

Notes du cours d'Algebre Linéaire 2

Yehor Korotenko

January 22, 2025

Abstract

Le cours porte sur deux sujets liés:

1. la théorie des espaces euclidiens (i.e un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire) et leur endomorphismes
2. la réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

Chapter 1

Espaces euclidiens

1.1 Introduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont réels. On suppose que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
Produit scalaire:

Definition 1.1. Une forme bilinéaire sur E est une application

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B((u, v)) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes $\forall u, v, w \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2. $B(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(v, w)$

B est dite

1. symétrique si $B(u, v) = B(v, u) \ \forall u, v \in E$
2. positive si $B(., u) \geq 0 \ \forall u \in E$
3. définie si $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Proof.

$$\begin{aligned} B(0, 0) &= B(0 + 1 \cdot 0, 0) \\ &\stackrel{\text{linéarité}}{=} B(0, 0) + 1 \cdot B(0, 0) \\ &= B(0, 0) + B(0, 0) \\ &\Rightarrow B(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

Notation. Produit scalaire est noté: $\langle u, v \rangle$

Example 1.2. .

1. $E = \mathbb{R}^n, X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in E$

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

On l'appelle "produit scalaire canonique" (ou usuel)

2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle X, Y \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_2$

3. $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R}) \ni f, g$ (un espace des fonctions continues)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}(A^t B)$$

Proposition 1.3. Un espace vectoriel non-nul possède une infinité de produits scalaires différents.

Definition 1.4. Un espace euclidien est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Property. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On pose:

$$\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle} \quad X \in E$$

la norme (ou longueur) de X . (Il est bien définie car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est toujours positif)

Lemma 1.5. inégalité de Cauchy-Schwarz On a

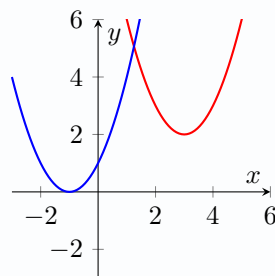
$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in E$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires, i.e $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $u = tv$ ou $v = tu$

Proof. Si $v = 0$, clair

Si $v \neq 0$ on considère $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|u + tv\|^2 &= \langle u + tv, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u + tv \rangle + t \langle v, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + t \langle u, v \rangle + t \langle v, u \rangle + t^2 \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2 = f(t) \end{aligned}$$



Cas 1: $f(t)$ n'a pas de racines différentes

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 \langle u, v \rangle^2 = 4 \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow \langle u, v \rangle^2 &\leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\ \Rightarrow |\langle u, v \rangle| &\leq \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

Cas 2: $f(t)$ a seulement une racine:

$$\begin{aligned}\Delta &= 0 \\ \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \|u + tv\|^2 &= 0 \\ \Rightarrow u + tv &= 0 \Rightarrow u = -tv\end{aligned}$$

La définition suivante sera étudiée dans le cours d'analyse:

Definition 1.6. On dit que $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme si:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

Lemma 1.7. L'application

$$\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

est dite norme euclidienne.

Proof. 1), 2) sont faites

$$\begin{aligned}3) \quad \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\Rightarrow \|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2\end{aligned}$$

Proposition 1.8. On les identités suivantes $\forall u, v \in E$

1. Identité du parallélogramme:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

2. Identité de polarisation:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

Proof. .

- 1.

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2\end{aligned}$$

2. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$

On a:

- (1) + (2): $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- (1) - (2): $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$

1.2 Orthogonalité

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Definition 1.9. $u, v \in E$ sont dits orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$. On note $u \perp v$

- Deux sous-ensembles A, B de E sont orthogonaux si:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad \langle u, v \rangle = 0$$

- Si $A \subseteq E$ on appelle orthogonal de A , noté A^\perp l'ensemble

$$A^\perp = \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

- Une famille (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$. Elle est dite orthogonale si elle est orthogonale et si de plus $\|v_i\| = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Example 1.10. $E = \mathbb{R}^n$, \langle, \rangle produit scalaire canonique

$$v_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(v_1, \dots, v_n) est une base canonique

Proposition 1.11. 1. Si $A \subseteq E$ alors A^\perp est un sous-espace vectoriel de E

2. Si $A \subseteq B$ alors $B^\perp \subseteq A^\perp$

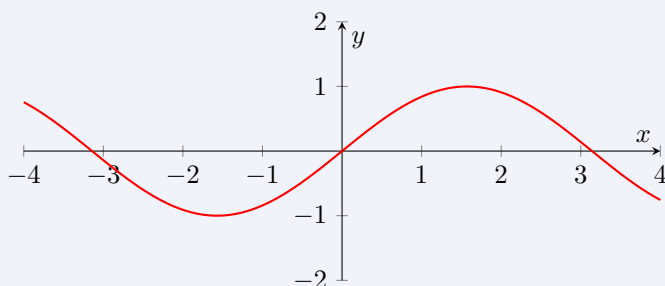
3. $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

4. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Proof. Exercice

Example 1.12. 1. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$



Alors, $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ sont orthogonaux: $2 \cos(t) \sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^1 \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin(2t) dt = 0$$

Definition 1.13. Si E est un espace euclidien, on appelle "dual de E " l'ensemble

$$L(E, \mathbb{R}) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est linéaire}\}$$

On le note E^* . Un élément $f \in E^*$ s'appelle une forme linéaire.

Rappele:

Proposition 1.14. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie, on $\dim(L(F, F')) = \dim(F) \cdot \dim(F')$
En particulier, $\dim(F^*) = \dim(F)$. En effet si $n = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et $n' = (e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de F' , alors l'application

$$\begin{aligned} : L(F, F') &\longrightarrow \text{Mat}_{f \times p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (f) = \text{Mat}_{n, n'}(f). \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc $\dim(F, F') = qp$

Theorem 1.15. Théorème du rang: Si F est un e.v de dimension finie et $f : F \rightarrow F'$ linéaire, alors $\dim(F) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$

Proposition 1.16. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie tq $\dim(F) = \dim(F')$ et $f : F \rightarrow F'$ linéaire, alors f est un isomorphisme $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = 0$

Proof. On rappelle que si G, G' sont des sous-e.v de dimension finie dans le même e.v, alors:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ et } \dim(G) = \dim(G')$$

\Rightarrow) f injective $\Rightarrow \text{Ker}(f) = 0$

\Leftarrow) Soit $\text{Ker}(f) = 0$.

Alors, forcément $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ et par le théorème du rang on a $\dim(F) = \dim(\text{Im}(f))$, donc $\text{Im}(f) = F'$

Lemma 1.17. du Riesz:

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie et $f \in E^*$. Alors, $\exists! u \in E$ tel que $f(x) = \langle u, x \rangle \forall x \in E$. La forme linéaire f est donné par un produit scalaire avec un vecteur.

Notation. Pour tout $v \in E$ on note par f_v l'application:

$$\begin{aligned} f_v : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_v(x) = \langle v, x \rangle. \end{aligned}$$

f_v est linéaire $\forall v \in E$ i.e E^*

Proof. lemma de Reisz

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

ϕ est linéaire (exercice). ϕ est injective:

$$v \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

en particulier pour $x = v$, on a :

$$0 = f_v(v) = \langle v, v \rangle \Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} \dim(E) = \dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ est un isomorphisme} \\ &\Rightarrow \phi \text{ bijective} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists ! n \in E \text{ tq } \phi(n) = f, \text{ i.e } f(x) = \langle n, x \rangle \quad \forall x \in E$$

Dans ce cas $E = \mathbb{R}^n$, le lemme de Riesz est très simple à comprendre :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Si on note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle = \langle (a_1, \dots, a_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle$$

1.3 Bases orthonormales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel ($\dim(F) < \infty$) car $\dim(E) < \infty$.

Note.

$$F^\perp := \{x \in E \mid \langle x, z \rangle = 0 \quad \forall z \in F\}$$

l'orthogonale de F .

Theorem 1.18. On a $E = F \oplus F^\perp$.

En particulier, $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ et $F = (F^\perp)^\perp$

Proof. On doit montrer que :

$$1. F \cap F^\perp = \emptyset$$

$$2. E = F + F^\perp \text{ i.e } \forall x \in E, \exists x' \in F, x'' \in F^\perp \text{ tq } x = x' + x''$$

$$1. \text{ Soit } x \in F \cap F^\perp$$

$$\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \quad \forall x \in F \cap F^\perp \text{ car } x \in F \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est définie})$$

$$2. \text{ Soit } x \in E. \text{ Considérons } f_x \in E^*, \text{ i.e } f_x : E \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y \rangle \text{ et } f := f_x|_F : F \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f \in E^*$$

$$\text{Lemme de Riesz} \Rightarrow \exists ! x' \in F \text{ tq } f = f_{x'} : F \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \langle x', z \rangle$$

$$\Rightarrow f_x(z) = f_{x'}(z) = \langle x, z \rangle = \langle x', z \rangle \quad \forall z \in F \text{ (Attention: pas l'égalité pour tout } z \text{ dans } E)$$

$$\text{Posons } x'' := x - x', \text{ i.e } x = x' + x'' \in F. \text{ Montrons } x'' \in F^\perp.$$

$$\text{Si } z \in F, \langle x'', z \rangle = \langle x - x', z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x', z \rangle = 0. \text{ Donc } x'' \in F^\perp \text{ et } E = F \oplus F^\perp$$

$$(\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp))$$

$$F \subseteq (F^\perp)^\perp \text{ car } \langle x, z \rangle = 0 \quad \forall x \in F, \forall z \in F^\perp$$

$$\dim(F) = \dim(E) - \dim(F^\perp)$$

$$\text{car } E = G \oplus G^\perp, \text{ donc } \dim(G) = \dim(E) - \dim(G^\perp) \text{ pour } G = F^\perp, \dim(F^\perp) = \dim(G)$$

□

Definition 1.19. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

- Une famille $(v_i)_{i \geq 0}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si pour $i \neq j$ on a $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ i.e $v_i \perp v_j$

- Une famille orthogonale de E est une famille orthogonale $(v_i)_{i \geq 0}$ tq de plus $\|v_i\| = 1$ pour $i \geq 0$

Exemple 1.20. 1. $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. La base canonique (e_1, \dots, e_n) est orthogonale car

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2. Dans $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$. La famille $(\cos(t), \sin(t))$ est orthogonale. La famille $(1, t^2)$ n'est pas orthogonale:

$$\langle 1, t^2 \rangle = \int_{-1}^1 1t^2 dt = \frac{2}{3} \neq 0$$

Proposition 1.21. Une famille orthogonale constituée de vecteurs non-nuls est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.

Proof. Supposons (v_1, \dots, v_n) orthogonale avec $v_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$ si $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$, alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} 0 = \langle v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \alpha_j = \alpha_i \|v_i\|^2$$

Donc $\alpha_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$.

Si (v_1, \dots, v_n) est orthonormale, alors $\|v_i\| = 1$. Donc $v_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. □

Definition 1.22. (E, \langle, \rangle) espace euclidien. Une famille $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une bse orthonormale (où BON) si elle est une base et famille orthonormale.

Theorem 1.23. (E, \langle, \rangle) espace euclidien. Alors, il admet une BON.

Proof. Soit $n := \dim(E)$. Soit (e_1, \dots, e_p) une famille orthogonale (du point de vue du cardinal p) tq $e_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, p$.

Supposons par l'absurde que $p < n$. Posons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Alors, $E = F \oplus F^\perp$ et $\dim(F) \leq p < n$. Donc $F^\perp \neq \{0\}$. Soit $x \in F^\perp, x \neq 0$. Alors, (e_1, \dots, e_p, x) est orthogonale de cardinal $> p$. Donc, $p = n$ et (e_1, \dots, e_n) est une base de E . Pour avoir une famille orthonormale (e'_1, \dots, e'_n) il suffit de prendre $e'_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i \forall i = 1, \dots, n$. □

Proposition 1.24. Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et soit (e_1, \dots, e_n) une BON de E . Si $x \in E$, on a:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

Autrement dit, le réel $\langle x, e_i \rangle$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x dans la base (e_1, \dots, e_n) .

Proof. Posons $y := \sum_{i=1}^n \langle x_i, e_i \rangle e_i$. Alors,

$$\forall j = 1, \dots, n, \langle x - y, e_j \rangle = \langle x_1, e_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x_1, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x_1, e_i \rangle - \langle x_1, e_i \rangle \langle e_i, e_i \rangle = 0$$

Donc, $x - y \in \text{Vect}(e_j, (j = 1, \dots, n))^\perp = E^\perp = \{0\}$. Donc $x = y$ □

Corollary 1.25. $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$

Proof. On a $x = \sum_{i=1}^n \langle x_i, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $x_i := \langle x_1, e_i \rangle \forall i = 1, \dots, n$ et $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \langle x_1, e_i \rangle^2$ □

Proposition 1.26. Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ une BON. Soient $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice représentative de f dans ε , i.e, $A = \text{Mat}_\varepsilon(f)$

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Proof. A est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $f(e_j)$ écrits dans la base ε :

$$A = (e_1 | \dots | e_n) e_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

$$f(e_j) = a_{1,j} e_1 + \dots + a_{n,j} e_n$$

par la prop ci-dessus:

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle$$

□

1.4 Projections orthogonales

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Alors, $E = F \oplus F^\perp$. Donc $\forall x \in E$ s'écrit

$$x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in F^\perp}{x_{F^\perp}}$$

Definition 1.27. La **projection orthogonale** de E dans F est la projection P_F de E sur F parallèlement à F^\perp , i.e

$$P_F : E = F \oplus F^\perp \longrightarrow F$$

$$x = x_F + x_{F^\perp} \longmapsto P_F(x = x_F + x_{F^\perp}) = x_F.$$

Remark 1.28. 1. p_F est linéaire

2. $\forall x \in E$ $p_F(x)$ est complètement caractérisé par la propriété suivante:
Soit $y \in E$, alors

$$\eta = P_F(x) \Leftrightarrow \left(e \in F \text{ et } x - y \in F^\perp \right)$$

En particulier $\langle P_F(x), x - P_F(x) \rangle = 0$. Alors, si (v_1, \dots, v_R) est une BON de F , on a:

$$\forall x \in E, P_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i$$

En effet, il suffit de vérifier que le vecteur $y = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i$ vérifie:

$$\eta \in F \text{ et } x - y \in F^\perp$$

Proposition 1.29. Soit $x \in E$. Alors,

$$\|x - P_F(x)\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$$

i.e $\|x - P_F(x)\|$ est la distance de x à F .

TODO. pic from phone

Proof. Comme $P_F(x) \in F$ il suffit de prouver que, si $\eta \in F$, alors

$$\|x - P_F(x)\| \leq \|x - \eta\|$$

Mais,
$$\|x - \eta\|^2 = \|x - P_F(x) + P_F(x) - \eta\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \underbrace{2\langle x - P_F(x), P_F(x) - \eta \rangle}_{=0} + \underbrace{\|P_F(x) - \eta\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - P_F(x)\|^2$$

□

Theorem 1.30. Gram-Schmidt

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire \langle, \rangle . Soit (v_1, \dots, v_n) une famille libre d'éléments $\in E$. Alors, il existe une famille (w_1, \dots, w_n) orthogonale tq

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \text{Vect}(v_1, \dots, v_i) = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i)$$

Proof. Récurrence sur i

- $i = 1$: $w_1 := v_1$ suffit
- $i \geq 1$: Supposons (w_1, \dots, w_i) construits. Posons $F_i = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$. Alors on prend $w_{i+1} := v_{i+1} - P_{F_i}(v_{i+1})$. Donc, $w_{i+1} \in F_i^\perp$ (par caractérisation de P_{F_i}) et (w_1, \dots, w_{i+1}) est orthogonale. On note $P_{F_i}(v_{i+1}) \in F_i$, donc

$$\text{Vect}(w_1, \dots, w_i, w_{i+1}) = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i, v_{i+1} - P_{F_i}(v_{i+1})) = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i, v_{i+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i, v_{i+1})$$

□

Remark 1.31. La preuve donne une recette concrète pour construire une BON.

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien. (v_1, \dots, v_n) base de E .

Le but: construire une base (w'_1, \dots, w'_n) orthogonale de E avec $\text{Vect}(v_1, \dots, v_i) = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

Posons:

1. $w'_1 := v_1$

2. $w'_{i+1} = \sum_{j=1}^i \frac{\langle v_{i+1}, w'_j \rangle}{\langle w'_j, w'_j \rangle} w'_j.$

Alors, (w_1, \dots, w_n) avec $w_i = \frac{1}{\|w'_i\|} w'_i$ est une BON.