

Нотатки до курсу Лінійної Алгебри 2

Єгор Коротенко

30 червня 2025 р.

Анотація

Це мої конспекти, зроблені для курсу лінійної алгебри 2 в Університеті Париж-Сакле. Основна частина цих конспектів посилається на книгу "Лінійна алгебра написану Жозефом Гріфоном [2].

Мої конспекти з інших предметів доступні на моєму сайті: dobbikov.com

Ці конспекти перекладено українською та англійською мовами за допомогою інструменту `sci-trans-git` [3]

ЗМІСТ

1	Евклідові простори	2
1.1	Вступ	2
1.2	Ортогональність	4
1.3	Ортонормовані базиси	7
1.4	Матриці та скалярні добутки	10
1.5	Ортогональні проєкції	11
1.6	Ізометрії та Спряжені оператори	14
1.6.1	Ізометрії	14
1.6.2	Спряжений ендоморфізм	17
1.7	Ортогональні групи	17
2	Визначники	19
2.1	Найбільш важливі властивості	19
2.2	Розкладання відносно рядка/стовпця	20
2.3	Визначник трикутної матриці	22
2.4	Коматриця та приєднана матриця	23
2.5	Обернена матриця	23
3	Зведення ендоморфізмів	25
3.1	Вступ	25
3.2	Власні вектори	26
3.3	Пошук власних значень	27
3.4	Пошук власних векторів	28
3.5	Діагоналізовані ендоморфізми	29
3.6	Застосунки	32
3.6.1	Обчислення потужності	32
3.6.2	Розв'язання системи рекурентних послідовностей	33
3.6.3	Розв'язання диференціальних рівнянь	33
3.7	Тригоналізація	35
3.7.1	Геометрична інтуїція діагоналізації	35
3.7.2	Геометрична інтуїція тригоналізації	36
3.7.3	Теорія	36
3.8	Анулюючі многочлени	39
3.9	Лема про ядра	41
3.10	Пошук анулюючих многочленів. Мінімальний многочлен	41
	Appendices	43
1	Нагадування про концепції Лінійної Алгебри	44
1	Матриці	44
1	Множення матриць	44
2	Слід	44

РОЗДІЛ 1

ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ

1.1 Вступ

Векторні простори, розглянуті в цьому розділі, є дійсними. Припустимо, що E є \mathbb{R} -векторним простором. Скалярний добуток:

Визначення 1.1. Білінійна форма на E — це відображення

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B((u, v)) \end{aligned}$$

що задовольняє наступні умови $\forall u, v, w \in E \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2. $B(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(u, w)$

В називається

1. симетрична якщо $B(u, v) = B(v, u) \forall u, v \in E$
2. позитивна якщо $B(u, u) \geq 0 \forall u \in E$
3. визначена якщо $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Позначення. Скалярний добуток позначається: $\langle u, v \rangle$

Приклад 1.2.

1. $E = \mathbb{R}^n, X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in E$

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Його називають "канонічним скалярним добутком" (або звичайним)

2. $E = \mathbb{R}^2$ і $\langle X, Y \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_2$
3. $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R}) \ni f, g$ (простір неперервних функцій)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}(A^t B)$$

Твердження 1.3. Ненульовий векторний простір має нескінченну кількість різних скалярних добутків.

Визначення 1.4. Евклідовий простір — це пара $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, де E є \mathbb{R} -векторним простором скінченновимірним та $\langle \cdot, \cdot \rangle$ є скалярним добутком на E .

Властивість. Нехай $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ евклідов простір. Покладемо:

$$\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle} \quad X \in E$$

норма (або довжина) X . (Вона добре визначена, оскільки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ завжди позитивний)

Властивість. Нехай $X, Y \in E$, тоді:

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= \sqrt{\langle X + Y, X + Y \rangle}^2 = \langle X + Y, X + Y \rangle \\ &= \langle X, X + Y \rangle + \langle Y, X + Y \rangle \\ &= \langle X, X \rangle + \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle + \langle Y, Y \rangle \\ &= \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2 \end{aligned}$$

□

Лема 1.5. нерівність Коші-Шварца Маємо

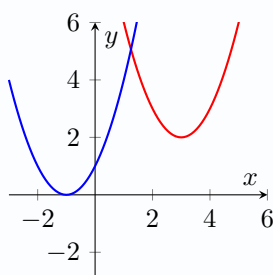
$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in E$$

з рівністю тоді і тільки тоді, якщо u та v колінеарні, тобто $\exists t \in \mathbb{R}$ такий, що $u = tv$ або $v = tu$

Доведення. Якщо $v = 0$, зрозуміло

Якщо $v \neq 0$ розглянемо $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|u + tv\|^2 &= \langle u + tv, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u + tv \rangle + t \langle v, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + t \langle u, v \rangle + t \langle v, u \rangle + t^2 \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2 = f(t) \end{aligned}$$



Випадок 1: $f(t)$ не має різних коренів

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\langle u, v \rangle^2 = 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow \langle u, v \rangle^2 &\leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\ \Rightarrow |\langle u, v \rangle| &\leq \|u\|\|v\| \end{aligned}$$

Випадок 2: $f(t)$ має лише один корінь:

$$\begin{aligned}\Delta &= 0 \\ \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ така що } \|u + tv\|^2 &= 0 \\ \Rightarrow u + tv &= 0 \Rightarrow u = -tv\end{aligned}$$

Наступне визначення буде вивчено в курсі аналізу:

Визначення 1.6. Кажуть, що $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ є нормою, якщо:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

Лема 1.7. Відображення

$$\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

називається евклідовою нормою.

Доведення. 1), 2) зроблено

$$\begin{aligned}3) \quad \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\Rightarrow \|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2\end{aligned}$$

Твердження 1.8. Маємо наступні тотожності $\forall u, v \in E$

1. Тотожність паралелограма:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

2. Тотожність поляризації:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

Доведення. .

- 1.

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2\end{aligned}$$

2. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$

Маємо:

- (1) + (2): $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- (1) - (2): $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$

1.2 Ортогональність

Нехай E — \mathbb{R} -векторний простір та \langle, \rangle — скалярний добуток на E .

Визначення 1.9. $u, v \in E$ називаються ортогональними якщо $\langle u, v \rangle = 0$. Позначають $u \perp v$

- Дві підмножини $A, B \subseteq E$ є ортогональними якщо:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad \langle u, v \rangle = 0$$

- Якщо $A \subseteq E$ називають **ортогональним до A** , що позначається A^\perp множини

$$A^\perp = \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

Також відомий як **ортогональне доповнення A**

- Сімейство (v_1, \dots, v_n) векторів з E називається ортогональним, якщо $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$. Воно називається ортонормованим, якщо воно ортогональне, і крім того $\|v_i\| = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Приклад 1.10. $E = \mathbb{R}^n$, \langle, \rangle канонічний скалярний добуток

$$v_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{якщо } i = j \\ 0 & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$$

(v_1, \dots, v_n) є канонічним базисом

Твердження 1.11. 1. Якщо $A \subseteq E$ тоді A^\perp є векторним підпростором E

2. Якщо $A \subseteq B$ тоді $B^\perp \subseteq A^\perp$

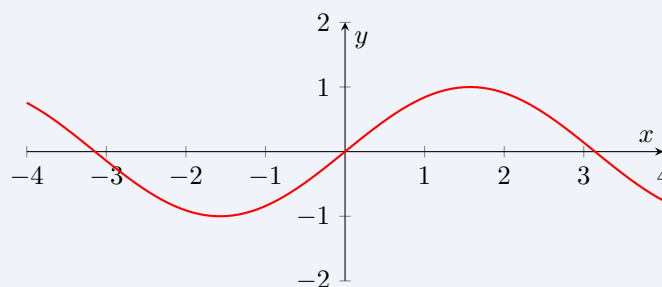
3. $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

4. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Доведення. Вправа

Приклад 1.12. 1. $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$



Тоді, $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ ортогональні: $2 \cos(t) \sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^1 \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin(2t) dt = 0$$

Визначення 1.13. Якщо E є евклідовим простором, ми називаємо "дуал E " множини

$$L(E, \mathbb{R}) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ є лінійною}\}$$

Її позначають E^* . Елемент $f \in E^*$ називається лінійною формою.

Нагадаємо:

Твердження 1.14. Якщо F, F' — два скінченновимірні в.п., то $\dim(L(F, F')) = \dim(F) \cdot \dim(F')$. Зокрема, $\dim(F^*) = \dim(F)$. Справді, якщо $n = (e_1, \dots, e_p)$ є базисом F і $n' = (e'_1, \dots, e'_q)$ є базисом F' , то відображення

$$\begin{aligned} & : L(F, F') \longrightarrow \text{Mat}_{f \times p}(\mathbb{R}) \\ & f \longmapsto (f) = \text{Mat}_{n, n'}(f). \end{aligned}$$

є ізоморфізмом. Отже $\dim(F, F) = qp$

Теорема 1.15. Теорема про ранг: Якщо F є скінченновимірним векторним простором і $f : F \rightarrow F'$ лінійне, тоді $\dim(F) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$

Твердження 1.16. Якщо F, F' є два векторні простори скінченновимірні такі що $\dim(F) = \dim(F')$ і $f : F \rightarrow F'$ лінійне, тоді f є ізоморфізмом $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = 0$

Доведення. Нагадаємо, що якщо G, G' є скінченновимірними підпросторами в тому ж векторному просторі, тоді:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ і } \dim(G) = \dim(G')$$

\Rightarrow) f ін'єктивне $\Rightarrow \text{Ker}(f) = 0$

\Leftarrow) Нехай $\text{Ker}(f) = 0$.

Тоді, обов'язково $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ і за теоремою про ранг ми маємо $\dim(F) = \dim(\text{Im}(f))$, тому $\text{Im}(f) = F'$

Лема 1.17. лема Ріса:

Нехай $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ скінченновимірний евклідовий простір і $f \in E^*$. Тоді, $\exists! u \in E$ такий що $f(x) = \langle u, x \rangle \quad \forall x \in E$. Лінійна форма f задається скалярним добутком з вектором.

Позначення. Для будь-якого $v \in E$ позначаємо через f_v відображення:

$$\begin{aligned} f_v : E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f_v(x) = \langle v, x \rangle. \end{aligned}$$

f_v є лінійним $\forall v \in E$ тобто E^*

Доведення. лема Ріса

Розглянемо відображення

$$\begin{aligned} \phi : E & \longrightarrow E^* \\ v & \longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

ϕ є лінійним (вправа). ϕ є ін'єктивним:

$$v \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

зокрема для $x = v$, маємо:

$$0 = f_v(v) = \langle v, v \rangle \Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} \dim(E) = \dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ є ізоморфізмом} \\ &\Rightarrow \phi \text{ бієктивним} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists! n \in E \text{ така що } \phi(n) = f, \text{ тобто } f(x) = \langle n, x \rangle \forall x \in E$$

У цьому випадку $E = \mathbb{R}^n$, лема Ріса дуже проста для розуміння:

Нехай $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ лінійна форма. Якщо позначимо (e_1, \dots, e_n) канонічний базис \mathbb{R}^n , будь-який $x \in \mathbb{R}^n$ записується

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle = \langle (a_1, \dots, a_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle$$

1.3 Ортонормовані базиси

Нехай (E, \langle, \rangle) евклідов простір і $F \subset E$ векторний підпростір ($\dim(F) < \infty$) оскільки $\dim(E) < \infty$.

Примітка.

$$F^\perp := \{x \in E \mid \langle x, z \rangle = 0 \forall z \in F\}$$

ортогонал до F .

Теорема 1.18. Маємо $E = F \oplus F^\perp$.

Зокрема, $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ і $F = (F^\perp)^\perp$

Доведення. Ми повинні показати, що:

$$1. F \cap F^\perp = \emptyset$$

$$2. E = F + F^\perp \text{ тобто } \forall x \in E, \exists x' \in F, x'' \in F^\perp \text{ такий що } x = x' + x''$$

$$1. \text{ Нехай } x \in F \cap F^\perp$$

$$\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \text{ оскільки } x \in F^\perp \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (визначено)}$$

$$2. \text{ Нехай } x \in E. \text{ Розглянемо } f_x \in E^*, \text{ тобто } f_x : E \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y \rangle \text{ і } f := f_x|_F : F \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f \in E^*$$

$$\text{Лема Ріса } \Rightarrow \exists! x' \in F \text{ такий що } f = f_{x'} : F \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \langle x', z \rangle$$

$$\Rightarrow f_x(z) = f_{x'}(z) = \langle x, z \rangle = \langle x', z \rangle \forall z \in F \text{ (Увага: не рівність для всіх } z \text{ у } E)$$

$$\text{Покладемо } x'' := x - x', \text{ тобто } x = x' + x'' \in F. \text{ Доведемо } x'' \in F^\perp.$$

$$\text{Якщо } z \in F, \langle x'', z \rangle = \langle x - x', z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x', z \rangle = 0. \text{ Отже } x'' \in F^\perp \text{ і } E = F \oplus F^\perp \text{ (} \dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp) \text{)}$$

$$F \subseteq (F^\perp)^\perp \text{ оскільки } \langle x, z \rangle = 0 \forall x \in F \forall z \in F^\perp$$

$$\dim(F) = \dim(E) - \dim(F^\perp)$$

$$\text{оскільки } E = G \oplus G^\perp, \text{ отже } \dim(G) = \dim(E) - \dim(G^\perp) \text{ для } G = F^\perp, \dim(F^\perp) = \dim(G)$$

□

Визначення 1.19. Нехай E — векторний простір, оснащений скалярним добутком \langle, \rangle

- Сім'я $(v_i)_{i \geq 0}$ векторів з E називається ортogonalною, якщо для $i \neq j$ ми маємо $\langle v_i, v_j \rangle = 0$,

тобто $v_i \perp v_j$

- Ортонормальна сім'я з E — це ортогональна сім'я $(v_i)_{i \geq 0}$, така що до того ж $\|v_i\| = 1$ для $i \geq 0$

Приклад 1.20. 1. $E = \mathbb{R}^n$ оснащено стандартним скалярним добутком. Канонічний базис (e_1, \dots, e_n) є ортогональним, тому що

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{якщо } i = j \\ 0 & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$$

2. У $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ оснащено $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$. Сімейство $(\cos(t), \sin(t))$ є ортогональним. Сімейство $(1, t^2)$ не є ортогональним:

$$\langle 1, t^2 \rangle = \int_{-1}^1 1t^2 dt = \frac{2}{3} \neq 0$$

Твердження 1.21. Ортогональна сім'я, що складається з ненульових векторів, є лінійно незалежною. Зокрема, ортонормована сім'я є лінійно незалежною.

Доведення. Припустимо, (v_1, \dots, v_n) ортогональні з $v_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$ якщо $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$, тоді

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} 0 = \left\langle v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2$$

Отже, $\alpha_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$.

Якщо (v_1, \dots, v_n) є ортонормальною, тоді $\|v_i\| = 1$. Отже, $v_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. □

Інтуїція. Ортогональні (перпендикулярні) вектори ніколи не знаходяться один в одному (тобто $e_i = \lambda e_j$ неможливо), якщо вектори лінійно залежні, або кут < 90 (отже, вектори не є ортогональними, абсурд), (вони знаходяться один в одному, вони не є ортогональними, абсурд). Отже, вони справді лінійно незалежні.

Визначення 1.22. (E, \langle, \rangle) евклідов простір. Сім'я $B = (e_1, \dots, e_n)$ є ортонормальним базисом (де БОН), якщо вона є базисом і ортонормальною сім'єю.

Теорема 1.23. (E, \langle, \rangle) евклідов простір. Тоді він допускає БОН.

Доведення. Нехай $n := \dim(E)$. Нехай (e_1, \dots, e_p) ортогональна сім'я (з точки зору потужності p) така що $e_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, p$.

Припустимо суперечливо, що $p < n$. Покладемо $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Тоді, $E = F \oplus F^\perp$ і $\dim(F) \leq p < n$. Отже $F^\perp \neq \{0\}$. Нехай $x \in F^\perp, x \neq 0$. Тоді, (e_1, \dots, e_p, x) є ортогональною потужності $> p$. Отже, $p = n$ і (e_1, \dots, e_n) є базисом E . Щоб отримати ортонормальну сім'ю (e'_1, \dots, e'_n) достатньо взяти $e'_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i \forall i = \{1, \dots, n\}$. □

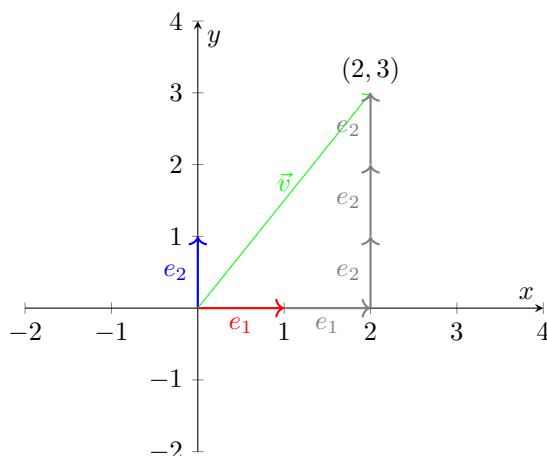
Твердження 1.24. Нехай (E, \langle, \rangle) евклідов простір, і нехай (e_1, \dots, e_n) ортонормальний базис E . Якщо

$x \in E$, маємо:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

Іншими словами, дійсне число $\langle x, e_i \rangle \in \mathbb{R}$ -та координата x у базисі (e_1, \dots, e_n) .

Інтуїція. Ортогональність базису спрощує нам життя. Але спочатку невеликий вступ. Нехай векторний простір $E = \mathbb{R}^2$ і базис $(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Нехай вектор $\vec{v} = (2, 3)$:



Отже, ми можемо записати $\vec{v} = (2, 3) = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2$. Значення x та y (координати v) показують, скільки частин кожного базисного вектора (число може бути $\in \mathbb{R}$) потрібно взяти і просумувати, щоб отримати \vec{v} . (Простіше кажучи: наскільки далеко ми повинні піти вліво і вгору).

У ортонормальному базисі $\langle v, e_i \rangle$ вказує, скільки потрібно взяти вектора e_i , щоб утворити вектор \vec{v} , а \vec{e}_i задає напрямок. Звідси $\langle v, e_1 \rangle$ еквівалентно 2, і $\langle v, e_2 \rangle$ до 3, потім:

$$\vec{v} = \underbrace{\langle v, e_1 \rangle}_{=2} \cdot \vec{e}_1 + \underbrace{\langle v, e_2 \rangle}_{=3} \cdot \vec{e}_2$$

Зазвичай, щоб знайти координати в базисі, слід розв'язувати лінійну систему, тоді як ортонормальний базис дозволяє отримати їх шляхом обчислення скалярного добутку з кожним вектором базису, що значно простіше.

Доведення. Покладемо $y := \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. Тоді,

$$\begin{aligned} & \forall j = 1, \dots, n, \\ & \langle x - y, e_j \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle}_{\substack{\text{винесено} \\ \text{як константу}}} \\ &= \langle x, e_j \rangle \\ & - \left(\underbrace{\langle x, e_1 \rangle \langle e_1, e_j \rangle}_{=0} + \dots + \underbrace{\langle x, e_{j-1} \rangle \langle e_{j-1}, e_j \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_j \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle x, e_{j+1} \rangle \langle e_{j+1}, e_j \rangle}_{=0} + \dots + \underbrace{\langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_j \rangle}_{=0} \right) \\ & (\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ оскільки це скалярний добуток ортогональних векторів}) \\ & (\forall j \langle e_j, e_j \rangle = 1 \text{ оскільки це скалярний добуток того ж вектора}) \\ &= \langle x, e_j \rangle - \underbrace{\langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_j \rangle}_{=1} = 0 \end{aligned}$$

Отже, $x - y \in Vect(e_1, \dots, e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$. Отже $x = y$ □

Наслідок 1.25. $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$

Доведення. Якщо $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ тому

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

□

1.4 Матриці та скалярні добутки

Твердження 1.26. Нехай $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ евклідовий простір та $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ ортонормований базис. Нехай $f \in \mathcal{L}(E, E)$ та $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ матриця, що представляє f у ε , тобто, $A = Mat_\varepsilon(f)$

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Доведення. A є матрицею, стовпцями якої є вектори $f(e_j)$, записані в базисі ε :

$$A = (f(e_1) | \dots | f(e_n)) \quad f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Оскільки $\forall v \in E, v = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$ тому $f(v) = c_1 f(e_1) + \dots + c_n f(e_n)$ за лінійністю, отже нам залишається дослідити кожен $f(e_j)$

$$f(e_j) = a_{1,j} e_1 + \dots + a_{n,j} e_n \Rightarrow \langle f(e_j), e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \langle e_k, e_i \rangle = a_{k,j}$$

$$\text{car } \langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{якщо } k \neq j \\ 1 & \text{якщо } k = j \end{cases} \quad \text{Отже:}$$

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle$$

□

Матриця векторного добутку дуже корисна в лінійній алгебрі. Перш ніж дати визначення:

Нехай E — скінченновимірний векторний простір розмірності n , простір K та білінійна форма $b : E \times E \rightarrow K$. Якщо $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис E , тоді: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ та $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, тоді маємо:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j)$$

b отже, визначається знанням значень $b(e_i, e_j)$ на базисі.

Визначення 1.27. Називається **матрицею** b у базисі $\{e_i\}$ матриця:

$$M(b)_{e_i} = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \dots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \dots & b(e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b(e_n, e_1) & \dots & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Таким чином, елемент i -того рядка та j -того стовпця є коефіцієнтом $x_i y_j$.

Приклад 1.28. Матриця канонічного скалярного добутку в \mathbb{R}^3 дорівнює:

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\text{Mat}(\langle, \rangle)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Твердження 1.29. скалярний добуток, представлений матрицею.

Зазначимо:

$$\underbrace{A = M(b)_{e_i}}_{\text{матриця скалярного добутку}} \quad \underbrace{X = M(x)_{e_i}}_{\substack{\text{координати } x \\ \text{у базисі } e_i}} \quad \underbrace{Y = M(y)_{e_i}}_{\substack{\text{координати } y \\ \text{у базисі } e_i}} \quad (x, y \in E)$$

Тоді маємо:

$$b(x, y) = X^t A Y$$

Приклад 1.30. Знову розглянемо приклад з $b = \langle, \rangle$ канонічний скалярний добуток в \mathbb{R}^3 . Нехай $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ та $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ в канонічному базисі \mathbb{R}^3 . Отже:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= X^t A Y = \overbrace{(1, 2, -1)}^{X^t} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^A \times \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^Y \\ &= \underbrace{(1, 2, -1)}_X \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{A \times Y}} \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2 + 6 - 1 = 7 \end{aligned}$$

TODO. зміна базису матриці білінійної форми

1.5 Ортогональні проєкції

Нехай (E, \langle, \rangle) евклідов простір, $F \subseteq E$ векторний підпростір. Тоді, $E = F \oplus F^\perp$. Отже $\forall x \in E$ записується

$$x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$$

Визначення 1.31. Ортогональна проєкція з E в F — це проєкція p_F з E на F паралельно до F^\perp , тобто

$$p_F : E = F \oplus F^\perp \longrightarrow F$$

$$x = x_F + x_{F^\perp} \longmapsto p_F(x = x_F + x_{F^\perp}) = x_F.$$

Примітка 1.32. 1. p_F є лінійним

2. $\forall x \in E$ $p_F(x)$ повністю характеризується наступною властивістю:
Нехай $y \in E$, тоді

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \left(y \in F \text{ та } x - y \in F^\perp \right) \Rightarrow y = x_F$$

Зокрема $\langle p_F(x), x - p_F(x) \rangle = 0$. Тоді, якщо (v_1, \dots, v_R) є ортонормованим базисом F , маємо:

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i$$

Дійсно, достатньо перевірити, що вектор $y = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i$ задовольняє:

$$y \in F \text{ та } x - y \in F^\perp$$

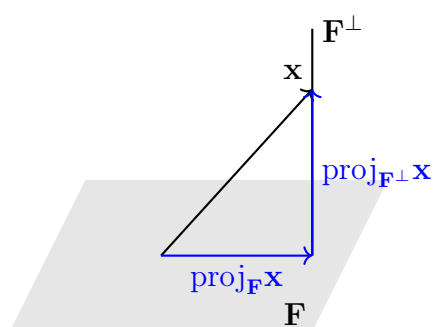


Рис. 1.1: Проекція

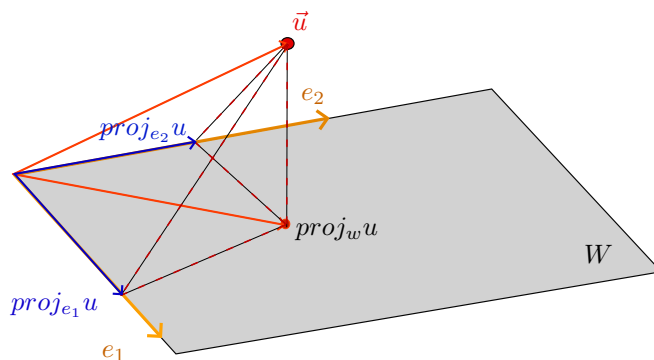


Рис. 1.2: Проекція з ОНБ

Твердження 1.33. Нехай $x \in E$. Тоді,

$$\|x - p_F(x)\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$$

тобто $\|x - p_F(x)\|$ є відстань від x до F .

Див. Figure 1.1

Доведення. Оскільки $p_F(x) \in F$ достатньо довести, що, якщо $y \in F$, тоді

$$\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$$

$$\text{Але, } \frac{\|x - y\|^2}{(x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)} = \|x - p_F(x)\|^2 + 2 \overbrace{\left\langle x - p_F(x), p_F(x) - y \right\rangle}^{\substack{\in F^\perp \\ \in F}} = 0 + \underbrace{\|p_F(x) - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - p_F(x)\|^2 \quad \square$$

Теорема 1.34. Грам-Шмідт

Нехай E — векторний простір, оснащений скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Нехай (v_1, \dots, v_n) — лінійно незалежна сім'я елементів $\in E$. Тоді, існує сім'я (w_1, \dots, w_n) ортогональна така що

$$\forall i = 1, \dots, n \quad Vect(v_1, \dots, v_i) = Vect(w_1, \dots, w_i)$$

Крім того, ця теорема дає нам метод побудови ортонормованого базису з довільного базису.

Доведення. Теорема 1.34 Побудуємо ортогональний базис: $\{w_1, \dots, w_p\}$. Спершу покладемо:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 + \lambda w_1, \end{cases} \quad \text{де } \lambda \text{ такий, що } w_1 \perp w_2$$

Накладаючи цю умову, знаходимо:

$$0 = \langle v_2 + \lambda w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + \lambda \|w_1\|^2$$

Оскільки $w_1 \neq 0$, отримуємо $\lambda = -\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}$. Зауважимо, що:

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \end{cases}$$

отже $Vect\{v_1, v_2\} = Vect\{w_1, w_2\}$.

Після побудови w_2 , будуємо w_3 , поклавши:

$$w_3 = v_3 + \mu w_1 + \nu w_2$$

де μ та ν такі, що: $w_3 \perp w_1$ та $w_3 \perp w_2$

Можна розглядати $w_3 = v_3 - \lambda' w_1 - \lambda'' w_2$ як $w_3 = v_3 - proj_{F_2} v_3$ де $F_i = Vect\{w_1, \dots, w_i\}$

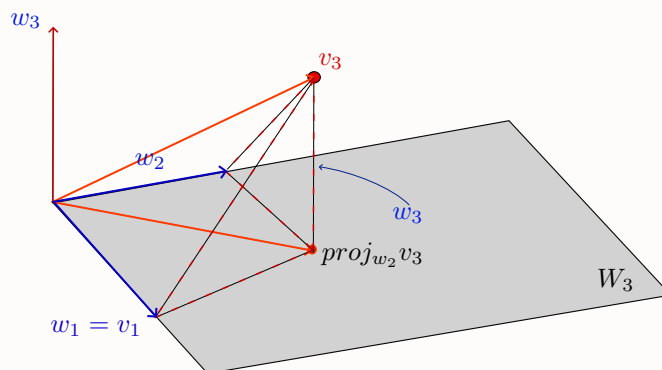


Рис. 1.3: Вектор за допомогою проекції

Це дає

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_3 + \mu w_1 + \nu w_2, w_1 \rangle = \langle v_3, w_1 \rangle + \underbrace{\mu \langle w_1, w_1 \rangle}_{=\|w_1\|^2} + \underbrace{\nu \langle w_2, w_1 \rangle}_{=0} \\ &= \langle v_3, w_1 \rangle + \mu \|w_1\|^2 \end{aligned}$$

звідки $\mu = -\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}$. Аналогічно, накладаючи умову, що $w_3 \perp w_2$, знаходимо $\nu = -\frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2}$. Оскільки

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \\ v_3 = w_3 - \mu w_1 - \nu w_2 \end{cases}$$

добре видно, що $\text{Vect}\{w_1, w_2, w_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. Тобто, $\{w_1, w_2, w_3\}$ є ортогональним базисом простору, породженого v_1, v_2, v_3 . Тепер добре видно процес рекурсії.

Припустимо, що ми побудували w_1, \dots, w_{k-1} для $k \leq p$. Покладемо:

$$\begin{aligned} w_k &= v_k + \text{лінійна комбінація вже знайдених векторів} \\ &= v_k + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{k-1} w_{k-1} \end{aligned}$$

Умови $w_k \perp w_i$ (для $i \in \{1, \dots, k-1\}$) еквівалентні:

$$\lambda_i = -\frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$$

як це негайно перевіряється. Оскільки $v_k = w_k - \lambda_1 w_1 - \dots - \lambda_{k-1} w_{k-1}$, за індукцією бачимо, що $\text{Vect}\{w_1, \dots, w_k\} = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\} \Leftrightarrow \{w_1, \dots, w_k\}$ є ортогональним базисом $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$.

Нам залишається лише нормувати її, тобто $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$, звідки $\{e_1, \dots, e_k\}$ є ортонормальним базисом $F = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$. \square

Твердження 1.35. Щоб зрозуміти цю пропозицію, раджу прочитати розділ 1.6

Будь-яка ортогональна проєкція є самоспряженою, тобто якщо p є ортогональною проєкцією, тоді:

$$p^* = p$$

У матричному записі: нехай A матриця проєкції p , тоді:

$$A^T = A$$

1.6 Ізометрії та Спряжені оператори

1.6.1 Ізометрії

Визначення 1.36. Ізометрія з E (або ортогональне перетворення) є ендоморфізмом $f \in \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$, що зберігає скалярний добуток, тобто:

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$$

Визначення 1.37. Нехай $x, y \in E$ — два ненульові вектори. Маємо, згідно з нерівністю Коші-Буняковського (див. лему 1.5):

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Тоді існує єдиний $\theta \in [0, \pi]$ такий, що:

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (1.1)$$

θ називається **кутом** (неорієнтованим) між векторами x і y .

Твердження 1.38. Якщо f є ізометрією E , отже, маємо:

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$$

Доведення. Припустимо, що f є ізометрією E . Нехай $x, y \in E$. За визначенням: $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, отже, покладемо $y := x$, тоді маємо:

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle f(x), f(x) \rangle}_{\|f(x)\|^2} &= \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|^2} \\ \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 &= \|x\|^2 \\ \Leftrightarrow \|f(x)\| &= \|x\| \end{aligned}$$

□

Твердження 1.39. Нехай f ізометрія в E , тоді:

1. f є бієктивною
2. f зберігає евклідову відстань та кути

Доведення. Нехай f — ізометрія в E і два вектори $u, v \in E$

1.

$$\|f(u) - f(v)\| = \sqrt{\langle f(u), f(v) \rangle} = \sqrt{\langle u, v \rangle} = \|u - v\|$$

2. Нехай θ_1 — кут між $f(u)$ і $f(v)$, а θ_2 — кут між u і v , тому:

$$\cos \theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v) \rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|}$$

$$\cos \theta_2 := \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

За визначенням, $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, згідно з пропозицією 1.38, $\forall x, \|f(x)\| = \|x\|$, тому:

$$\cos \theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v) \rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos \theta_2$$

□

Визначення 1.40. Нехай F — векторний підпростір E , отже $E = F \oplus F^\perp$ звідки $\forall v \in E, \exists v_1 \in F, v_2 \in F^\perp$ такий що $v = v_1 + v_2$. Покладемо:

$$s_F(v) = v_1 - v_2$$

і s_F називається ортогональною симетрією відносно осі F .



Рис. 1.4: Ортогональна симетрія відносно осі F

Твердження 1.41. Ортогональна симетрія є ізометрією.

Доведення. ЗРОБИТИ або не потрібно

□

Твердження 1.42. f є ізометрією тоді і лише тоді, якщо вона перетворює будь-який ортонормований базис на ортонормований базис.

Доведення. Нехай f — ізометрія, тоді вона перетворює будь-який базис на базис, оскільки f бієктивна за проп. 1.39.

- (\Rightarrow) Припустимо, що f — ізометрія. Нехай $\{e_i\}$ — ортонормований базис, тоді маємо:

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Отже, $\{f(e_i)\}$ — ортонормований базис.

- (\Leftarrow) Припустимо, що існує ортонормований базис $\{e_i\}$ такий, що $\{f(e_i)\}$ також є ортонормованим базисом. Крім того, нехай $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ та $y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ з $x_i, y_i \in \mathbb{R}$

Оскільки $\{e_i\}$ — ортонормований, то маємо:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i \quad (1.2)$$

З іншого боку:

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n y_j f(e_j) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \quad \text{оскільки } \{e_i\} \text{ ортонормований} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{Згідно з 1.2} = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Отже f — ізометрія.

□

Твердження 1.43. Якщо $\{e_i\}$ є ортонормованою базою, f ізометрія та $A = M(f)_{e_i}$, тоді $A^T A = I = A A^T$.

Доведення. Щоб довести це, ми використаємо пропозицію 1.29.
За визначенням ізометрії, маємо:

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E \\ \Leftrightarrow \underbrace{(AX)^T(AY)}_{\langle f(x), f(y) \rangle} &= X^T A^T A Y = \underbrace{X^T Y}_{\langle x, y \rangle} \\ \Leftrightarrow A^T A &= I \end{aligned}$$

□

Твердження 1.44. Якщо A є матрицею ізометрії в ортонормованому базисі, тоді $\det(A) = \pm 1$

Доведення. За пропозицією 1.43, маємо: $A^T A = I$, звідки:

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= \det(I) = 1 \Rightarrow \det(A)^2 = 1 \quad (\text{бо } \det(A^T) = \det(A)) \\ &\Rightarrow \det(A) = \pm 1 \end{aligned}$$

□

Інтуїція. Ізометрія виконує обертання або відображення, вона зберігає відстані, тому площа (або об'єм) фігури, яка побудована на основі цього перетворення, дорівнює 1.

1.6.2 Спряжений ендоморфізм

Твердження 1.45. Нехай E — евклідовий простір, а $f \in \text{End}(E)$. Існує один і лише один ендоморфізм $f^* \in E$ такий, що

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle, \quad \forall x, y \in E$$

f^* називається **спряженим** до f .

Якщо $\{e_i\}$ є ортонормованим базисом, а $A = M(f)_{e_i}$, тоді матриця $A^* = M(f^*)_{e_i}$ є транспонованою до A , тобто $A^* = A^T$

Доведення. Знову ж таки, для доказу ми використаємо пропозицію 1.29, яка є дуже корисною, тому я раджу вам опанувати цю концепцію.

Нехай $\{e_i\}$ — ортонормований базис E , і позначимо

$$A = M(f)_{e_i} \quad A^* = M(f^*)_{e_i} \quad X = M(x)_{e_i} \quad Y = M(y)_{e_i}$$

Оскільки ми знаходимося в ортонормованому базисі, твердження записується:

$$\underbrace{(AX)^T Y}_{\langle f(x), y \rangle} = X^T A^T Y = X^T \underbrace{(A^* Y)}_{\langle x, f^*(y) \rangle} \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

що означає, що $A^* = A$, і, крім того, демонструє єдиність такого спряженого.

□

1.7 Ортогональні групи

Нагадування:

Визначення 1.46. Загальна лінійна група:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

це група всіх лінійних перетворень (квадратних матриць), які є оборотними (оскільки $\det(A) \neq 0$).

Визначення 1.47. Ортогональна група: Множина:

$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A A^T = I\}$$

задовольняє наступні властивості:

1. якщо $A, B \in O(n, \mathbb{R})$, тоді $AB \in O(n, \mathbb{R})$
2. $I \in O(n, \mathbb{R})$
3. якщо $A \in O(n, \mathbb{R})$ тоді $A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$

Зокрема, $O(n, \mathbb{R})$ є підгрупою $GL(n, \mathbb{R})$ (група оборотних матриць) (див. визначення 1.46).

Інтуїція. Значення ортогональних матриць зрозуміле: вони представляють матриці ортогональних перетворень (ізометрії) в **ортонормованому базисі** (див. визн. 1.9).

Можна помітити, що якщо $\det(A) = 1$, ця ізометрія представляє обертання, крім того, ми маємо наступне визначення:

Визначення 1.48. Множина прямих ортогональних матриць (тобто таких, що $\det(A) = 1$)

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

є групою, що називається **спеціальною ортогональною групою**.

Приклад 1.49. Матриця

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

є ортогональною. Можна перевірити, що $A^T A = I$, або достатньо показати, що c_1, c_2, c_3 є ортонормованою сім'єю, тобто:

$$\|c_i\|^2 = 1 \quad \text{та} \quad \langle c_i, c_j \rangle = 0 \quad \text{якщо } i \neq j$$

Можна інтерпретувати A як матрицю перетворення f у канонічному базисі $\{e_i\}$, отже маємо: $c_i = f(e_i)$, згідно з пропозицією 1.42 f є ортогональним. Крім того, бачимо, що $\det(A) = +1$. Отже, f є прямим ортогональним перетворенням.

Твердження 1.50. Матриця переходу від ортонормованого базису до ортонормованого базису є ортогональною матрицею.

Доведення. Я даю інтуїцію. Матриця переходу перетворює один базис на інший, вона переводить вектори базису, отже, вона перетворює базис БОН на вектори базису БОН, тому, згідно з пропозицією 1.42, ця матриця є ортогональною. \square

РОЗДІЛ 2

ВИЗНАЧНИКИ

Цей розділ є скоріше шпаргалкою з детермінантів, оскільки я не буду наводити докази, а лише корисні властивості, приклади та інтуїцію.

Визначення 2.1. Нехай $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця $n \times n$, тоді:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{signe}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

де

- S_n це група всіх перестановок $\{1, \dots, n\}$
- $\text{signe}(\sigma)$ це знак перестановки

Це визначення є дуже формальним, тому в кінці цього розділу ми переформулюємо це визначення. Спочатку ми вивчимо властивості детермінантів:

2.1 Найбільш важливі властивості

Твердження 2.2. властивості визначника. Для цієї пропозиції, ми позначаємо $\det(c_1, \dots, c_n)$ визначник, де $\forall i, r_i$ і $\forall i, y_i$ представляють стовпець (або вектор-стовпець). І $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

1. **Визначник одиничної матриці дорівнює 1:**

$$\det(I_n) = 1$$

2. **Визначник матриці рангу 1 є її єдиним елементом:**

$$\det([a_{1,1}]) = a_{1,1} \quad \text{де } a_{1,1} \in \mathbb{R}$$

3. **Лінійність 1:**

$$\det(r_1, \dots, r_i + y_i, \dots, r_n) = \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) + \det(r_1, \dots, y_i, \dots, r_n)$$

4. **Лінійність 2:**

$$\det(r_1, \dots, \lambda_i r_i, \dots, r_n) = \lambda_i \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n)$$

Примітка. Ось чому:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

5. **Однакові стовпці:** Припустимо, що $i \neq j$ і $c_i = c_j$ тоді:

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = 0$$

Якщо є два однакових стовпці, тоді \det дорівнює 0.

6. **Переміщення стовпців:**

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = -\det(c_1, \dots, \underbrace{c_j, \dots, c_i}_{\text{permutation}}, \dots, c_n)$$

Інакше кажучи, перестановка стовпців змінює знак.

7. **Визначник помножених матриць:** Нехай $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

8. **Визначник транспонованої матриці:** Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

2.2 Розкладання відносно рядка/стовпця

Визначення 2.3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, i.e:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,i-1} & a_{j,i} & a_{j,i+1} & \dots & a_{j,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Alors, $A_{j,i}$ est une matrice où la ligne j et la colonne i sont supprimé, i.e:

$$A_{j,i} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

Це дозволяє нам розкласти визначник відносно рядка або стовпця:

Твердження 2.4. Нехай $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця і нехай $1 \leq k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,i} \det(A_{k,i})$$

є обчисленням детермінанта відносно $k^{\text{го}}$ рядка.

Приклад 2.5. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Ce qui est au centre des lignes est le $a_{i,j}$. Ici: $a_{2,1}$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.1: Розклад по другому рядку

Тому:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} a_{2,i} \det(A_{2,i}) \\ &= (-1)^{1+2} \cdot a_{2,1} \cdot \det(A_{2,1}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{2,2} \cdot \det(A_{2,2}) + (-1)^{3+2} \cdot a_{2,3} \cdot \det(A_{2,3}) \\ &= (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot 2 \cdot (-11) + 1 \cdot 9 \cdot (-9) + (-1) \cdot 8 \cdot (-5) \\ &= 22 - 81 + 40 \\ &= -19 \end{aligned}$$

Твердження 2.6. Нехай $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця і нехай $1 \leq k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(A_{i,k})$$

є обчисленням визначника відносно k -ї стовпця.

Приклад 2.7. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
A_{1,2} &= \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\
A_{2,2} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\
A_{3,2} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ \cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Рис. 2.2: Розклад за другою колонкою

Отже:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} a_{i,2} \det(A_{i,2}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot \det(A_{1,2}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{2,2} \cdot \det(A_{2,2}) + (-1)^{3+2} \cdot a_{3,2} \cdot \det(A_{3,2}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot 4 \cdot (-12) + 1 \cdot 9 \cdot (-9) + (-1) \cdot 7 \cdot (-2) \\
&= 48 - 81 + 14 \\
&= -19
\end{aligned}$$

2.3 Визначник трикутної матриці

Наслідок 2.8. Визначник трикутної матриці є добутком її діагональних елементів. Тобто, нехай трикутна матриця

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

тоді

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$$

Приклад 2.9. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Розгорнемо цей визначник відносно першого стовпця:

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} a_{i,2} \det(A_{i,2}) \\
 &= (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot \det(A_{1,1}) + (-1)^{2+1} \cdot a_{2,1} \cdot \det(A_{2,1}) + (-1)^{3+1} \cdot a_{3,1} \cdot \det(A_{3,1}) \\
 &= (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^3 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{(-1)^4 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}}_{=0} \\
 &= \underbrace{1}_{=a_{1,1}} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} =: B \\
 &= (-1)^{1+1} \cdot b_{1,1} \cdot \det(B_{1,1}) + (-1)^{2+1} \cdot b_{2,1} \cdot \det(B_{2,1}) \quad \text{розклад відносно} \\
 &= 1 \cdot \underbrace{9}_{a_{2,2}} \cdot \underbrace{6}_{=0} + \underbrace{(-1) \cdot 0 \cdot 8}_{=0} \quad \text{першого стовпця} \\
 &= \underbrace{1}_{=a_{1,1}} \cdot \underbrace{9}_{=a_{2,2}} \cdot \underbrace{6}_{=a_{3,3}}
 \end{aligned}$$

2.4 Коматриця та приєднана матриця

Спершу, нагадаємо визначення $A_{i,j}$. Це квадратна матриця, де i ий рядок і j ий стовпець видалено. (Див. визначення 2.3).

Визначення 2.10. Нехай квадратна матриця $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Позначимо

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

Потім, позначимо матрицю

$$N = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} = \text{Com}(A)$$

Матриця N називається **коматрицею** матриці A . Тоді, **спряжена матриця** матриці A визначається як транспонована коматриця:

$$A^* = N^T = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,n} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Теорема 2.11. Нехай $A \in \mathcal{M}_n \mathbb{R}$ квадратна матриця та A^* її спряжена матриця, тоді маємо:

$$A^* A = A A^* = \det(A) I_n = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

Корисність такої матриці?

2.5 Обернена матриця

Теорема 2.12. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця така що $\det(A) \neq 0$, тоді:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$$

є оберненою матрицею до A .

Наслідок 2.13. Якщо $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ оборотна квадратна матриця, тоді:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

РОЗДІЛ 3

ЗВЕДЕННЯ ЕНДОМОРФІЗМІВ

Пишучи цей розділ, я був натхненний відео каналу *3blue1brown* які я вам раджу подивитися, принаймні плейлист, що стосується лінійної алгебри. Другим джерелом натхнення була книга Joseph Grifone [2].

Примітка 3.1. У цьому розділі багато використовуються наступні терміни:

- власний вектор
- власне значення
- власний простір

Термін власний є еквівалентом терміну айген (eigen), який може бути використаний в іншій літературі. Отже, власний вектор позначає айген вектор (eigen vector), тощо.

3.1 Вступ

У попередньому розділі ми вивчали поняття ортонормального базису, корисність якого полягає в: спрощенні обчислення координат у базисі та обчисленні проекції. Це поняття є одним з перших кроків до вивчення SVD¹ що застосовується в кількох галузях, наприклад: зменшення розмірів зображень.

У цьому розділі ми продовжуємо вивчення основ, щоб зрештою зрозуміти SVD. Ми вивчимо редукцію ендоморфізмів, щоб бути точнішим діагоналізація та тригоналізація. Для початку: невелике завдання:

Вправа. Обчислити

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{15 \text{ разів}}$$

Це не здається дуже легким, чи не так? Наприкінці цього розділу ми знайдемо спосіб спростити обчислення і зрештою розв'яжемо цю вправу.

З лінійної алгебри відомо, що матрицю відображення можна представити в різних базисах, тобто нехай $\{e_i\}$ — базис E і f — відображення. Тоді це відображення в базисі $\{e_i\}$ представлено:

$$A = M(f)_{e_i} = \|f(e_1), \dots, f(e_n)\|$$

Нехай $\{e'_i\}$ — інший базис E , тоді ми можемо представити відображення f і в цьому базисі, позначимо: $P = P_{e_i \rightarrow e'_i}$ — матриця переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{e'_i\}$

$$A' = M(f)_{e'_i} = P^{-1}AP = \|f(e'_1), \dots, f(e'_n)\|_{e'_i}$$

¹Розклад за сингулярними значеннями

Визначення 3.2. Матриця A є **діагоналізованою** якщо існує подібна матриця^a A' діагональна:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

^a A подібна до A' якщо існує матриця переходу P така що $A' = P^{-1}AP$

Визначення 3.3. Матриця A є **тригоналізованою** якщо існує подібна матриця A' трикутна (верхня/нижня)

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Отже, проблеми цього розділу, які ми будемо вирішувати, такі:

1. Визначити, чи є ендоморфізм f діагоналізованим/тригоналізованим, тобто чи існує така матриця A' .
2. Визначити матрицю переходу P та матрицю A' .

У всьому розділі припускається, що векторний простір E має скінченну розмірність.

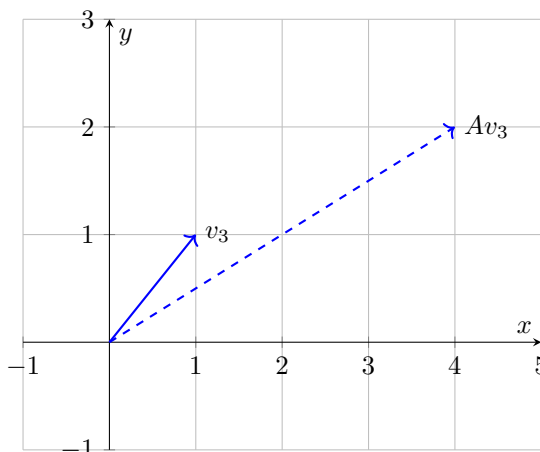
3.2 Власні вектори

Почнемо з уточнення поняття лінійного відображення та його матриці. Для цього візьмемо матрицю з вправи початку розділу:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

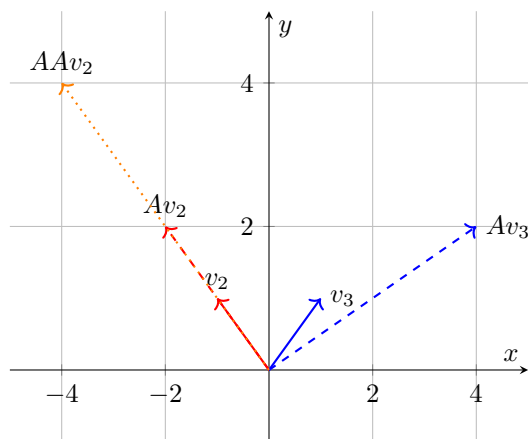
Ця матриця перетворює векторний простір, який ми їй надаємо, або, спрощуючи, вона перетворює кожен вектор векторного простору. Візьмемо вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, застосувавши A , отримаємо:

$$Av_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Зауважимо, що вектор Av_3 більше не розташований на одній лінії з вектором v_3 , що логічно, оскільки якби вектори залишалися на одній лінії після перетворення, це не мало б сенсу. Однак іноді бувають випадки, коли вектор, застосований до матриці, залишається на одній лінії, наприклад, вектор $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, причому

$$Av_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_2$$



І це не тільки випадок вектора $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, взявши будь-який вектор, породжений $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ми отримаємо $Av = 2v$. Такі вектори v і скаляри (тут: 2) називаються власними векторами та власними значеннями відповідно. Тоді маємо формальне визначення:

Визначення 3.4. Нехай f — ендоморфізм у E , а вектор $v \in E$ називається **власним вектором** для f , якщо:

1. $v \neq 0$
2. Існує дійсне число λ таке, що $f(v) = \lambda v$

Скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$ називається **власним значенням** що відповідає v .

Інтуїція. Власні вектори — це вектори, які під дією f не змінюють напрямків, лише довжину (і навіть не завжди). Це спрощує обчислення таких векторів. Чи можете ви обчислити $A^3 v_3$? Не дуже легко, а вектор $A^3 v_2$?

$$Av_2 = 2v_2 \Rightarrow A^2 v_2 = 2 \cdot 2v_2 = 4v_2 \Rightarrow A^3 v_2 = 2 \cdot 4v_2 = 8v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Це круто, чи не так?

Натомість, це не єдина корисність власних векторів, і ми повернемося сюди, щоб обговорити це, але спочатку, як знайти такі вектори?

3.3 Пошук власних значень

Ми шукаємо вектори, які під дією ендоморфізму f масштабуються з коефіцієнтом $\lambda \in \mathbb{R}$, тоді ми повинні розв'язати це рівняння:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda v \\ \Leftrightarrow Av &= \lambda v \quad \text{у матричній нотації} \\ \Leftrightarrow Av &= \lambda(Iv) \quad \text{де } I \text{ є одиничною матрицею} \\ \Leftrightarrow Av - \lambda Iv &= 0 \\ \Leftrightarrow (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

Отже, ми повинні вивчити застосування $(A - \lambda I)$ і пов'язати його з поняттям визначників. Нагадаємо: якщо визначник матриці не дорівнює нулю, ця матриця (тобто ендоморфізм) є ін'єктивною. У нашому випадку, якщо $\det(A - \lambda I)$ дорівнював нулю, єдиний вектор v , який давав би $(A - \lambda I)v = 0$, був би нульовим вектором $v = 0$ оскільки $(A - \lambda I)$ є лінійним і (як ми припустили) ін'єктивним.

Навпаки, згідно з визначенням, власні вектори не є нульовими, тоді ін'єктивний випадок не підходить, тому для того, щоб мати власні вектори, застосування $(A - \lambda I)$ не повинно бути ін'єктивним, що

рівносильно тому, щоб сказати, що $\det(A - \lambda I) = 0$. Отже, ми повинні обчислити наступний визначник:

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

Розкладаючи цей визначник ми отримуємо рівняння типу:

$$(-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

корінням якого є власні значення f (нагадаємо: власне значення — це фактор λ). Поки що не надто зосереджуйтесь на цьому рівнянні, ми до нього ще повернемося.

Твердження 3.5. Нехай f — ендоморфізм у скінченновимірному векторному просторі E розмірності n , а A — матриця, що представляє f у базисі E . Власні значення f є коренями полінома:

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Цей поліном називається **характеристичним поліномом** f .

Визначення 3.6. Множина власних значень f називається **спектром** f і позначається $\text{Sp}_K(f)$ або $\text{Sp}_K(A)$, якщо A — матриця f .

Для уточнення:

Приклад 3.7. Нехай f ендоморфізм в \mathbb{R}^2 матриця представлення якого в канонічному базисі є:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Обчислимо його власні значення:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v = \lambda v \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v - \lambda I v = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I \right) v = 0 \\ \Rightarrow & \det \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I \right) = 0 \\ \Rightarrow & \det \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \\ \Rightarrow & \det \left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \\ & = (3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Добре видно, що розв'язки: $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_2 = 2$

Ми можемо знайти власні значення, однак, ми шукали вектори власні. І ось ми маємо:

3.4 Пошук власних векторів

Припустимо, для $q \in \mathbb{N}^*$ ми вже знайшли q власні значення матриці $\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$, щоб знайти власні вектори, нам залишається знайти базис:

$$\ker(A - \lambda_i I) \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}$$

що еквівалентно:

$$(A - \lambda_i I) v = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}$$

Приклад 3.8. Ще раз матриця

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

в канонічному базисі \mathbb{R}^2 . Ми вже знайшли її власні вектори: $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_2 = 2$. Тоді, шукаємо вектори:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda_1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3 & 1 \\ 0 & 2 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Отже $\ker(A - 3I) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Ось, наш перший власний вектор: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для другого:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda_2 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2 & 1 \\ 0 & 2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \Rightarrow x = -y \end{cases}$$

Отже $\ker(A - 2I) = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ і ось другий власний вектор: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (це був наш вектор v_2 на початку розділу).

Нарешті, корисна властивість:

Твердження 3.9. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ з його власними векторами: $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, тоді:

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

3.5 Діагоналізовані ендоморфізми

Повернімося до користі власних векторів. Нехай f ендоморфізм простору E основою якого є $\{e_1, \dots, e_n\}$ та $\text{Mat}_{e_i}(f) = A$ і матриця f у цьому базисі. Розглянемо наступний приклад:

Приклад 3.10. Маємо: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ у канонічному базисі $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ та $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Нагадаємо, що ми знайшли два власні вектори:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Зауважимо, що ці два вектори є лінійно незалежними і, отже, утворюють базис для \mathbb{R}^2 . Спробуємо змінити базис для A , маючи два способи:

1. Можна обчислити координати $f(v_1)$ та $f(v_2)$ у базисі $\{v_1, v_2\}$, маємо:

$$f(v_1) = 3v_1 = 3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$$

$$f(v_2) = 2v_2 = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$$

$$\text{І тоді } \text{Mat}_{v_i}(f) = \|f(v_1), f(v_2)\|_{v_i} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Можна обчислити матрицю $P = P_{e_i \rightarrow v_i}$ переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{v_i\}$ та вивести з неї матрицю f у новому базисі. Маємо:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{e_i} \end{cases}$$

отже $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ та $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ви можете перевірити обчислення). І отже:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{AP} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

І ось, магія, ми знайшли діагональну матрицю.

Потім, узагальнимо те, що ми зробили.

Визначення 3.11. Нехай $\lambda \in K$, позначимо:

$$E_\lambda := \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$$

E_λ є векторним простором E , який називається **власним простором**, що відповідає λ .

Примітка 3.12. 1. Якщо λ не є власним значенням f , тому $E_\lambda = \{0\}$

2. Якщо λ є власним значенням, тоді:

$$E_\lambda = \{ \text{власні вектори, асоційовані з } \lambda \} \cup \{0\} \text{ та } \dim E_\lambda \geq 1$$

Твердження 3.13. Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — попарно різні скаляри. Тоді власні простори $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ знаходяться в прямій сумі. Інакше кажучи, якщо $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ є базисами $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$, то сім'я $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$ є лінійно незалежною (але не обов'язково породжуючою E).

Доведення. Нехай $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ — власні підпростори, асоційовані з власними значеннями $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ендоморфізму f векторного простору E . Ми повинні показати, що ці підпростори знаходяться в прямій сумі, тобто, якщо вектор належить їхньому перетину, то він дорівнює нулю.

Візьмемо елемент v , що належить їхній сумі, тобто, він може бути записаний у формі:

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_p$$

де $v_i \in E_{\lambda_i}$ для всіх i .

Оскільки кожен v_i є власним вектором для f , асоційованим з λ_i , маємо:

$$f(v_i) = \lambda_i v_i.$$

Застосуємо f до суми:

$$f(v) = f(v_1 + v_2 + \dots + v_p) = f(v_1) + f(v_2) + \dots + f(v_p).$$

Використовуючи лінійність f , це дає:

$$f(v) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p.$$

Проте, v також є комбінацією цих самих векторів:

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_p.$$

Отже, перегрупувавши:

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p) - (v_1 + v_2 + \dots + v_p) = 0.$$

Що дає:

$$(\lambda_1 - 1)v_1 + (\lambda_2 - 1)v_2 + \dots + (\lambda_p - 1)v_p = 0.$$

Факторизуємо кожен член:

$$(\lambda_1 - \lambda)v_1 + (\lambda_2 - \lambda)v_2 + \dots + (\lambda_p - \lambda)v_p = 0.$$

Проте, λ_i вважаються попарно різними. З цього випливає, що коефіцієнти є різними, і що сума дорівнює нулю лише тоді, коли всі v_i дорівнюють нулю (оскільки власні підпростори, як правило, знаходяться в прямій сумі).

Таким чином, $v = 0$, що доводить, що власні підпростори знаходяться в прямій сумі. \square

Отже, власні простори завжди знаходяться в прямій сумі, але не обов'язково дорівнюють E :

$$E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} \subsetneq E$$

що маємо, якщо:

$$\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} < \dim E$$

Теорема 3.14. Нехай f ендоморфізм в E і $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ його власні значення, тоді наступні властивості є еквівалентними:

1. f діагоналізований
2. E є прямою сумою своїх власних просторів: $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$
3. $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$

Наслідок 3.15. Якщо f є ендоморфізмом E з $\dim E = n$ і f має n власних значень, попарно відмінних, то f є діагоналізованим.

Але оскільки власні значення є коренями характеристичного многочлена (див. проп. 3.5) на:

Твердження 3.16. Нехай f ендоморфізм у E та λ власне значення порядку α (тобто α є коренем $P_f(\lambda)$ порядку α , тобто $P_f(\lambda) = (X - \lambda)^\alpha Q(X)$). Тоді:

$$\dim E_\lambda \leq \alpha$$

Теорема 3.17. Нехай f — ендоморфізм у E з $\dim E = n$. Тоді f є діагоналізованим тоді й лише тоді, якщо:

1. $P_f(X)$ є розщеплюваним, тобто:

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

(λ_i є коренями, отже, власними значеннями) і $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$. Тоді, якщо сума кратностей коренів дорівнює розмірності векторного простору.

2. Розмірності власних просторів є максимальними, тобто $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

$$\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$$

Інтуїція. Не завжди легко зрозуміти ідею через характеристичні поліноми, тому інший спосіб побачити це:

1. Знаходимо власні значення: $\lambda_1, \dots, \lambda_p$
2. Потім знаходимо власні підпростори: $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i I)$
3. Сумуємо розмірності: $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} =: d$.
 - Якщо $d = \dim E$ тобто якщо сума розмірностей дорівнює розмірності простору E , власні підпростори породжують E і отже f діагоналізовний (бо його матриця може бути записана в базисі цих власних векторів).
 - В іншому випадку кількості лінійних власних векторів недостатньо, щоб породити E .

3.6 Застосунки

3.6.1 Обчислення потужності

Отже, ми повернулися туди, звідки почали, нагадую вам вправу з початку розділу:

Вправа. Обчислити

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{15 \text{ разів}}$$

Нагадаємо, що власні вектори A це:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ та } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

які є лінійно незалежними та породжують \mathbb{R}^2 , отже, утворюють базис \mathbb{R}^2 , тоді ми можемо записати в цьому новому базисі і, як ми вже знайшли:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

в базисі (v_1, v_2) з матрицею переходу:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ та } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Крім того, множачи A' на A' , маємо:

$$A' \cdot A' = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = A'^2$$

звідки

$$A'^n = P^{-1}A^nP \Rightarrow PA'^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n$$

Це дає нам можливість спочатку обчислити степінь A' :

$$A'^{15} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

Ось, набагато простіше, ніж обчислювати A^{15} безпосередньо, тоді нам залишається повернутися до канонічного базису:

$$P \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{15} & 3^{15} - 2^{15} \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

Що дуже корисно в діагональних матрицях, так це те, що степінь такої матриці дорівнює тій самій матриці з діагональними елементами, піднесеними до степеня, тобто:

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A'^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

Узагальнимо: Якщо $A \in \mathcal{M}_n(K)$ діагоналізована (тобто існують P та A' такі, що $A' = P^{-1}AP$), то:

$$A^n = P(A'^n)P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

3.6.2 Розв'язання системи рекурентних послідовностей

Нехай $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ і $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дві послідовності такі що:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad (3.1)$$

З $u_0 = 2$ і $v_0 = 1$. Покладемо $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, тоді система 3.1 записується як:

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{з} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

за рекурентною формулою отримуємо:

$$X_n = A^n X_0 \quad \text{з} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отже, ми зводимося до обчислення степеня матриці: A^n , що ми бачили в розділі 3.6.1. Ви можете перевірити, що існує $P \in GL_2(\mathbb{R})$ така що

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{з} \quad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

і тоді

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n + 2^n - 3^n \\ -4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n - 2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

тобто:

$$\begin{cases} u_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n \\ v_n = -5 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n \end{cases}$$

3.6.3 Розв'язання диференціальних рівнянь

Нехай потрібно розв'язати диференціальну систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

з $a_{ij} \in \mathbb{R}$ та $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференційовні.
У матричній формі система записується:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad \text{де } A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Припустимо A діагоналізовна. Тоді існує A' діагональна матриця і P оборотна матриця такі, що:

$$A' = P^{-1}AP.$$

Якщо розглядати A як матрицю ендоморфізму в канонічному базисі, A' є матрицею f в базисі власних векторів $\{v_i\}$.

Аналогічно X є матрицею вектора \vec{x} у канонічному базисі і $X' = M(\vec{x})_{v_i}$, пов'язана з X за допомогою

$$X' = P^{-1}X$$

Примітка. Увага! У цьому розділі X' не описує похідну, а вектор, позначений X' !

Диференціюючи це співвідношення:

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1} \frac{dX}{dt}$$

(оскільки A має постійні коефіцієнти, P також матиме постійні коефіцієнти). Отже:

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX = (P^{-1}AP)X' = A'X'$$

Система 3.2 є отже еквівалентною системі

$$\frac{dX'}{dt} = A'X'$$

Ця система легко інтегрується, оскільки A' є діагональною.

Таким чином, можна розв'язати систему $\frac{dX}{dt} = AX$ наступним чином :

- Діагоналізуємо A . Нехай $A' = P^{-1}AP$ — діагональна матриця, подібна до A ;
- інтегруємо систему $\frac{dX'}{dt} = A'X'$;
- повертаємося до X через $X = PX'$.

Приклад

Нехай система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$$

$$\text{Маємо } A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ і } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Система $\frac{dX'}{dt} = A'X'$ записується:

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = 2x' \\ \frac{dy'}{dt} = 3y' \end{cases}$$

що одразу дає

$$\begin{cases} x' = C_1 e^{2t} \\ y' = C_2 e^{3t} \end{cases}$$

і отже, повертаючись до X через $X = PX'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ -C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

тобто:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ y = -C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$$

3.7 Тригоналізація

Матриця $A \in \mathcal{M}_n(K)$ називається верхньою трикутною, якщо вона має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

відповідно, нижньою трикутною:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Примітка 3.18. Будь-яка верхня трикутна матриця A подібна до нижньої трикутної матриці.

Доведення. Нехай A верхня трикутна матриця та f ендоморфізм K^n , який у базисі $\{e_1, \dots, e_n\}$ представлений матрицею A , тоді:

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{1,1}e_1 \\ f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 \\ \vdots \\ f(e_n) = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \dots + a_{n,n}e_n \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Розглянемо базис

$$\varepsilon_1 = e_n, \quad \varepsilon_2 = e_{n-1}, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = e_1$$

тоді маємо:

$$\begin{cases} f(\underbrace{\varepsilon_1}_{e_n}) = a_{1,n}\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} + a_{2,n}\underbrace{\varepsilon_{n-1}}_{e_2} + \dots + a_{n,n}\underbrace{\varepsilon_1}_{e_n} \\ f(\underbrace{\varepsilon_2}_{e_{n-1}}) = a_{1,n-1}\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} + \dots + a_{n-1,n-1}\underbrace{\varepsilon_2}_{e_{n-1}} \\ \vdots \\ f(\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1}) = a_{1,1}\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} \end{cases}$$

отже

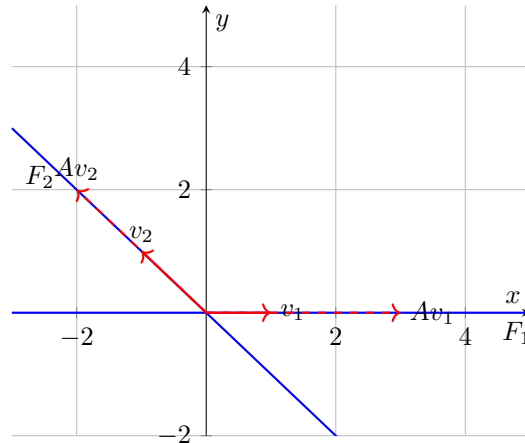
$$A' = M(f)_{\varepsilon_i} = \begin{bmatrix} a_{n,n} & \dots & 0 \\ a_{n-1,n} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1,n} & \dots & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

□

3.7.1 Геометрична інтуїція діагоналізації

Згадаймо діагоналізацію. Матриця A що представляє ендоморфізм f в $K^n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ є діагоналізованою, якщо існує достатньо векторних підпросторів $\{F_1, \dots, F_n\}$ розмірності 1 кожен, таких що $K^n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ і $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(F_i) \subset F_i$ (вектор після застосування f залишається у просторі). Що можна побачити геометрично:

Перетворення власних векторів



Ми вже знаємо, що такий ендоморфізм дуже корисний, але нечасто трапляється, що його можна діагоналізувати, тому було б корисно мати щось більш загальне, але все ще схоже на діагоналізацію.

3.7.2 Геометрична інтуїція тригоналізації

Геометрія тригоналізованого ендоморфізму схожа, але все ж таки відрізняється. Нехай A — матриця, що представляє ендоморфізм f у K^n . Він є тригоналізованим, якщо існує базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ простору K^n , позначимо $F_1 = \text{Vect}(v_1)$, $F_2 = \text{Vect}(v_1, v_2)$, \dots , $F_n = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ такі що

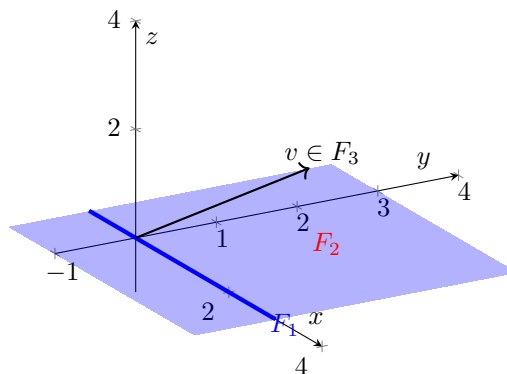
$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n$$

і

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(F_i) \subset F_i$$

Бачите схожість? Ендоморфізм є стабільним щодо підпростору! Вектор, застосований до f , ніколи не залишає свій підпростір. Візьмемо для прикладу наступну матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{Mat}(f)_{e_i}$$



Оскільки ми маємо інтуїцію щодо тригоналізованого ендоморфізму, повернімося до чистої математики.

3.7.3 Теорія

Теорема 3.19. Ендоморфізм є тригоналізованим в K тоді й тільки тоді, коли його характеристичний многочлен розкладається на лінійні множники в K .

Це означає, що характеристичний многочлен має рівно n коренів, де $n = \dim(E)$, і записується так:

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

де $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$

Доведення. -

(\Rightarrow) Припустимо, ендоморфізм f тригонізується, і нехай буде базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ такий що

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & * \\ 0 & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$P_f(X) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - X & & & * \\ 0 & a_{2,2} - X & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} - X \end{pmatrix} = (a_{1,1} - X) \cdots (a_{n,n} - X)$$

Отже, $P_f(X)$ добре розщеплюється (можна помітити, що його корені — це власні значення f).

(\Leftarrow) Припустимо, $P_f(X)$ розщеплюється, і доведемо за індукцією, що f тригонізується.

Для $n = 1$ тривіально.

Припустимо, що результат вірний для порядку $n - 1$. Але $P_f(X)$ розщеплюється, він має принаймні один корінь $\lambda_1 \in K$ і отже власний вектор $\varepsilon_1 \in E_{\lambda_1}$. Доповнимо $\{\varepsilon_1\}$ до базису $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, отже маємо:

$$A = M(f)_{\varepsilon_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \text{де } B \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$$

Нехай $F = \text{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ і $g : F \rightarrow F$ єдиний ендоморфізм F такий що $M(g)_{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n} = B$, маємо:

$$P_f(X) = \det(A - XI_n) = (\lambda_1 - X) \det(B - XI_{n-1}) = (\lambda_1 - X) P_g(X)$$

Але $P_f(X)$ розщеплюється, $P_g(X)$ також, і згідно з індуктивним припущенням B тригонізується, отже існує базис $\{v_2, \dots, v_n\}$ в якому $M(g)_{v_2, \dots, v_n}$ є трикутною, і отже матриця f у базисі $\{\varepsilon_1, v_2, \dots, v_n\}$ є трикутною, отже f тригонізується.

□

Наслідок 3.20. Будь-яка матриця $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ подібна до трикутної матриці з $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Інтуїція. Згідно з курсом абстрактної алгебри, кожен многочлен у \mathbb{C} є розкладним.

Примітка 3.21. -

1. Якщо A є тригоналізовна і A' трикутна, подібна до A , тому A' має власні значення на діагоналях.
2. Будь-яка матриця $A \in \mathcal{M}_n(K)$ є тригоналізовна над замиканням K' з K . (напр.: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ є тригоналізовна над \mathbb{C}).

Наслідок 3.22. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(K)$ і $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ її власні значення, тому

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A) &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n \\ \det(A) &= \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n\end{aligned}$$

Доведення. Маємо $A' \in \mathcal{M}_n(K')$ трикутну, подібну до A (нагадування: замикання K' над K), отже власні значення знаходяться на діагоналях A' . Однак подібні матриці мають ті ж самі сліди та визначники, тому $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A') = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ та $\det(A) = \det(A') = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$. \square

Ми покажемо процес тригоналізації на наступному прикладі:

Приклад 3.23. Нехай матриця

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Маємо характеристичний многочлен $P_A(X) = -(X-1)^2(X+2)$, який розщеплюється в \mathbb{R} , тому A є тригоналізованою (згідно з теоремою 3.19), отже, якщо розглядати A як ендоморфізм у канонічному базисі, ми знаємо, що існує базис $\{v_i\}$ з \mathbb{R}^3 такий що:

$$M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

я нагадую, що це означає:

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = av_1 + v_2 \\ f(v_3) = bv_1 + cv_2 - 2v_3 \end{cases} \quad (3.3)$$

Почнемо з пошуку v_1 . Ми знаємо, що v_1 є власним вектором, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 1$, тобто $(f - \mathrm{Id})v_1 = 0$, тому обчислимо $(A - I)v_1 = 0$ (іншими словами, ми шукаємо v_1 , який породжує $\ker(A - I)$):

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 2z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Тоді ми можемо взяти $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ (іншими словами $\ker(A - I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$).

Далі, шукаємо v_2 , згідно з 3.3,

$$\begin{aligned}f(v_2) &= av_1 + v_2 \\ \Rightarrow f(v_2) - v_2 &= av_1 \\ \Rightarrow (f - I)v_2 &= av_1 \\ \Rightarrow (A - I)v_2 &= av_1\end{aligned}$$

Отже, маємо:

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 2z = 2a \\ 5x + y + 2z = -5a \end{cases}$$

Тоді, взявши $a = 1$, маємо

$$\begin{cases} -5x - 2z = 2 \\ 5x + y + 2z = -5 \end{cases}$$

тому $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (просто розв'язання системи).

Для v_3 маємо два варіанти:

1. або діяти так само з розв'язанням системи
2. або зауважити, що існує власний вектор A , що відповідає власному значенню -2 , тобто $\exists v_3 \in \mathbb{R}^3$ такий що $f(v_3) = -2v_3$, тоді ми можемо взяти цей вектор v_3 і, отже, покласти $b = c = 0$.

Примітка 3.24. Чому ми можемо так робити? Тому що для кожного власного значення f завжди існує власний простір кратності принаймні 1, отже, і для власного значення -2 теж.

Тоді шукаємо v_3 :

$$(A + 2I)v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

тому ми можемо взяти $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Отже, матриця A подібна до

$$A' = M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

з матрицею переходу:

$$P = \|v_1, v_2, v_3\| = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3.8 Анулюючі многочлени

У попередніх розділах ми дізналися, що для того, щоб зрозуміти, чи можна діагоналізувати матрицю, потрібно вивчити власні простори, що не завжди дуже легко і не є найшвидшим способом. Отже, у цьому розділі ми розглянемо один з інших методів вивчення діагоналізованості, одним з таких методів є вивчення анулюючих поліномів.

Примітка 3.25. У цьому розділі я не пишу більшість доказів, а скоріше інтуїцію, чому це правда і чому це працює.

Визначення 3.26. Нехай $f \in \mathbb{K}^n$ ендоморфізм. Поліном $Q(X) \in K[X]$ є **анулюючим поліномом** для f якщо $Q(f) = 0$.

Приклад 3.27. Нехай f проєкція, тоді, ми знаємо, що $f^2 = f$, звідки $f^2 - f = 0$, тому $Q(X) = X^2 - X = X(X - 1)$ є анулюючим поліномом для f .

Важливо, що анулюючі поліноми тісно пов'язані з власними значеннями:

Твердження 3.28. Нехай $Q(X)$ є анулюючим многочленом для f , тоді власні значення f знаходяться серед коренів Q , тобто:

$$\text{Sp}(f) \subset \text{Rac}(Q)$$

Доведення. Нехай $Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ — анулюючий многочлен для f і λ — власне значення для f . Отже, $\exists v \neq 0 \in E$ така що $f(v) = \lambda v$, більше того:

$$Q(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_0 \text{Id} = 0$$

Але $f(v) = \lambda v$, тому $f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda^2 v$, звідки $f^k(v) = \lambda^k v \ \forall k \in \mathbb{N}$, тоді:

$$Q(f(v)) = 0 = (a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_0 \text{Id})v = (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \text{Id})v = 0$$

Але $v \neq 0$, тому $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \text{Id} = 0$, звідки λ є коренем Q . \square

Примітка. Однак, рівність не є загалом вірною, наприклад $\text{Id}^2 = \text{Id}$, отже $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ обнуляє Id з коренями 0 та 1, але 0 не є власним значенням для Id .

Теорема 3.29. Кайлі-Гамільтона. Нехай $f \in K^n$ ендоморфізм та $P_f(X)$ його характеристичний поліном, тоді

$$P_f(f) = 0$$

Іншими словами, характеристичний поліном ендоморфізму є його анулюючим поліномом.

Інтуїція. Характеристичний поліном описує нам структуру f , тобто які операції потрібно виконати, щоб втратити принаймні один вимір, якщо ми отримуємо множники вигляду $(X - \lambda)^n$, отже, потрібно застосувати $f(v) - \lambda v = v_r$, а потім до результату v_r знову, тобто $f(v_r) - \lambda v_r$, і повторюємо n разів (це відбувається у випадках тригоналізованих матриць)

Теорема залишається вірною навіть у випадках, коли ендоморфізм не є тригоналізовним, оскільки ми можемо вибрати замикання K' поля K , в якому знаходиться наш ендоморфізм, і він стає тригоналізовним (наприклад, \mathbb{C} для \mathbb{R}).

Крім того, характеристичний поліном дає нам $\ker(P_f(X)) = E$, тобто вектори, які стають нульовими під дією $P_f(f)$, цікавий факт полягає в тому, що всі вектори з E належать до цього ядра, і тому $\forall v \in E$, $p_f(f)v = 0$, звідки $p_f(f) = 0$.

Визначення 3.30. Нехай Q — розкладений поліном:

$$Q(X) = (X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_r)^{\alpha_r}$$

Поліном

$$Q_1 = (X - a_1) \dots (X - a_r)$$

називається **радикалом** Q (тобто розкладений поліном (той самий поліном, але без степенів біля дужок).

Більше того, $Q_1 \mid Q$, тобто радикал полінома ділить сам поліном.

Твердження 3.31. Нехай f є ендоморфізмом і

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

є його характеристичним многочленом. Тоді, якщо f є діагоналізовним, радикал Q_1 анулює f також, тобто

$$Q_1(f) = (f - \lambda_1) \dots (f - \lambda_r) = 0$$

Інтуїція. Я даю інтуїцію доведення. Якщо f є діагоналізованою з характеристичним поліномом

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

з $r := \alpha_i > 1$ це не означає, що потрібно застосовувати $(f - \lambda_i \text{Id})$ r разів для зменшення розмірності як

у випадку тригоналізованих матриць, але це означає, що E_{λ_i} власний простір власного значення λ_i має розмірність $\alpha_i = r$ і тому $\forall v \in E_{\lambda_i}, f(v) = \lambda_i v$.

Оскільки $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$, якщо $v \in E$, тоді $\exists i \in \{1, \dots, p\}$ така що $v \in E_{\lambda_i}$ і тому $f(v) - \lambda_i v = 0$ тобто $(f - \lambda_i \text{Id})(v) = 0$. Звідси радикал P_f анулює f .

3.9 Лема про ядра

Лема 3.32. про ядра Нехай $f \in K^n$ ендоморфізм і

$$Q(X) = Q_1(X) \cdots Q_p(X)$$

многочлен, розкладений у добуток попарно взаємно простих многочленів. Якщо $Q(f) = 0$, то:

$$E = \text{Ker } Q_1(f) \oplus \dots \oplus \text{Ker } Q_p(f)$$

Інтуїція. Оскільки $Q(f) = 0$, тому $\forall v \in E, Q(f)(v) = 0$ отже $\text{Ker}(Q(f)) = E$. $\exists v_1, \dots, v_p$ такі що $v = v_1 + \dots + v_p$. Але усі поліноми попарно взаємно прості, тоді лише один з них анулює v_i тому $v_i \in \text{Ker } Q_i(f)$ і це залишається правдою для всіх v_1, \dots, v_p . І оскільки поліноми взаємно прості, тож якщо $k \neq j$ і $Q_k(v_i) = 0$, тоді $Q_j(v_i) \neq 0$ бо Q_j і Q_k відрізняються. Тоді, $\forall i, j \text{ Ker } Q_i \cap \text{Ker } Q_j = \{0\}$.

Примітка 3.33. Повернімося до прикладу f , яка є проєкцією, отже $f^2 - f = 0$ і $Q(X) = X^2 - X = X(X - 1)$ анулює f . Проте X і $X - 1$ є взаємно простими, тоді

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})$$

Щоб бути більш загальною, нехай f є ендоморфізмом, і $Q(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_p)$ така що $Q(f) = 0$, маємо:

$$E = \underbrace{\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})}_{E_{\lambda_1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id})}_{E_{\lambda_p}}$$

Звісно, $\lambda_i \neq \lambda_j$. І тоді f є діагоналізованим, оскільки прямою сумою цих власних підпросторів.

Наслідок 3.34. Ендоморфізм f є діагоналізованим тоді і тільки тоді, якщо існує анулюючий поліном Q для f , який є розкладним і має лише прості корені ^a

^aрозкладний: $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} - X$ в степені 1! прості корені: якщо $\alpha_i = 1$ також, тобто множники $(X - \lambda)$ в степені 1!

3.10 Пошук анулюючих многочленів. Мінімальний многочлен

Визначення 3.35. Називається **мінімальний многочлен** для f , позначений $m_f(X)$ - нормалізований многочлен ^a який анулює f найменшого степеня.

^aтобто з коефіцієнтом 1 при члені найвищого степеня, тобто: $1 * X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$

Твердження 3.36. Анулюючі многочлени f мають вигляд:

$$Q(X) = A(X)m_f(X) \quad \text{де} \quad A(X) \in K[X]$$

тобто $m_f(X)$ ділить $Q(X)$.

Твердження 3.37. Корені мінімального полінома $m_f(X)$ є точно коренями характеристичного полінома $P_f(X)$, тобто власні значення.

Доведення. Ми знаємо, що $P_f(X) = A(X)m_f(X)$ тому якщо λ є коренем $m_f(X)$, тоді вона є коренем $P_f(X)$ також. Навпаки, якщо λ є коренем $P_f(X)$ тоді вона є власним значенням, а $m_f(X)$ анулює f , отже λ також є коренем $m_f(X)$. \square

Теорема 3.38. Ендоморфізм f є діагоналізовним тоді і тільки тоді, коли його мінімальний многочлен є розкладним і всі його корені прості.

Приклад 3.39. 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $P_A(X) = -(X-1)(X+2)^2$, отже, маємо дві можливості:

- $m_A(X) = (X-1)(X+2)$ - отже A діагоналізована
- $m_A(X) = (X-1)(X+2)^2$ - отже A не діагоналізована

Обчислимо:

$$(A - I)(A + 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, $m_f(X) = (X-1)(X+2)$ і тому A є діагоналізованою.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Маємо: $P_A(X) = -(X-1)(X-2)^2$, отже:

$$m_A(X) = \begin{cases} (X-1)(X-2) & \text{тобто } A \text{ діагоналізована} \\ (X-1)(X-2)^2 & \text{тобто } A \text{ не діагоналізована} \end{cases}$$

Обчислимо:

$$(A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси $m_A(X) \neq (X-1)(X-2)$ і тому A не є діагоналізованою.

Appendices

ДОДАТОК 1

НАГАДУВАННЯ ПРО КОНЦЕПЦІЇ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1 Матриці

1 Множення матриць

Визначення 1.1. Нехай $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ та $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ такі що $A = (a_{j,i})$ та $B = (b_{i,k})$, тоді:

$$AB = C = (c_{j,k} = \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,k})$$

2 Слід

Визначення 1.2. Слід $n \times n$ квадратної матриці A , позначений $\text{tr}(A)$, є сумою діагональних елементів

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

де a_{ii} є діагональними елементами матриці A .

Властивість. сліду.

- Лінійність:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(cA) = c\text{tr}(A), \quad c \in \mathbb{R} \text{ (або } \mathbb{C})$$

- Транспонування:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$$

- Множення матриць:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad (\text{якщо } A \text{ та } B \text{ мають розмір } n \times n)$$

Однак, слід не є дистрибутивним щодо множення:

$$\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(BC)$$

- Власні значення:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

де λ_i є власними значеннями A . Це робить слід важливим інструментом у спектральному аналізі.

- Слід Одиничної Матриці

$$\text{tr}(I_n) = n$$

оскільки всі діагональні елементи дорівнюють 1.

Приклад 1.3. Для

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

слід дорівнює:

$$\text{tr}(A) = 3 + 5 + 9 = 17$$

Приклад 1.4. Якщо

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

тоді

$$\text{tr}(B + C) = \text{tr} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = 6 + 8 = 14$$

що відповідає

$$\text{tr}(B) + \text{tr}(C) = (2 + 3) + (4 + 5) = 14$$

таким чином підтверджуючи лінійність.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Johannes Anschütz. *Algèbre linéaire 2 (OLMA252)*. 2024-2025.
- [2] Grifone Joseph. *Algèbre linéaire*. fre. 4e édition. Toulouse: Cépaduès Éditions , DL 2011, 2011. ISBN: 978-2-85428-962-6.
- [3] Yehor Korotenko. *sci-trans-git*. Бep. 0.2.0-alpha. 2025. DOI: [10.5281/zenodo.15775111](https://doi.org/10.5281/zenodo.15775111). URL: <https://github.com/DobbiKov/sci-trans-git>.