Algebre Linéaire

Yehor Korotenko

January 21, 2025

Abstract

Le cours parte sur deux sujets liées:

1. la théorie des espaces euclidiens (i.e un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire) et leur endomorphismes

2. la réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

Chapter 1

Espaces euclidiens

1.1 Introduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont réels. On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Produit scalaire:

Definition 1.1. Une forme bilinéaire sur E est une application

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto B((u,v)) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes $\forall u, v, w \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $B(u + \lambda v, w) = B(u,w) + \lambda B(v,w)$
2. $B(u, v + \lambda w) = B(u,v) + \lambda B(v,w)$

B est dite

1. symétrique si $B(u,v) = B(v,u)$ $\forall u, v \in E$
2. positive si $B(.,u) \geq 0 \, \forall u \in E$
3. définie si $B(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Proof.

$$\begin{aligned} B(0,0) &= B(0 + 1 \cdot 0, 0) \\ &\overset{\text{linéarité}}{=} B(0,0) + 1 \cdot B(0,0) \\ &= B(0,0) + B(0,0) \\ &\Rightarrow B(0,0) = 0 \end{aligned}$$

Notation. Produit scalaire est noté: $< u, v >$

Example 1.2. .

1. $E = \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$

$$< X, Y > := \sum_{n=1}^{n} x_i y_i$$

   On l'appelle "produit scalaire canonique"(ou usuel)

2. $E = \mathbb{R}^2$ et $< X, Y >= 2x_1y_1 + x_2y_2$

3. $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \ni f, g$ (un espace des fonctions continues)

$$< f, g > := \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$< A, B > := Tr(A^t B)$$

Proposition 1.3. Un espace vectoriel non-nul possede une infinité de produits scalaires differents.

Definition 1.4. Un espace euclidien est un couple $(E, < . >)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $< . >$ est un produit scalaire sur E.

Property. Soit $(E, < . >)$ un espace euclidien. On pose:

$$\|X\| := \sqrt{< X, X >} \qquad X \in E$$

la norme (ou longeur) de X. (Il est bien définie car $< ., . >$ est toujours positif)

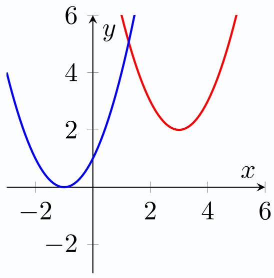
Lemma 1.5. inégalité de Cauchy-Schwarz On a

$$| < u, v > | \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall u, v \in E$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires, i.e $\exists t \in R$ tel que $u = tv$ ou $v = tu$

Proof. Si $v = 0$, clair
Si $v \neq 0$ on considère $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|u + tv\|^2 &= < u + tv, u + tv > \\
&= < u, u + tv > + t < v, u + tv > \\
&= < u, u > + t < u, v > + t < v, u > + t^2 < v, v > \\
&= \|u\|^2 + 2t < u, v > + t^2 \|v\|^2 = f(t)
\end{aligned}$$



Cas 1: $f(t)$ n'a pas de racinces différentes

$$\begin{aligned}
&\Delta = 4 < u, v >^2 = 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow < u, v >^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\
&\Rightarrow | < u, v > | \leq \|u\| \|v\|
\end{aligned}$$

Cas 2: $f(t)$ a seulement une racine:

$$\begin{aligned}&\Delta = 0\\ \Rightarrow &\exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \|u+tv\|^2 = 0\\ \Rightarrow &u + tv = 0 \Rightarrow u = -tv\end{aligned}$$

La définition suivante sera étudiée dans le cours d'analyse:

Definition 1.6. On dit que $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme si:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. $N(u+v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

Lemma 1.7. L'application

$$\sqrt{< .,. >} = \|.\| : E \to \mathbb{R}_+$$

est dite norme euclidienne.

Proof. 1), 2) sont faites

3) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Proposition 1.8. On les identités suivantes $\forall u, v \in E$

1. Identité du parallèlograme:
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u^2\| + \|v\|^2)$$
2. Identité de polarisation:
$$< u, v >= \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$

Proof. .

1. $$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &=< u+v, u+v >\\ &= \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2\end{aligned}$$
2. $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2 < u, v > + \|v\|^2$

On a:

- $(1) + (2)$: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- $(1) - (2)$: $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4 < u, v >$

1.2 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $<,>$ un produit scalaire sur E.

Definition 1.9. $u, v \in E$ sont dits <u>orthogonaux</u> si $< u, v >= 0$. On note $u \perp v$

- Deux sous-ensembles A, B de E sont orthogonaux si:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad < u, v >= 0$$

- Si $A \subseteq E$ on appelle ortogonal de A, noté $A^{\perp}$ l'ensemble

$$A^{\perp} = \{u \in E \,|< u, v >= 0 \quad \forall v \in A\}$$

- Une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$. Elle est dite orthogonale si elle est orthogonale et si de plus $\|v_i\| = 1 \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Example 1.10. $E = \mathbb{R}^n$, $<,>$ produit scalaire canonique

$$v_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$$

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

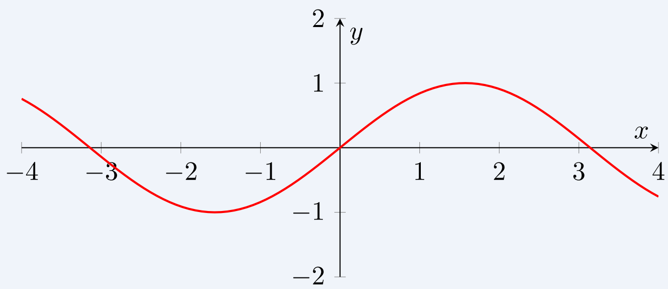
$(v_1, \ldots, v_n)$ est une base canonique

Proposition 1.11.
1. Si $A \subseteq E$ alors $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E
2. Si $A \subseteq B$ alors $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$
3. $A^{\perp} = Vect(A)^{\perp}$
4. $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$

Proof. Exercice

Example 1.12.
1. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t) \, dt$$



Alors, $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ sont orthogonaux: $2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^{1} \cos(t)\sin(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sin(2t) \, dt = 0$$

Definition 1.13. Si E est un espace euclidien, on appelle "dual de E" l'ensemble

$$L(E, \mathbb{R}) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ est linéaire}\}$$

On le note E^*. Un élément $f \in E*$ s'appelle une forme linéaire.

Rappele:

Proposition 1.14. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie, on $dim(L(F, F')) = dim(F) \cdot dim(F')$
En particulier, $dim(F*) = dim(F)$. En effet si $n = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F est $n' = (e'_1, \ldots, e'_q)$ est une base de F', alors l'application

$$\begin{aligned} : L(F, F') &\longrightarrow Mat_{f\times p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (f) = Mat_{n,n'}(f). \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc $dim(F, F) = qp$

Theorem 1.15. Théorème du rang: Si F est un e.v de dimension finie et $f : F \to F'$ linéaire, alors $dim(F) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$

Proposition 1.16. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie tq $dim(F) = dim(F')$ et $f : F \to F'$ linéaire, alors f est un isomorphisme $\Leftrightarrow Ker(f) = 0$

Proof. On rappelle que si G, G' sont des sous-e.v de dimension finie dans le même e.v, alors:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ et } dim(G) = dim(G')$$

$\Rightarrow$) f injective $\Rightarrow Ker(f) = 0$
$\Leftarrow$) Soit $Ker(f) = 0$.
Alors, forcément $dim(Ker(f)) = 0$ et par le théorème du rang on a $dim(F) = dim(Im(f))$, donc $Im(f) = F'$

Lemma 1.17. du Riesz:
Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien de dimension finie et $f \in E^*$. Alors, $\exists! u \in E$ tel que $f(x) = <u, x>$ $\forall x \in E$. La forme linéaire f est donné par un produit scalaire avec un vecteur.

Notation. Pour tout $v \in E$ on note par f_v l'application:

$$\begin{aligned} f_v : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_v(x) = <v, x>. \end{aligned}$$

f_v est linéaire $\forall v \in E$ i.e E^*

Proof. lemma de Reisz
On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

ϕ est linéaire (exercice). ϕ est injective:

$$v \in Ker(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

en particulier pour x = v, on a:

$$0 = f_v(v) =< v, v >\Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} dim(E) = dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ est un isomorphisme} \\ &\Rightarrow \phi \text{ bijective} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists! n \in E \text{ tq } \phi(n) = f, \text{ i.e } f(x) =< n, x > \ \forall x \in E$$

Dans ce cas $E = \mathbb{R}^n$, le lemme de Riesz est tres simple à comprendre:
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$x = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i f(e_i) =< (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (a_1, \ldots, a_n) >=< (a_1, \ldots, a_n), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) >$$