

---

## Chương 4

# **Các phép biến đổi trong không gian 3 chiều**

---

Giảng viên: Ths.Vũ Minh Yến  
Tổ HTTT- Khoa CNTT

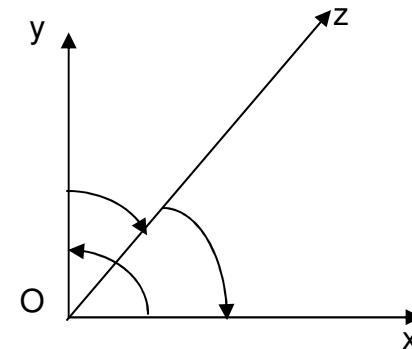
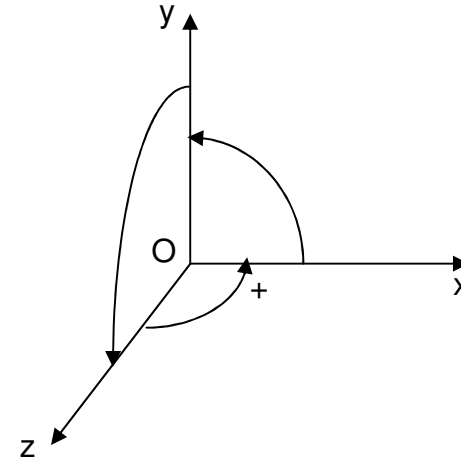
---

# Nội dung

- Hệ tọa độ tay phải, hệ tọa độ tay trái
  - Biểu diễn điểm
  - Phép biến đổi khái quát
  - Các phép biến đổi hình học
  - Các phép biến đổi hệ trục
  - Chuyển đổi quan sát
-

# 1. Hệ tọa độ tay phải, hệ tọa độ tay trái

- Hệ tọa độ tay phải
  - Là hệ tọa độ chuẩn biểu diễn trên văn bản của toán học
  - Chiều dương xác định ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ hướng dương của trục về gốc.
- Hệ tọa độ tay trái
  - Phù hợp cho việc biểu diễn hình ảnh trên máy tính
  - Khi  $z$  càng lớn thì càng xa người nhìn
  - Chiều dương xác định cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ hướng dương của trục về gốc.
- Giá trị chiều dương cho hai hệ tọa độ trên là như nhau



## 2. Biểu diễn điểm(1)

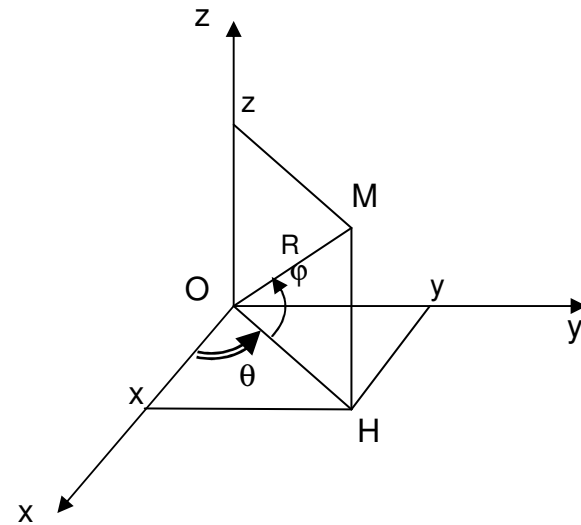
- Trong hệ tọa độ đề các

- $M(x,y,z)$

- Biểu diễn bằng ma trận:

- Ma trận hàng:  $M = [x \ y \ z]$

- Ma trận cột:  $M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$



- Trong hệ tọa độ cực:  $M(R, \varphi, \theta)$

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \theta \\ y = R \cos \varphi \sin \theta \\ z = R \sin \varphi \end{cases}$$

## 2. Biểu diễn điểm(2)

- Trong hệ tọa độ thuần nhất
  - $M(kx, ky, kz, k)$  với  $k \neq 0$ ,  $k=0$  điểm  $M$  ở vô cùng
  - $k=1$  khi đó  $M(x, y, z, 1)$  được gọi là tọa độ đề các của điểm thuần nhất
  - Biểu diễn bằng ma trận
    - Ma trận hàng:  $M = [x \quad y \quad z \quad 1]$
    - Ma trận cột:  $M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

### 3. Phép biến đổi hình học khái quát (1)

- Phép biến đổi T biến điểm M thành điểm M':

$$M(x, y, z) \xrightarrow{T} M'(x', y', z')$$

- Công thức biến đổi: 
$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z + m \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z + n \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z + p \end{cases}$$

- Trong đó:  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, m, n, p$  là hằng số

- Ma trận biến đổi

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ m & n & p & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. Phép biến đổi hình học khái quát (2)

■ Ta có:  $M = [x \quad y \quad z \quad 1]$

$$M' = [x' \quad y' \quad z' \quad 1]$$

■ Suy ra:  $M' = M.T$

Trong đó:  $T = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & b3 & 0 \\ c1 & c2 & c3 & 0 \\ m & n & p & 1 \end{bmatrix}$

---

## 4. Các phép biến đổi hình học

- Phép bất biến
  - Phép tịnh tiến
  - Phép biến đổi tỉ lệ tại gốc toạ độ
  - Phép đối xứng
  - Phép quay
  - Phép biến đổi kết hợp
-



## 4.1. Phép bất biến

- Biến điểm  $M$  thành chính nó:

$$M(x, y, z) \xrightarrow{T} M'(x', y', z') \equiv M(x, y, z)$$

- Ma trận biến đổi:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

## 4.2. Phép tịnh tiến

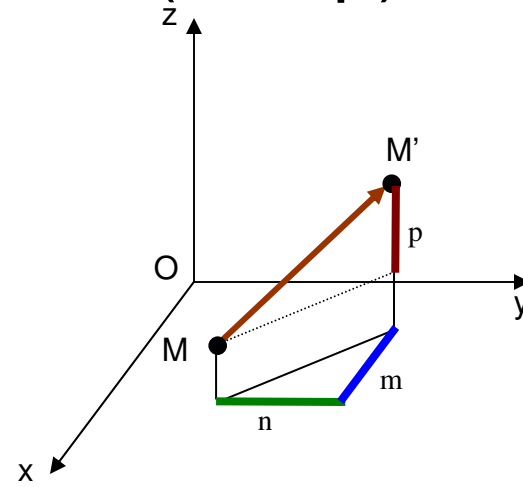
- Tịnh tiến điểm M một vector  $\vec{v}(m,n,p)$  thành điểm M':

$$M(x, y, z) \xrightarrow{T_{\vec{v}}} M'(x', y', z')$$

- Công thức biến đổi:

$$\begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \\ z' = z + p \end{cases}$$

- Ma trận biến đổi:  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & n & p & 1 \end{bmatrix}$



## 4.3. Phép biến đổi tỉ lệ tại gốc tọa độ

- Co dẫn so với gốc tọa độ:

$$M(x, y, z) \xrightarrow{T} M'(x', y', z')$$

- Công thức biến đổi:

$$\begin{cases} x' = t_l x \times x \\ y' = t_l y \times y \\ z' = t_l z \times z \end{cases} \quad \text{với } t_l x, t_l y, t_l z \text{ là các hệ số tỉ lệ khác } 0$$

- Ma trận biến đổi:

$$T = \begin{bmatrix} t_l x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_l y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_l z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4.4. Phép đối xứng

- Phép đối xứng qua mặt phẳng Oxy:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Phép đối xứng qua mặt phẳng Oyz:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Phép đối xứng qua mặt phẳng Ozx :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Phép đối xứng qua tâm O

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

## 4.5. Phép quay

- Phép quay quanh trục Oz
  - Phép quay quanh trục Ox
  - Phép quay quanh trục Oy
-

## 4.5.1 Phép quay quanh trục Oz

- Điểm M quay quanh trục Oz góc quay  $\alpha$  thành M':

$$M(x, y, z) \xrightarrow{T_{(Oz, \alpha)}} M'(x', y', z')$$

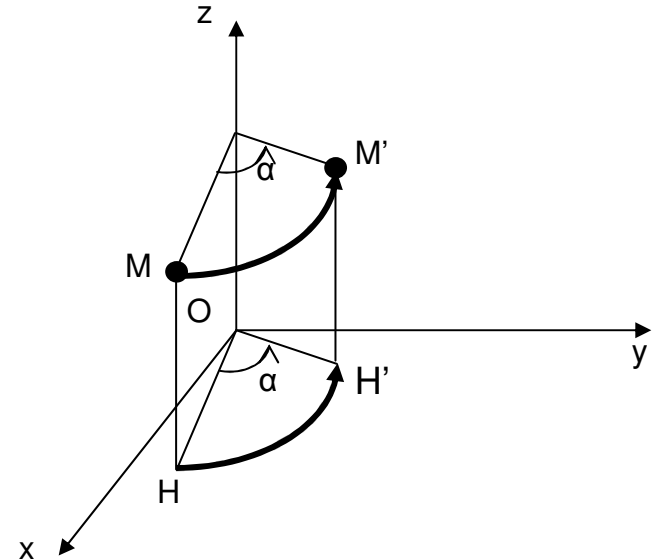
- Công thức biến đổi:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

- Ma trận biến đổi:
- $$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Lưu ý:

- Chiều dương góc quay theo quy tắc vặn đinh ốc, hoặc nắm bàn tay phải.
- Chiều dương từ Ox sang Oy



## 4.5.2. Phép quay quanh trục Ox, Oy

- Phép quay quanh trục Ox

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Phép quay quanh trục Oy

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4.6. Phép biến đổi kết hợp (1)

- Điểm M qua phép biến đổi T1 thành M1, M1 qua phép biến đổi T2 thành M2, suy ra tồn tại một phép biến đổi T biến M thành M2:

$$\begin{aligned} M(x, y, z) &\xrightarrow{T_1} M_1(x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{T_2} M_2(x_2, y_2, z_2) \\ \Leftrightarrow M(x, y, z) &\xrightarrow{T} M_2(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

- T được gọi là phép biến đổi kết hợp của T1 và T2, khi đó:

$$T = T1 \times T2$$



## 5. Các phép biến đổi hệ trục tọa độ

- Phép biến đổi hệ trục tọa độ là phép biến đổi nghịch đảo của phép biến đổi vật:

$$\mathbf{T}_{\text{hệ trục}} = \mathbf{T}_{\text{vật}}^{-1}$$

- Hai phép biến đổi được gọi là nghịch đảo của nhau nếu phép biến đổi kết hợp của chúng là phép bất biến.
- Ví dụ:
  - Phép tịnh tiến hệ trục bởi vecto  $(m, n, p)$  bằng phép tịnh tiến vật đi vecto  $(-m, -n, -p)$
  - Phép quay hệ trục quanh trục Oz góc  $\alpha$  bằng phép quay vật quanh trục Oz góc quay  $-\alpha$
  - ...

---

## 6. Chuyển đổi quan sát

- Mục đích
  - Xây dựng công thức chuyển đổi quan sát
  - Xây dựng bộ công cụ 3D
  - Áp dụng bộ công cụ 3D để mô phỏng hình lập phương đơn vị
-

---

## 6.1.Mục đích

- Mô phỏng hình ảnh trong không gian thực ba chiều lên màn hình
  - Ví dụ:
    - Mô phỏng chiếc bàn, chiếc ghế,...
    - Mô phỏng các hình khối: hình lập phương, hình hộp chữ nhật, hình kim tự tháp, ...
  - Cho phép nhìn các vật thể từ các góc độ khác nhau: từ phía trước, từ phía sau, từ trên xuống, từ dưới lên, ...
-

---

## 6.2. Xây dựng công thức chuyển đổi quan sát

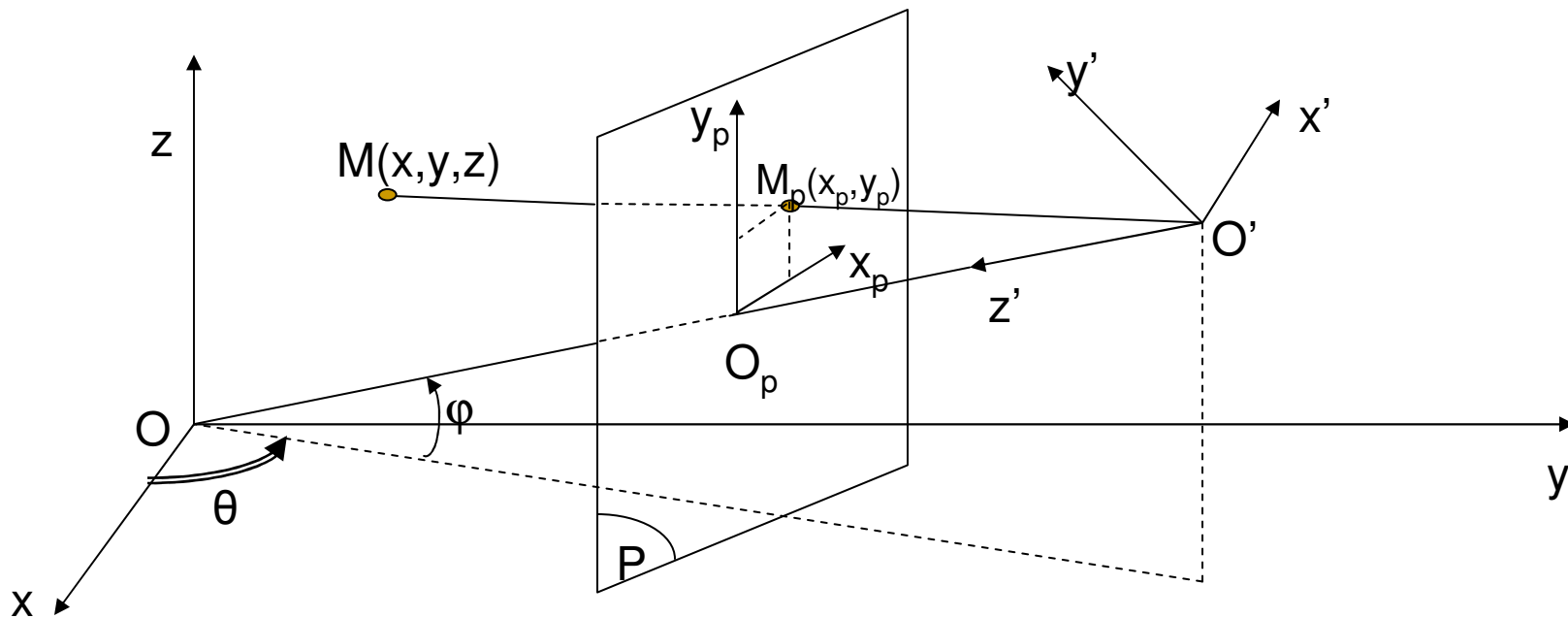
- Bố trí hệ quan sát
  - Chuyển từ hệ tọa độ thực sang hệ tọa độ quan sát
  - Chiếu từ 3D về 2D
  - Chuyển từ không gian thực 2D lên màn hình
-

---

## 6.2.1. Bố trí hệ quan sát

- Hệ tọa độ thể giới thực Oxyz-hệ tọa độ vật
  - $O'$  là vị trí đặt mắt quan sát
  - $O'(x_0, y_0, z_0)$  trong hệ tọa độ Oxyz
  - Hệ tọa độ  $O'x'y'z'$  là hệ tọa độ quan sát có  $O'z'$  chỉ về  $O$
  - Mặt phẳng chiếu  $P$  vuông góc với  $OO'$
-

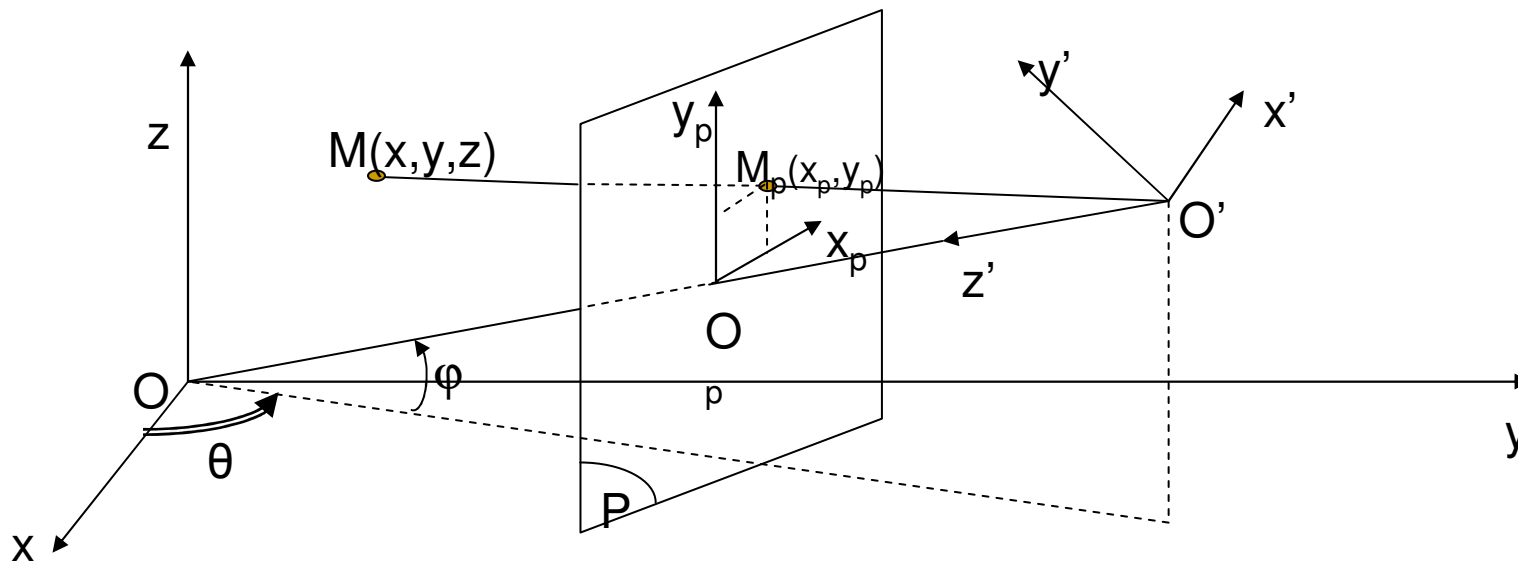
### 6.2.1. Bố trí hệ quan sát



- **Tính tọa độ  $M_p(x_p, y_p)$  trên mặt phẳng chiếu (P)**
- Chuyển  $M_p$  lên màn hình (chương 3)

# Nhiệm vụ

- Tính tọa độ của M biểu diễn trong hệ tọa độ  $O'x'y'z'$  - ***chuyển hệ tọa độ  $Oxyz$  thành hệ tọa độ  $O'x'y'z'$***
- Chiếu lên mặt phẳng (P) – ***chiếu 3D về 2D***

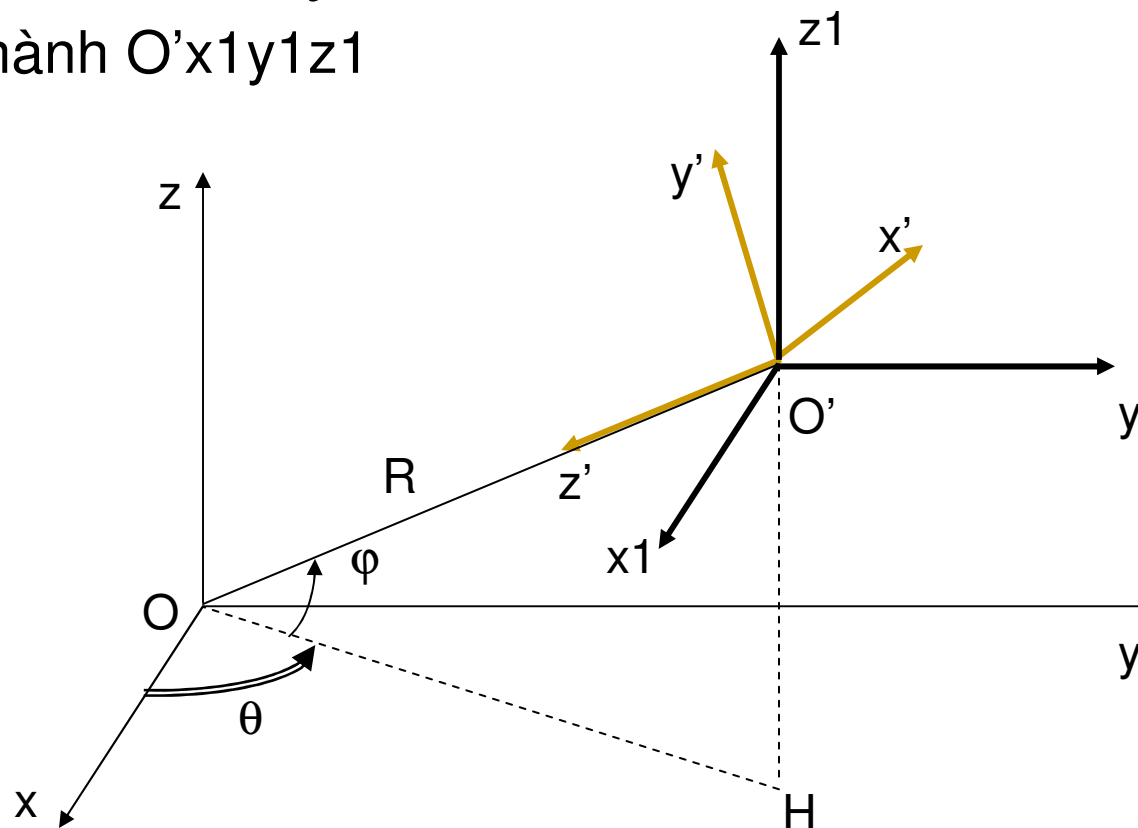


## 6.2.2. Chuyển hệ tọa độ Oxyz thành hệ tọa độ O'x'y'z' (1)

■ **Bước 1:** Tịnh tiến hệ trục Oxyz vectơ  $\overrightarrow{OO'}(x_0, y_0, z_0)$

- Biến hệ trục Oxyz thành O'x<sub>1</sub>y<sub>1</sub>z<sub>1</sub>
- Ma trận biến đổi:

$$T1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$





## 6.2.2. Chuyển hệ tọa độ Oxyz thành hệ tọa độ O'x'y'z'(2)

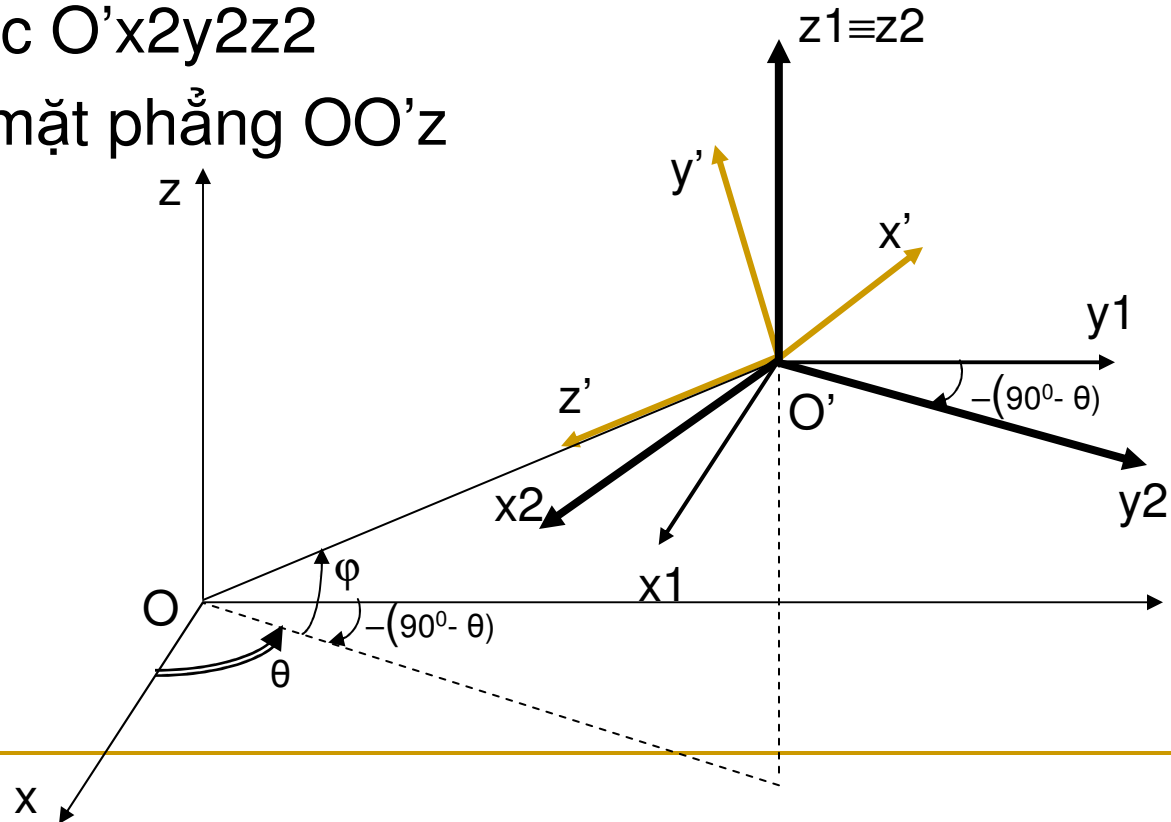
□ Đổi sang hệ tọa độ cực: O'(R,θ,φ), R=OO'

$$T1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R \cos \varphi \cos \theta & -R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi & 1 \end{bmatrix}$$

## 6.2.2. Chuyển hệ tọa độ Oxyz thành hệ tọa độ O'x'y'z'(3)

### ■ Bước 2:

- Quay hệ trục O'x<sub>1</sub>y<sub>1</sub>z<sub>1</sub> quanh trục O'z<sub>1</sub> góc quay  $-(90^\circ - \theta)$  thành hệ trục O'x<sub>2</sub>y<sub>2</sub>z<sub>2</sub>
- O'y<sub>2</sub> thuộc mặt phẳng OO'z



## 6.2.2. Chuyển hệ tọa độ Oxyz thành hệ tọa độ O'x'y'z'(4)

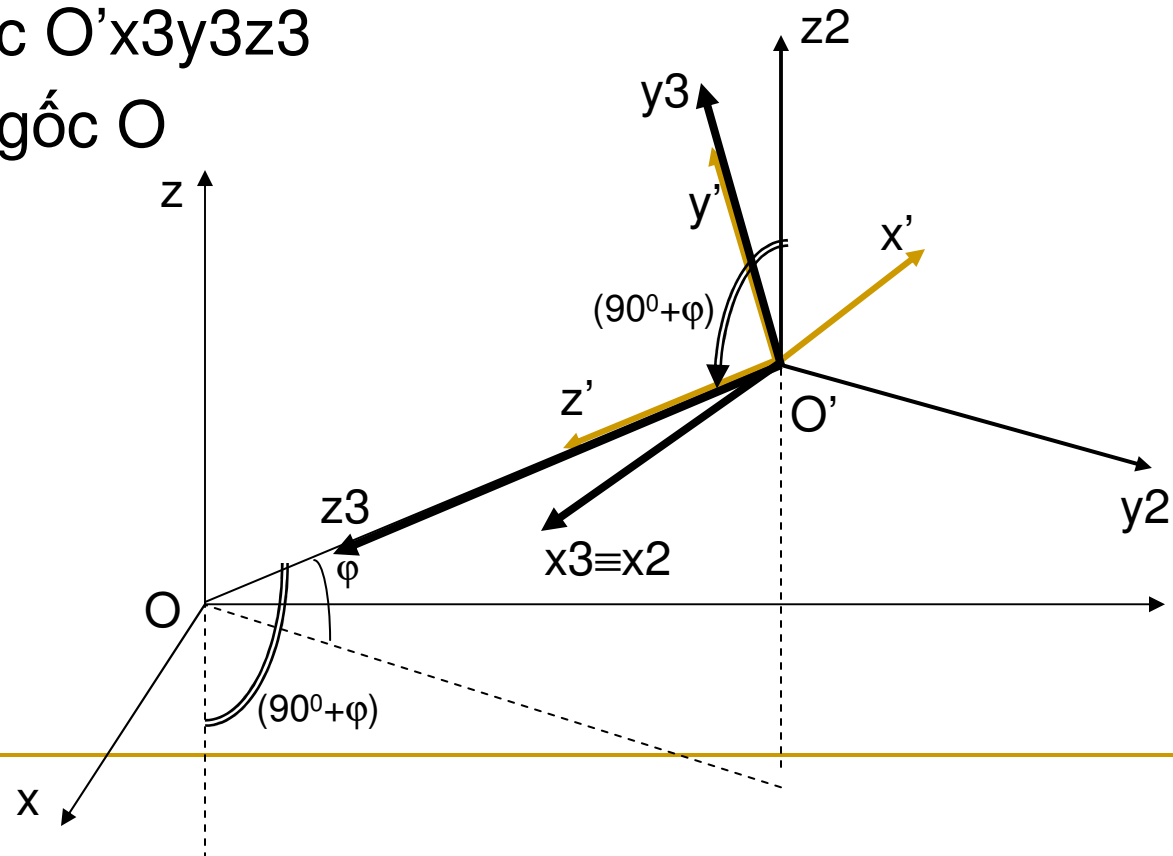
- Ma trận biến đổi:

$$T_2 = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 6.2.2. Chuyển hệ tọa độ $Oxyz$ thành hệ tọa độ $O'x'y'z'$ (5)

### ■ Bước 3:

- Quay hệ trục  $O'x_2y_2z_2$  quanh trục  $O'x_2$  góc quay  $(90^\circ + \varphi)$  được hệ trục  $O'x_3y_3z_3$
- $O'z_3$  chỉ về gốc  $O$



## 6.2.2. Chuyển hệ tọa độ Oxyz thành hệ tọa độ O'x'y'z'(6)

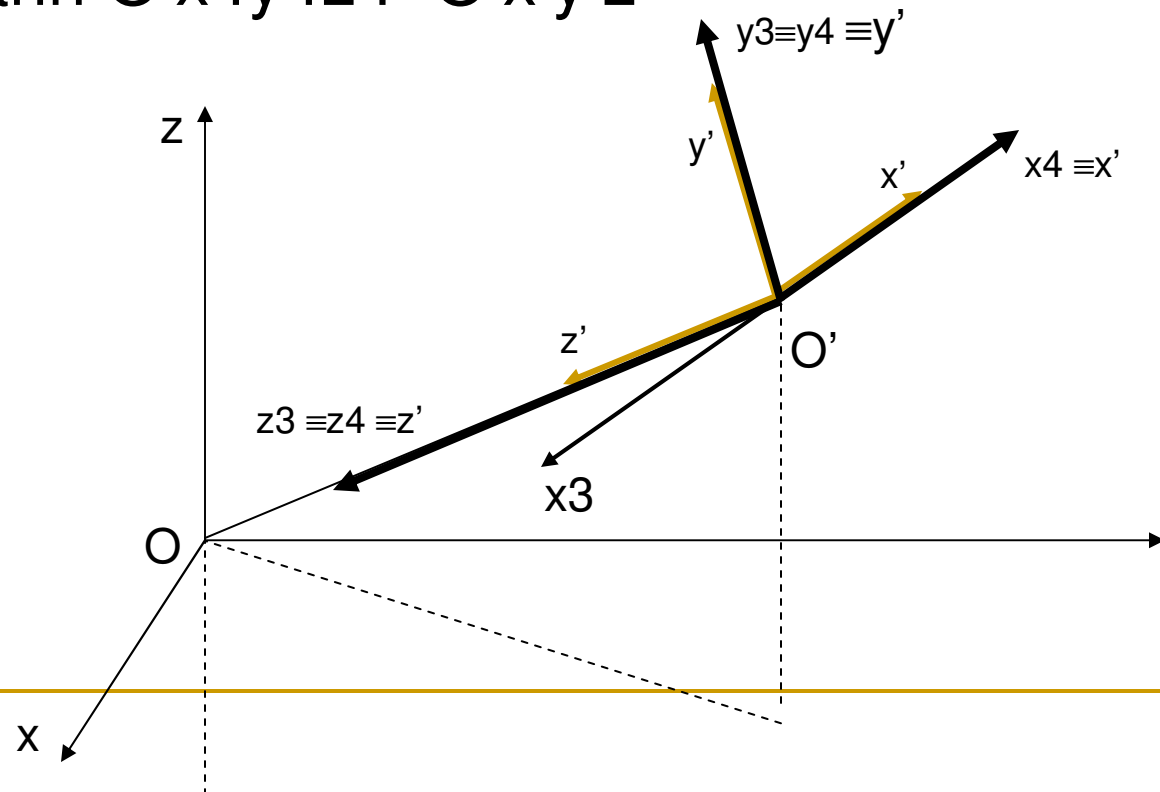
- Ma trận biến đổi:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 6.2.2. Chuyển hệ tọa độ Oxyz thành hệ tọa độ O'x'y'z' (7)

### ■ Bước 4:

- Lấy đối xứng hệ trục O'x<sub>3</sub>y<sub>3</sub>z<sub>3</sub> qua mặt phẳng O'y<sub>3</sub>z<sub>3</sub> thành O'x<sub>4</sub>y<sub>4</sub>z<sub>4</sub>  $\equiv$  O'x'y'z'



## 6.2.2. Chuyển hệ tọa độ Oxyz thành hệ tọa độ O'x'y'z'(8)

- Ma trận biến đổi:

$$T_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 6.2.2. Chuyển hệ tọa độ Oxyz thành hệ tọa độ O'x'y'z'(9)

- Ma trận biến đổi T biến Oxyz thành O'x'y'z':

$$T = T_1 \times T_2 \times T_3 \times T_4$$

$$T = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \sin \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & R & 1 \end{bmatrix}$$



---

## 6.2.3. Chiếu 3D-2D(1)

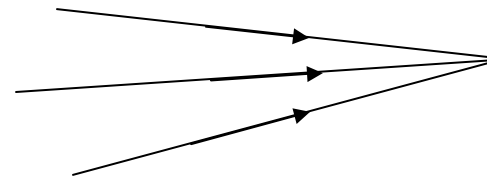
- Một số khái niệm
- Xây dựng công thức chiếu

---

# Một số khái niệm

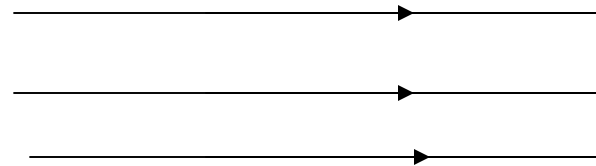
- Chiếu phối cảnh:

- Các tia chiếu hội tụ



- Chiếu song song

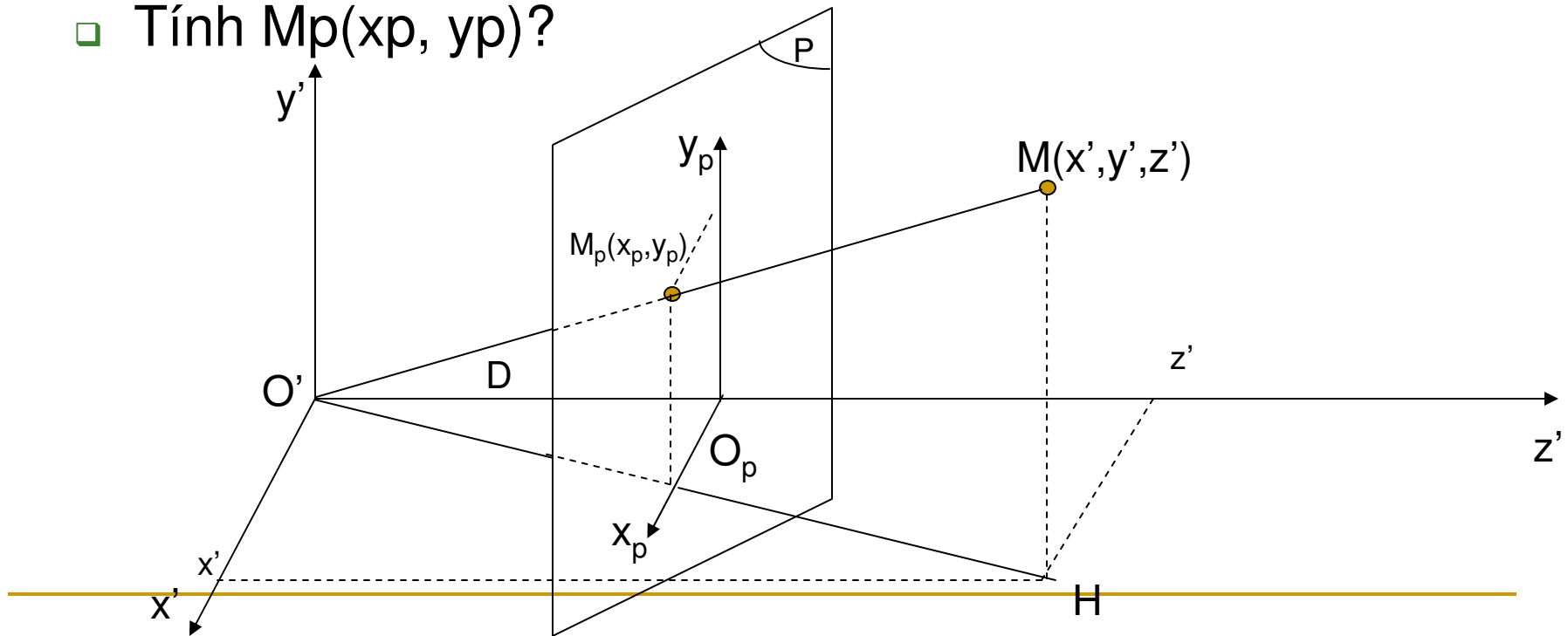
- Các tia chiếu song song



# Xây dựng công thức chiếu 3D-2D(1)

## ■ Chiếu phối cảnh:

- Giả sử khoảng cách từ điểm quan sát  $O'$  đến mặt phẳng  $P$  là  $D=O'O_p$
- $M(x',y',z')$  là tọa độ của  $M$  trong  $O'x'y'z'$
- Tính  $M_p(x_p, y_p)$ ?

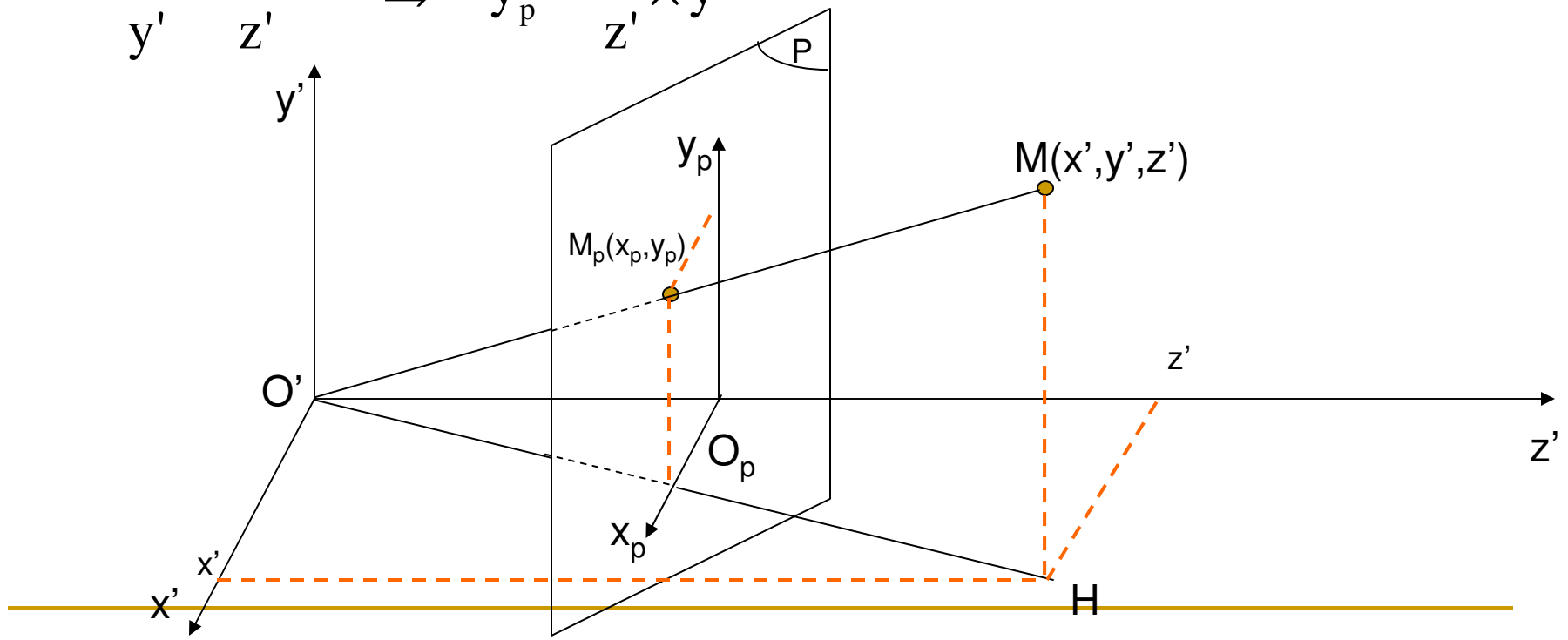


# Xây dựng công thức chiếu 3D-2D(2)

- Công thức chiếu phối cảnh:

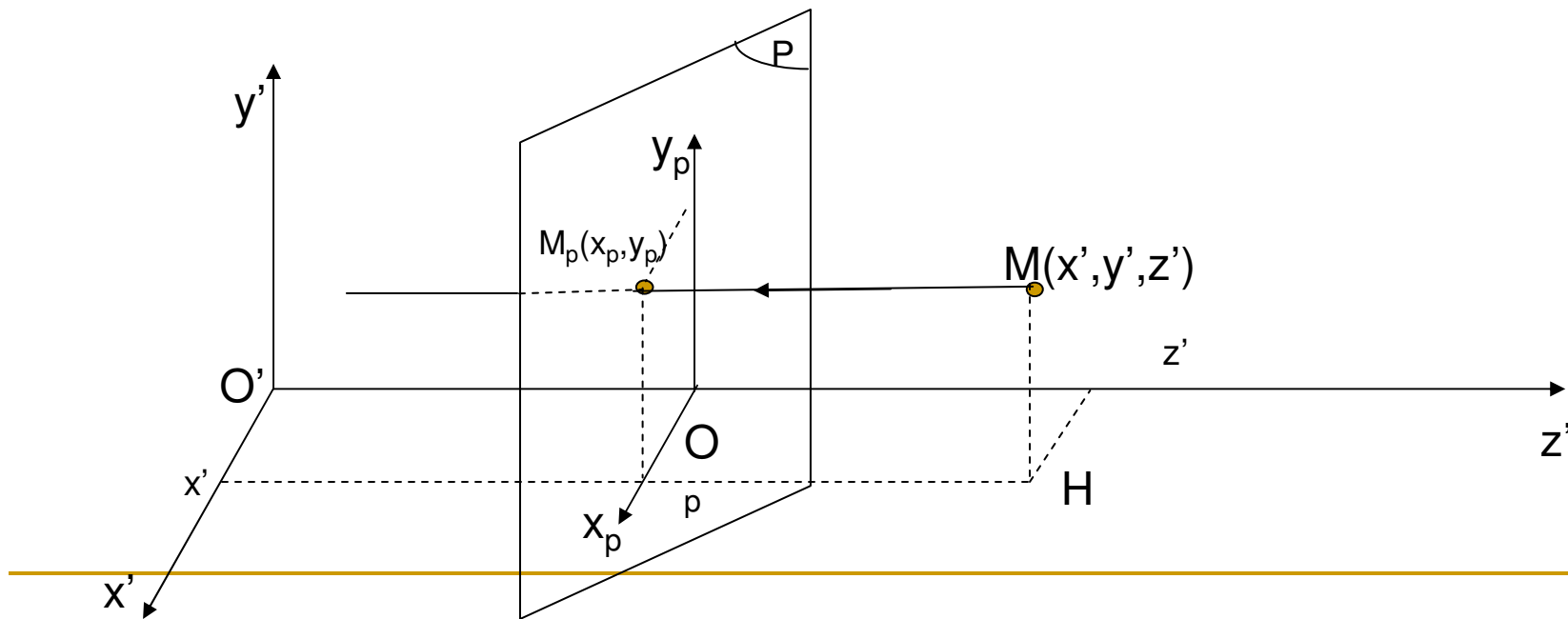
$$\frac{x_p}{x'} = \frac{D}{z'} \Rightarrow x_p = \frac{D}{z'} \times x'$$

$$\frac{y_p}{y'} = \frac{D}{z'} \Rightarrow y_p = \frac{D}{z'} \times y'$$



# Xây dựng công thức chiếu 3D-2D(3)

- Chiếu song song:
  - Tâm chiếu ở vô cực, hướng chiếu  $O'z'$
  - (P) song song với  $O'x'y'$
  - Công thức chiếu: 
$$\begin{cases} x_p = x' \\ y_p = y' \end{cases}$$



---

## 6.5. Xây dựng bộ công cụ 3D (1)

- Xây dựng 2 công cụ:
    - **void chuyenden(float x, float y, float z):** con trỏ chuyển tương ứng đến điểm (xm, ym) trên màn hình
    - **void veden(float x, float y, float z):** vẽ đến điểm (xm, ym) tương ứng trên màn hình
-

## 6.5. Xây dựng bộ công cụ 3D (2)

- Khai báo các biến toàn cục:
  - float R, phi, teta, D, tlx, tly;
  - int phepchieu; // =1: phối cảnh; =0: song song.
  - int x0, y0; // (x0, y0) vị trí đặt gốc tọa độ trên màn hình
- Xây dựng các thủ tục phụ trợ:
  - void chuyenhqz(float x, float y, float z,  
float &x1, float &y1, float &z1 )
  - void chieu3D\_2D (float x, float y, float z,  
float &xp, float &yp )
  - void chuyenmh(float x, float y, int &xm, int &ym);

## 6.5. Xây dựng bộ công cụ 3D (3)

### ■ Code:

```
❑ void chuyenhqs(float x, float y, float z,
                  float &x1, float &y1, float &z1 )
{
    x1= -x*sin(teta)+y*cos(teta);
    y1= -x*cos(teta)*sin(phi)-y*sin(teta)*sin(phi)+z*cos(phi);
    z1= -x*sin(teta)*cos(phi) - y*cos(teta)*sin(phi)-z*sin(phi)+r;
}

❑ void chieu3D_2D (float x, float y, float z,
                   float &xp, float &yp )
{
    if(phepchieu==1)
        { xp=D*x/z; yp=D*y/z;}
    else    { xp=x; yp=y;}
}
```



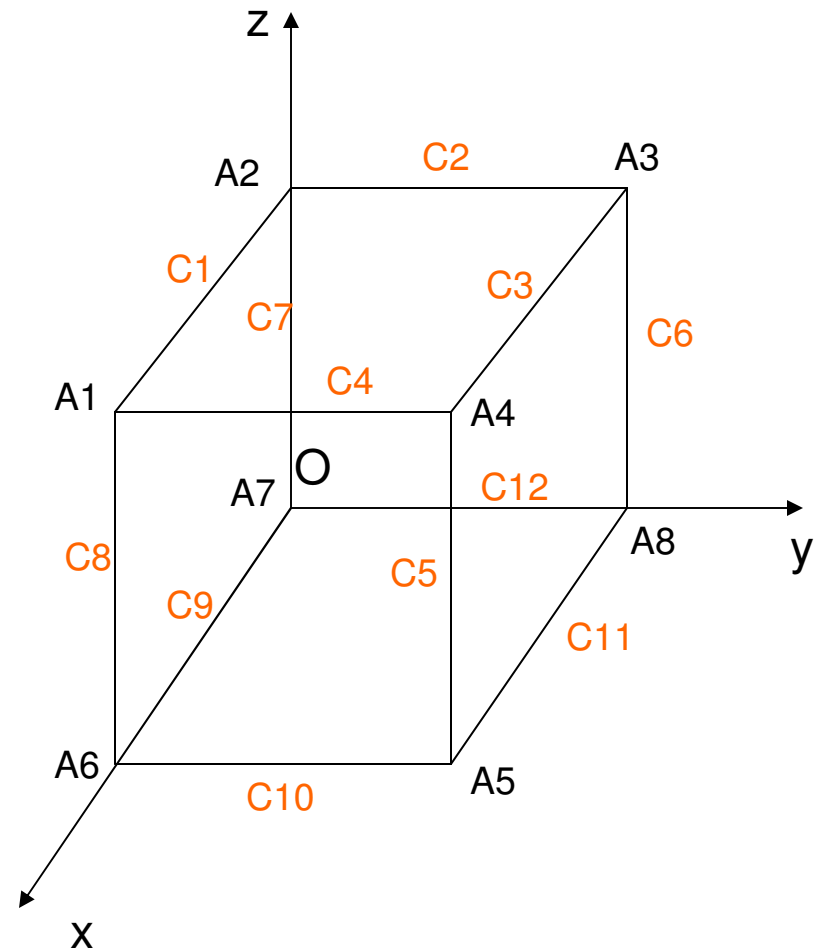
## 6.5. Xây dựng bộ công cụ 3D (4)

### ■ Code:

- ❑ void chuyenmh(float x, float y, int &xm, int &ym)  
    {   xm= (int) (tlx\*x+x0);  
       ym=(int) (-tly\*y +y0);  
    }
- ❑ void chuyenden(float x, float y, float z)  
    {   float x1, y1, z1, xp, yp;   int xm, ym;  
       chuyenhqs(x,y,z,x1,y1,z1);  
       chieu3D\_2D(x1,y1,z1,xp,yp);  
       chuyenmh(xp,yp,xm,ym);  
       moveto(xm,ym);  
    }

# Mô hình khung dây

- Xét hình lập phương đơn vị



# Mô hình khung dây

- Danh sách các đỉnh

- Mạng các bản ghi

$A_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
x	1	0	0	1	1	1	0	0
y	0	0	1	1	1	0	0	1
z	1	1	1	1	0	0	0	0

- Danh sách các cạnh

$C_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d_1$	1	2	3	4	4	3	2	1	6	6	5	8
$d_2$	2	3	4	1	5	8	7	6	7	5	8	7

---

# Bài tập

- Viết chương trình mô phỏng hình lập phương đơn vị tại một vị trí quan sát tùy chọn.
  - Thay đổi vị trí quan sát ( $R$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $D$ ), cho nhận xét về hình ảnh thu được.
  - Áp dụng các phép biến đổi hình học vẽ ảnh của hình lập phương trên.
    - Mô phỏng hình lập phương quay quanh trục Oz
    - Mô phỏng hình lập phương thực hiện phóng hình, thu hình.
    - ...
-