CheatSheet pour l'Algèbre Linéaire

Yehor KOROTENKO

March 11, 2025

1 Éspaces euclidiens

Proposition 1.1. *Endomorphisme $f : E \to E$ un drapeau invariant (i.e $f(E_i) \subset E_i$) $\iff$ $Mat(f)$ triangulaire supérieure*

1.1 Produits scalairs et normes

Définition 1.1. *Une forme bilinéaire sur E (**produit scalair**) un espace euclidien est une application:*

$$\begin{aligned} f : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) \end{aligned}$$

qui vérifie ces propriétés:

1. ***Bilinéarité**:*
   (a) $f(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$ *avec* $u, v, w \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$
   (b) $f(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(v, w)$ *avec* $u, v, w \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$
2. ***Symétrie**:* $B(u, v) = B(v, u) \qquad \forall u, v \in E$
3. ***Définie positive**:* $\forall u \in E, B(u, u) \geq 0$
4. ***Définie**:* $B(u, u) = 0 \iff u = 0$

Remarque. *Le produit vectoriel est noté:* $\langle ., . \rangle$

Définition 1.2. *La norme* $\forall X \in E$*:*

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

Proposition 1.2. *Les formules utiles: (pour $X, Y \in E$)*

1. $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$
2. $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$
3. $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2\right)$
4. $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2\right)$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.3. $u, v \in E$ *sont **orthogonaux** si* $\langle u, v \rangle = 0$ *et on les notes* $u \perp v$

Définition 1.4. ***Orthogonale de** A:*

$$A^{\perp} = \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

*aussi connu comme **complement orthogonale**.*

Proposition 1.3. *Si E est un espace euclidien et $A \subset E$ son sous-espace vectoriel, alors:*

$$E = A \oplus A^{\perp}$$

i.e tout vecteur $x \in E$ peut s'écrit comme $x = e + e'$ où $e \in A$ et $e' \in A'$.

Proposition 1.4. *Si f est une projection orthogonale sur $F \subset E$, alors:*

$$f(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Définition 1.5. *La* ***projection orthogonale*** *sur un sous-espace $A \subset E$ est une application:*

$$\begin{aligned} p_F : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto p_F(x = e + e') = e \end{aligned}$$

Proposition 1.5. ***La distance*** *d'un vecteur x à un sous-espace F est:*

$$\|x - p_F(x)\|$$

Définition 1.6. *Une* ***isométrie*** *de E est un endomorphisme tel que:*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

de plus,

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$$