

# Notes du cours d'Analyse et Géometrie

Professeur: Christian Gérard

Yehor Korotenko

April 19, 2025

### **Abstract**

Ce sont les notes prises en cours OLMA251 - Analyse et Géométrie fait par le professeur Christian Gérard. Ces notes contient l'information prises pendant les CMs, mais aussi mon opinion, compréhension et les choses apprises apart ce cours.

# CONTENTS

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Espaces $\mathbb{R}^d$ $\mathbb{C}^d$	3
1.2	Espace $\mathbb{C}^d$	5
1.3	Distance sur $\mathbb{R}^d$	6
<b>2</b>	<b>Espaces métriques</b>	<b>8</b>
2.1	Boules dans un espace métrique	8
2.2	Parties bornées de $(E, d)$	9
2.3	Fonctions bornées	11
2.4	Distance entre ensembles	11
2.5	Topologie des espaces métriques	11
2.6	Algorithmes pour montrer qu'un ensemble est ouvert/fermé	14
2.7	Intérieur, adhérent, frontière	14
2.7.1	Intérieur	14
2.7.2	Adhérent	15
2.7.3	Frontière	16
2.8	Suite dans un espace métrique	17
2.9	Suites de Cauchy	18
2.10	Sous-suites	20
2.11	Procédé de construction de l'intérieur et l'adhérence	21
2.12	Compacité	24
2.12.1	Compacité dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle	27
2.13	Limites et continuité	27
2.13.1	Limites	27
<b>3</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>30</b>
3.1	Introduction	30
3.2	Comment montrer qu'un ensemble est ouvert ou fermé	30
3.3	Lien avec la compacité	31
3.4	Continuité partielle (inutile)	32
<b>4</b>	<b>Dérivation des fonctions de plusieurs variables</b>	<b>34</b>
4.1	Introduction	34
4.2	DL à l'ordre 1	35
4.3	Extrema et points critiques	37
4.4	Dérivées partielles d'ordre $\geq 2$	38
4.5	Formule de Taylor à l'ordre 2	39
4.6	Un rappel d'algèbre linéaire et le lien avec l'analyse	39
4.7	Nature des points critiques	40
4.8	La règle de dérivation en chaîne	42
<b>5</b>	<b>Espaces vectoriels normés</b>	<b>43</b>
5.1	Introduction	43
5.2	Topologie des espaces vectoriels normés	44
5.3	Normes équivalentes	46
5.4	Compléments sur les espaces vectoriels normés	48
5.4.1	Suites de fonctions	48

5.4.2	Convergence simple: . . . . .	48
5.4.3	Convergence uniforme: . . . . .	48
5.4.4	Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé. . . . .	48
5.4.5	Convergence normale . . . . .	48
5.5	Applications linéaires continues . . . . .	49
5.5.1	Norme sur $B(E, F)$ . . . . .	50
5.6	La norme des matrices . . . . .	54
5.6.1	<u>Bonne norme</u> sur $L(\mathbb{C}^n)$ (ou sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ) . . . . .	54
5.6.2	Comment "calculer" $\ A\ $ ? . . . . .	55
5.6.3	Comment majorer $\ A\ $ . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Système d'équation différentielles</b>	<b>57</b>
6.1	Application aux système d'ED . . . . .	59

# CHAPTER 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Éspaces $\mathbb{R}^d$ $\mathbb{C}^d$

#### Definition 1.1.

$$\mathbb{R}^d = \{X = (x_1, \dots, x_d), x_i \in \mathbb{R}\}$$

$x_1, \dots, x_d$  coordonnées cartésiennes de  $X$

#### Example 1.2. $d = 2$ coordonnées polaires:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$0 \leq r \leq \infty \quad \theta \in [0, 2\pi[$$



#### Definition 1.3. $\mathbb{R}^d$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$$

$$\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{0}_d = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

#### Definition 1.4. Un produit scalaire:

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d = \|X\| \|Y\| \cos(\theta) \text{ (où } \theta \text{ est une angle entre } X \text{ et } Y)$$

**Intuition.** Ce produit nous dit *how closely the vectors point in the same direction* (cosinus tend vers 1 quand  $\theta$  tend vers  $0^\circ$ , et cosinus tend vers 0 quand  $\theta$  tend vers  $90^\circ$ ). Et ce produit nous permet d'avoir une projection

de  $X$  sur  $Y$  par la formule:

$$Proj(X) = \frac{X \cdot Y}{\|Y\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|}$$

$X \cdot Y$  donne la longueur de  $X$  et  $Y$  ensemble, en divisant cette longueur par  $\|Y\|$  (la longueur de  $Y$ ) on obtient la longueur de  $X$  sur  $Y$ , il nous reste de multiplier cette longueur par un vecteur unitaire (de longueur 1) qui pointe dans la même direction que  $Y$ , (on l'obtient par  $\frac{Y}{\|Y\|}$ )



**Proposition 1.5.** Produit scalaire respecte ces propriétés:

1. bilinéarité  $\lambda \in \mathbb{R}$ 
  - (a)  $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$
  - (b)  $(\lambda X) \cdot Z = \lambda(X \cdot Z)$
  - (c)  $Z \cdot (X + Y) = Z \cdot X + Z \cdot Y$
  - (d)  $Z \cdot (\lambda X) = \lambda(Z \cdot X)$
2. symétrie  $X \cdot Y = Y \cdot X$
3. défini positif:  $X \cdot X \geq 0$  et  $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Proposition 1.6.** Cauchy-Schwarz:

$$|X \cdot Y| \leq (X \cdot X)^{\frac{1}{2}} (Y \cdot Y)^{\frac{1}{2}}$$

**Definition 1.7.** La **norme euclidienne** d'un vecteur  $X$  est noté:

$$\|X\| = \left( \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} = (X \cdot X)^{\frac{1}{2}}$$

souvent noté  $\|X\|_2$

**Intuition.** Par le théorème de Pythagore, c'est une longueur de ce vecteur.

**Proposition 1.8.** La norme suit ces propriétés:

1.  $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$   $X \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
2.  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$  (inégalité triangulaire)
3.  $\|X\| \geq 0$  et  $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Proof.** de (2)

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= (X + Y) \cdot (X + Y) = X \cdot (X + Y) + Y \cdot (X + Y) = X \cdot X + X \cdot Y + Y \cdot X + Y \cdot Y \\ &= \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2 \leq \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2 \end{aligned}$$

**Definition 1.9.** Une norme sur  $\mathbb{R}^d$  est une application  $N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que:

1.  $N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$
2.  $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
3.  $N(X) \geq 0$  et  $N(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Example 1.10.**

$$\|X\|_1 = \sum_{n=1}^d |x_n|$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

## 1.2 Espace $\mathbb{C}^d$

**Definition 1.11.**

$$\mathbb{C}^d = \{X = (x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

$$z \in \mathbb{C} \quad \bar{z} = a - ib \quad \bar{z}z = a^2 + b^2 \quad |z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = a + ib \quad a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

$$\operatorname{Re} X = (\operatorname{Re} x_1, \dots, \operatorname{Re} x_d) \in \mathbb{R}^d$$

$$\operatorname{Im} X = (\operatorname{Im} x_1, \dots, \operatorname{Im} x_d) \in \mathbb{R}^d$$

$$X = \underset{\in \mathbb{C}^d}{\operatorname{Re} X} + i \underset{\in \mathbb{R}^d}{\operatorname{Im} X}$$

$\mathbb{C}^d$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  (même formules avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  corps des scalaires)

**Definition 1.12.** Produit scalaire:

$$(X|Y) = \sum_{n=1}^d \bar{x}_n y_n \in \mathbb{C}$$

**Proposition 1.13.** .

1.  $(X|Y)$  est "linéaire par rapport à Y"
  - $(Z|X + Y) = (Z|X) + (Z|Y)$
  - $(Z|\lambda X) = \lambda(Z|X) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
  - $(Z|\lambda X + \mu Y) = \lambda(Z|X) + \mu(Z|Y)$
  - $(X + Y|Z) = (X|Z) + (Y|Z)$
  - $(\lambda X|Z) = \bar{\lambda}(X|Z) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
  - $(\lambda X + \mu Y|Z) = \bar{\lambda}(X|Z) + \bar{\mu}(Y|Z)$
2.  $(Y|X) = \overline{(X|Y)}$
3.  $(X|X) = \sum_{n=1}^d \bar{x}_n x_n = \sum_{n=1}^d |x_n|^2$   
 $(X|X) \geq 0$  et  $(X|X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Proof.** On a Cauchy-Schwarz:

$$(X|Y) \leq (X|X)^{\frac{1}{2}}(Y|Y)^{\frac{1}{2}}$$

même preuve qu'avant

On pose:

$$\begin{aligned} \|X\| & (\text{ou } \|X\|_2) \\ &= (X|X)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{n=1}^d |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

norme hilbertienne

$$\|X\|^2 = \left\| \begin{matrix} \text{Re } X \\ \text{Im } X \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^d}^2 = \left\| \begin{matrix} \text{Re } X \\ \text{Im } X \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^d}^2$$

**Lemma 1.14.**

$$\|X\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

**Proof.**  $|(X|Y)| \leq \|X\| \|Y\| \leq \|X\|$  si  $\|Y\| \leq 1$

$$\sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

Autre sens:

$$\begin{aligned} X \neq 0 \quad Y &= \frac{X}{\|X\|} = \lambda X \quad \lambda = \frac{1}{\|X\|} \\ \|Y\| &= |\lambda| \|X\| = \frac{1}{\|X\|} \|X\| = 1 \\ (X|Y) &= (X|\frac{X}{\|X\|}) = \frac{1}{\|X\|} (X|X) = \|X\| \\ \sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\} \\ \|X\| &\leq \sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\} \quad (\text{prendre } Y = \frac{X}{\|X\|}) \end{aligned}$$

Autres normes sur  $\mathbb{C}^d$

- $\|X\|_1 = \sum_{n=1}^d |x_n| \quad X \in \mathbb{C}^d$
- $\|X\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

### 1.3 Distance sur $\mathbb{R}^d$

On oublie norme et produit scalaire. On introduit la distance

**Definition 1.15.** Une distance est une application:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto d((X, Y)) \end{aligned}$$

qui suit ces propriétés:

1.  $d(X, Y) = d(Y, X)$  (symétrie)



2.  $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$  (inég. triangulaire)  $\forall X, Y, Z$
3.  $d(X, Y) \geq 0 \quad \forall X, Y$  et  $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

**Definition 1.16.** La distance euclidienne

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^d (x_i - y_i)^2}$$

**Example 1.17.** Distances

1.  $d_2(X, Y) = \|X - Y\|_2$  (distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ )
2.  $d_1(X, Y) = \|X - Y\|_1$   
 $d_\infty(X, Y) = \|X - Y\|_\infty$
3. distance logarithmique sur  $\mathbb{R}_+$ :  $d(a, b) = |b - a|$

$$\log_{10}(a) = \frac{\log(a)}{\log(10)}$$

$x, y \in ]0, +\infty[$   
 $d_{\log}(x, y) = |\log_{10}(\frac{y}{x})|$   
 $i$  est une distance sur  $]0, +\infty[$   
 $d_{\log}(100, 110) = \log_{10}(1, 1)$

4. distance SNCF



$d(X, Y)$  distance usuelle dans  $\mathbb{R}^2$  on pose:

$$\delta(X, Y) = \begin{cases} d(X, Y) & \text{si } X, 0, Y \text{ alignés} \\ d(X, 0) + d(0, Y) & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition 1.18.** Soit  $E$  espace métrique et deux distances  $d_1$  et  $d_2$ . Les distances sont dites **équivalentes** si  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  tel que:

$$\forall x, y \in E, \quad a \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b \cdot d_1(x, y)$$

# CHAPTER 2

## ÉSPACES MÉTRIQUES

**Definition 2.1.**  $E$  muni d'une application de distance  $d$  (voir Definition 1.15) se note  $(E, d)$ : espace métrique

**Remark 2.2.** si  $d_1 \neq d_2$   $(E, d_1)$  n'a rien à faire avec  $(E, d_2)$

**Remark 2.3.** Retenir la version suivante de l'inégalité triangulaire:

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

**Remark 2.4.** Distance induite:

Si  $(E, d)$  espace métrique et  $U \subset E$ . Je peux restreindre  $d$  à  $U \times U$ :  $(U, d)$  est aussi un espace métrique.

### 2.1 Boules dans un espace métrique

**Definition 2.5.**  $(E, d)$  espace métrique. Soit  $x_0 \in E$  et  $r \geq 0$

1.  $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$  boule ouverte de centre  $x_0$ , de rayon  $r$
2.  $B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$  boule fermée de centre  $x_0$ , de rayon  $r$



(a) boules ouverte (i.e  $d(x_0, x) < r$ )



(b) boules fermée (i.e  $d(x_0, x) \leq r$ )

**Lemma 2.6.** .

1.  $B(x_0, 0) = \emptyset$  (car impossible d'avoir des points qui en distance sont strictement plus petit que 0)
2.  $B_f(x_0, 0) = \{x_0\}$
3.  $B(x_0, r_1) \subset B_f(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2)$  si  $r_1 < r_2$
4.  $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$  si  $d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$



Figure 2.2: Lemma 4

**Proof.** Je suppose que  $d(x_0, x_1) \leq r$

Soit  $x \in B(x_1, r_1)$  donc  $d(x_1, x) < r_1$  à montrer:  $x \in B(x_0, r)$  (i.e  $d(x_0, x) < r$ ?)

L'inégalité triangulaire me dit:

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &< d(x_0, x_1) + r_1 \leq r \\ &\Rightarrow x \in B(x_0, r) \end{aligned}$$

**Example 2.7.** 1.  $E = \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$

$$B(x_0, r) = ]x_0 - r, x_0 + r[$$

2.  $E = \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ ,  $X = (x_1, \dots, x_d)$

$$\|X\|_2 = \left( \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^d x_i$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

$$d_2(X, Y) = \|Y - X\|_2 = \|\vec{XY}\|_2$$

$$d_1(X, Y), d_\infty(X, Y)$$

**Property.** Dans  $\mathbb{R}^n$

- $d_\infty(X, Y) \leq d_1(X, Y) \leq n d_\infty(X, Y)$
- $d_\infty(X, Y) \leq d_2(X, Y) \leq \sqrt{n} d_\infty(X, Y)$

## 2.2 Parties bornées de $(E, d)$

**Definition 2.8.** Soit  $A \subset E$ .  $A$  est bornée si  $\exists R > 0$  et  $\exists x_0 \in E$  tel que

$$A \subset B(x_0, R)$$

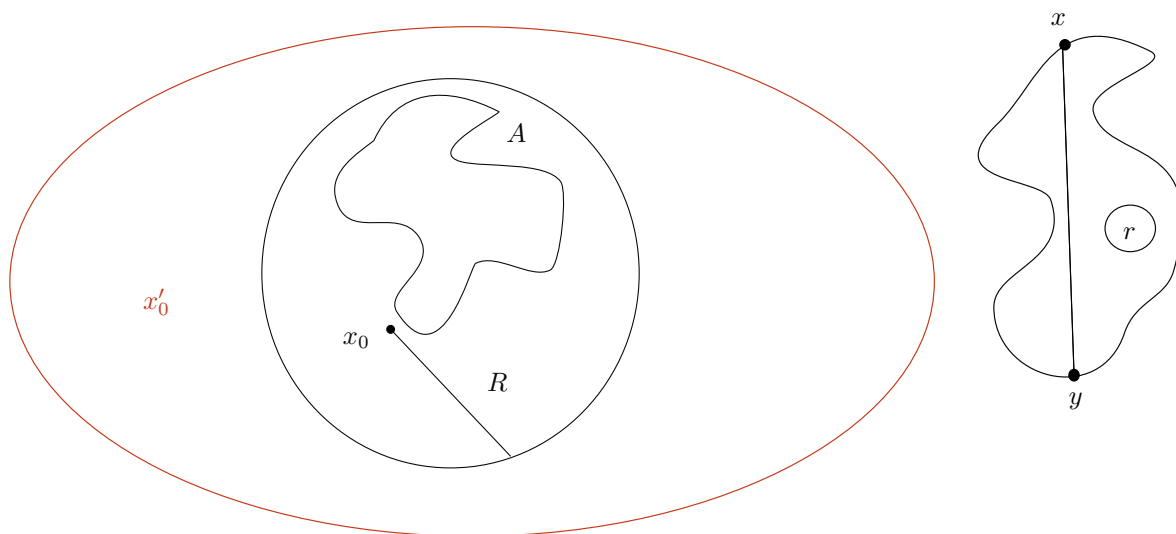


Figure 2.3: Exemple d'un ensemble borné

**Lemma 2.9.** Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1.  $A$  est bornée
2.  $\forall x_0 \in E, \exists r > 0$  tel que  $A \subset B(x_0, r)$
3.  $\exists r > 0$  tel que  $\forall x, y \in A$  on a  $d(x, y) < r$

**Proof.** de lemme

- (1)  $\Rightarrow$  (2) :

Hyp:  $\exists x_1 \in E, \exists r_1 \in E$  tq  $A \subset B(x_1, r_1)$

Soit  $x_0 \in E$ . But: trouver  $r$  tel que  $A \subset B(x_0, r)$  si  $x \in A$ , on a:  $d(x_1, x) < r_1$

Je veux:  $d(x_0, x) < r$

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \leq d(x_0, x_1) + r_1 < r \quad \text{si } r > d(x_0, x_1) + r_1$$

**Property.** 1. Toute partie finie est bornée

2. Si  $A$  bornée et  $B \subset A$  alors  $B$  bornée

3. L'union d'un nombre fini de bornés est borné

**Proof.** de (3).

$A_1, \dots, A_n$  sont bornés. Je fixe  $x_0 \in E$ ,  $A_i$  borné ( $1 \leq i \leq n$ ), donc  $\exists r_i > 0$  tel que  $A_i \subset B(x_0, r_i)$  si

$$r = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$$

$$A_i \subset B(x_0, r), \forall i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \subset B(x_0, r)$$

□

## 2.3 Fonctions bornées

**Definition 2.10.** Soit  $B$  un ensemble. Une fonction  $F : B \rightarrow E$  est bornée si  $F(B) = \{F(b) : b \in B\} \subset E$  est borné.

## 2.4 Distance entre ensembles

**Definition 2.11.** La distance entre deux ensembles  $A, B$  est:

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

Intuitivement, on cherche deux points  $x$  et  $y$  tel que la distance est la plus petite possible.

**Definition 2.12.** La distance entre un points  $x$  et un ensemble  $B$  est:

$$d(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$$

La même intuition.

**Property.**  $\forall x \in A, y \in B, d(x, y) \geq d(A, B)$  et  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, y \in B$  tq  $d(x, y) \leq d(A, B) + \varepsilon$



Figure 2.4: Distance entre ensembles

## 2.5 Topologie des espaces métriques

distance  $d(x, y) \longrightarrow$  boules  $B(x_0, r) \longrightarrow$  ensembles ouverts

**Definition 2.13.** Soit  $(E, d)$  espace métrique.

1.  $U \subset E$  est ouvert si  $\forall x_0 \in U, \exists r > 0$   $r(x_0)$  tel que  $B(x_0, r) \subset U$
2.  $F \subset E$  est fermé si  $E \setminus F$  est ouvert

$\emptyset$  est ouvert et  $E$  est ouvert.  $\emptyset$  est fermé et  $E$  est fermé.



(a) Un ensemble fermé

À la borne, il est impossible de trouver une boule qui appartient à  $F$ , car il est impossible d'avoir une boule ouverte de  $r = 0$ . Exemple: circle bleu foncé  
Pour tout point dans  $E \setminus F$  on peut trouver une boule ouverte

(b) Un ensemble ouvert

pour tout point près de la borne on peut trouver une boule infiniment petite avec des points autour ce point inclu dans  $U$ .

Figure 2.5: Démonstration des espaces ouverts et fermés

**Remark 2.14.** dans  $\mathbb{R}$  les intervalles ouverts sont des ouverts (pareil pour fermés)

**Remark 2.15.** Une distance entre deux ensembles ouverts toujours existe et elle est infimum (qui n'est jamais atteint)

**Lemma 2.16.** 1.  $B(x_0, r_0)$  est ouvert.

2.  $B_f(x_0, r_0)$  est fermé.

**Proof.** 1. Soit  $x_1 \in B(x_0, r_0)$  ( $d(x_0, x_1) < r_0$ ).

But: trouver  $r_1 > 0$  tel que  $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$ ?

$$x \in B(x_1, r_1) : d(x_1, x) < r_1$$

$$x \in B(x_0, r_0) \text{ si } d(x_0, x) < r_0$$

facile:

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x)$$

$$\leq d(x_0, x_1) + r_1$$

$$< r_0 \text{ si}$$

$$r_1 < r_0 - d(x_0, x_1) > 0$$

□

**Example 2.17.** bizarre.

Soit  $E = \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |y - x|$ ,  $A = ]0, 1[$  ouvert, pas fermé dans  $\mathbb{R}$ .



Je regarde  $A$  comme partie de  $(A, d)$ . Comme  $A \setminus A = \emptyset$  qui est ouvert, donc  $A$  est fermé dans  $A$ . Par contre, les bornes ne sont jamais atteints, alors  $A$  est ouvert dans  $(A, d)$ .

**Theorem 2.18.** .

1. Soit  $U_i, i \in I$  une collection d'ouverts. Alors,  $\cup_{i \in I} U_i$  est ouvert.  
Translate: Une union quelconque des ensembles ouverts est ouvert.

2. Si  $U_1, \dots, U_n$  sont ouverts

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \text{ est ouvert.}$$

Translate: intersection finie des ensembles ouverts est ouvert.

1. Soit  $U_i, i \in I$  une collection de fermés. Alors,  $\cup_{i \in I} U_i$  est fermé.  
Translate: Une union quelconque des ensembles fermés est fermé.

2. Si  $U_1, \dots, U_n$  sont fermés

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \text{ est fermé.}$$

Translate: intersection finie des ensembles fermés est fermé.

**Proof.** .

1. Soit  $x \in U := \bigcup_{i \in I} U_i$ . Il existe un  $i$  noté  $i_0$  tel que  $x \in U_{i_0}$ ,  $U_{i_0}$  est ouvert, donc  $\exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset U := \bigcup_{i \in I} U_i$ .

2. Soit  $x \in U := \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$ .

On fixe  $i$ .  $x \in U_i$ ,  $U_i$  ouvert, donc  $\exists r_i > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , donc  $B(x, r) \subset U := \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$

□

## 2.6 Algorithmes pour montrer qu'un ensemble est ouvert/fermé

Montrer qu'un ensemble est ouvert	Montrer qu'un ensemble est fermé
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Utiliser la définition :</b> <math display="block">\forall x \in \mathcal{U}, \exists r &gt; 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}</math> </li> <li>• Montrer que <math>E \setminus \mathcal{U}</math> est fermé.</li> <li>• Montrer que <math>\mathcal{U}</math> est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.</li> <li>• Exprimer <math>\mathcal{U}</math> comme une boule ouverte.</li> <li>• Écrire <math>\mathcal{U}</math> comme : <ul style="list-style-type: none"> <li>– une réunion d'ouverts ;</li> <li>– une intersection finie d'ouverts.</li> </ul> </li> <li>• <math>\mathcal{U} = \text{Int}(\mathcal{U})</math>.</li> <li>• Écrire <math>\mathcal{U} = I_1 \times \dots \times I_n</math> avec <math>I_i</math> ouvert.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Utiliser la définition :</b> <math>E \setminus V</math> est ouvert.</li> <li>• <b>Caractérisation séquentielle :</b> Toute suite convergente dans <math>V</math>, sa limite est aussi dans <math>V</math>.</li> <li>• Montrer que <math>V</math> est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.</li> <li>• Montrer que <math>V</math> est compact.</li> </ul>

## 2.7 Intérieur, adhérent, frontière

### 2.7.1 Intérieur

**Definition 2.19.** Soit  $A \subset E$ .

1.  $x_0 \in E$  est intérieur à  $A$  si  $\exists \delta > 0$  tel que:

$$B(x_0, \delta) \subset A$$

2.  $\text{Int}(A)$  (intérieur de  $A$ ) = tous les points intérieurs à  $A$ . (aussi noté  $A$ )

**Intuition.**  $\text{Int}(A)$  est un ensemble qui se trouve totalement dans  $A$  et qui est loin des bords de  $A$ .

**Proposition 2.20.**  $\text{Int}(A)$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ . De manière équivalente,  $\text{Int}(A)$  est l'union de tous les ouverts inclus dans  $A$ .

**Proof.** 1.  $\text{Int}(A) \subset A$ : clair

2.  $\text{Int}(A)$  est ouvert:

Soit  $x_0 \in \text{Int}(A)$ .

**But:** trouver  $\delta_0$  tel que  $B(x_0, \delta_0) \subset \text{Int}(A)$ . Trouver  $\delta_0$  tel que si  $d(x_0, x) < \delta_0$  alors  $x \in \text{Int}(A)$  ?

**Hyp:**  $x_0 \in \text{Int}(A)$ .  $\exists \delta_1 > 0$  tel que  $B(x_0, \delta_1) \subset A$ . On a vu que  $B(x_0, \delta_1)$  est ouvert. Je dis que  $B(x_0, \delta_1) \subset \text{Int}(A)$ .

**Preuve:** Soit  $x \in B(x_0, \delta_1)$ .  $B(x_0, \delta_1)$  ouvert, donc  $\exists \delta_2 > 0$  tel que  $B(x, \delta_2) \subset B(x_0, \delta_1) \subset A$ . Donc  $x \in \text{Int}(A)$ , donc  $B(x_0, \delta_1) \subset \text{Int}(A)$ .

$\text{Int}(A)$  est ouvert.

3. Si  $U$  est ouvert et  $U \subset A$  alors  $U \subset \text{Int}(A)$ ?

$x_0 \in U$ .  $U$  ouvert  $\Rightarrow \exists \delta$  tel que  $B(x_0, \delta) \subset U \subset A \Rightarrow x_0 \in \text{Int}(A)$

□





Figure 2.6: Exemple d'un intérieur

### 2.7.2 Adhérent

**Definition 2.21.** Soit  $A \subset E$ .

1.  $x_0 \in E$  est adhérent à  $A$ , si  $\forall \delta > 0$ ,  $B(x_0, \delta)$  intersecte  $A$ . (équivalent à  $d(x_0, A) = 0$ )
2.  $\text{Adh}(A)$  (adhérence ou fermeture de  $A$ ) = ensemble des points adhérents à  $A$  (aussi noté  $\overline{A}$ )

**Intuition.** Adherent aide à compléter des ensembles. Si  $A$  est ouvert, alors ses bords n'appartiennent pas à  $A$ , mais ils appartiennent à  $\text{Adh}(A)$ .

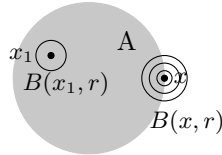


Figure 2.7: Adhérent

**Proposition 2.22.**  $\text{Adh}(A)$  est le plus petit fermé qui contient  $A$  (l'intersection de tous les fermés qui contiennent  $A$ )

**Proof.** 1.  $A \subset \text{Adh}(A)$  clair

2.  $\text{Adh}(A)$  est fermé?

On montre que  $E \setminus \text{Adh}(A)$  est ouvert.

$$x_0 \in \text{Adh}(A) \Leftrightarrow \forall \delta > 0, B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_0 \notin \text{Adh}(A) \Leftrightarrow \exists \delta_0 > 0 \text{ tq } B(x_0, \delta_0) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \delta_0 > 0 \text{ tq } B(x_0, \delta_0) \subset E \setminus A \Leftrightarrow x_0 \in \text{Int}(E \setminus A)$$

Alors:

$$\begin{aligned} E \setminus \text{Adh}(A) &= \text{Int}(E \setminus A) \\ \text{Adh}(A) &= (\text{Int}(\underbrace{A^c}_{=E \setminus A}))^c \end{aligned}$$

□

**Definition 2.23.** Soit  $A \subset B$ . On dit que  $A$  est **dense** dans  $B$  si  $B \subset \text{Adh}(A)$   
Soit  $x_0 \in B$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A$  tel que  $d(x_0, x_\varepsilon) < \varepsilon$

**Example 2.24.**

$$\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\} \text{ dense dans } \mathbb{R}^2$$

**Definition 2.25.** alternative de densité. Soit  $A \subset B$ .  $A$  est dense dans  $B$  si toute boule ouverte de  $B$  contient au moins un éléments de  $A$ .

### 2.7.3 Frontière

**Definition 2.26.** Soit  $A \subset E$ . La **frontière** de  $A$  (ou le bord de  $A$ ) noté  $Fr(A)$  ou  $\partial A$  c'est:

$$\text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(E \setminus A)$$

**Example 2.27.** dans  $\mathbb{R}$

1.  $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$
2.  $\text{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$
3.  $\text{Adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
4.  $\text{Adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
5.  $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
6.  $Fr(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

**Example 2.28.**  $E = \{a, b, c\}$  On pose:

- $d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$
- $d(a, b) = d(b, a) = d(b, c) = d(c, b) = 1$
- $d(a, c) = d(c, a) = 2$

$$B(a, 2) = \{a, b\} = \text{Adh}(B(a, 2))$$

$$B_f(a, 2) = \{a, b, c\}$$

**Proposition 2.29.**

1.  $\text{Int}(A) \subset A \subset \text{Adh}(A)$
2.  $E = \text{Int}(E \setminus A) \cup Fr(A) \cup \text{Int}(A)$  (union disjointe)
3.  $E \setminus \text{Int}(A) = \text{Adh}(E \setminus A)$

$$4. E \setminus \text{Adh}(A) = \text{Int}(E \setminus A)$$

$$5. \text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)$$

**Proposition 2.30.** 1.  $A$  ouvert  $\Leftrightarrow A = \text{Int}(A)$

$$2. A \text{ fermé} \Leftrightarrow A = \text{Adh}(A)$$

$$3. x \in \text{Adh}(A) \Leftrightarrow d(x, A) = 0$$

$$4. x \in \text{Int}(A) \Leftrightarrow d(x, E \setminus A) > 0$$

## 2.8 Suite dans un espace métrique

**Definition 2.31.**  $E$  un ensemble. Une suite dans  $E$ : notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  c'est une fonction  $u : \mathbb{N} \rightarrow E$  où  $u(n)$  est noté  $u_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Si  $E = \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d \ni X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$$

où  $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$  suites dans  $\mathbb{R}$

**Definition 2.32.** Soit  $(x_n)$  une suite dans  $E$  et  $x \in E$ . On dit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ .  
( $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tq si  $n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon$ )

**Proposition 2.33.**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} (\subset E)$  est un ensemble borné.

**Remark 2.34.** dans  $\mathbb{R}^d$  muni de  $d_2$  (distance euclidienne)

$$X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$$

$$X = (x_1, \dots, x_d)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = x_i \quad (1 \leq i \leq d)$$

**Proposition 2.35.** la limite d'une suite convergente est unique.

**Proof.**

$$\begin{aligned} & \text{Si } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \text{ et } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X' \\ & d(X, X') \leq \underbrace{d(X, X_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(X_n, X')}_{\rightarrow 0} \Rightarrow d(X, X') = 0 \Rightarrow X = X' \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.36.** (lien avec l'adhérence)

1.  $x \in \text{Adh}(A)$  si et seulement s'il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

2.  $A$  est fermé ssi pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x \in E$  on a  $x \in A$

- Intuition.** 1. Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est d'éléments de  $A$  ( $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ ), donc elle converge vers un éléments  $x$  qui peut être soit dans  $A$ , soit à la borne des éléments de  $A$ , alors à la frontière.
2. Si la limite de toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des éléments de  $A$  est aussi dans  $A$ , alors la frontière de  $A$  est incluse dans  $A$ . Car l'une des suites tend vers la borne.

**Proof.** de Prop. 2.36

1. ( $\Leftarrow$ ) Soit  $(x_n)$  avec  $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

J'ai  $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $x_n \in A$ , donc

$$\inf_{y \in A} (d(x, y)) = 0 = d(x, A)$$

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Adh}(A)$$

( $\Rightarrow$ ) Soit  $x \in \text{Adh}(A)$

$$\Leftrightarrow d(x, A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \text{ tel que } d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$$

Prendre  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , je pose  $u_n = x_{\frac{1}{n}}$ .  $u_n \in A$   $d(x, u_n) < \frac{1}{n}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$

2. ( $\Rightarrow$ ) Soit  $A$  fermé, donc

$$A = \text{Adh}(A)$$

Si  $(x_n)$  suite dans  $A$  qui converge vers  $x$ .

$$x \in \text{Adh}(A) = A$$

( $\Leftarrow$ ) On dit que  $\text{Adh}(A) \subset A$ . Comme  $A \subset \text{Adh}(A)$ , donc  $A = \text{Adh}(A)$

□

## 2.9 Suites de Cauchy

**Definition 2.37.**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite dans  $E$  est de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, p \geq N(\varepsilon), d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$$

**Intuition.** Une suite de Cauchy c'est comme on mesure un point et on le localise, i.e:

1. On dit qu'il est entre 0 et 1.
2. Ensuite, on précise plus et on dit qu'il est entre 0.5 et 0.6.
3. Puis, entre 0.55 et 0.56

On peut infiniment augmenter le niveau de précision. C'est ça l'idée d'une suite de Cauchy.

**Proposition 2.38.** 1. Toute suite de Cauchy est bornée.

2. Toute suite convergente est de Cauchy

**Proof.** 1. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy. Alors, par définition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, p \geq N, d(x_n, x_p) < \varepsilon$$

Soit  $\varepsilon = 1$ . Donc  $\exists N \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n, p \geq N, d(x_n, x_p) < 1$ , donc  $\forall n \geq N, d(x_n, x_N) < 1$ . On a donc:

$$\forall n \in N, d(x_n, x_N) < 1 + \overbrace{\sup_{1 \leq i \leq N} d(x_n, x_N)}^{=: r_0}$$

Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B(x_N, 1 + r_0)$  donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée.

2. Soit  $(x_n)$  une suite avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  avec  $x \in E$ .

- Hyp:  $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N(\frac{\varepsilon}{2}), d(x_n, x) \leq \varepsilon/2$
- À montrer:  $\varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n, p \geq M(\varepsilon), d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$

$$d(x_n, x_p) < d(x_n, x) + d(x, x_p) \text{ si } n, p \geq N(\frac{\varepsilon}{2}) \quad d(x_n, x_p) \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

**Definition 2.39.**  $(E, d)$  est complet si toute suite de cauchy dans  $E$  est convergente.

**Definition 2.40.** Un espace métrique  $(E, d)$  est **complet** si toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  converge vers une limite  $x$  qui appartient aussi à  $E$ .

**Intuition.** Ce n'est pas très correcte à dire, mais, on peut dire qu'une suite de Cauchy  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge toujours car il existe un moment  $N \in \mathbb{N}$  après lequel les éléments sont très proches mais la limite n'appartient pas toujours à l'ensemble dans lequel cette suite est de Cauchy.

Par exemple, une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeur dans  $\mathbb{Q}$  qui converge vers  $\sqrt{2}$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans  $\mathbb{R}$  elle est convergente et de Cauchy, mais dans  $\mathbb{Q}$  elle est de Cauchy mais pas convergente car la limite  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Example 2.41.** Un espace métrique  $(]0, 1], d)$  avec  $d$  une distance euclidienne n'est pas complet, car soit une suite:  $x_n = \frac{1}{n}$  dont la limite est 0. Par contre,  $0 \notin ]0, 1]$ . Donc cet espace n'est pas complet.



Figure 2.8:  $(]0, 1], d)$  n'est pas complet

**Example 2.42.** Un espace  $(\mathbb{Q}, d)$  n'est pas complet. Car on peut prendre une suite  $x_n$  tendant vers  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

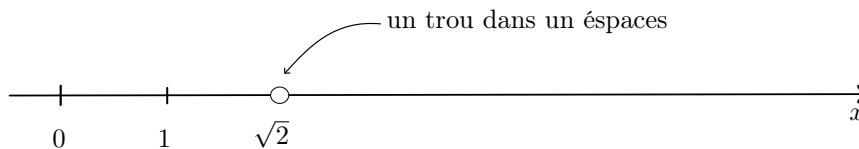


Figure 2.9:  $\mathbb{Q}$  pas complet

**Proposition 2.43.**  $\mathbb{R}^d$  muni de la distance usuelle est complet.

**Proof.**

$$X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$$

$$|x_i - y_i| \leq d(X, Y) = \|X - Y\|_2 \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

les suites réelles  $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$  sont de Cauchy si  $(X_n)$  est de Cauchy.  $\square$

**Property.**  $\mathbb{R}$  est complet

**Proof.** (Suit de la propriété de la borne supérieure)

Il existe  $x_i \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq i \leq d$  tels que  $|x_{i,n} - x_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$d(X, Y) \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$$

donc  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ ,  $X = (x_1, \dots, x_d)$   $\square$

## 2.10 Sous-suites

**Definition 2.44.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $E$ . Une suite

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec } y_n = x_{\phi(n)}$$

où  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante est appelée **sous-suite** de la suite  $(x_n)$ .

**Example 2.45.** Soit une application  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\phi(n) = 2n$ . Donc  $(x_n)_{\phi(n)}$  est une sous-suite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et:

$$(x_n)_{\phi(n)} = \{x_0, x_2, x_4, \dots\}$$

**Proposition 2.46.** 1. Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la limite de cette suite.

Cela signifie que,  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tq  $\exists x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

$$\forall \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\phi(n)} = x$$

2. Si  $(x_n)$  est de Cauchy et admet une sous-suite qui converge vers  $X$ , alors  $(x_n)$  converge vers  $x$ .

**Proof.** 1. Soit  $(x_n)$  avec  $\lim x_n = x$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \text{ tq si } n \geq N(\varepsilon), d(x_n, x) \leq \varepsilon$$

Soit  $y_n = x_{\phi(n)}$  une sous-suite.

- But: Soit  $\varepsilon > 0$ , trouver  $N(\varepsilon)$  tq si  $n \geq N(\varepsilon)$ ,  $d(\underbrace{y_n}_{:= x_{\phi(n)}}, x) \leq \varepsilon$

Je choisis  $N(\varepsilon)$  tel que si  $n \geq N(\varepsilon)$  alors  $\phi(n) \geq M(\varepsilon)$ , donc  $d(y_n, x) = d(x_{\phi(n)}, x) \leq \varepsilon$ . C'est possible car  $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ,  $N(\varepsilon) = M(\varepsilon)$

- Hyp1:  $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon)$  tq si  $n, p \geq M(\varepsilon)$   $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$
- Hyp2:  $\forall \varepsilon > 0 \exists P(\varepsilon)$  tq si  $p \geq P(\varepsilon)$ ,  $d(y_p, x) \leq \varepsilon$ ,  $d(y_p, x) = d(x_{\phi(p)}, x)$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\phi(p)}) + d(x_{\phi(p)}, x) \quad \text{par l'inégalité triangulaire}$$

$$d(x_n, x_{\phi(p)}) \leq \varepsilon \text{ si } n \geq M(\varepsilon) \text{ et } \phi(p) \geq M(\varepsilon)$$

$$d(x_{\phi(p)}, x) \leq \varepsilon \text{ si } p \geq P(\varepsilon)$$

Si  $n \geq M(\varepsilon)$ , je choisis  $p$  tel que  $\phi(p) \geq M(\varepsilon)$  et  $p \geq P(\varepsilon)$ . Je fixe ce  $p$ !

$$\text{si } n \geq M(\varepsilon) \text{ alors } d(x_n, x) \leq 2\varepsilon$$

□

## 2.11 Procédé de construction de l'intérieur et l'adhérence

J'ai  $A \subset \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ). Je dois trouver  $\text{Int}(A)$  et  $\text{Adh}(A)$

1. Je dessine  $A$  sur une feuille
2. Je pense que  $\text{Int}(A) = C$  ( $C$  dit être inclu dans  $A$ !)
  - (a) Je montre que  $C$  est ouvert (facile), donc

$$C \subset \text{Int}(A)$$

car  $\text{Int}(A)$  est le plus grand ouvert inclu dans  $A$ .

- (b) Je montre que  $\text{Int}(A) \subset C$ , i.e je montre que les points dans  $A$  mais pas dans  $C$  ne sont pas dans  $\text{Int}(A)$ : je prends  $X \in A, X \notin C$ , je montre que  $X \notin \text{Int}(A)$  Je construit une suite  $(X_n)$  avec  $X_n \notin A$  mais  $X_n \rightarrow X$ .
3. Je pense que  $\text{Adh}(A) = B$  (il faut que  $A \subset B$ )
  - (a) Je montre que  $B$  est fermé (facile)
 

donc  $\text{Adh}(A) \subset B$
  - (b) On montre que  $B \subset \text{Adh}(A)$ : On fixe  $X \in B$ , on cherche une suite  $(X_n)$  avec  $X_n \in A$  et  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ .  
On regarde seulement les  $X \in B, X \notin A$

**Example 2.47.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y \leq 4, x \neq y\}$$

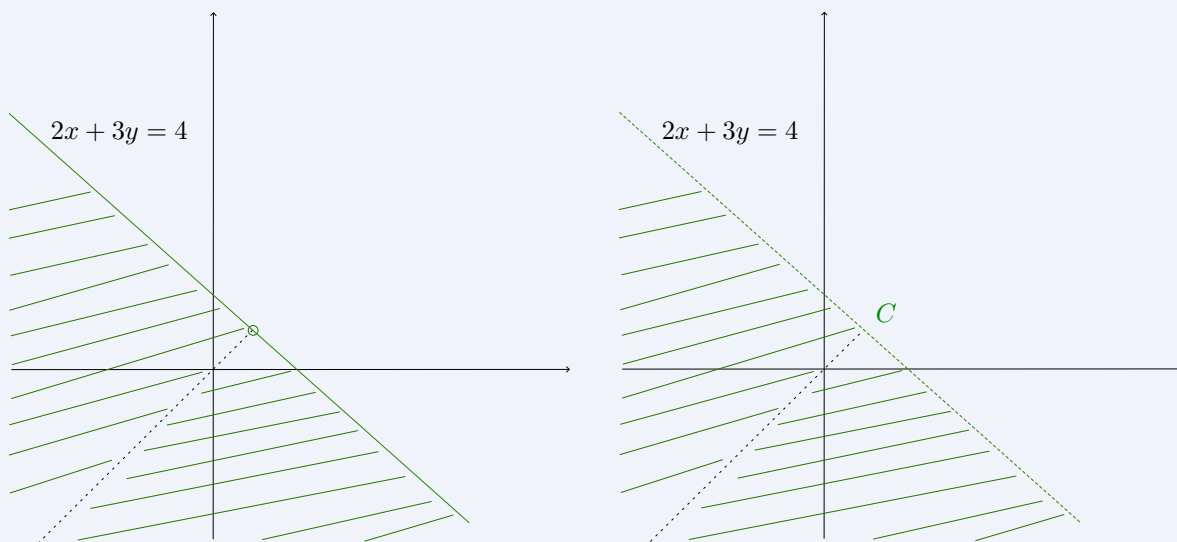


Figure 2.10: Exemple de l'intérieur

- Je devine que  $\text{Int}(A) = C = \{(x, y) \mid 2x + 3y < 4, x \neq y\}$
- Convect:  $\{(x, y) \mid 2x + 3y < 4, x < y\} \cup \{(x, y) \mid 2x + 3y < 4, x > y\}$

Je construis une suite  $(X_n)$  avec  $X_n \notin A$  mais  $X_n \rightarrow X$ . Soit  $X \in A, X \notin C, X = (x, y)$  donc:  
 $2x + 3y = 4 \quad x \neq y$

$$X_n = \left(x, y + \frac{1}{n}\right)$$

$$2x_n + 3y_n = 2x + 3y + \frac{3}{n} = 4 + \frac{3}{n} > 4$$

$$X_n \notin A \text{ mais } X_n \rightarrow X$$

**Exemple 2.48.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = x^{-1}\}$$

$$\text{Int}(A) = \emptyset? \quad C = \emptyset$$



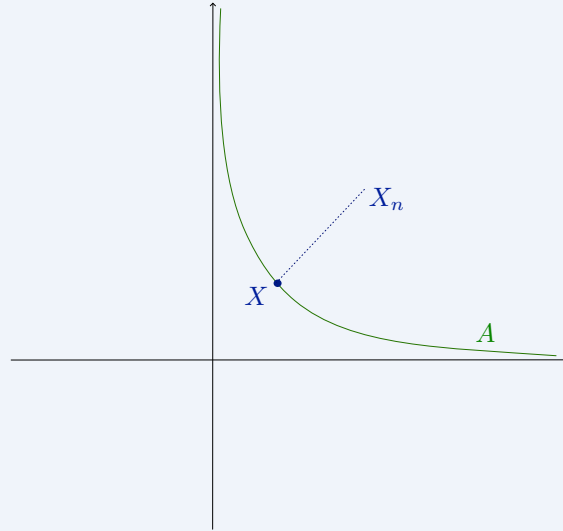


Figure 2.11: Exemple de l'intérieur de l'hyperbole

$\emptyset$  ouvert, donc  $C \subset \text{Int}(A)$   
 Soit  $X \in A$   $X \notin C$ , donc  $X \in A$ .

$$X_n := (x, y + \frac{1}{n}) \quad X_n \notin A$$

$$x_n y_n = xy + \frac{x}{n} = 1 + \frac{x}{n} \neq 1$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \text{ donc } X \notin \text{Int}(A)$$

$$\text{Int}(A) = \emptyset$$

**Example 2.49.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = x^{-1}\}$$

$\text{Adh}(A) = ?$

Je pense que  $\text{Adh}(A) = A$  ( $B = A$ ). Il suffit de montrer que  $A$  est fermé.

$$x > 0 \quad y \leq \frac{1}{x} \quad y \geq \frac{1}{x}$$

Si  $X_n = (x_n, y_n)$   $X_n \in A$  et  $X_n \rightarrow X$ , alors  $X \in A$

$$X = (x, y) \quad \begin{matrix} x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_n \rightarrow x \\ \frac{1}{x_n} \rightarrow y \end{matrix} \quad (x_n > 0)$$

donc  $x > 0$  et  $y = \frac{1}{x}$  donc  $X \in A$

$A$  est fermé

**Example 2.50.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y \leq 4, x \neq y\}$$



Figure 2.12: example-adherence

1.  $B$  est fermé (facile), donc  $\text{Adh}(A) \subset B$
2. Soit  $X \in B$ . On montre que  $X \in \text{Adh}(A)$  (on cherche  $X_n \in A$  avec  $X_n \rightarrow X$ )  
Je regarde juste  $X \in B, X \notin A$

$$X_n = (x_n, y_n) \in A \quad x_n \rightarrow x \text{ et } y_n \rightarrow y$$

$$x_n = x + \frac{1}{n}, y_n = y = x$$

$$X_n \rightarrow X \text{ et } 2x_n + 3y_n = 2x + 3y - \frac{2}{n} \leq 4 \text{ et } x_n \neq y_n$$

donc  $X_n \in A$

### Example 2.51.

$$A = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| < 1\}$$

$$\text{Int}(A) = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$$

$$\text{Adh}(A) = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

### Example 2.52.

$$A = \{(x, y) \mid x > 0, y = \sin(\frac{1}{n})\}$$

$$\text{Adh}(A) = A \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \quad \text{Int}(A) =$$

## 2.12 Compacité

**Definition 2.53.** Soit  $F \subset E$ . Un recouvrement ouvert de  $F$  est une collection  $(U_i)_{i \in I}$  où  $U_i$  sont des ouverts et  $F \subset \cup_{i \in I} U_i$  ("les  $U_i$  recouvrent  $F$ ")



Figure 2.13: recouvrement-ouvert

**Example 2.54.** •  $U_x = B(x, \frac{1}{2})$

- $\bigcup_{x \in F} U_x$  contient  $F$
- $(U_x)_{x \in F}$  recouvrement ouvert de  $F$

**Definition 2.55.**  $K \subset E$  est compact si de tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $F$  on peut extraire un sous-recouvrement fini: je peux choisir  $i_1, \dots, i_n \in I$  tels que

$$F \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

**Property.** Un ensemble fini est compact.

$$F = \{a_1, \dots, a_p\} \quad a_j \in E$$

$(U_i)_{i \in I}$  recouvre  $F$ . Je choisis  $a_j$  (point de  $F$ ), il existe un  $i \in I$  noté  $i(j)$  tel que

$$a_j \in U_{i(j)} \quad F \subset U_{i(1)} \cup \dots \cup U_{i(p)}$$

**Theorem 2.56.** Caractérisation à l'aide de suites.

$K \subset E$  est compact ssi toute suite d'éléments de  $K$  admet une sous-suite qui converge vers un élément de  $K$ .



Figure 2.14: compactness-with-sequences

**Example 2.57.** •  $E = \mathbb{R}^2$

- $F = B(x_0, r)$  pas compact
- $x_n \in F, x_n \rightarrow x, x \notin F$
- si  $y_n = x_{\phi(n)}, y_n \rightarrow x$  mais  $x \notin F$



Figure 2.15: suite-sans-sous-suite-convergente

**Example 2.58.**

$$F = \{(x, y) : x \geq 0, -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

$u_n = (n, 0)$  ( $u_n$ ) suite dans  $F$  sans sous-suite convergente.

**Proposition 2.59.** 1.  $K$  compact  $\Rightarrow K$  fermé et borné. (réciproque est fausse en général!)

2. Si  $K$  compact et  $F$  fermé, alors  $K \cap F$  est compact.

3. Si  $K$  compact, toute suite de Cauchy dans  $K$  converge dans  $K$

**Proof.** 1. Soit  $K$  compact.  $K$  fermé si  $(u_n)$  suite dans  $K$  qui converge vers  $u$ , alors  $u \in K$ .

clair:  $(u_n)$  a une suite-suite  $v_n = u_{\phi(n)}$  avec  $v_n \rightarrow v \in K, u_n \rightarrow u$ , donc  $v_n \rightarrow u \Rightarrow u = v \Rightarrow u \in K$

$K$  est borné:

Soit  $U_x = \bigcup_{x \in K} B(x, 1)$  un recouvrement ouvert de  $K$ . Or  $K$  est compact, donc il existent  $x_1, \dots, x_n \in K$ , tels que  $K \subset \bigcup_{i=1, \dots, n} B(x_i, 1)$ , donc  $K$  est borné.

2.  $K$  compact et  $F$  fermé.  $(u_n)$  une suite dans  $K \cap F$ .  $u_n \in K$ .  $\exists$  sous-suite  $v_n = u_{\phi(n)}$  avec  $v_n \rightarrow x \in K$ .  $v_n \in F$ ,  $v_n \rightarrow x$ ,  $F$  fermé donc  $x \in F$ ,  $x \in K \cap F$ .
3. Soit  $(u_n)$  suite de Cauchy dans  $K$ .  $(u_n)$  a une sous-suite  $v_n = u_{\phi(n)}$  qui converge vers  $x \in K$ .  $u_n \rightarrow x \in K$

□

## 2.12.1 Compacité dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle

**Theorem 2.60.** (Borel-Lebesgue)

dans  $\mathbb{R}^n$  avec la distance usuelle  $K$  est compact ssi  $K$  est fermé et borné

**Proposition 2.61.** Les boules fermées  $B_f(x_0, r)$  sont compactes dans  $\mathbb{R}^n$ .

- Implique le théorème: Soit  $K$  fermé et borné.  $K$  borné, donc  $K \subset B_f(0, r)$  avec  $r$  grand, donc  $K = K \cap B_f(0, r)$ . Donc  $K$  compact.

**Proof.** de la prop. 2.61

1.  $n = 1$ . À montrer:  $[a, b]$  est compact.

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $[a, b]$ . Soit  $F$ : les  $x \in [a, b]$  tels que  $[a, x]$  est recouvert par un nombre fini de  $U_i$ .

But: montrer que  $b \in F$ ! (si  $x \in F$ , et  $x' \leq x$   $x' \in F$ )

(a)  $F \neq \emptyset$ :  $a \in F$   $[a, a] = \{a\}$

(b)  $c = \sup(F)$ . On montre que  $c = b$

Supposons que  $c < b$ .

- $c$  appartient à un des  $U_i$  noté  $U_{i_0}$
- $U_{i_0}$  est ouvert,  $c \in U_{i_0}$  donc  $\exists \delta_0 > 0$  tel que  $]c - \delta_0, c + \delta_0[ \subset U_{i_0}$
- $c = \sup(F)$ :  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists x_\delta \in F$  avec  $c - \delta < x_\delta \leq c$

$$\delta = \delta_{0,2} \quad \exists x_{\delta_0} \in F, c - \delta_{0,2} < x_{\delta_0}$$

$[a, x_{\delta_0}]$  recouvert par  $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$  et  $]c - \delta_0, c + \delta_0[ \subset U_{i_0}$  donc  $[a, c + \delta_{0,2}]$  est recouvert par  $U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ , donc  $c + \delta_{0,2} \in F$  contredit que  $c = \sup(F)$ . Donc  $c = b$ .  
 $F$  c'est  $[a, b[$  ou  $[a, b]$ .  $b \in F \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  tq  $[a, b] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ ,  $[a, b]$  compact.

□

## 2.13 Limites et continuité

### 2.13.1 Limites

Je prends  $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$  deux espaces métriques et  $F : E_1 \rightarrow E_2$ .  $x_0 \in E_1, l \in E_2$ .

**Definition 2.62.** .

1. Limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = l$$

si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tq si  $d_1(x_0, x) < \delta$  alors  $d_2(l, F(x)) < \varepsilon$

2.  $F$  continue en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$

3.  $F$  est continue (sur  $E$ ) si elle est continue en tout  $x_0$  de  $E$

**Proposition 2.63.** Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1.  $F : (E_1, d_1) \rightarrow (E_2, d_2)$  est continue.
2.  $\forall U_2 \subset E_2$  ouvert,  $F^{-1}(U_2)$  est ouvert dans  $E_1$ .
3.  $\forall F_2 \subset E_2$  fermé,  $F^{-1}(F_2) \subset E_1$  est fermé.
4.  $\forall (x_n)$  suite dans  $E_1$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$$

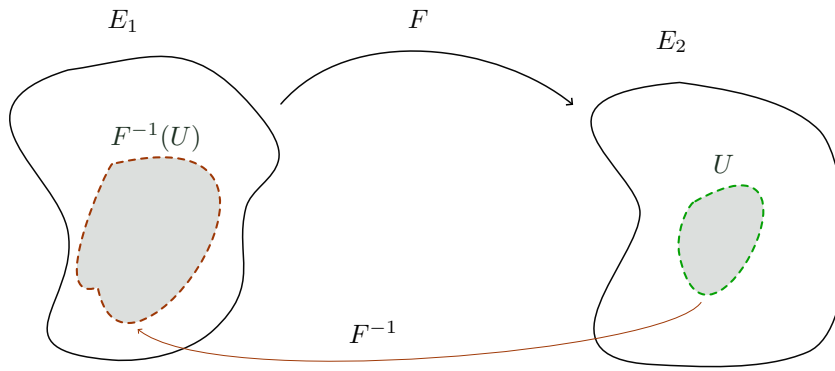


Figure 2.16: continuité-topologique

**Exemple 2.64.**

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \sin(y) - e^x > 1\}$$

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto F((x, y)) = x \sin(y) - e^x$$

évidemment continue.

$$U = F^{-1}(\underbrace{]1, +\infty[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$$

**Proof.**  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$ : Hyp:  $F$  continue et  $U_2 \subset E_2$  est ouvert.

Conclusion:  $U_1 = F^{-1}(U_2)$  est ouvert?

Je fixe  $x_0 \in U_1$  ( $F(x_0) \in U_2$ ).

1.  $U_2$  ouvert  $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$  tq  $B_2(F(x_0), \varepsilon_0) \subset U_2$
2.  $F$  continue en  $x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } d_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_2(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$$

$$x \in B_1(x_0, \delta) \Rightarrow F(x) \in B_2(F(x_0), \varepsilon)$$

$\delta_0 =$  le  $\delta$  qui marche pour  $\varepsilon_0$

$$x \in B_1(x_0, \delta_0) \Rightarrow F(x) \in B_2(F(x_0), \varepsilon_0)$$

Donc  $B_1(x_0, \delta_0) \subset F^{-1}(U_2)$ . Donc  $F^{-1}(U_2)$  ouvert.

$$2 \Rightarrow 3: : F^{-1}(U_2)^c = F^{-1}(U_2^c)$$

□

**Example 2.65.** résultat de cette proposition. Prenons la fonction:  $f(x) = x^2$ .  $f^{-1}(]4, 9[) = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x^2 < 9\} = ]-3, -2[ \cup ]2, 3[$ . Autrement dire, la continuité de  $f$  (évident) donne que  $U = ]4, 9[$  ouvert, alors  $f^{-1}(U)$  aussi ouvert.

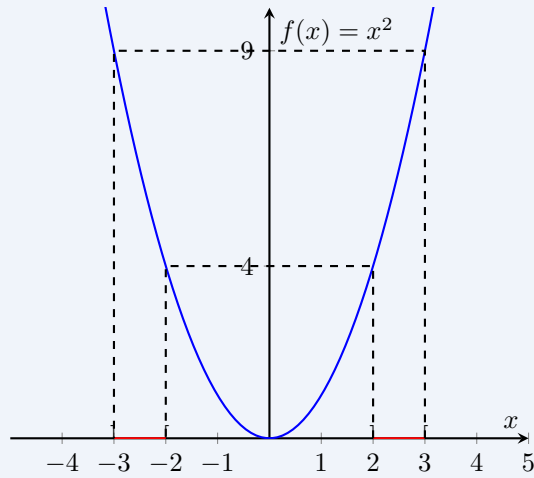


Figure 2.17: Exemple en  $f(x) = x^2$

# CHAPTER 3

## FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

### 3.1 Introduction

Cadre:  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$   $D \subset \mathbb{R}^n$

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^p$$

sur  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$  distances usuelles, sur  $D$  la distance héritée de  $\mathbb{R}^n$ .  
avec des coordonnées cartésiennes

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_p(x_1, \dots, x_n))$$

où  $F_i : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ continue}$$

on connaît:

**Lemma 3.1.**

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ continue ssi:}$$

chaque  $F_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  est continue

**Proof.**  $Y_n = (Y_{1,n}, \dots, Y_{p,n})$  suite des  $\mathbb{R}^p$ .  $Y_n \rightarrow Y$  ssi  $Y_{i,n} \rightarrow Y_i$  ( $1 \leq i \leq p$ )

□

**Proposition 3.2.** Soit  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

- $f + g, f \times g$  sont continues sur  $D$
- si  $g(X) \neq 0, \forall X \in D, \frac{f}{g}$  continue sur  $D$
- si  $f(D) \subset I$  intervalle et  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue, alors  $\phi \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.
- 

$$P : X \rightarrow \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq d} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n}$$

$$a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \mathbb{R}, d = \text{degré de } P.$$

$$P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue.}$$

### 3.2 Comment montrer qu'un ensemble est ouvert ou fermé

D'après la proposition 2.63, si  $f : D \rightarrow Q$  est continue et  $K \subset Q$  ouvert et  $K_f \subset Q$  fermé, donc:

- $f^{-1}(K)$  est aussi ouvert
- $f^{-1}(K_f)$  est aussi fermé

Cela nous permet de simplifier les preuves qu'un ensemble est fermé ou ouvert. Voici quelques exemples:



**Exemple 3.3.**

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + 2x_2x_3^2 < 2, \sin(x_1x_2) > 0\}$$

$$D = D_1 \cap D_2$$

$$D_1 = f_1^{-1}(]-\infty, 2[)$$

$$f_1(x) = x_1^2 + 2x_2x_3^2$$

$$D_2 = f_2^{-1}(]0, +\infty[)$$

$$f_2(x) = \sin(x_1x_2)$$

$D_1, D_2$  sont ouverts, donc  $D$  ouvert.

**Exemple 3.4.**

$$D = \{(x_1, x_2) : \frac{e^{x_1-2x_2^2}}{x_1^2 + 3x_2^4} \geq 1\}$$

$$D = f^{-1}([1, +\infty[)$$

$$f(x) = \frac{e^{x_1-2x_2^2}}{x_1^2 + 3x_2^4}$$

$[1, +\infty[$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ , alors  $D$  est aussi fermé car  $f$  continue sur  $[1, +\infty[$

### 3.3 Lien avec la compacité

**Theorem 3.5.** Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  continue et  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact. Alors,  $F(K)$  est compact dans  $\mathbb{R}^p$

**Remark 3.6.** On peut remplacer  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$  par  $E, F$  espaces métriques.

**Remark 3.7.**  $U$  ouvert,  $f$  continue  $\nRightarrow f(U)$  ouvert:

**Exemple 3.8.**

$$f(]0, 1[) = [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin(2\pi x)$$



Figure 3.1: Exemple qu'une image de l'ouvert n'est pas ouvert

### Example 3.9.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \arctan x.$$

$$f\left(\underbrace{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}_{\text{pas compact}}\right) = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{pas compact}}$$

**Proof.** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $F(K)$ . On a:  $v_n = F(u_n)$  où  $u_n \in K$ .  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite dans  $K$ ,  $K$  compact, donc:  $\exists$  sous suite  $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  avec

$$u_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \in K$$

$F$  continue: donc  $F(u_{\phi(n)}) = v_{\phi(n)} \rightarrow F(u) \in K$ .  $(v_n)$  a une sous suite  $(v_{\phi(n)})$  qui converge vers  $F(u) \in F(K)$ , donc  $F(K)$  compact!  $\square$

**Theorem 3.10.** Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact. Alors  $f$  est bornée sur  $K$  et atteint ses bornes. I.e,  $Q := f(K)$  est bornée et atteint les bornes.

**Proof.** Weierstrass:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $K = [a, b]$ .

Je prends  $(E, d)$  à la place de  $\mathbb{R}^n$ .  $f$  bornée sur  $K$ :  $\exists c_1, c_2$  telles que

$$c_1 \leq f(x) \leq c_2, \forall x \in K \Leftrightarrow f(K) \subset [c_1, c_2]$$

C'est clair car  $f(K)$  est compact dans  $\mathbb{R}$ , donc bornée.

$$m = \inf_{x \in K} f(x) = \inf f(K)$$

$$M = \sup_{x \in K} f(x) = \sup f(K)$$

À montrer:  $\exists x \in K$  tel que  $f(x) = m$  et  $\exists x' \in K$  tel que  $f(x') = M$

$m = \inf f(K)$ , ça veut dire que

1.  $f(K) \subset [m, +\infty[$  ( $m$  minorant de  $f(K)$ )

2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in f(K)$  tel que  $y \leq m + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{n}$  donne une suite  $y_n \in f(K)$  telle que  $y_n \rightarrow m$

$$y_n = f(x_n) \qquad x_n \in K$$

$K$  compact:  $\exists$  sous suite  $x_{\phi(n)}$  telle que

$$x_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in K$$

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue, donc

$$f(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)} \rightarrow f(x)$$

Mais,  $y_n \rightarrow m$ , donc  $y_{\phi(n)} \rightarrow m$  et  $y_{\phi(n)} \rightarrow f(x)$ , donc  $m = f(x)$ ,  $m$  est atteint.

Pour montrer que  $M$  est atteint la preuve est identique.  $\square$

## 3.4 Continuité partielle (inutile)

$$D \subset \mathbb{R}^n \quad f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \quad D \text{ ouvert}$$

Soit  $A = (a_1, \dots, a_n) \in D$ , il existe des intervalles ouverts  $I_1, \dots, I_n$  avec  $a_i \in I_i$  tels que  $I_1 \times \dots \times I_n \subset D$

Je peux poser

$$f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad t \in I_i$$

**Example 3.11.**

$$n = 2 \quad f_1(t) = f(t, a_2) \quad f_2(t) = f(a_1, t)$$

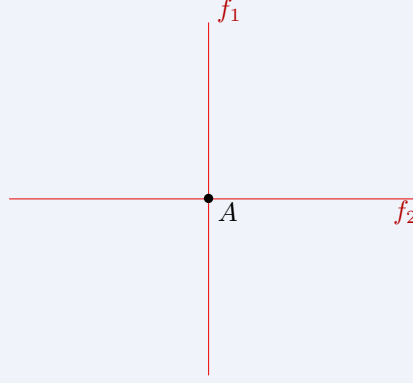


Figure 3.2:  $f$  est continue en  $A = (a_1, a_2)$

**Definition 3.12.**  $f$  est partiellement continue en  $A = (a_1, \dots, a_n)$  si les  $f_i(t)$  sont continues en  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )

- continuité:  $f(x_1, x_2) \xrightarrow{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} f(a_1, a_1)$
- partielle:  $f(x_1, a_2) \xrightarrow{x_1 \rightarrow a_1} f(a_1, a_2)$  et  $f(a_1, x_2) \xrightarrow{x_2 \rightarrow a_2} f(a_1, a_2)$
- Bonne notion: continuité implique la continuité partielle (réciproque fausse)

**Example 3.13.**

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

- partiellement continue en  $(0, 0)$

$$f(x_1, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ 0 & \text{si } x_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$f(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2$$

- pas continue en  $(0, 0)$ :

$$x_1 = r \cos(\theta) \quad x_2 = r \sin(\theta)$$

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r^2} = \cos(\theta) \sin(\theta) & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \cos(\theta) \sin(\theta) \neq 0 \quad \text{si } \theta \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \dots$$

# CHAPTER 4

## DÉRIVATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

### 4.1 Introduction

$n = 1$ : comment définir  $f'(x_0)$ ?

1.  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
2. DL:  $f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$  où  $a_1 = f'(x_0)$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \text{ ouvert} \quad X_0 \in D \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

**Definition 4.1.**  $f$  est dérivable en  $X_0$  dans la direction  $\vec{u}$  ( $\neq \vec{0}$ ) si la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = f(X_0 + t\vec{u}). \end{aligned}$$

est dérivable en  $t = 0$

Autrement dire, la dérivée directionnelle (dans la direction de vecteur  $\vec{u}$ ) est donnée par:

$$D_{\vec{u}}f(X_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t} \quad (4.1)$$

Dans le cas  $\mathbb{R}$  on a eu la définition de la dérivée:

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

La direction était toujours la même (l'axe  $x$ ), on peut voir ça comme prendre un vecteur  $u = (1)$  et utiliser comme la direction seulement l'axe  $x$  et on obtient l'eq. (4.1)

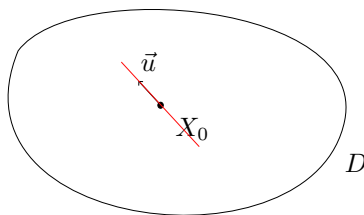


Figure 4.1: Dérivée directionnelle

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  admet des dérivées partielles en  $X_0$  si  $f$  dérivable en  $X_0$  dans les directions  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ .

$$\frac{d}{dt} f(X_0 + t\vec{e}_i) \big|_{t=0}$$

noté

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$$

Par contre, une fonction peut être dérivable dans toutes les directions en un point mais ne pas être continue en ce point, voici

**Exemple 4.2.**

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 = x_1^2 \text{ et } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Figure 4.2: Exemple dérivable mais pas continue

$$f((0, 0) + t\vec{u}) = f(t\vec{u}) = 0$$

si  $t \neq 0$  et  $t$  petit, on a  $f$  dérivable dans toutes les directions.

Mais,  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ :

$$X_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \quad X_n \rightarrow (0, 0)$$

$$\forall n, f(X_n) = 1 \quad f(X_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(0, 0)$$

**Définition 4.3.** Soient  $D \subset \mathbb{R}^n$  ouvert et  $X_0 \in D$ , la fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est **différentiable** en  $X_0$  s'il existe un vecteur  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$f(X_0 + \vec{X}) = f(X_0) + \vec{u} \cdot \vec{X} + \|\vec{X}\| \varepsilon(\vec{X})$$

$$\text{où } \lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{0}} \varepsilon(\vec{X}) = 0$$

**Intuition.** Je propose de réfléchir sur ce que cette définition signifie. Rappelons ce que signifie intuitivement la dérivée au cas  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$  ( $n = 1$ ). Intuitivement, si on zoom la fonction qu'on dérive elle se comporte et a l'air d'être une ligne. Dans le cas  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ , si on zoom la fonction elle a l'air d'être un plan. En effet, c'est ça l'idée de la dérivée, que si on fait un petit petit pas d'un fourmit, le déplacement est aussi petit et uniforme. En augmentant  $n$ , la dérivée donne des scalaire pour contruire un sous-espace de dimension  $n - 1$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

**Note.** Pour montrer qu'une fonction est différentiable il suffit de montrer que ces dérivées partielles sont continues.

## 4.2 DL à l'ordre 1

Cette représentation de la dérivée comme un sous-espace lorsqu'on zoom est représenté par le DL à l'ordre 1. De la définition 4.3, ce vecteur  $\vec{u}$  se note  $\vec{\nabla} f(X_0)$  (gradient de  $f$  en  $X_0$ )

**Proposition 4.4.**  $f$  différentiable en  $X_0 \Rightarrow f$  dérivable dans toutes les directions en  $X_0$ , et alors:

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} f(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} f(X_0) \end{pmatrix}$$

dans la base  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

**Proof.**  $f$  est continue en  $X_0$   $|\vec{u} \cdot X| \leq |\vec{u}||X|$

1. continuité

$$\begin{aligned} |f(X_0 + X) - f(X_0)| &\leq |\vec{u} \cdot X| + \|X\| |\varepsilon(X)| \\ &\leq \|X\| (\|\vec{u}\| + |\varepsilon(x)|) \leq c\|X\| \end{aligned}$$

$$\text{donc: } f(X_0 + X) \xrightarrow[X \rightarrow \vec{0}]{} f(X_0)$$

2. .

$$\begin{aligned} g(t) = f(X_0 + t\vec{v}) &= f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0) \cdot t\vec{v} + \|t\vec{v}\| \cdot \varepsilon(t\vec{v}) \\ &= f(X_0) + t\vec{\nabla} f(X_0) \cdot \vec{v} + |t|\|\vec{v}\|\varepsilon_1(t) \\ &= f(X_0) + t\vec{\nabla} f(X_0) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

donc:

$$\frac{d}{dt} f(X_0 + t\vec{v}) \big|_{t=0} = \vec{\nabla} f(X_0) \cdot \vec{v}$$

(prendre  $\vec{v} = \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  pour les coordonnées de  $\vec{\nabla} f(X_0)$ )

□

#### Definition 4.5.

$$D \subset \mathbb{R}^n \quad D \text{ ouvert} \quad f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } D$$

Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  ouvert, alors la fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$  si  $f$  est différentiable en tout  $X \in D$  et la fonction

$$\begin{aligned} &: D \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &X \longmapsto \vec{\nabla} f(X) \end{aligned}$$

est continue.

**Theorem 4.6.**  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$  ssi  $f$  admet des dérivées partielles continues en tout point de  $D$ .

#### Example 4.7.

$$f(X) = f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0) \cdot (X - X_0) + \|X - X_0\| \varepsilon(X - X_0)$$

linéaire

Dans  $\mathbb{R}^3$ :  $f(x, y, z)$

$$S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$$

$S$ : surface dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $X_0 \in S$  plan tangent à  $S$  en  $X_0$ , plan d'équation:

$$f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0) \cdot X = 0$$



Figure 4.3: Exemple d'une surface différentiable

## 4.3 Extrema et points critiques

**Definition 4.8.** Extremum (local) de  $f$  est un minimum ou un maximum (local) de  $f$

- $X_0$  est un maximum local de  $f$  si:  $\exists \delta > 0$  tel que

$$\forall X \in D, f(X) \leq f(X_0) \text{ avec } d(X, X_0) \leq \delta$$

- $X_0$  est un minimum local de  $f$  si:  $\exists \delta > 0$  tel que

$$\forall X \in D, f(X) \geq f(X_0) \text{ avec } d(X, X_0) \leq \delta$$

**Definition 4.9.** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $X_0 \in D$ , alors si

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \vec{0}$$

donc  $X_0$  est un **point critique**.

**Intuition.** Le lien entre les extremums et le point critique:

1. pour que l'extremum existe, il faut qu'il existe au moins un point critique - c'est un critère nécessaire mais pas suffisant.
2. tout extremum local est un point critique

Les points critiques facilitent la recherche des extremums locaux.

**Theorem 4.10.** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable,  $D$  ouvert et  $X_0 \in D$  (sinon, si  $D$  pas ouvert, il faut  $X_0 \in \text{Int}(D)$ ) alors:

$$X_0 \text{ extremum local} \Rightarrow X_0 \text{ point critique}$$

**Example 4.11.** Pas tout point critique est un extremum local



Figure 4.4: Point critique qui n'est pas un extremum local

## 4.4 Dérivées partielles d'ordre $\geq 2$

**Definition 4.12.** Soit  $D$ , alors  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{C}^k$  si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $\partial_{x_i} f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $\mathcal{C}^{k-1}$

**Definition 4.13.** Soient  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_i \in \mathbb{N}$ . On pose

$$\partial_x^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

est la notation pour la dérivée d'ordre supérieure.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_2} f$$

**Theorem 4.14.** Lemme de Schwarz

Si  $f \in \mathcal{C}^2(D)$  alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) \quad \forall X \in D, \forall i, j$$

**Example 4.15.** où une fonction admet des dérivées partielles d'ordre supérieure mais  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X)$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

$$r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(2\theta) = \frac{1}{4} r^2 \sin(4\theta)$$

On calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0)$ ? C'est  $\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1)$  en  $x_1 = 0$  pour  $g(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)|_{x_2=0}$ . Calcul de  $g(x_1)$ :

1. si  $x_1 \neq 0$   $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ , donc si  $x_1 \neq 0$   $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = x_1$
2. si  $x_1 = 0$   $f(0, x_2) = 0$

Conclusion:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = x_1 \quad \forall x_1$$



donc:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(0,0) = 1$$

$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(0,0) = ?$ . On voit que,  $f(x_2, x_1) = -f(x_1, x_2)$  donc

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(0,0) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(0,0) = -1$$

## 4.5 Formule de Taylor à l'ordre 2

**Definition 4.16.** Soit  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ . Matrice hessienne: matrice  $n \times n$

$$H_f(X_0) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (X_0) \right] \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Le lemme 4.14 nous donne que  $H_f(X_0)$  est symétrique si  $f \in \mathcal{C}^2(D)$

Rappel:

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

**Theorem 4.17.** De Taylor à l'ordre 2

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ ,  $X_0 \in D$ . Alors

$$f(X_0 + \vec{X}) = f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0) \cdot \vec{X} + \frac{1}{2} \vec{X} \cdot H_f(X_0) \vec{X}$$

exemple en  $\mathbb{R}^1$

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2} f''(x_0)x^2 + \dots$$

**Intuition.** Alors, la matrice hessienne sert à calculer la dérivée d'ordre 2.

## 4.6 Un rappel d'algèbre linéaire et le lien avec l'analyse

$$\vec{X} \cdot A \vec{X} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i a_{i,j} x_j$$

Si  $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$   $A = [a_{i,j}]$  on a:  $X \mapsto X \cdot AX$  à étudier. Si  $A = A^T$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

"A admet une base orthonormée de vecteurs propres"

Il existe une base  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{i,j}$  (1 si  $i = j$  et 0 sinon) et des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_i = \lambda_j$  possible) tels que

$$A \vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$$

$$\vec{X} = \sum_{j=1}^n y_j \vec{u}_j$$

$$\vec{X} \cdot \vec{u}_i = \sum_{j=1}^n y_j \vec{u}_j \cdot \vec{u}_i = y_i$$

$$\begin{aligned}
\|\vec{X}\|^2 &= \vec{X} \cdot \vec{X} = \left( \sum_{j=1}^n y_j \vec{u}_j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i \vec{u}_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n y_j y_i \vec{u}_j \cdot \vec{u}_i \\
&= \sum_{j=1}^n y_j^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\vec{X} &= A \sum_{j=1}^n y_j \vec{u}_j = \sum_{j=1}^n y_j A\vec{u}_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \vec{u}_j \\
\vec{X} \cdot A\vec{X} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2
\end{aligned}$$

1. si  $\lambda_i > 0$  ( $1 \leq i \leq n$ )

$$C = \min \lambda_i > 0$$

$$X \cdot AX \geq C \sum_{i=1}^n y_i^2 = C\|X\|^2$$

2. si  $\lambda_i < 0$  ( $1 \leq i \leq n$ )

$$-C = \max \lambda_i < 0$$

$$X \cdot AX \leq -C\|X\|^2$$

**Example 4.18.**  $n = 2$

$$f(y_1, y_2) = -y_1^2 + 3y_2^2$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$$

$$f(y_1, 0) < f(0, 0) < f(0, y_2)$$

## 4.7 Nature des points critiques

**Theorem 4.19.** (Nature des points critiques)

Soient  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ ,  $X_0 \in D$ ,  $D$  ouvert et  $\vec{\nabla} f(X_0) = \vec{0}$

1. si toutes les valeurs propres de  $H_f(X_0)$  sont  $> 0$  (resp  $< 0$ )  $X_0$  est minimum (resp. maximum) local.
2. si toutes les valeurs propres de  $H_f(X_0)$  sont non nulles mais pas de même signe,  $X_0$  n'est pas un extremum local:  $X_0$  est un point selle (un col).
3. si 0 valeurs propres de  $H_f(X_0)$ , pas de conclusion, ( $X_0$  point critique dégénéré) i.e on ne peut rien conclure

**Proof.** du théorème 4.19

$$f(X_0 + X) - f(X_0) = \frac{1}{2} X \cdot H_f(X_0) X + \|X\|^2 \varepsilon(X)$$

1. si  $\lambda_i > 0$   $\frac{1}{2} X \cdot H_f(X_0) X \geq C\|X\|^2$   $C > 0$

$$f(X_0 + X) - f(X_0) \geq \|X\|^2 (C + \varepsilon(X)) \geq \frac{C}{2} \|X\|^2 \text{ si } \|X\| \text{ assez petit}$$

$$\Rightarrow X_0 \text{ minimum local}$$

2. si  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$

$$H_f(X_0)\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$$

$$f(X_0 + t\vec{u}_i) = f(X_0) + \frac{1}{2}\lambda_i t^2 + t^2 \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t\vec{u}_i) = \varepsilon(t)$$

$$f(X_0 + t\vec{u}_i) - f(X_0) = t^2\left(\frac{1}{2}\lambda_i + \varepsilon(t)\right)$$

si  $i = 1 < 0$   $|t|$  petit,  $i = 2 > 0$   $|t|$  petit, alors  $X_0$  n'est pas un extremum local

□

**Exemple 4.20.**

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_f = \{(x, y, z) : z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\}$$



Figure 4.5: Exemple de point selle.

Les lignes rouges représentent les dérivées partielles et on voit bien que les uns sont croissants et les autres décroissants, donc ce point n'est ni le minimum ni le maximum

**Exemple 4.21.**  $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$(a_{1,2} = a_{2,1})$

Valeurs propres: racines du pol. Caractéristique:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a_{1,1})(\lambda - a_{2,2}) - a_{1,2}a_{2,1}$$

$$\lambda^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\lambda + a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

$$a_{1,1} + a_{2,2} = \text{Tr}(A)$$

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = \det(A)$$

$$x^2 - Sx + P = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$$

$\det(A)$  = produit des valeurs propres

$\text{Tr}(A)$  = somme des valeurs propres

$$A = H_f(X_0)$$

1. si  $\det(A) < 0$ ,  $X_0$  point col
2. si  $\det(A) > 0$ 
  - (a)  $\text{Tr}(A) > 0$ ,  $X_0$  minimum
  - (b)  $\text{Tr}(A) < 0$ ,  $X_0$  maximum
3.  $\det(A) = 0$ ,  $X_0$  point critique dégénéré

## 4.8 La règle de dérivation en chaîne

**Definition 4.22.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue est différentiable et des fonction  $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions dérivables et continues et

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto h(t) = f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$$

alors

$$h'(t) = \frac{\partial g_1}{\partial h} g_1'(t) + \frac{\partial g_2}{\partial h} g_2'(t) + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial h} g_n'(t)$$

**Definition 4.23.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue est différentiable et des fonction  $g_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g_n : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions dérivables i.e

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad g_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t_1, \dots, t_p) \longmapsto g_i(t_1, \dots, t_p)$$

et

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto h(g_1(t_1, \dots, t_p), \dots, g_n(t_1, \dots, t_p)).$$

donc

$$\frac{\partial h}{\partial t_i} = \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} \frac{\partial g_n}{\partial t_i}$$

# CHAPTER 5

## ESPACES VECTORIELS NORMÉS

### 5.1 Introduction

**Definition 5.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la **norme** sur  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec:

1.  $N(\lambda u) = |\lambda|N(u) \quad u \in E$
2.  $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$
3.  $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$

**semi-norme:** 1 et 2 seulement.

On peut interpreter 2 comme:

$$|N(u) - N(v)| \leq N(u - v)$$

**Proposition 5.2. Norme induite:** Si  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel, je restreins  $N$  à  $F$ , alors  $(F, N)$  est un espace vectoriel normé.

**Example 5.3.**  $E = \mathbb{K}^n$  avec  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$  avec  $1 \leq p < \infty$

**Proposition 5.4.** L'inégalité triangulaire pour  $p > 2$  s'appelle l'**inégalité de Minkowski**:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

**Definition 5.5.** Soit  $U$  un ensemble et  $E = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \text{ bornée}\}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in U} |f(x)| \text{ norme sur } E$$

**Definition 5.6.**  $R([a, b], \mathbb{K}) = \{ \text{les } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \text{ intégrables au sens de Riemann}^a \}$

<sup>a</sup>La fonction est Riemann intégrable (pas forcément continue) si on peut calculer l'air en utilisant l'intégration par les sommes de Riemann. Alors, si  $f$  est discontinue, elle est Riemann intégrable si la discontinuité est négligeable.

**Example 5.7.**

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ avec } 1 \leq p < \infty$$

$\|\cdot\|_p$  est une semi-norme sur  $R([a, b], \mathbb{K})$  (inégalité de Minkowski).  $\|f\|_p = 0$  n'entraîne pas que  $f = 0$  (e.g:  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $f(x) = x$ ,  $p = 3$ ).

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

Sur  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ ,  $\|\cdot\|_p$  est une norme: si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  continue et  $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$  alors  $f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$

**Example 5.8.**  $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  un ensemble des suites  $u$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$$

pour  $1 \leq p < \infty$

$$l^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{ (u_n) : \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^p \text{ est convergente} \}$$

$$\|u\|_p = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur  $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$p = \infty \quad l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{ u \text{ bornée} \}$$

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

## 5.2 Topologie des espaces vectoriels normés

**Proposition 5.9.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé avec

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

une distance sur  $E$  (induite par  $\|\cdot\|$ ), alors  $(E, d)$  est un espace métrique.

**Definition 5.10.** Un espace vectoriel normé complet s'appelle un **espace de Banach**.

Cas de dimension finie:

1. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet (rappel: proposition 2.43) (voir plus bas)
2. Si  $E$  de dim finie:

$$K \text{ compact} \Leftrightarrow K \text{ fermé et borné}$$

**Lemma 5.11.**

$$(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$$

n'est pas complet.

**Proof.** On construit une suite de fonctions continues  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, 1]$  qui converge en norme  $\|\cdot\|_1$  vers une fonction  $f$  discontinue. Cela montrera que la limite de cette suite dans la norme  $\|\cdot\|_1$  n'appartient pas à  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , donc que cet espace n'est pas complet.



Figure 5.1: Lemma avec un espace pas complet

**Définition de la suite  $(f_n)$  :** pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \\ 2n \left( x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

Chaque  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$  car elle est affine par morceaux avec raccords continus.

**Définition de la fonction limite :** posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2}, \\ \text{valeur quelconque} & \text{si } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Alors  $f$  est **discontinue** en  $x = \frac{1}{2}$ , donc  $f \notin \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Convergence de  $(f_n)$  vers  $f$  dans  $\|\cdot\|_1$  :**

On a

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx.$$

Mais  $f_n(x) = f(x)$  sauf sur l'intervalle  $[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}]$  de longueur  $\frac{1}{n}$ , et sur cet intervalle,  $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$ , donc :

$$\|f_n - f\|_1 \leq \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} 1 dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi,  $f_n \rightarrow f$  dans la norme  $\|\cdot\|_1$ .

**Conséquence :** la suite  $(f_n)$  est de Cauchy dans  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ , car :

$$\|f_n - f_p\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 + \|f - f_p\|_1 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \xrightarrow{n, p \rightarrow \infty} 0.$$

Cependant, la limite  $f$  n'est pas continue, donc  $f \notin \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Conclusion :** Il existe une suite de Cauchy dans  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$  qui ne converge pas dans cet espace. Par conséquent, cet espace n'est pas complet. □

**Lemma 5.12.** Dans  $E = l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  muni de

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

$B_f(0, 1)$  n'est pas compact.

**Proof.** On construit une suite d'éléments de  $B_f(0, 1)$  sans sous-suite convergente.

$$u \in E \quad u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Je note  $u(p)$  au lieu de  $u_p$  suite dans  $E$  noté  $(u_n)$ ,  $u_n \in E$ .  $u_n(p)$  p-ième terme de  $u_n$ . Je pose

$$u_n(p) = \delta_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\|u_n\|_1 = \sum_{p=0}^{\infty} |u_n(p)| = |u_n(n)| = 1$$

Donc  $u_n \in B_f(0, 1) \forall n$ .

Si  $v \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

$$|v(p)| \leq \sum_{p=0}^{\infty} |v(p)| = \|v\|_1$$

si  $\|v_n - v\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  alors  $\forall p, v_n(p) \rightarrow v(p)$ . Supposons que  $(v_n) = (u_{\phi(n)})$  est une sous-suite de  $(u_n)$  qui converge vers  $v$  pour  $\|\cdot\|_1$ . Je fixe  $p \in \mathbb{N}$ ,  $v_n(p) = u_{\phi(n)}(p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v(p)$ , mais  $v_n(p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , donc  $v(p) = 0 \forall p$ .  $v$  : suite nulle, aussi

$$\|v_n\|_1 = 1 \forall n \text{ et } \|v_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|v\|_1$$

contradiction □

## 5.3 Normes équivalentes

**Definition 5.13.** Deux normes  $N_1$  et  $N_2$  sur  $E$  sont équivalentes ( $N_1 \sim N_2$ ) si  $\exists c_1, c_2 > 0$  telles que

- $N_1(u) \leq c_1 N_2(u) \quad \forall u \in E$
- $N_2(u) \leq c_2 N_1(u) \quad \forall u \in E$

$\exists c > 0$  telle que

$$cN_1(u) \leq N_2(u) \leq cN_1(u)$$



**Remark 5.14.** Si  $N_1 \sim N_2$  et  $N_2 \sim N_3$ , alors  $N_1 \sim N_3$

**Definition 5.15.** Les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont **topologiquement équivalentes** si elles définissent les mêmes ensembles ouverts.

**Theorem 5.16.** Soient  $N_1, N_2$  deux normes, alors:

$$N_1, N_2 \text{ topologiquement équivalentes} \Leftrightarrow N_1, N_2 \text{ équivalentes}$$

**Example 5.17.** 1.  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

$$2. \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$3. \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

On remarque que  $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ . Est-ce que  $\exists c > 0$  telle que

$$\|f\|_\infty \leq c \|f\|_1 \forall f \in E$$

? Pour le voir, construire une suite  $(f_n)$  dans  $E$  telle que  $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$  mais  $\|f_n\|_\infty \not\rightarrow 0$

**Theorem 5.18.** Soit  $E$  un espace de dimension finie. Alors toutes normes sur  $E$  sont équivalentes.

**Proof.** Puisque  $E$  est de dimension finie, il existe une base de  $E$  et donc un isomorphisme linéaire entre  $E$  et  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ). En conséquence, on peut se ramener à l'étude de normes sur  $\mathbb{R}^n$ .

Considérons la norme  $\|\cdot\|_1$  sur  $E$  et définissons la sphère unité associée :

$$S = \{x \in E : \|x\|_1 = 1\}.$$

Dans un espace de dimension finie, la sphère unité  $S$  est compacte (cela repose sur le fait que dans  $\mathbb{R}^n$ , les ensembles fermés et bornés sont compacts).

La fonction

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|_2$$

est continue car  $\|\cdot\|_2$  est une norme (et donc une fonction continue). Par le théorème de Weierstrass,  $f$  atteint ses bornes sur  $S$ . Il existe donc :

- Un minimum  $m = \min_{x \in S} f(x) > 0$  (la stricteté de  $m > 0$  s'explique par le fait que  $x \neq 0$  pour  $x \in S$ ).
- Un maximum  $M = \max_{x \in S} f(x)$ .

Soit  $x \in E$  quelconque,  $x \neq 0$ . On écrit  $x = \|x\|_1 y$  avec  $y = \frac{x}{\|x\|_1}$  qui appartient à  $S$ . Alors,

$$\|x\|_2 = \|x\|_1 \|y\|_2.$$

Or, puisque  $y \in S$ , on a

$$m \leq \|y\|_2 \leq M.$$

Ainsi,

$$m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1.$$

En posant  $c = m$  et  $C = M$ , nous obtenons exactement l'équivalence des normes.

Pour  $x = 0$ , l'inégalité est triviale car  $\|0\|_1 = \|0\|_2 = 0$ .

□

## 5.4 Compléments sur les espaces vectoriels normés

### 5.4.1 Suites de fonctions

$X$  ensemble ( $X \subset \mathbb{R}$ ),  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Utile pour la suite du chapitre:  $B(X, \mathbb{R})$  désigne un ensemble des fonctions  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  bornées

### 5.4.2 Convergence simple:

**Definition 5.19.**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  si  $\forall x_0 \in X, f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$  (ne provient pas d'une norme).

### 5.4.3 Convergence uniforme:

**Definition 5.20.**  $f \in B(X, \mathbb{R})$  si  $\sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|_\infty < \infty$  ( $f$  bornée sur  $X$ ).

Convergence uniforme:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

$f_n \rightarrow f$  dans  $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

**Definition 5.21.** Limite uniforme de fonctions continues:  $X = [a, b], \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \subset B([a, b], \mathbb{R})$  (sous espaces vectoriels).  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  est fermé dans  $(B([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

### 5.4.4 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé.

**Definition 5.22.** Soient  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  e.v.n<sup>a</sup>,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite dans  $E$ . La série  $\sum u_n$  converge dans  $(E, \|\cdot\|)$  si la suite  $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$  converge dans  $(E, \|\cdot\|)$ .  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$  notée  $\sum_{n=0}^\infty u_n (\in E)$

<sup>a</sup>espace vectoriel normé

**Remark 5.23.** Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, alors

- $\sum u_n + v_n$  converge et  $\sum \lambda u_n$  converge
- $\sum_{n=0}^\infty u_n + v_n = \sum_{n=0}^\infty u_n + \sum_{n=0}^\infty v_n$
- $\sum_{n=0}^\infty \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^\infty u_n$

### 5.4.5 Convergence normale

**Definition 5.24.**  $\sum u_n$  converge normalement dans  $(E, \|\cdot\|)$  si  $\sum \|u_n\|$  converge dans  $\mathbb{R}$ .

**Example 5.25.**  $E = \mathbb{R}, \|x\| = |x|$ . cv. normale = cv. absolue ( $\sum u_n$  converge)

**Example 5.26.**  $\sum u_n$  peut converger sans converger normalement, comme:  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

**Theorem 5.27.** Si  $(E, \|\cdot\|)$  est complet, toute série normalement convergente est convergente et

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$$

**Proof.**  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n \|u_k\|$

$$n > p \quad \|S_n - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^n u_k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^n \|u_k\| = T_n - T_p = |T_n - T_p|$$

$(T_n)$  converge dans  $\mathbb{R}$ , donc  $(T_n)$  de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } \forall n > p \geq N |T_n - T_p| \leq \varepsilon$$

donc  $(S_n)$  de Cauchy dans  $(E, \|\cdot\|)$ .  $E$  complet:  $(S_n)$  converge vers  $S \in E$ . □

## 5.5 Applications linéaires continues

Pour toute section  $B_E$  désigne une boule fermé!

Soient  $E, F$  2 espaces vectoriels normés avec  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$  les normes associés,

- $A \in \mathcal{L}(E, F)$
- $\lambda A \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda Ax = \lambda(Ax)$
- $A + B \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(A + B)x = Ax + Bx$
- $0x = 0_F \quad \forall x \in E$

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$$

- $(AB)x = A(Bx)$  où  $AB = A \circ B$
- $(\lambda A)B = \lambda(AB)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $0A = 0$
- $AB \neq BA$  (en général)
- $A(BC) = (AB)C$

**Theorem 5.28.** Soit  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1.  $A : E \rightarrow F$  est continue
2.  $A$  est continue en  $0_E$
3.  $\exists C \geq 0$  telle que

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

cela s'appelle que  $A$  est bornée

4.  $A$  est bornée sur  $B_E(0, R) \quad \forall R > 0$

On dit que  $A$  est bornée (si  $A$  est continue et linéaire)

**Proof.** • 1)  $\Rightarrow$  2) : évident

• 2)  $\Rightarrow$  3) :

- Hyp:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tq  $\|x - 0_E\|_E \leq \delta \Rightarrow \|Ax - A0_E\|_F \leq \varepsilon$   $\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \varepsilon$
- $\varepsilon = 1 \exists \delta > 0$  tq  $\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|Ax\|_F \leq 1$
- Soit  $x \in E$  et  $x \neq 0_E$
- $y = \frac{\delta}{\|x\|_E} x$  donc  $\|y\|_E = \delta \Rightarrow \|Ay\|_F \leq 1$
- $Ay = \frac{\delta}{\|x\|_E} Ax$  et  $A$  linéaire
- $\|Ay\|_F = \frac{\delta}{\|x\|_E} \|Ax\|_F \leq 1 \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \frac{1}{\delta} \|x\|_E$

• 3)  $\Rightarrow$  1)

- Je fixe  $x_0 \in E$ . à voir:  $A$  continue en  $x_0$ ?
- $\|Ax - Ax_0\|_F = \|A(x - x_0)\|_F \leq C\|x - x_0\|_E$
- Donc si  $\|x - x_0\|_E \leq \frac{\varepsilon}{C} = \delta(\varepsilon)$ ,  $\|Ax - Ax_0\|_F \leq \varepsilon$

□

**Notation.**

$$B(E, F) = \{A \in \mathcal{L}(E, F) : A \text{ continue} \}$$

$$B(E, E) = B(E)$$

**Lemma 5.29.** Si  $E$  est de dimension finie, alors

$$\mathcal{L}(E, F) = B(E, F)$$

C'est faux si  $\dim E = \infty$

**Proof.**  $(e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ . Sur  $E$  toutes les normes sont équivalentes.

- $\|x\|_E$  norme donnée.
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

où  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\|Ax\|_F = \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\|_F = \sum_{i=1}^n |x_i| \|A e_i\|_F$$

$$\|Ax\|_F \leq \|x\|_\infty \times \sum_{i=1}^n \|A e_i\|_F = C \|x\|_\infty$$

$(\|x\|_\infty \leq C' \|x\|_E)$ . Donc:  $\|Ax\|_F \leq CC' \|x\|_E$ . Alors:  $A \in B(E, F)$

□

### 5.5.1 Norme sur $B(E, F)$

**Theorem 5.30.** Soit  $A \in B(E, F)$ , on pose  $\|A\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F = \sup_{x \in B_E(0,1)} \|Ax\|_F$

1.  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $B(E, F)$  appelée norme uniforme.
2. On a:  $\|Ax\|_F \leq \|A\| \|x\|_E \quad \forall x \in E$
3.  $\|A\|$  = la plus petite constante  $C$  telle que  $\|Ax\|_F \leq C \|x\|_E \quad \forall x \in E$

**Remark 5.31.** 1. On peut écrire  $\|A\|_{B(E,F)}$  au lieu de  $\|A\|$

2. Parfois on trouve  $|||A|||$  pour  $\|A\|$

3. Soit  $I^+ =$  ensemble des  $C \geq 0$  telle que  $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E$ .

$I^+ \neq \emptyset$  (car  $A \in B(E, F)$ ) et  $I^+ \subset [0, +\infty[$ . (2) et (3) disent que  $\|A\|$  est le plus petit élément de  $I^+$

$$\inf I^+ = \min I^+ = \|A\|$$

**Proof.** 1.  $A \in B(E, F) \Leftrightarrow \sup_{x \in B_E(0,1)} \|Ax\|_F < \infty \Leftrightarrow \|A\|$  bien définie.

$$\begin{aligned} \|(A+B)x\|_F &= \|Ax+Bx\|_F \leq \|Ax\|_F + \|Bx\|_F \\ \Rightarrow \sup_{x \in B_E(0,1)} \|(A+B)x\|_F &\leq \sup_{x \in B_E(0,1)} \|Ax\|_F + \sup_{x \in B_E(0,1)} \|Bx\|_F \end{aligned}$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ et } A, B \in B(E, F) \Rightarrow A+B \text{ aussi}$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \text{ et } A \in B(E, F) \Rightarrow \lambda A \text{ aussi}$$

$$\text{Si } \|A\| = 0, \text{ alors } \|Ax\|_F = 0 \forall x \in B_E(0,1) \Rightarrow Ax = 0_F \forall x \in B_E(0,1)$$

$$Ax = \|x\|_E A \frac{x}{\|x\|_E}$$

$$Ax = 0_F \forall x \in E \Rightarrow A = 0_{L(E,F)}$$

$$C \in I^+ \text{ si } \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

$$\|A\| \in I^+ \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \|A\| \|x\|_E \forall x$$

• Clair si  $x = 0_E$ .

• Si  $x \neq 0_E$ ,  $y = \frac{x}{\|x\|_E} \in B_E(0,1)$  donc

$$\|Ay\|_F = \frac{1}{\|x\|_E} \|Ax\|_F \leq \|A\| \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \|A\| \|x\|_E$$

Soit  $C \in I^+$  donc

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$$

donc  $\|Ax\|_F \leq C \quad \forall x \in B_E(0,1)$ , donc  $\|A\| \leq C$ , alors

$$\|A\| = \min I^+ = \text{"meilleure constante } C"$$

□

**Example 5.32.**  $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ ,  $F = \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

$$A : E \longrightarrow F$$

$$f \longmapsto A(f) = \int_a^b f(x)u(x) dx.$$

A est bornée: à voir:  $\exists C \geq 0$  telle que

$$\left| \int_a^b f(x)u(x) dx \right| \leq C \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

?

$$\left| \int_a^b f(x)u(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)||u(x)| dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty |u(x)| dx = \|f\|_\infty \int_a^b |u(x)| dx$$

$$C = \int_a^b |u(x)| dx \text{ convient}$$

(En fait  $\|A\| = \int_a^b |u(x)| dx$ ).  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|f\|_\infty$ ,  $F = \mathbb{R}$ ,  $Af = f'(0)$  linéaire mais pas continue. On construit une suite  $(f_n)$  dans  $E$  telle que  $\|f_n\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  mais  $\|Af_n\|_F \not\rightarrow 0$

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

**Proposition 5.33.** Soit  $A \in B(E, F)$  et  $\|A\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F$  une norme uniforme.  $\|A\| =$  plus petit  $c$  tel que

$$\|Ax\|_F \leq c\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

**Proof.**  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  et  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$  norme sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Je fixe  $m \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  et  $A : f \rightarrow mf$ .  $Af(x) = m(x)f(x)$ .

- $A \in L(E)$  évident
- $A \in B(E)$ ?

Trouver  $c \geq 0$  telle que

$$\|Af\|_1 \leq c\|f\|_1 \quad \forall f \in E$$

$$\|Af\|_1 = \int_a^b |m(x)f(x)| dx$$

$$|m(x)f(x)| \leq |m(x)||f(x)| \leq \|m\|_\infty |f(x)|$$

$$\|m\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |m(x)|$$

$$\int_a^b |m(x)f(x)| dx \leq \|m\|_\infty \int_a^b |f(x)| dx = \|m\|_\infty \|f\|_1$$

$$c = \|m\|_\infty$$

On a:  $A \in B(E)$  et  $\|A\| \leq \|m\|_\infty$ . Montrons que  $\|A\| = \|m\|_\infty$

$$\|A\| = \sup_{\|f\|_1 \leq 1} \|Af\|_1 \stackrel{?}{=} \|m\|_\infty = \sup I \text{ avec } I = \{\|Af\|_1 : \|f\|_1 \leq 1\}$$

Notons  $\alpha = \sup I$

1.  $\alpha$  majorant de  $I$
2.  $\exists (a_n) a_n \in I$  avec  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$

Dans notre cas:

- But: trouver une suite  $f_n \in E$   $\|f_n\|_1 \leq 1$  et  $\|Af_n\|_1 \rightarrow \|m\|_\infty$

$a_n = \|Af_n\|_1$   $\|m\|_\infty = \sup$  de la fonction  $|m|$  sur  $[a, b]$ .

- $|m|$  continue:  $\exists x_0 \in [a, b]$  tel que  $\|m\|_\infty = |m|(x_0)$

$$|m|(x) = |m(x)|$$

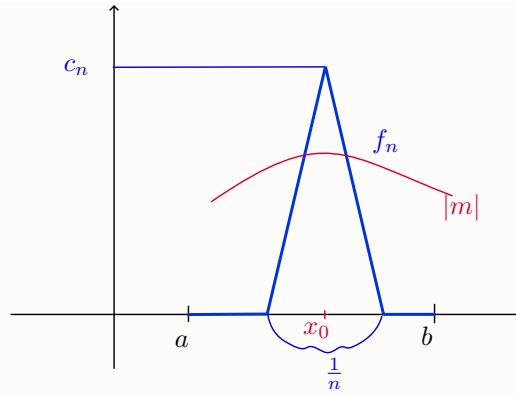


Figure 5.2:  $f_n$

$$|m(x)f_n(x)| = |Af(x)| \text{ proche de } |m(x_0)||f_n(x)|$$

$$\|f_n\|_1 = 1 \text{ si } c_n \leq 2n$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x \leq x_0 - \frac{1}{2n} \\ 2n(1 - n|x - x_0|) & \text{si } |x - x_0| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } x_0 + \frac{1}{2n} \leq x \leq b \end{cases}$$



Figure 5.3:  $f_n$

$$|m(x)f_n(x) - m(x_0)f_n(x)| \leq |m(x) - m(x_0)||f_n(x)| \leq \varepsilon_n |f_n(x)|$$

Là où  $f_n(x) \neq 0$   $|x - x_0| \leq \frac{1}{n}$  donc

$$|m(x) - m(x_0)| \leq \varepsilon_n \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

alors  $m$  continue en  $x_0$ .

$$\|Af_n\|_1 = \int_a^b |m(x)f_n(x)| dx \leq \int_a^b |m(x) - m(x_0)||f_n(x)| dx + \int_a^b |m(x_0)||f_n(x)| dx$$

- 1<sup>er</sup> terme:  $\leq \varepsilon_n \|f_n\|_1 = \varepsilon_n$
- 2<sup>eme</sup> terme:  $:= \|m\|_\infty \|f_n\|_1 = \|m\|_\infty$

Alors:

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= 1 \\ \|Af_n\|_1 &\rightarrow \|m\|_\infty \\ \text{donc } \|A\| &= \|m\|_\infty \end{aligned}$$

□

**Proposition 5.34.** Le cas de  $B(E)$ :

Si  $A, B \in B(E)$ ,  $A \circ B$  (noté  $AB$ )  $\in B(E)$  et

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

(très utile)

**Proof.**

$$\|A \underbrace{Bx}_Y\|_E \leq \|A\|\|Bx\|_E \leq \overbrace{\|A\|\|B\|}^c \cdot \|x\|_E$$

donc  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

□

**Theorem 5.35.** Si  $N_1, N_2$  sont deux normes sur  $E$ .  $N_1$  et  $N_2$  sont topologiquement équivalentes  $\Leftrightarrow N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes.

**Proof.**  $E_1$  c'est  $(E, N_1)$ ,  $E_2 = (E, N_2)$ .

$N_1$  et  $N_2$  topologiquement équivalentes veut exactement dire:

1.  $Id : E_1 \rightarrow E_2$  sont continue
2. et  $Id : E_2 \rightarrow E_1$

Donc:

1.  $\Omega$  ouvert pour  $N_2 \Rightarrow \Omega$  ouvert pour  $N_1$
2.  $\Omega$  ouvert pour  $N_1 \Rightarrow \Omega$  ouvert pour  $N_2$
1.  $\Leftrightarrow N_2(Id u) (= N_2(u)) \leq c_1 N_1(u)$
2.  $\Leftrightarrow N_1(Id u) (= N_1(u)) \leq c_2 N_2(u)$

car  $Id$  continue et linéaire, donc bornée  $\exists c$  tq  $\underbrace{Id u}_{\in E_2} \leq c \underbrace{u}_{E_1}$  donc  $N_2(Id u) \leq c N_1(u)$

(1) et (2)  $\Leftrightarrow N_1$  et  $N_2$  équivalentes.

□

## 5.6 La norme des matrices

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  identifié à  $A \in L(\mathbb{C}^n)$

$$\left( (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right) \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

- $(x|y) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$
- $\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

Matrice adjointe  $A^*$   $(A^*)_{i,j} = \overline{(A)_{j,i}}$

$$(x|Ay) = (A^*x|y) \quad \forall x, y$$

### 5.6.1 Bonne norme sur $L(\mathbb{C}^n)$ (ou sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ )

$\|A\|$  norme uniforme sur  $L(\mathbb{C}^n)$  ( $= B(\mathbb{C}^n)$ ) obtenue à partir de  $\|\cdot\|_2$



**Lemma 5.36.**

$$\|A\| = \|A^*\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$$

**Proof.**  $\|x\|_2 = \sup_{\|y\|_2 \leq 1} |(y|x)|$ . Donc:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_2 \leq 1, \|y\|_2 \leq 1} |(y|Ax)|$$

$$(y|Ax) = (A^*y|x) = \overline{(x|A^*y)}$$

donc  $|(y|Ax)| = |(x|A^*y)|$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |(x|A^*y)| = \|A^*\|$$

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|^2$$

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= (Ax|Ax) = (x|A^*Ax) \leq \|x\| \|A^*Ax\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \|x\| \|A^*A\| \|x\| = \|A^*A\| \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\|Ax\|^2 \leq \|A^*A\| \|x\|^2$$

$$\|Ax\|_2 \leq \|A^*A\|^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \Rightarrow \|A\|^2 \leq \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$$

□

**5.6.2 Comment "calculer"  $\|A\|$ ?**

**Theorem 5.37.**  $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i$  avec  $\mu_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$  valeurs propres de  $A^*A$ .

**Proof.**

$$\|A\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$$

À montrer:  $\|A^*A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$  ( $\lambda_i \geq 0$ )

$$(AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$$

Soit  $B = A^*A$ ,  $B = B^*$  et  $(x|Bx) = (x|A^*Ax) = (Ax|Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$ . Donc:

$$\forall x, \quad (x|Bx) \geq 0$$

Il existe une b.o.n  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$Bu_i = \lambda_i u_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\lambda_i = (u_i|\lambda_i u_i) = (u_i|Bu_i) \geq 0$$

Si  $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i$   $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$

$$Bu = \sum_{i=1}^n x_i Bu_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i u_i$$

$$\|Bu\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 |x_i|^2 \leq \max \lambda_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \max \lambda_i^2 \|u\|^2$$

$$\|B\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$$

Si  $\lambda_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$

$$\|Be_1\| = \|\lambda_1 e_1\| = \lambda_1 \|e_1\| \leq \|B\| \|e_1\|$$

donc  $\|B\| \geq \lambda_1$

□

### 5.6.3 Comment majorer $\|A\|$

**Proposition 5.38.** On a:  $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$  où

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^2$$

**Proof.**

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \sim \mathbb{C}^{n \times n}$$

$\|\cdot\|_{HS}$  norme canonique sur  $\mathbb{C}^{n \times n}$  !

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$$

$$(y|Ax) = \sum_{i=1}^n \overline{y_i} \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \overline{y_i} x_j$$

Soit  $b_{i,j} = y_i \overline{x_j}$

$$(y|Ax) = \sum_{i,j} \overline{b_{i,j}} a_{i,j}$$

$$|(y|Ax)| \leq \left( \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \sum_{i,j} |b_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left( \sum_{i,j} |b_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} |y_i|^2 |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{1 \leq i \leq n} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|y\| \|x\|$$

$$|(y|Ax)| \leq \|A\|_{HS} \|x\| \|y\| \Rightarrow \|A\| \leq \|A\|_{HS}$$

□

# CHAPTER 6

## SYSTÈME D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES

$$(E) \begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}x_1(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}x_1(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

$$x(t) = (x_1, \dots, x_n(t)) \text{ ou } \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ A \longmapsto f(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

$$(H) \quad x'(t) = Ax(t)$$

$$(C) \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases}$$

Solution sur  $I$ :  $f : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  avec  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle ( $f$  supposée continue).  $x : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que (C) vérifiée  $\forall t \in I$

- Si  $n = 1$   $A = a \in \mathbb{C}$ . Solution de (H):  $x(t) = e^{ta}x_0$  avec  $x_0 \in \mathbb{C}$

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

But: définir  $e^A$

**Theorem 6.1.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ( $A \in B(E)$  où  $(E, \|\cdot\|)$  complet!)

1. La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$  converge dans  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ , sa somme  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$  notée  $e^A$  s'appelle l'exponentielle de  $A$ .
2.  $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$
3.  $\|e^A - \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!}\| \leq \frac{\|A\|^{N+1}}{(N+1)!} e^{\|A\|} (\leq \frac{\|A\|_{HS}^{N+1}}{(N+1)!} e^{\|A\|_{HS}})$
4.  $e^A e^B = e^B e^A$  si  $AB = BA$
5.  $Be^A = e^A B$  si  $AB = BA$

**Proof. -**

1.  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  (car  $\|\cdot\|$  norme uniforme!) donc  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ .  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|A\|^n}{n!}$  (série numérique!) converge vers  $e^{\|A\|}$  donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$  converge normalement dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est complet (comme  $B(E)$  si  $E$  est complet) donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$  converge dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

2. OK aussi

- 3.

$$\|e^A - \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!}\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$$

On note  $f(x) = e^x$

$$f(x) = \sum_{n=0}^N f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(y) \quad (y \text{ entre } 0 \text{ et } x)$$

$$x = \|A\|$$

- 4.

$$e^A e^B = e^{A+B} \text{ si } AB = BA$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (\text{si } AB = BA)$$

$$(A+B)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p A^{n-p} B^p$$

Même preuve si  $A = a, B = b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$

5. exercice

□

**Remark 6.2.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 0 \quad e^A = \mathcal{I} + A \quad e^B = \mathcal{I} + B \text{ où } \mathcal{I} \text{ identité}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{A+B} = ? \quad A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A+B)^2 = \mathcal{I}$$

$$C = A+B \quad C^{2p} = \mathcal{I} \quad C^{2p+1} = C$$

$$e^C = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C^{2p}}{2p!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C^{2p+1}}{(2p+1)!} = \underbrace{\mathcal{I} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p!}}_{=\text{ch}(1)} + \underbrace{C \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!}}_{=\text{sh}(1)}$$

$$e^{A+B} = \text{ch}(1)\mathcal{I} + \text{sh}(1)C = \begin{pmatrix} \text{ch}(1) & \text{sh}(1) \\ \text{sh}(1) & \text{ch}(1) \end{pmatrix} \neq e^A \times e^B$$

**Proposition 6.3.**  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (ou  $B(E)$ )

1.  $e^{tA}e^{sA} = e^{(s+t)A} \quad s, t \in \mathbb{R}$
2.  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA} \quad t \in \mathbb{R}$
3.  $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} \quad t \in \mathbb{R}$

**Proof. -**

1. OK car  $tA$  commute avec  $sA$
2.  $e^{tA}e^{-tA} = e^{-tA}e^{tA} = e^{0A} = \mathcal{I}$  donc  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$
3. À calculer:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{(t+\varepsilon)A} - e^{tA}}{\varepsilon} = ?$

$$e^{tA} \left( \frac{e^{\varepsilon A} - \mathcal{I}}{\varepsilon} \right)$$

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon A} - \mathcal{I} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon A)^n}{n!} \quad n = 1 + p \\ &= \varepsilon A \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon A)^p}{(p+1)!} \\ &= \varepsilon A \left( \mathcal{I} + \left\| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon A)^p}{(p+1)!} \right\| \right) \\ &= \varepsilon A (\mathcal{I} + R(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{\varepsilon A} - \mathcal{I}}{\varepsilon} = A + AR(\varepsilon)$$

à voir:  $\|AR(\varepsilon)\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon A} - \mathcal{I}}{\varepsilon} = A$

$$\|AR(\varepsilon)\| \leq c\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\|R(\varepsilon)\| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p \|A\|^p}{(p+1)!} = \varepsilon \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{p-1} \|A\|^p}{(p+1)!} \leq \varepsilon e^{\|A\|}$$

Si  $|\varepsilon| \leq 1$

$$\frac{\varepsilon^{p-1} \|A\|^p}{(p+1)!} \leq \frac{\|A\|^p}{p!}$$

□

## 6.1 Application aux système d'ED

$$(H) \quad x'(t) = Ax(t)$$

**Theorem 6.4.** L'ensemble  $\text{Sol}(H)$  des solutions de  $(H)$  est donné par

$$x(t) = e^{tA}x_0 \quad x_0 \in \mathbb{C}^n$$

Soit  $x(t)$  une solution

$$\begin{aligned}
 y(t) &= e^{-tA}x(t) \\
 \Rightarrow y'(t) &= -Ae^{-tA}x(t) + e^{-tA}x'(t) \\
 &= -Ae^{-tA}x(t) + e^{-tA}Ax(t) \\
 &= 0 \\
 \Rightarrow y(t) &= x_0 \Rightarrow x(t) = e^{tA}x_0
 \end{aligned}$$

$$(E) \quad x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s) \, ds$$

$$x(0) = x_0$$

**Proof.** Chercher  $x(t)$  sous la forme

$$x(t) = e^{tA}y(t)$$

Je trouve que  $y'(t) = e^{-tA}f(t)$

$$y(t) = x_0 + \int_0^t e^{-sA}f(s) \, ds$$

□

hey

## BIBLIOGRAPHY

- [1] Christian Gérard. *Analyse et Géométrie (OLMA251)*. fre.
- [2] Christian Gérard. *Cours Magistral d'Analyse et Géométrie (OLMA251) à l'Université Paris-Saclay*. 2024-2025.