Нотатки до курсу Лінійної Алгебри 2

Єгор Коротенко

26 жовтня 2025 р.

Анотація

Це мої конспекти, зроблені для курсу лінійної алгебри 2 в Університеті Париж-Сакле викладений професором Johannes Anschütz. Основна частина цих конспектів посилається на книгу "Лінійна алгебра написану Жозефом Гріфоном [2].

Мої конспекти з інших предметів доступні на моєму сайті: dobbikov.com

Ці конспекти перекладено українською та англійською мовами за допомогою інструменту `sci-trans-git` [3]

Зміст

Розділ 1

Евклідові простори

1.1 Вступ

Векторні простори, розглянуті в цьому розділі, є дійсними. Припустимо, що E є $\mathbb{R}$-векторним простором.

Скалярний добуток:

Визначення 1.1. Білінійна форма на E — це відображення

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B((u, v)) \end{aligned}$$

що задовольняє наступні умови $\forall u, v, w \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2. $B(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(v, w)$

B називається

1. симетрична якщо $B(u, v) = B(v, u)\ \forall u, v \in E$
2. позитивна якщо $B(., u) \geq 0\, \forall u \in E$
3. визначена якщо $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Позначення. Скалярний добуток позначається: $< u, v >$

Приклад 1.2. .

1. $E = \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$

$$< X, Y >:= \sum_{n=1}^{n} x_i y_i$$

Його називають "канонічним скалярним добутком"(або звичайним)

2. $E = \mathbb{R}^2$ і $< X, Y >= 2x_1y_1 + x_2y_2$
3. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \ni f, g$ (простір неперервних функцій)

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$< A, B >:= Tr(A^t B)$$

Твердження 1.3. Ненульовий векторний простір має нескінченну кількість різних скалярних добутків.

Визначення 1.4. Евклідовий простір — це пара $(E, < . >)$, де E є $\mathbb{R}$-векторним простором скінченновимірним та $< . >$ є скалярним добутком на E.

Властивість. Нехай $(E, < . >)$ евклідів простір. Покладемо:

$$\|X\| := \sqrt{< X, X >} \qquad X \in E$$

норма (або довжина) X. (Вона добре визначена, оскільки $< .,. >$ завжди позитивний)

Властивість. Нехай $X, Y \in E$, тоді:

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|^2$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
\|X+Y\|^2 = \sqrt{\langle X+Y, X+Y\rangle}^2 &= \langle X+Y, X+Y\rangle \\
&= \langle X, X+Y\rangle + \langle Y, X+Y\rangle \\
&= \langle X, X\rangle + \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle + \langle Y, Y\rangle \\
&= \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|
\end{aligned}$$

□

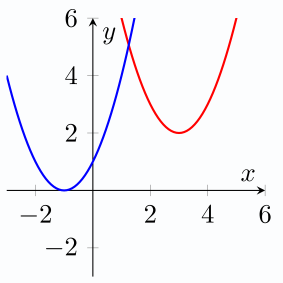
Лема 1.5. нерівність Коші-Шварца Маємо

$$| < u, v > | \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall u, v \in E$$

з рівністю тоді і тільки тоді, якщо u та v колінеарні, тобто $\exists t \in R$ такий, що $u = tv$ або $v = tu$

Доведення. Якщо $v = 0$, зрозуміло
Якщо $v \neq 0$ розглянемо $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|u+tv\|^2 &= < u+tv, u+tv > \\
&= < u, u+tv > + t < v, u+tv > \\
&= < u, u > + t < u, v > + t < v, u > + t^2 < v, v > \\
&= \|u\|^2 + 2t < u, v > + t^2\|v\|^2 = f(t)
\end{aligned}$$



Випадок 1: $f(t)$ не має різних коренів

$$\begin{aligned}
&\Delta = 4 < u, v >^2 = 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow < u, v >^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\
&\Rightarrow | < u, v > | \leq \|u\|\|v\|
\end{aligned}$$

Випадок 2: $f(t)$ має лише один корінь:

$$\begin{aligned} &\Delta = 0 \\ \Rightarrow &\exists t \in \mathbb{R} \text{ така що } \|u+tv\|^2 = 0 \\ \Rightarrow &u + tv = 0 \Rightarrow u = -tv \end{aligned}$$

Наступне визначення буде вивчено в курсі аналізу:

Визначення 1.6. Кажуть, що $N : E \to \mathbb{R}_+$ є нормою, якщо:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. $N(u+v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

Лема 1.7. Відображення

$$\sqrt{< .,. >} = \|.\| : E \to \mathbb{R}_+$$

називається евклідовою нормою.

Доведення. 1), 2) зроблено

3) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Твердження 1.8. Маємо наступні тотожності $\forall u, v \in E$

1. Тотожність паралелограма:
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u^2\| + \|v\|^2)$$
2. Тотожність поляризації:
$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$

Доведення. .

1.
$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \end{aligned}$$
2. $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$

Маємо:

- $(1) + (2)$: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- $(1) - (2)$: $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$

1.2 Ортогональність

Нехай E — $\mathbb{R}$-векторний простір та $\langle , \rangle$ — скалярний добуток на E.

Визначення 1.9. $u, v \in E$ називаються <u>ортогональними</u> якщо $< u, v >= 0$. Позначають $u \perp v$

- Дві підмножини A, B з E є ортогональними якщо:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad < u, v >= 0$$

- Якщо $A \subseteq E$ називають **ортогональним до** A, що позначається $A^{\perp}$ множину

$$A^{\perp} = \{u \in E \,|< u, v >= 0 \quad \forall v \in A\}$$

  Також відомий як **ортогональне доповнення** A

- Сімейство $(v_1, \dots, v_n)$ векторів з E називається ортогональним, якщо $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$. Воно називається ортонормованим, якщо воно ортогональне, і крім того $\|v_i\| = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Приклад 1.10. $E = \mathbb{R}^n$, $<,>$ канонічний скалярний добуток

$$v_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$$

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 \text{ якщо } i = j \\ 0 \text{ якщо } i \neq j \end{cases}$$

$(v_1, \dots, v_n)$ є канонічним базисом

Твердження 1.11.

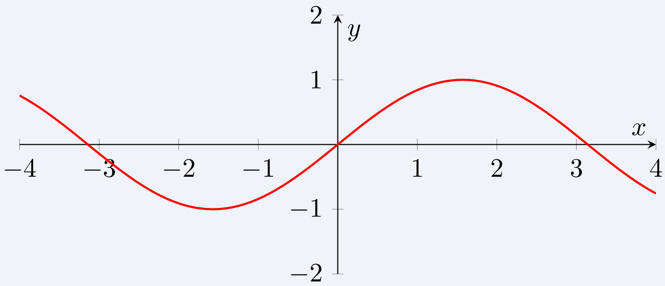
1. Якщо $A \subseteq E$ тоді $A^{\perp}$ є векторним підпростором E
2. Якщо $A \subseteq B$ тоді $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$
3. $A^{\perp} = Vect(A)^{\perp}$
4. $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$

Доведення. Вправа

Приклад 1.12.

1. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$$



Тоді, $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ ортогональні: $2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^{1} \cos(t)\sin(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin(2t)\, dt = 0$$

Визначення 1.13. Якщо E є евклідовим простором, ми називаємо "дуал E"множину

$$L(E, \mathbb{R}) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ є лінійною}\}$$

Його позначають E^*. Елемент $f \in E^*$ називається лінійною формою.

Нагадаємо:

Твердження 1.14. Якщо F, F' — два скінченновимірні в.п., то $dim(L(F, F')) = dim(F) \cdot dim(F')$
Зокрема, $dim(F^*) = dim(F)$. Справді, якщо $n = (e_1, \ldots, e_p)$ є базисом F є $n' = (e'_1, \ldots, e'_q)$ є базисом F', то відображення

$$\begin{aligned} : L(F, F') &\longrightarrow Mat_{f \times p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (f) = Mat_{n,n'}(f). \end{aligned}$$

є ізоморфізмом. Отже $dim(F, F) = qp$

Теорема 1.15. Теорема про ранг: Якщо F є скінченновимірним векторним простором і $f : F \to F'$ лінійне, тоді $dim(F) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$

Твердження 1.16. Якщо F, F' є два векторні простори скінченновимірні такі що $dim(F) = dim(F')$ і $f : F \to F'$ лінійне, тоді f є ізоморфізмом $\Leftrightarrow Ker(f) = 0$

Доведення. Нагадаємо, що якщо G, G' є скінченновимірними підпросторами в тому ж векторному просторі, тоді:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ і } dim(G) = dim(G')$$

$\Rightarrow$) f ін'єктивне $\Rightarrow Ker(f) = 0$
$\Leftarrow$) Нехай $Ker(f) = 0$.
Тоді, обов'язково $dim(Ker(f)) = 0$ і за теоремою про ранг ми маємо $dim(F) = dim(Im(f))$, тому $Im(f) = F'$

Лема 1.17. лема Ріса:
Нехай $(E, \langle ., . \rangle)$ скінченновимірний евклідовий простір і $f \in E^*$. Тоді, $\exists! u \in E$ такий що $f(x) = \langle u, x \rangle \quad \forall x \in E$. Лінійна форма f задається скалярним добутком з вектором.

Позначення. Для будь-якого $v \in E$ позначаємо через f_v відображення:

$$\begin{aligned} f_v : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_v(x) =< v, x > . \end{aligned}$$

f_v є лінійним $\forall v \in E$ тобто E^*

Доведення. лема Ріса
Розглянемо відображення

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

ϕ є лінійним (вправа). ϕ є ін'єктивним:

$$v \in Ker(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

зокрема для x = v, маємо:

$$0 = f_v(v) =< v, v >\Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} dim(E) = dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ є ізоморфізмом} \\ &\Rightarrow \phi \text{ бієктивним} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists! n \in E \text{ така що } \phi(n) = f, \text{ тобто } f(x) =< n, x > \forall x \in E$$

У цьому випадку $E = \mathbb{R}^n$, лема Ріса дуже проста для розуміння:
Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ лінійна форма. Якщо позначимо $(e_1, \ldots, e_n)$ канонічний базис $\mathbb{R}^n$, будь-який $x \in \mathbb{R}^n$ записується

$$x = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i f(e_i) =< (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (a_1, \ldots, a_n) >=< (a_1, \ldots, a_n), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) >$$

1.3 Ортонормовані базиси

Нехай $(E, \langle , \rangle)$ евклідів простір і $F \subset E$ векторний підпростір $(dim(F) < \infty)$ оскільки $dim(E) < \infty$.

Примітка.

$$F^\perp := \{x \in E \mid \langle X, Z \rangle = 0 \forall z \in F\}$$

ортогонал до F.

Теорема 1.18. Маємо $E = F \oplus F^\perp$.
Зокрема, $dim(F^\perp) = dim(E) - dim(F)$ і $F = (F^\perp)^\perp$

Доведення. Ми повинні показати, що:

1. $F \cap F^\perp = \emptyset$
2. $E = F + F^\perp$ тобто $\forall x \in E, \exists x' \in F,\ x'' \in F^\perp$ такий що $x = x' + x''$

1. Нехай $x \in F \cap F^\perp$
   $\Rightarrow \langle X, Z \rangle = 0 \forall Z \in F$ оскільки $x \in F \Rightarrow \langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow x = 0(\langle , \rangle$ визначено)
2. Нехай $x \in E$. Розглянемо $f_x \in E^*$, тобто $f_x : E \to \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y \rangle$ і $f := f_{x|F} : F \to \mathbb{R} \Rightarrow f \in E^*$
   Лема Ріса $\Rightarrow \exists! x' \in F$ такий що $f = f_{x'} : F \to \mathbb{R}, z \mapsto \langle x', z \rangle$
   $\Rightarrow f_x(z) = f_{x'}(z) = f(z) \forall z \in F$ (Увага: не рівність для всіх z у E)
   Покладемо $x'' := x - x'$, тобто $x = x' + x'' \in F$. Доведемо $x'' \in F^\perp$.
   Якщо $z \in F$, $\langle x'', z \rangle = \langle x - x', z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x', z \rangle = 0$. Отже $x'' \in F^\perp$ і $E = F \oplus F^\perp$ $(dim(E) = dim(F) + dim(F^\perp))$
   $F \subseteq (F^\perp)^\perp$ оскільки $\langle x, z \rangle = 0 \forall x \in F \forall z \in F^\perp$

   $$dim(F) = dim(E) - dim(F^\perp)$$

   оскільки $E = G \oplus G^\perp$, отже $dim(G) = dim(E) - dim(G^\perp)$ для $G = F^\perp$, $dim(F^\perp) = dim(G)$

□

Визначення 1.19. Нехай E — векторний простір, оснащений скалярним добутком $\langle , \rangle$

- Сім'я $(v_i)_{i \geq 0}$ векторів з E називається ортогональною, якщо для $i \neq j$ ми маємо $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, тобто $v_i \perp v_j$

- Ортонормальна сім'я з E — це ортогональна сім'я $(v_i)_{i\geq 0}$, така що до того ж $\|v_i\| = 1$ для $i \geq 0$

Приклад 1.20. 1. $E = \mathbb{R}^n$ оснащене стандартним скалярним добутком. Канонічний базис $(e_1, \ldots, e_n)$ є ортогональним, тому що

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ якщо } i = j \\ 0 \text{ якщо } i \neq j \end{cases}$$

2. У $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ оснащене $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. Сімейство $(\cos(t), \sin(t))$ є ортогональним. Сімейство $(1, t^2)$ не є ортогональним:

$$\langle 1, t^2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1t^2\,dt = \frac{2}{3} \neq 0$$

Твердження 1.21. Ортогональна сім'я, що складається з ненульових векторів, є лінійно незалежною. Зокрема, ортонормована сім'я є лінійно незалежною.

Доведення. Припустимо, $(v_1, \ldots, v_n)$ ортогональні з $v_i \neq 0\,\forall i = 1, \ldots, n$
якщо $\sum_{j=1}^{n} \underset{\in\mathbb{R}}{\alpha_i} v_i = 0$, тоді

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} 0 = \left\langle v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i \underset{\neq 0}{\|v_i\|^2}$$

Отже, $\alpha_i = 0\,\forall i = 1, \ldots, n$.
Якщо $(v_1, \ldots, v_n)$ є ортонормальною, тоді $\|v_i\| = 1$. Отже, $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. □

Інтуїція. Ортогональні (перпендикулярні) вектори ніколи не знаходяться один в одному (тобто $e_i = \lambda e_j$ неможливо), якщо вектори лінійно залежні, або кут < 90 (отже, вектори не є ортогональними, абсурд), (вони знаходяться один в одному, вони не є ортогональними, абсурд). Отже, вони справді лінійно незалежні.

Визначення 1.22. $(E, \langle, \rangle)$ евклідів простір. Сім'я $B = (e_1, \ldots, e_n)$ є ортонормальним базисом (де БОН), якщо вона є базисом і ортонормальною сім'єю.

Теорема 1.23. $(E, \langle, \rangle)$ евклідів простір. Тоді він допускає БОН.

Доведення. Нехай $n := dim(E)$. Нехай $(e_1, \ldots, e_p)$ ортогональна сім'я (з точки зору потужності p) така що $e_i \neq 0\,\forall i = 1, \ldots, p$.
Припустимо суперечливо, що $p < n$. Покладемо $F = Vect(e_1, \ldots, e_p)$. Тоді, $E = F \oplus F^{\perp}$ і $dim(F) \leq p < n$. Отже $F^{\perp} \neq \{0\}$. Нехай $x \in F^{\perp}$, $x \neq 0$. Тоді, $(e_1, \ldots, e_p, x)$ є ортогональною потужності $> p$.
Отже, $p = n$ і $(e_1, \ldots, e_n)$ є базисом E. Щоб отримати ортонормальну сім'ю $(e'_1, \ldots, e'_n)$ достатньо взяти $e'_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i\,\forall i = \{1, \ldots, n\}$. □

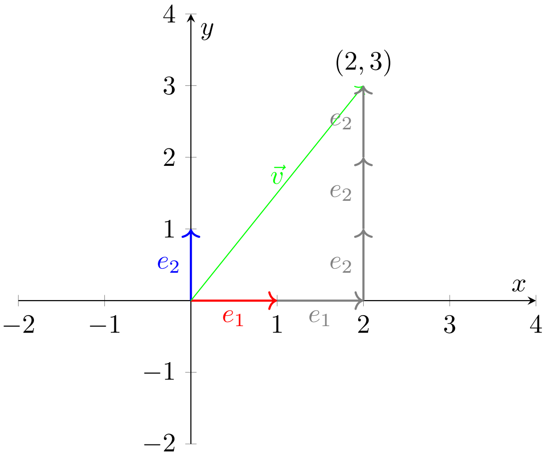
Твердження 1.24. Нехай $(E, \langle, \rangle)$ евклідів простір, і нехай $(e_1, \ldots, e_n)$ ортонормальний базис E. Якщо

$x \in E$, маємо:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Іншими словами, дійсне число $\langle x, e_i \rangle$ є $i^{\text{-та}}$ координата x у базисі $(e_1, \ldots, e_n)$.

Інтуїція. Ортогональність базису спрощує нам життя. Але спочатку невеликий вступ. Нехай векторний простір $E = \mathbb{R}^2$ і базис $(e_1, e_2) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Нехай вектор $\vec{v} = (2, 3)$:



Отже, ми можемо записати $\vec{v} = \vec{(2, 3)} = 2 \cdot \vec{e_1} + 3 \cdot \vec{e_2}$. Значення x та y (координати v) показують, скільки частин кожного базисного вектора (число може бути $\in \mathbb{R}$) потрібно взяти і просумувати, щоб отримати $\vec{v}$. (Простіше кажучи: наскільки далеко ми повинні піти вліво і вгору).

У ортонормальному базисі $\langle v, e_i \rangle$ вказує, скільки потрібно взяти вектора e_i, щоб утворити вектор $\vec{v}$, а $\vec{e_i}$ задає напрямок. Звідси $\langle v, e_1 \rangle$ еквівалентно 2, і $\langle v, e_2 \rangle$ до 3, потім:

$$\vec{v} = \underbrace{\langle v, e_1 \rangle}_{=2} \cdot \vec{e_1} + \underbrace{\langle v, e_2 \rangle}_{=3} \cdot \vec{e_2}$$

Зазвичай, щоб знайти координати в базисі, слід розв'язувати лінійну систему, тоді як ортонормальний базис дозволяє отримати їх шляхом обчислення скалярного добутку з кожним вектором базису, що значно простіше.

Доведення. Покладемо $y := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Тоді,

$$\begin{aligned}
&\forall j = 1, \ldots, n, \\
&\langle x - y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle}_{\substack{\text{винесено} \\ \text{як константу}}} \langle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle \\
&- \left(\langle x, e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1, e_j \rangle}_{=0} + \ldots + \langle x, e_{j-1} \rangle \underbrace{\langle e_{j-1}, e_j \rangle}_{=0} + \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} + \langle x, e_{j+1} \rangle \underbrace{\langle e_{j+1}, e_j \rangle}_{=0} + \ldots + \langle x, e_n \rangle \underbrace{\langle e_n, e_j \rangle}_{=0} \right) \\
&(\forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ оскільки це скалярний добуток ортогональних векторів}) \\
&(\forall j\ \langle e_j, e_j \rangle = 1 \text{ оскільки це скалярний добуток того ж вектора}) \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} = 0
\end{aligned}$$

Отже, $x - y \in Vect(e_1, \ldots, e_n)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$. Отже $x = y$ $\square$

Наслідок 1.25. $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2$

Доведення. Якщо $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ тому

$$\|x\|^2 = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$\square$

1.4 Матриці та скалярні добутки

Твердження 1.26. Нехай $(E, \langle,\rangle)$ евклідовий простір та $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ ортонормований базис. Нехай $f \in \mathcal{L}(E, E)$ та $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ матриця, що представляє f у ε, тобто, $A = Mat_{\varepsilon}(f)$

$$a_{i,j} = \langle f(e_i), e_j\rangle \; \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Доведення. A є матрицею, стовпцями якої є вектори $f(e_j)$, записані в базисі ε:

$$A = (f(e_1)| \ldots |f(e_n)) \quad f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Оскільки $\forall v \in E$, $v = c_1 e_1 + \ldots c_n e_n$ тому $f(v) = c_1 f(e_1) + \ldots c_n f(e_n)$ за лінійністю, отже нам залишається дослідити кожен $f(e_j)$

$$f(e_j) = a_{1,j} e_1 + \ldots a_{n,j} e_n \Rightarrow$$
$$\langle f(e_j), e_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \langle e_k, e_i\rangle = a_{k,j}$$

car $\langle e_k, e_j\rangle = \begin{cases} 0 \text{ якщо } k \neq j \\ 1 \text{ якщо } k = j \end{cases}$ Отже:

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i\rangle$$

$\square$

Матриця векторного добутку дуже корисна в лінійній алгебрі. Перш ніж дати визначення:

Нехай E — скінченновимірний векторний простір розмірності n, простір K та білінійна форма $b : E \times E \longrightarrow K$. Якщо $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис E, тоді: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ та $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, тоді маємо:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j)$$

b отже, визначається знанням значень $b(e_i, e_j)$ на базисі.

Визначення 1.27. Називається **матрицею** b у базисі $\{e_i\}$ матриця:

$$M(b)_{e_i} = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \ldots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \ldots & b(e_2, e_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b(e_n, e_1) & \ldots & \ldots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Таким чином, елемент i-того рядка та j-того стовпця є коефіцієнтом $x_i y_j$.

Приклад 1.28. Матриця канонічного скалярного добутку в $\mathbb{R}^3$ дорівнює:

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$Mat(\langle,\rangle)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Твердження 1.29. скалярний добуток, представлений матрицею.

Зазначимо:

$$\underbrace{A = M(b)_{e_i}}_{\text{матриця скалярного добутку}} \qquad \underbrace{X = M(x)_{e_i}}_{\substack{\text{координати } x \\ \text{у базисі } e_i}} \qquad \underbrace{Y = M(y)_{e_i}}_{\substack{\text{координати } y \\ \text{у базисі } e_i}} \qquad (x, y \in E)$$

Тоді маємо:

$$b(x, y) = X^t AY$$

Приклад 1.30. Знову розглянемо приклад з $b = \langle,\rangle$ канонічний скалярний добуток в $\mathbb{R}^3$. Нехай $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ та $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ в канонічному базисі $\mathbb{R}^3$. Отже:

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle = X^t AY &= \overbrace{(1, 2, -1)}^{X^t} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{Y} \\
&= \underbrace{(1, 2, -1)}_{X} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A \times Y} \\
&= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2 + 6 - 1 = 7
\end{aligned}$$

TODO. зміна базису матриці білінійної форми

1.5 Ортогональні проєкції

Нехай $(E, \langle,\rangle)$ евклідів простір, $F \subseteq E$ векторний підпростір. Тоді, $E = F \oplus F^\perp$. Отже $\forall x \in E$ записується

$$x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in F^\perp}{x_{F^\perp}}$$

Визначення 1.31. **Ортогональна проєкція** з E в F — це проєкція p_F з E на F паралельно до $F^\perp$, тобто

$$\begin{aligned}
p_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow F \\
x = x_F + x_{F^\perp} &\longmapsto p_F(x = x_F + x_{F^\perp}) = x_F.
\end{aligned}$$

Примітка 1.32. 1. p_F є лінійним

2. $\forall x \in E\, p_F(x)$ повністю характеризується наступною властивістю:
Нехай $y \in E$, тоді
$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \left(\underbrace{y \in F}_{\Rightarrow y = x_F} \text{ та } x - y \in F^\perp \right)$$
Зокрема $\langle p_F(x), x - p_F(x) \rangle = 0$. Тоді, якщо $(v_1, \ldots, v_R)$ є ортонормованим базисом F, маємо:
$$\forall x \in E,\, p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle\, v_i$$
Дійсно, достатньо перевірити, що вектор $y = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle\, v_i$ задовольняє:
$$y \in F \text{ та } x - y \in F^\perp$$

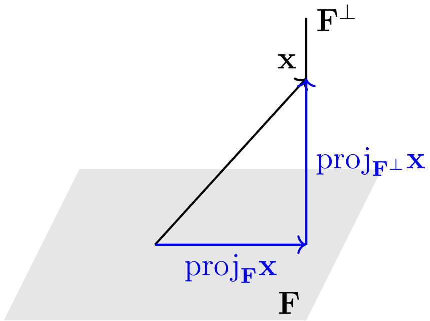


Рис. 1.1: Проекція

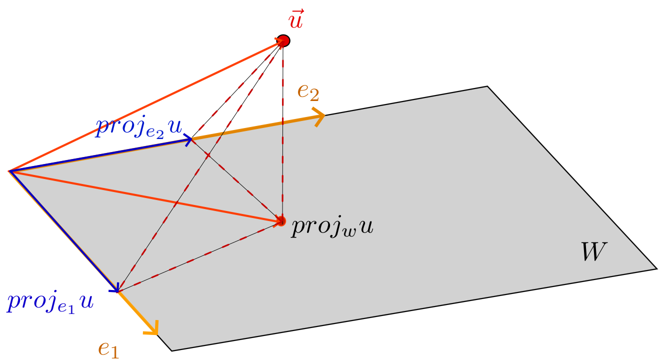


Рис. 1.2: Проєкція з ОНБ

Твердження 1.33. Нехай $x \in E$. Тоді,
$$\|x - p_F(x)\| = inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$$
тобто $\|x - p_F(x)\|$ є відстань від x до F.
Див. Figure 1.1

Доведення. Оскільки $p_F(x) \in F$ достатньо довести, що, якщо $y \in F$, тоді

$$\|x - p_F(x)\| \le \|x - y\|$$

Але, $\underbrace{\|x-y\|^2}_{(x-p_F(x))+(p_F(x)-y)} = \|x-p_F(x)\|^2 + 2\overbrace{\left\langle \overset{\in F^\perp}{x - p_F(x)}, \overset{\in F}{p_F(x) - y} \right\rangle} = 0 + \underbrace{\|p_F(x)-y\|^2}_{\ge 0} \ge \|x-p_F(x)\|^2$ □

Теорема 1.34. Грам-Шмідт
Нехай E — векторний простір, оснащений скалярним добутком $\langle , \rangle$. Нехай $(v_1, \dots, v_n)$ — лінійно незалежна сім'я елементів $\in E$. Тоді, існує сім'я $(w_1, \dots, w_n)$ ортогональна така що

$$\forall i = 1, \dots, n \quad Vect(v_1, \dots, v_i) = Vect(w_1, \dots, w_i)$$

Крім того, ця теорема дає нам метод побудови ортонормованого базису з довільного базису.

Доведення. Теореми 1.34 Побудуємо ортогональний базис: $\{w_1, \dots, w_p\}$. Спершу покладемо:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 + \lambda w_1, \qquad \text{де } \lambda \text{ такий, що } w_1 \perp w_2 \end{cases}$$

Накладаючи цю умову, знаходимо:

$$0 = \langle v_2 + \lambda w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + \lambda \|w_1\|^2$$

Оскільки $w_1 \neq 0$, отримуємо $\lambda = -\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}$. Зауважимо, що:

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \end{cases}$$

отже $Vect\{v_1, v_2\} = Vect\{w_1, w_2\}$.

Після побудови w_2, будуємо w_3, поклавши:

$$w_3 = v_3 + \mu w_1 + \nu w_2$$
$$\text{де } \mu \text{ та } \nu \text{ такі, що: } w_3 \perp w_1 \text{ та } w_3 \perp w_2$$

Можна розглядати $w_3 = v_3 - \lambda' w_1 - \lambda'' w_2$ як $w_3 = v_3 - proj_{F_2} v_3$ де $F_i = Vect\{w_1, \dots, w_i\}$

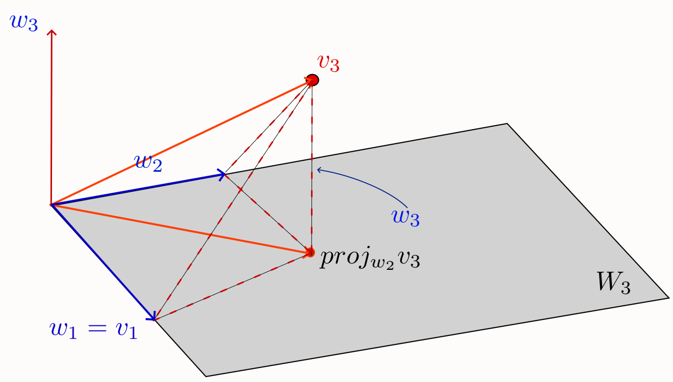


Рис. 1.3: Вектор за допомогою проекції

Це дає

$$0 = \langle v_3 + \mu w_1 + \nu w_2, w_1\rangle = \langle v_3, w_1\rangle + \mu \underbrace{\langle w_1, w_1\rangle}_{=\|w_1\|^2} + \nu \underbrace{\langle w_2, w_1\rangle}_{=0}$$
$$= \langle v_3, w_1\rangle + \mu\|w_1\|^2$$

звідки $\mu = -\frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}$. Аналогічно, накладаючи умову, що $w_3 \perp w_2$, знаходимо $\nu = -\frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}$. Оскільки

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \\ v_3 = w_3 - \mu w_1 - \nu w_2 \end{cases}$$

добре видно, що $Vect\{w_1, w_2, w_3\} = Vect\{v_1, v_2, v_3\}$. Тобто, $\{w_1, w_2, w_3\}$ є ортогональним базисом простору, породженого v_1, v_2, v_3. Тепер добре видно процес рекурсії.

Припустимо, що ми побудували $w_1, \dots, w_{k-1}$ для $k \leq p$. Покладемо:

$$w_k = v_k + \text{ лінійна комбінація вже знайдених векторів}$$
$$= v_k + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{k-1} w_{k-1}$$

Умови $w_k \perp w_i$ (для $i \in \{1, \dots, k-1\}$) еквівалентні:

$$\lambda_i = -\frac{\langle v_k, w_i\rangle}{\|w_i\|^2}$$

як це негайно перевіряється. Оскільки $v_k = w_k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_{k-1} w_{k-1}$, за індукцією бачимо, що $Vect\{w_1, \dots, w_k\} = Vect\{v_1, \dots, v_k\} \Leftrightarrow \{w_1, \dots, w_k\}$ є ортогональним базисом $Vect\{v_1, \dots, v_k\}$.

Нам залишається лише нормувати її, тобто $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$, звідки $\{e_1, \dots, e_k\}$ є ортонормальним базисом $F = Vect\{v_1, \dots, v_k\}$. □

Твердження 1.35. Щоб зрозуміти цю пропозицію, раджу прочитати розділ 1.6

Будь-яка ортогональна проєкція є самоспряженою, тобто якщо p є ортогональною проєкцією, тоді:

$$p^* = p$$

У матричному записі: нехай A матриця проєкції p, тоді:

$$A^T = A$$

1.6 Ізометрії та Спряжені оператори

1.6.1 Ізометрії

Визначення 1.36. **Ізометрія** з E (або **ортогональне перетворення**) є ендоморфізмом $f \in \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$, що зберігає скалярний добуток, тобто:

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E$$

Визначення 1.37. Нехай $x, y \in E$ — два ненульові вектори. Маємо, згідно з нерівністю Коші-Буняковського (див. лему 1.5):

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Тоді існує єдиний $\theta \in [0, \pi]$ такий, що:

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{1.1}$$

θ називається **кутом** (неорієнтованим) між векторами x і y.

Твердження 1.38. Якщо f є ізометрією E, отже, маємо:

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$$

Доведення. Припустимо, що f є ізометрією E. Нехай $x, y \in E$. За визначенням: $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, отже, покладемо $y := x$, тоді маємо:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\langle f(x), f(x)\rangle}_{\|f(x)\|^2} = \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|^2} \\
\Leftrightarrow &\|f(x)\|^2 = \|x\|^2 \\
\Leftrightarrow &\|f(x)\| = \|x\|
\end{aligned}$$

□

Твердження 1.39. Нехай f ізометрія в E, тоді:

1. f є бієктивною
2. f зберігає евклідову відстань та кути

Доведення. Нехай f — ізометрія в E і два вектори $u, v \in E$

1. $$\|f(u) - f(v)\| = \sqrt{\langle f(u), f(v)\rangle} = \sqrt{\langle u, v\rangle} = \|u - v\|$$

2. Нехай θ_1 — кут між $f(u)$ і $f(v)$, а θ_2 — кут між u і v, тому:

$$\cos\theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|}$$

$$\cos\theta_2 := \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

За визначенням, $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, згідно з пропозицією 1.38, $\forall x, \|f(x)\| = \|x\|$, тому:

$$\cos\theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos\theta_2$$

□

Визначення 1.40. Нехай F — векторний підпростір E, отже $E = F \oplus F^{\perp}$ звідки $\forall v \in E, \exists v_1 \in F, v_2 \in F^{\perp}$ такий що $v = v_1 + v_2$. Покладемо:

$$s_F(v) = v_1 - v_2$$

і s_F називається ортогональною симетрією відносно осі F.

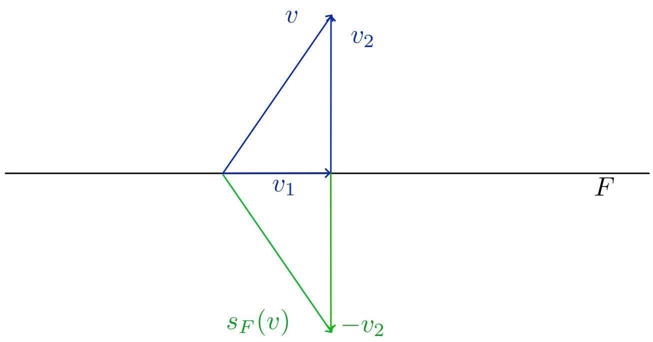


Рис. 1.4: Ортогональна симетрія відносно осі F

Твердження 1.41. Ортогональна симетрія є ізометрією.

Доведення. ЗРОБИТИ або не потрібно □

Твердження 1.42. f є ізометрією тоді і лише тоді, якщо вона перетворює будь-який ортонормований базис на ортонормований базис.

Доведення. Нехай f — ізометрія, тоді вона перетворює будь-який базис на базис, оскільки f бієктивна за проп. 1.39.

- ($\Rightarrow$) Припустимо, що f — ізометрія. Нехай $\{e_i\}$ — ортонормований базис, тоді маємо:

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$$

  Отже, $\{f(e_i)\}$ — ортонормований базис.

- ($\Leftarrow$) Припустимо, що існує ортонормований базис $\{e_i\}$ такий, що $\{f(e_i)\}$ також є ортонормованим базисом. Крім того, нехай $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$ та $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ з $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ Оскільки $\{e_i\}$ — ортонормований, то маємо:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \tag{1.2}$$

  З іншого боку:

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_if(e_i), \sum_{i=1}^{n} y_if(e_i)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j\,\langle f(e_i), f(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j\,\langle e_i, e_j\rangle \underset{\text{оскільки } \{e_i\} \text{ ортонормований}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \underset{\text{Згідно з 1.2}}{=} \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

  Отже f — ізометрія.

□

Твердження 1.43. Якщо $\{e_i\}$ є ортонормованою базою, f ізометрія та $A = M(f)_{e_i}$, тоді $A^TA = I = AA^T$.

Доведення. Щоб довести це, ми використаємо пропозицію 1.29.

За визначенням ізометрії, маємо:

$$\begin{aligned}
&\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E \\
\Leftrightarrow &\underbrace{(AX)^T(AY)}_{\langle f(x), f(y)\rangle} = X^T A^T A Y = \underbrace{X^T Y}_{\langle x, y\rangle} \\
\Leftrightarrow &A^T A = I
\end{aligned}$$

□

Твердження 1.44. Якщо A є матрицею ізометрії в ортонормованому базисі, тоді $det(A) = \pm 1$

Доведення. За пропозицією 1.43, маємо: $A^T A = I$, звідки:

$$\begin{aligned}
det(A^T A) = det(I) = 1 \Rightarrow &det(A)^2 = 1 \quad (\text{бо } det(A^T) = det(A)) \\
\Rightarrow &det(A) = \pm 1
\end{aligned}$$

□

Інтуїція. Ізометрія виконує обертання або відображення, вона зберігає відстані, тому площа (або об'єм) фігури, яка побудована на основі цього перетворення, дорівнює 1.

1.6.2 Спряжений ендоморфізм

Твердження 1.45. Нехай E — евклідовий простір, а $f \in End(E)$. Існує один і лише один ендоморфізм $f^* \in E$ такий, що

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle, \quad \forall x, y \in E$$

f^* називається **спряженим** до f.

Якщо $\{e_i\}$ є ортонормованим базисом, а $A = M(f)_{e_i}$, тоді матриця $A^* = M(f^*)_{e_i}$ є транспонованою до A, тобто $A^* = A^T$

Доведення. Знову ж таки, для доказу ми використаємо пропозицію 1.29, яка є дуже корисною, тому я раджу вам опанувати цю концепцію.

Нехай $\{e_i\}$ — ортонормований базис E, і позначимо

$$A = M(f)_{e_i} \quad A^* = M(f^*)_{e_i} \quad X = M(x)_{e_i} \quad Y = M(y)_{e_i}$$

Оскільки ми знаходимося в ортонормованому базисі, твердження записується:

$$\underbrace{(AX)^T Y}_{\langle f(x), y\rangle} = X^T A^T Y = \underbrace{X^T(A^* Y)}_{\langle x, f^*(y)\rangle} \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

що означає, що $A^* = A$, і, крім того, демонструє єдиність такого спряженого. □

1.7 Ортогональні групи

Нагадування:

Визначення 1.46. Загальна лінійна група:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$$

це група всіх лінійних перетворень (квадратних матриць), які є оборотними (оскільки $det(A) \neq 0$).

Визначення 1.47. **Ортогональна група**: Множина:

$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$$

задовольняє наступні властивості:

1. якщо $A, B \in O(n, \mathbb{R})$, тоді $AB \in O(n, \mathbb{R})$
2. $I \in O(n, \mathbb{R})$
3. якщо $A \in O(n, \mathbb{R})$ тоді $A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$

Зокрема, $O(n, \mathbb{R})$ є підгрупою $GL(n, \mathbb{R})$ (група оборотних матриць) (див. визначення 1.46).

Інтуїція. Значення ортогональних матриць зрозуміле: вони представляють матриці ортогональних перетворень (ізометрії) в **ортонормованому базисі** (див. визн. 1.9).

Можна помітити, що якщо $det(A) = 1$, ця ізометрія представляє обертання, крім того, ми маємо наступне визначення:

Визначення 1.48. Множина прямих ортогональних матриць (тобто таких, що $det(A) = 1$)

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}$$

є групою, що називається **спеціальною ортогональною групою**.

Приклад 1.49. Матриця

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

є ортогональною. Можна перевірити, що $A^T A = I$, або достатньо показати, що c_1, c_2, c_3 є ортонормованою сім'єю, тобто:

$$\|c_i\|^2 = 1 \quad \text{та} \quad \langle c_i, c_j \rangle = 0 \quad \text{якщо } i \neq j$$

Можна інтерпретувати A як матрицю перетворення f у канонічному базисі $\{e_i\}$, отже маємо: $c_i = f(e_i)$, згідно з пропозицією 1.42 f є ортогональним. Крім того, бачимо, що $det(A) = +1$. Отже, f є прямим ортогональним перетворенням.

Твердження 1.50. Матриця переходу від ортонормованого базису до ортонормованого базису є ортогональною матрицею.

Доведення. Я даю інтуїцію. Матриця переходу перетворює один базис на інший, вона переводить вектори базису, отже, вона перетворює базис БОН на вектори базису БОН, тому, згідно з пропозицією 1.42, ця матриця є ортогональною. □

Розділ 2

Визначники

Цей розділ є скоріше шпаргалкою з детермінантів, оскільки я не буду наводити докази, а лише корисні властивості, приклади та інтуїцію.

Визначення 2.1. Нехай $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця $n \times n$, тоді:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{signe}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

де

- S_n це група всіх перестановок $\{1, \dots, n\}$
- $\text{signe}(\sigma)$ це знак перестановки

Це визначення є дуже формальним, тому в кінці цього розділу ми переформулюємо це визначення. Спочатку ми вивчимо властивості детермінантів:

2.1 Найбільш важливі властивості

Твердження 2.2. властивості визначника. Для цієї пропозиції, ми позначаємо $\det(c_1, \dots, c_n)$ визначник, де $\forall i$, r_i і $\forall i$, y_i представляють стовпець (або вектор-стовпець). І $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

1. **Визначник одиничної матриці дорівнює 1:**

$$\det(I_n) = 1$$

2. **Визначник матриці рангу 1 є її єдиним елементом**:

$$\det(\begin{bmatrix} a_{1,1} \end{bmatrix}) = a_{1,1} \qquad \text{де } a_{1,1} \in \mathbb{R}$$

3. **Лінійність 1**:

$$\det(r_1, \dots, r_i + y_i, \dots, r_n) = \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) + \det(r_1, \dots, y_i, \dots, r_n)$$

4. **Лінійність 2**:

$$\det(r_1, \dots, \lambda_i r_i, \dots, r_n) = \lambda_i \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n)$$

> **Примітка.** Ось чому:
>
> $$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

5. **Однакові стовпці**: Припустимо, що $i \neq j$ і $c_i = c_j$ тоді:

$$\det(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n) = 0$$

Якщо є два однакових стовпці, тоді det дорівнює 0.

6. **Переміщення стовпців**:

$$\det(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n) = -\det(c_1, \ldots, \underbrace{c_j, \ldots, c_i}_{\text{permutation}}, \ldots, c_n)$$

Інакше кажучи, перестановка стовпців змінює знак.

7. **Визначник помножених матриць**: Нехай $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

8. **Визначник транспонованої матриці**: Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

2.2 Розкладання відносно рядка/стовпця

Визначення 2.3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, i.e:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,i-1} & a_{1,i} & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \ldots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i} & a_{j-1,i+1} & \ldots & a_{j-1,n} \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \ldots & a_{j,i-1} & a_{j,i} & a_{j,i+1} & \ldots & a_{j,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \ldots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i} & a_{j+1,i+1} & \ldots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,i-1} & a_{n,i} & a_{n,i+1} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Alors, $A_{j,i}$ est une matrice où la ligne j et la colonne i sont supprimé, i.e:

$$A_{j,i} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,i-1} & & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,i-1} & & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \ldots & a_{j-1,i-1} & & a_{j-1,i+1} & \ldots & a_{j-1,n} \\ & & & & & & & \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \ldots & a_{j+1,i-1} & & a_{j+1,i+1} & \ldots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,i-1} & & a_{n,i+1} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

Це дозволяє нам розкласти визначник відносно рядка або стовпця:

Твердження 2.4. Нехай $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця і нехай $1 \leq k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{k,i} \det(A_{k,i})$$

є обчисленням детермінанта відносно $k^{\text{го}}$ рядка.

Приклад 2.5. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Ce qui est au centre des lignes est le $a_{i,j}$. Ici: $a_{2,1}$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.1: Розклад по другому рядку

Тому:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{2,i} \det(A_{2,i}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot a_{2,1} \cdot \det(A_{2,1}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{2,2} \cdot \det(A_{2,2}) + (-1)^{3+2} \cdot a_{2,3} \cdot \det(A_{2,3}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot 2 \cdot (-11) + 1 \cdot 9 \cdot (-9) + (-1) \cdot 8 \cdot (-5) \\
&= 22 - 81 + 40 \\
&= -19
\end{aligned}$$

Твердження 2.6. Нехай $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця і нехай $1 \leq k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(A_{i,k})$$

є обчисленням визначника відносно $k^{\text{ій}}$ стовпця.

Приклад 2.7. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 2 & \cancel{9} & 8 \\ 3 & \cancel{7} & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{4} & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ 3 & \cancel{7} & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{4} & 5 \\ 2 & \cancel{9} & 8 \\ \cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.2: Розклад за другою колонкою

Отже:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{i,2} \det(A_{i,2}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot \det(A_{1,2}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{2,2} \cdot \det(A_{2,2}) + (-1)^{3+2} \cdot a_{3,2} \cdot \det(A_{3,2}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot 4 \cdot (-12) + 1 \cdot 9 \cdot (-9) + (-1) \cdot 7 \cdot (-2) \\
&= 48 - 81 + 14 \\
&= -19
\end{aligned}$$

2.3 Визначник трикутної матриці

Наслідок 2.8. Визначник трикутної матриці є добутком її діагональних елементів. Тобто, нехай трикутна матриця

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

тоді

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$$

Приклад 2.9. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Розгорнемо цей визначник відносно першого стовпця:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2}a_{i,2}\det(A_{i,2}) \\
&= (-1)^{1+1}\cdot a_{1,1}\cdot\det(A_{1,1}) + (-1)^{2+1}\cdot a_{2,1}\cdot\det(A_{2,1}) + (-1)^{3+1}\cdot a_{3,1}\cdot\det(A_{3,1}) \\
&= (-1)^2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}9 & 8\\ 0 & 6\end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^3\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 0 & 6\end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{(-1)^4\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 9 & 8\end{vmatrix}}_{=0} \\
&= \underbrace{1}_{=a_{1,1}}\cdot\begin{vmatrix}9 & 8\\ 0 & 6\end{vmatrix} \\
&= \det(\begin{bmatrix}9 & 8\\ 0 & 6\end{bmatrix} =: B) \\
&= (-1)^{1+1}\cdot b_{1,1}\cdot\det(B_{1,1}) + (-1)^{2+1}\cdot b_{2,1}\cdot\det(B_{2,1}) \quad \text{розклад відносно першого стовпця} \\
&= 1\cdot\underbrace{9}_{a_{2,2}}\cdot|6| + \underbrace{(-1)\cdot 0\cdot|8|}_{=0} \\
&= \underbrace{1}_{=a_{1,1}}\cdot\underbrace{9}_{=a_{2,2}}\cdot\underbrace{6}_{=a_{3,3}}
\end{aligned}$$

2.4 Коматриця та приєднана матриця

Спершу, нагадаємо визначення $A_{i,j}$. Це квадратна матриця, де $i^{\text{ий}}$ рядок і $j^{\text{ий}}$ стовпець видалено. (Див. визначення 2.3).

Визначення 2.10. Нехай квадратна матриця $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Позначимо

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

Потім, позначимо матрицю

$$N = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} = \mathrm{Com}(A)$$

Матриця N називається **коматрицею** матриці A. Тоді, **спряжена матриця** матриці A визначається як транспонована коматриця:

$$A^* = N^T = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,n} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Теорема 2.11. Нехай $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ квадратна матриця та A^* її спряжена матриця, тоді маємо:

$$A^*A = AA^* = \det(A)I_n = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

Корисність такої матриці?

2.5 Обернена матриця

Теорема 2.12. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця така що $\det(A) \neq 0$, тоді:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$$

є оберненою матрицею до A.

Наслідок 2.13. Якщо $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ оборотна квадратна матриця, тоді:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Розділ 3

Зведення ендоморфізмів

Пишучи цей розділ, я був натхненний відео каналу *3blue1brown* які я вам раджу подивитися, принаймні плейлист, що стосується лінійної алгебри. Другим джерелом натхнення була книга Joseph Grifone [2] .

Примітка 3.1. У цьому розділі багато використовуються наступні терміни:

- власний вектор
- власне значення
- власний простір

Термін власний є еквівалентом терміну айген (eigen), який може бути використаний в іншій літературі. Отже, власний вектор позначає айген вектор (eigen vector), тощо.

3.1 Вступ

У попередньому розділі ми вивчали поняття ортонормального базису, корисність якого полягає в: спрощенні обчислення координат у базисі та обчисленні проекції. Це поняття є одним з перших кроків до вивчення SVD [1] що застосовується в кількох галузях, наприклад: зменшення розмірів зображень.

У цьому розділі ми продовжуємо вивчення основ, щоб зрештою зрозуміти SVD. Ми вивчимо редукцію ендоморфізмів, *щоб бути точнішим* діагоналізація та тригоналізація. Для початку: невелике завдання:

Вправа. Обчислити

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{15 \text{ разів}}$$

Це не здається дуже легким, чи не так? Наприкінці цього розділу ми знайдемо спосіб спростити обчислення і зрештою розв'яжемо цю вправу.

З лінійної алгебри відомо, що матрицю відображення можна представити в різних базисах, тобто нехай $\{e_i\}$ — базис E і f — відображення. Тоді це відображення в базисі $\{e_i\}$ представлено:

$$A = M(f)_{e_i} = \|f(e_1), \ldots, f(e_n)\|$$

Нехай $\{e'_i\}$ — інший базис E, тоді ми можемо представити відображення f і в цьому базисі, позначимо: $P = P_{e_i \to e'_i}$ — матриця переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{e'_i\}$

$$A' = M(f)_{e'_i} = P^{-1}AP = \|f(e'_1), \ldots, f(e'_n)\|_{e'_i}$$

[1] Розклад за сингулярними значеннями

Визначення 3.2. Матриця A є **діагоналізованою** якщо існує подібна матриця[a] A' діагональна:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

[a] A подібна до A' якщо існує матриця переходу P така що $A' = P^{-1}AP$

Визначення 3.3. Матриця A є **тригоналізованою** якщо існує подібна матриця A' трикутна (верхня/нижня)

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \text{ або } A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Отже, проблеми цього розділу, які ми будемо вирішувати, такі:

1. Визначити, чи є ендоморфізм f діагоналізованим/тригоналізованим, тобто чи існує така матриця A'.
2. Визначити матрицю переходу P та матрицю A'.

У всьому розділі припускається, що векторний простір E має скінченну розмірність.

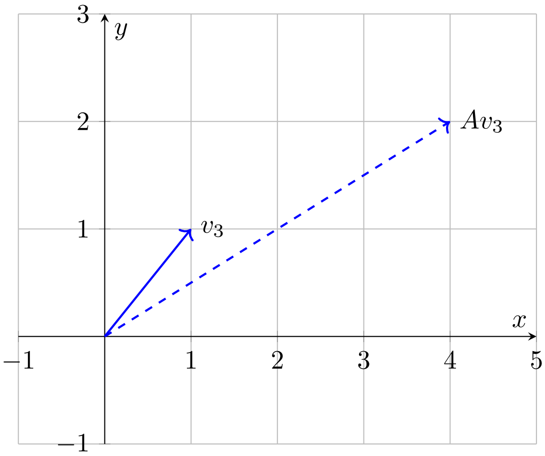
3.2 Власні вектори

Почнемо з уточнення поняття лінійного відображення та його матриці. Для цього візьмемо матрицю з вправи початку розділу:

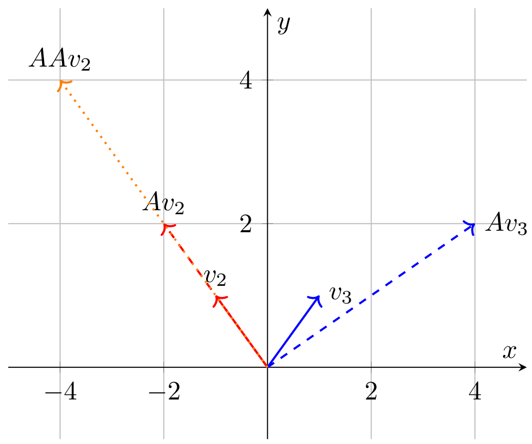
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ця матриця перетворює векторний простір, який ми їй надаємо, або, спрощуючи, вона перетворює кожен вектор векторного простору. Візьмемо вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, застосувавши A, отримаємо:

$$Av_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Зауважимо, що вектор Av_3 більше не розташований на одній лінії з вектором v_3, що логічно, оскільки якби вектори залишалися на одній лінії після перетворення, це не мало б сенсу. Однак іноді бувають випадки, коли вектор, застосований до матриці, залишається на одній лінії, наприклад, вектор $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, причому $Av_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_2$



І це не тільки випадок вектора $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, взявши будь-який вектор, породжений $v = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, ми отримаємо $Av = 2v$. Такі вектори v і скаляри (тут: 2) називаються власними векторами та власними значеннями відповідно. Тоді маємо формальне визначення:

Визначення 3.4. Нехай f — ендоморфізм у E, а вектор $v \in E$ називається **власним вектором** для f, якщо:

1. $v \neq 0$
2. Існує дійсне число λ таке, що $f(v) = \lambda v$

Скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$ називається **власним значенням** що відповідає v.

Інтуїція. Власні вектори — це вектори, які під дією f не змінюють напрямків, лише довжину (і навіть не завжди). Це спрощує обчислення таких векторів. Чи можете ви обчислити A^3v_3? Не дуже легко, а вектор A^3v_2?

$$Av_2 = 2v_2 \Rightarrow A^2v_2 = 2 \cdot 2v_2 = 4v_2 \Rightarrow A^3v_2 = 2 \cdot 4v_2 = 8v_2 = \begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}$$

Це круто, чи не так?

Натомість, це не єдина корисність власних векторів, і ми повернемося сюди, щоб обговорити це, але спочатку, як знайти такі вектори?

3.3 Пошук власних значень

Ми шукаємо вектори, які під дією ендоморфізму f масштабуються з коефіцієнтом $\lambda \in \mathbb{R}$, тоді ми повинні розв'язати це рівняння:

$$\begin{aligned}
& f(v) = \lambda v \\
\Leftrightarrow\quad & Av = \lambda v \quad \text{у матричній нотації} \\
\Leftrightarrow\quad & Av = \lambda(Iv) \quad \text{де } I \text{ є одиничною матрицею} \\
\Leftrightarrow\quad & Av - \lambda I v = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (A - \lambda I)v = 0
\end{aligned}$$

Отже, ми повинні вивчити застосування $(A - \lambda I)$ і пов'язати його з поняттям визначників. Нагадаємо: якщо визначник матриці не дорівнює нулю, ця матриця (тобто ендоморфізм) є ін'єктивною. У нашому випадку, якщо $\det(A - \lambda I)$ дорівнював нулю, єдиний вектор v, який давав би $(A - \lambda I)v = 0$, був би нульовим вектором $v = 0$ оскільки $(A - \lambda I)$ є лінійним і (як ми припустили) ін'єктивним.

Навпаки, згідно з визначенням, власні вектори не є нульовими, тоді ін'єктивний випадок не підходить, тому для того, щоб мати власні вектори, застосування $(A - \lambda I)$ не повинно бути ін'єктивним, що рівносильно тому, щоб сказати, що $\det(A - \lambda I) = 0$. Отже, ми повинні обчислити наступний визначник:

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

Розкладаючи цей визначник ми отримуємо рівняння типу:

$$(-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

корінням якого є власні значення f (нагадаємо: власне значення — це фактор λ). Поки що не надто зосереджуйтесь на цьому рівнянні, ми до нього ще повернемося.

Твердження 3.5. Нехай f — ендоморфізм у скінченновимірному векторному просторі E розмірності n, а A — матриця, що представляє f у базисі E. Власні значення f є коренями полінома:

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Цей поліном називається **характеристичним поліномом** f.

Визначення 3.6. Множина власних значень f називається **спектром** f і позначається $\mathrm{Sp}_K(f)$ або $\mathrm{Sp}_K(A)$, якщо A — матриця f.

Для уточнення:

Приклад 3.7. Нехай f ендоморфізм в $\mathbb{R}^2$ матриця представлення якого в канонічному базисі є:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Обчислимо його власні значення:

$$\begin{aligned}
& & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v = \lambda v \\
&\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v - \lambda I v = 0 \\
&\Leftrightarrow & \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I\right) v = 0 \\
&\Rightarrow & \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = 0 \\
&\Rightarrow & \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\
&\Rightarrow & \det\left(\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\
& & = (3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0
\end{aligned}$$

Добре видно, що розв'язки: $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_2 = 2$

Ми можемо знайти власні значення, однак, ми шукали вектори власні. І ось ми маємо:

3.4 Пошук власних векторів

Припустимо, для $q \in \mathbb{N}^*$ ми вже знайшли q власні значення матриці $\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$, щоб знайти власні вектори, нам залишається знайти базис:

$$\ker(A - \lambda_i I) \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}$$

що еквівалентно:

$$(A - \lambda_i I)\, v = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, q\}$$

Приклад 3.8. Ще раз матриця

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

в канонічному базисі $\mathbb{R}^2$. Ми вже знайшли її власні вектори: $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_2 = 2$. Тоді, шукаємо вектори:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Отже $\ker(A - 3I) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Ось, наш перший власний вектор: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для другого:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = -y \end{cases}$$

Отже $\ker(A - 2I) = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ і ось другий власний вектор: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (це був наш вектор v_2 на початку розділу).

Нарешті, корисна властивість:

Твердження 3.9. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ з його власними векторами: $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, тоді:

$$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$
$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

3.5 Діагоналізовані ендоморфізми

Повернімося до користі власних векторів. Нехай f ендоморфізм простору E основою якого є $\{e_1, \ldots, e_n\}$ та $\mathrm{Mat}_{e_i}(f) = A$ і матриця f у цьому базисі. Розглянемо наступний приклад:

Приклад 3.10. Маємо: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ у канонічному базисі $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ та $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Нагадаємо, що ми знайшли два власні вектори:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Зауважимо, що ці два вектори є лінійно незалежними і, отже, утворюють базис для $\mathbb{R}^2$. Спробуємо змінити базис для A, маючи два способи:

1. Можна обчислити координати $f(v_1)$ та $f(v_2)$ у базисі $\{v_1, v_2\}$, маємо:

$$f(v_1) = 3v_1 = 3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$$
$$f(v_2) = 2v_2 = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$$

   І тоді $\mathrm{Mat}_{v_i}(f) = \|f(v_1), f(v_2)\|_{v_i} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Можна обчислити матрицю $P = P_{e_i \to v_i}$ переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{v_i\}$ та вивести з неї матрицю f у новому базисі. Маємо:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{e_i} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{e_i} \end{cases}$$

отже $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ та $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ви можете перевірити обчислення). І отже:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{AP} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

І ось, магія, ми знайшли діагональну матрицю.

Потім, узагальнимо те, що ми зробили.

Визначення 3.11. Нехай $\lambda \in K$, позначимо:

$$E_\lambda := \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$$

E_λ є векторним простором E, який називається **власним простором**, що відповідає λ.

Примітка 3.12.

1. Якщо λ не є власним значенням f, тому $E_\lambda = \{0\}$
2. Якщо λ є власним значенням, тоді:

$$E_\lambda = \{\text{ власні вектори, асоційовані з } \lambda\} \cup \{0\} \text{ та } \dim E_\lambda \geq 1$$

Твердження 3.13. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — попарно різні скаляри. Тоді власні простори $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ знаходяться в прямій сумі. Інакше кажучи, якщо $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ є базисами $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$, то сім'я $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$ є лінійно незалежною (але не обов'язково породжуючою E).

Доведення. Нехай $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ — власні підпростори, асоційовані з власними значеннями $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ендоморфізму f векторного простору E. Ми повинні показати, що ці підпростори знаходяться в прямій сумі, тобто, якщо вектор належить їхньому перетину, то він дорівнює нулю.

Візьмемо елемент v, що належить їхній сумі, тобто, він може бути записаний у формі:

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p$$

де $v_i \in E_{\lambda_i}$ для всіх i.

Оскільки кожен v_i є власним вектором для f, асоційованим з λ_i, маємо:

$$f(v_i) = \lambda_i v_i.$$

Застосуємо f до суми:

$$f(v) = f(v_1 + v_2 + \cdots + v_p) = f(v_1) + f(v_2) + \cdots + f(v_p).$$

Використовуючи лінійність f, це дає:

$$f(v) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

Проте, v також є комбінацією цих самих векторів:

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p.$$

Отже, перегрупувавши:

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p) - (v_1 + v_2 + \cdots + v_p) = 0.$$

Що дає:

$$(\lambda_1 - 1)v_1 + (\lambda_2 - 1)v_2 + \cdots + (\lambda_p - 1)v_p = 0.$$

Факторизуємо кожен член:

$$(\lambda_1 - \lambda)v_1 + (\lambda_2 - \lambda)v_2 + \cdots + (\lambda_p - \lambda)v_p = 0.$$

Проте, λ_i вважаються попарно різними. З цього випливає, що коефіцієнти є різними, і що сума дорівнює нулю лише тоді, коли всі v_i дорівнюють нулю (оскільки власні підпростори, як правило, знаходяться в прямій сумі).

Таким чином, $v = 0$, що доводить, що власні підпростори знаходяться в прямій сумі. □

Отже, власні простори завжди знаходяться в прямій сумі, але не обов'язково дорівнюють E:

$$E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p} \subsetneq E$$

що маємо, якщо:

$$\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} < \dim E$$

Теорема 3.14. Нехай f ендоморфізм в E і $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ його власні значення, тоді наступні властивості є еквівалентними:

1. f діагоналізовний
2. E є прямою сумою своїх власних просторів: $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$
3. $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$

Наслідок 3.15. Якщо f є ендоморфізмом E з $\dim E = n$ і f має n власних значень, попарно відмінних, то f є діагоналізованим.

Але оскільки власні значення є коренями характеристичного многочлена (див. проп. 3.5) на:

Твердження 3.16. Нехай f ендоморфізм у E та λ власне значення порядку α (тобто α є коренем $P_f(\lambda)$ порядку α, тобто $P_f(\lambda) = (X - \lambda)^\alpha Q(X)$). Тоді:

$$\dim E_\lambda \leq \alpha$$

Теорема 3.17. Нехай f — ендоморфізм у E з $\dim E = n$. Тоді f є діагоналізованим тоді й лише тоді, якщо:

1. $P_f(X)$ є розщеплюваним, тобто:

   $$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

   (λ_i є коренями, отже, власними значеннями) і $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$. Тоді, якщо сума кратностей коренів дорівнює розмірності векторного простору.

2. Розмірності власних просторів є максимальними, тобто $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$

   $$\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$$

Інтуїція. Не завжди легко зрозуміти ідею через характеристичні поліноми, тому інший спосіб побачити це:

1. Знаходимо власні значення: $\lambda_1, \dots, \lambda_p$
2. Потім знаходимо власні підпростори: $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i I)$
3. Сумуємо розмірності: $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} =: d$.
   - Якщо $d = \dim E$ тобто якщо сума розмірностей дорівнює розмірності простору E, власні підпростори породжують E і отже f діагоналізовний (бо його матриця може бути записана в базисі цих власних векторів).
   - В іншому випадку кількості лінійних власних векторів недостатньо, щоб породити E.

3.6 Застосунки

3.6.1 Обчислення потужності

Отже, ми повернулися туди, звідки почали, нагадую вам вправу з початку розділу:

Вправа. Обчислити

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{15 \text{ разів}}$$

Нагадаємо, що власні вектори A це:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ та } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

які є лінійно незалежними та породжують $\mathbb{R}^2$, отже, утворюють базис $\mathbb{R}^2$, тоді ми можемо записати в цьому новому базисі і, як ми вже знайшли:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

в базисі (v_1, v_2) з матрицею переходу:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ та } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Крім того, множачи A' на A', маємо:

$$A' \cdot A' = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = A'^2$$

звідки

$$A'^n = P^{-1}A^nP \Rightarrow PA'^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n$$

Це дає нам можливість спочатку обчислити степінь A':

$$A'^{15} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

Ось, набагато простіше, ніж обчислювати A^15 безпосередньо, тоді нам залишається повернутися до канонічного базису:

$$P \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{15} & 3^{15} - 2^{15} \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

Що дуже корисно в діагональних матрицях, так це те, що степінь такої матриці дорівнює тій самій матриці з діагональними елементами, піднесеними до степеня, тобто:

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A'^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

Узагальнимо: Якщо $A \in \mathcal{M}_n(K)$ діагоналізована (тобто існують P та A' такі, що $A' = P^{-1}AP$), то:

$$A^n = P(A'^n)P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

3.6.2 Розв'язання системи рекурентних послідовностей

Нехай $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дві послідовності такі що:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \tag{3.1}$$

З $u_0 = 2$ і $v_n = 1$. Покладемо $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, тоді система 3.1 записується як:

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{з} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

за рекурентною формулою отримуємо:

$$X_n = A^n X_0 \quad \text{з } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отже, ми зводимося до обчислення степеня матриці: A^n, що ми бачили в розділі 3.6.1 . Ви можете перевірити, що існує $P \in GL_2(\mathbb{R})$ така що

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{з} \quad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

і тоді

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n + 2^n - 3^n \\ -4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n - 2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

тобто:

$$\begin{cases} u_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n \\ v_n = -5 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n \end{cases}$$

3.6.3 Розв'язання диференціальних рівнянь

Нехай потрібно розв'язати диференціальну систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

з $a_{ij} \in \mathbb{R}$ та $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовні.
У матричній формі система записується:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad \text{де} \quad A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Припустимо A діагоналізовна. Тоді існує A' діагональна матриця і P оборотна матриця такі, що:

$$A' = P^{-1}AP.$$

Якщо розглядати A як матрицю ендоморфізму в канонічному базисі, A' є матрицею f в базисі власних векторів $\{v_i\}$.
Аналогічно X є матрицею вектора $\vec{x}$ у канонічному базисі і $X' = M(\vec{x})_{v_i}$, пов'язана з X за допомогою

$$X' = P^{-1}X$$

Примітка. Увага! У цьому розділі X' не описує похідну, а вектор, позначений X'!

Диференціюючи це співвідношення:

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}$$

(оскільки A має постійні коефіцієнти, P також матиме постійні коефіцієнти). Отже:

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX = \left(P^{-1}AP\right)X' = A'X'$$

Система 3.2 є отже еквівалентною системі

$$\frac{dX'}{dt} = A'X'$$

Ця система легко інтегрується, оскільки A' є діагональною.
Таким чином, можна розв'язати систему $\frac{dX}{dt} = AX$ наступним чином :

a) Діагоналізуємо A. Нехай $A' = P^{-1}AP$ — діагональна матриця, подібна до A;

b) інтегруємо систему $\frac{dX'}{dt} = A'X'$;

c) повертаємося до X через $X = PX'$.

Приклад

Нехай система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$$

Маємо $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ і $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
Система $\frac{dX'}{dt} = A'X'$ записується:

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = 2x' \\ \dfrac{dy'}{dt} = 3y' \end{cases}$$

що одразу дає

$$\begin{cases} x' = C_1e^{2t} \\ y' = C_2e^{3t} \end{cases}$$

і отже, повертаючись до X через $X = PX'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ -C_1e^{2t} - 2C_2e^{3t} \end{pmatrix}$$

тобто:

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ y = -C_1e^{2t} - 2C_2e^{3t} \end{cases}$$

3.7 Тригоналізація

Матриця $A \in \mathcal{M}_n(K)$ називається верхньою трикутною, якщо вона має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

відповідно, нижньою трикутною:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Примітка 3.18. Будь-яка верхня трикутна матриця A подібна до нижньої трикутної матриці.

Доведення. Нехай A верхня трикутна матриця та f ендоморфізм K^n, який у базисі $\{e_1, \dots, e_n\}$ представлений матрицею A, тоді:

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{1,1}e_1 \\ f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 \\ \vdots \\ f(e_n) = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \dots + a_{n,n}e_n \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Розглянемо базис

$$\varepsilon_1 = e_n, \quad \varepsilon_2 = e_{n-1}, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = e_1$$

тоді маємо:

$$\begin{cases} f(\underbrace{\varepsilon_1}_{e_n}) == a_{1,n} \underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} + a_{2,n} \underbrace{\varepsilon_{n-1}}_{e_2} + \dots + a_{n,n} \underbrace{\varepsilon_1}_{e_n} \\ f(\underbrace{\varepsilon_2}_{e_{n-1}}) == a_{1,n-1} \underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} + \dots + a_{n-1,n-1} \underbrace{\varepsilon_2}_{e_{n-1}} \\ \vdots \\ f(\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1}) = a_{1,1} \underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} \end{cases}$$

отже

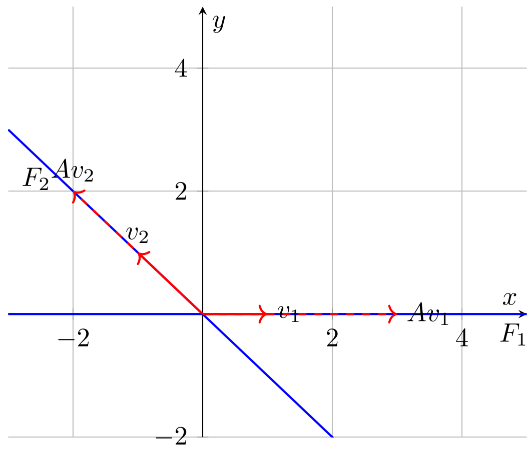
$$A' = M(f)_{\varepsilon_i} = \begin{bmatrix} a_{n,n} & & \dots & 0 \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1,n} & \dots & & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

□

3.7.1 Геометрична інтуїція діагоналізації

Згадаймо діагоналізацію. Матриця A що представляє ендоморфізм f в $K^n = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ є діагоналізованою, якщо існує достатньо векторних підпросторів $\{F_1, \dots, F_n\}$ розмірності 1 кожен, таких що $K^n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ і $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(F_i) \subset F_i$ (вектор після застосування f залишається у просторі). Що можна побачити геометрично:

Перетворення власних векторів



Ми вже знаємо, що такий ендоморфізм дуже корисний, але нечасто трапляється, що його можна діагоналізувати, тому було б корисно мати щось більш загальне, але все ще схоже на діагоналізацію.

3.7.2 Геометрична інтуїція тригонализації

Геометрія тригоналізованого ендоморфізму схожа, але все ж таки відрізняється. Нехай A — матриця, що представляє ендоморфізм f у K^n. Він є тригоналізованим, якщо існує базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ простору K^n, позначимо $F_1 = \mathrm{Vect}(v_1), F_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2), \dots, F_n = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ такі що

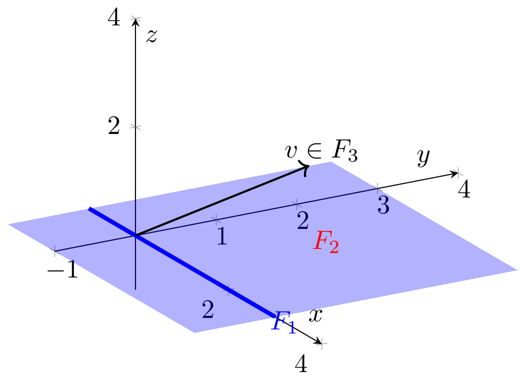
$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$$

і

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(F_i) \subset F_i$$

Бачите схожість? Ендоморфізм є стабільним щодо підпростору! Вектор, застосований до f, ніколи не залишає свій підпростір. Візьмемо для прикладу наступну матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}(f)_{e_i}$$



Оскільки ми маємо інтуїцію щодо тригонізованого ендоморфізму, повернімося до чистої математики.

3.7.3 Теорія

Теорема 3.19. Ендоморфізм є тригонализованим в K тоді й тільки тоді, коли його характеристичний многочлен розкладається на лінійні множники в K.

Це означає, що характеристичний многочлен має рівно n коренів, де $n = \dim(E)$, і записується так:

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

де $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$

Доведення. -

(⇒) Припустимо, ендоморфізм f тригонізується, і нехай буде базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ такий що

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & * \\ 0 & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$P_f(X) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - X & & & * \\ 0 & a_{2,2} - X & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,n} - X \end{pmatrix} = (a_{1,1} - X) \cdots (a_{n,n} - X)$$

Отже, $P_f(X)$ добре розщеплюється (можна помітити, що його корені — це власні значення f).

(⇐) Припустимо, $P_f(X)$ розщеплюється, і доведемо за індукцією, що f тригонізується.

Для $n = 1$ тривіально.

Припустимо, що результат вірний для порядку $n - 1$. Але $P_f(X)$ розщеплюється, він має принаймні один корінь $\lambda_1 \in K$ і отже власний вектор $\varepsilon_1 \in E_{\lambda_1}$. Доповнимо $\{\varepsilon_1\}$ до базису $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, отже маємо:

$$A = M(f)_{\varepsilon_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \text{де:} B \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$$

Нехай $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ і $g : F \to F$ єдиний ендоморфізм F такий що $M(g)_{\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n} = B$, маємо:

$$P_f(X) = \det(A - XI_n) = (\lambda_1 - X)\det(B - XI_{n-1}) = (\lambda_1 - X)P_g(X)$$

Але $P_f(X)$ розщеплюється, $P_g(X)$ також, і згідно з індуктивним припущенням B тригонізується, отже існує базис $\{v_2, \ldots, v_n\}$ в якому $M(g)_{v_2, \ldots, v_n}$ є трикутною, і отже матриця f у базисі $\{\varepsilon_1, v_2, \ldots, v_n\}$ є трикутною, отже f тригонізується.

□

Наслідок 3.20. Будь-яка матриця $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ подібна до трикутної матриці з $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Інтуїція. Згідно з курсом абстрактної алгебри, кожен многочлен у $\mathbb{C}$ є розкладним.

Примітка 3.21. -

1. Якщо A є тригонализовна і A' трикутна, подібна до A, тому A' має власні значення на діагоналях.
2. Будь-яка матриця $A \in \mathcal{M}_n(K)$ є тригонализовна над замиканням K' з K. (напр.: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ є тригонализовна над $\mathbb{C}$).

Наслідок 3.22. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(K)$ і $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ її власні значення, тому

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A) &= \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \\ \det(A) &= \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \end{aligned}$$

Доведення. Маємо $A' \in \mathcal{M}_n(K')$ трикутну, подібну до A (нагадування: замикання K' над K), отже власні значення знаходяться на діагоналях A'. Однак подібні матриці мають ті ж самі сліди та визначники, тому $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A') = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ та $\det(A) = \det(A') = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. □

Ми покажемо процес тригоналізації на наступному прикладі:

Приклад 3.23. Нехай матриця

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Маємо характеристичний многочлен $P_A(X) = -(X-1)^2(X+2)$, який розщеплюється в $\mathbb{R}$, тому A є тригоналізованою (згідно з теоремою 3.19), отже, якщо розглядати A як ендоморфізм у канонічному базисі, ми знаємо, що існує базис $\{v_i\}$ з $\mathbb{R}^3$ такий що:

$$M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

я нагадую, що це означає:

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = av_1 + v_2 \\ f(v_3) = bv_1 + cv_2 - 2v_3 \end{cases} \tag{3.3}$$

Почнемо з пошуку v_1. Ми знаємо, що v_1 є власним вектором, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 1$, тобто $(f - \mathrm{Id})v_1 = 0$, тому обчислимо $(A - I)v_1 = 0$ (іншими словами, ми шукаємо v_1, який породжує $\ker(A - I)$) :

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 2z &= 0 \\ 5x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

Тоді ми можемо взяти $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ (іншими словами $\ker(A - I) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix})$).

Далі, шукаємо v_2, згідно з 3.3,

$$\begin{aligned} & f(v_2) = av_1 + v_2 \\ \Rightarrow & f(v_2) - v_2 = av_1 \\ \Rightarrow & (f - I)v_2 = av_1 \\ \Rightarrow & (A - I)v_2 = av_1 \end{aligned}$$

Отже, маємо:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 2z = 2a \\ 5x + y + 2z = -5a \end{cases}$$

Тоді, взявши $a = 1$, маємо

$$\begin{cases} -5x - 2z = 2 \\ 5x + y + 2z = -5 \end{cases}$$

тому $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (просто розв'язання системи).

Для v_3 маємо два варіанти:

1. або діяти так само з розв'язанням системи
2. або зауважити, що існує власний вектор A, що відповідає власному значенню -2, тобто $\exists v_3 \in \mathbb{R}^3$ такий що $f(v_3) = -2v_3$, тоді ми можемо взяти цей вектор v_3 і, отже, покласти $b = c = 0$.

Примітка 3.24. Чому ми можемо так робити? Тому що для кожного власного значення f завжди існує власний простір кратності принаймні 1, отже, і для власного значення -2 теж.

Тоді шукаємо v_3:

$$(A + 2I)v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

тому ми можемо взяти $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Отже, матриця A подібна до

$$A' = M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

з матрицею переходу:

$$P = \|v_1, v_2, v_3\| = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3.8 Анулюючі многочлени

У попередніх розділах ми дізналися, що для того, щоб зрозуміти, чи можна діагоналізувати матрицю, потрібно вивчити власні простори, що не завжди дуже легко і не є найшвидшим способом. Отже, у цьому розділі ми розглянемо один з інших методів вивчення діагоналізовності, одним з таких методів є вивчення анулюючих поліномів.

Примітка 3.25. У цьому розділі я не пишу більшість доказів, а скоріше інтуїцію, чому це правда і чому це працює.

Визначення 3.26. Нехай $f \in \mathbb{K}^n$ ендоморфізм. Поліном $Q(X) \in K[X]$ є **анулюючим поліномом** для f якщо $Q(f) = 0$.

Приклад 3.27. Нехай f проєкція, тоді, ми знаємо, що $f^2 = f$, звідки $f^2 - f = 0$, тому $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ є анулюючим поліномом для f.

Важливо, що анулюючі поліноми тісно пов'язані з власними значеннями:

Твердження 3.28. Нехай $Q(X)$ є анулюючим многочленом для f, тоді власні значення f знаходяться серед коренів Q, тобто:

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \mathrm{Rac}(Q)$$

Доведення. Нехай $Q(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ — анулюючий многочлен для f і λ — власне значення для f. Отже, $\exists v \neq 0 \in E$ така що $f(v) = \lambda v$, більше того:

$$Q(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_0 \operatorname{Id} = 0$$

Але $f(v) = \lambda v$, тому $f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda^2 v$, звідки $f^k(v) = \lambda^k v \ \forall k \in \mathbb{N}$, тоді:

$$Q(f(v)) = 0 = (a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_0 \operatorname{Id})v = (a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 \operatorname{Id})v = 0$$

Але $v \neq 0$, тому $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 \operatorname{Id} = 0$, звідки λ є коренем Q. □

Примітка. Однак, рівність не є загалом вірною, наприклад $\operatorname{Id}^2 = \operatorname{Id}$, отже $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ обнуляє Id з коренями 0 та 1, але 0 не є власним значенням для Id.

Теорема 3.29. Кайлі-Гамільтона. Нехай $f \in K^n$ ендоморфізм та $P_f(X)$ його характеристичний поліном, тоді

$$P_f(f) = 0$$

Іншими словами, характеристичний поліном ендоморфізму є його анулюючим поліномом.

Інтуїція. Характеристичний поліном описує нам структуру f, тобто які операції потрібно виконати, щоб втратити принаймні один вимір, якщо ми отримуємо множники вигляду $(X - \lambda)^n$, отже, потрібно застосувати $f(v) - \lambda v) = v_r$, а потім до результату v_r знову, тобто $f(v_r) - \lambda v_r$, і повторюємо n разів (це відбувається у випадках тригоналізованих матриць)

Теорема залишається вірною навіть у випадках, коли ендоморфізм не є тригоналізовним, оскільки ми можемо вибрати замикання K' поля K, в якому знаходиться наш ендоморфізм, і він стає тригоналізовним (наприклад, $\mathbb{C}$ для $\mathbb{R}$).

Крім того, характеристичний поліном дає нам $\ker(P_f(X)) = E$, тобто вектори, які стають нульовими під дією $P_f(f)$, цікавий факт полягає в тому, що всі вектори з E належать до цього ядра, і тому $\forall v \in E$, $p_f(f)v = 0$, звідки $p_f(f) = 0$.

Визначення 3.30. Нехай Q — розкладений поліном:

$$Q(X) = (X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_r)^{\alpha_r}$$

Поліном

$$Q_1 = (X - a_1) \cdots (X - a_r)$$

називається **радикалом** Q (тобто розкладений поліном (той самий поліном, але без степенів біля дужок).

Більше того, $Q_1 \mid Q$, тобто радикал полінома ділить сам поліном.

Твердження 3.31. Нехай f є ендоморфізмом і

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

є його характеристичним многочленом. Тоді, якщо f є діагоналізовним, радикал Q_1 анулює f також, тобто

$$Q_1(f) = (f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_r) = 0$$

Інтуїція. Я даю інтуїцію доведення. Якщо f є діагоналізованою з характеристичним поліномом

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

з $r := \alpha_i > 1$ це <u>не означає</u>, що потрібно застосовувати $(f - \lambda_i \operatorname{Id})$ r разів для зменшення розмірності як у випадку тригоналізованих матриць, але це означає, що E_{λ_i} власний простір власного значення λ_i має розмірність $\alpha_i = r$ і тому $\forall v \in E_{\lambda_i}, f(v) = \lambda_i v$.

Оскільки $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$, якщо $v \in E$, тоді $\exists i \in \{1, \ldots, p\}$ така що $v \in E_{\lambda_i}$ і тому $f(v) - \lambda_i v = 0$ тобто $(f - \lambda_i \operatorname{Id})(v) = 0$. Звідси радикал P_f анулює f.

3.9 Лема про ядра

Лема 3.32. **про ядра** Нехай $f \in K^n$ ендоморфізм і

$$Q(X) = Q_1(X) \cdots Q_p(X)$$

многочлен, розкладений у добуток попарно взаємно простих многочленів. Якщо $Q(f) = 0$, то:

$$E = \operatorname{Ker} Q_1(f) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} Q_p(f)$$

Інтуїція. Оскільки $Q(f) = 0$, тому $\forall v \in E, Q(f)(v) = 0$ отже $\operatorname{Ker}(Q(f)) = E$. $\exists v_1, \ldots, v_p$ такі що $v = v_1 + \ldots + v_p$. Але усі поліноми попарно взаємно прості, тоді лише один з них анулює v_i тому $v_i \in \operatorname{Ker} Q_i(f)$ і це залишається правдою для всіх $v_1, \ldots, v_p$. І оскільки поліноми взаємно прості, тож якщо $k \neq j$ і $Q_k(v_i) = 0$, тоді $Q_j(v_i) \neq 0$ бо Q_j і Q_k відрізняються. Тоді, $\forall i, j$ $\operatorname{Ker} Q_i \cap \operatorname{Ker} Q_j = \{0\}$.

Примітка 3.33. Повернімося до прикладу f, яка є проєкцією, отже $f^2 - f = 0$ і $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ анулює f. Проте X і $X - 1$ є взаємно простими, тоді

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$$

Щоб бути більш загальною, нехай f є ендоморфізмом, і $Q(X) = (X-\lambda_1) \cdots (X-\lambda_p)$ така що $Q(f) = 0$, маємо:

$$E = \underbrace{\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{Id})}_{E_{\lambda_1}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(f - \lambda_p \operatorname{Id})}_{E_{\lambda_p}}$$

Звісно, $\lambda_i \neq \lambda_j$. І тоді f є діагоналізованим, оскільки прямою сумою цих власних підпросторів.

Наслідок 3.34. Ендоморфізм f є діагоналізованим тоді і тільки тоді, якщо існує анулюючий поліном Q для f, який є розкладним і має лише прості корені [a]

[a] розкладний: $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ - X в степені 1! прості корені: якщо $\alpha_i = 1$ також, тобто множники $(X - \lambda)$ в степені 1!

3.10 Пошук анулюючих многочленів. Мінімальний многочлен

Визначення 3.35. Називається **мінімальний многочлен** для f, позначений $m_f(X)$ - нормалізований многочлен [a] який анулює f найменшого степеня.

[a] тобто з коефіцієнтом 1 при члені найвищого степеня, тобто: $1 * X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$

Твердження 3.36. Анулюючі многочлени f мають вигляд:

$$Q(X) = A(X) m_f(X) \quad \text{де} \quad A(X) \in K[X]$$

тобто $m_f(X)$ ділить $Q(X)$.

Твердження 3.37. Корені мінімального полінома $m_f(X)$ є точно коренями характеристичного полінома $P_f(X)$, тобто власні значення.

Доведення. Ми знаємо, що $P_f(X) = A(X)m_f(X)$ тому якщо λ є коренем $m_f(X)$, тоді вона є коренем $P_f(X)$ також. Навпаки, якщо λ є коренем $P_f(X)$ тоді вона є власним значенням, а $m_f(X)$ анулює f, отже λ також є коренем $m_f(X)$. □

Теорема 3.38. Ендоморфізм f є діагоналізовним тоді і тільки тоді, коли його мінімальний многочлен є розкладним і всі його корені прості.

Приклад 3.39. 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $P_A(X) = -(X-1)(X+2)^2$, отже, маємо дві можливості:

- $m_A(X) = (X-1)(X+2)$ - отже A діагоналізована
- $m_A(X) = (X-1)(X+2)^2$ - отже A не діагоналізована

Обчислимо:

$$(A-I)(A+2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, $m_f(X) = (X-1)(X+2)$ і тому A є діагоналізованою.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Маємо: $P_A(X) = -(X-1)(X-2)^2$, отже:

$$m_A(X) = \begin{cases} (X-1)(X-2) & \text{тобто } A \text{ діагоналізована} \\ (X-1)(X-2)^2 & \text{тобто } A \text{ не діагоналізована} \end{cases}$$

Обчислимо:

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси $m_A(X) \neq (X-1)(X-2)$ і тому A не є діагоналізованою.

Appendices

ДОДАТОК 1

Нагадування про концепції Лінійної Алгебри

1 Матриці

1 Множення матриць

Визначення 1.1. Нехай $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ та $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ такі що $A = (a_{j,i})$ та $B = (b_{m,k})$, тоді:

$$AB = C = (c_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,k})$$

2 Слід

Визначення 1.2. Слід $n \times n$ квадратної матриці A, позначений $\mathrm{tr}(A)$, є сумою діагональних елементів

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

де a_{ii} є діагональними елементами матриці A.

Властивість. сліду.

- Лінійність:
$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$
$$\mathrm{tr}(cA) = c\mathrm{tr}(A), \quad c \in \mathbb{R} \text{ (або } \mathbb{C})$$
- Транспонування:
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$$
- Множення матриць:
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \quad \text{(якщо } A \text{ та } B \text{ мають розмір } n \times n)$$
  Однак, слід не є дистрибутивним щодо множення:
$$\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(BC)$$
- Власні значення:
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$
  де λ_i є власними значеннями A. Це робить слід важливим інструментом у спектральному аналізі.

- Слід Одиничної Матриці

$$\text{tr}(I_n) = n$$

оскільки всі діагональні елементи дорівнюють 1.

Приклад 1.3. Для

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

слід дорівнює:

$$\text{tr}(A) = 3 + 5 + 9 = 17$$

Приклад 1.4. Якщо

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

тоді

$$\text{tr}(B + C) = \text{tr} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = 6 + 8 = 14$$

що відповідає

$$\text{tr}(B) + \text{tr}(C) = (2 + 3) + (4 + 5) = 14$$

таким чином підтверджуючи лінійність.

Література

[1] Johannes Anschütz. *Algèbre linéaire 2 (OLMA252)*. 2024-2025.

[2] Grifone Joseph. *Algèbre linéaire*. fre. 4e édition. Toulouse: Cépaduès Éditions , DL 2011, 2011. ISBN: 978-2-85428-962-6.

[3] Yehor Korotenko. *sci-trans-git*. Вер. 0.2.0-alpha. 2025. DOI: 10.5281/zenodo.15775111. URL: https://github.com/DobbiKov/sci-trans-git.