

Analyse numérique avec python

Yehor Korotenko

March 24, 2025

Abstract

Ce sont les notes prises aux CMs d'Analyse Numériques avec Python (UE MDD253DU) fait par le professeur Jean-Baptiste APOUNG KAMGA. Je n'ai rien ajouté dans ces notes. Ce qui est écrit dans ce fichier est ce que le professeur a écrit sur le tableau pendant les CMs.

CONTENTS

1	Équations Différentielles	2
1.1	Modèles discretes	2
1.1.1	Modèle de croissance géométrique	2
1.2	Modèles continues	3
1.2.1	Modèle de Malthus	3
1.2.2	Modèle Verhulst	4
1.3	Modèle de croissance logistique	5
1.4	Notion de champ de vecteurs associée à une EDO	5
1.4.1	Généralités et définitions	5
1.4.2	Dessins de champs de vecteurs	8
1.4.3	Recherche de solution approchée de modèles sous python	8
1.5	Modèle de prédateur proie (lotka-voltena (1931))	9
2	Interpolation polynomiale	10
2.1	Rappels sur les nuts numériques	
	Vitesse (ordre) de convergence	
	valeur ajoutée par itérations	10
2.1.1	Valeur ajoutée par l'itération	11
2.1.2	Obtenir numériquement la vitesse de convergence	12
2.2	Interpolation: définition-motivation-exemples	13
2.2.1	Définition	13
2.2.2	Motivations	13
2.2.3	exemples d'interpolation	13
2.3	Polynôme interpolateur de lagrange	16
2.3.1	Définition et propriétés	16
2.3.2	Estimation d'erreur	16
2.3.3	Implémentation avec python	17
2.4	Construction des polynôme d'interpolation de lagrange	17
2.4.1	Interpolation dans la base canonique (Vandermonde)	17
2.4.2	Interpolation dans la base duale: Formule de lagrange et points barycentrique	18
2.4.3	Méthode des différences divisées	20
2.5	Comportement asymptotique "lorsque $N \rightarrow \infty$ "	22
2.5.1	Observation	22
2.5.2	Polynôme de Tchebychev	22
2.5.3	Application	23
3	Intégration numérique	25
3.1	Formule de quadratique	26
3.1.1	Construction de formule de quadratique à points donnés	26
3.2	Utilisation des formules de quadratiue. Formule de quadrature élémentaires et composées	28
3.2.1	Définition	28
3.2.2	Méthode de quadrature clamique	29
3.2.3	Méthode de trapèze	30
3.2.4	Méthode de point-milieu	31
3.2.5	Méthode de Simpson	32
3.2.6	Méthode de Newton-Côte	33
3.3	Construction de formule de quadrature (à points inconnus): Formules de Gauss Legedre	35

CHAPTER 1

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1.1 Modèles discrets

On désigne par $N(t)$ la population d'individus à l'instant t .

Équation du modèle discret:

$$\underbrace{N(t + \Delta t) - N(t)}_{\text{variation de la population}} = \underbrace{n}_{\text{nombre de naissances}} - \underbrace{m}_{\text{nombre de décès}} + \underbrace{i}_{\text{immigration}} - \underbrace{e}_{\text{émigration}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{sol de migration}}$

1.1.1 Modèle de croissance géométrique

- hypothèse:

- solde migration nul: i.e $i - e = 0$
- nombre de croissance proportionnel à la taille de la population $n = \lambda \Delta t N(t)$
taux de natalité
- Idem pour le nombre de décès: $m = \mu \Delta t N(t)$
taux de mortalité

- Modèle: On pose $N_n = N(t_n)$ la taille de la population à l'instant t_n .

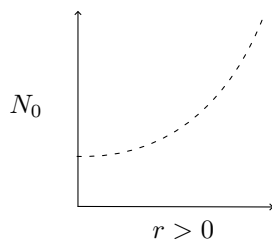
$$N_{n+1} - N_n = \lambda \Delta t N_n - \mu \Delta t N_n$$

on pose $r = \lambda - \mu$

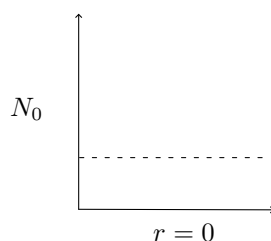
$$N_{n+1} = (1 + r \Delta t) N_n, \quad n = 0 \tag{1.1}$$

- Solution: $N_n = (1 + r \Delta t)^n N_0, \quad n \in \mathbb{N}$

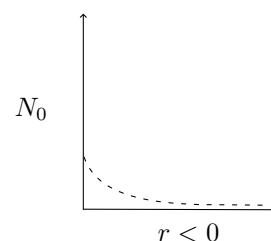
- Visualisation: Δt fixé



(a) Natalité supérieure à la mortalité



(b) Natalité égale à la mortalité



(c) Natalité inférieure à la mortalité

Property. .

- Lorsque $t \rightarrow 0$, la population semble tendre vers une courbe $N(t) = N_0 e^{rt}$, solution de $\begin{cases} N'(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Si $r > 0$, la population croît indéfiniment
- Si $r < 0$, il y a extinction de l'espèce.

Inconvénients:

1. Une croissance infinie n'est pas réaliste
2. Pour être rigoureux, on devrait écrire $E(rN_n)$ i.e partie entière.

1.2 Modèles continus

Motivation: L'observation qui prend Δt proche de 0 aura beaucoup plus d'information.

Remark 1.1. Le modèle de croissance géométrique

$$\begin{aligned} N(t + \Delta t) - N(t) &= \lambda \Delta t N(t) - \mu \Delta t N(t) \\ \Rightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= \lambda N(t) - \mu N(t) \end{aligned}$$

en faisant $\Delta t \rightarrow 0$

$$N'(t) = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

D'où l'équation des modèles continus:

$$\underbrace{N'(t)}_{\text{vitesse de variation}} = \underbrace{n(t)}_{\text{vitesse de naissance}} - \underbrace{m(t)}_{\text{vitesse de décès}} + \underbrace{i(t)}_{\text{vitesse d'immigration}} - \underbrace{e(t)}_{\text{vitesse d'émigration}}$$

1.2.1 Modèle de Malthus

- hypothèse:
 - solde migration nul: $i(t) - e(t) = 0$
 - vitesse de naissance proportionnel à la population à l'instant t : $n(t) = \lambda N(t)$
 - vitesse de décès: $m(t) = \mu N(t)$
- Modèle: $\begin{cases} N'(t) = (\lambda - \mu)N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Solution: $N(t) = N_0 e^{(\lambda - \mu)t}$
- **Property.** – Il peut être vu comme limite du modèle de croissance géométrique.
 - Lorsque $r = \lambda - \mu > 0$ croissance est proportionnel.
 - Lorsque $r = \lambda - \mu = 0$ la population n'évolue pas.
 - Lorsque $r = \lambda - \mu < 0$ la population tend vers 0.
- Inconvénients:
 - croissance exponentielle pas réaliste. Il faut prendre en compte:
 - * la limitation des ressources
 - * l'interaction avec l'environnement

1.2.2 Modèle Verhulst

Corrige le modèle de Malthus en prenant en compte la limitation de ressources.

- Idée: limiter la croissance à un seuil K appelé capacité biotique



Figure 1.2: Modèle de Malthus



Figure 1.3: Modèle de Verhulst

- hypothèse: Sole de migration nul
 - taux de natalité fonction affine décroissante de la population $\lambda \approx \lambda(1 - \frac{N(t)}{K})$
 - taux de mortalité fonction affine croissante de la population $\mu \approx -\mu(1 - \frac{N(t)}{K})$
- Modèle:
$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$
- Solutions: $N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}} \quad t > 0$
- Visualisation:



Figure 1.4: Verhulst solution

Property. Si $r > 0$, on a:

- si $N_0 = 0$ $N_0 = K$ on a: $N(t) = N_0 \forall t > 0$
- si $0 < N_0 < K$, N croissante
- si $N_0 > K$, N décroissante
- N possède une limite si $N_0 > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$$

1.3 Modèle de croissance logistique

C'est un modèle discret

- hypothèse: i.e = 0
 $n - m$ est une fonction affine de la population, i.e $n - m = r\Delta t N(t)(1 - \frac{N(t)}{K})$
- Modèle: On suppose $\Delta t = 1$: On pose $N_n = N(t_n)$

$$\text{On a: } \begin{cases} N_{n+1} - N_n = rN_n(1 - \frac{N_n}{K}) \\ N_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Property. (À vérifier numériquement)

- si $r < 2$, la suite converge vers K
- si $2 < r < 2.449$, la suite converge vers un cycle
- si $2.449 < r < 2.57$, la suite est encore un cycle mais plus complexe
- si $r > 2.57$, la suite devient chaotique

1.4 Notion de champ de vecteurs associée à une EDO

1.4.1 Généralités et définitions

Les modèles continus de la dynamique de populations sont des problèmes de Cauchy pour les EDO.

$$(EDO) \begin{cases} y'(x) = f(t, y(t)) & t \in]0, \pi[\\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Où

$$\begin{aligned} y : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y(t). \end{aligned}$$

$$f :]0, \pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x) \longmapsto f(t, x).$$

- Si l'on sait résoudre analytiquement l'EDO (i.e donner l'expression de $t \mapsto y(t)$) alors c'est terminé car il suffit d'étudier la fonction $t \mapsto y(t)$
- Si l'on ne sait pas déterminer la solution analytique, on peut:
 1. s'assurer de **l'existence** et **l'unicité** de la solution et de sa **stabilité** vis à vis des données du problème.
 2. Puis analyser les propriétés qualitatives de cette solution pour simple analyse de $f(t, x)$

C'est ici qu'intervient les champs de vecteurs.

Illustrations.

1. Prenons le modèle de Malthus

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t), & t \in]0, \pi[\\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

On sait que $N(t) = N_0 e^{rt}$

2. Voici ce que fait python pour traiter N .



Figure 1.5: Ce que fait python

3. Traitons les vecteurs tangents à la courbe $t \mapsto N(t)$ aux points t_n , $n = 0$
4. Si l'on connaît les valeurs minimales et maximales de la solutions on peut avoir l'allure de la solution.

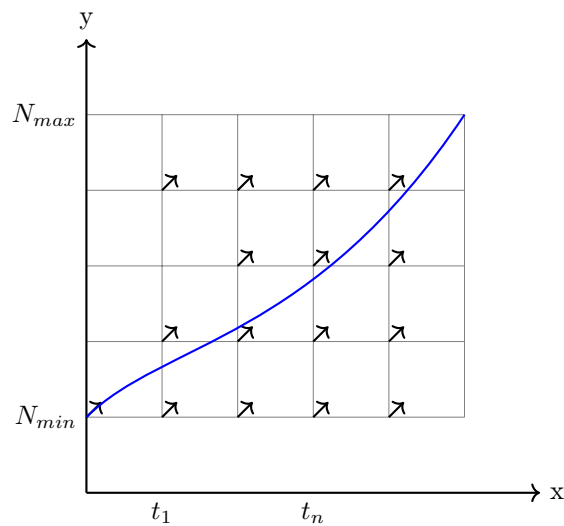


Figure 1.6: Une courbe sur des champs de vecteurs

Analysons ce que représente le vecteurs tangent:

- pour une courbe $y = g(x)$
- python et tout autre logiciel procède ainsi

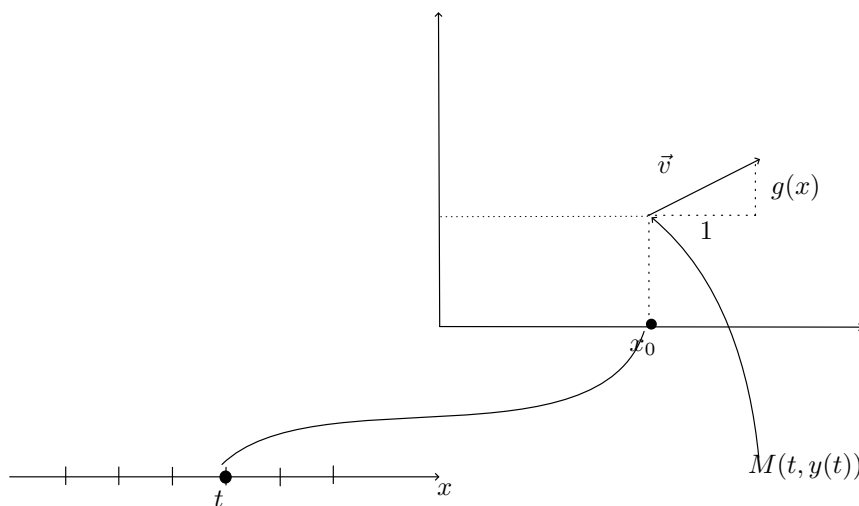


Figure 1.7: Ce que représente vecteur

Le vecteur tangent à la courbe:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (1, g'(x)) = (1, \frac{dy}{dx}) = (1, \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}) \\ &= \frac{1}{\frac{dx}{dt}} (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = \frac{1}{\dot{x}(t)} \underbrace{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \text{vecteur tangent}}} \\ \vec{v} &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t))\end{aligned}$$

Càd \vec{v} est le vecteur vitesse au points $M(x(t), y(t))$ a la courbe paramétrée $t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{cases}$. On a le résultat.

Proposition 1.2.

(y obtient solution de l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$)

⇕

(vecteur vitesse de la courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), y(t))$ au point $M(t_0) = (t_0, y(t_0))$
si le vecteur $(1, f(t_0, y(t_0)))$)

Proposition 1.3.

$$V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, y) \longmapsto V((t, y)).$$

(si le champ de vecteur associé à l'EDO $y'(t) = f(t, y(t)) \Leftrightarrow V(t, y) = (1, f(t, y))$)

1.4.2 Dessins de champs de vecteurs

Principe:

À chaque points $P = (p_x, p_y)$ on trace le vecteur $\varepsilon V(P)$ où ε est une constance positive choisi pour écrire les vecteurs trop longs.

Avec python on écrit `quiver(Px, Py, Vx, Vy, angles='xy')` RQ 1: Cette fonction est vectorielle, i.e P_x, P_y, V_x, V_y , sont des numpy array de taille n . RQ 2: On peut ajouter un paramètre pour controles la longueur des vecteurs:

`plt.quiver(Px, Py, Vx, Vy, angles='xy', scale=1)`

Par conséquent, il faut normaliser les vecteurs (i.e le champ de vecteur)

Example 1.4. Champ de vecteur du modèle de Verhulst:

```
def f(t, y):
    return r * y * (1 - y/k)
```

la grille:

```
lt = np.linspace(tmin, tmax, N+1)
ly = np.linspace(ymin, ymax, M+1)
T, Y = np.meshgrid(lx, ly)
```

Construire les vecteurs:

```
Y = 1 + 0 * T
V = f(T, Y)
norm = np.sqrt(U*U + V*V)
U = U/norm
V = V/norm
```

On place les points:

```
plt.scatter(T, Y, marker='+', alpha = 0.5)
```

On place les vecteurs

```
plt.quiver(T, Y, U, V, angles='xy', scale=N)
```

1.4.3 Recherche de solution approchée de modèles sous python

On cherche une solution approchée de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in]t_0, t_0 + T[\\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec python. Pour cela il suffit de dire **en quels points** on veut cette solution.
On se donne:

- une liste des instants $[t_0, t_1, \dots, t_N]$
- t_0, y_0
- Puis, on appelle la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` de python.
- On obtient une liste $[y_0, y_1, \dots, y_N]$

Example 1.5. Cas du modèle du Verhulst

- EDO:

```
1 def f(t, y):
2     return \ldots
```

- Instants

```
1 t0, tf = a, b
2 N = 100
3 t = np.linspace(t0, tf, N)
```

- On appelle `odeint`

```
1 from scipy.integrate import odeint
2 yapp = odeint(f, t, y), rtol=None, atol=None, tfloat=False)
3 plt.plot(t, yapp, \ldots)
```

1.5 Modèle de prédateur proie (lotka-voltena (1931))

$H(t)$: population de sardins

$P(t)$: population de requins

$$\frac{H'(t)}{H(t)} = \text{taux de variation de sardins} = \underbrace{a}_{\text{taux de croissance}} - \underbrace{bP(t)}_{\text{taux de mortalité}}$$

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \text{taux d'arrivé des requetes} = \underbrace{-c}_{\text{taux de décès}} + \underbrace{dH(t)}_{\text{taux de croissance}}$$

D'où le modèle:

$$\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - bP(t)) & t > 0 \\ P'(t) = P(t)(-c + dH(t)) \\ H(0) = H_0, \quad P(0) = P_0 \end{cases}$$

Si l'on désigne par $p \geq 0$ la proportion des requêtes en sardines pêchés

$$\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - p - bP(t)) & t > 0 \\ P'(t) = P(t)(-c - p - dH(t)) \\ H(0) = H_0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

CHAPTER 2

INTERPOLATION POLYNOMIALE

On va essayer de construire des polynômes qui passent par un ensemble (nuages) de points donnés.

Si ces points sont les valeurs d'une fonction, on aimerait:

- savoir si le polynôme construit est d'autant plus proche de la fonction que le nombre de point est grand. C'est-à-dire, est-ce que l'erreur tend vers zéro lorsque le nombre de points tend vers l'infini.
- Si oui, comment quantifier cette convergence? C'est-à-dire, quelle est la vitesse (ordre) de cette convergence.

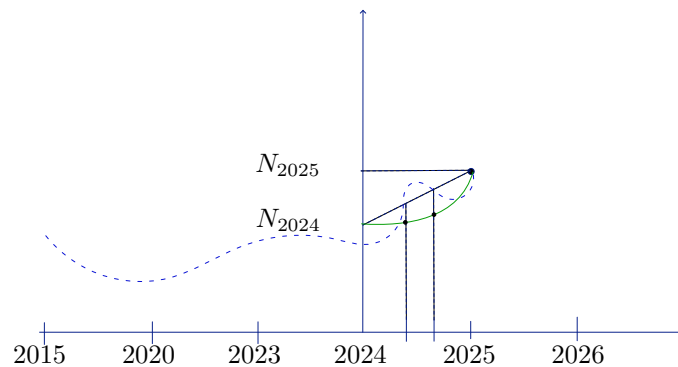


Figure 2.1: evolution-de-population-en-annee

1. Approche 1: approximation linéaire.
 - Polynôme de degré 1
2. Approche 2:
 - polynôme de degré 2
 - approximation quadratique
3. Approche 3: prise en compte d'Historique

2.1 Rappels sur les nuts numériques Vitesse (ordre) de convergence valeur ajoutée par itérations

Definition 2.1. Soit $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers $x^* \in \mathbb{R}^n$, pour une norme $\| \cdot \|$ de \mathbb{R}^n

- Si $k_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|}$ existe et $k_1 \in]-1, 1[\setminus \{0\}$. On dit que la suite converge linéairement vers x^* ou que la convergence est d'ordre 1.
- Si $k_1 = 0$, $k_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^2}$ existe et non nul. On dit que la suite converge quadratiquement vers x^* , ou que la convergence est d'ordre 2.
- Si $k_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q}$ existe et $\neq 0$ la convergence est d'ordre q . La constante K_q est appelée constante asymptotique d'erreur.

Example 2.2. 1. $x_n = (0.2)^n$

- On a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. La convergence vers $x^* = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(0.2)^{n+1}}{(0.2)^n} = 0.2 \in]-1, 1[\setminus \{0\}$

D'où

- x_n converge à l'ordre 1
- Sa constante asymptotique est $k_1 = 0.2$

2. $I_n = (0.2)^{2^n}$. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

On a:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (0.2)^{2^{n+1}} = (0.2)^{2^n \cdot 2} \\ &= \left((0.2)^{2^n} \right)^2 \\ &= (I_n)^2 \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{(I_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(I_n)^2}{(I_n)^2} = 1$ D'où

- convergence d'ordre 2
- de constante $k_2 = 1$

En pratique, on ne dispose pas de K_q

Definition 2.3.

$$x_n \text{ converge vers } x^* \text{ à l'ordre } q \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \exists A, B \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \geq N, 0 < A \leq \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} \leq B < +\infty$$

La convergence est au moins d'ordre q si et seulement si on a (deuxieme partie d'équation)

2.1.1 Valeur ajoutée par l'itération

Il est question de comparer 2 suites qui ont la même vitesse de convergence.

Remark 2.4. Si $|x_n - x^*| = 4 \cdot 10^{-8} = \underbrace{0.0000000}_{7 \text{ chiffres}}4$. On dira que x_n et x^* ont 7 chiffres exactes apres la virgule.

$$\begin{aligned} \log_{10} |x_n - x^*| &= \log_{10} 4 - 8 \log_{10}(10) \\ \frac{\log |x_n - x^*|}{\log 10} &= \frac{\log 4}{\log 10} - 8 \end{aligned}$$

i.e $d_n = -\log_{10} |x_n - x^*|$ mesure de nombre de chiffres décimales entre x_n et x^* qui coïncident.

Remark 2.5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} = K_q \Rightarrow K_q \approx \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q}$$

D'où $d_{n+1} - qd_n \approx -\log_{10} K_q$, i.e

$$d_{n+1} + \frac{\log_{10} K_q}{1-q} \approx q(d_n + \frac{\log_{10} K_q}{1-q})$$

Donc, le nombre de chiffres significatives est multiplié par q .

Proposition 2.6. Si x_n converge à l'ordre 1 vers x^* de constante asymptotique K_1 , alors le nombre d'itérations nécessaires pour gagner un chiffre exacte est la partie entière de $-\frac{1}{\log_{10} K_1}$

Proof. Soit m le nombre d'itérations pour gagner un chiffre. Comme $d_{n+m} - d_n = -\log_{10} K_1$, en partant de d_n , après m itérations on aura

$$d_{n+m} - d_n = -m \log_{10} K_1$$

D'où on aura gagné 1 chiffre si $d_{n+m} - d_n = 1$, i.e

$$1 = -m \log_{10} K_1 \Rightarrow m = \left(-\frac{1}{\log_{10} K_1} \right)$$

□

2.1.2 Obtenir numériquement la vitesse de convergence

On cherche q tq: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} = K_q \in \mathbb{R}^*$

Remark 2.7.

$$\frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} \approx K_q \Rightarrow \underbrace{\log \|x_{n+1} - x^*\|}_Y - q \underbrace{\log \|x_n - x^*\|}_X = \log K_q$$

i.e $Y = aX + b$.

Conclusion: pour déterminer q :

- Traiter la courbe $\log \|x_n - x^*\| \mapsto \log \|x_{n+1} - x^*\|$
- Déterminer q comme la pente de la droite passant par le maximum de points.

$$x_n = x_0, x_1, \dots, x_N$$

$$x_n - x^* = x_0 - x^*, x_1 - x^*, \dots, x_N - x^*$$

$$x_{n+1} - x^* = x_1 - x^*, x_2 - x^*, \dots, x_{N+1} - x^*$$

En python:

```
1 xn = np.array([x0, ..., xN])
2 e = np.log(np.abs(xn - x*))
3 ex = e[0:-1] #de premier a avant dernier
4 ey = e[1:] #de deuxieme au dernier
5 plt.scatter(ex, ey, label="miage")
6 a,b = np.polyfit(ex, ey, 1)
7 plt.plot(ex, b + a * ex, label=f"$x \mapsto {b:.32f} + {a:.32f}x$")
```

2.2 Interpolation: définition-motivation-exemples

2.2.1 Définition

Definition 2.8. Soient $(x_i, y_i)_{i=\{1, \dots, N\}}$ un nuage de points (exemple un ensemble discret de point du graphe d'une fonction). Interpoler ce nuage de points correspond à chercher un polynôme de degré $N - 1$, qui passe par chacun de ces points.



Figure 2.2: L'exemple visuel de la définition

Questions:

1. Comment le construire?
2. $P_{N-1} \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$
3. $P_{N-1}(x_i) = y_i$

2.2.2 Motivations

- La solution d'un problème est fournie par une formule représentative: Noyau de la chaleur (i.e convolution) est un cherche la solution en un nombre de points.
 - On approche alors la fonction par un polynôme: i.e chercher le polynôme de degré "bas" proche de la fonction
- La solution d'un problème n'est connue qu'à table des valeurs en un nombre fini de points et on souhaite l'évaluer partout.
 - l'interpolation
- On peut utiliser l'interpolation dans
 - l'intégration numérique
 - la résolution numérique des EDO
 - la visualisation scientifique

Definition 2.9. Un tel polynôme est appelé **polynôme interpolateur de lagrange** de degré $N - 1$ de ces points.

2.2.3 exemples d'interpolation

Theorem 2.10. Polynôme interpolateur de degré 1.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 2 points distincts de \mathbb{R}^2

- Il existe une unique droite passant par les 2 points.

$$(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

- Si de plus, $x_1 \neq x_2$, il existe un unique polynôme de degré 1 (i.e $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$) tq:

$$(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow y = P(x) \text{ avec } P_1 = \frac{(x - x_1)y_1 - (x - x_2)y_2}{x_2 - x_1}$$

Proof.

•

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow M\vec{M}_1 / M_1\vec{M}_2 \\ &\Leftrightarrow \det(M\vec{M}_1, M_1\vec{M}_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}$$

- Si $x_1 \neq x_2$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow y - y_1 = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \\ &\Leftrightarrow y = P_1(X) \end{aligned}$$

□

Remark 2.11. On a l'écriture équivalente de P_1 :

•

$$P_1 \frac{x_0 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} + X \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv a_0 + a_1 X$$

C'est l'écriture dans la base $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$

•

$$P_1 = \underbrace{\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}}_{l_1} y_1 + \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{l_2} y_2$$

C'est l'écriture dans la base (l_1, l_2) de $\mathbb{R}_1[X]$

RQ:

$$l_1(x_1) = 1 \quad l_1(x_2) = 0 \quad l_2(x_1) = 0 \quad l_2(x_2) = 1$$

(base de lagrange)

•

$$P_1 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

C'est l'écriture dans la base $(1, x - x_1)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ (base de newton)

Example 2.12. Méthode de calcul employée

Chercher le polynôme interpolateur de lagrange aux points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$

- Méthode 1: $x_1 \neq x_2 \neq x_3$

P_2 est un polynôme de degré 2

$$P_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Lemma 2.13.

$$P_2(x_1) = y_1, \quad P_2(x_2) = y_2 \quad \text{i.e } a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \underbrace{M^{-1}}_{???} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Remark 2.14. Par 2 points

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \text{ et } M^{-1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Méthode 2:

$$P_2 = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{aligned} P_2(x_i) = y_i \Rightarrow \begin{cases} a_0 & = y_1 \\ a_0 + a_1(x_2 - x_1) & = y_2 \\ a_0 + a_1(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & = y_3 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_0 & = y_1 \\ a_1 & = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ a_2 & = \frac{y_3 - y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{cases} \end{aligned}$$

Remark 2.15. On a:

$$a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{x_3 - x_1}$$

càd

$$P_3 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{x_3 - x_1}(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1	$y_1 =: a_3$		
x_2	y_2	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =: a_1$	
x_3	y_3	$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$\frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{x_3 - x_1} =: a_2$

- Méthode 3:

$$P_3 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3 = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\left(\prod_{j=1}^3 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)}_{l_i(x)} y_i$$

Remark 2.16. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$y = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2$$

2.3 Polynôme interpolateur de lagrange

2.3.1 Définition et propriétés

Theorem 2.17. (existence et utilité)

Soit x_1, \dots, x_n des réels 2 à 2 distincts et y_1, \dots, y_n des réels quelconques: Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (i.e de degré $n - 1$) tel que $p(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$

On dit que P est le polynôme interpolateur de lagrange aux points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

Proof. Soit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ P &\longmapsto \Phi(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n)). \end{aligned}$$

on a:

- Φ linéaire
- Φ injective

En effet, $\Phi(P) = 0 \Leftrightarrow P(x_i) = 0 \Leftrightarrow P \equiv 0$ car $\deg(P) \leq n - 1$. D'où Φ isomorphisme d'espace vectoriel et la surjection assure le résultat. \square

Definition 2.18. Si f est continue sur $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ 2 à 2 distincts, alors, l'unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tq $P(x_i) = f(x_i) i = 1, \dots, n$ est appelé polynôme d'interpolation de lagrange de f aux points x_1, \dots, x_n

2.3.2 Estimation d'erreur

Theorem 2.19. l'erreur

Soient

- $a < b$ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue
- x_1, \dots, x_n 2 à 2 distincts de $[a, b]$
- P polyôme d'interpolation de lagrange de f aux points x_i

Si f est n fois dérivable sur $]a, b[$, alors, pour tout $a \in [a, b]$, il existe $t \in]a, b[$ tq

$$f(x) - P(x) = \omega_n(x) \frac{f^{(n)}(t)}{n!}$$

où $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$

Corollary 2.20. Si $f^{(n)}$ est bornée par M sur $]a, b[$, alors $\forall x \in [a, b]$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{n!} |\omega_n(x)| \leq \frac{M}{n!} (b - a)^n$$

2.3.3 Implémentation avec python

```

1 from scipy.interpolate import lagrange
2 x = np.array([x_1, x_2, x_3])
3 y = np.array([y_1, y_2, y_3])
4 p = lagrange(x, y)
5 print(p) # affiche le polynome
6 print(p(3)) # collable

```

2.4 Construction des polynôme d'interpolation de lagrange

x_0, \dots, x_{n-1} 2 à 2 distincts

2.4.1 Interpolation dans la base canonique (Vandermonde)

Construction

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$P(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n-1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{V(x_0, \dots, x_{n-1})} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}}_a = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}}_b$$

Matrice de Vandermonde

- elle pleine
- malconditionnée

```

1 def VDM_Mat(x):
2     x_n = np.reshape(x, (x.size, 1))
3     return x_n ** np.arange(x.size)

```

```

1 def VDM_Poly(x, y):
2     M = VDM_Mat(x)
3     a = np.linalg.solve(M, y)
4     return a

```

Evaluation efficace de P algorithme de Horner

Proposition 2.21. Si X est un réel et Q est le polynôme défini par

$$Q(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$$

alors la suite

$$\begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_k = q_{k-1}x + a_k, k = 1, \dots, n \end{cases}$$

vérifie $q_n = Q(x)$

Proof. (laissé exo)

$$Q(X) = X^2 + 2X + 1 \equiv (X + 2)X + 1$$

□

```
1 def Horner(P, xx):
2     y = 0
3     for a in P:
4         y = y * xx + a
5     return y
```

```
1 def IntuP_VDM(x, y, xx):
2     a = VDM_Poly(x, y)
3     yy = Horner(a[::-1], xx)
4     return yy
```

2.4.2 Interpolation dans la base duale: Formule de lagrange et points barycentrique

Construction

Idée prendre pour base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'image réciproque de la base canonique de \mathbb{R}^{n-1} pour Φ

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}^{n-1} (x - x_j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (x_i - x_j)} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i L_i(X)$$

Theorem 2.22.

$$\begin{aligned} f &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x_1, \dots, x_n \\ P \end{aligned}$$

Si f n fois dérivable,

$$\forall x \in [a, b], \exists t \in]a, b[, f(x) - P(x) = \omega_n(x) \frac{f^{(n)}(t)}{n!}$$

Proof. du théorème (erreur)

Soit x fixé des $[a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$

On pose

$$F(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x) - P(x)}{\omega_n(t)} \omega_n(t)$$

F est n fois dérivable et P annule aux $n + 1$ points x_1, \dots, x_n, x . D'après le théorème Rolle (généralisé)

$$\exists t \in]a, b[\text{ tq } f^{(n)}(t) = 0$$

Or

$$\underbrace{F^{(n)}(t)}_{=0 \text{ par hyp}} = f^{(n)}(t) - \underbrace{P^{(n)}(t)}_{=0 \text{ car } \deg(P) < n} - \frac{f(x) - P(x)}{\omega_n(x)} n!$$

D'où

$$f(x) - P(x) = \omega_n(x) \frac{f^{(n)}(t)}{n!}$$

Par ailleurs, si $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$, $f(x) - P(x) = 0$

$$\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

□

Proof. corollaire

$$|f(x) - P(x)| = |\omega_n(x)| \frac{|f^{(n)}(t)|}{n!}$$

comme $x, x_i \in [a, b]$, on a $|x - x_i| \leq b - a$ et $|f^{(n)}(t)| \leq M$, on a:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{n!} (b - a)^n$$

□

Evaluation efficace: formule barycentrique

Proposition 2.23. On a

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)}} \end{aligned}$$

Proof. Comme

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \Rightarrow \omega'_n(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j)$$

D'où

$$\omega'_n(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad i = 1, \dots, n$$

D'où

$$L_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{x - x_i} \frac{1}{\omega'_n(x_i)}$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i L_i(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} \omega_n(x) \\ &= \omega_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} \end{aligned}$$

Or pour $P \equiv 1$ on a $y_i = 1, i = 1, \dots, n$, on a

$$1 = \omega_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)}$$

D'où

$$\omega_n(x) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} \right)^{-1}$$

Enfin,

$$P(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(x-x_i)\omega'_n(x)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x-x_i)\omega'_n(x)}}$$

□

- Remark 2.24.**
1. Attention: si $x = x_i$, $i = 1, \dots, n$
 2. Exercice: calculer la complexité de cette formule et comparer à la première.
 3. Ajouter un nouveau point d'interpolation oblige à refaire tous les calculs.

2.4.3 Méthode des différences divisées

Préliminaires: Interpolation de Neville

Lemma 2.25. Considérons n points 2 à 2 distincts x_1, \dots, x_n et n réels y_1, \dots, y_n . Pour $1 \leq k \leq l \leq n$, posons P_{x_k, \dots, x_l} le polynôme d'interpolation aux points

$$(x_k, y_k) \dots (x_l, y_l)$$

Nous avons

$$P_{x_k, \dots, x_l}(x) = \frac{(x - x_l)P_{x_l \dots x_{l-1}}(x) - (x - x_k)P_{x_{k+1} \dots x_l}(x)}{x_k - x_l}$$

Schématiquement

$$P(x) = \underbrace{x_k, \overbrace{x_{k+1}, \dots, x_{l-1}}^{P_2}, x_l}_{P_1}$$

$$\frac{x - x_l}{x_k - x_l} P_1 + \frac{x - x_k}{x_l - x_k} P_2$$

Construction de l'interpolation de Newton

Definition 2.26. (Polynôme de Newton) Soit $n \geq 1$ entier, x_1, \dots, x_n n réels 2 à 2 distincts. Les polynômes de Newton $\omega_0, \dots, \omega_n$ associés à ces points sont définis par

$$\begin{cases} \omega_0 = 1 \\ \omega_j = (x - x_1) \dots (x - x_j), \quad (1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

Remark 2.27. $\{\omega_j\}_{j=1, \dots, k}$ est une base de $\mathbb{R}_k[x]$

- Ainsi le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \omega_k$$

où α_k sont solutions de

$$y_i = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \omega_k(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

On parle de développement de Newton du polynôme de Lagrange

Definition 2.28. On appelle différences divisées d'ordre $j-1$ ($1 \leq j \leq n$) associées aux points $(x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i)$ les nombres $d_{i,j}$ ($i = j$ à n) définis par

- $d_{i,1} = y_i \quad i = 1, \dots, n$
- $d_{i,j} = \frac{d_{i,j-1} - d_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}} \quad j = 2 \text{ à } n, i = j \text{ à } n$

Lorsque $y_i = f(x_i) \quad i = 1, \dots, n$, $d_{i,j}$ est généralement noté $f[x_{j-i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j]$ et est appelé différence divisée d'ordre $j-1$ aux i points x_{j-i+1}, \dots, x_j

Python:

```
1 def MatriceDifferencesDivisee(x, y):
2     n = len(y)
3     d = np.zeros((n, n))
4     d[:, 0] = 1.0 * y
5     for j in range(1, n):
6         d[j:n, j] = (d[j:n, j-1] - d[j-1:n, j-1]) / (x[j:n] - x[0:n-j])
7     return d
```

Remark 2.29. • Le "stencil" (squelette) est

$$\begin{array}{ccc} & i-1, j-1 & \\ & \swarrow & \\ i, j-1 & \text{---} & i, j \end{array}$$

- La hauteur de stencil est j
- Le support du stencil est $[x_{i-j}, \dots, x_i]$

Proposition 2.30. On a $d_{j,j} = \alpha_{j-1}$ pour $j \in [1, \dots, n]$, càd:

$$P = \sum_{j=1}^n d_{j,j} \omega_{j-1}$$

Ainsi, pour calculer P il suffit de connaître $d_{j,j} \quad j = 1, \dots, n$

Calcul efficace du polynôme

Proposition 2.31. Soit donné x_0, \dots, x_n des réels 2 à 2 distincts. Soit Q le polyôme défini par

$$Q(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \equiv \sum_{i=0}^n a_i \omega_i(x)$$

La suite des polynômes Q_0, \dots, Q_n définies par

$$\begin{cases} Q_n = a_n \\ Q_k = a_k + (x - x_k)Q_k \quad k = n-1, \dots, 0 \end{cases}$$

vérifie $Q_0 = Q$

```
1 def HornerNewton(d, x, xx):
2     n = len(d)
3     yy = 0 * xx + d[n-1]
4     for i in range(n-2, -1, -1):
5         yy = d[i] + (xx - x[i]) * yy
```

```

6 |         return yy
|
1 | def DifferencesDivisees(x, y):
2 |     d = MatriceDifferencesDivisee(x, y)
3 |     a = np.diag(d)
4 |     return a

```

2.5 Comportement asymptotique "lorsque $N \rightarrow \infty$ "

2.5.1 Observation

On n'a pas toujours une convergence uniforme de l'interpolation

Example 2.32. $f(x) = \sqrt{x}$ avec $[a, b] = [0, 1]$, x_1, \dots, x_n équirépartis sur $[a, b]$

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t) - P(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

ce phénomène est appelé phénoème de Runge.

Il en reste une solution:

- si f est lipschitzienne sur $[a, b]$ ou Hölderienne

$$\exists a \in]0, 1[, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

- Si x_1, \dots, x_n sont les racines du n -ème polynôme de Tchebychev.

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

2.5.2 Polynôme de Tchebychev

Definition 2.33. Les polynômes de Tchebychev sont définis par la recurrence:

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = x \\ T_n = 2xT_{n-1} - T_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Proposition 2.34. Le n -ième polynôme de Tchebychev vérifie:

1. T_n est de degré exactement n et son coefficient de plus haut degré est 2^{n-1} , $n \geq 1$
2. T_n a n racines distinctes simples

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, \dots, x_n\}, x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) \quad (1 \leq j \leq n)$$

3. $|T_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1], |T_n(x)| = 1 \Leftrightarrow x \in \{x_0, \dots, x_n\} x_k = \cos(k\frac{\pi}{n})$

$$|T_n(x)| = 1 \text{ si } x \in \{x_k\} \quad x_k = \cos(k\frac{\pi}{n}) \quad (0 \leq k \leq n)$$

Proof. 1. Par récurrence:

Soit (P_n) la propriété " T_n est de degré n et son coef. de plus haut degré est 2^{n-1} ", $n \geq 1$. P_0 et P_1 vraies ($k \leq n$).

Supposons P_k vrai et montrons que P_{n+1} vrai.

En effet, nous avons $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$, on en déduit que P_{n+1} est vraie.

Maintenant,

$$\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$$

En effet, pour $\begin{cases} n = 0, T_0(x) = 1 = \cos(0) \\ n = 1, T_1(x) = \cos(\arccos(x)) \end{cases}$ et $n > 1$

$$\cos((n+1) \arccos(x)) = \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$$

$$\cos((n-1) \arccos(x)) = \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) + \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$$

On a:

$$\cos((n+1) \arccos(x)) = 2x \cos(n \arccos(x)) - \cos((n-1) \arccos(x))$$

D'où $x \mapsto \cos(n \arccos(x))$ vérifie la même récurrence sur $[-1, 1]$ que T_n . Par conséquent les 2 coïncident sur $[-1, 1]$. On en déduit $\forall x \in [-1, 1]$

2.

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \arccos(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$$

$$\Leftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2n} \bmod \frac{\pi}{n} \quad \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n}\right) \quad 0 \leq k \leq n-1$$

3. $|\cos(x)| \leq 1$ D'où $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$

$$|T_n(x)| = 1 \Leftrightarrow n \arccos(x) = 0 \bmod \pi$$

$$\arccos(x) = 0 \bmod \frac{\pi}{n}$$

$$\in x \in \left\{ \cos\left(k \frac{\pi}{n}\right), k \in [0, n] \right\}$$

□

Proposition 2.35. Si Q_n est un polyôme de degré n de même coeff. de plus haut degré que T_n , alors:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |Q_n(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1$$

Corollary 2.36. Si ξ_1, \dots, ξ_n sont n points 2 à 2 distincts de $[-1, 1]$, on a:

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| \prod_{j=1}^n (x - \xi_j) \right| \geq \max_{x \in [-1, 1]} \left| \prod_{j=1}^n (x - x_j) \right| = \max_{x \in [-1, 1]} \frac{1}{2^{n-1}} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

où x_j sont les racines de T_n

2.5.3 Application

Soit ξ_1, \dots, ξ_n , 2 à 2 distincts, P le polynôme de lagrange de f (suffisamment régulière), alors:

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} |\omega_n(x)| \\ &\leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \|\omega_n(x)\|_\infty \end{aligned}$$

où $\omega_i = \prod_{j=1}^n (x - \xi_j)$ et $\|\cdot\|_\infty$ et loi norme inf sur $[-1, 1]$. Ainsi, le choix de ξ_i qui possède la plus petite valeur de $\|\omega_n\|_\infty$ est celui des racines du n -ième polynôme de Tchebychev.

Remark 2.37. On se ramène à un intervalle quelconque $[a, b]$ par

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) \quad (1 \leq j \leq n)$$

sont les racines des polynômes de Tchebychev sur $[a, b]$

CHAPTER 3

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

But: On souhaite calculer au mieux

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

où $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ donné

Contraintes

- f n'a pas de primitive connue (ou évidente)
- f n'est connue ou ne peut être évaluée qu'en un certain nombre fini de points

$$(x_i, 0 \leq i \leq n \text{ sur } [a, b])$$



Figure 3.1: Exemple d'une intégration

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

$$S(f, \sum_N) = \sum_{i=0}^N f(\xi_i) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\omega_i}$$

somme de Rieman associée à \sum_N . Théorème: $\lim_{N \rightarrow \infty} S(f, \sum_N) = \int_a^b f(x) dx$

3.1 Formule de quadratique

Definition 3.1. Étant donnée N points x_1, \dots, x_N de l'intervalle $[a, b]$ et N poids $\omega_1, \dots, \omega_N \in \mathbb{R}$ associées à chaque points.

On appelle formule de quadratique associé aux $(x_i), (\omega_i)$ l'application linéaire sur $\mathcal{C}^0([a, b])$

$$\tilde{I}(f) = \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i)$$

On dit que la formule de quadratique est d'ordre p si elle est exacte pour les polynôme de degré p . i.e

$$\tilde{I}(Q) = \int_a^b Q dx \forall Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$$

et s'il existe $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tq $\tilde{I}(Q) \neq \int_a^b Q dx$, autrement dit si elle exacte pour le polyôme de degré au plus $p - 1$.

Remark 3.2. On note:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

Points	x_1	x_2	\dots
Poids	ω_1	ω_2	\dots

Example 3.3. Soit la formule de quadratique

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f(a)$$

- si $f = 1$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = b - a = (b - a)f(a)$$

elle exacte pour les polynômes de degré 0.

- si $f(x) = x$ on a

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{(b - a)(a + b)}{2} \neq (b - a)a$$

elle n'est pas exacte pour les polynômes de degré 1.

Conclusion: elle est exacte pour les polynômes de degré au plus 0. Elle est donné d'ordre 1.

3.1.1 Construction de formule de quadratique à points donnés

Proposition 3.4. Soit x_1, \dots, x_N , N points 2 à 2 distincts de $[a, b]$.

1. Il existe un unique $(\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$\tilde{I}(Q) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^N \omega_i Q(x_i) = \int_a^b Q(x) dx \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$$

2. Pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^N

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \tilde{I}(f) \right| \leq \frac{(b-a)^{N+1}}{N!} \|f^{(N)}\|_\infty$$

Proof. Soit $l_i, i = 1, \dots, N$ la base de Lagrange associé aux x_i , i.e

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

on a $l_i \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$.

Soit $Q \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$, Q coïncide avec le polynôme d'interpolation de lagrange aux points x_1, \dots, x_N

$$Q(X) = \sum_{i=1}^N Q(x_i) l_i(X)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_a^b Q(x) dx &= \sum_{i=1}^N Q(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n Q(x_i) \omega_i \end{aligned}$$

où $\omega_i = \int_a^b l_i(x) dx$. D'où l'existence.

Unicité: Soit $\tilde{\omega}_i, i = 1, \dots, N$,

$$k : \int_a^b Q(x) dx = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_i Q(x_i) \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$$

alors, puisque $l_i \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$, on a

$$\int_a^b l_i(x) dx = \tilde{\omega}_i \quad i = 1, \dots, N$$

D'où ($\tilde{\omega}_i = \omega_i$) et on a l'unicité

Estimation d'erreur:

Soit f de classe \mathcal{C}^N sur $[a, b]$ et R_f un poly d'interpolation aux points $x_i \quad i = 1, \dots, N$. On a:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(f) &= \sum_{i=1}^N f(x_i) \omega_i = \sum_{i=1}^N P_f(x_i) \omega_i \\ &= \int_a^b P_f(x) dx \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \tilde{I}(f) \right| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P_f(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - P_f(x)| dx \\ &\leq \frac{\|f^{(N)}\|_\infty (b-a)^N}{N!} (b-a) \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \tilde{I}(f) \right| \leq \frac{\|f^{(N)}\|_\infty}{N!} (b-a)^N (b-a)$$

□

python:

```
1 from scipy.integrate import quad
2 quad(f, a, b) =
```

3.2 Utilisation des formules de quadrature élémentaires et composées

3.2.1 Définition

On appelle formule de quadrature élémentaire I_e sur $[-1, 1]$ associée aux points $\xi_i \in [-1, 1]$ et de poids ω_i , $i = 1, \dots, N$, la formule

$$I_e(f) = \sum_{i=1}^N \omega_i f(\xi_i) \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$$

Une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ en n points $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ étant donnée, elle induit une formule de quadrature composite I_c pour $[a, b]$

$$I_c = \sum_{i=1}^{n-1} I_e(f; x_i, x_{i+1}) \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_{i,j}) \quad \text{où } x_{i,j} = \frac{(x_j + x_{j+1}) + \xi_i(x_{j+1} - x_j)}{2}$$

Illustration:

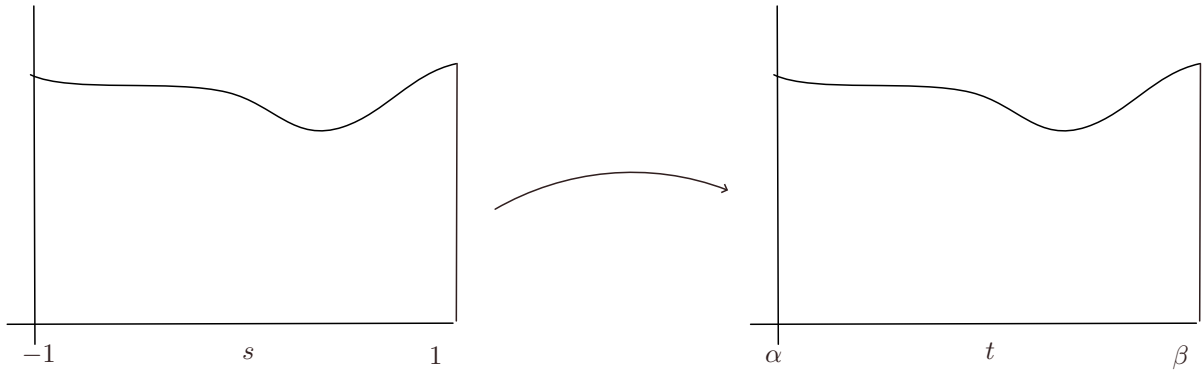


Figure 3.2: $I_e(f) = \sum_{i=1}^N \omega_i f(\xi_i) \approx \int_\alpha^\beta f(t) dt$

$$\int_\alpha^\beta f(t) dt \approx \frac{s+1}{2} = \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha} \Rightarrow \eta = \alpha + \frac{s+1}{2}(\beta-\alpha)$$

$$dt = \frac{\beta-\alpha}{2} ds$$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-1}^1 f\left(\alpha + \frac{s+1}{2}(\beta - \alpha)\right) ds \approx \frac{\beta - \alpha}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i f\left(\alpha + \underbrace{\frac{\xi_i + 1}{2}(\beta - \alpha)}_{x_i}\right) \\
&\approx \sum_{i=1}^N \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \omega_i\right) f(x_i) \\
&\approx I_e(f, \alpha, \beta)
\end{aligned}$$

3.2.2 Méthode de quadrature clmique

Méthode de rectangles

Definition 3.5.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \approx f(\alpha)(\beta - \alpha)$$

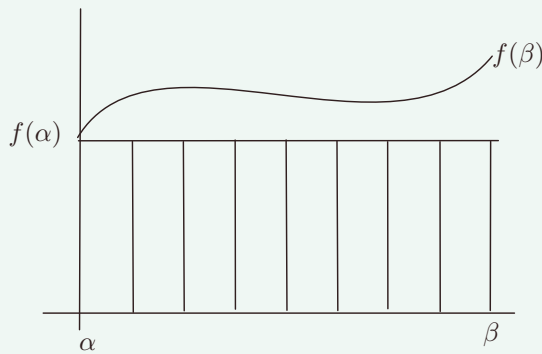


Figure 3.3: methode-rectangle

Proposition 3.6. • Si f est \mathcal{C}^1 sur $[\alpha, \beta]$ l'erreur de la méthode de quadrature élémentaires :

$$E_e(f) = I(f) - I_e(f) = \frac{f'(c)}{2}(\beta - \alpha)^2 \text{ où } c \in]\alpha, \beta[$$

- Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, l'erreur de quadrature de la méthode composite associée à une subdivision uniforme de pas h est majorée par

$$|E_c(f)| = |I(f) - I_c(f)| \leq h \underbrace{\|f'\|_{\mathcal{C}^0([a,b])}}_{\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|} \frac{b-a}{2}$$

Proof. Posons $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, F est de \mathcal{C}^2 car f est \mathcal{C}^1 . Par Taylor lagrange à l'ordre 2 en α donne

$$F(\beta) = F(\alpha) + F'(\alpha)(\beta - \alpha) + F''(c)\frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \text{ où } c \in]\alpha, \beta[$$

D'où

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - f(\alpha)(\beta - \alpha) = \frac{f'(\alpha)}{2}(\beta - \alpha)^2$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |I(f) - I_c(f)| &= \left| \int_a^b f(t) dt - I_c(f) \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) dt - \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) dt - f(x_j)(x_{j+1} - x_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\|f'\|_{\infty}}{2} (x_{j+1} - x_j)^2 \\ &\leq h \frac{\|f'\|_{\infty}}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq h \frac{\|f'\|_{\infty}}{2} (b - a) \end{aligned}$$

□

3.2.3 Méthode de trapèze

Definition 3.7.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a)$$

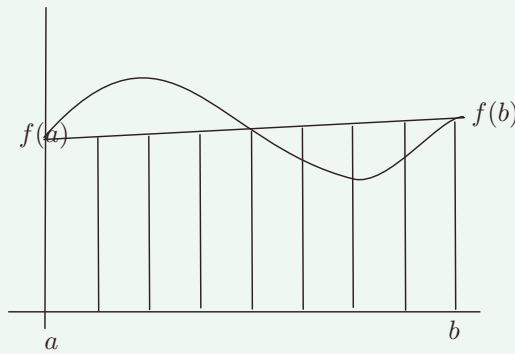


Figure 3.4: Méthode de trapeze

Proposition 3.8. Si f est \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$

$$|E_c(f)| = |I(f) - I_c(f)| \leq \frac{\|f^{(1+2)}\|}{1 \cdot 2} (b-a)^{12}$$

$$|E_c(f)| = |I(f) - I_c(f)| \leq h^2 \|f\|_\infty \frac{(b-a)}{12}$$

Proof. La formule était exacte pour les poly de degré 1, elle est du type interpolation:

$$I_c(f) = \int_a^b P_f(t) dt \text{ où } P_f \text{ est le poly d'ext aux points } a, b$$

D'où

$$\begin{aligned} |E_c(f)| = |I(f) - I_c(f)| &= \left| \int_a^b (f(t) - P_f(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{2!} \int_a^b (x-a)(b-x) dx \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} |I(f) - I_c(f)| &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) dt \right) - \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} (x_{j+1} - x_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |E_c(f)| \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \sum_{j=0}^{n-1} h^3 = \frac{h^2}{12} \|f''\|_\infty \sum_{j=0}^{n-1} h \\ &\leq \frac{1}{12} h^2 \|f''\|_\infty (b-a) \end{aligned}$$

□

3.2.4 Méthode de point-milieu

Definition 3.9.

$$\int_\alpha^\beta f(t) dt \approx f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha)$$

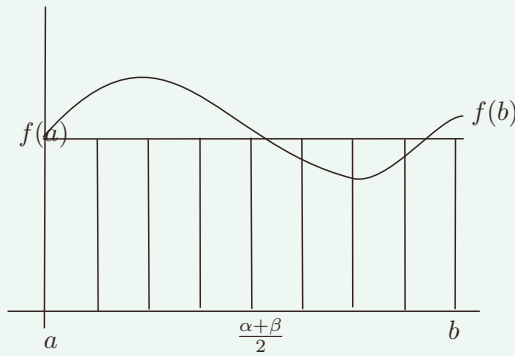


Figure 3.5: methode-de-point-milieu

Example 3.10. degré d'exactitude sur $[-1, 1]$ elle devient

$$\int_{-1}^1 f(s) ds \approx 2f(0)$$

- Pour $f = 1$, on a $I(f) = \int_{-1}^1 ds = 2 \cdot 1 = I_c(f)$. D'où I_c est exacte pour poly de degré au moins 0.
- Pour $f = s$ on a $I(f) = \int_{-1}^1 s ds = 0 = 2 \cdot 0 = I_c(f)$. D'où I_c est exacte pour poly de degré au moins 1.
- Pour $f = s^2$ on a $I(f) = \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{2}{3} \neq 2 \cdot 0^2 = I_c(f)$. La formule élémentaire n'est pas exacte pour poly de degré 2. Donc, la formule de point-milieu est exacte pour les polynômes de degré 1.

Proposition 3.11. • Si f est $\mathcal{C}^2([a, b])$ on a:

$$E_c(f) = I(f) - I_c(f) = \frac{f''(c)}{24}(b-a)^3$$

- Si f est \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$, l'erreur de quadrature de la méthode composite associée à une subdivision uniforme de $[a, b]$ de pas h est majorée par

$$|E_c(f)| = |I(f) - I_c(f)| \leq h^2 \frac{\|f''\|_\infty}{24}(b-a)$$

Proof. exo

□

3.2.5 Méthode de Simpson

Definition 3.12.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \approx \frac{\beta - \alpha}{6} \left(f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right)$$

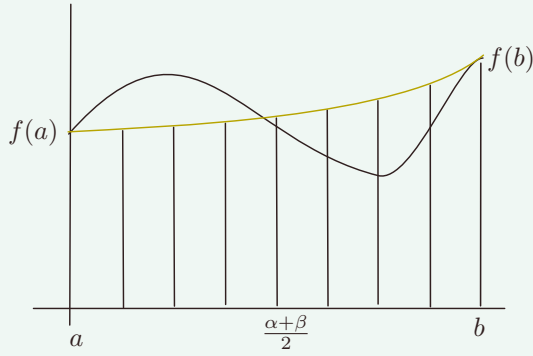


Figure 3.6: methode-de-simpson

Proposition 3.13. • Si f est \mathcal{C}^{3+1} sur $[\alpha, \beta]$ on a:

$$E_c(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - I_e(f) = -\frac{f^{(4)}}{2880}(\beta - \alpha)^5 \text{ où } c \in]\alpha, \beta[$$

$$|E_c(f)| \leq h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{(b-a)}{2880}$$

3.2.6 Méthode de Newton-Côte

C'est une généralisation des methodes élémentaires.

Definition 3.14. On appelle méthode de Newton-Côte d'ordre k la méthode élémentaire construite en utilisant le polynôme d'interpolation d'ordre k , associé aux $k+1$ points équidistants

$$x_i = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{k}, \quad i = 0, \dots, k$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^k \omega_i f(x_i)$$

où $x_i = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{k}$, $i = 0, \dots, k$ et

$$\omega_i = \int_{\alpha}^{\beta} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

Remark 3.15. • Cette formule est $\begin{cases} \text{d'ordre } k \text{ si } k \text{ impair} \\ \text{d'ordre } k+1 \text{ si } k \text{ pair} \end{cases}$

- On n'utilise les méthodes que pour k pair sauf le cas $k=1$
- Si $k=1$ on a la formule des trapèzes

- Si $k = 2$ on a la formule de Simpson
- Si $k = 4$ on a la formule de Boole-Villarceau

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{7}{90}f(-1) + \frac{16}{49}f(-\frac{1}{2}) + \frac{2}{15}f(0) + \frac{16}{45}f(\frac{1}{2}) + \frac{7}{90}f(1)$$

- Pour $k = 6$, on a la formule de Hordy
- Pour $k \geq 8$ on a des points ω_i , négatifs, ce qui rendent les formules sensibles aux erreurs d'arrondi.

Theorem 3.16. Soient $I(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, $I_e(f) = \sum_{i=0}^k \omega_i f(x_i)$, $E(f) = I(f) - I_e(f)$. Supposons que la méthode d'intégration soit d'ordre $p \geq k$. Posons

$$K(t) = E(x \mapsto (x-t)_+^p) = \int_{\alpha}^{\beta} (x-t)_+^p dx - \sum_{i=0}^k \omega_i (x_i - t)_+^p$$

avec $x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a:

$$E(f) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{K(t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \quad \forall f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha, \beta])$$

Si de plus K est de signe constante sur $[\alpha, \beta]$, il existe $c \in [\alpha, \beta]$ telle que

$$E(f) = f^{(p+1)}(c) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{K(t)}{p!} dt$$

On appelle Noyau de Peano associée à la méthode, la fonction

$$t \mapsto \frac{K(t)}{p!}$$

Proof. Formule de Taylor avec reste intégrale:

$$f(x) = \sum_{i=0}^l \frac{(x-\alpha)^i}{i!} f^{(i)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$$

$$E(f) = E\left(\sum_{i=0}^l \frac{(x-\alpha)^i}{i!} f^{(i)}(\alpha)\right) + E\left(\int_{\alpha}^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt\right)$$

□

Remark 3.17. Lorsque K est de signe constante,

$$E(t \mapsto x^{p+1}) = (p+1)! \int_{\alpha}^{\beta} \frac{K(t)}{p!} dt$$

D'où

$$E(f) = \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} E(x \mapsto x^{p+1})$$

Dans les méthodes de Newton-Côte le noyau de Peano a une signe constante.

3.3 Construction de formule de quadrature (à points inconnus): Formules de Gauss Legendre

On cherche s'il existe un meilleur choix des points x_1, \dots, x_n de $[\alpha, \beta]$ tel que la formule de quadrature associée soit exacte sur $\mathbb{R}_{n'}[X]$ pour $n' > n$.

Example 3.18. Cherchons une table fomrle à 2 ponts

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

En effet, on a 4 inconnus, il faut donc 4 équations. On pose comme condition l'exactitude de cette formule pour les polynômes $1, x, x^2, x^3$, d'où

$$\begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 \\ 0 = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \\ \frac{2}{3} = \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 \\ 0 = \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 \end{cases}$$

Remark 3.19. x_1 et x_2 sont racines du polynôme $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ i.e $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. D'où $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

D'où

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

est exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$ ($3 = 2 \cdot 2 - 1$)

Example 3.20. Formule à 3 points

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \omega_3 f(x_3)$$

On impose l'exactitude $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - I_e[f, \alpha, \beta] \right| &\leq c(\beta - \alpha)^{5+2} \\ \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - I_c[f, \alpha, \beta] \right| &\leq ch^6 \end{aligned}$$

On obtient x_i sont racines du polynôme $\frac{1}{3}(5x^3 - 3x)$. D'où, $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ et $\omega_1 = \frac{5}{9}$, $\omega_2 = \frac{8}{9}$, $\omega_3 = \frac{5}{9}$. D'où

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Proposition 3.21. Considérons la formule à n points

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n)$$

exacte pour les polynômes de degré $\leq 2n - 1$. Alors les abscisses x_1, \dots, x_n sont les n racines du polynôme

de Legendre de degré n définie par la récurrence.

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} [(2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)]$$

$$\omega_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La formule de quadrature ainsi construite est appelée formule de Gauss-Legendre.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

exacte pour $1, x, x^2, x^3$ pour $(x - x_1)(x - x_2)$

$$\int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2) dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 x(x - x_1)(x - x_2) dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 dx = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} + (x_1x_2)2 = 0 \\ -\frac{2}{3}(x_1x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \omega_2 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- $f \equiv (x - \frac{1}{\sqrt{3}}) \equiv (x - x_1) \Rightarrow -x_1 2 = \omega_1 2x_1$
- $f \equiv (x + \frac{1}{\sqrt{3}}) \equiv (x - x_2)$