

# Notes du cours d'Analyse et Géometrie

Professeur: Christian Gérard

Yehor Korotenko

January 20, 2025

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Espaces $\mathbb{R}^d$ $\mathbb{C}^d$ . . . . .	1
1.2	Espace $\mathbb{C}^d$ . . . . .	3
1.3	Distance sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Espaces métriques</b>	<b>6</b>
2.1	Boules dans un espace métrique . . . . .	6
2.2	Parties bornées d'un espace métrique . . . . .	7
2.3	Topologie des espaces métriques . . . . .	8
2.4	Intérieur, adhérence, frontière . . . . .	8
2.5	Suite dans un espace métrique . . . . .	9
2.6	Compacité . . . . .	10

## **Abstract**

Professeur: Christian Gérard

- CC: 0.15

Pour les CC une semaine avant CC le prof va envoyer une liste des question. Les CC durent 30 minutes en TD en semaines:

- 17/2
- 17/3
- 17/4

- P: 0.35

- E: 0.5

Il y aura des démonstrations en examens

# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Éspaces $\mathbb{R}^d$ $\mathbb{C}^d$

#### Definition 1.1.

$$\mathbb{R}^d = \{X = (x_1, \dots, x_d), x_i \in \mathbb{R}\}$$

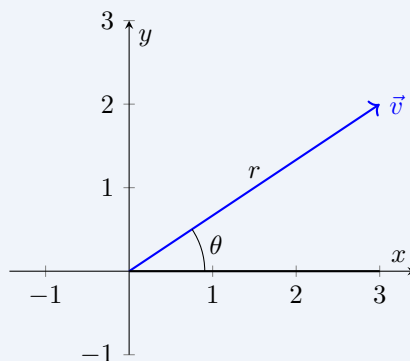
$x_1, \dots, x_d$  coordonnées cartésiennes de  $X$

#### Example 1.2. $d = 2$ coordonnées polaires:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$0 \leq r \leq \infty \quad \theta \in [0, 2\pi[$$



#### Definition 1.3. $\mathbb{R}^d$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$$

$$\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{0}_d = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

#### Definition 1.4. Un produit scalaire:

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d = \|X\| \|Y\| \cos(\theta) \text{ (où } \theta \text{ est une angle entre } X \text{ et } Y)$$

**Intuition.** Ce produit nous dit *how closely the vectors point in the same direction* (cosinus tend vers 1 quand  $\theta$  tend vers  $0^\circ$ , et cosinus tend vers 0 quand  $\theta$  tend vers  $90^\circ$ ). Et ce produit nous permet d'avoir une projection

de  $X$  sur  $Y$  par la formule:

$$Proj(X) = \frac{X \cdot Y}{\|Y\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|}$$

$X \cdot Y$  donne la longueur de  $X$  et  $Y$  ensemble, en divisant cette longueur par  $\|Y\|$  (la longueur de  $Y$ ) on obtient la longueur de  $X$  sur  $Y$ , il nous reste de multiplier cette longueur par un vecteur unitaire (de longueur 1) qui pointe dans la même direction que  $Y$ , (on l'obtient par  $\frac{Y}{\|Y\|}$ )



**Proposition 1.5.** Produit scalaire respectes ces propriétés:

1. bilinaiarité  $\lambda \in \mathbb{R}$ 
  - (a)  $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$
  - (b)  $(\lambda X) \cdot Z = \lambda(X \cdot Z)$
  - (c)  $Z \cdot (X + Y) = Z \cdot X + Z \cdot Y$
  - (d)  $Z \cdot (\lambda X) = \lambda(Z \cdot X)$
2. symétrie  $X \cdot Y = Y \cdot X$
3. défini positif:  $X \cdot X \geq 0$  et  $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Proposition 1.6.** Cauchy-Schwarz:

$$|X \cdot Y| \leq (X \cdot X)^{\frac{1}{2}} (Y \cdot Y)^{\frac{1}{2}}$$

**Definition 1.7.** La **norme euclidienne** d'un vecteur  $X$  est noté:

$$\|X\| = \left( \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} = (X \cdot X)^{\frac{1}{2}}$$

souvent noté  $\|X\|_2$

**Intuition.** Par le théorème de Pythagore, c'est une longueur de ce vecteur.

**Proposition 1.8.** La norme suit ces propriétés:

1.  $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$   $X \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
2.  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$  (inégalité triangulaire)
3.  $\|X\| \geq 0$  et  $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Proof.** de (2)

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= (X + Y) \cdot (X + Y) = X \cdot (X + Y) + Y \cdot (X + Y) = X \cdot X + X \cdot Y + Y \cdot X + Y \cdot Y \\ &= \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2 \leq \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2 \end{aligned}$$

**Definition 1.9.** Une norme sur  $\mathbb{R}^d$  est une application  $N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que:

1.  $N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$
2.  $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
3.  $N(X) \geq 0$  et  $N(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Example 1.10.**

$$\|X\|_1 = \sum_{n=1}^d |x_n|$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

## 1.2 Espace $\mathbb{C}^d$

**Definition 1.11.**

$$\mathbb{C}^d = \{X = (x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

$$z \in \mathbb{C} \quad \bar{z} = a - ib \quad \bar{z}z = a^2 + b^2 \quad |z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = a + ib \quad a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

$$\operatorname{Re} X = (\operatorname{Re} x_1, \dots, \operatorname{Re} x_d) \in \mathbb{R}^d$$

$$\operatorname{Im} X = (\operatorname{Im} x_1, \dots, \operatorname{Im} x_d) \in \mathbb{R}^d$$

$$X = \underset{\in \mathbb{C}^d}{\operatorname{Re} X} + i \underset{\in \mathbb{R}^d}{\operatorname{Im} X}$$

$\mathbb{C}^d$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  (même formules avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  corps des scalaires)

**Definition 1.12.** Produit scalaire:

$$(X|Y) = \sum_{n=1}^d \bar{x}_n y_n \in \mathbb{C}$$

**Proposition 1.13.** .

1.  $(X|Y)$  est "linéaire par rapport à Y"
  - $(Z|X + Y) = (Z|X) + (Z|Y)$
  - $(Z|\lambda X) = \lambda(Z|X) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
  - $(Z|\lambda X + \mu Y) = \lambda(Z|X) + \mu(Z|Y)$
  - $(X + Y|Z) = (X|Z) + (Y|Z)$
  - $(\lambda X|Z) = \bar{\lambda}(X|Z) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
  - $(\lambda X + \mu Y|Z) = \bar{\lambda}(X|Z) + \bar{\mu}(Y|Z)$
2.  $(Y|X) = \overline{(X|Y)}$
3.  $(X|X) = \sum_{n=1}^d \bar{x}_n x_n = \sum_{n=1}^d |x_n|^2$   
 $(X|X) \geq 0$  et  $(X|X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Proof.** On a Cauchy-Schwarz:

$$(X|Y) \leq (X|X)^{\frac{1}{2}}(Y|Y)^{\frac{1}{2}}$$

même preuve qu'avant

On pose:

$$\begin{aligned} \|X\| \text{ (ou } \|X\|_2) \\ = (X|X)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{n=1}^d |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

norme hermitienne

$$\|X\|^2 = \left\| \begin{matrix} \text{Re } X \\ \text{Im } X \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^d}^2 = \left\| \begin{matrix} \text{Re } X \\ \text{Im } X \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^d}^2$$

**Lemma 1.14.**

$$\|X\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

**Proof.**  $|(X|Y)| \leq \|X\| \|Y\| \leq \|X\|$  si  $\|Y\| \leq 1$

$$\sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

Autre sens:

$$\begin{aligned} X \neq 0 \quad Y = \frac{X}{\|X\|} = \lambda X \quad \lambda = \frac{1}{\|X\|} \\ \|Y\| = |\lambda| \|X\| = \frac{1}{\|X\|} \|X\| = 1 \\ (X|Y) = (X|\frac{X}{\|X\|}) = \frac{1}{\|X\|} (X|X) = \|X\| \\ \sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\} \\ \|X\| \leq \sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\} \quad (\text{prendre } Y = \frac{X}{\|X\|}) \end{aligned}$$

Autres normes sur  $\mathbb{C}^d$

- $\|X\|_1 = \sum_{n=1}^d |x_n| \quad X \in \mathbb{C}^d$
- $\|X\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

### 1.3 Distance sur $\mathbb{R}^d$

On oublie norme et produit scalaire. On introduit la distance

**Definition 1.15.** La distance

$$d(X, Y) = \|X - Y\|$$

**Definition 1.16.** La distance euclidienne

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^d (x_n - y_n)^2}$$

**Proposition 1.17.** Une distance est une application:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto d((X, Y)) \end{aligned}$$

qui suit ces propriétés:

1.  $d(X, Y) = d(Y, X)$  (symétrie)
2.  $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$  (inég. triangulaire)  $\forall X, Y, Z$
3.  $d(X, Y) \geq 0 \quad \forall X, Y$  et  $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

**Example 1.18.** Distances

1.  $d_2(X, Y) = \|X - Y\|_2$  (distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ )
2.  $d_1(X, Y) = \|X - Y\|_1$   
 $d_\infty(X, Y) = \|X - Y\|_\infty$
3. distance logarithmique sur  $\mathbb{R}_+$ :  $d(a, b) = |b - a|$

$$\log_{10}(a) = \frac{\log(a)}{\log(10)}$$

$x, y \in ]0, +\infty[$   
 $d_{\log}(x, y) = |\log_{10}(\frac{y}{x})|$   
 $i$  est une distance sur  $]0, +\infty[$   
 $d_{\log}(100, 110) = \log_{10}(1, 1)$

4. distance SNCF



$d(X, Y)$  distance usuelle dans  $\mathbb{R}^2$  on pose:

$$\delta(X, Y) = \begin{cases} d(X, Y) & \text{si } X, 0, Y \text{ alignés} \\ d(X, 0) + d(0, Y) & \text{sinon} \end{cases}$$



## Chapter 2

# Éspaces métriques

**Definition 2.1.**  $E$  muni d'une application de distance  $d$  (voir Definition 1.15) se note  $(E, d)$ : espace métrique

**Remark 2.2.** si  $d_1 \neq d_2$   $(E, d_1)$  n'a rien à faire avec  $(E, d_2)$

**Remark 2.3.** Retenir la version suivante de l'inégalité triangulaire:

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

**Remark 2.4.** Distance induite:

Si  $(E, d)$  espace métrique et  $U \subset E$ . Je peux restreindre  $d$  à  $U \times U$ :  $(U, d)$  est aussi un espace métrique.

## 2.1 Boules dans un espace métrique

**Definition 2.5.**  $(E, d)$  espace métrique. Soit  $x_0 \in E$  et  $r \geq 0$

1.  $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$  boule ouverte de centre  $x_0$ , de rayon  $r$
2.  $B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$  boule fermée de centre  $x_0$ , de rayon  $r$



(a) boules ouverte (i.e  $d(x_0, x) < r$ )



(b) boules fermée (i.e  $d(x_0, x) \leq r$ )

**Lemma 2.6.** .

1.  $B(x_0, 0) = \emptyset$  (car impossible d'avoir des points qui en distance sont strictement plus petit que 0)
2.  $B_f(x_0, 0) = \{x_0\}$
3.  $B(x_0, r_1) \subset B_f(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2)$  si  $r_1 < r_2$
4.  $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$  si  $d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$



Figure 2.2: Lemma 4

**Proof.** Je suppose que  $d(x_0, x_1) \leq r$

Soit  $x \in B(x_1, r_1)$  donc  $d(x_1, x) < r_1$  à montrer:  $x \in B(x_0, r)$  (i.e  $d(x_0, x) < r$ ?)

L'inégalité triangulaire me dit:

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &< d(x_0, x_1) + r_1 \leq r \\ &\Rightarrow x \in B(x_0, r) \end{aligned}$$

## 2.2 Parties bornées d'un espace métrique

**Definition 2.7.** Une partie  $A \subset E$  est bornée s'ils existent  $x_0 \in E$  et  $r > 0$  tels que  $A \subset B(x_0, r)$

**Proposition 2.8.** S'il existe  $r > 0$  tel que  $\forall x, y \in A, d(x, y) \leq r$ , alors  $A$  est bornée.

**Definition 2.9.** La distance entre deux ensembles  $A, B$  est:

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

Intuitivement, on cherche deux points  $x$  et  $y$  tel que la distance est la plus petite possible.

**Definition 2.10.** La distance entre un points  $x$  et un ensemble  $B$  est:

$$d(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$$

La même intuition.

## 2.3 Topologie des espaces métriques

### Definition 2.11. .

1. Un ensemble  $U \subset E$  est **ouvert** si  $\forall x \in U \exists \delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \subset U$ .
2. Un ensemble  $F \subset E$  est **fermé** si  $E \setminus F$  est ouvert, i.e  $\forall x \in E \setminus F \exists \delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \subset E \setminus F$

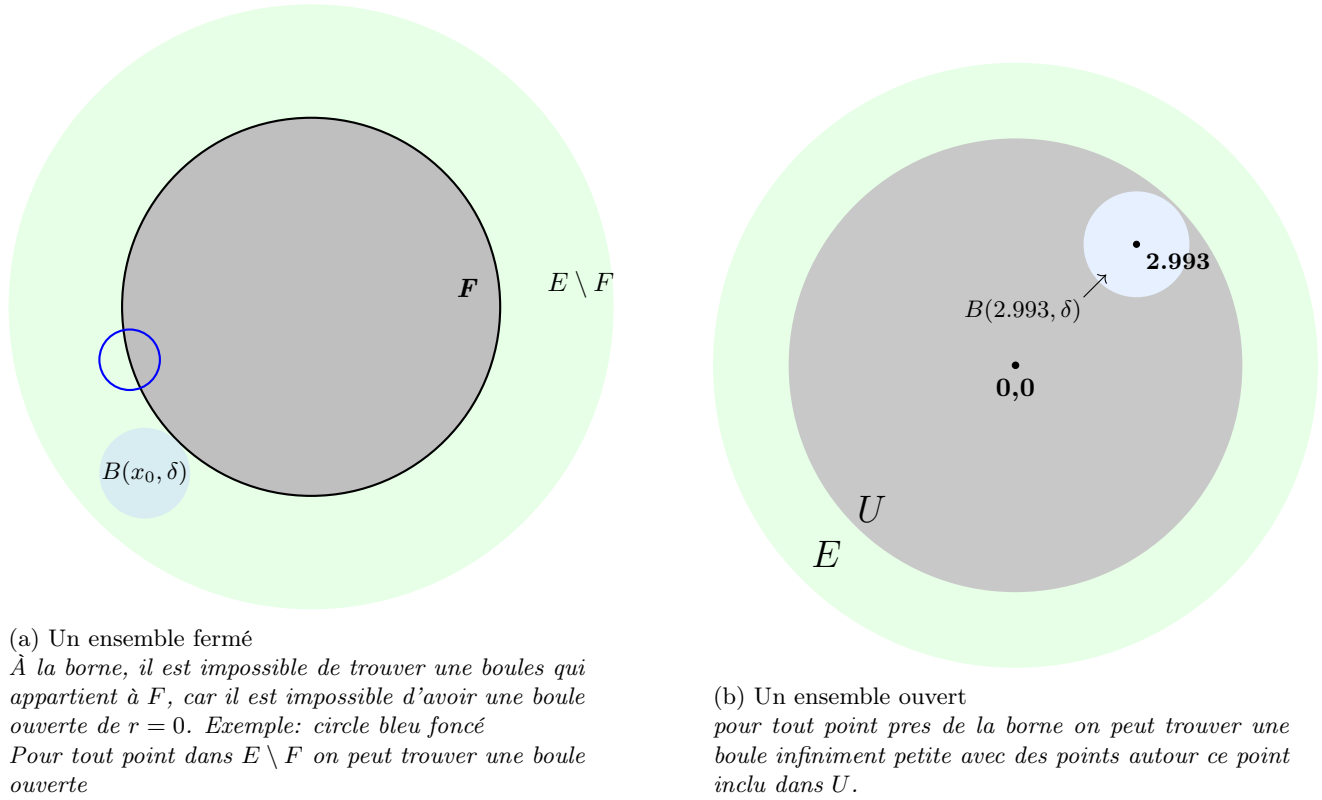


Figure 2.3: Démonstration des espaces ouverts et fermés

### Proposition 2.12. .

1. Une union des ensembles ouverts est aussi ouvert, idem avec l'intersection des ensembles ouverts.
2. Une union des ensembles fermé est aussi fermé, idem avec l'intersection des ensembles fermé.

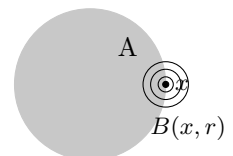
## 2.4 Intérieur, adhérence, frontière

Soit  $A \subset E$ .

**Definition 2.13.** Un point  $x \in E$  est intérieur à  $A$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \subset A$ .  
 Ensembles des points intérieur à  $A$  se note  $Int(A)$  ou  $\overset{\circ}{A}$ .

**Intuition.**  $Int(A)$  est un ensemble qui est totalement dans  $A$  et se trouve loin des bords.

**Definition 2.14.** Un point  $x \in E$  est adhérent à  $A$  si  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  (toute boule centré dans  $x$  intersecte  $A$ ).  
 Ensemble des points adhérents à  $A$  se note  $Adh(A)$  ou  $\overline{A}$ .



**Intuition.** Si  $A$  est ouvert (ses bords n'appartiennent pas à  $A$ ), ses bords appartiennent à  $\text{Adh}(A)$ . Cette notion est utile pour compléter des ensembles.

**Example 2.15.**  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

**Definition 2.16.**  $\text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(E \setminus A)$  est le bord de  $A$  est s'appelle la frontière de  $A$ .

## 2.5 Suite dans un espace métrique

**Definition 2.17.** Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x \in E$ , si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, d(x_n, x) \leq \varepsilon$$

**Proposition 2.18.** Soit  $A \in E$ .

1.  $x \in \text{Adh}(A)$  si et seulement si, il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$
2.  $A$  est fermé (i.e contient sa frontière) si et seulement si la limite de toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  appartient à  $A$ .

**Intuition.**

1. Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est d'éléments de  $A$  ( $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ ), donc elle converge vers un éléments  $x$  qui peut être soit dans  $A$ , soit la borne des éléments de  $A$ , alors à la frontière.
2. Si la limite de toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des éléments de  $A$  est aussi dans  $A$ , alors la frontière de  $A$  est inclu dans  $A$ . Car l'une des suites tend vers la borne.

**Definition 2.19.** Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tel que:

$$\forall n, p \geq N, d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$$

**Intuition.** Une suite de Cauchy c'est comme on mesure un point et on le localise, i.e:

1. On dit qu'il est entre 0 et 1.
2. Ensuite, on précise plus et on dit qu'il est entre 0.5 et 0.6.
3. Puis, entre 0.55 et 0.56

On peut infiniment augmenter le niveau de précision. C'est ça l'idée d'une suite de Cauchy.

**Definition 2.20.** Un espace métrique  $(E, d)$  est **complet** si toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  converge vers une limite  $x$  qui appartient aussi à  $E$ .

**Example 2.21.** Un espace métrique  $(]0, 1], d)$  avec  $d$  une distance euclidienne n'est pas complet, car soit une suite:  $x_n = \frac{1}{n}$  dont la limite est 0. Par contre,  $0 \notin ]0, 1]$ . Donc cet espace n'est pas complet.

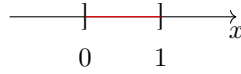


Figure 2.4:  $(]0, 1], d)$  n'est pas complet

**Example 2.22.** Un espace  $(\mathbb{Q}, d)$  n'est pas complet. Car on peut prendre une suite  $x_n$  tendant vers  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

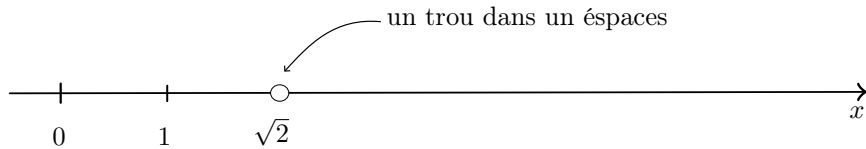


Figure 2.5:  $\mathbb{Q}$  pas complet

**Definition 2.23.** Soit une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une application  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante. Une suite  $(x_n)_{\phi(n)}$  est appelée une sous-suite.

**Example 2.24.** Soit une application  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\phi(n) = 2n$ . Donc  $(x_n)_{\phi(n)}$  est une sous-suite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et:

$$(x_n)_{\phi(n)} = \{x_0, x_2, x_4, \dots\}$$

## 2.6 Compacité

**Definition 2.25.** Soit  $F \subset E$ . Un **recouvrement ouvert** de  $F$ , est une union des ensembles ouverts:  $\bigcup_{i \in I} U_i$  tel que  $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

**Example 2.26.** Soit  $F = ]0, 1[$ . Soit  $A = \{] \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[, n \in \mathbb{N}\}$ .  $F \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$  i.e union infinie des  $A_i$  couvre  $F$ .

**Definition 2.27.** Un ensemble  $F \subset E$  est **compact** si pour tout recouvrement ouvert, i.e pour tout union des ensembles ouvert  $\bigcup_{i \in I} U_i$  qui couvre  $F$ , on peut prendre un nombre fini des  $U_i$  et couvrir  $F$ .

**Theorem 2.28.** Un ensemble  $K \subset E$  est compact, si toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des éléments de  $K$ , possède une sous-suite qui converge vers un éléments  $x \in K$ .

**Intuition.** S'il existe tel suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sans sous-suite convergente vers un éléments de  $K$ , donc les valeurs sont en-dehors de  $K$  et donc il existe un ensemble qui couvre  $K$  seulement avec un nombre infini des ensembles.

Pourquoi a-t-on besoin de compacité? Car cela nous donne une

**Proposition 2.29.** Si  $K \subset E$  est compact, alors  $K$  est fermé et borné.

**Property.** La différence entre *compacité* et *complectité*:

- *complectité* nous assure qu'il n'y a pas de trou dans un espace
- *compacité* nous assure qu'un ensemble est fermé et borné