CheatSheet d'Analyse et Géometrie

Yehor KOROTENKO

March 9, 2025

1 Distances et normes

Définition 1.1. *Une* ***norme*** *sur* $\mathbb{R}^d$ *est une application* $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *tel que:*

1. $N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$
2. $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
3. $N(X) \geq 0$ *et* $N(X) = 0 \iff X = 0_d$

Définition 1.2. *Une* ***distance*** *sur* $\mathbb{R}^d$ *est une application:* $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *tel que:*

1. $d(X, Y) = d(Y, X)$
2. $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$
3. $d(X, Y) \geq 0 \quad \forall X, Y$ *et* $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$

Exemple 1.1. *La distance et la norme canonique. Soit* $X = (x_1, \ldots, x_n)$

1. *La norme:*
$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$
2. *La distance:*
$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

2 Éspaces métriques

Définition 2.1. *Espace métrique est un ensemble muni de la distance.*

Définition 2.2. (E, d) *espace métrique et* $x_0 \in E$ *et* $r \geq 0$*, alors:*

1. $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$ *boule ouverte de centre* x_0 *et de rayon* r
2. $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$ *boule fermé de centre* x_0 *et de rayon* r

Définition 2.3. *Une partie* $A \subset E$ *est bornée si* $\exists R > 0$ *et* $x_0 \in E$ *tq* $A \subset B(x_0, R)$*. Autrement dit, s'il existe une boule dans laquelle* A *est inclu.*

3 Ouverts - fermés

Définition 3.1. *Soit* (E, d) *espace métrique.*

1. $U \subset E$ *est ouvert si* $\forall x_0 \in U, \exists r > 0$ *tel que* $B(x_0, r) \subset U$ *(si pour tout point de* U *il existe une boule ouverte inclu dans* U*)*
2. $F \subset E$ *est fermé si* $E \setminus F$ *est ouvert (si le complémentaire de* F *est ouvert).*

Théorème 3.1. *Très important!!*

1. *Soit* U_i*,* $i \in I$ *une collection d'ouverts. Alors,* $\cup_{i \in I} U_i$ *est ouvert.*
   Translate: Une union quelconque des ensembles ouverts est ouvert.

2. *Si $U_1, \ldots, U_n$ sont ouverts*

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \text{ est ouvert.}$$

Translate: intersection finie des ensembles ouverts est ouvert.

1. *Soit U_i, $i \in I$ une collection de fermés. Alors, $\cup_{i\in I} U_i$ est fermé.*
   Translate: Une union quelconque des ensembles fermés est fermé.

2. *Si $U_1, \ldots, U_n$ sont fermés*

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \text{ est fermé.}$$

Translate: intersection finie des ensembles fermés est fermé.

Note: pour union quelconque, intersection finie!

Proposition 3.1. *Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\forall 1 \leq i \leq N, U_i \subset E$*

1. *Si tout U_i est ouvert, alors $U_1 \times \ldots \times U_N$ est aussi ouvert.*
2. *Si tout U_i est fermé, alors $U_1 \times \ldots \times U_N$ est aussi fermé.*

4 Intérieur, Adhérence, Frontière

Définition 4.1. *Un point $x_0 \in A$ est intérieur à A s'il existe $r > 0$ tq $B(x_0, r) \subset A$.* ***Intérieur*** *de A est l'ensemble de tous les points intérieurs à A:*

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A : x \text{ est intérieur à } A\}$$

Note: le plus grand ouvert inclu dans A

Définition 4.2. *Un point $x_0 \in A$ est adhérent à A s'il existe $r > 0$ tq $B(x_0, r)$ intersecte A.* ***Adhérence*** *de A est l'ensemble de tous les points intérieurs à A:*

$$\mathrm{Adh}(A) = \{x \in E : x \text{ est adhérent à } A\}$$

Note: le plus petit fermé contenant A

Définition 4.3. *La* ***frontière****: $\partial A = \mathrm{Adh}(A) \setminus \mathrm{Int}(A) = \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(E \setminus A)$*

Définition 4.4. *Soit $A \subset B$. On dit que A est* ***dense*** *dans B si $B \subset \mathrm{Adh}(A)$*

Proposition 4.1. *Caractérisations séquentielles:*

1. ***de férmé****: A est fermé ssi pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui covnverge (supposons vers x), sa limite x est aussi dans A ($x \in A$)*
2. ***d'adhérence****: $x \in \mathrm{Adh}(A)$ ssi il existe une suite (x_n) d'éléments de A tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*
3. ***de compact****: $A \subset E$ est compact si pour toute suite (x_n) d'éléments de A, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers une limite $x \in A$*

Proposition 4.2. 1. *Si une suite (x_n) converge vers une limite x, cette limite est* ***unique****.*

2. *Si une suite (x_n) coverge vers une limite x et cette suite admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers une limite x'. Alors on a toujours: $x = x'$*

5 Compact

Définition 5.1. *Soient $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ où U_i est ouvert $\forall i \in I$. Alors, si $A \subset U$, donc U est un recouvrement ouvert de A.*

Définition 5.2. *$K \subset E$ est* ***compact*** *si de TOUT recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini: i.e, on peut trouver $i_1, \ldots, i_n \in I$ (un nombre fini de i_i) tels que:*

$$K \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

Proposition 5.1. 1. *Un ensemble fini est compact.*

2. *K compact $\implies$ K fermé et borné*
3. *Si K compact et F fermé, alors $K \cap F$ est compact.*
4. *Si K compact, toute suite de Cauchy dans K coverge dans K.*

6 Utilisation des fonctions continues

Proposition 6.1. *Soit $F : E_1 \to E_2$ une fonction continue avec E_1, E_2 éspaces métriques, alors:*

1. *Pour tout $U_2 \subset E_2$ ouvert, $F^{-1}(U_2)$ est ouvert dans E_1.*
2. *Pour tout $F_2 \subset E_2$ fermé, $F^{-1}(F_2)$ est fermé dans E_1.*
3. *Pour toute suite (x_n) dans E_1 ayant limite x (i.e $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) on a:*

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$$

7 Montrer qu'un ensemble et fermé ou ouvert

Pour montrer qu'un ensemble $\mathcal{U}$ est ouvert

- **Utiliser la définition :**
$$\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x,r) \subset \mathcal{U}$$
- Montrer que $E \setminus \mathcal{U}$ est fermé.
- Montrer que $\mathcal{U}$ est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.
- Exprimer $\mathcal{U}$ comme une boule ouverte.
- Écrire $\mathcal{U}$ comme :
  - une réunion d'ouverts ;
  - une intersection finie d'ouverts.
- $\mathcal{U} = \mathrm{Int}(U)$.
- Écrire $\mathcal{U} = I_1 \times \cdots \times I_n$ avec I_i ouvert.

Pour montrer qu'un ensemble $V \subset E$ est fermé

- **Utiliser la définition :** $E \setminus V$ est ouvert.
- **Caractérisation séquentielle :** Toute suite convergente dans V, sa limite est aussi dans V.
- Montrer que V est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.
- Montrer que V est compact.