+x^2}dx$

3) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$ 8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 3x}{2+x}dx$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-4\sin 3x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$ 9) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2\cos^2 x}dx$ 10) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$

Đáp số : 1) hội tụ; 2) hội tụ; 3) hội tụ; 4) hội tụ; 5) phân kỳ;

6) hội tụ; 7) phân kỳ; 8) phân kỳ; 9) hội tụ; 10) phân kỳ.

Bài số 10. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng sau

1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$ 6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$

2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{e^x-\cos x}dx$ 7) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x\left(e^x-e^{-x}\right)}}dx$

3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x\ln x}{x}dx$ 8) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$

9) $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt[3]{(1-x^3)\cos\frac{\pi x}{2}}}dx$

5) $\int_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

10) $\int_1^e \frac{1}{x\ln^3 x}dx$

Đáp số : 1) hội tụ; 2) phân kỳ; 3) phân kỳ; 4) phân kỳ;

5) hội tụ; 6) hội tụ; 7) hội tụ; 8) hội tụ; 9) hội tụ; 10) phân kỳ.

Bài số 11. Cho hàm doanh thu biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MR(Q) = 50 - 2Q - 3Q^2$. Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm.

Đáp số: $TR(Q) = 50Q - Q^2 - Q^3$; $P = 50 - Q - Q^2$.

Bài số 12. Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC(Q) = 32 + 18Q - 12Q^2$. và $FC = 43$. Hãy tìm hàm tổng chi phí và chi phí khả biến.

Đáp số: $TC(Q) = 43 + 32Q + 9Q^2 - 4Q^3$; $V(Q)32Q + 9Q^2 - 4Q^3$.

Bài số 13. Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC(Q) = 12e^{0,5Q}$ và $FC = 36$. Hãy tìm hàm tổng chi phí.

Đáp số: $TC(Q) = 24e^{0,5Q} + 12$.

Bài số 14. Cho biết doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MR(Q) = 40Q - 16e^{0,4Q}$. Hãy tìm hàm tổng doanh thu.

Đáp số: $TR(Q) = 40 + 20Q^2 - 40e^{0,4Q}$.

Bài số 15. Cho hàm cầu ngược đối với một loại sản phẩm như sau:

$$P = 42 - 5Q - Q^2$$

Giả sử sản phẩm được bán trên thị trường với giá $P_0 = 6$. Hãy tính thặng dư của người tiêu dùng.

Đáp số : $248/3$.

Bài số 16. Cho hàm cung đối với một loại sản phẩm như sau:

$$Q_S = \sqrt{P-1} + 2$$

Giả sử sản phẩm được bán trên thị trường với giá $P_0 = 10$. Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất.

Đáp số : $100/3$.

Chương 6

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

6.1. Các khái niệm cơ bản

6.1.1. Hàm số hai biến số

Định nghĩa: Cho x, y, w là các biến số, nếu có một quy luật f cho tương ứng với mỗi cặp giá trị của hàm hai biến số (x,y) một giá trị xác định và duy nhất của biến số w thì ta gọi f là một hàm số hai biến số.

Coi (x,y) là tọa độ điểm $M(x,y)$ trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, thì f được coi là hàm với biến điểm M.

Ký hiệu: $w = f(x,y)$ hay $w = f(M)$.

+) Khi $x = x_0$ và $y = y_0$ thì giá trị tương ứng của hàm số ký hiệu là $f(x_0,y_0)$ và được gọi là giá trị của hàm số tại điểm (x_0,y_0).

+) Miền D gồm tất cả các điểm $M(x,y)$ mà tại đó biểu thức $w = f(x,y)$ có nghĩa, được gọi là miền xác định của hàm số f, còn số thực w ứng với điểm $M(x,y)$ được gọi là giá trị của hàm số tại điểm $M(x,y)$ và ký hiệu là $f(x,y)$ hay $f(M)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số : $f(x,y) = xy + \dfrac{y}{x}$. Hãy tìm biểu thức của hàm số : $f(y,x)$, $f\left(x,\dfrac{1}{y}\right)$.

Giải

Tìm hàm số $f(y,x)$

Trong biểu thức $f(x,y) = xy + \dfrac{y}{x}$ thay x bởi y và y bởi x ta được:

$$f(y,x) = yx + \frac{x}{y}$$

Tìm hàm số $f\left(x,\dfrac{1}{y}\right)$

Trong biểu thức $f(x,y) = xy + \dfrac{y}{x}$ thay x bởi x và y bởi $\dfrac{1}{y}$ ta được:

$$f\left(x,\frac{1}{y}\right)=\frac{x}{y}+\frac{1}{xy}$$

Ví dụ 2. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=\sqrt{xy}$.

b) $f(x,y)=\arcsin\left(x^2+y^2\right)+\sqrt{2-x^2-y^2}$.

Giải

a) Điều kiện để hàm số $f(x,y)=\sqrt{xy}$ có nghĩa là

$$xy\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x\leq 0\\ y\leq 0\end{cases}$$

Vậy miền xác định $D=\left\{M(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\geq 0\right\}$.

b) Điều kiện để hàm số $f(x,y)=\arcsin\left(x^2+y^2\right)+\sqrt{2-x^2-y^2}$ có nghĩa là

$$\begin{cases}x^2+y^2\leq 1\\ 2-x^2-y^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x^2+y^2\leq 1$$

Vậy miền xác định $D=\left\{M(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$.

6.1.2. Định nghĩa hàm n biến số

Một hàm số f của biến điểm $M(x_1,x_2,...,x_n)$ (hàm số của n biến số $x_1,x_2,...,x_n$), với miền biến thiên $D\subset\mathbb{R}^n$, là một quy luật đặt tương ứng mội điểm $M(x_1,x_2,...,x_n)\in D$ với một giá trị xác định và duy nhất của biến số w.

Ký hiệu: $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$ hay $w=f(M)$.

Miền D được gọi là miền xác định của hàm số f (nếu bài toán không cho biết trước tập xác định thì miền D gồm tất cả các điểm $M(x_1,x_2,...,x_n)$ mà tại đó biểu thức $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$ có nghĩa), còn số thực w tương ứng với điểm $M(x_1,x_2,...,x_n)$ được gọi là giá trị của hàm số tại điểm $M(x_1,x_2,...,x_n)$ và ký hiệu $f(x_1,x_2,...,x_n)$ hay $f(M)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3\sqrt[3]{xyz}$. Tính $f\left(\sqrt{2},\frac{1}{3},1\right)$.

Giải

Ta có : $f\left(\sqrt{2},\frac{1}{3},1\right)=\sqrt{2}^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2-3\sqrt[3]{\sqrt{2}\,\frac{1}{3}1}=\frac{28}{3}-3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

6.1.3. Hàm số hợp

6.1.3.1. Hàm số hai biến số

Xét hàm số $z = f(u,v), (u,v) \in Y$

Giả sử $u = u(x,y), v = v(x,y), M(x,y) \in X$. Khi đó, hàm số z là hàm số của hai biến (x,y) theo quy luật sau:

$$(x,y) \xrightarrow{u,v} (u,v) \xrightarrow{f} z$$

Hàm số $z = f[u(x,y), v(x,y)]$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $z = f(u,v)$ và hàm số $u = u(x,y), v = v(x,y)$.

Ví dụ 4. Hàm số $z = (x+2y)^2 + 2^{xy}$ là hàm hợp của hai hàm số $z = u^2 + 2^v$ và các hàm hai biến số $u = x + 2y, v = xy$.

6.1.3.2. Hàm số n biến số

Xét hàm số $w = f(u_1, u_2, ..., u_m), (u_1, u_2, ..., u_m) \in Y$.

Giả sử

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, ..., x_2), u_2 = u_2(x_1, x_2, ..., x_2), ...,$$
$$u_m = u_m(x_1, x_2, ..., x_2), (x_1, x_2, ..., x_2) \in X.$$

Khi đó, hàm số w là hàm số của n biến số theo quy luật sau:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \xrightarrow{u_k} (u_1, u_2, ..., u_m) \xrightarrow{f} w$$

Hàm số $w = f[u_1(x_1, x_2, ..., x_2), u_2(x_1, x_2, ..., x_2), ..., u_m(x_1, x_2, ..., x_2)]$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $w = f(u_1, u_2, ..., u_m)$ và hàm số $u_i = u_i(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ví dụ 5. Hàm số $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z^2) + \sin(x^3 y)$ là hàm hợp của hai hàm số $w = \ln u + \sin v$ và các hàm ba biến số $u = x^2 + y^2 + 2z^2, v = x^3 y z^0$.

6.1.4. Một số hàm trong kinh tế

6.1.4.1. Hàm sản xuất

Khi phân tích hoạt động sản xuất, các nhà kinh tế quan tâm đến hai yếu tố đầu vào quan trọng là vốn (capital) và lao động (labor) và chúng được ký hiệu là K và L. Do đó, hàm sản xuất có dạng:

$$Q = f(K, L).$$

Ý nghĩa.

Hàm sản xuất biểu diễn sự phụ thuộc của sản lượng hàng hoá vào hai yếu tố đầu vào vốn (tư bản) và lao động.

Một hàm sản xuất mà kinh tế học thường sử dụng là hàm sản xuất dạng Cobb – Douglas có dạng: $Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$

Trong đó: a, α, β là các hằng số dương.

6.1.4.2. Hàm doanh thu, chi phí, lợi nhuận

a. Hàm chi phí

+) Hàm chi phí phụ thuộc đầu vào: $TC = TC(K, L)$.

Nếu tính theo các yếu tố sản xuất thì hàm chi phí là hàm số của các yếu tố sản xuất và có dạng:

$$TC(K, L) = p_K K + p_L L + C_0.$$

Trong đó:

p_K : Giá thuê một đơn vị vốn (tư bản).

p_L : Giá thuê một đơn vị lao động.

C_0 : Chi phí cố định.

+) Hàm chi phí kết hợp: $TC = TC(Q_1, Q_2)$.

Trong đó

Q_1: Số đơn vị hàng hóa 1;

Q_2: Số đơn vị hàng hóa 2.

b. Hàm doanh thu và hàm lợi nhuận

+) Nếu doanh nghiệp là doanh nghiệp cạnh tranh thì tổng doanh thu của doanh nghiệp phụ thuộc vào K, L và có dạng:

$$TR = P \cdot f(K, L) = TR(K, L) \quad (P: \text{ là giá sản phẩm})$$

+) Hàm doanh thu gộp:

$$TR = TR_1 + TR_2 = P_1.Q_1 + P_2.Q_2 = TR(Q_1, Q_2)$$

Với P_1 : là giá sản phẩm mặt hàng 1, P_2 : là giá sản phẩm mặt hàng 2.

c. Hàm lợi nhuận

Hàm lợi nhuận: $\pi = TR - TC$

+) Hàm lợi nhuận phụ thuộc đầu vào

$$\pi = P.f(K,L) - (p_k K + p_L L + C_0) = \pi(K,L)$$

+) Hàm lợi nhuận phụ thuộc đầu ra

$$\pi(Q_1, Q_2) = TR(Q_1, Q_2) - TC(Q_1, Q_2).$$

6.1.4.3. Hàm lợi ích

Giả sử cơ cấu tiêu dùng của người tiêu dùng gồm có n mặt hàng. Mỗi giỏ hàng là một bộ gồm n số thực $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, trong đó x_1 là lượng hàng hoá T_1, x_2 là lượng hàng hoá $T_2, ..., x_n$ là lượng hàng hoá T_n. Hàm lợi ích là hàm số đặt tương ứng với mỗi túi hàng $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ với một giá trị U nhất định theo quy tắc: Giỏ hàng nào được ưa chuộng nhiều hơn thì gán giá trị lợi ích lớn hơn. Hàm lợi ích có dạng tổng quát như sau:

$$U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Hàm lợi ích hay được sử dụng là hàm Cobb – Douglas:

$$U = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \text{ là các hằng số dương}).$$

6.1.4.4. Hàm cung, cầu thị trường n hàng hóa liên quan

Mức cung và mức cầu đối với một loại hàng hoá trên thị trường không những chỉ phụ thuộc vào giá hàng hoá đó mà còn bị chi phối bởi giá của các hàng hoá liên quan và thu nhập của người tiêu dùng. Trên thị trường n hàng hoá liên quan hàm cung và hàm cầu đối với hàng hoá i có dạng (giả thiết thu nhập không thay đổi):

$$Q_{S_i} = S_i(P_1, P_2, ..., P_n)$$

$$Q_{D_i} = D_i(P_1, P_2, ..., P_n)$$

Trong đó, Q_{S_i} là lượng cung hàng hoá i, Q_{D_i} là lượng cầu hàng hoá i, P_i là giá của hàng hoá i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$.

Ví dụ 6. Cho các hàm cầu: $Q_1 = 40 - P_1$; $Q_2 = 30 - 0,5P_2$. Hãy lập hàm doanh thu.

Giải

Từ hai hàm cầu thuận ta suy ra hai hàm cầu đảo như sau:

$$P_1 = 40 - Q_1; \; P_2 = 60 - 2Q_2$$

Hàm doanh thu gộp

$$\begin{aligned} TR(Q_1, Q_2) &= P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \\ &= (40 - Q_1)Q_1 + (60 - 2Q_2)Q_2 \end{aligned}$$

hay

$$TR\left(Q_1,Q_2\right)=-Q_1^2-2Q_2^2+40Q_1+60Q_2$$

Ví dụ 7. Cho hàm sản xuất: $Q\left(K,L\right)=10K^{0,3}L^{0,4}$. Giá thuê một đơn vị vốn $p_K=3$ USD, giá thuê một đơn vị lao động $p_L=2$ USD và giá sản phẩm là $P=4$ USD. Hãy lập hàm lợi nhuận.

Giải

Hàm doanh thu:

$$TR\left(K,L\right)=PQ=40K^{0,3}L^{0,4}$$

Hàm chi phí :

$$TC\left(K,L\right)=p_K K+p_L L=3K+2L$$

Hàm lợi nhuận: $\pi\left(K,L\right)=TR\left(K,L\right)-TC\left(K,L\right)=40K^{0,3}L^{0,4}-3K-2L.$

6.2. Giới hạn và liên tục của hàm số

6.2.1. Giới hạn của hàm nhiều biến số

6.2.1.1. Định nghĩa: Cho $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Ta nói $f\left(X\right)$ tiến về L $\left(f\left(X\right)\to L\right)$ khi X tiến về A $\left(X\to A\right)$, ký hiệu $\lim\limits_{X\to A}f\left(X\right)=L.$

Khi đó các giá trị $X\in D$ đủ gần A, các giá trị $f\left(X\right)$ tương ứng đủ gần L tùy ý.

Ta cũng có thể viết gọn định nghĩa trên theo mệnh đề sau:

6.2.1.2. Mệnh đề: $\left(\lim\limits_{X\to A}f\left(X\right)=L\right)\Leftrightarrow\left(\forall\left\{X_k\right\}\subset D,\lim\limits_{k\to\infty}X_k=A\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}f\left(X_k\right)=L\right).$

Giới hạn trên cũng được gọi là giới hạn kép.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng hàm số $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ có giới hạn tại điểm $A\left(1,2\right)$.

Giải

Dễ nhận thấy điểm $A\left(1,2\right)\in D$ miền xác định của hàm số.

Xét một dãy điểm bất kỳ $X_k\left(x_k,y_k\right)\subset D$ miền xác định của hàm số và dãy điểm $X_k\left(x_k,y_k\right)$ hội tụ đến điểm $A\left(1,2\right)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}x_k=1\\ \lim\limits_{k\to\infty}y_k=2\end{cases}$. Dãy điểm có giá trị hàm số tương ứng là:

$$f\left(X_k\right)=\frac{x_k^2+y_k^2}{x_k y_k}\ \text{ và }\ \lim_{k\to\infty}f\left(X_K\right)=\lim_{K\to\infty}\frac{x_k^2+y_k^2}{x_k y_k}=\frac{1^2+2^2}{1\cdot2}=\frac{5}{2}$$

Vậy hàm số luôn có giới hạn kép tại điểm $A(1,2)$ và giới hạn đó bằng $\frac{5}{2}$.

Ví dụ 9. Tìm giới hạn của hàm số: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

Giải

Ta có:

$$0 \le \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| = \frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|} \le \frac{|x+y|}{|x^2+y^2|-|xy|}$$
$$\le \frac{|x+y|}{2|xy|-|xy|} = \frac{|x+y|}{|xy|} \le \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{y}\right|$$

mà $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| = 0$

Theo nguyên lý kẹp ta được $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$.

6.2.1.3. Giới hạn lặp: Cho hàm hai biến số: $z = f(x,y)$

Trường hợp 1. Cố định $y \neq y_0$. Ta có

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\neq y_0}} f(x,y) = u(y) \text{ và } \lim_{y\to y_0} u(y) = E$$

Ký hiệu:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = E.$$

Trường hợp 2. Cố định $x \neq x_0$. Ta có

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ x\neq x_0}} f(x,y) = v(x) \text{ và } \lim_{x\to x_0} v(x) = F$$

Ký hiệu:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = F.$$

Các số E, F như trên được gọi là các giới hạn lặp của hàm số.

Lưu ý: Nói chung các giới hạn kép và giới hạn lặp là khác nhau.

Ví dụ 10. Xét giới hạn lặp và giới hạn kép của hàm số : $f(x,y) = \frac{x^3+xy^2}{x^3+y^3}$ tại điểm $(0,0)$.

Giải

Hàm số $f(x,y)$ không có giới hạn kép tại điểm $(0,0)$. Thật vậy, lấy hai dãy điểm $X_k\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right), Y_k\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right) \subset D,$ miền xác định của hàm số và đều hội tụ về điểm $(0,0)$ nhưng các giá trị của chúng khác nhau. Bây giờ, ta xét giới hạn lặp của hàm số tại điểm $(0,0)$

Ta có

$$u(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{0^3 + 0\cdot y^2}{0 + y^3} = 0, \ \forall y \neq 0.$$

Suy ra

$$E = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} u(y) = 0.$$

Ta có

$$v(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{x^3 + x\cdot 0^2}{x^3 + 0^3} = 1, \ \forall x \neq 0.$$

Suy ra

$$F = \lim_{yx\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} v(x) = 1.$$

Cách làm tương tự cho hàm n biến số.

6.2.2. Hàm số liên tục

Định nghĩa: Cho $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $A \in D.$ Nếu giới hạn của hàm f tại điểm A tồn tại và bằng giá trị của hàm số tại điểm đó, nghĩa là $\lim_{X\to A} f(X) = f(A).$ Ta nói hàm f liên tục tại điểm $A.$

Ví dụ 11. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x,y)$ liên tục tại điểm $(0,0).$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

$$0 \leq \left|\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|xy||x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq |x||y| \leq x^2 + y^2$$

mà $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) = 0$

nên suy ra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\right]=0.$$

Ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=f\left(0,0\right)=0$. Vậy hàm số $f(x,y)$ liên tục tại điểm $(0,0)$.

6.3. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần

6.3.1. Đạo hàm riêng

6.3.1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

a. Trường hợp hàm số hai biến số

Cho hàm số $z=f\left(x,y\right)$, $M_0\left(x_0,y_0\right)\in D_f$. Nếu giữ giá trị của biến y không đổi và cho giá trị của biến x thay đội một lượng Δx thì hàm số $z=f\left(x,y\right)$ có số gia tương ứng là $f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)$, số gia này gọi là số gia riêng của hàm số $z=f\left(x,y\right)$ theo biến x, tại $M_0\left(x_0,y_0\right)$, ký hiệu là $\Delta_x z\left(M_0\right)$ hay $\Delta_x f\left(M_0\right)$.

Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f\left(M_0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x} \qquad (6.1)$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm số $z=f\left(x,y\right)$ theo biến x tại điểm $\left(x_0,y_0\right)$, ký hiệu là $z'_x\left(M_0\right)$ hay $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(M_0\right)$ hay $f'_x\left(M_0\right)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(M_0\right)$.

Ý nghĩa: Đạo hàm riêng của hàm số $z=f\left(x,y\right)$ theo biến x tại điểm $\left(x_0,y_0\right)$ biểu thị tốc độ biến thiên của giá trị hàm số $z=f\left(x,y\right)$ tại điểm $\left(x_0,y_0\right)$ khi x thay đổi một lượng nhỏ, trong điều kiện giá trị của biến y không thay đổi.

Tương tự, ta cũng có định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số $z=f\left(x,y\right)$ theo biến y tại M_0, ký hiệu là $z'_y\left(M_0\right)$ hay $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(M_0\right)$ hay $f'_y\left(M_0\right)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(M_0\right)$.

Ví dụ 12. Sử dụng định nghĩa hãy tính đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $w=x^3y^2$ tại điểm $\left(1,2\right)$.

b) $f(x,y)=x+(y-1)\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ tại điểm $\left(x,1\right)$.

Giải

a) $w = x^3y^2$ tại điểm $(1,2)$.

Ta có

$$\Delta w_x(1,2) = x^3.2^2 - 1^3.2^2 = 4x^3 - 4\,;\ \Delta x = x - 1$$

Vậy

$$w'_x(1,2) = \lim_{x\to 1}\frac{4x^3-4}{x-1} = \lim_{x\to 1}4\left(x^2+x+1\right) = 12\,.$$

Tương tự:

$$\Delta w_y(1,2) = 1^3.y^2 - 1^3.2^2 = y^2 - 4\,;\ \Delta y = y - 2$$

Vậy

$$w'_y(1,2) = \lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{y-2} = \lim_{y\to 2}(y+2) = 4.$$

b) $f(x,y) = x + (y-1)\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$ tại điểm $(x,1)$.

Ta có

$$f'_x(x,1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x+(1-1)\arccos\sqrt{\frac{x+\Delta x}{1}}\right)-\left(x+(1-1)\arccos\sqrt{\frac{x}{1}}\right)}{\Delta x} = 1$$

Tương tự:

$$f'_y(x,1) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left(x+(1+\Delta y-1)\arccos\sqrt{\frac{x}{1+\Delta y}}\right)-\left(x+(1-1)\arccos\sqrt{\frac{x}{1}}\right)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y.\arccos\sqrt{\frac{x}{\Delta y+1}}}{\Delta y} = \arccos\sqrt{x}.$$

Nhận xét: Để tính đạo hàm riêng f'_x của hàm số $z = f(x,y)$ theo biến x ta xem y như là hằng số và khi đó $z = f(x,y)$ là hàm số của một biến x, do đó ta áp dụng các công thức đạo hàm cơ bản và quy tắc tính đạo hàm của hàm một biến. Tương tự, cho việc tính đạo hàm riêng của z theo y.

Ví dụ 13. Tính đạo hàm riêng của hàm số sau: $z = e^{\sin\frac{y}{x}} + \arctan(xy)$

Giải

Ta có đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số

$$z'_x = e^{\sin\frac{y}{x}}.\cos\frac{y}{x}.\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{y}{1+x^2y^2}.$$

$$z'_y = e^{\sin\frac{y}{x}}.\cos\frac{y}{x}.\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{1+x^2y^2}.$$

b. Trường hợp hàm số n biến số

Đạo hàm riêng của hàm số n biến số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ theo một trong các biến độc lập tại một điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là giới hạn (nếu có) của tỷ số giữa số gia riêng hàm số và số gia của biến độc lập tương ứng khi số gia của biến độc lập đó tiến tới 0.

Ký hiệu:

$$w'_{x_i} = \frac{\partial w}{\partial x_i} = f'_{x_i}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) = \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}{\partial x_i}$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_i + \Delta x_i, ..., \overline{x}_n) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_i, ..., \overline{x}_n)}{\Delta x_i}$$

$$= \lim_{x_i \to \overline{x}_i} \frac{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., x_i, ..., \overline{x}_n) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_i, ..., \overline{x}_n)}{x_i - \overline{x}_i}. \quad (6.2)$$

Chú ý: Đạo hàm riêng của hàm số w theo biến x_i tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ biểu thị tốc độ biến thiên của giá trị hàm số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ khi x_i thay đổi một lượng nhỏ, trong điều kiện giá trị các biến còn lại không thay đổi. Khi tính đạo hàm $w'_{x_i} = f'_{x_i}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ (đạo hàm riêng theo biến x_i) ta coi các biến còn lại như hằng số và xem w như là một hàm của biến x_i. Sau đó áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

Ví dụ 14. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số:

a) $f(x, y) = \ln(x^4 + x^2y^2 + y^2)$

b) $w = \left(\frac{x}{y}\right)^{z^2}$

Giải

a) Đạo hàm riêng cấp 1 của f theo biến x, y

$$f_x^{/}(x,y)=\frac{1}{x^4+x^2y^2+y^2}\left(4x^3+2xy^2\right)$$

$$f_y^{/}(x,y)=\frac{1}{x^4+x^2y^2+y^2}\left(2x^2y+2y\right)$$

b) Đạo hàm riêng cấp 1 của w theo biến x, y

$$w_x^{/}(x,y,z)=z^2\left(\frac{x}{y}\right)^{z^2-1}.\frac{1}{y}$$

$$w_y^{/}(x,y,z)=z^2\left(\frac{x}{y}\right)^{z^2-1}.\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-z^2\frac{x^{z^2}}{y^{z^2+1}}$$

$$w_z^{/}(x,y,z)=\left(\ln\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{z^2}.2z$$

6.3.1.2. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Nếu $z=f(u,v)$ và $u=u(x), v=v(x)$ thì đạo hàm của hàm số z theo biến x là

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} \tag{6.3}$$

Nếu $w=f(u_1,u_2,...,u_m)$ và mỗi biến u_k với $(k = 1,2,...,m)$ lại là hàm của các biến $x_1,x_2,...,x_n$ thì đạo hàm của hàm số w theo x_i $(i=1,2,3...,n)$ được tính theo công thức:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{\partial w}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial w}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial w}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \tag{6.4}$$

(Nếu các đạo hàm ở vế phải tồn tại).

Ví dụ 15. Cho hàm số $w=u^2+\ln v$ với $u=\sin\left(2x+y^2\right)$, $v=x^4+y^4+\cos^2x$. Tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến x, y.

Giải

Ta có

$$\frac{\partial w}{\partial u}=2u,\ \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{1}{v};\ \frac{\partial u}{\partial x}=2\cos\left(2x+y^2\right),\ \frac{\partial v}{\partial x}=4x^3-\sin 2x$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2\sin\left(2x+y^2\right)2\cos\left(2x+y^2\right)+\frac{1}{x^4+y^4+\cos^2x}\left(4x^3-\sin 2x\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos\left(2x+y^2\right),\ \frac{\partial v}{\partial y}=4y^3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2\sin\left(2x+y^2\right).2y\cos\left(2x+y^2\right) + \frac{1}{x^4+y^4+\cos^2 x}.\left(4y^3\right).$$

Ví dụ 16. Cho hàm số $z = f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) + \operatorname{arccot}\frac{x}{y}$. Tính đạo hàm riêng của hàm số $f(-x,y)$ theo biến x và đạo hàm riêng của hàm số $f\left(x,\frac{1}{y}\right)$ theo biến y.

Giải

Cách 1. Ta có:

$$f(-x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) + \operatorname{arccot}\left(-\frac{x}{y}\right) = g(x,y)$$

$$f\left(x,\frac{1}{y}\right) = \ln\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right) + \operatorname{arccot}(xy) = h(x,y)$$

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm g theo biến x

$$g'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.\left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{2x+y}{x^2+y^2}.$$

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm h theo biến y

$$h'_y(x,y) = \frac{1}{x^2+\frac{1}{y^2}}.\left(-\frac{2}{y^3}\right) + \frac{x}{1+x^2y^2} = \frac{-2+xy}{(1+x^2y^2)y}.$$

Cách 2. Xem $f(-x,y)$ là hàm hợp của hàm số $f(u,v)$ và các hàm số $u=-x, v=y$ sau đó tính đạo hàm của hàm số $f(u,v)$ theo biến x theo công thức đạo hàm của hàm hợp.

Tương tự, xem hàm $f\left(x,\frac{1}{y}\right)$ là hàm hợp của hàm số $f(u,v)$ và các hàm số $u = x,\ v = \frac{1}{y}.$

6.3.1.3. Đạo hàm của hàm số ẩn

a. Khái niệm hàm số ẩn

Nếu giá trị của hai biến $x,\ y$ quan hệ với nhau bởi hệ thức $F(x,y)=0$ (*), trong đó $F(x,y)$ là hàm hai biến xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$.

Nếu $\forall x \in X,$ tồn tại hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn hệ thức (*), thì ta nói hệ thức này xác định hàm ẩn $y = f(x)$ trên tập $X.$

Ví dụ 17. Xét hệ thức: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (**)

Với $\forall x \in [-1,1]$ ta có $y(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$

Vậy hàm $y = \sqrt{1 - x^2}$ với $\forall x \in [-1,1]$ và hàm $y = -\sqrt{1 - x^2}$ với $\forall x \in [-1,1]$ là các hàm ẩn xác định bởi hệ thức (**).

b. Định lý hàm ẩn

Cho hàm hai biến $F(x, y)$ xác định trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) và $F(x_0, y_0) = 0,$ giả thiết rằng $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục và $F_y^{/}(x, y) \neq 0$ tại mọi điểm (x, y) thuộc hàm lân cận của (x_0, y_0); Khi đó tồn tại duy nhất hàm liên tục $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0 thỏa mãn điều kiện: $y_0 = f(x_0),$ $F[x, f(x)] = 0$ và

$$y_x^{/} = -\frac{F_x^{/}(x, y)}{F_y^{/}(x, y)} \text{ (công thức đạo hàm của hàm ẩn)}$$

Ví dụ 18. Cho hàm số: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (**)

Xác định hai hàm ẩn liên tục $y = \sqrt{1 - x^2}$ và $y = -\sqrt{1 - x^2}$ với $\forall x \in [-1,1].$

Tại điểm $(x_0, y_0) = (0,1)$ ta có $F(0,1) = 0.$ Khi đó chỉ có hàm ẩn $y = \sqrt{1 - x^2}$ thoả mãn điều kiện $y(0) = 1.$

Sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm ẩn. Tính đạo hàm của y theo $x.$

Đạo hàm riêng của F theo x và theo y

$$F_x^{/}(x, y) = 2x; \; F_y^{/}(x, y) = 2y$$

Đạo hàm của y theo x: $y_x^{/} = -\dfrac{F_x^{/}(x, y)}{F_y^{/}(x, y)} = -\dfrac{x}{y}.$

+) Nếu $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ thì $y_x^{/} = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}.$

+) Nếu $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ thì $y_x^{/} = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}.$

6.3.1.4. Đạo hàm riêng cấp 2

Xét hàm số $z = f(x, y)$. Tính các đạo hàm riêng lần thứ nhất ta được $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ gọi là các đạo hàm cấp một của hàm z. Tính đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng đó ta được các đạo hàm riêng mới gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số z ký hiệu là:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f^{//}_{xx}(x, y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f^{//}_{yy}(x, y). \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f^{//}_{xy}(x, y),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f^{//}_{yx}(x, y). \tag{6.6}$$

Tương tự, đạo hàm riêng cấp hai của hàm số n biến số là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp một.

Ký hiệu:

$$w^{//}_{x_i x_j} = f^{//}_{x_i x_j} \tag{6.7}$$

Hàm số n biến số có n^2 đạo hàm riêng cấp hai và nếu $i \neq j$ thì các đạo hàm riêng cấp 2 được gọi là đạo hàm hỗn hợp cấp 2.

Ví dụ 19. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau: $w = x^3y + xy^2$

Giải

- Tính các đạo hàm riêng cấp 1:

$$w^{/}_{x} = 3x^2y + y^2;\ w^{/}_{y} = x^3 + 2xy.$$

- Tính các đạo hàm riêng cấp 2:

$$w^{//}_{xx} = 6xy;\ w^{//}_{xy} = 3x^2 + 2y = w^{//}_{yx};\ \ w^{//}_{yy} = 2x.$$

Ví dụ 20. Cho hàm số $z = \arctan\frac{x}{y}$. Chứng minh rằng: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Giải

Tính các đạo hàm cấp 1:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}.\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2};\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}.\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

Mặt khác:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Vậy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Ví dụ 21. Cho $\varphi(u)$ là một hàm số có đạo hàm với u là hàm số của hai biến số x và y. Đặt $z = y.\varphi\left(x^2 - y^2\right)$. Hãy chứng minh: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Giải

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm z theo biến x, y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_u'.2x;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(u) + y.\varphi_u'.(-2y)$$

Ta có

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}.y.\varphi_u'.2x + \frac{1}{y}.\left[\varphi(u) + y\varphi_u'.(-2y)\right]$$

$$= \frac{\varphi(u)}{y} = \frac{y.\varphi\left(x^2 - y^2\right)}{y^2} = \frac{z}{y^2}\ \text{(điều phải chứng minh)}$$

Chú ý: Nói chung, hai đạo hàm hỗn hợp cấp hai theo cùng một cặp biến số nhưng sai khác nhau ở trình tự lấy đạo hàm có thể không bằng nhau. Tuy nhiên, cả hai đạo hàm đó cùng tồn tại và liên tục thì chúng bằng nhau. Trong chương trình của chúng ta chỉ xét những đạo hàm hỗn hợp cấp hai tồn tại và liên tục.

6.3.2. Vi phân và ứng dụng vi phân để tính gần đúng

6.3.2.1. Vi phân cấp 1

Xét hàm số $w = f(x, y)$. Khi đồng thời cho x số gia Δx và y số gia Δy thì hàm số $w = f(x, y)$ có số gia tương ứng là:

$$\Delta w = \Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Số gia này gọi là số gia toàn phần của hàm số $w = f(x, y)$ tại điểm (x, y).

Nếu hàm số $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f_x'(x, y)$ và $f_y'(x, y)$ liên tục tại điểm (x_0, y_0) thì số gia toàn phần Δf tại điểm (x_0, y_0) có thể viết dưới dạng:

$$\Delta w = \Delta f = f_x^{/}(x_0, y_0)\Delta x + f_y^{/}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \tag{6.8}$$

Trong đó, $\alpha, \beta \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$.

Định nghĩa: Nếu hàm số $w = f(x, y)$ xác định trong miền D và có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ thì biểu thức $f_x^{/}(x_0, y_0)\Delta x + f_y^{/}(x_0, y_0)\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số $w = f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và được ký hiệu là dw hay $df(x_0, y_0)$.

Vậy vi phân toàn phần của hàm số hai biến số tại một điểm $M_0(x_0, y_0)$ là:

$$dw = f_x^{/}(x_0, y_0)\Delta x + f_y^{/}(x_0, y_0)\Delta y \tag{6.9}$$

Hay:

$$df(x_0, y_0) = f_x^{/}(x_0, y_0)\Delta x + f_y^{/}(x_0, y_0)\Delta y. \tag{6.10}$$

Với x, y là các biến độc lập, ta có $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ và khi không nhấn mạnh vi phân toàn phần tại một điểm nào đó thì biểu thức vi phân toàn phần của hàm số được viết:

$$df = f_x^{/}dx + f_y^{/}dy \tag{6.11}$$

Ví dụ 22. Tính vi phân toàn phần của hàm số : $w = f(x, y) = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$ tại điểm $M_0(1, 2)$ biết $\Delta x = 0,1;\ \Delta y = 0,2$.

Giải

Ta có đạo hàm riêng cấp 1

$$f_x^{/}(x, y) = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2};\ f_y^{/}(x, y) = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}$$

Vậy

$$f_x^{/}(1, 2) = \frac{2.1 + 2}{1^2 + 1.2 + 2^2} = \frac{4}{7};\ f_y^{/}(1, 2) = \frac{1 + 2.2}{1^2 + 1.2 + 2^2} = \frac{5}{7}.$$

Vi phân toàn phần của hàm số tại điểm $M_0(1, 2)$ là:

$$df(1, 2) = \frac{4}{7}.0,1 + \frac{5}{7}0,2 = 0,2.$$

Tương tự, giả thiết hàm số n biến số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ có các đạo hàm riêng liên tục theo tất cả các biến độc lập, biểu thức vi phân toàn phần là:

$$dw = f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n \tag{6.12}$$

Với $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Ví dụ 23. Viết biểu thức vi phân toàn phần của hàm số:

$$w = \tan\left(\frac{xy^2}{z}\right)$$

Giải

Ta có đạo hàm riêng cấp 1

$$w'_x = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\frac{y^2}{z};\ w'_y = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\frac{2xy}{z};$$

$$w'_z = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\left(-\frac{xy^2}{z^2}\right).$$

Biểu thức vi phân toàn phần của hàm số là:

$$dw = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\frac{y^2}{z}dx + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\frac{2xy}{z}dy + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\left(-\frac{xy^2}{z^2}\right)dz.$$

6.3.2.2. Ứng dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng

Từ (6.8) ta suy ra: $\Delta f = df + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

Trong đó, $\alpha, \beta \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$. Do đó, trong trường hợp hàm số $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục thì Δf khác df càng ít khi Δx, Δy càng nhỏ (về giá trị tuyệt đối). Vì vậy, ta có thể tính đơn giản: $\Delta f \approx df$ với Δx, Δy đủ nhỏ.

Ví dụ 24. Tính gần đúng $(0,99)^{2,01}$.

Giải

Ta xét hàm số $f(x, y) = x^y$ thì số phải tính $(0,99)^{2,01}$ chính là $f(0,99; 2,01)$.

Mặt khác:

$$f(0,99;2,01) = f(1-0,01;2+0,01)$$

$$\Delta f(1;2) = f(1-0,01;2+0,01) - f(1,2)$$

Mà theo công thức gần đúng $\Delta f \approx df$, tại $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ với $\Delta x = -0,01,\ \Delta y = 0,01$. Suy ra:

$$f(0,99;2,01) \approx f(1,2) + df(1,2).$$

Với

$$f(1,2) = 1^2 = 1,\ f_x^{/} = yx^{y-1},\ f_y^{/} = x^y \ln x$$

$$df(1,2) = yx^{y-1}.\Delta x + x^y \ln x.\Delta y = 2.1.(-0,01) + 1.\ln 1.0,01 = -0,02$$

Vậy

$$f(0,99;2,01) \approx 1 - 0,02 = 0,98.$$

Nhận xét

Để tính gần đúng một số A nào đó ta phải tìm được biểu thức của hàm số $f(x,y)$ (nếu chỉ cần hai biến độc lập) sao cho số A chính là giá trị của hàm số tại điểm (x_1, y_1) nào đó $A = f(x_1, y_1)$. Sau đó viết $f(x_1, y_1)$ dưới dạng

$$f(x_1, y_1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

trong đó $x_0,\ y_0$ được chọn sao cho giá trị của hàm $f(x_0, y_0)$ được tính dễ dàng (chính xác), suy ra $\Delta x = x_1 - x_0,\ \Delta y = y_1 - y_0$ rồi tính gần đúng số gia toàn phần

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0).$$

Cuối cùng sử dụng công thức:

$$df(x_0, y_0) = f_x^{/}(x_0, y_0)\Delta x + f_y^{/}(x_0, y_0)\Delta y \tag{6.13}$$

Vậy

$$A = f(x_1, y_1) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0). \tag{6.14}$$

6.3.2.3. Vi phân cấp 2

Định nghĩa: Vi phân toàn phần của vi phân toàn phần cấp một dw của hàm số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của hàm số đó và được ký hiệu như sau:

$$d^2w,\ d^2f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{6.15}$$

Đối với trường hợp hàm số hai biến số biểu thức vi phân toàn phần cấp hai là:

$$d^2w = w_{xx}^{//}(dx)^2 + 2w_{xy}^{//}(dxdy) + w_{yy}^{//}(dy)^2. \tag{6.16}$$

Ví dụ 25. Viết biểu thức vi phân toàn phần cấp hai của hàm số:

$$w = e^{x+2y}$$

Giải

Tính đạo hàm riêng cấp 1:

$$w_x^{/} = e^{x+2y};\ w_y^{/} = 2e^{x+2y}$$

Tính đạo hàm riêng cấp 2:

$$w_{xx}^{//} = e^{x+2y};\ \ w_{xy}^{//} = 2e^{x+2y} = w_{yx}^{//};\ w_{yy}^{//} = 4e^{x+2y}$$

Biểu thức vi phân toàn phần cấp 2:

$$dw = e^{x+2y}(dx)^2 + 2.2e^{x+2y}(dxdy) + 4e^{x+2y}(dy)^2.$$

6.4. Cực trị hàm nhiều biến

6.4.1. Cực trị tự do

6.4.1.1. Khái niệm cực trị địa phương

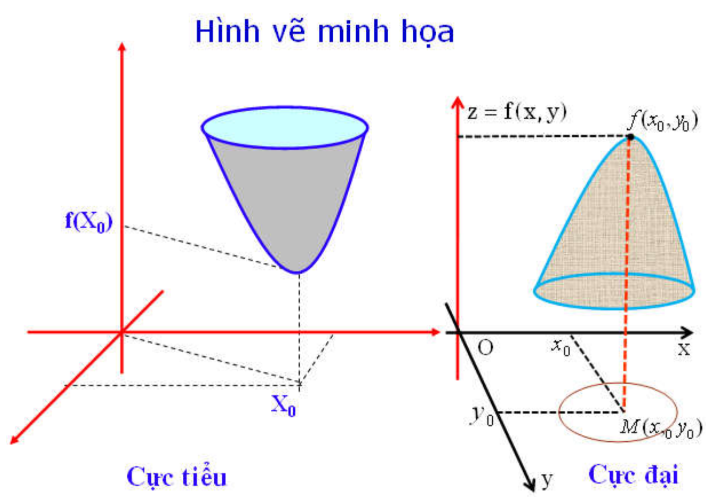
Cho hàm n biến $f:\ D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in D$. Hàm f xác định và liên tục trong miền

$$D = \left\{X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i; i = 1, 2, \ldots, n\right\} \qquad (6.17)$$

+) Hàm f đạt cực đại tại điểm X_0, nếu $f(X) \le f(X_0);\ \forall X \in D$.

+) Hàm f đạt cực tiểu tại điểm X_0, nếu $f(X) \ge f(X_0);\ \forall X \in D$.

+) Hàm số $f(X)$ đạt cực đại hay cực tiểu tại điểm X_0 được gọi là điểm cực trị của hàm số.



Bài toán 1: Tìm cực trị của hàm số $w = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = f(X)$ với $X_0 \in D$

*** Điều kiện cần:** Giả sử hàm số $w = f(X)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong miền D. Để hàm số này đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm $X_0 \in D$ thì tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu:

$$w'_{x_i} = f'_{x_i}(X_0) = 0;\ \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.18}$$

Điểm X_0 thoả mãn điều kiện trên được gọi là **điểm dừng** của hàm số $f(X)$.

*** Điều kiện đủ:** Giả sử X_0 là một điểm dừng của hàm số $w = f(X)$ và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp hai liên tục.

• **Định lý 1:** Xét dạng toàn phương của n biến số $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$

$$d^2f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j \tag{6.19}$$

trong đó $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(X_0)$.

i) Nếu d^2f là dạng toàn phương xác định dương thì điểm dừng X_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(X)$.

ii) Nếu d^2f là dạng toàn phương xác định âm thì điểm dừng X_0 là điểm cực đại của hàm số $f(X)$.

iii) Nếu d^2f là dạng toàn phương không xác định thì điểm dừng X_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(X)$.

• **Định lý 2:** Xét ma trận của dạng toàn phương d^2f (ma trận Hess):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

có các định thức con chính cấp k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ là:

$$H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \tag{6.21}$$

i) Nếu $H_k > 0$ với $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ (tức là ma trận H có tất cả các định thức con chính dương) thì điểm dừng X_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(X)$.

ii) Nếu $(-1)^k H_k > 0$ với $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ (tức là ma trận H có các định thức con chính cấp lẻ âm và cấp chẵn dương) thì điểm dừng X_0 là điểm cực đại của hàm số $f(X)$.

Trong thực hành, ta thường gặp các bài toán tìm cực trị tự do của hàm hai biến và hàm ba biến. Sau đây chúng tôi sẽ phát biểu các bước tìm cực trị cho các hàm trong những trường hợp này.

6.4.1.2. Trường hợp hàm hai biến

Với hàm hai biến $z = f(x, y)$. Để khảo sát cực trị hàm này ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = f'_x(x, y) = 0 \\ z'_y = f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \tag{6.22}$$

Các nghiệm của hệ là tọa độ các điểm dừng.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ tại các điểm dừng.

Giả sử $M(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số đã cho. Xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{6.23}$$

trong đó

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0);\ \ a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0);$$

$$a_{21} = f''_{yx}(x_0, y_0);\ \ a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Trường hợp 1: Nếu $D > 0$ thì điểm dừng M là điểm cực trị của hàm số $w = f(x, y)$:

$M(x_0, y_0)$ là điểm cực đại nếu $a_{11} < 0$.

$M(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu nếu $a_{11} > 0$.

Trường hợp 2: Nếu $D < 0$ thì điểm dừng M không phải là điểm cực trị của hàm số $w = f(x, y)$.

6.4.1.3. Trường hợp hàm ba biến

Với hàm ba biến $w = f(x, y, z)$. Để khảo sát cực trị hàm này ta thực hiện các bước:

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} w'_x = f'_x(x,y,z) = 0 \\ w'_y = f'_y(x,y,z) = 0 \\ w'_z = f'_z(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{6.24}$$

Các nghiệm của hệ là tọa độ các điểm dừng.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ tại các điểm dừng.

Giả sử $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm dừng của hàm số đã cho. Xét các định thức con chính của ma trận:

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{6.25}$$

Với $H_1 = a_{11}$; $H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $H_3 = |H|$, trong đó:

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{13} = f''_{xz}(x_0, y_0, z_0);$$

$$a_{21} = f''_{yx}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{23} = f''_{yz}(x_0, y_0, z_0);$$

$$a_{31} = f''_{zx}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{32} = f''_{zy}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{33} = f''_{zz}(x_0, y_0, z_0).$$

Trường hợp 1: Nếu $H_1 > 0; H_2 > 0; H_3 > 0$ thì M là điểm cực tiểu của hàm số $w = f(x, y, z)$.

Trường hợp 2 : Nếu $H_1 < 0; H_2 > 0; H_3 < 0$ thì M là điểm cực đại của hàm số $w = f(x, y, z)$.

Chú ý : Trong khuôn khổ chương trình, ta thường gặp những hàm số có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục, nên các đạo hàm chéo đều bằng nhau, do đó $a_{ij} = a_{ji}\ (i \neq j)$.

Ví dụ 26. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 2xy - 8y^3$..

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 2y \quad = 0 \\ z'_y = 2x - 24y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 \quad = -2y \\ 24y^2 = 2x \end{cases}$$

Lập tỉ số vế theo vế của hai phương trình trên, ta có $x = -2y$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$2y(6y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -\frac{1}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hàm số có hai điểm dừng $M_1(0,0)$ và $M_2\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$$z''_{xx} = 6x;\ z''_{yy} = -48y;\ z''_{xy} = z''_{yx} = 2$$

+) Tại điểm $M_1(0,0)$, ta có: $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$

nên M_1 không phải là điểm cực trị.

+) Tại điểm $M_2\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right)$, ta có: $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 12 > 0$ và $a_{11} = 2 > 0$

nên M_2 là điểm cực tiểu. Khi đó giá trị cực tiểu của hàm số là

$$z_{CT} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2.\frac{1}{3}.\left(-\frac{1}{6}\right) - 8\left(-\frac{1}{6}\right)^3 = -\frac{1}{27}.$$

Ví dụ 27. Tìm cực trị của hàm số: $z = -3x^2 - 4y^2 + 2xy - 2x + 3y + 1$.

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = -6x + 2y - 2 = 0 \\ z'_y = -8y + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{22} \\ y = \frac{7}{22} \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng là $M\left(-\frac{5}{22},\frac{7}{22}\right)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$$a_{11} = z''_{xx} = -6; a_{22} = z''_{yy} = -8; a_{12} = a_{21} = z''_{xy} = 2.$$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 44 > 0$ và $a_{11} = -6 < 0$

nên M là điểm cực đại của hàm số. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD} = z\left(-\frac{5}{22},\frac{7}{22}\right) = \frac{825}{484}.$$

Ví dụ 28. Tìm cực trị của hàm số: $w = x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4xz - 2y + 3z + 4$.

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} w'_x = 2x - 4z = 0 \\ w'_y = 4y - 2 = 0 \\ w'_z = 18z - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/5 \\ y = 1/2 \\ z = -3/10 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng là $M\left(\frac{-3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{10}\right)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$$a_{11} = w''_{xx} = 2;\ a_{22} = w''_{yy} = 4;\ a_{33} = w''_{zz} = 18;$$

$$a_{12} = a_{21} = w''_{xy} = 0;\ a_{13} = a_{31} = w''_{xz} = -4;\ a_{23} = a_{32} = w''_{yz} = 0.$$

Lập ma trận: $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

Ta có: $H_1 = 2 > 0;\ H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0;\ H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 80 > 0$

nên M là điểm cực tiểu. Khi đó giá trị cực tiểu của hàm số là

$$z_{CT} = z\left(\frac{-3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{10}\right) = \frac{61}{20}.$$

Ví dụ 29. Tìm cực trị của hàm số $z = 20xy - \frac{10}{x} - \frac{5}{y}$ (điều kiện: $x < 0;\ y < 0$).

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = 20y + \dfrac{10}{x^2} = 0 \\ z'_y = 20x + \dfrac{5}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -\dfrac{1}{x^2} \\ 4x = -\dfrac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y = -1 \\ 4xy^2 = -1 \end{cases}$$

Theo giả thiết $x < 0;\ y < 0$ nên ta có thể xác định quan hệ giữa $x,\ y$ như sau:

$$\frac{2x^2y}{4xy^2} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \frac{x}{2y} = 1 \Rightarrow x = 2y$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$8y^3 = -1 \Rightarrow y^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -1 \text{ (thoả mãn điều kiện)}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng $M\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$$z''_{xx} = -\frac{20}{x^3} \Rightarrow a_{11} = z''_{xx}\left(-1, -\frac{1}{2}\right) = 20;$$

$$z''_{yy} = -\frac{10}{y^3} \Rightarrow a_{22} = z''_{yy}\left(-1, -\frac{1}{2}\right) = 80;$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = 20 \Rightarrow a_{12} = a_{21} = z''_{xy}\left(-1, -\frac{1}{2}\right) = 20.$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 80 \end{vmatrix} = 1200 > 0 \text{ và } a_{11} = 20 > 0$$

nên M là điểm cực tiểu. Khi đó giá trị cực tiểu của hàm số là

$$z_{CT} = 20.(-1).\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{10}{-1} - \frac{5}{-1/2} = 30.$$

Ví dụ 30. Tìm cực trị của hàm số $z = -x^4 - y^4 + x^2 - 2xy + y^2 - 2$.

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = -4x^3 + 2x - 2y = 0 \\ z'_y = -4y^3 - 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Cộng phương trình thứ nhất với phương trình thứ hai của hệ, ta có quan hê giữa hai biến

$$-4x^3 - 4y^3 = 0 \Rightarrow x = -y$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$-4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số có ba điểm dừng $M_1(1,-1), M_2(-1,1)$ và $M_3(0,0)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$$z_{xx}^{//} = -12x^2 + 2;\ z_{yy}^{//} = -12y^2 + 2;\ z_{xy}^{//} = z_{yx}^{//} = -2$$

+) Tại điểm $M_1(1,-1)$, ta có $D = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 96 > 0$ và $a_{11} = -10 < 0$

nên M_1 là điểm cực đại. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD} = z(1,-1) = 0$$

+) Tại điểm $M_2(-1,1)$, ta có $D = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 96 > 0$ và $a_{11} = -10 < 0$

nên M_2 là là điểm cực đại. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD} = z(1,-1) = 0$$

+) Tại điểm $M_3(0,0)$, ta có $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

nên ta chưa thể kết luận được tính chất của điểm này. Ta cần xét điểm M_3 thông qua định nghĩa cực trị địa phương:

Xét những điểm $M(x,y)$ có khoảng cách đến $M_3(0,0)$ nhỏ hơn một số thực dương: $0 < d(M, M_3) < r$.

Xét hiệu :

$$\begin{aligned} z(M) - z(M_3) &= -x^4 - y^4 + x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x-y)^2 - (x^4 + y^4) \end{aligned}$$

Tại những điểm $M(x,y)$ thoả mãn $x = y \neq 0$, ta có

$$z(M) - z(M_3) = -(x^4 + y^4) < 0 \Rightarrow z(M) < z(M_3)$$

Tại những điểm $M(x,y)$ thoả mãn $x = 2y \neq 0$, ta có

$$z(M) - z(M_3) = y^2 - 17y^4 = y^2(1 - 17y^2) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{17}} < y < \frac{1}{\sqrt{17}}$$

nên tại những điểm $M(2y, y)$ mà $-\frac{1}{\sqrt{17}} < y < \frac{1}{\sqrt{17}}$ thì $z(M) > z(M_3)$.

Vậy theo định nghĩa, M_3 không phải là điểm cực trị của hàm số.

6.4.2. Cực trị có điều kiện

6.4.2.1. Bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc

Bài toán. Tìm cực trị của hàm số :

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X) \text{ với điều kiện : } g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(X) = b.$$

Lập hàm phụ Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\left[b - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] \qquad (6.26)$$

với λ: nhân tử Lagrange.

Điều kiện cần: Giả sử các hàm f và g có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ và tại điểm đó ít nhất một trong các đạo hàm riêng của g khác 0. Nếu hàm $w = f(X)$ với điều kiện $g(X) = b$ đạt cực trị tại $\overline{X}$ thì tồn tại một giá trị $\overline{\lambda}$ của nhân tử Lagrange sao cho $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda})$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} L'_{\lambda} = b - g(X) = 0 \\ L'_{x_i} = f'_{x_i} - \lambda g'_{x_i} = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (6.27)$$

Điều kiện đủ: Giả sử các hàm f và g có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm $\overline{X}$ và điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda})$ là một điểm dừng của hàm số Lagrange. Lập ma trận:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6.28)$$

trong đó

$$g_k = g'_{x_k}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n);\ L_{ij} = L''_{x_i x_j}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda});\ (i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Các định thức con chính cấp k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ là

$$\overline{H}_k = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_k \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1k} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_k & L_{k1} & L_{k2} & \ldots & L_{kk} \end{vmatrix} \qquad (6.29)$$

i) Nếu $(-1)^k \overline{H}_k > 0$ với $\forall k = 2,3,\ldots,n$ thì hàm $w = f(X)$ với điều kiện $g(X) = b$ đạt giá trị cực đại tại điểm $\overline{X}$.

ii) Nếu $\overline{H}_k < 0$ với $\forall k = 2,3,\ldots,n$ thì hàm $w = f(X)$ với điều kiện $g(X) = b$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm $\overline{X}$.

6.4.2.2. Trường hợp hàm hai biến

Xét hàm hai biến $z = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = b$.

Bước 1: Lập hàm Lagrange: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\left[b - g(x,y)\right]$ (6.30)

Bước 2: Giải hệ phương trình sau để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda g'_y = 0 \\ L'_\lambda = b - g(x,y) = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

Bước 3: Giả sử $M(x_0, y_0)$ là một điểm dừng ứng với giá trị λ_0, ta xét định thức

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \quad (6.32)$$

trong đó:

$$g_1 = g'_x(x_0,y_0);\ g_2 = g'_y(x_0,y_0);\ L_{11} = L''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0);$$

$$L_{22} = L''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0);\ L_{12} = L_{21} = L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0).$$

Trường hợp 1: Nếu $\left|\overline{H}\right| > 0$ thì hàm số $z = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = b$ đạt giá trị cực đại tại điểm M.

Trường hợp 2: Nếu $\left|\overline{H}\right| < 0$ thì hàm số $z = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = b$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm M.

6.4.2.3. Trường hợp hàm ba biến

Xét hàm ba biến $w = f(x,y,z)$ với điều kiện $g(x,y,z) = b$.

Bước 1: Lập hàm Lagrange

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\left[b - g(x,y,z)\right] \quad (6.33)$$

Bước 2: Giải hệ phương trình sau để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda g'_x & = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda g'_y & = 0 \\ L'_z = f'_z - \lambda g'_z & = 0 \\ L'_\lambda = b - g(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{6.34}$$

Bước 3: Giả sử $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm dừng ứng λ_0, ta có ma trận Hess

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_3 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

Xét các định thức con chính của ma trận Hess

$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \text{ và } \overline{H}_3 = \left|\overline{H}\right|, \tag{6.36}$$

trong đó

$$g_1 = g'_x(x_0, y_0, z_0);\ g_2 = g'_y(x_0, y_0, z_0);\ g_3 = g'_z(x_0, y_0, z_0);$$

$$L_{11} = L''_{xx}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);\ L_{12} = L_{21} = L''_{xy}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);$$

$$L_{22} = L''_{yy}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);\ L_{23} = L_{32} = L''_{yz}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);$$

$$L_{33} = L''_{zz}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);\ L_{13} = L_{31} = L''_{xz}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0).$$

Trường hợp 1: Nếu $\overline{H}_2 > 0;\ \overline{H}_3 < 0$ thì hàm số $w = f(x,y,z)$ với điều kiện $g(x,y,z) = b$ đạt giá trị cực đại tại điểm M.

Trường hợp 2: Nếu $\overline{H}_2 < 0;\ \overline{H}_3 < 0$ thì hàm số $w = f(x,y,z)$ với điều kiện $g(x,y,z) = b$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm M.

Ví dụ 31. Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số $z = -x^2 - 2y^2$ với điều kiện $3x - 2y = -22$.

Giải

Bước 1: Lập hàm Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = -x^2 - 2y^2 + \lambda(-22 - 3x + 2y)$$

Bước 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L_x^{/} = -2x - 3\lambda & = 0 \\ L_y^{/} = -4y + 2\lambda & = 0 \\ L_\lambda^{/} = -22 - 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -3\lambda/2 \\ y & = \lambda/2 \\ 3x - 2y = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng là $M(-6,2)$ ứng với $\lambda = 2$.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện đủ

$$g_1 = g_x^{/} = 3;\ g_2 = g_y^{/} = -2;\ L_{11} = L_{xx}^{//} = -2;$$

$$L_{22} = L_{yy}^{//} = -4;\ L_{12} = L_{21} = L_{xy}^{//} = 0.$$

Xét định thức :

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 44 > 0$$

Vậy điểm M là điểm cực đại. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD} = z(-6,2) = -(-6)^2 - 2.2^2 = -44.$$

Ví dụ 32. Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số $z = 3x - y$ với điều kiện $3x^2 + 4y^2 = 208$.

Giải

Bước 1: Lập hàm Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = 3x - y + \lambda\left(208 - 3x^2 - 4y^2\right)$$

Bước 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L_x^{/} = 3 - 6\lambda x & = 0 \\ L_y^{/} = -1 - 8\lambda y & = 0 \\ L_\lambda^{/} = 208 - 3x^2 - 4y^2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x = 1 & (1) \\ 8\lambda y = -1 & (2) \\ 3x^2 + 4y^2 = 208 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta có $x = -4y$ ($x \neq 0,\ y \neq 0$, vì nếu $x = 0,\ y = 0$ là vô lý)

Thay vào phương trình thứ (3), ta có

$$52y^2 = 208 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right.$$

Với $y = -2$ kết hợp với (1) và (2), ta có :

$$\begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 8\lambda y = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -2 \\ \lambda = \dfrac{1}{16} \end{cases}$$

Với $y = 2$ kết hợp với (1) và (2), ta có :

$$\begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 8\lambda y = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 2 \\ \lambda = -\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

Vậy hàm số có hai điểm dừng:

$$M_1(8,-2) \text{ ứng với } \lambda_1 = \frac{1}{16};\ M_2(-8,2) \text{ ứng với } \lambda_2 = -\frac{1}{16}.$$

Bước 3: Kiểm tra điều kiện đủ tại điểm $M_i(x_i, y_i)$ ứng với $\lambda_i (i = 1,2)$

$$g_x^{/} = 6x;\ g_y^{/} = 8y;\ L_{xx}^{//} = -6\lambda;\ L_{yy}^{//} = -8\lambda;\ L_{xy}^{//} = L_{yx}^{//} = 0.$$

Suy ra

$$g_1 = 6x_i; g_2 = 8y_i;\ L_{11} = -6\lambda_i;\ L_{22} = -8\lambda_i; L_{12} = L_{21} = 0.$$

Xét định thức:

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 6x_i & 8y_i \\ 6x_i & -6\lambda_i & 0 \\ 8y_i & 0 & -8\lambda_i \end{vmatrix} = 96\lambda_i\left(3x_i^2 + 4y_i^2\right) = 19968.\lambda_i$$

+) Tại điểm $M_1(8,-2)$ ứng với $\lambda = \frac{1}{16}$. Ta có $\left|\overline{H}\right| = 19968 \cdot \frac{1}{16} = 1248 > 0$

nên M_1 là điểm cực đại. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD} = z(8,-2) = 3.8 + 2 = 26.$$

+) Tại điểm $M_2(-8,2)$ ứng với $\lambda = -\frac{1}{16}$.

Ta có $\left|\overline{H}\right| = 19968 \cdot \left(-\frac{1}{16}\right) = -1248 < 0.$

nên M_2 là điểm cực tiểu. Khi đó giá trị cực tiểu của hàm số là

$$z_{CT} = z(-8,2) = 3.(-8) - 2 = -26.$$

6.4.3. Ứng dụng trong kinh tế

6.4.3.1. Hàm cận biên riêng

Hàm cận biên riêng của đại lượng $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ theo đại lượng x_i tại điểm $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, ký hiệu là $M_{x_i}f(x_1, x_2, ..., x_n)$, là độ biến đổi của đại lượng y khi đại lượng x_i tăng lên 1 đơn vị tại $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ trong điều kiện các yếu tố khác không đổi.

Biểu thức toán học của hàm cận biên riêng

$$M_{x_i}f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right). \tag{6.37}$$

Tổng quát ta có, hàm cận biên riêng của đại lượng $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ theo đại lượng x_i:

$$M_{x_i}y = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right). \tag{6.38}$$

Chú ý : *Trong thực tế, lượng cận biên riêng* $M_{x_i}f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ *của* $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *theo* x_i *tại* $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ *xấp xỉ bằng độ biến đổi của* y *khi* x_i *tăng 1 một đơn vị từ trạng thái* $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

Ví dụ 33. Giả sử hàm sản suất của một doanh nghiệp là:

$$Q(K, L) = 20K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$$

Trong đó: K, L, Q là mức sử dụng vốn, mức sử dụng lao động và sản lượng hàng ngày.

a) Giả sử doanh nghiệp đó đang sử dụng 16 đơn vị vốn và 81 đơn vị lao động trong một ngày tức $K = 16,\ L = 81$.

Sản lượng cận biên của vốn là:

$$MPK(16,81) = f_K^{/}(16,81) = 5.\left(16^{-0,75}81^{0,75}\right) = 16,875$$

Sản lượng cận biên của lao động là:

$$MPL(16,81) = f_L^{/}(16,81) = 15.\left(16^{0,25}81^{-0,25}\right) = 10$$

Nghĩa là, nếu doanh nghiệp tăng mức sử dụng vốn K từ 16 lên 17 đơn vị và giữ nguyên mức sử dụng lao động $L = 81$ trong một ngày, thì sản lượng tăng thêm xấp xỉ $16,875$ đơn vị sản phẩm. Tương tự, nếu giữ nguyên mức sử dụng vốn $K = 16$ và tăng mức sử dụng lao động L từ 81 lên 82 trong một ngày thì sản lượng tăng thêm xấp xỉ 10 đơn vị sản phẩm.

b) Tại $K_0 = 16, L_0 = 81$, nếu giảm vốn K xuống 0,5 đơn vị và tăng lao động L lên 2 đơn vị thì Q sẽ thay đổi như thế nào?

Ta có biểu thức vi phân toàn phần của sản lượng Q theo vốn K và theo lao động L như sau:

$$\Delta(Q) \approx f_K^{/}(K_0, L_0)\Delta K + f_L^{/}(K_0, L_0)\Delta L$$

hay

$$\Delta(Q) \approx \frac{135}{8}.(-0,5) + 10 \cdot 2 = \frac{185}{16} > 0$$

Vậy Q sẽ tăng xấp xỉ 185/16 đơn vị.

6.4.3.2. Hệ số co dãn riêng

Hệ số co dãn riêng của đại lượng $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ theo đại lượng x_i tại $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, ký hiệu $E_{y|x_i}$, là (%) độ biến đổi của y khi x_i tăng lên một đơn vị (1%).

Biểu thức của hệ số co dãn riêng

$$E_{y|x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} \ (\%) . \qquad (6.39)$$

Ví dụ 34. Giả sử hàm cầu của hàng hoá 1 trên thị trường hai hàng hoá liên quan có dạng sau: $Q_{D_1}(P_1, P_2) = 6300 - 2P_1^2 - \frac{5}{3}P_2^2$. Trong đó, P_1, P_2 tương ứng là giá của hàng hoá 1, 2. Tính hệ số co dãn của cầu theo giá tại điểm $(20,30)$.

Giải

Hệ số co dãn của cầu theo giá P_1 đối với giá của hàng hoá đó tại thời điểm (P_1, P_2)

$$\varepsilon_{Q_{D_1}|P_1} = \frac{\partial Q_{D_1}}{\partial P_1}\frac{P_1}{Q_{D_1}} = -4P_1.\frac{P_1}{6300 - 2P_1^2 - \frac{5}{3}P_2^2}$$

Hệ số co dãn của cầu đối với hàng hoá thứ nhất theo giá hàng hoá thứ hai P_2 tại thời điểm (P_1, P_2) là:

$$\varepsilon_{Q_{D_1}|P_2} = -\frac{10}{3}P_2.\frac{P_2}{6300 - 2P_1^2 - \frac{5}{3}P_2^2}$$

Tại điểm $(20,30)$ ta có: $\varepsilon_{Q_{D1}|P_1} = -0,4$; $\varepsilon_{Q_{D1}|P_2} = -0,75$.

Điều này có nghĩa là khi hàng hoá 1 đang ở mức giá 20 và hàng hoá 2 ở mức giá 30 nếu tăng giá hàng hoá 1 lên 1% còn giá hàng hoá 2 không đổi thì cầu đối với hàng hoá 1 sẽ giảm $0,4\%$, tương tự, nếu giá của hàng hoá 1 không thay đổi nhưng giá của hàng hoá hai tăng thêm 1% thì cầu đối với hàng hoá 1 cũng giảm $0,75\%$.

6.4.3.3. Một số bài toán cực trị hàm nhiều biến trong kinh tế

a. Xác định quỹ vốn và lao động để tối đa hóa doanh thu, lợi nhuận

Cho hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ và giá bán sản phẩm P. Biết giá thuê một đơn vị vốn là p_K và giá thuê một đơn vị lao động là p_L.

Bài toán 1. Xác định mức sử dụng vốn K và lao động L để sản lượng Q cực đại/tối đa.

Bài toán được đưa về bài toán cực trị tự do của hàm sản xuất với hai biến K và L.

Bài toán 2. Hãy xác định mức sử dụng vốn K và lao động L để lợi nhuận cực đại /tối đa.

Chúng ta cần xác định hàm doanh thu, hàm chi phí và hàm lợi nhuận.

+) Hàm doanh thu : $TR(K,L) = P.Q = P.f(K, L)$

+) Hàm chi phí : $TC(K,L) = p_K \cdot K + p_L \cdot L$

+) Hàm lợi nhuận : $\pi(K, L) = TR - TC = P \cdot Q(K, L) - p_K \cdot K - p_L \cdot L$.

Bài toán được đưa về bài toán cực trị tự do của hàm lợi nhuận với hai biến K và L.

Ví dụ 35. Ước lượng hàm sản xuất của một doanh nghiệp có dạng:

$$Q(K,L) = -K^3 - 8L^3 + 3KL + 200, \ (K > 0, L > 0)$$

Hãy xác định mức sử dụng vốn và lao động để sản lượng cực đại.

Giải

+) Bước 1. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2

Đạo hàm riêng cấp 1

$$Q'_K(K, L) = -3K^2 + 3L;$$

$$Q'_L(K, L) = -24L^2 + 3K.$$

Đạo hàm riêng cấp 2

$$Q''_{KK}(K, L) = -6K;\ Q''_{LL}(K, L) = -48L;$$

$$Q''_{KL}(K, L) = Q''_{LK}(K, L) = 3.$$

+) Bước 2. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} Q'_K(K,L) = 0 \\ Q'_L(K,L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3K^2 + 3L = 0 \\ 3K - 24L^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L = K^2 \\ K - 8K^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = \dfrac{1}{2} \\ L = \dfrac{1}{4} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} K = 0 \\ L = 0 \end{cases} \text{ (loại vì } K > 0, L > 0\text{)}$$

Hàm số có một điểm dừng $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

+) Bước 3. Kiểm tra điều kiện đủ tại $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$A = Q''_{KK}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -3 < 0;\ C = Q''_{LL}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -12 < 0;$$

$$B = Q''_{KL}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = Q''_{LK}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 3 > 0.$$

Xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 27 > 0 \text{ và } A < 0$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ với $Q_{max} = Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1601}{8}$.

Ví dụ 36. Tìm K, L để hàm lợi nhuận sau đạt giá trị cực đại

$$\pi(K, L) = 300K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{4}} - 100K - 150L$$

Giải

+) Bước 1. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2

Đạo hàm riêng cấp 1

$$\pi'_K(K, L) = 200K^{-\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{4}} - 100;$$

$$\pi'_L(K, L) = 75K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{3}{4}} - 150$$

Đạo hàm riêng cấp 2

$$\pi''_{KK}(K, L) = -\frac{200}{3}K^{-\frac{4}{3}}L^{\frac{1}{4}}; \quad \pi''_{LL}(K, L) = -\frac{225}{4}K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{7}{4}};$$

$$\pi''_{KL}(K, L) = \pi''_{LK}(K, L) = 50K^{-\frac{4}{3}}L^{-\frac{3}{4}}.$$

+) Bước 2. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} \pi'_K(K, L) = 0 \\ \pi'_L(K, L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 200K^{-\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{4}} - 100 = 0 \\ 75K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{3}{4}} - 150 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 200K^{-\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{4}} = 100 & (1) \\ 75K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{3}{4}} = 150 & (2) \end{cases}$$

Lập tỷ số hai phương trình ta suy ra được: $K = 4L \quad (3)$

Thế (3) vào (2), ta được

$$75(4L)^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{3}{4}} = 150 \Leftrightarrow L^{-\frac{1}{12}} = 2 \cdot 4^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow L = 16 \quad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được: $K = 64$

Hàm số có một điểm dừng $M(64,16)$

+) Bước 3. Kiểm tra điều kiện đủ tại $M(64,16)$

$$A = \pi''_{KK}(64,16) = -\frac{200}{3}(64)^{-\frac{4}{3}}(16)^{\frac{1}{4}} = -\frac{25}{48} < 0;$$

$$C = \pi''_{LL}(64,16) = -\frac{225}{4}(64)^{\frac{2}{3}}(16)^{-\frac{7}{4}} = -\frac{225}{32} < 0;$$

$$B = \pi''_{KL}(64,16) = \pi''_{LK}(64,16) = 50(64)^{-\frac{1}{3}}(16)^{-\frac{3}{4}} = \frac{25}{16} > 0.$$

Xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{25}{48} & \frac{25}{16} \\ \frac{25}{16} & -\frac{225}{32} \end{vmatrix} = \frac{625}{512} \quad \text{và} \quad A < 0$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $M(64,16)$ với $\pi_{max} = \pi(64,16) = 800.$

b. Xác định cơ cấu sản phẩm để tối thiểu hóa chi phí, tối đa hóa doanh thu, lợi nhuận

Bài toán 1. Hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm với giá bán/hàm cầu thứ tự là P_1, P_2 và hàm chi phí kết hợp $TC = TC(Q_1, Q_2)$. Hãy xác định cơ cấu sản phẩm/sản lượng của từng loại sản phẩm để hãng có doanh thu/ lợi nhuận tối đa.

Chúng ta cần xác định hàm doanh thu/ lợi nhuận

+) Hàm doanh thu : $TR(Q_1, Q_2) = P_1.Q_1 + P_2Q_2$.

+) Hàm lợi nhuận: $\pi(Q_1, Q_2) = TR(Q_1, Q_2) - TC(Q_1, Q_2)$.

Bài toán được đưa về bài toán cực trị tự do của hàm doanh thu/hàm lợi nhuận với hai biến $Q_1; Q_2$.

Bài toán 2. Hãng độc quyền sản xuất một loại sản phẩm nhưng tiêu thụ ở hai thị trường phân biệt với hàm cầu ở từng thị trường thứ tự lần lượt là $P_1 = P_1(Q_1, Q_2)$; $P_2 = P_2(Q_1, Q_2)$ và hàm chi phí kết hợp $TC = TC(Q_1, Q_2)$. Hãy xác định lượng cung ở từng thị trường để hãng có doanh thu/ lợi nhuận tối đa.

Chúng ta cần xác định hàm doanh thu/ lợi nhuận

+) Hàm doanh thu : $TR(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2$.

+) Hàm lợi nhuận: $\pi(Q_1, Q_2) = TR(Q_1, Q_2) - TC(Q_1, Q_2)$.

Bài toán được đưa về bài toán cực trị tự do của hàm doanh thu/hàm lợi nhuận với hai biến Q_1, Q_2.

Ví dụ 37. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm đó như sau:

$$Q_1 = 1300 - P_1; \ \ Q_2 = 675 - 0{,}5P_2$$

và hàm chi phí kết hợp là $TC(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và các giá bán tương ứng để doanh nghiệp đó thu được lợi nhuận tối đa.

Giải

+) Bước 1. Lập hàm lợi nhuận

Từ các hàm cầu thuận ta suy ra hàm cầu đảo: $P_1 = 1300 - Q_1; \ P_2 = 1350 - 2Q_2$

Hàm lợi nhuận của doanh nghiệp

$$\pi(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$$
$$= -2Q_1^2 - 3Q_2^2 + 1300Q_1 + 1350Q_2 - 3Q_1Q_2$$

Vậy bài toán trở thành tìm điểm cực đại của hàm $\pi(Q_1, Q_2)$.

+) Bước 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2

$$\pi^{/}_{Q_1}(Q_1, Q_2) = -4Q_1 - 3Q_2 + 1300;\ \pi^{/}_{Q_2}(Q_1, Q_2) = -3Q_1 - 6Q_2 + 1350;$$

$$\pi^{//}_{Q_1Q_1}(Q_1, Q_2) = -4; \pi^{//}_{Q_2Q_2}(Q_1, Q_2) = -6;\ \pi^{//}_{Q_1Q_2} = -3.$$

+) Bước 3. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} \pi^{/}_{Q_1}(Q_1, Q_2) = 0 \\ \pi^{/}_{Q_2}(Q_1, Q_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4Q_1 - 3Q_2 + 1300 = 0 \\ -3Q_1 - 6Q_2 + 1350 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 250 \\ Q_2 = 100 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng là $M(250, 100)$.

Bước 4. Kiểm tra điều kiện đủ tại $M(250,100)$.

$$A = \pi^{//}_{Q_1Q_1}(250,100) = -4;\ C = \pi^{//}_{Q_2Q_2}(250,100) = -6;$$

$$B = \pi^{//}_{Q_1Q_2}(250,100) = \pi^{//}_{Q_2Q_1}(250,100) = -3.$$

Xét định thức: $D = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 15 > 0$ và $A = -4 < 0$

nên $M(250, 100)$ là điểm cực đại của hàm π.

Bước 5. Kết luận: Doanh nghiệp cần bán hàng với mức sản lượng cho mỗi sản phẩm và giá cả tương ứng là $Q_1 = 250;\ P_1 = 1300 - 250 = 1050$; $Q_2 = 100;\ P_2 = 1350 - 200 = 1150$

để thu được lợi nhuận tối đa là : $\pi_{max} = \pi(250, 100) = 230000$.

c. Tối đa hóa lợi ích trong điều kiện ràng buộc về ngân sách dành cho chi tiêu

Cho hàm lợi ích của chủ thể như sau: $U = U(X, Y)$. Biết rằng giá mặt hàng hóa X là P_X, giá mặt hàng hóa Y là P_Y và ngân sách dành cho chi tiêu của chủ thể là I. Hãy xác định số lượng mặt hàng X, Y sao cho tối đa hóa lợi ích của chủ thể.

Mô hình bài toán. Tìm (X, Y) sao cho $U(X, Y)$ đạt giá trị lớn nhất thỏa mãn điều kiện: $X \cdot P_X + Y \cdot P_Y = I$.

Ví dụ 38. Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng: $U(x, y) = x^{0,4}y^{0,6}$. Giả sử giá của các mặt hàng tương ứng là 2 USD, 3 USD và thu nhập dành cho tiêu dùng là 130 USD. Hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng để người tiêu dùng thu được lợi ích tối đa. Nếu thu nhập người tiêu dùng tăng 1 USD thì lợi ích tối đa thay đổi như thế nào?

Giải

Gọi x là số lượng mặt hàng 1; y là số lượng mặt hàng 2.

+) Bước 1. Mô hình bài toán. Tìm $(x,\ y)$ sao cho $U(x,y) = x^{0,4}y^{0,6}$ đạt giá trị tối đa thỏa mãn điều kiện $g(x,y) = 2x + 3y = 130$.

+) Bước 2. Lập hàm Lagrange: $L(x,y,\lambda) = x^{0,4}y^{0,6} + \lambda(130 - 2x - 3y)$

+) Bước 3. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0,4x^{-0,6}y^{0,6} - 2\lambda = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0,6x^{0,4}y^{-0,4} - 3\lambda = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 130 - 2x - 3y \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-0,6}y^{0,6} = 5\lambda \quad (1) \\ x^{0,4}y^{-0,4} = 5\lambda \quad (2) \\ 2x + 3y = 130 \quad (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $y = x$, thay vào phương trình thứ (3) ta có

$$2x + 3.x = 130 \Leftrightarrow x = 26 \Rightarrow y = 26;\ \lambda = 0,2$$

Vậy hàm số có một điểm dừng $M(26,26)$ ứng với $\lambda = 0,2$.

+) Bước 4. Kiểm tra điều kiện đủ. Xét tại điểm dừng $M(26,26)$ với $\lambda = 0,2$.

$$g_1 = g'_x(26,26) = 2;\ g_2 = g'_y(26,26) = 3;$$

$$L_{11} = L''_{xx}(26;26;0,2) = -0,24(26)^{-1,6}(26)^{0,6} = -3/325 < 0;$$

$$L_{22} = L''_{yy}(26;26;0,2) = -0,24(26)^{0,4}(26)^{-1,4} = -3/325 < 0;$$

$$L_{12} = L_{21} = L''_{xy}(26;26;0,2) = 0,24(26)^{-0,6}(26)^{-0,4} = 3/325 > 0.$$

Xét định thức:

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & L_{11} & L_{12} \\ 3 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = 12L_{12} - 9L_{11} - 4L_{22} = \frac{3}{13} > 0$$

nên $M(26,26)$ là điểm cực đại của hàm số.

+) Bước 5. Kết luận. Người tiêu dùng cần mua mặt hàng 1 và mặt hàng 2 đều với số lượng 26 đơn vị để thu được lợi ích tối đa là $U(26,26) = 26^{0,4}.26^{0,6} = 26$.

Tại điểm tối ưu, ta có kết quả : $\dfrac{\partial U}{\partial M} = \lambda = 0,2$ (với M là thu nhập người tiêu dùng) Vậy tại điểm tối ưu, nếu thu nhập người tiêu dùng tăng 1 USD thì lợi ích tối đa tăng 0,2 đơn vị.

6.5. Bài tập

Bài số 1. Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x}{5+3x^2+2y^2}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \dfrac{2}{3x^2+2y^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Đáp số : 1) 0 ; 2) $\dfrac{2}{11}$ *; 3) 0.*

Bài số 2. Chứng minh hàm số sau liên tục tại (0,0)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Hướng dẫn : Kiểm tra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$.

Bài số 3. Tính đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số sau

1. $f(x,y)=x^2+y^3-2xy^2+3x+4y+10.$

2. $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right).$

3. $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right).$

4. $f(x,y)=x^2\sin\left(\dfrac{y}{x}\right).$

Đáp số : 1) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x-2y^2+3,\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3y^2-4xy+4$.

2) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$.

3) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

4) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x\sin\dfrac{y}{x}-y\cos\dfrac{y}{x},\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\cos\dfrac{y}{x}$.

Bài số 4. Dùng quy tắc xích tìm $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

1. $z = x^2y^3,\ x = s\cos t,\ y = s\sin t.$
2. $z = \arcsin(x-y),\ x = s^2+t^2,\ y = 1-2st$
3. $z = e^{x+2y},\ x = \dfrac{s}{t},\ y = \dfrac{t}{s}.$
4. $z = e^r\cos\theta,\ r = st,\ \theta = \sqrt{s^2+t^2}.$

Đáp số : 1) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 5s^4\sin^3 t\cos^2 t;\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \left(3\sin^2 t\cos^3 t - 2\sin^4 t\cos t\right)s^5.$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{2(t+s)}{\sqrt{1-(s^2+t^2-1+2st)^2}};\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{2(t+s)}{\sqrt{1-(s^2+t^2-1+2st)^2}}.$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^{\frac{s}{t}+\frac{2t}{s}}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{2t}{s^2}\right);\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = e^{\frac{s}{t}+\frac{2t}{s}}\left(\dfrac{2}{s}-\dfrac{s}{t^2}\right).$

4) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = te^{ts}\cos\sqrt{s^2+t^2} - \dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\sin\sqrt{s^2+t^2},$

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = se^{ts}\cos\sqrt{s^2+t^2} - \dfrac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\sin\sqrt{s^2+t^2}.$

Bài số 5. Dùng công thức đạo hàm hàm ẩn tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

1. $x^2+y^2+z^2 = 3xyz$
2. $yz = \ln(x+z)$
3. $x - z = \arctan(yz)$
4. $\sin(xyz) = x+2y+3z$

Đáp số : 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x-3yz}{3xy-2z};\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y-3xz}{3xy-2z}.$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{xy+yz-1};\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz+z^2}{1-xy-yz}.$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1+y^2z^2}{1+y+y^2z^2};\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-z}{1+y+y^2z^2}.$

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1-yz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz)-3};\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2-xz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz)-3}.$

Bài số 6. Tính vi phân toàn phần của hàm số sau

1. $f(x,y) = \arcsin(xy)$

2. $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

Đáp số : *1)* $df(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}dx+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}dy$.

2) $df(x,y)=\dfrac{2y}{(x+y)^2}dx-\dfrac{2x}{(x+y)^2}dy$.

Bài số 7. Cho hàm số: $y=f(x)$ thỏa mãn đẳng thức $x^3+x^2e^y-\ln y=2019$. Tính đạo hàm của hàm số, y'_x (y'_x là đạo hàm của y theo x).

Đáp số : $y'_x=\dfrac{3x^2y+2xye^y}{1-x^2ye^y}$.

Bài số 8. Tính đạo hàm riêng cấp 2

1. $f(x,y)=4x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+2019$
2. $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

Đáp số : 1) $\dfrac{\partial^2 f(x.y)}{\partial x^2}=24x+6y;\dfrac{\partial^2 f(x.y)}{\partial y^2}=6x+6y;\dfrac{\partial^2 f(x.y)}{\partial x\partial y}=6x+6y$.

2) $\dfrac{\partial^2 f(x.y)}{\partial x^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};\dfrac{\partial^2 f(x.y)}{\partial y^2}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};\dfrac{\partial^2 f(x.y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Bài số 9. Tính vi phân toàn phần cấp 2

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
2. $f(x,y)=\arccos(x+y)$

Đáp số : 1) $d^2f(x,y)=\dfrac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}dx^2-\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy+\dfrac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}dy^2$.

2) $d^2f(x,y)=-\dfrac{x+y}{\sqrt{\left[1-(x+y)^2\right]^3}}dx^2-2\dfrac{x+y}{\sqrt{\left[1-(x+y)^2\right]^3}}dxdy-\dfrac{x+y}{\sqrt{\left[1-(x+y)^2\right]^3}}dy^2$.

Bài số 10. Chứng minh rằng

1. Hàm số $f(x,y)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ thỏa $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

2. Hàm số $f(x,y)=\frac{x^2}{2y}+\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ thỏa $x^2\frac{\partial f}{\partial x}+y^2\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$.

3. Hàm số $u=\arctan\frac{y}{x}$ thỏa mãn $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Hướng dẫn : Tính đạo hàm riêng rồi thay vào đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Bài số 11. Tính gần đúng biểu thức sau :

1. $A=\sqrt{(2,97)^2+(4,05)^2}$

2. $B=\sqrt[3]{2,03+(5,04)^2}$

3. $C=(0,99)^{2,01}$

Đáp số : 1) $A=5,022$ *; 2)* $B=3,013$; $C=0,98$.

Bài số 12. Khảo sát cực trị các hàm hai biến sau

1. $f(x,y)=2x^2+y^2-4x+8$.

2. $f(x,y)=10+4x+2y-x^2-y^2$.

3. $f(x,y)=(x+y-9)(4x+3y)-6xy$.

4. $f(x,y)=3x^2+y^3-3xy+1$.

5. $f(x,y)=x+y-ye^x+10$.

6. $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

7. $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y+6$.

8. $f(x,y)=x^3+y^3-6xy+20$.

9. $f(x,y)=xy-\frac{1}{3}(x^3+y^3)$.

10. $f(x,y)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{1}{y}+2$.

11. $f(x,y)=20xy-\frac{10}{x}-\frac{5}{y}$ với $x,\ y<0$.

Đáp số : 1) $(1,0)$ *là cực tiểu;* 2) $(2,1)$ *là cực đại;* 3) $(189/47,180/47)$ *là cực tiểu;* 4) $(0,0)$ *không là cực trị,* $(1/4,1/2)$ *là cực tiểu;* 5) $(0,1)$ *không là cực trị;* 6) $(1/2,-1)$ *là cực tiểu;* 7) $(1,2);(-1,-2)$ *không là cực trị;* $(2,1)$ *là cực tiểu;* $(-2,-1)$ *là cực đại;*

8) $(0,0)$ *không là cực trị;* $(2,2)$ *là cực tiểu;* 9) $(0,0)$ *không là cực trị;* $(1,1)$ *là cực đại;*

10) $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ *không là cực trị;* $\left(\frac{1}{2},1\right)$ *là cực tiểu; 11)* $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ *là cực tiểu.*

Bài số 13. Khảo sát cực trị các hàm ba biến sau

1. $f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 6y - 16z + 100.$
2. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4xz - 2y + 3z + 4.$
3. $f(x,y,z) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{1}{z} + 2015.$

Đáp số: 1) $M(6,3,4)$ *cực tiểu; 2)* $\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{2},-\frac{3}{10}\right)$ *là cực tiểu;*

3) $M_1(1,1,1)$ *cực tiểu,* $M_2(-1,1,-1)$ *cực đại.*

Bài số 14. Tìm cực trị của hàm $z = z(x,y)$ cho bởi phương trình sau

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$$

Đáp số : $(1,-2)$ *cực tiểu.*

Bài số 15. Tìm cực trị của các hàm hai biến với ràng buộc sau

1. $f(x,y) = 2x^2 - 6y^2$, với ràng buộc $x + 2y = 6$.
2. $f(x,y) = x^2 + 3xy - 5y^2$, với ràng buộc $2x + 3y = 6$.
3. $f(x,y) = x^2 + y^2$, với ràng buộc $3x + 2y = 6$.
4. $f(x,y) = x + y$, với ràng buộc $x^2 + y^2 = 1$.
5. $f(x,y) = xy$, với ràng buộc $x + y = 1$.
6. $f(x,y) = xy$, với ràng buộc $x^2 + y^2 = 1$.
7. $f(x,y) = x + y$, với ràng buộc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
8. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, với ràng buộc $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$.

Đáp số : 1) $(-18, 12)$ *cực tiểu.* 2) $(3, 0)$ *cực đại.* 3) $(18/13, 12/13)$ *cực tiểu.*

4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *cực tiểu;* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *cực đại;* 5) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *cực đại.*

6) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *cực tiểu;* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *cực đại.*

7) $\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ *cực tiểu;* $\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ *cực đại.*

8) $\left(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)$ *cực tiểu;* $\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$ *cực đại.*

Bài số 16. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của f trên tập D.

1. $f(x,y)=x^2+y^2+x^2y+4,\ D=\left\{(x,y)/|x|\le 1,|y|\le 1\right\}$.

2. $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+2,\ D=\left\{(x,y)/0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\right\}$.

3. $f(x,y)=2x^3+y^4,\quad D=\left\{(x,y)/x^2+y^2\le 1\right\}$.

4. $f(x,y)=x^3-3x-y^3+12y$, D là tứ giác có 4 đỉnh: $(-2,-2),(-2,3),(2,2),(2,3)$.

Đáp số : 1) $f_{max}=f(0,1)=5$; $f_{min}=f(0,0)=4$.

2) $f_{min}=f(-1,-1)=f(1,1)=0$; $f_{max}=f(3,\sqrt[3]{3})=83-9\sqrt[3]{3}$.

3) $f_{min}=f(0,0)=0$; $f_{max}=f(1/2,-\sqrt{3}/2)=f(1/2,\sqrt{3}/2)=\frac{13}{16}$.

4) $f_{max}=f(-2,2)=30$; $f_{min}=f(-2,-2)=f(2,-2)=-18$.

Bài số 17. Tìm cực trị của hàm ba biến với ràng buộc sau:

$f(x,y,z)=x+y+z$, với ràng buộc $x^2+y^2+z^2=1$.

Đáp số : 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *là cực đại;* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *là cực tiểu.*

Bài số 18. Cho hàm sản xuất của hãng $Q=120\sqrt[3]{K^2}\sqrt{L}\quad (K,L>0)$

a) Tính MPK và MPL tại $K=1000$ và $L=225$. Nếu ý nghĩa.

b) Tính tỷ số $MRTS=\frac{MPK}{MPL}\left(K_0=1000,\ L_0=225\right)$

Đáp số: a) $MPK(1000,225)=120$; $MPL(1000,225)=400$; b) $MRTS=\frac{3}{10}$.

Bài số 19. Tính hệ số co dãn của các hàm sau tại điểm cho trước

a) $Q(P_1,P_2)=6300-2P_1^2-\frac{5}{3}P_2^2$, tại $(20,30)$.

b) $Q(K,L)=120K^{1/3}L^{2/3}$

Đáp số: a) $\varepsilon_Q = -1{,}15$. b) $\varepsilon_Q = 1$.

Bài số 20. Cho hàm cầu: $D = 0,4Y^{0,2}P^{-0,3}$ với Y là thu nhập, P là giá. Hãy tính hệ số co dãn của cầu theo giá và của cầu theo thu nhập.

Đáp số: $\varepsilon_{D/Y} = 0,2; \varepsilon_{D/P} = -0,3$.

Bài số 21. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là $Q_1 = 25 - 0,5P_1$; $Q_2 = 30 - P_2$ và hàm chi phí kết hợp là $TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $Q_1 = 7, Q_2 = 4$.

Bài số 22. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là $Q_1 = 50 - 0,5P_1$; $Q_2 = 76 - P_2$ và hàm chi phí kết hợp là $TC=3Q_1^2+2Q_1Q_2+2Q_2^2+55$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $Q_1 = 8, Q_2 = 10$.

Bài số 23. Cho hàm sản xuất của hãng $Q = 10K^{0,3}L^{0,4}$, biết giá thuê một đơn vị tư bản K bằng 0,03, giá thuê một đơn vị lao động bằng 2, giá sản phẩm bằng 4. Hãy xác định mức sử dụng K, L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $L = 51200, K = 2560000$.

Bài số 24. Công ty M chuyên sản xuất một mặt hàng A, có hàm sản xuất phụ thuộc hai yếu tố vốn K và lao động L như sau: $Q = 40K^{0,4}L^{0,6}$ trong đó Q là sản lượng và $K > 0, L > 0$. Cho biết giỏ vốn và lao động lần lượt là $P_K = 11$, $P_L = 20$, với khả năng chi phí tối đa cho vốn và lao động là C = 6600. Hãy sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm K và L sao cho sản lượng Q đạt cực đại.

Đáp án: $K = 240, L = 198$.

Bài số 25. Một công ty có hàm sản xuất: $Q = K^{3/4}L^{1/2}$ (K – vốn, L – lao động). Biết giá thuê một đơn vị vốn là 30 và giá thuê một đơn vị lao động 5. Công ty cần sản xuất 2048 sản phẩm, khi đó công ty nên sử dụng bao nhiêu đơn vị vốn và lao động để tối thiểu hóa chi phí

Đáp án: $K = 256, L = 1024$

Chương 7

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

7.1. Phương trình vi phân cấp 1

7.1.1. Các khái niệm

Phương trình vi phân cấp 1 có dạng tổng quát:

$$F(x,y,y') = 0 \quad \text{hay} \quad y' = f(x,y) \tag{7.1}$$

Hàm số $y = \varphi(x)$ xác định và khả vi trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ được gọi là nghiệm của phương trình (*) trên $I \subset \mathbb{R}$, nếu

$$\begin{cases} (x,\varphi(x)) \in G, \forall x \in I \\ \varphi'(x) = f(x,\varphi(x)), \forall x \in I \end{cases} \text{ với G là tập xác định của hàm } f(x,y)$$

Bài toán Cauchy: Tìm hàm số $y = \varphi(x)$ là nghiệm của phương trình (*) thỏa mãn điều kiện đầu $y_0 = \varphi(x_0)$.

7.1.2. Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Có 3 dạng sau:

$$y' = f(x)g(y) \tag{7.2}$$

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \tag{7.3}$$

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \tag{7.4}$$

Phương pháp giải

Phân ly biến số x và dx về một vế; y và dy về một vế rồi lấy tích phân hai vế

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân sau

1) $y' = e^x$

2) $(x + \sin x)dx + 5y^4dy = 0$

3) $y' - xy^2 = 2xy$

Giải

1) $y' = e^x \Leftrightarrow dy = e^x dx$ (1)

Lấy tích phân 2 vế của phương trình (1)

$$y = e^x + C \text{ (C là hằng số)}$$

2) $\left(x+\sin x\right)dx+5y^4dy=0$ (2)

Lấy tích phân 2 vế của phương trình (2)

$$\int\left(x+\sin x\right)dx+\int 5y^4dy=C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-\cos x+y^5=C \quad \text{(với C là hằng số)}$$

3) $y^{/}-xy^2=2xy$ (3)

Phương trình (3) được viết lại như sau

$$\frac{dy}{dx}=xy^2+2xy=xy(y+2)\Leftrightarrow dy=xy(y+2)dx \qquad (4)$$

Trường hợp 1: Nếu $y=0,-2$ là nghiệm của phương trình

Trường hợp 2: Nếu $y\neq 0,-2$, chia hai vế của phương trình (4) cho $y(y+2)$, ta được

$$\frac{dy}{y(y+2)}=xdx,$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình trên, ta có

$$\int\frac{dy}{y(y+2)}=\int xdx+C\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)dy=\int xdx+C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\ln|y|-\ln|y+2|\right)=\frac{1}{2}x^2+C$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{y+2}\right|=x^2+C \quad \text{(với C là hằng số)}$$

7.1.3. Phương trình vi phân cấp 1 dạng đẳng cấp

Phương trình đẳng cấp có dạng: $y^{/}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ (7.5)

Phương pháp giải

Đặt $u=\frac{y}{x}\Leftrightarrow y=ux\Rightarrow y^{/}=u^{/}x+u$

Thay vào (7.5), ta được: $F\left(x,u,u^{/}\right)=0$ (7.6)

Giải (7.6) được u rồi suy ra y

Nếu vế phải có dạng: $f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$,

Ta đặt $\begin{cases} x = u+\alpha \\ y = v+\beta \end{cases}$

Trong đó

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân sau

1) $y' = 1+\dfrac{y}{x}$

2) $y' = \dfrac{3x-y+1}{x+y+3}$

Giải

1) $y' = 1+\dfrac{y}{x}$ (1)

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x+u$ thế vào (1), ta được

$$u'x+u = 1+u \Leftrightarrow u'x = 1 \Leftrightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

Suy ra

$$u = \ln|x|+C \Leftrightarrow y = x\ln|x|+Cx \quad \text{với C là hằng số}$$

2) $y' = \dfrac{3x-y+1}{x+y+3}$ (2)

Đặt

$$\begin{cases} x = u+\alpha \\ y = v+\beta \end{cases}$$

Trong đó

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 1 = 0 \\ \alpha + \beta + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

Từ (2) ta có

$$v' = \frac{3u-v}{u+v} = \frac{3-v/u}{1+v/u} \qquad (3)$$

Đặt $t = \frac{v}{u} \Leftrightarrow v = tu \Rightarrow v' = t'u + t$ thế vào (3), ta được

$$t'u + t = \frac{3-t}{1+t} \Leftrightarrow t'u = \frac{2-t-t^2}{1+t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+t}{2-t-t^2}dt = \frac{1}{u}du$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình trên, ta có

$$\int \frac{1+t}{2-t-t^2}dt = \int \frac{1}{u}du + C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{t-1} + \frac{1}{t+2}\right)dt = \ln|u| + C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\left(2\ln|t-1| + \ln|t+2|\right) = \ln|u| + C$$

Vậy

$$2\ln\left|\frac{y+2}{x+1} - 1\right| + \ln\left|\frac{y+2}{x+1} + 2\right| = -3\ln|x+1| + C$$

7.1.4. Phương trình vi phân cấp 1 dạng tuyến tính

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng:

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{7.7}$$

Trong đó $a(x), b(x)$ là các hàm số liên tục.

Phương pháp giải

Bước 1: Tìm một nguyên hàm của $a(x)$

$$u(x) = \int a(x)dx$$

Bước 2: Chọn thừa số tích phân

$$v(x) = e^{u(x)}$$

Bước 3: Nhân hai vế của phương trình cho thừa số tích phân: $v(x)$ $(v(x) \neq 0, \forall x)$ thì ta có

$$v(x)y' + a(x)v(x)y = v(x)b(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(v(x)y\right)' = v(x)b(x) \qquad (*)$$

Bước 4: Lấy tích phân hai vế của (*), ta được

$$v(x)y = \int v(x)b(x)dx \Rightarrow y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)b(x)dx$$

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân sau

1) $y' + \frac{1}{x}y = 1$ với $x > 0,\ y(1) = 1$.

2) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Giải

1) $y' + \frac{1}{x}y = 1$ với $x > 0,\ y(1) = 1$

Bước 1: $\frac{1}{x}$ có nguyên hàm là $\ln|x| = \ln x$ (vì $x > 0$)

Bước 2: Chọn thừa số tích phân: $e^{\ln x} = x$

Bước 3: Nhân hai vế của phương trình cho x, thì ta có

$$xy' + y = x \Leftrightarrow (xy)' = x \quad (*)$$

Bước 4: Lấy tích phân hai vế của (*)

$$xy = \int xdx + C \Rightarrow y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

Với điều kiện đầu $y(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{C}{1} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}.$$

2) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Bước 1: $2x$ có nguyên hàm là x^2

Bước 2: Chọn thừa số tích phân: e^{x^2}

Bước 3: Nhân hai vế của phương trình cho e^{x^2}, thì ta có

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = x \Leftrightarrow \left(e^{x^2}y\right)' = x \quad (*)$$

Bước 4: Lấy tích phân hai vế của (*)

$$e^{x^2}y = \int xdx + C \Rightarrow y = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

7.1.5. Phương trình vi phân cấp 1 dạng Bernoulli

Phương trình Bernoulli có dạng:

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha},\ \left(\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1\right) \tag{7.8}$$

Trong đó $a(x), b(x)$ là các hàm liên tục.

Phương pháp giải

Bước 1: Chia hai vế của phương trình (6.8) cho y^{α} ta được

$$y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x) \tag{7.9}$$

Bước 2: Đặt $u = y^{1-\alpha} \Rightarrow u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

Phương trình (7.9) tương đương

$$u' + a_1(x)u = b_1(x) \tag{7.10}$$

Ví dụ 4. Giải phương trình vi phân sau

a) $y' - 2xy = 4x^3y^2$

b) $y' - y = e^{2x}y^3$

Giải

a) $y' - 2xy = 4x^3y^2$

Bước 1: Chia hai vế của phương trình cho y^2 ta được

$$y'y^{-2} - 2xy^{-1} = 4x^3 \tag{1}$$

Bước 2: Đặt $u = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y'$

Phương trình (1) trên tương đương

$$u' + 2xu = -4x^3 \tag{2}$$

Giải (2)

Bước 1: $2x$ có nguyên hàm là x^2

Bước 2: Chọn thừa số tích phân: e^{x^2}

Bước 3: Nhân hai vế của phương trình cho e^{x^2}, thì ta có

$$e^{x^2}u' + 2xe^{x^2}u = -4x^3e^{x^2} \Leftrightarrow \left(e^{x^2}u\right)' = -4x^3e^{x^2} \tag{*}$$

Bước 4: Lấy tích phân hai vế của (*)

$$e^{x^2}u = -\int 4x^3 e^{x^2}dx \Rightarrow u = -2e^{-x^2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C\right)$$

$$\Leftrightarrow y^{-1} = -2x^2 + 2 - Ce^{-x^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{-2x^2 + 2 - Ce^{-x^2}}$$

b) $y^{/} - y = e^{2x}y^3$

Bước 1: Chia hai vế của phương trình cho y^3 ta được

$$y^{/}y^{-3} - y^{-2} = e^{2x} \tag{2}$$

Bước 2: Đặt $u = y^{-2} \Rightarrow u^{/} = -2y^{-3}y^{/}$

Phương trình (2) trên tương đương

$$u^{/} + 2u = -2e^{2x} \tag{3}$$

Giải (3)

Bước 1: 2 có nguyên hàm là $2x$

Bước 2: Chọn thừa số tích phân: e^{2x}

Bước 3: Nhân hai vế của phương trình cho e^{2x}, thì ta có

$$e^{2x}u^{/} + e^{2x}2u = -2e^{4x} \Leftrightarrow \left(e^{2x}u\right)^{/} = -2e^{4x} \quad (*)$$

Bước 4: Lấy tích phân hai vế của (*)

$$e^{2x}u = \int -2e^{4x}dx \Rightarrow u = -\frac{1}{2}e^{2x} + Ce^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow y^{-2} = -\frac{1}{2}e^{2x} + Ce^{-2x} \Leftrightarrow y^2 = \frac{2}{-e^{2x} + 2Ce^{-2x}}$$

7.2. Phương trình vi phân cấp 2

7.2.1. Các khái niệm chung

Phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$F\left(x, y, y^{/}, y^{//}\right) = 0 \text{ hay } y^{//} = f\left(x, y, y^{/}\right) \tag{7.11}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 2 chứa hai tham số C_1, C_2

Bài toán Cauchy: Tìm hàm số $y = \varphi(x)$ thỏa điều kiện đầu

$$\begin{cases} \varphi^{//}(x) = f\left[x, \varphi(x), \varphi^{/}(x)\right] \\ \varphi\left(x_0\right) = y_0,\ \varphi^{/}(x_0) = y_1 \end{cases}$$

7.2.2. Phương trình vi phân cấp 2 có thể giảm cấp được

Có dạng:

$$F(x, y'') = 0 \tag{7.12}$$

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{7.13}$$

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{7.14}$$

Phương pháp giải

Đặt $u = y' \Rightarrow u' = y''$ thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình vi phân cấp 1. Giải phương trình vi phân cấp 1, ta được u rồi suy ra y.

Ví dụ 5. Giải phương trình vi phân sau:

a) $y'' = x\cos x$

b) $y'' - \dfrac{2}{x}y' = x^2$

Giải

a) $y'' = x\cos x$ (1)

Đặt $u = y' \Rightarrow u' = y''$ thế vào phương trình (1)

$$u' = x\cos x \Leftrightarrow du = x\cos x dx$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình trên, ta có

$$\int du = \int x\cos x dx + C_1$$

$$\Leftrightarrow u = x\sin x + \cos x + C_1$$

Thay $u = y'$, ta có

$$y' = x\sin x + \cos x + C_1$$

$$\Leftrightarrow dy = \left(x\sin x + \cos x + C_1\right)dx$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình trên, ta có

$$\int dy = \int \left(x\sin x + \cos x + C_1\right)dx + C_2$$

$$\Leftrightarrow y = -x\cos x + 2\sin x + C_1x + C_2$$ (với C_1, C_2 là hai hằng số)

b) $y'' - \dfrac{2}{x}y' = x^2$ (2)

Đặt $u = y' \Rightarrow u' = y''$ thế vào phương trình (2)

$$u' - \frac{2}{x}u = x^2$$ (Đây là dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1)

Ta giải được $u = x^3 + C_1x^2$

Thay $u = y'$, ta có $y' = x^3 + C_1x^2$ hay

$$dy = \left(x^3 + C_1x^2\right)dx$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình trên, ta có

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}C_1x^3 + C_2 \quad (\text{với } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số})$$

7.2.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng thuần nhất

Phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng thuần nhất có dạng

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{7.15}$$

Trong đó a, b, c là hằng số.

Phương trình đặc trưng ứng với (7.15)

$$ak^2 + bk + c = 0 \tag{7.16}$$

Ta có : $\Delta = b^2 - 4ac$

Trường hợp 1: Nếu $\Delta > 0$ Phương trình (7.16) có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2

Nghiệm tổng quát của (7.15)

$$y_0(x) = Ae^{k_1x} + Be^{k_2x}, \quad (\text{A, B là hằng số})$$

Trường hợp 2: Nếu $\Delta = 0$ Phương trình (7.16) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$

Nghiệm tổng quát của (7.15)

$$y_0(x) = \left(A + Bx\right)e^{kx}, \quad (\text{A, B là hằng số})$$

Trường hợp 3: Nếu $\Delta < 0$ Phương trình (7.16) có hai nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

với $\alpha = -\dfrac{b}{2a}; \beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Nghiệm tổng quát của (7.15)

$$y_0(x) = e^{\alpha x}\left(A\sin\beta x + B\cos\beta x\right), \quad (\text{A, B là hằng số})$$

Ví dụ 6. Giải phương trình vi phân sau:

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Giải

a) $y^{//} - 4y^{/} + 3y = 0$

Phương trình đặc trưng tương ứng

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 3 \end{array}\right.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình

$$y_0(x) = Ae^x + Be^{3x} \quad \text{(Với A, B là hai hằng số)}$$

b) $y^{//} + 4y^{/} + 4y = 0$

Phương trình đặc trưng tương ứng

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

Nghiệm tổng quát của phương trình

$$y_0(x) = \left(A + Bx\right)e^{-2x} \quad \text{(Với A, B là hai hằng số)}$$

c) $y^{//} + 2y^{/} + 5y = 0$

Phương trình đặc trưng tương ứng

$$k^2 + 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Nghiệm tổng quát của phương trình

$$y_0(x) = e^{-x}\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right) \quad \text{(Với A, B là hai hằng số)}$$

7.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất

Phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất có dạng

$$ay^{//} + by^{/} + cy = f(x) \qquad (7.17)$$

Trong đó a, b, c là hằng số.

Nghiệm tổng quát của phương trình (7.17) bằng nghiệm tổng quát của phương trình (7.15) cộng cho nghiệm riêng của phương trình (7.17).

a) Tìm nghiệm riêng của (6.17) bằng phương pháp thừa số bất định

Trương hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ (với $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x)

i) Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (7.16)

Ta tìm nghiệm riêng của (7.17) dưới dạng

$$y_r(x) = e^{\alpha x}Q_n(x) \text{ (Với } Q_n(x) \text{ là đa thức tổng quát của } P_n(x))$$

ii) Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (7.16)

Ta tìm nghiệm riêng của (7.17) dưới dạng

$$y_r(x) = xe^{\alpha x}Q_n(x) \text{ (Với } Q_n(x) \text{ là đa thức tổng quát của } P_n(x))$$

iii) Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (7.16)

Ta tìm nghiệm riêng của (7.17) dưới dạng

$$y_r(x) = x^2e^{\alpha x}Q_n(x) \text{ (Với } Q_n(x) \text{ là đa thức tổng quát của } P_n(x))$$

Trương hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\sin\beta x + Q_n(x)\cos\beta x\right]$ (với $P_n(x),\ Q_n(x)$ là hai đa thức bậc n của x)

i) Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (6.16)

Ta tìm nghiệm riêng của (7.17) dưới dạng

$y_r(x) = e^{\alpha x}\left[A_n(x)\sin\beta x + B_n(x)\cos\beta x\right]$ (Với $A_n(x), B_n(x)$ là hai đa thức tổng quát của $P_n(x),\ Q_n(x)$)

ii) Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (7.16)

Ta tìm nghiệm riêng của (7.17) dưới dạng

$y_r(x) = xe^{\alpha x}\left[A_n(x)\sin\beta x + B_n(x)\cos\beta x\right]$ (Với $A_n(x), B_n(x)$ là hai đa thức tổng quát của $P_n(x),\ Q_n(x)$).

b) Tìm nghiệm riêng của phương trình (7.17) bằng phương pháp biến thiên hằng số

Từ nghiệm tổng quát của (7.15) ta thay $A = A(x), B = B(x)$. Tìm nghiệm riêng của (7.17) dưới dạng

$$y_r(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$$

thỏa điều kiện

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của (7.17)

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x)$$

c) Nguyên lý chồng chất nghiệm

Nếu y_1 là nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$ay'' + by' + cy = f_1(x)$$

Nếu y_2 là nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$ay'' + by' + cy = f_2(x)$$

Thì $y_r = y_1 + y_2$ là nghiệm riêng của phương trình

$$ay^{//} + by^{/} + cy = f_1(x) + f_2(x)$$

Ví dụ 7. Giải phương trình vi phân sau:

a) $y^{//} - 4y^{/} + 3y = x^2$

b) $y^{//} - 2y^{/} = 2x + 3$

c) $y^{//} + 2y^{/} + 5y = e^x \sin 2x$

Giải

a) $y^{//} - 4y^{/} + 3y = x^2$ (1)

Phương trình thuần nhất

$$y^{//} - 4y^{/} + 3y = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng tương ứng

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 3 \end{array}\right.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2)

$$y_0(x) = Ae^x + Be^{3x} \quad \text{(Với A, B là hai hằng số)}$$

Tìm nghiệm riêng của (1) dưới dạng $(\alpha = 0,\ n = 2)$

$$y_r(x) = ax^2 + bx + c$$

Ta có

$$y_r^{/}(x) = 2ax + b;\ y_r^{//}(x) = 2a$$

Thế $y_r(x),\ y_r^{/}(x),\ y_r^{//}(x)$ vào (1), ta được

$$3ax^2 + (3b - 8a)x + 2a - 4b + 3c = x^2$$

Đồng nhất, ta có

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3b - 8a = 0 \\ 2a - 4b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{8}{9} \\ c = \dfrac{26}{27} \end{cases}$$

Nghiệm riêng của (1)

$$y_r(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1)

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x) = Ae^x + Be^{3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27} \quad \text{(Với A, B là hai hằng số)}$$

b) $y^{//} - 2y^{/} = 2x + 3$ (1)

Phương trình thuần nhất

$$y^{//} - 2y^{/} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng tương ứng

$$k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 2 \end{array}\right.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2)

$$y_0(x) = A + Be^{2x} \quad \text{(Với A, B là hai hằng số)}$$

Tìm nghiệm riêng của (1) dưới dạng $(\alpha = 0,\ n = 1)$

$$y_r(x) = ax^2 + bx$$

Ta có

$$y_r^{/}(x) = 2ax + b;\ y_r^{//}(x) = 2a$$

Thế $y_r(x),\ y_r^{/}(x),\ y_r^{//}(x)$ vào (1), ta được $-4ax + 2a - 2b = 2x + 3$

Đồng nhất, ta có

$$\begin{cases} -4a = 2 \\ 2a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$$

Nghiệm riêng của (1)

$$y_r(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1)

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x) = A + Be^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - 2x \quad \text{(Với A, B là hai hằng số)}$$

c) $y^{//} + 2y^{/} + 5y = e^x \sin 2x$ (1)

Phương trình thuần nhất

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng tương ứng

$$k^2 + 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2)

$$y_0(x) = e^{-x}\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right) \quad \text{(Với A, B là hai hằng số)}$$

Tìm nghiệm riêng của (1) dưới dạng $\left(\alpha = 0,\ n = 1\right)$

$$y_r(x) = e^{x}\left(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x\right)$$

Ta có

$$y_r'(x) = e^{x}\left[\left(C_1 - 2C_2\right)\sin 2x + \left(2C_1 + C_2\right)\cos 2x\right]$$

$$y_r''(x) = e^{x}\left[\left(-3C_1 - 4C_2\right)\sin 2x + \left(4C_1 - 3C_2\right)\cos 2x\right]$$

Thế $y_r(x),\ y_r'(x),\ y_r''(x)$ vào (1), ta được

$$e^{x}\left[\left(4C_1 - 8C_2\right)\sin 2x + \left(8C_1 + 4C_2\right)\cos 2x\right] = e^{x}\sin 2x$$

Đồng nhất, ta có

$$\begin{cases} 4C_1 - 8C_2 = 1 \\ 8C_1 + 4C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{20} \\ C_2 = -\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Nghiệm riêng của (1)

$$y_r(x) = e^{x}\left(\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x\right)$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1)

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x) = e^{-x}\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right) + e^{x}\left(\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x\right)$$

(Với A, B là hai hằng số)

Ví dụ 8. Giải phương trình vi phân sau:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x \qquad (1)$$

Giải

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Phương trình đặc trưng

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y_0(x) = Ae^x + Be^{2x} \text{ (với A, B là hai hằng số)}$$

Bước 2 : Tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y_r(x) = A(x)e^x + B(x)e^{2x}$$

Thỏa điều kiện

$$\begin{cases} A^/(x)e^x + B^/(x)e^{2x} = 0 \\ A^/(x)e^x + 2B^/(x)e^{2x} = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B^/(x) = e^{-2x}\sin x \\ A^/(x) = -e^{-x}\sin x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(x) = -\dfrac{1}{5}e^{-2x}\left(2\sin x + \cos x\right) \\ A(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x}\left(\sin x + \cos x\right) \end{cases}$$

Nghiệm riêng của (1)

$$y_r(x) = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$$

Nghiệm tổng quát của (1)

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x \text{ (Với A, B là hai hằng số)}$$

Ví dụ 9. Giải phương trình vi phân sau

$$y^{//} + y^/ = xe^x + 2e^{-x} \qquad (1)$$

Giải

Phương trình thuần nhất : $y^{//} + y^/ = 0$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y_0(x) = A\sin x + B\cos x, \quad \text{(A, B là hằng số)}$$

Nghiệm riêng của phương trình

$$y^{//} + y^/ = xe^x \text{ là } y_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^x$$

Nghiệm riêng của phương trình

$$y^{//} + y^/ = 2e^{-x} \text{ là } y_2(x) = e^{-x}$$

Nghiệm riêng của (1) là

$$y_r(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$$

Nghiệm tổng quát của (1)

$$y(x) = y_0(x) + y_r(x) = A\sin x + B\cos x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}, \text{ (A, B là hằng số)}$$

7.3. Một số ứng dụng trong kinh tế

7.3.1. Tìm hàm $y = f(x)$ khi biết hệ số co dãn

Giả sử x và y là hai đại lượng kinh tế có quan hệ với nhau bằng một hàm khả vi $y = f(x)$ thì ta có hệ số co dãn $E_{y|x}$ là một hàm của x được xác định bởi

$$E_{y|x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \tag{7.18}$$

Vậy nếu ta biết hệ số co dãn $E_{y|x}$ là một hàm theo x ta có phương trình vi phân như sau :

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = E_{y|x} \tag{7.19}$$

hay

$$\frac{dy}{y} = E_{y|x} \cdot \frac{dx}{x} \tag{7.20}$$

Giải phương trình vi phân này, ta có

$$\ln|y| = \int \frac{E_{y|x}}{x} dx \tag{7.21}$$

7.3.2. Mô hình cân bằng thị trường với kỳ vọng về giá

Xét hàm cung và hàm cầu tổng quát như sau

$$Q_D(t) = D\left[P(t), P^/(t), P^{//}(t)\right] \tag{7.22}$$

$$Q_S(t) = S\left[P(t), P^/(t), P^{//}(t)\right] \tag{7.23}$$

Trong đó

+) $P(t)$: Xu thế giá tại thời điểm t

+) $P^/(t)$: Giá tăng $P^/(t) > 0$ hoặc $P^/(t) < 0$ giá giảm tại thời điểm t.

+) $P^{//}(t)$: Giá tăng ngày một nhanh $P^{//}(t) > 0$ hoặc tốc độ tăng giá giảm dần $P^{//}(t) < 0$.

Mô hình cân bằng tại mọi thời điểm

$$Q_D(t) = Q_S(t) \Leftrightarrow D\left[P(t),\, P^{/}(t),\, P^{//}(t)\right] = S\left[P(t),\, P^{/}(t),\, P^{//}(t)\right] \qquad (7.24)$$

Đây là phương trình vi phân cấp 2 của P.

Ví dụ 10. Cho hệ số co dãn của hàm cầu là

$$E_D = \frac{-2P}{2000-2P}$$

Tìm hàm cầu Q_D biết rằng $Q(0) = 2000$.

Giải

Từ hệ số co dãn ta có

$$\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q} = \frac{-2P}{2000-2P} \Leftrightarrow \frac{dQ}{Q} = \frac{-dP}{1000-P}$$

Suy ra

$$\ln|Q| = \ln|1000-P| + C \Leftrightarrow Q = A(1000-P)$$

mà $Q(0) = 2000 \Leftrightarrow 2000 = 1000A \Leftrightarrow A = 2$

Vậy

$$Q = 2000 - 2P.$$

Ví dụ 11. Cho hàm cung và hàm cầu của một loại hàng

$$Q_S(t) = -6 + 8P(t);\; Q_D(t) = 42 - 4P(t) - 4P^{/}(t) + P^{//}(t)$$

Với giá ban đầu $P(0) = 6$ và $P^{/}(0) = 4$. Tìm sự biến động của giá $P(t)$ theo thời gian và giả thiết cung cầu thỏa mãn tại mọi thời điểm.

Giải

Cho lượng cung bằng lượng cầu ta được

$$Q_S(t) = Q_D(t) \Leftrightarrow -6 + 8P(t) = 42 - 4P(t) - 4P^{/}(t) + P^{//}(t) \qquad (1)$$

Ta được phương trình vi phân

$$P^{//}(t) - 4P^{/}(t) - 12P(t) = -48$$

Phương trình đặc trưng

$$k^2 - 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -2 \vee k_2 = 6$$

Nghiệm riêng của (1) : $P_r(t) = 4$

Nghiệm tổng quát của (1) :

$$P(t) = 4 + Ae^{-2t} + Be^{6t} \qquad \text{(A, B là hai hằng số)}$$

Từ điều kiện đầu giải ra ta được $A = B = 1$.

Vậy

$$P(t) = 4 + e^{-2t} + e^{6t}$$

Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$. Do đó điểm cân bằng không ổn định.

Ví dụ 12. Cho hàm cung và hàm cầu của một loại hàng

$$Q_S(t) = -5 + 3P(t);\ Q_D(t) = 40 - 2P(t) - 2P^{/}(t) - P^{//}(t)$$

Với giá ban đầu $P(0) = 12$ và $P^{/}(0) = 1$. Tìm sự biến động của giá $P(t)$ theo thời gian và giả thiết cung cầu thỏa mãn tại mọi thời điểm.

Giải

Cho lượng cung bằng lượng cầu ta được

$$Q_S(t) = Q_D(t) \Leftrightarrow -5 + 3P(t) = 40 - 2P(t) - 2P^{/}(t) - P^{//}(t)$$

Ta được phương trình vi phân

$$P^{//}(t) + 2P^{/}(t) + 5P(t) = 45 \qquad (1)$$

Phương trình thuần nhất

$$P^{//}(t) + 2P^{/}(t) + 5P(t) = 0 \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng

$$k^2 + 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1 + 2i \ \vee\ k_2 = -1 - 2i$$

Nghiệm tổng quát của (2)

$$P_0(t) = e^{-t}\left(A\sin 2t + B\cos 2t\right)$$

Tìm nghiệm dưới của (1) dưới dạng $P_t(t) = a$ thay vào (1) ta được nghiệm : $P_r(t) = 9$

Nghiệm tổng quát của (1)

$$P(t) = P_0(t) + P_r(t) = 9 + e^{-t}\left(A\sin 2t + B\cos 2t\right) \quad \text{(A, B là hai hằng số)}$$

Từ điều kiện đầu, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} P(0) = 12 \\ P^{/}(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + 9 = 12 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A = 2 \end{cases}$$

Vậy

$$P(t) = 9 + e^{-t}\left(2\sin 2t + 3\cos 2t\right)$$

Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 9$. Do đó điểm cân bằng ổn định.

7.4. Bài tập

Bài số 1. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{1}{12x} + ax^5 + bx$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 y'' - 5xy' + 5y = \frac{1}{x}$$

Hướng dẫn: Tính đạo hàm rồi thay vào phương trình ta có điều phải chứng minh.

Bài số 2. Chứng minh rằng hàm số $y = \left(a + bx + \frac{1}{6}x^3\right)e^{2x}$ là nghiệm của phương trình

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$$

Hướng dẫn: Tính đạo hàm rồi thay vào phương trình ta có điều phải chứng minh.

Bài số 3. Giải các phương trình vi phân cấp 1

1. $y' + 2y = 4x$
2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
3. $y' + y = \cos x$
4. $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$
5. $y' = \dfrac{x+y+2}{x-y+4}$
6. $y' - y\sin x = \sin x \cos x$
7. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$, $y(0) = 0$
8. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y(e) = \dfrac{1}{2}e^2$
9. $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$
10. $y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$
11. $y' - \dfrac{y}{2x} = -\dfrac{\sin x}{2x} \cdot y^3$.

Đáp số :

1) $y(x) = 2x - 1 + Ce^{-2x}$; 2) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$; 3) $y(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + C$;

4) $\ln|xy| + x - y = C \vee x = 0 \vee y = 0$; 5) $\arctan\left(\dfrac{y-1}{x+3}\right) = \ln\left(\sqrt{(y-1)^2 + (x+3)^2}\right) + C$;

6) $y(x) = -\cos x + 1 + Ce^{-\cos x}$; 7) $y(x) = \arcsin x - 1$; 8) $y(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \ln x$;

9) $y(x) = \left[\dfrac{1}{18}e^{x^3}(x^6 + 2x^3)\right]^3$; 10) $y(x) = \dfrac{x}{\cos x}$; 11) $y^2(a - \cos x) = x$ hay $y = 0$.

Bài số 4. Giải các phương trình vi phân cấp 2 thuần nhất sau

1. $y^{//} + y^{/} - 2y = 0$
2. $y^{//} - 9y = 0$
3. $y^{//} - 4y^{/} = 0$
4. $y^{//} + y = 0$
5. $y^{//} + 6y^{/} + 13y = 0$
6. $y^{//} - 10y^{/} + 25y = 0$
7. $y^{//} + y^{/} - 6y = 0$
8. $y^{//} + 4y = 0$
9. $y^{//} + 6y^{/} + 12y = 0$
10. $y^{//} + 2y^{/} + 5y = 0$
11. $y^{//} - 2y^{/} - y = 0$
12. $4y^{//} - 20y^{/} + 25y = 0$

Đáp số : 1) $y(x) = Ae^{x} + Be^{-2x}$; 2) $y(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}$; 3) $y(x) = Ae^{4x} + B$;

4) $y(x) = A\sin x + B\cos x$; 5) $y(x) = e^{-3x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$;

6) $y(x) = Ae^{x} + Be^{5x}$; 7) $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$; 8) $y(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$;

9) $y(x) = e^{-3x}\left(A\sin\sqrt{3}x + B\cos\sqrt{3}x\right)$; 10) $y(x) = e^{-x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$;

11) $y(x) = Ae^{(1+\sqrt{2})x} + Be^{(1-\sqrt{2})x}$; 12) $y(x) = (Ax + B)e^{\frac{5}{2}x}$.

Bài số 5. Giải các phương trình vi phân với điều kiện đầu sau:

1. $y^{//} - 4y^{/} + 3y = 0,\ y(0) = 6,\ \ y^{/}(0) = 14$
2. $4y^{//} + 4y^{/} + y = 0,\ y(0) = 2,\ \ y^{/}(0) = 0$
3. $y^{//} + 4y^{/} + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ \ y^{/}(0) = 15$
4. $y^{//} = xe^{-x},\ y(0) = 1,\ \ y^{/}(0) = 1$
5. $y^{//} - 4y^{/} + 3y = e^{5x},\ y(0) = 3,\ \ y^{/}(0) = 9$
6. $y^{//} + 4y = \sin 2x + 1,\ y(0) = \dfrac{1}{4},\ \ y^{/}(0) = 0$

Đáp số : 1) $y(x) = 2e^{x} + 4e^{3x}$; 2) $y(x) = (x+2)e^{-\frac{1}{2}x}$; 3) $y(x) = 3e^{-2x}\sin 5x$;

4) $y(x) = 2x - 1 + e^{-x}(x+2)$; 5) $y(x) = \frac{11}{4}e^{3x} + \frac{1}{8}e^{x} + \frac{1}{8}e^{5x}$;

6) $y(x) = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}$.

Bài số 6. Giải các phương trình vi phân không thuần nhất sau

1. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$
2. $y'' - 2y' + y = 1 + x$
3. $y'' - 2y' + y = e^{x}(1+x)$
4. $y'' + y = \sin x + \cos 2x$
5. $2y'' + y' - y = 2e^{x}$
6. $y'' + a^2 y = e^{x}, \quad a > 0.$
7. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
8. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$
9. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$
10. $y'' + y = \tan x$
11. $y'' - 4y' = -12x^2 - 6x - 4$
12. $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$
13. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$
14. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$
15. $y'' - y = x\cos^2 x$
16. $y'' = 6y' + 9y = xe^{\alpha x}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Đáp số : 1) $y(x) = y_0(x) + y_r(x) = A\sin x + B\cos x + \ln|\sin x|\sin x - x\cos x$;

2) $y(x) = (Ax+B)e^{x} + x + 3$; 3) $y(x) = (Ax+B)e^{x} + e^{x}\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)$;

4) $y(x) = A\sin x + B\cos x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x$; 5) $y(x) = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{-x} + e^{x}$;

6) $y(x) = A\sin ax + B\cos ax + \frac{1}{1+a^2}e^{x}$; 7) $y(x) = Ae^{6x} + Be^{x} + \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x$;

8) $y(x) = (Ax+B)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$; 9) $y(x) = Ae^{x} + Be^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$;

10) $y(x) = A\sin x + B\cos x + \frac{1}{2}\cos x \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|$; 11) $y(x) = A + Be^{4x} + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{4}x$;

12) $y(x) = Ae^{5x} + Be^{4x} + \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x\right)e^{4x}$; 13) $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} - \sin x + 2\cos x$;

14) $y(x) = A\sin x + B\cos x + \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x$;

15) $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{25}\sin 2x - \frac{1}{10}x\cos 2x$;

16) Khi $\alpha = -3: y(x) = (Ax+B)e^{-3x} + \frac{1}{6}x^3e^{-3x}$;

Khi $\alpha \neq -3$: $y(x) = (Ax+B)e^{-3x} + \left[\frac{1}{(\alpha+3)^2}x - \frac{2}{(\alpha+3)^3}\right]e^{\alpha x}$.

Bài số 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f^/(x) = 4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

Đáp số : $-\frac{1}{10}$.

Bài số 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f^/(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

Đáp số : $-\frac{2}{3}$.

Bài số 9. Tìm hàm cầu Q_D cho biết hệ số co dãn của cầu theo giá là : $E_D = -2$ và lượng cầu ở mức giá $P = 2$ là 100.

Đáp số : $Q = 400P^{-2}$.

Bài số 10. Tìm hàm cầu Q_D cho biết hệ số co dãn của cầu theo giá là : $E_D = -\frac{5P+2P^2}{Q}$ và lượng cầu ở mức giá $P = 10$ là 500.

Đáp số : $Q = 650 - 5P - P^2$.

Bài số 11. Tìm hàm cầu Q_D cho biết hệ số co dãn của cầu theo giá là : $E_D = \frac{6P-4P^2}{Q}$ và lượng cầu ở mức giá $P = 10$ là 700.

Đáp số : $Q = 840 + 6P - 2P^2$.

Bài số 12. Cho hàm cung và hàm cầu của một loại hàng

$$Q_S(t) = -2 + P(t);\ Q_D(t) = 8 - 4P(t) - 2P^/(t) - P^{//}(t)$$

Với giá ban đầu $P(0) = 3$ và $P^/(0) = 1$. Tìm sự biến động của giá $P(t)$ theo thời gian và giả thiết cung cầu thỏa mãn tại mọi thời điểm.

Đáp số : $P(t) = 2 + e^{-t}(\sin 2t + \cos 2t)$.

MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

Đề số 01

Câu 1 (2 điểm). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình tuyến tính trên.

2) Tìm một cơ sở và số chiều cho không gian nghiệm của hệ phương trình trên.

Câu 2 (2 điểm). Cho hai ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm X, Y sao cho $\begin{cases} A(X+Y) = B \\ (X-Y)A = B \end{cases}$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Maclaurin của hàm số trên tới lũy thừa bậc 4

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 8x + 40}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3 + 2018$. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số trên tại điểm $(1, 1)$.

Câu 7 (1 điểm). Khảo sát cực trị của hàm số: $f(x,y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 2018$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.

Đề số 02

Câu 1 (2 điểm). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 7x_1 + 13x_2 + 22x_3 - 16x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình tuyến tính trên.

2) Tìm một cơ sở và số chiều cho không gian nghiệm của hệ phương trình trên.

Câu 2 (2 điểm). Cho hai ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm X, Y sao cho $\begin{cases} A(X+Y) = B \\ (X-Y)A = B \end{cases}$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Maclaurin của hàm số trên tới lũy thừa bậc 4

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 4x + 52}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4 + 2018.$ Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số trên tại điểm $(1, 1)$.

Câu 7 (1 điểm). Khảo sát cực trị của hàm số: $f(x, y) = x + 2ey - e^x - e^{2y} + 2018$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y'' - 5y' + 4y = e^x$.

Đề số 03

Câu 1 (2 điểm). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 7x_1 + 13x_2 + 22x_3 - 16x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình tuyến tính trên.

2) Tìm một cơ sở và số chiều cho không gian nghiệm của hệ phương trình trên.

Câu 2 (2 điểm). Cho hai ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \\ -6 & 4 & 11 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm X, Y sao cho $\begin{cases} A(X+Y) = B \\ (X-Y)A = B \end{cases}$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x)^2}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Maclaurin của hàm số trên tới lũy thừa bậc 4:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{2x^2 + 12x + 36}$..

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $f(x,y) = x^4 + 6xy + y^4 + 2018$. Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số trên tại điểm $(1, 1)$.

Câu 7 (1 điểm). Khảo sát cực trị của hàm số: $f(x,y) = x + 2e^y - e^x - e^{2y} + 2018$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

Đề số 04

Câu 1 (2 điểm). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 11x_1 + 18x_2 + 20x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình tuyến tính trên.

2) Tìm một cơ sở và số chiều cho không gian nghiệm của hệ phương trình trên.

Câu 2 (2 điểm). Cho hai ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \\ -3 & 8 & 20 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm X, Y sao cho $\begin{cases} A(X+Y)=B \\ (X-Y)A=B \end{cases}$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{\sin^2 x}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Maclaurin của hàm số trên tới lũy thừa bậc 4

$$f(x)=\frac{1}{x^2-9}$$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2+8x+26}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $f(x,y)=x^3+5xy+y^4+2018.$ Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số trên tại điểm $(1, 1)$.

Câu 7 (1 điểm). Khảo sát cực trị của hàm số: $f(x,y)=-x^3+3xy-8y^3+2018.$

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y^{//}-4y^{/}=e^{4x}$.

Đề số 05

Câu 1 (2 điểm). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 11x_1 + 18x_2 + 20x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình tuyến tính trên.

2) Tìm một cơ sở và số chiều cho không gian nghiệm của hệ phương trình trên.

Câu 2 (2 điểm). Cho hai ma trận: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \\ -4 & 5 & 13 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm X, Y sao cho $\begin{cases} A(X+Y)=B \\ (X-Y)A=B \end{cases}$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Maclaurin của hàm số trên tới lũy thừa bậc 4: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-4}$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2+4x+10}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $f(x,y)=x^4+7xy+y^2+2018.$ Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số trên tại điểm $(1,1)$.

Câu 7 (1 điểm). Khảo sát cực trị của hàm số: $f\left(x,y\right)=40x^{0,3}y^{0,4}-0,03x-2y+2018$

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y^{//}-9y=e^{3x}$.

Đề số 06

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 + 13x_2 + 30x_3 - 23x_4 = 0 \end{cases}$

2) Tính định thức sau : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Câu 2 (2 điểm). Cho hai ma trận: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm X, Y sao cho $\begin{cases} A\left(X+Y\right)=B \\ \left(X-Y\right)A=B \end{cases}$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin\left(2018x\right)}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Maclaurin của hàm số trên tới lũy thừa bậc 4: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2x+101}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số trên tại điểm $(1,1)$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm $f\left(x,y\right)=2x-3y,$ với ràng buộc $x^2+9y^2=180.$

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y^{/}+3x^2y=0$ với $y(0)=5.$

Đề số 07

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 14x_3 - 10x_4 = 0 \end{cases}$

2) Tính định thức sau : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Câu 2 (2 điểm). Cho hai ma trận: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -5 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm X, Y sao cho $\begin{cases} A\left(X+Y\right)=B \\ \left(X-Y\right)A=B \end{cases}$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\tan\left(2018x\right)}.$

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Maclaurin của hàm số trên tới lũy thừa bậc 5:

$$f\left(x\right)=\ln(1+x)$$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+104}.$

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right).$ Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số trên tại điểm $(1,1)$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm $f\left(x,y\right)=3x-y,$ với ràng buộc $9x^2+y^2=162.$

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y' + y\tan x = 0$ với $y(\pi) = 2$.

Đề số 08

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 + 13x_2 + 30x_3 - 23x_4 = 0 \end{cases}$

2) Tính định thức sau : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Câu 2 (2 điểm). Cho hai ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm X, Y sao cho $\begin{cases} A(X+Y) = B \\ (X-Y)A = B \end{cases}$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Maclaurin của hàm số trên tới lũy thừa bậc 4:

$f(x) = \arctan x$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 109}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số trên tại điểm $(1, 1)$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x - 3y$, với ràng buộc $x^2 + 9y^2 = 288$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y' - \frac{y}{x^2} = 0$ với $y(1) = 4$.

Đề số 09

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính sau: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = m \end{cases}$

2) Tìm hạng của ma trận sau: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Câu 2 (2 điểm).

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận B sao cho $AB = BA$.

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Taylor của hàm số sau tới lũy thừa bậc 4

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ tại } x_0 = 1$$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x(x+1)} dx$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $y = f(x)$ thỏa mãn đẳng thức $x^3 + x^2e^y - \ln y = 2018$, với $f(1) = 1$. Tính $f'(1)$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 8x + 15y + 28$, với ràng buộc $2x^2 + 3y^2 = 107$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y'' - 3y' + 2y = x^2$.

Đề số 10

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính sau : $\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & m \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \end{cases}$

2) Tìm hạng của ma trận sau: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 12 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Câu 2 (2 điểm).

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có), với $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận B sao cho $AB = BA$.

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{x^2}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Taylor của hàm số sau tới lũy thừa bậc 4

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ tại } x_0 = 1$$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $y = f(x)$ thỏa mãn đẳng thức $2x^3 + 4y^3 - 6xy = 2018$, với $f(1) = 2$. Tính $f^{/}(1)$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 2x + 9y + 1$, với ràng buộc $x^2 + 3y^2 = 31$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y^{//} - 4y^{/} + 3y = x^2$.

Đề số 11

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính sau: $\begin{cases} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{cases}$

2) Tính định thức của ma trận sau: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ m & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Câu 2 (2 điểm). Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 3 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm ma trận X sao cho $13\left(A^T\right)^{-1} + 2X = A$.

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - x - 1}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Taylor đến cấp 3 của $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ tại $x_0 = 2$.

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{2x^2 - 4x + 20}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $u = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$. Chứng minh rằng: $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số sau: $f\left(x, y\right) = x^3 + 2xy - 8y^3 + 2018$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y' + 4y = 3x - 2$ với $y(0) = -1$.

Đề số 12

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính sau: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

2) Tính định thức của ma trận sau: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ m & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Câu 2 (2 điểm). Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & -14 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

2) Tìm ma trận X sao cho $13\left(A^T\right)^{-1} + X = 2A$.

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\arctan 2x}$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển Maclaurin đến cấp 4 của hàm số: $f(x) = \ln(1+x)$.

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $y = f(x)$ thỏa mãn đẳng thức $x^3 + x^2e^y - 2\ln y = 2018$. Tính y'_x (y'_x là đạo hàm của y theo x).

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm sau: $f\left(x,y\right) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 2018$ với $x, y > 0$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y' - 2y = 4xe^{2x}$ với $y(0) = 10$.

Đề số 13

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính sau : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

2) Tính định thức của ma trận sau : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Câu 2 (2 điểm).

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (nếu có).

2) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận B sao cho $AB = BA$.

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+x\right)^{\ln x}$.

Câu 4 (1 điểm). Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x-x^2} & \text{khi} \quad x\neq 0\\ m-3 & \text{khi} \quad x=0\end{cases}$

Tìm m để hàm f liên tục tại $x=0$. Với m tìm được hãy tính $f^{/}\left(0\right)$, (nếu có).

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\int\limits_{-1}^{+\infty}\dfrac{dx}{3x^2-12x+39}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. Chứng minh rằng: $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm $f\left(x,y\right)=2x-3y$, với ràng buộc $x^2+9y^2=180$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y^{/}+2xy=3xe^{-x^2}$ với $y(0)=1$.

Đề số 14

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính : $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+x_4=0\\ 3x_1-2x_2-2x_3-x_4=0\\ 5x_1-x_2-3x_3-2x_4=0\end{cases}$

2) Tính định thức của ma trận sau : $A=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&2&2&0\\1&2&3&1\\0&3&0&4\end{pmatrix}$

Câu 2 (2 điểm).

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận : $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&3&1\\-1&-2&0\end{pmatrix}$ (nếu có).

2) Tìm ma trận B sao cho $AB=BA$ với $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\tan x}$.

Câu 4 (1 điểm). Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-1}{x-x^2} & \text{khi} \quad x\neq 0\\ m-2 & \text{khi} \quad x=0\end{cases}$

Tìm m để hàm f liên tục tại $x=0$. Với m tìm được hãy tính $f^{/}\left(0\right)$, (nếu có).

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+12x+39}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $u = \arctan\frac{x}{y}$. Chứng minh rằng : $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 1$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 3x - y$, với ràng buộc $9x^2 + y^2 = 162$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y' - 4xy = xe^{2x^2}$ với $y(0) = 5$.

Đề số 15

Câu 1 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình tuyến tính sau : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

2) Tính định thức của ma trận sau : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Câu 2 (2 điểm).

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (nếu có).

2) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận B sao cho $AB = BA$.

Câu 3 (1 điểm). Tính giới hạn: $\lim_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos 2x}$.

Câu 4 (1 điểm). Khảo sát tính tăng, giảm và cực trị của hàm số sau: $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng: $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{2x^2-4x+20}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số: $y = f(x)$ thỏa mãn đẳng thức $x^3 + y^3 - 6xy = 2018$. Tính y'_x (y'_x là đạo hàm của y theo x).

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x - 3y$, với ràng buộc $x^2 + 9y^2 = 288$.

Câu 8 (1 điểm). Giải phương trình vi phân: $y' - 2xy = 3xe^{x^2}$ với $y(0) = 2$.

Phụ lục 1. Tập số, tổng, tích hữu hạn, hằng đẳng thức, bất đẳng thức, chứng minh bằng phương pháp quy nạp

1. Các ký hiệu tập số

1.1. Tập số tự nhiên (natural integer)

Ký hiệu: $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,...\};\ \mathbb{N}^* = \{1,2,...\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

1.2. Tập số nguyên (relative integer)

Ký hiệu: $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

1.3. Tập số hữu tỷ (rational number)

Ký hiệu: $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1.4. Tập số thực (real number): Ký hiệu: $\mathbb{R}$

1.5. Tập số phức (complex number)

Ký hiệu: $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi \middle| a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \right\}$$

2. Tổng, tích hữu hạn

2.1. Ký hiệu tổng, tích

Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\ ; a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

2.2. Tổng, tích được định nghĩa bằng quy nạp

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1};\quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) \cdot a_{n+1}.$$

Quy ước: $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1;\quad \prod_{i=1}^{1} a_1 = a_1.$

3. Hằng đẳng thức

a. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ (Nhị thức newton)

b. $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}$

với

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Hệ quả

a. $(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^k(-1)^k a^{n-k}b^k$

b. Nếu n lẻ: $a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a^{n-k}b^{k-1}$.

4. Bất đẳng thức

4.1. Bất đẳng thức Cauchy

Cho $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

4.2. Bất đẳng thức BCS

Cho $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

4.3. Bất đẳng thức Bernoulli

Cho $a \geq -1$. Ta có $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $n = 0 \vee n = 1, a = -1$.

5. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp

Xét hàm mệnh đề: $p(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Nếu

+ $p(1)$ đúng

+ $p(n)$ đúng $\Rightarrow p(n+1)$ đúng

Thì $p(n)$ đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ. Chứng minh đẳng thức sau bằng phương pháp quy nạp

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Giải

Đặt

$$p(n): 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

+) Với $n = 1$, $p(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ là đẳng thức đúng.

+) Với n bất kỳ, nếu $p(n)$ đúng, nghĩa là đẳng thức

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

đúng thì khi đó, ta có

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

nghĩa là $p(n+1)$ cũng là mệnh đề đúng. Nói khác đi

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(n) \to p(n+1)$$

là mệnh đề đúng.

Do nguyên lý quy nạp, đẳng thức

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chú ý rằng nguyên lý quy nạp không đơn thuần là một phép chứng minh. Nó còn dùng trong các phép suy luận.

Tổng quát hơn, nguyên lý quy nạp còn dùng để chứng minh hàm mệnh đề sau:

Xét hàm mệnh đề: $\forall n \geq n_0, p(n)$

Nếu

+) $p(n_0)$ đúng và

+) $\forall n \geq n_0, p(n)$ đúng $\Rightarrow p(n+1)$ đúng

Thì $\forall n \geq n_0, p(n)$ đúng.

Phụ lục 2. Tập hợp và ánh xạ

1. Tập hợp

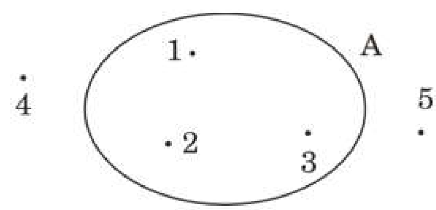
1.1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp là một khái niệm cơ bản, không định nghĩa. Thông thường, một tập hợp bao gồm nhiều đối tượng, mỗi đối tượng đó được gọi là một phần tử của tập hợp. Ta chỉ có thể nhận biết được tập hợp thông qua các phần tử của nó.

Ví dụ 1. Tập hợp các môn mà sinh viên năm thứ nhất của trường Đại học Tài chính – Marketing phải học; tập hợp các mặt hàng mà công ty đang bán,…

Người ta thường kí hiệu tập hợp bằng các chữ cái in hoa A, B, C,…và các phần tử của tập hợp bằng các chữ cái in thường a, c, b,…. Một tập hợp A chứa phần tử a (hay phần tử a thuộc tập hợp A) được kí hiệu là $a \in A$. Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, ký hiệu $\varnothing$.

Để biểu diễn một tập hợp A, người ta còn dùng *giản đồ Venn* với một đường cong đơn khép kín, chia mặt phẳng làm hai miền, miền phía bên trong đường cong dành cho các phần tử thuộc về tập hợp A và miền phía bên ngoài mặt phẳng dành cho các phần tử không thuộc về tập hợp A. Chẳng hạn, với giản đồ Venn sau mô tả $1,2,3 \in A$ và $4,5 \notin A$.



Có hai cách để xác định một tập hợp. Cách thứ nhất là liệt kê các phần tử của nó. Trong toán học, người ta liệt kê các phần tử của một tập hợp giữa hai ngoặc nhọn ("{" và "}"), *không chú ý thứ tự liệt kê* và *mỗi phần tử chỉ được liệt kê một lần*. Cách thứ hai là mô tả tính chất của các phần tử của tập hợp đó.

Ví dụ 2. Một số tập hợp số thường dùng

Tập hợp các số tự nhiên, ký hiệu $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$; tập hợp các số tự nhiên khác 0, kí hiệu $\mathbb{N}^*$.

Tập hợp các số nguyên, ký hiệu $\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

Tập hợp các số hữu tỷ, ký hiệu $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}; n \neq 0\}$.

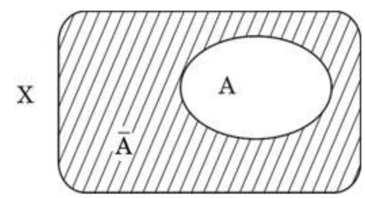
Tập hợp các số thực, ký hiệu $\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \vee x \in I\}$; tập hợp các số thực khác 0, ký hiệu $\mathbb{R}^*$; tập hợp các số thực không âm, ký hiệu là $\mathbb{R}^+$; tập các số thực không dương ký hiệu $\mathbb{R}^-$,…

Tập hợp các số phức, ký hiệu $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

1.2. Các phép toán trên tập hợp

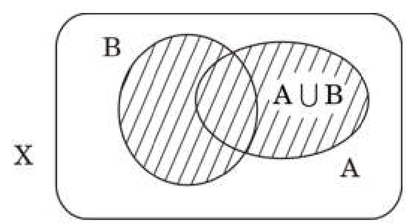
1.2.1. Phép lấy phần bù.

Phần bù của A trong X, ký hiệu $C_X A$ (hay $\overline{A}$), là tập con của X gồm những phần tử không thuộc về A, nghĩa là : $\overline{A} = \left\{ x \in X \middle| x \notin A \right\}$.



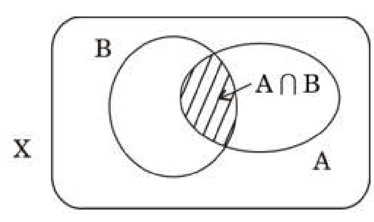
1.2.2. Phép lấy phần hợp.

Phần hợp của A với B, ký hiệu $A \cup B$, là tập con của X gồm những phần tử thuộc về A hay thuộc về B, nghĩa là : $A \cup B = \left\{ x \in X \middle| x \in A \vee x \in B \right\}$.



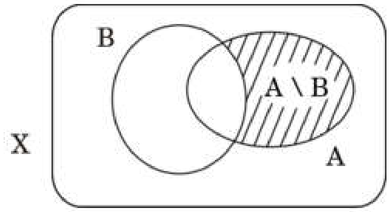
1.2.3. Phép lấy phần giao.

Phần giao của A với B, ký hiệu $A \cap B$, là tập con của X gồm những phần tử nằm trong A và nằm trong B, nghĩa là : $A \cap B = \left\{ x \in X \middle| x \in A \wedge x \in B \right\}$



1.2.4. Phép lấy phần hiệu.

Phần hiệu của A với B , ký hiệu $A \setminus B$, là tập con của X gồm những phần tử nằm trong A và không nằm trong B, nghĩa là : $A \setminus B = \left\{ x \in X \middle| x \in A \wedge x \notin B \right\}$.



Chú ý: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Ví dụ 3. Cho tập $X = \{0,1,2,3,...,8,9\}$ và hai tập hợp $A = \{0,2,4,6,8\}; B = \{0,2,4\}$ ta tìm được $\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$; $A \cup B = \{0,1,2,3,4,6,8\}$; $A \cap B = \{0,2,4\}$; $A \setminus B = \{6,8\}$.

1.3. Các tính chất tập hợp

Với mọi tập hợp $A, B, C \subset X$. Ta có :

i) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$

ii) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

v) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

vi) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

vii) $A \cup \varnothing = A$; $A \cap X = A$

viii) $A \cup X = X$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

ix) $A \cup \overline{A} = X$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

x) $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.

2. Ánh xạ

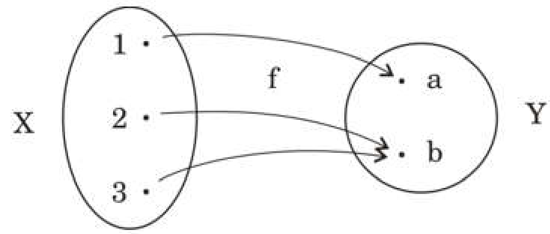
2.1. Định nghĩa

Với hai tập hợp không rỗng X, Y, một *ánh xạ* f từ X vào Y là một sự liên kết giữa các phần tử của X và Y sao cho mỗi phần tử $x \in X$ đều được liên kết với duy nhất một phần tử $y \in Y$, ký hiệu $y = f(x)$, gọi là *ảnh của* x *qua ánh xạ* f. Ta còn viết

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Tập X được gọi là *miền xác định* của f, tập Y được gọi là *miền ảnh* của f. Người ta có thể dùng giản đồ Venn để mô tả ánh xạ.

Ví dụ 4. Để mô tả ánh xạ $f : X \to Y$, với $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b\}$ và $f(1) = a$; $f(2) = f(3) = b$ ta có thể mô tả như hình vẽ sau :



Ảnh của $A \subset X$ *qua* f, ký hiệu $f(A)$, là tập hợp các phần tử $y \in Y$ sao cho nó là ảnh của một phần tử $x \in A$, nghĩa là :

$$f(A) = \{\, y \in Y \,|\, \exists x \in A, y = f(x) \,\}.$$

Đặc biệt, $f(X)$ được gọi là *ảnh của* f, ký hiệu $\operatorname{Im} f$.

Ảnh ngược của $B \subset Y$ *qua* f, ký hiệu $f^{-1}(B)$, là tập hợp gồm các phần tử x sao cho $f(x) \in B$, nghĩa là :

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \,|\, f(x) \in B \,\}$$

Đặc biệt, với $y \in Y$, ta ký hiệu $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$.

Một số ánh xạ đặc biệt :

i) Với tập X bất kỳ, ánh xạ $f : X \to X$ xác định bởi $f(x) = x$, với mọi $x \in X$, được gọi là *ánh xạ đồng nhất* của X, ký hiệu id_X.

ii) Với mỗi tập con không rỗng A của một tập hợp X, *hàm chỉ tiêu* của A, ký hiệu χ_A, là ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad x \in A \\ 0 & \text{khi} \quad x \notin A \end{cases}, \text{ với mọi } x \in X$$

2.2. Phân loại ánh xạ

Xét ánh xạ $f : X \to Y$. Ta nói :

i) f là một *toàn ánh* khi $\operatorname{Im} f = Y$, nghĩa là khi mọi phần tử $y \in Y$ đều là ảnh của ít nhất một phần tử $x \in X$. Nói khác đi, khi $f^{-1}(y)$ có ít nhất một phần tử, với mọi $y \in Y$.

ii) f là một *đơn ánh* khi $f^{-1}(y)$ có nhiều nhất một phần tử, với mọi $y \in Y$, nghĩa là với mọi $x, x' \in X$ ta có $f(x) = f(x')$ thì $x = x'$.

iii) f là một *song ánh* khi nó vừa là một đơn ánh và là một toàn ánh. Nói khác đi, f là một song ánh khi $f^{-1}(y)$ luôn luôn có đúng một phần tử, với mọi $y \in Y$.

Ví dụ 5. Ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=x^2$ không là đơn ánh, cũng không là toàn ánh.

Ánh xạ $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ xác định bởi $g(x)=x^2$ không là toàn ánh nhưng là đơn ánh.

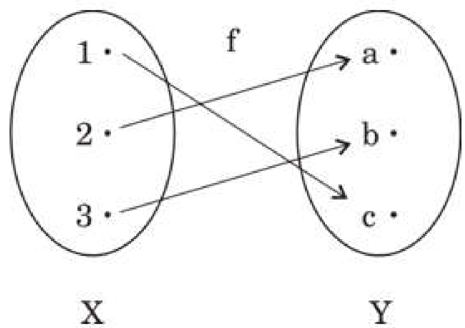
Ánh xạ $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ xác định bởi $h(x)=x^2$ không là đơn ánh nhưng là toàn ánh.

Ánh xạ $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ xác định bởi $\varphi(x)=x^2$ vừa là toàn ánh, vừa là đơn ánh nên là song ánh.

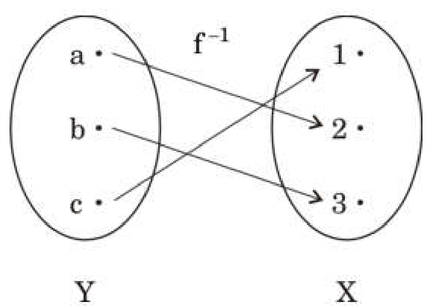
2.3. Ánh xạ ngược

Cho song ánh $f:X\to Y$, khi đó ánh xạ đi từ Y vào X, liên kết phần tử $y\in Y$ với phần tử (duy nhất) $x\in X$ sao cho $f(x)=y$ được gọi là *ánh xạ ngược* của f, ký hiệu f^{-1}.

Ví dụ 6. Ánh xạ f cho bởi giản đồ Venn



là một song ánh và có ánh xạ ngược là



xác định bởi

$f^{-1}(a)=2$ (vì $f(2)=a$),

$f^{-1}(b)=3$ (vì $f(3)=b$),

$f^{-1}(c)=1$ (vì $f(1)=c$).

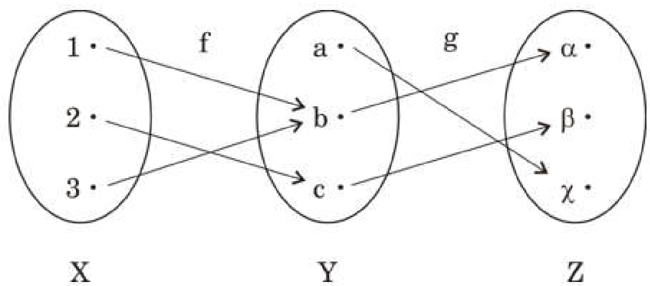
2.4. Ánh xạ hợp.

Xét hai ánh xạ $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$. Ánh xạ có miền xác định X, miền ảnh Z, liên kết phần tử $x \in X$ với phần tử $z = g\left[f(x)\right] \in Z$ được gọi là *ánh xạ hợp* của f với g, ký hiệu $g \circ f$,

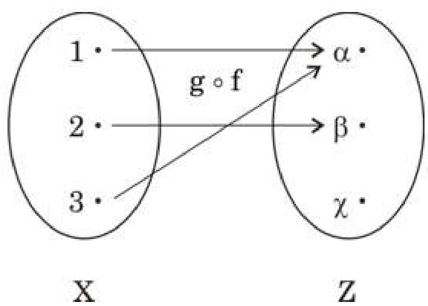
$$\begin{array}{llll} g \circ f: & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & g\left[f(x)\right] \end{array}$$

Ví dụ 7.

i) Với các ánh xạ f và g cho bởi giản đồ Venn



ta được ánh xạ hợp $g \circ f$



ii) Với các ánh xạ $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$ và $g(x) = x + 1$, ta có các ánh xạ hợp $g \circ f, f \circ g, f \circ f, g \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(x^2\right) = x^2 + 1; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = f\left(g(x)\right) = f(x+1) = (x+1)^2; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f \circ f(x) = f\left(f(x)\right) = f\left(x^2\right) = \left(x^2\right)^2 = x^4; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g \circ g(x) = g\left(g(x)\right) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Định lý. *Với các ánh xạ* $f: X \to Y$ *và* $g: Y \to X$*, ta có* $g = f^{-1}$ *nếu và chỉ nếu* $f \circ g = id_Y$ *và* $g \circ f = id_X$.

Phụ lục 3. Tính toán ma trận bằng máy tính cá nhân

Trong phần này chúng tôi chỉ hướng dẫn sử dụng máy tính cá nhân FX 570 ES Plus II loại VINACAL để tính toán một số phép tính của ma trận còn các phép tính khác các bạn đều đã được học dưới cấp 3. Các loại máy tính 570 khác cách làm tương tự.

Cụ thể cho hai ma trận

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&0&3\\3&1&5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&1&2\\1&2&4\end{pmatrix}$$

Sử dụng máy tính FX 570 ES Plus II. Tính $2A,\ 3A+4B,\ AB,\ BA,\ |A|,\ |B|,\ A^{-1},\ B^{-1}$.

Bước 1. Vào chức năng ma trận

Nhấn $\boxed{\text{Mode}}$ $\to$ chọn MATRIX nhấn $\boxed{6}$ (các máy tính khác có thể ký hiệu số khác) $\to$ $\boxed{\text{AC}}$.

Bước 2. Nhập ma trận

+) Nhấn $\boxed{\text{Shift}}$ $\to$ $\boxed{4}$ $\to$ chọn cấp ma trận (DIM) nhấn $\boxed{1}$ $\to$ chọn ma trận A nhấn $\boxed{1}$ $\to$ Chọn cấp ma trận nếu chưa thấy cấp thì nhấn $\boxed{\nabla}$ di chuyển phím mũi tên xuống dưới tìm cấp ma trận nhấn $\boxed{3\times 3}$ $\to$ nhập ma trận A $\to$ $\boxed{\text{AC}}$.

+) Nhấn $\boxed{\text{Shift}}$ $\to$ $\boxed{4}$ $\to$ chọn cấp ma trận (DIM) nhấn $\boxed{1}$ $\to$ chọn ma trận B nhấn $\boxed{2}$ $\to$ Chọn cấp ma trận nếu chưa thấy cấp thì nhấn $\boxed{\nabla}$ di chuyển phím mũi tên xuống dưới tìm cấp ma trận nhấn $\boxed{3\times 3}$ $\to$ nhập ma trận B $\to$ $\boxed{\text{AC}}$.

Bước 3. Khai thác kết quả

+) Tính 2A

Nhấn $\boxed{2}$ $\to$ $\boxed{\times}$ $\to$ $\boxed{\text{Shift}}$ $\to$ $\boxed{3}$ $\to$ $\boxed{=}$ ta được kết quả

$$2A=\begin{pmatrix}2&4&4\\4&0&6\\6&4&10\end{pmatrix}$$

+) Tính $3A+4B$

Nhấn $\boxed{3}$ $\to$ $\boxed{\times}$ $\to$ $\boxed{\text{Shift}}$ $\to$ $\boxed{3}$ $\to$ $\boxed{+}$ $\to$ $\boxed{4}$ $\to$ $\boxed{\times}$ $\to$ $\boxed{\text{Shift}}$ $\to$ $\boxed{4}$ $\to$ $\boxed{=}$ ta được kết quả

$$3A + 4B = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 10 \\ 14 & 4 & 17 \\ 13 & 11 & 31 \end{pmatrix}$$

+) Tính AB

Nhấn $\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{\times} \rightarrow \boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{=}$ ta được kết quả

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 13 \\ 9 & 6 & 14 \\ 16 & 11 & 25 \end{pmatrix}$$

+) Tính BA

Nhấn $\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{\times} \rightarrow \boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{=}$ ta được kết quả

$$BA = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 11 \\ 10 & 6 & 17 \\ 17 & 6 & 28 \end{pmatrix}$$

+) Tính $|A|$

Nhấn $\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{=}$ ta được kết quả $|A = -1|$

+) Tính $|B|$

Nhấn $\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{=}$ ta được kết quả $|B| = 3$

+) Tính A^{-1}

Nhấn $\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{x^{-1}} \rightarrow \boxed{=}$ ta được kết quả

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

+) Tính B^{-1}

Nhấn $\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{x^{-1}} \rightarrow \boxed{=}$ ta được kết quả

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & \frac{11}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Huy Hoàng (chủ biên), Lê Thị Anh, Phùng Minh Đức, Bùi Quốc Hoàn, Phạm Bảo Lâm, Nguyễn Mai Quyên, Đoàn Trọng Tuyến, Hoàng Văn Thắng – H**ướng dẫn giải bài tập Toán cao cấp cho các nhà kinh tế,** NXB ĐHKTQD, 2006& NXB Thống kê, 2007

[2] Bộ môn toán cơ bản – **Bài tập toán cao cấp**, NXB Đại học Kinh tế Quốc dân, 2008.

[3] Nguyễn Huy Hoàng – **Toán cơ sở cho kinh tế**, NXB Thông tin và Truyền thông, 2011& NXB GD, 2014.

[4] Nguyễn Thị An, Nguyễn Huy Hoàng, **Giới thiệu đề thi tuyển sinh Sau đại học (2006 – 2012), Môn Toán Kinh tế (Phần Toán cơ sở cho Kinh tế),** NXB Chính trị – Hành chính, 2012.

[5] Laurence D. Hoffmann, Gerald L. Bradley, **Applied Calculus For Business, Economics, and the Social and Life Sciences,** The Mc. Graw - Hill Companies, Inc (Expanded 10th ed), 2010.

[6] Michael Hoy, John Livernois, Chris Mc Kenna, Ray Rees, Thanasis Stengos, **Mathematics for Economics,** The MIT Press Cambrige, Massachusetts, London, England (second edition), 2011.

[7] Michael Hoy, John Livernois, Chris Mc Kenna, Ray Rees, Thanasis Stengos, **Solutions Manual Mathematics for Economics,** The MIT Press Cambrige, Massachusetts, London, England (second edition), 2011.

[8] A. C. Chiang, **Fundamental Methods of Mathematical Economics**, Mc GrawHill, Inc., 3rd edition, 1984.

[9] A. C. Chiang, **Instructor's Manual to accompany Fundamental Methods of Mathematical Economics**, Mc GrawHill, Inc., 4rd edition, 2005.