Notes du cours d'Algebre Linéaire 2

Yehor Korotenko

January 29, 2025

Abstract

Le cours parte sur deux sujets liées:

1. la théorie des espaces euclidiens (i.e un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire) et leur endomorphismes

2. la réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

Chapter 1

Espaces euclidiens

1.1 Introduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont réels. On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Produit scalaire:

Definition 1.1. Une forme bilinéaire sur E est une application

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B((u, v)) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes $\forall u, v, w \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2. $B(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(v, w)$

B est dite

1. symétrique si $B(u, v) = B(v, u)\ \forall u, v \in E$
2. positive si $B(., u) \geq 0\, \forall u \in E$
3. définie si $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Proof.

$$\begin{aligned} B(0, 0) &= B(0 + 1 \cdot 0, 0) \\ &\overset{\text{linéarité}}{=} B(0, 0) + 1 \cdot B(0, 0) \\ &= B(0, 0) + B(0, 0) \\ &\Rightarrow B(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

Notation. Produit scalaire est noté: $< u, v >$

Example 1.2. .

1. $E = \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in E$

$$< X, Y > := \sum_{n=1}^{n} x_i y_i$$

   On l'appelle "produit scalaire canonique"(ou usuel)

2. $E = \mathbb{R}^2$ et $< X, Y > = 2x_1y_1 + x_2y_2$

3. $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}) \ni f, g$ (un espace des fonctions continues)

$$< f, g > := \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t) \, dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$< A, B > := Tr(A^t B)$$

Proposition 1.3. Un espace vectoriel non-nul possede une infinité de produits scalaires differents.

Definition 1.4. Un espace euclidien est un couple $(E, < . >)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $< . >$ est un produit scalaire sur E.

Property. Soit $(E, < . >)$ un espace euclidien. On pose:

$$\|X\| := \sqrt{< X, X >} \qquad X \in E$$

la norme (ou longeur) de X. (Il est bien définie car $< ., . >$ est toujours positif)

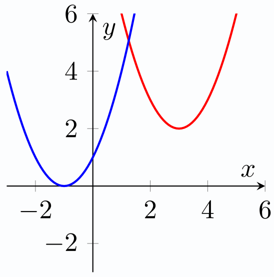
Lemma 1.5. inégalité de Cauchy-Schwarz On a

$$| < u, v > | \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall u, v \in E$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires, i.e $\exists t \in R$ tel que $u = tv$ ou $v = tu$

Proof. Si $v = 0$, clair
Si $v \neq 0$ on considère $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|u + tv\|^2 &= < u + tv, u + tv > \\ &= < u, u + tv > + t < v, u + tv > \\ &= < u, u > + t < u, v > + t < v, u > + t^2 < v, v > \\ &= \|u\|^2 + 2t < u, v > + t^2 \|v\|^2 = f(t) \end{aligned}$$



Cas 1: $f(t)$ n'a pas de racinces différentes

$$\begin{aligned} \Delta = 4 < u, v >^2 &= 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow < u, v >^2 &\leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\ \Rightarrow | < u, v > | &\leq \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

Cas 2: $f(t)$ a seulement une racine:

$$
\begin{aligned}
&\Delta = 0 \\
\Rightarrow &\exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \|u + tv\|^2 = 0 \\
\Rightarrow &u + tv = 0 \Rightarrow u = -tv
\end{aligned}
$$

La définition suivante sera étudiée dans le cours d'analyse:

Definition 1.6. On dit que $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme si:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

Lemma 1.7. L'application

$$\sqrt{< .,. >} = \|.\| : E \to \mathbb{R}_+$$

est dite norme euclidienne.

Proof. 1), 2) sont faites

$$
\begin{aligned}
3)\ \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\
\Rightarrow \|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2
\end{aligned}
$$

Proposition 1.8. On a les identités suivantes $\forall u, v \in E$

1. Identité du parallèlograme:
$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u^2\| + \|v\|^2)$$
2. Identité de polarisation:
$$< u, v >= \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

Proof. .

1.
$$
\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &=< u + v, u + v > \\
&= \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2
\end{aligned}
$$
2. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2 < u, v > + \|v\|^2$

On a:

- $(1) + (2)$: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- $(1) - (2)$: $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4 < u, v >$

1.2 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $<, >$ un produit scalaire sur E.

Definition 1.9. $u, v \in E$ sont dits orthogonaux si $< u, v >= 0$. On note $u \perp v$

- Deux sous-ensembles A, B de E sont orthogonaux si:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad < u, v >= 0$$

- Si $A \subseteq E$ on appelle ortogonal de A, noté $A^\perp$ l'ensemble

$$A^\perp = \{u \in E \,|< u, v >= 0 \quad \forall v \in A\}$$

- Une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$. Elle est dite orthogonale si elle est orthogonale et si de plus $\|v_i\| = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Example 1.10. $E = \mathbb{R}^n$, $<,>$ produit scalaire canonique

$$v_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$$

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$(v_1, \dots, v_n)$ est une base canonique

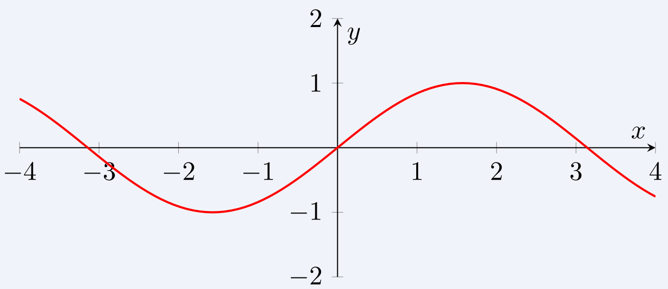
Proposition 1.11. 1. Si $A \subseteq E$ alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

2. Si $A \subseteq B$ alors $B^\perp \subseteq A^\perp$
3. $A^\perp = Vect(A)^\perp$
4. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Proof. Exercice

Example 1.12. 1. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$$



Alors, $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ sont orthogonaux: $2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^{1} \cos(t)\sin(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin(2t)\, dt = 0$$

Definition 1.13. Si E est un espace euclidien, on appelle "dual de E" l'ensemble

$$L(E,\mathbb{R}) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ est linéaire}\}$$

On le note E^*. Un élément $f \in E^*$ s'appelle une forme linéaire.

Rappele:

Proposition 1.14. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie, on $dim(L(F,F')) = dim(F) \cdot dim(F')$
En particulier, $dim(F^*) = dim(F)$. En effet si $n = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F est $n' = (e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de F', alors l'application

$$\begin{aligned} : L(F,F') &\longrightarrow Mat_{f\times p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (f) = Mat_{n,n'}(f). \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc $dim(F,F) = qp$

Theorem 1.15. Théorème du rang: Si F est un e.v de dimension finie et $f : F \to F'$ linéaire, alors $dim(F) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$

Proposition 1.16. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie tq $dim(F) = dim(F')$ et $f : F \to F'$ linéaire, alors f est un isomorphisme $\Leftrightarrow Ker(f) = 0$

Proof. On rappelle que si G, G' sont des sous-e.v de dimension finie dans le même e.v, alors:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ et } dim(G) = dim(G')$$

$\Rightarrow$) f injective $\Rightarrow Ker(f) = 0$
$\Leftarrow$) Soit $Ker(f) = 0$.
Alors, forcément $dim(Ker(f)) = 0$ et par le théorème du rang on a $dim(F) = dim(Im(f))$, donc $Im(f) = F'$

Lemma 1.17. du Riesz:
Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien de dimension finie et $f \in E^*$. Alors, $\exists! u \in E$ tel que $f(x) = <u, x>$ $\forall x \in E$. La forme linéaire f est donné par un produit scalaire avec un vecteur.

Notation. Pour tout $v \in E$ on note par f_v l'application:

$$\begin{aligned} f_v : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_v(x) = <v, x>. \end{aligned}$$

f_v est linéaire $\forall v \in E$ i.e E^*

Proof. lemma de Reisz
On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

ϕ est linéaire (exercice). ϕ est injective:

$$v \in Ker(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

en particulier pour x = v, on a:

$$0 = f_v(v) =< v, v >\Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} dim(E) = dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ est un isomorphisme} \\ &\Rightarrow \phi \text{ bijective} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists! n \in E \text{ tq } \phi(n) = f, \text{ i.e } f(x) =< n, x > \forall x \in E$$

Dans ce cas $E = \mathbb{R}^n$, le lemme de Riesz est tres simple à comprendre:
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$x = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i f(e_i) =< (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (a_1, \dots, a_n) >=< (a_1, \dots, a_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) >$$

1.3 Bases orthonormales

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel $(dim(F) < \infty)$ car $dim(E) < \infty$.

Note.

$$F^\perp := \{x \in E \mid \langle X, Z \rangle = 0 \, \forall z \in F\}$$

l'orthogonale de F.

Theorem 1.18. On a $E = F \oplus F^\perp$.
En particulier, $dim(F^\perp) = dim(E) - dim(F)$ et $F = (F^\perp)^\perp$

Proof. On doit montrer que:

1. $F \cap F^\perp = \emptyset$
2. $E = F + F^\perp$ i.e $\forall x \in E, \exists x' \in F,\, x'' \in F^\perp$ tq $x = x' + x''$

1. Soit $x \in F \cap F^\perp$
$\Rightarrow \langle X, Z \rangle = 0 \, \forall Z \in F$ car $x \in F \Rightarrow \langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow x = 0(\langle , \rangle$ est définie)
2. Soit $x \in E$. Considérons $f_x \in E^*$, i.e $f_x : E \to \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y \rangle$ et $f := f_{x|F} : F \to \mathbb{R} \Rightarrow f \in E^*$ Lemme de Riesz $\Rightarrow \exists! x' \in F$ tq $f = f_{x'} : F \to \mathbb{R}, z \mapsto \langle x', z \rangle$
$\Rightarrow f_x(z) = f_{x'}(z) = f(z) \forall z \in F$ (Attention: pas l'égalité pour tout z dans E)
Posons $x'' := x - x'$, i.e $x = x' + x'' \in F$. Montrons $x'' \in F^\perp$.
Si $z \in F$, $\langle x'', z \rangle = \langle x - x', z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x', z \rangle = 0$. Donc $x'' \in F^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$ $(dim(E) = dim(F) + dim(F^\perp))$
$F \subseteq (F^\perp)^\perp$ car $\langle x, z \rangle = 0 \, \forall x \in F \, \forall z \in F^\perp$
$$dim(F) = dim(E) - dim(F^\perp)$$
car $E = G \oplus G^\perp$, donc $dim(G) = dim(E) - dim(G^\perp)$ pour $G = F^\perp$, $dim(F^\perp) = dim(G)$

□

Definition 1.19. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$

- Une famille $(v_i)_{i \geq 0}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si pour $i \neq j$ on a $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ i.e $v_i \perp v_j$

- Une famille orthogonale de E est une famille orthogonale $(v_i)_{i\geq 0}$ tq de plus $\|v_i\| = 1$ pour $i \geq 0$

Example 1.20. 1. $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. La base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale car

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 \; i = j \\ 0 \; i \neq j \end{cases}$$

2. Dans $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. La famille $(\cos(t), \sin(t))$ est orthogonale. La famille $(1, t^2)$ n'est pas orthogonale:

$$\langle 1, t^2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1t^2\,dt = \frac{2}{3} \neq 0$$

Proposition 1.21. Une famille orthogonale constituée de vecteurs <u>non-nuls</u> est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.

Proof. Suppososns $(v_1, \dots, v_n)$ orthogonale avec $v_i \neq 0 \, \forall i = 1, \dots, n$
si $\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\alpha_i}_{\in\mathbb{R}} v_i = 0$, alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} 0 = \langle v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0}$$

Donc $\alpha_i = 0 \, \forall i = 1, \dots, n$.
Si $(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormale, alors $\|v_i\| = 1$. Donc $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. ☐

Intuition. Les vecteurs orthogonales (perpendiculaires) ne sont jamais dans l'un l'autre (i.e $e_i = \lambda e_j$ n'est pas possible) si les vecteurs sont liés, soit l'angle est < 90 (donc les vecteurs ne sont pas orthogonales, absurd), (ils sont dans l'un l'autre, ils ne sont pas orthogonales, absurd). Donc ils sont bien libres.

Definition 1.22. $(E, \langle , \rangle)$ espace euclidien. Une famille $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale (où BON) si elle est une base et famille orthonormale.

Theorem 1.23. $(E, \langle , \rangle)$ espace euclidien. Alors, il admet une BON.

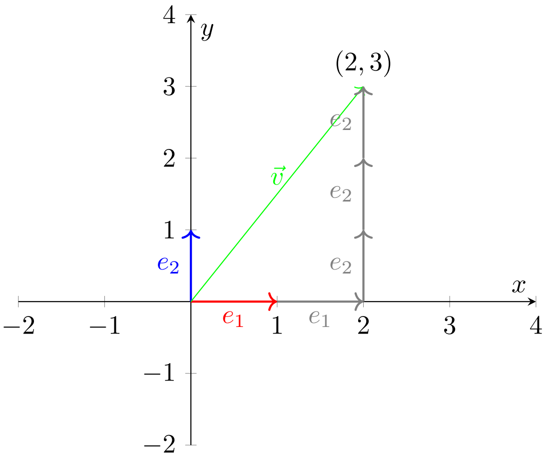
Proof. Soit $n := dim(E)$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthogonale (du point de vue du cardinal p) tq $e_i \neq 0 \, \forall i = 1, \dots, p$.
Supposons par l'absurde que $p < n$. Posons $F = Vect(e_1, \dots, e_p)$. Alors, $E = F \oplus F^{\perp}$ et $dim(F) \leq p < n$. Donc $F^{\perp} \neq \{0\}$. Soit $x \in F^{\perp}$, $x \neq 0$. Alors, $(e_1, \dots, e_p, x)$ est orthogonale de cardinale $> p$. Donc, $p = n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Pour avoir une famille orthonormale $(e'_1, \dots, e'_n)$ il suffit de prendre $e'_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i \, \forall i = \{1, \dots, n\}$. ☐

Proposition 1.24. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E. Si $x \in E$, on a:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Autrement dit, le réél $\langle x, e_i \rangle$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Intuition. L'orthonormalité de la base nous simplifie la vie. Mais avant, petite introduction. Soit un e.v $E = \mathbb{R}^2$ et la base $(e_1, e_2) = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$. Soit un vecteur $\vec{v} = (2, 3)$:



Donc, on peut écrire $\vec{v} = \vec{(2,3)} = 2 \cdot \vec{e_1} + 3 \cdot \vec{e_2}$. Les x et y (les coordonnées de v) nous donnes combien de parties de chaque vecteur de bases (le nombre peut être $\in \mathbb{R}$) et prendre leurs sommes, pour obtenir $\vec{v}$. (Le plus simple: combien on doit aller à gauche et en haut).

Dans la base orthonormale $\langle v, e_i \rangle$ nous donne combien on prend d'un vecteur e_i pour faire le vecteur $\vec{v}$ et $\vec{e_i}$ donne la direction. D'où $\langle v, e_1 \rangle$ équivaut à 2, et $\langle v, e_2 \rangle$ à 3, puis:

$$\vec{v} = \underbrace{\langle v, e_1 \rangle}_{=2} \cdot \vec{e_1} + \underbrace{\langle v, e_2 \rangle}_{=3} \cdot \vec{e_2}$$

Habituelement, pour trouver les coordonnées dans une base, on devrait résoudre un système linéaire.

Proof. Posons $y := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\forall j = 1, \ldots, n, \\
&\langle x - y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle}_{\substack{\text{moved out} \\ \text{like constant}}} \langle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle \\
&- \left(\langle x, e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1, e_j \rangle}_{=0} + \ldots + \langle x, e_{j-1} \rangle \underbrace{\langle e_{j-1}, e_j \rangle}_{=0} + \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} + \langle x, e_{j+1} \rangle \underbrace{\langle e_{j+1}, e_j \rangle}_{=0} + \ldots + \langle x, e_n \rangle \underbrace{\langle e_n, e_j \rangle}_{=0} \right) \\
&(\forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ car un produit scalaire des vecteur orthogonaux}) \\
&(\forall j\ \langle e_j, e_j \rangle = 1 \text{ car un produit scalaire de même vecteur}) \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} = 0
\end{aligned}$$

Donc, $x - y \in Vect(e_1, \ldots, e_n)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$. Donc $x = y$ $\square$

Corollary 1.25. $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$

Proof. Si $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ donc

$$\|x\|^2 = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

□

1.4 Matrices et produits vectoriels

Proposition 1.26. Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ une BON. Soient $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice représentative de f dans ε, i.e, $A = Mat_\varepsilon(f)$

$$a_{i,j} = \langle f(e_i), e_j \rangle \, \forall i, j = 1, \dots, n$$

Proof. A est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $f(e_j)$ écrits dans la base ε:

$$A = (f(e_1)| \dots |f(e_n)) \quad f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Car $\forall v \in E$, $v = c_1 e_1 + \dots c_n e_n$ donc $f(v) = c_1 f(e_1) + \dots c_n f(e_n)$ par la linéarité, donc il nous reste à étudier chaque $f(e_j)$

$$f(e_j) = a_{1,j} e_1 + \dots a_{n,j} e_n \Rightarrow$$
$$\langle f(e_j), e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \langle e_k, e_i \rangle = a_{k,j}$$

car $\langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ 1 \text{ si } k = j \end{cases}$ Donc:

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle$$

□

La matrice d'un produit vectoriel est très utile dans l'algèbre linéaire. Avant donner une definition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, un espace K et une forme bilinéaire $b : E \times E \longrightarrow K$. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, alors: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors on a:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j)$$

b est donc détérminé par la conaissance des valeurs $b(e_i, e_j)$ sur une base.

Definition 1.27. On appelle **matrice de b** dans la base $\{e_i\}$ la matrice:

$$M(b)_{e_i} = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \dots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \dots & b(e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b(e_n, e_1) & \dots & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Ainsi l'élément de la i$^{\text{ème}}$ ligne et j$^{\text{ème}}$ colonne est le coefficient de $x_i y_j$.

Example 1.28. La matrice du produit scalair canonique dans $\mathbb{R}^3$ est:

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$Mat(\langle,\rangle)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.29. Notons:

$$\underbrace{A = M(b)_{e_i}}_{\text{matrice de produit scalair}} \qquad \underbrace{X = M(x)_{e_i}}_{\substack{\text{coordonnées de } x \\ \text{dans la base } e_i}} \qquad \underbrace{Y = M(y)_{e_i}}_{\substack{\text{coordonnées de } y \\ \text{dans la base } e_i}} \qquad (x, y \in E)$$

Alors, on a:

$$b(x, y) = X^t AY$$

Example 1.30. Repronnons l'exemple avec $b = \langle,\rangle$ le produit scalair canonique dans $\mathbb{R}^3$. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc:

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle = X^t AY &= \overbrace{(1, 2, -1)}^{X^t} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{Y} \\ &= \underbrace{(1, 2, -1)}_{X} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A \times Y} \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2 + 6 - 1 = 7 \end{aligned}$$

TODO. changement de base de la matrice d'une forme bilinéaire

1.5 Projections orthogonales

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Alors, $E = F \oplus F^\perp$. Donc $\forall x \in E$ s'ecrit

$$x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in F^\perp}{x_{F^\perp}}$$

Definition 1.31. La **projection orthogonale** de E dans F est la projection p_F de E sur F parallèlement à $F^\perp$, i.e

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow F \\ x = x_F + x_{F^\perp} &\longmapsto p_F(x = x_F + x_{F^\perp}) = x_F. \end{aligned}$$

Remark 1.32.

1. p_F est linéaire

2. $\forall x \in E\, p_F(x)$ est complétement caractérisé par la propriété suivante:
   Soit $y \in E$, alors
   $$y = p_F(x) \Leftrightarrow \left(\underbrace{y \in F}_{\Rightarrow y = x_F} \text{ et } x - y \in F^{\perp} \right)$$
   En particulier $\langle p_F(x), x - p_F(x) \rangle = 0$. Alors, si $(v_1, \ldots, v_R)$ est une BON de F, on a:
   $$\forall x \in E,\, p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle v_i$$
   En effet, il suffit de vérfier que le vecteur $y = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle v_i$ vérfie:
   $$y \in F \text{ et } x - y \in F^{\perp}$$

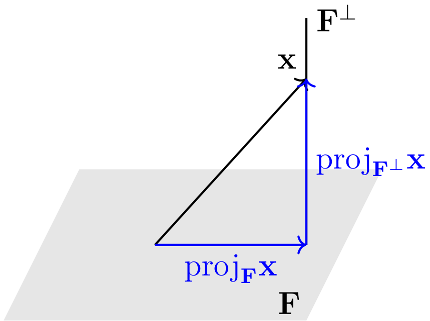


Figure 1.1: Projection

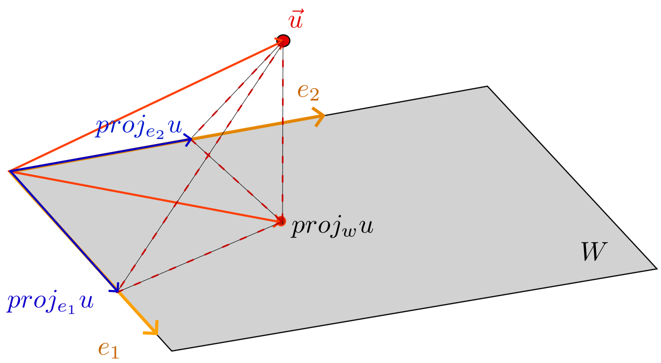


Figure 1.2: Projection avec BON

Proposition 1.33. Soit $x \in E$. Alors,

$$\|x - p_F(x)\| = inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$$

i.e $\|x - p_F(x)\|$ est la distance de x à F.
Voir Figure 1.1

Proof. Comme $p_F(x) \in F$ il suffit de prouver que, si $y \in F$, alors

$$\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$$

Mais, $\underbrace{\|x-y\|^2}_{(x-p_F(x))+(p_F(x)-y)} = \|x-p_F(x)\|^2 + 2\overbrace{\langle \underset{\in F^\perp}{x - p_F(x)}, \underset{\in F}{p_F(x) - y}\rangle}^{} = 0 + \underbrace{\|p_F(x) - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x-p_F(x)\|^2$ □

Theorem 1.34. Gram-Shmidt
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre d'élement $\in E$. Alors, il existe une famille $(w_1, \dots, w_n)$ orthogonale tq

$$\forall i = 1, \dots, n \quad Vect(v_1, \dots, v_i) = Vect(w_1, \dots, w_i)$$

De plus, ce théorème nous donne un procédé de construction d'une base orthonormée à partir d'une base quelconque.

Proof. du Théorème 1.34 Construisons la base orthogonale: $\{w_1, \dots, w_p\}$. Posons d'abord:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 + \lambda w_1, \qquad \text{avec } \lambda \text{ tel que } w_1 \perp w_2 \end{cases}$$

En imposant cette condition on trouve:

$$0 = \langle v_2 + \lambda w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + \lambda \|w_1\|^2$$

Comme $w_1 \neq 0$, on obtient $\lambda = -\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}$. On remarque que:

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \end{cases}$$

donc $Vect\{v_1, v_2\} = Vect\{w_1, w_2\}$.
Une fois construit w_2, on construit w_3 en posant:

$$w_3 = v_3 + \mu w_1 + \nu w_2$$
$$\text{avec } \mu \text{ et } \nu \text{ tels que: } w_3 \perp w_1 \text{ et } w_3 \perp w_2$$

On peut voir $w_3 = v_3 - \lambda' w_1 - \lambda'' w_2$ comme $w_3 = v_3 - proj_{F_2} v_3$ où $F_i = Vect\{w_1, \dots, w_i\}$

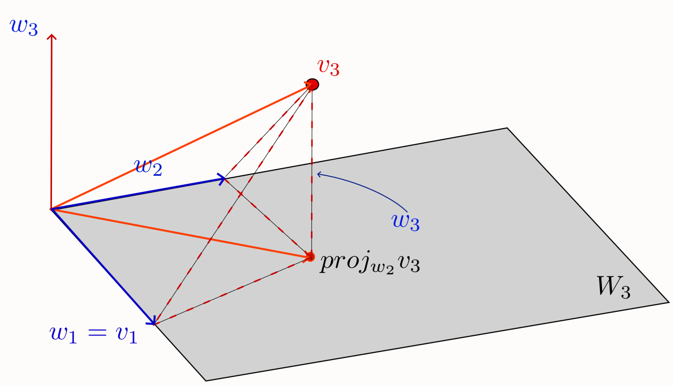


Figure 1.3: Vecteur par projection

Ceci donne

$$\begin{aligned}0 &= \langle v_3 + \mu w_1 + \nu w_2, w_1\rangle = \langle v_3, w_1\rangle + \mu\underbrace{\langle w_1, w_1\rangle}_{=\|w_1\|^2} + \nu\underbrace{\langle w_2, w_1\rangle}_{=0} \\ &= \langle v_3, w_1\rangle + \mu\|w_1\|^2\end{aligned}$$

d'où $\mu = -\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}$. De même, en imposant que $w_3 \perp w_2$, on trouve $\nu = -\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}$. Comme

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \\ v_3 = w_3 - \mu w_1 - \nu w_2 \end{cases}$$

on voit bien que $Vect\{w_1, w_2, w_3\} = Vect\{v_1, v_2, v_3\}$. C'est-à-dire, $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base orthogonale de l'éspace engendre par v_1, v_2, v_3. On voit bien maintenant le procédé de récurrence.

Supposons avoir construit $w_1, \ldots, w_{k-1}$ pour $k \leq p$. On pose:

$$\begin{aligned}w_k &= v_k + \text{ combinaison linéaire des vecteurs déjà trouvés} \\ &= v_k + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{k-1} w_{k-1}\end{aligned}$$

Les conditions $w_k \perp w_i$ (pour $i \in \{1, \ldots, k-1\}$) sont équivalentes à:

$$\lambda_i = -\frac{\langle v_k, w_i\rangle}{\|w_i\|^2}$$

comme on le vérifie immédiatement. Puisque $v_k = w_k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_{k-1}w_{k-1}$, on voit par récurrence que $Vect\{w_1, \ldots, w_k\} = Vect\{v_1, \ldots, v_k\} \Leftrightarrow \{w_1, \ldots, w_k\}$ est une base orthogonale de $Vect\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Ce qu'il nous rester c'est à la normaliser, i.e $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ $e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$, d'où $\{e_1, \ldots, e_k\}$ est une base orthonormale de $F = Vect\{v_1, \ldots, v_k\}$. □

1.6 Isométries et Adjoints

1.6.1 Isométries

Definition 1.35. Une **isométrie** de E (ou **transformation orthogonale**) est un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ préservant le produit vectoriel, i.e:

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E$$

Definition 1.36. Soient $x, y \in E$ deux vecteurs non nuls. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir lemma **??**):

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Alors, il existe un et un seul $\theta \in [0, \pi]$ tel que:

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{1.1}$$

θ est dit **angle** (non-orienté) entre les vecteurs x et y.

Proposition 1.37. Si f est une isométrie de E, donc, on a:

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$$

Proof. Supposons que f est une isométrie de E. Soit $x, y \in E$. Par définition: $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, donc, posons $y := x$, alors, on a:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\langle f(x), f(x)\rangle}_{\|f(x)\|^2} = \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|^2} \\ \Leftrightarrow &\|f(x)\|^2 = \|x\|^2 \\ \Leftrightarrow &\|f(x)\| = \|x\| \end{aligned}$$

□

Proposition 1.38. Soit f une isométrie dans E, alors:

1. f est bijective
2. f présérve la distance euclidienne et les angles

Proof. Soit f une isométrie dans E et deux vecteurs $u, v \in E$

1. $$\|f(u) - f(v)\| = \sqrt{\langle f(u), f(v)\rangle} = \sqrt{\langle u, v\rangle} = \|u - v\|$$

2. Soit θ_1 angle entre $f(u)$ et $f(v)$ et θ_2 angle entre u et v, donc:

$$\cos\theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|}$$

$$\cos\theta_2 := \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Par définition, $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, d'après proposition 1.37, $\forall x, \|f(x)\| = \|x\|$, donc:

$$\cos\theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos\theta_2$$

□