Notes du cours d'Algebre Linéaire 2

Yehor Korotenko

January 24, 2025

Abstract

Le cours parte sur deux sujets liées:

1. la théorie des espaces euclidiens (i.e un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire) et leur endomorphismes

2. la réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

Chapter 1

Espaces euclidiens

1.1 Introduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont réels. On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Produit scalaire:

Definition 1.1. Une forme bilinéaire sur E est une application

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B((u, v)) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes $\forall u, v, w \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2. $B(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(v, w)$

B est dite

1. symétrique si $B(u, v) = B(v, u)$ $\forall u, v \in E$
2. positive si $B(., u) \geq 0 \, \forall u \in E$
3. définie si $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Proof.

$$\begin{aligned} B(0, 0) &= B(0 + 1 \cdot 0, 0) \\ &\overset{\text{linéarité}}{=} B(0, 0) + 1 \cdot B(0, 0) \\ &= B(0, 0) + B(0, 0) \\ &\Rightarrow B(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

Notation. Produit scalaire est noté: $< u, v >$

Example 1.2. .

1. $E = \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$

$$< X, Y > := \sum_{n=1}^{n} x_i y_i$$

   On l'appelle "produit scalaire canonique"(ou usuel)

2. $E = \mathbb{R}^2$ et $< X, Y >= 2x_1 y_1 + x_2 y_2$

3. $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \ni f, g$ (un espace des fonctions continues)

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$< A, B >:= Tr(A^t B)$$

Proposition 1.3. Un espace vectoriel non-nul possede une infinité de produits scalaires differents.

Definition 1.4. Un espace euclidien est un couple $(E, < . >)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $< . >$ est un produit scalaire sur E.

Property. Soit $(E, < . >)$ un espace euclidien. On pose:

$$\|X\| := \sqrt{< X, X >} \qquad X \in E$$

la norme (ou longeur) de X. (Il est bien définie car $< ., . >$ est toujours positif)

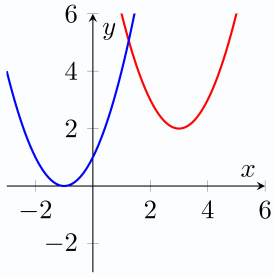
Lemma 1.5. inégalité de Cauchy-Schwarz On a

$$| < u, v > | \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall u, v \in E$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires, i.e $\exists t \in R$ tel que $u = tv$ ou $v = tu$

Proof. Si $v = 0$, clair
Si $v \neq 0$ on considère $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|u + tv\|^2 &=< u + tv, u + tv > \\
&=< u, u + tv > +t < v, u + tv > \\
&=< u, u > +t < u, v > +t < v, u > +t^2 < v, v > \\
&= \|u\|^2 + 2t < u, v > +t^2\|v\|^2 = f(t)
\end{aligned}$$



Cas 1: $f(t)$ n'a pas de racinces différentes

$$\begin{aligned}
&\Delta = 4 < u, v >^2 = 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow < u, v >^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\
&\Rightarrow | < u, v > | \leq \|u\|\|v\|
\end{aligned}$$

Cas 2: $f(t)$ a seulement une racine:

$$\begin{aligned} &\Delta = 0 \\ \Rightarrow &\exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \|u+tv\|^2 = 0 \\ \Rightarrow &u + tv = 0 \Rightarrow u = -tv \end{aligned}$$

La définition suivante sera étudiée dans le cours d'analyse:

Definition 1.6. On dit que $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme si:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. $N(u+v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

Lemma 1.7. L'application

$$\sqrt{< .,. >} = \|.\| : E \to \mathbb{R}_+$$

est dite norme euclidienne.

Proof. 1), 2) sont faites

$$3) \;\; \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Proposition 1.8. On a les identités suivantes $\forall u, v \in E$

1. Identité du parallèlograme:
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u^2\| + \|v\|^2)$$
2. Identité de polarisation:
$$< u, v >= \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$

Proof. .

1. $$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &=< u+v, u+v > \\ &= \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \end{aligned}$$
2. $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2 < u, v > + \|v\|^2$

On a:

- $(1) + (2)$: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- $(1) - (2)$: $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4 < u, v >$

1.2 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $<,>$ un produit scalaire sur E.

Definition 1.9. $u, v \in E$ sont dits orthogonaux si $< u, v >= 0$. On note $u \perp v$

- Deux sous-ensembles A, B de E sont orthogonaux si:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad < u, v >= 0$$

- Si $A \subseteq E$ on appelle ortogonal de A, noté $A^\perp$ l'ensemble

$$A^\perp = \{u \in E \mid < u, v >= 0 \quad \forall v \in A\}$$

- Une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$. Elle est dite orthogonale si elle est orthogonale et si de plus $\|v_i\| = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Example 1.10. $E = \mathbb{R}^n$, $<,>$ produit scalaire canonique

$$v_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$$

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

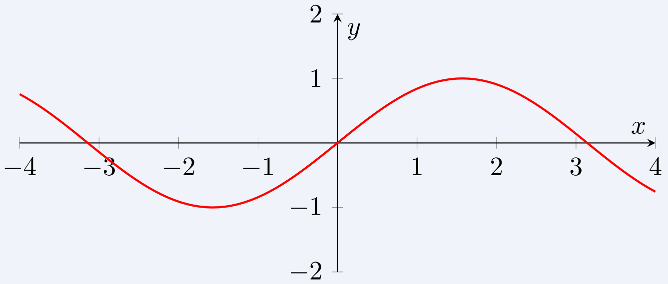
$(v_1, \dots, v_n)$ est une base canonique

Proposition 1.11.
1. Si $A \subseteq E$ alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
2. Si $A \subseteq B$ alors $B^\perp \subseteq A^\perp$
3. $A^\perp = Vect(A)^\perp$
4. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Proof. Exercice

Example 1.12.
1. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$$



Alors, $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ sont orthogonaux: $2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^{1} \cos(t)\sin(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sin(2t)\, dt = 0$$

Definition 1.13. Si E est un espace euclidien, on appelle "dual de E" l'ensemble

$$L(E,\mathbb{R}) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ est linéaire}\}$$

On le note E^*. Un élément $f \in E*$ s'appelle une forme linéaire.

Rappele:

Proposition 1.14. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie, on $dim(L(F,F')) = dim(F) \cdot dim(F')$
En particulier, $dim(F*) = dim(F)$. En effet si $n = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F est $n' = (e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de F', alors l'application

$$\begin{aligned} : L(F,F') &\longrightarrow Mat_{f\times p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (f) = Mat_{n,n'}(f). \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc $dim(F,F) = qp$

Theorem 1.15. Théorème du rang: Si F est un e.v de dimension finie et $f : F \to F'$ linéaire, alors $dim(F) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$

Proposition 1.16. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie tq $dim(F) = dim(F')$ et $f : F \to F'$ linéaire, alors f est un isomorphisme $\Leftrightarrow Ker(f) = 0$

Proof. On rappelle que si G, G' sont des sous-e.v de dimension finie dans le même e.v, alors:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ et } dim(G) = dim(G')$$

$\Rightarrow$) f injective $\Rightarrow Ker(f) = 0$
$\Leftarrow$) Soit $Ker(f) = 0$.
Alors, forcément $dim(Ker(f)) = 0$ et par le théorème du rang on a $dim(F) = dim(Im(f))$, donc $Im(f) = F'$

Lemma 1.17. du Riesz:
Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien de dimension finie et $f \in E^*$. Alors, $\exists! u \in E$ tel que $f(x) =< u, x >$ $\forall x \in E$. La forme linéaire f est donné par un produit scalaire avec un vecteur.

Notation. Pour tout $v \in E$ on note par f_v l'application:

$$\begin{aligned} f_v : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_v(x) =< v, x > . \end{aligned}$$

f_v est linéaire $\forall v \in E$ i.e E^*

Proof. lemma de Reisz
On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

ϕ est linéaire (exercice). ϕ est injective:

$$v \in Ker(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

en particulier pour x = v, on a:

$$0 = f_v(v) =< v, v >\Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} dim(E) = dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ est un isomorphisme} \\ &\Rightarrow \phi \text{ bijective} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists ! n \in E \text{ tq } \phi(n) = f, \text{ i.e } f(x) =< n, x > \forall x \in E$$

Dans ce cas $E = \mathbb{R}^n$, le lemme de Riesz est tres simple à comprendre:
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$x = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i f(e_i) =< (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (a_1, \dots, a_n) >=< (a_1, \dots, a_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) >$$

1.3 Bases orthonormales

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel $(dim(F) < \infty)$ car $dim(E) < \infty$.

Note.

$$F^\perp := \{x \in E \,|< X, Z >= 0 \,\forall z \in F\}$$

l'orthogonale de F.

Theorem 1.18. On a $E = F \oplus F^\perp$.
En particulier, $dim(F^\perp) = dim(E) - dim(F)$ et $F = (F^\perp)^\perp$

Proof. On doit montrer que:

1. $F \cap F^\perp = \emptyset$
2. $E = F + F^\perp$ i.e $\forall x \in E, \exists x' \in F, \, x'' \in F^\perp$ tq $x = x' + x''$

1. Soit $x \in F \cap F^\perp$
   $\Rightarrow < X, Z >= 0 \,\forall Z \in F$ car $x \in F \Rightarrow < X, X >= 0 \Rightarrow x = 0(<, >$ est définie)
2. Soit $x \in E$. Considérons $f_x \in E^*$, i.e $f_x : E \to \mathbb{R}, y \mapsto < x, y >$ et $f := f_{x|F} : F \to \mathbb{R} \Rightarrow f \in E^*$
   Lemme de Riesz $\Rightarrow \exists ! x' \in F$ tq $f = f_{x'} : F \to \mathbb{R}, z \mapsto < x', z >$
   $\Rightarrow f_x(z) = f_{x'}(z) = f(z) \,\forall z \in F$ (Attention: pas l'égalité pour tout z dans E)
   Posons $x'' := x - x'$, i.e $x = x' + x'' \in F$. Montrons $x'' \in F^\perp$.
   Si $z \in F$, $< x'', z >=< x - x', z >=< x, z > - < x', z >= 0$. Donc $x'' \in F^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$ $(dim(E) = dim(F) + dim(F^\perp))$
   $F \subseteq (F^\perp)^\perp$ car $< x, z >= 0 \,\forall x \in F \,\forall z \in F^\perp$

   $$dim(F) = dim(E) - dim(F^\perp)$$

   car $E = G \oplus G^\perp$, donc $dim(G) = dim(E) - dim(G^\perp)$ pour $G = F^\perp$, $dim(F^\perp) = dim(G)$

□

Definition 1.19. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<, >$

- Une famille $(v_i)_{i \geq 0}$ de vecteurs de E est dite <u>orthogonale</u> si pour $i \neq j$ on a $< v_i, v_j >= 0$ i.e $v_i \perp v_j$

- Une famille orthogonale de E est une famille orthogonale $(v_i)_{i\geq 0}$ tq de plus $\|v_i\| = 1$ pour $i \geq 0$

Example 1.20. 1. $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. La base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale car

$$< e_i, e_j >= \begin{cases} 1\, i = j \\ 0\, i \neq j \end{cases}$$

2. Dans $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni de $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$. La famille $(\cos(t), \sin(t))$ est orthogonale. La famille $(1, t^2)$ n'est pas orthogonale:

$$< 1, t^2 >= \int_{-1}^{1} 1t^2\, dt = \frac{2}{3} \neq 0$$

Proposition 1.21. Une famille orthogonale constituée de vecteurs non-nuls est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.

Proof. Supposons $(v_1, \ldots, v_n)$ orthogonale avec $v_i \neq 0\, \forall i = 1, \ldots, n$
si $\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\alpha_i}_{\in\mathbb{R}} v_i = 0$, alors

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} 0 =< v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j >= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j < v_i, v_j >= \alpha_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0}$$

Donc $\alpha_i = 0\, \forall i = 1, \ldots, n$.
Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est orthonormale, alors $\|v_i\| = 1$. Donc $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. □

Definition 1.22. $(E, <, >)$ espace euclidien. Une famille $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale (où BON) si elle est une base et famille orthonormale.

Theorem 1.23. $(E, <, >)$ espace euclidien. Alors, il admet une BON.

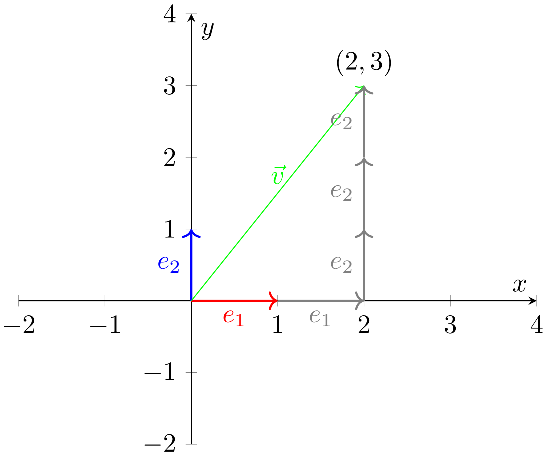
Proof. Soit $n := dim(E)$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthogonale (du point de vue du cardinal p) tq $e_i \neq 0\, \forall i = 1, \ldots, p$.
Supposons par l'absurde que $p < n$. Posons $F = Vect(e_1, \ldots, e_p)$. Alors, $E = F \oplus F^\perp$ et $dim(F) \leq p < n$. Donc $F^\perp \neq \{0\}$. Soit $x \in F^\perp$, $x \neq 0$. Alors, $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est orthogonale de cardinale $> p$. Donc, $p = n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Pour avoir une famille orthonormale $(e'_1, \ldots, e'_n)$ il suffit de prendre $e'_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i\, \forall i = 1, \ldots, n$. □

Proposition 1.24. Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E. Si $x \in E$, on a:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Autrement dit, le réél $\langle x, e_i \rangle$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Intuition. L'orthonormalité de la base nous simplifie la vie. Mais avant, petite introduction. Soit un e.v $E = \mathbb{R}^2$ et la base $(e_1, e_2) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Soit un vecteur $\vec{v} = (2, 3)$:



Donc, on peut écrire $\vec{v} = \vec{(2,3)} = 2 \cdot \vec{e_1} + 3 \cdot \vec{e_2}$. Les x et y (les coordonnées de v) nous donnes combien de parties de chaque vecteur de bases (le nombre peut être $\in \mathbb{R}$) et prendre leurs sommes, pour obtenir $\vec{v}$. (Le plus simple: combien on doit aller à gauche et en haut).

Dans la base orthonormale $\langle v, e_i \rangle$ nous donne combien on prend d'un vecteur e_i pour faire le vecteur $\vec{v}$ et $\vec{e_i}$ donne la direction. D'où $\langle v, e_1 \rangle$ équivaut à 2, et $\langle v, e_2 \rangle$ à 3, puis:

$$\vec{v} = \underbrace{\langle v, e_1 \rangle}_{=2} \cdot \vec{e_1} + \underbrace{\langle v, e_2 \rangle}_{=3} \cdot \vec{e_2}$$

Proof. Posons $y := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\forall j = 1, \ldots, n, \\
&\langle x - y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle}_{\substack{\text{moved out} \\ \text{like constant}}} \langle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle \\
-&\left(\langle x, e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1, e_j \rangle}_{=0} + \ldots + \langle x, e_{j-1} \rangle \underbrace{\langle e_{j-1}, e_j \rangle}_{=0} + \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} + \langle x, e_{j+1} \rangle \underbrace{\langle e_{j+1}, e_j \rangle}_{=0} + \ldots + \langle x, e_n \rangle \underbrace{\langle e_n, e_j \rangle}_{=0} \right) \\
&(\forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ car un produit scalaire des vecteur orthogonaux}) \\
&(\forall j\ \langle e_j, e_j \rangle = 1 \text{ car un produit scalaire de même vecteur}) \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} = 0
\end{aligned}$$

Donc, $x - y \in Vect(e_1, \ldots, e_n)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$. Donc $x = y$ □

Corollary 1.25. $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$

Proof. Si $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ donc

$$\|x\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$\square$

Proposition 1.26. Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ une BON. Soient $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice représentative de f dans ε, i.e, $A = Mat_\varepsilon(f)$

$$a_{i,j} =< f(e_i), e_j > \ \forall i, j = 1, \dots, n$$

Proof. A est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $f(e_j)$ écrits dans la base ε:

$$A = (f(e_1)| \dots |f(e_n)) \quad f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Car $\forall v \in E$, $v = c_1 e_1 + \dots c_n e_n$ donc $f(v) = c_1 f(e_1) + \dots c_n f(e_n)$ par la linéarité, donc il nous reste à étudier chaque $f(e_j)$

$$f(e_j) = a_{1,j} e_1 + \dots a_{n,j} e_n \Rightarrow$$
$$\langle f(e_j), e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \langle e_k, e_i \rangle = a_{k,j}$$

car $\langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ 1 \text{ si } k = j \end{cases}$ Donc:

$$a_{i,j} =< f(e_j), e_i >$$

$\square$

1.4 Projections orthogonales

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Alors, $E = F \oplus F^\perp$. Donc $\forall x \in E$ s'ecrit

$$x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in F^\perp}{x_{F^\perp}}$$

Definition 1.27. La **projection orthogonale** de E dans F est la projection p_F de E sur F parallèlement à $F^\perp$, i.e

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow F \\ x = x_F + x_{F^\perp} &\longmapsto p_F(x = x_F + x_{F^\perp}) = x_F. \end{aligned}$$

Remark 1.28. 1. p_F est linéaire

2. $\forall x \in E\, p_F(x)$ est complétement caractérisé par la propriété suivante:
   Soit $y \in E$, alors
   $$y = p_F(x) \Leftrightarrow \left(\underset{\Rightarrow y = x_F}{y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp} \right)$$
   En particulier $< p_F(x), x - P_F(x) >= 0$. Alors, si $(v_1, \dots, v_R)$ est une BON de F, on a:
   $$\forall x \in E,\, p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} < x, v_i > v_i$$

En effet, il suffit de vérfier que le vecteur $y = \sum_{i=1}^{k} < x, v_i > v_i$ vérfie:

$$y \in F \text{ et } x - y \in F^{\perp}$$

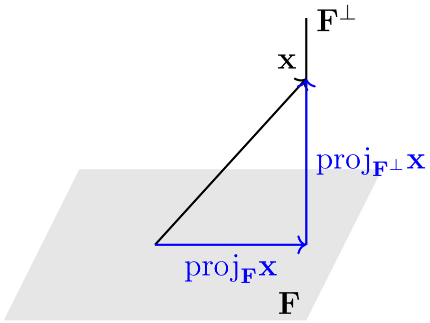


Figure 1.1: Projection

Proposition 1.29. Soit $x \in E$. Alors,

$$\|x - p_F(x)\| = inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$$

i.e $\|x - p_F(x)\|$ est la distance de x à F.
Voir Figure 1.1

Proof. Comme $p_F(x) \in F$ il suffit de prouver que, si $y \in F$, alors

$$\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$$

Mais, $$\underbrace{\|x - y\|^2}_{(x - p_F(x)) + (P_F(x) - y)} = \|x - P_F(x)\|^2 + 2\overbrace{< \overset{\in F^{\perp}}{x - P_F(x)}, \overset{\in F}{P_F(x) - y} >}^{=0} + \underbrace{\|P_F(x) - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - P_F(x)\|^2$$

□

Theorem 1.30. Gram-Shmidt
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<,>$. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre d'élement $\in E$. Alors, il existe une famille $(w_1, \ldots, w_n)$ orthogonale tq

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad Vect(v_1, \ldots, v_i) = Vect(w_1, \ldots, w_i)$$

Proof. Récurrence sur i

- $i = 1$: $w_1 := v_1$ suffit
- $i \geq 1$: Supposons $(w_1, \ldots, w_i)$ construits. Posons $F_i = Vect(w_1, \ldots, w_i) = Vect(v_1, \ldots, v_i)$. Alors on prend $w_{i+1} := v_{i+1} - P_{F_i}(v_{i+1})$. Donc, $w_{i+1} \in F_i^{\perp}$ (par caractérisation de P_{F_i}) et $(w_1, \ldots, w_{i+1})$ est orthogonale. On note $P_{F_i}(v_{i+1}) \in F_i$, donc

$$Vect(w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}) \underset{w_{i+1} = v_{i+1} - P_{F_i}(v_{i+1})}{=} Vect(w_1, \ldots, w_i, v_{i+1}) = Vect(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1})$$

□

Remark 1.31. La preuve donne une récette concrète pour construir une BON.
Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien. $(v_1, \ldots, v_n)$ base de E.
Le but: construit une base $(w'_1, \ldots w'_n)$ orthogonale de E avec $Vect(v_1, \ldots, v_i) = Vect(w_1, \ldots, w_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n$
Posons:

1. $w'_1 := v_1$
2. $w'_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} \frac{<v_{i+1}, w'_j>}{<w'_j, w'_j>} w'_j$.
   Alors, $(w_1, \ldots, w_n)$ avec $w_i = \frac{1}{\|w'_i\|} w'_i$ est une BON.