

# CheatSheet pour l'Algèbre Linéaire

Yehor KOROTENKO

April 7, 2025

## 1 Espaces euclidiens

**Proposition 1.1.** Endomorphisme  $f : E \rightarrow E$  un drapeau invariant (i.e  $f(E_i) \subset E_i$ )  $\iff$   $\text{Mat}(f)$  triangulaire supérieure

### 1.1 Produits scalaires et normes

**Définition 1.1.** Une forme bilinéaire sur  $E$  (**produit scalaire**) un espace euclidien est une application:

$$\begin{aligned} f : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) \end{aligned}$$

qui vérifie ces propriétés:

1. **Bilinéarité:**

(a)  $f(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$  avec  $u, v, w \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

(b)  $f(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(u, w)$  avec  $u, v, w \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

2. **Symétrie:**  $B(u, v) = B(v, u) \quad \forall u, v \in E$

3. **Définie positive:**  $\forall u \in E, B(u, u) \geq 0$

4. **Définie:**  $B(u, u) = 0 \iff u = 0$

**Remarque.** Le produit vectoriel est noté:  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

**Définition 1.2.** La norme  $\forall X \in E$ :

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

**Proposition 1.2.** Les formules utiles: (pour  $X, Y \in E$ )

1.  $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$  (égalité si  $X$  et  $Y$  sont colinéaires)

2.  $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$

3.  $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$

4.  $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2)$

### 1.2 Orthogonalité

**Définition 1.3.**  $u, v \in E$  sont **orthogonaux** si  $\langle u, v \rangle = 0$  et on les notes  $u \perp v$

**Définition 1.4.** **Orthogonale de  $A$ :**

$$A^\perp = \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

aussi connu comme **complement orthogonal**.

**Proposition 1.3.** Si  $E$  est un espace euclidien et  $A \subset E$  son sous-espace vectoriel, alors:

$$E = A \oplus A^\perp$$

i.e tout vecteur  $x \in E$  peut s'écrire comme  $x = e + e'$  où  $e \in A$  et  $e' \in A^\perp$ .

**Proposition 1.4.** Si  $f$  est une projection orthogonale sur  $F \subset E$ , alors:

$$f(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in E$$

**Définition 1.5.** La **projection orthogonale** sur un sous-espace  $A \subset E$  est une application:

$$\begin{aligned} p_F : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto p_F(x = e + e') = e \end{aligned}$$

**Proposition 1.5.** La **distance** d'un vecteur  $x$  à un sous-espace  $F$  est:

$$\|x - p_F(x)\|$$

**Définition 1.6.** Une **isométrie** de  $E$  est un endomorphisme tel que:

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

de plus,

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$$

**Proposition 1.6.** Si  $X \in E$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $E$ , donc:

$$X = \langle X, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle X, e_n \rangle e_n$$

Où  $\langle X, e_i \rangle$  sont les coordonnées dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$

## 2 Déterminants

### 2.1 Propriétés les plus importantes

**Proposition 2.1.** les propriétés de déterminant. Pour cette proposition, on note  $\det(c_1, \dots, c_n)$  un déterminant où  $\forall i, r_i$  et  $\forall i, y_i$  représentent une colonne (ou un vecteur colonne). Et  $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$ .

1. **Déterminant de la matrice identité est 1:**

$$\det(I_n) = 1$$

2. **Déterminant de la matrice du rang 1 est son seul élément:**

$$\det([a_{1,1}]) = a_{1,1} \quad \text{où } a_{1,1} \in \mathbb{R}$$

3. **Linéarité 1:**

$$\det(r_1, \dots, r_i + y_i, \dots, r_n) = \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) + \det(r_1, \dots, y_i, \dots, r_n)$$

4. **Linéarité 2:**

$$\det(r_1, \dots, \lambda_i r_i, \dots, r_n) = \lambda_i \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n)$$

C'est pourquoi:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

5. **Mêmes colonnes:** Supposons que  $i \neq j$  et  $c_i = c_j$  alors:

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = 0$$

S'il y a deux colonnes identiques, alors  $\det$  est égale à 0.

6. **Déplacements des colonnes:**

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = -\det(c_1, \dots, \underbrace{c_j, \dots, c_i}_{\text{permutation}}, \dots, c_n)$$

Autrement dire, une permutation des colonnes change la signe.

7. **Déterminant des matrices multipliées:** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

8. **Déterminant d'une matrice transposée:** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

### 3 Utile

#### 3.1 Multiplication des matrices

**Définition 3.1.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$  tels que  $A = (a_{j,i})$  et  $B = (b_{i,k})$ , alors:

$$AB = C = (c_{j,k} = \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,k})$$

#### 3.2 La trace

**Définition 3.2.** La trace de la  $n \times n$  matrice carée  $A$ , notée  $\text{tr}(A)$ , est la somme des éléments diagonales

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

où  $a_{ii}$  sont des éléments diagonales de la matrice  $A$ .