Anal avec python

Yehor Korotenko

January 21, 2025

Contents

Chapter 1

cours 1

1.1 Modèles discrètes

On diésigne par $N(t)$ la population d'individus à l'instant t.
Équation du modèle discret:

$$\underbrace{N(t+\Delta t)-N(t)}_{\text{variation de la population}} = \underbrace{n}_{\text{nombre de naissances}} - \underbrace{m}_{\text{nombre de décès}} + \underbrace{\underbrace{i}_{\text{immigration}} - \underbrace{e}_{\text{émigration}}}_{\text{sol de migration}}$$

1.1.1 Modèle de croissance géomètrique

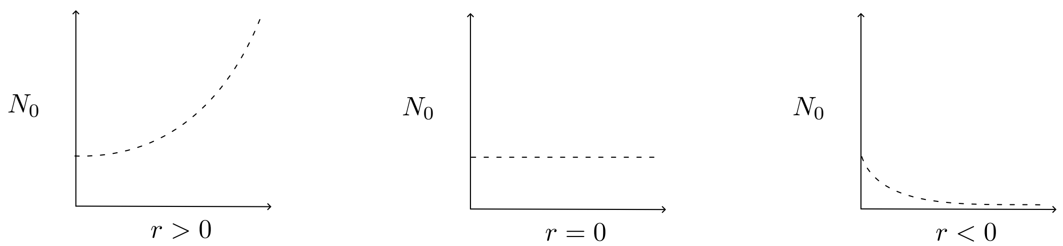
- hypothèse:
  - solde migration nul: i.e $i-e=0$
  - nombre de croissance proportionnel à la taille de la population $\underbrace{n=\lambda\Delta t N(t)}_{\text{taux de natalité}}$
  - Idem pour le mobre de décès: $\underline{m=\mu\Delta t N(t)}_{\text{taux de mortalité}}$
- Modèle: On pose $N_n = N(t_n)$ la taille de la population à l'instant t_n.

  $$N_{n+1}-N_n = \lambda\Delta t N_n - \mu\delta t N_n$$

  on pose $r=\lambda-\mu$

  $$N_{n+1} = (1+r\Delta t)N_n, \qquad n=0 \tag{1.1}$$

- Solution: $N_n = (1+r\Delta t)^n N_0, \quad n\in\mathbb{N}$
- Visualisation: Δt fixé



(a) Natalité supérieure à la mortalité

(b) Natalité égale à la mortalité

(c) Natalité inférieure à la mortalité

Property. .

- Lorsque $t \to 0$, la population semble tendre vers une courbe $N(t) = N_0 e^{rt}$, solution de $\begin{cases} N'(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Si $r > 0$, la population croît indéfiniment
- Si $r < 0$, il y a extinction de l'éspèce.

Inconvenients:

1. Une croissance infinie n'est pas réaliste
2. Pour être rigoureux, on devrait écrire $E(rN_n)$ i.e partie entière.

1.2 Modèles continues

Motivation: L'observation qui prend Δt proche de 0 aura beaucoup plus d'information.

> **Remark 1.1.** Le modèle de croissance géomètrique
>
> $$\begin{aligned} & N(t+\Delta t) - N(t) = \lambda \Delta t N(t) - \mu \Delta t N(t) \\ \Rightarrow & \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lambda N(t) - \mu N(t) \end{aligned}$$
>
> en faisant $\Delta t \to 0$
>
> $$N'(t) = \lambda N(t) - \mu N(t)$$
>
> D'où l'équation des modèles continues:
>
> $$\underbrace{N'(t)}_{\text{vitesse de variation}} = \underbrace{n(t)}_{\text{vitesse de naissance}} - \underbrace{m(t)}_{\text{vitesse de décès}} + \underbrace{i(t)}_{\text{vitesse d'immigration}} - \underbrace{e(t)}_{\text{vitesse d'émigration}}$$

1.2.1 Modèle de Malthus

- hypothèse:
  - solde migration nul: $i(t) - e(t) = 0$
  - vitesse de naissance proportionnel à la population à l'instant t: $n(t) = \lambda N(t)$
  - vitesse de décès: $m(t) = \mu N(t)$
- Modèle: $\begin{cases} N'(t) = (\lambda - \mu)N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Solution: $N(t) = N_0 e^{(\lambda-\mu)t}$

  Property. – Il peut être si comme limite du modèle de croissance géomètrique.
  - Lorsque $r = \lambda - \mu > 0$ croissance est proportionnel.
  - Lorsque $r = \lambda - \mu = 0$ la population n'évolue pas.
  - Lorsque $r = \lambda - \mu < 0$ la population tend vers 0.
- Inconvenients:
  - croissance exponentielle pas réaliste. Il faut prendre en compte:
    * la limitation des ressources
    * l'interaction avec l'environnement

1.2.2 Modèle Verhulst

Corrige le modèle de Malthus en prennant en compte la limitation de ressources.

- Idée: limiter la croissance à un seuil K appelé capacité biotique

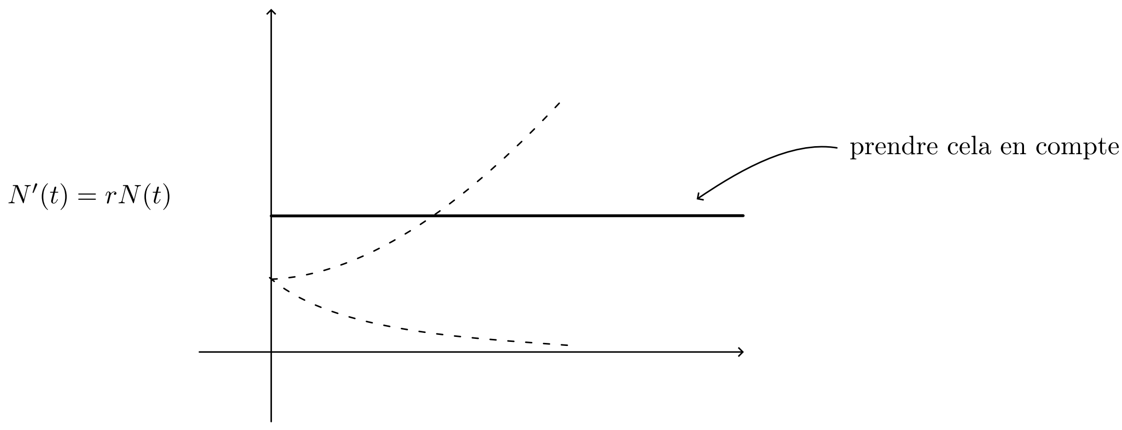


Figure 1.2: Modèle de Malthus

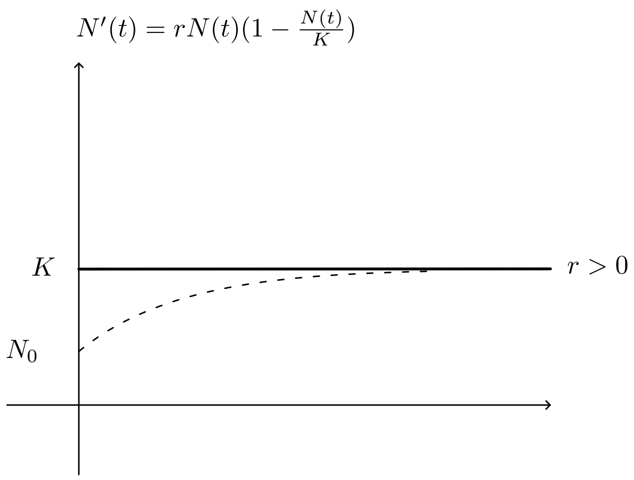


Figure 1.3: Modèle de Verhulst

- hypothèse: Sole de migration nul
  - taux de natalité fonction afiine décroissante de la population $\lambda \approx \lambda(1 - \frac{N(t)}{K})$
  - taux de mortalité fonction affine croissante de la population $\mu \approx -\mu(1 - \frac{N(t)}{K})$
- Modèle: $\begin{cases} N'(t) = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Solutions: $N(t) = \frac{K}{1+(\frac{K}{N_0}-1)e^{-rt}} \quad t > 0$
- Visualisation:

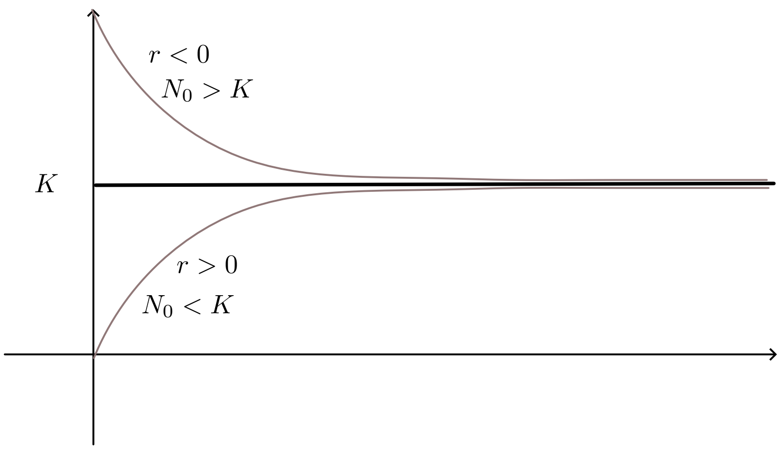


Figure 1.4: Verhulst solution

Property. Si $r > 0$, on a:

- si $N_0 = 0$ $N_0 = K$ on a: $N(t) = N_0 \, \forall t > 0$
- si $0 < N_0 < K$, N croissante
- si $N_0 > K$, N décroissante
- N possède une limite si $N_0 > 0$

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = K$$

1.3 Modèle de croissance logistique

C'est un modèle discrét

- hypothèse: i.e $= 0$
  $n - m$ est une fonction affine de la population, i.e $n - m = r\Delta t N(t)(1 - \frac{N(t)}{K})$
- Modèle: On suppose $\Delta t = 1$: On pose $N_n = N(t_n)$

$$\text{On a:} \begin{cases} N_{n+1} - N_n = rN_n(1 - \frac{N_n}{K}) \\ N_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Property. (À vérifier numeriquement)

- si $r < 2$, la suite converge vers K
- si $2 < r < 2.449$, la suite converge vers un cycle
- si $2.449 < r < 2.57$, la suite est encore un cycle mais plus complèxe
- si $r > 2.57$, la suite devient chaotique

Chapter 2

cours 2

2.1 Notion de champ de vecteurs associée à une EDO

2.1.1 Généralités et définitions

Les modèles continus de la dynamique de populations sont des problèmes de Cauchy pour les EDO.

$$\text{(EDO)} \begin{cases} y'(x) = f(t, y(t)) & t \in]0, \pi[\\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Où

$$\begin{aligned} y : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f :]0, \pi[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x). \end{aligned}$$

- Si l'on sait résoudre analytiquement l'EDO (i.e donner l'expression de $t \mapsto y(y)$) alors c'est terminé car il suffit d'étudier la fonction $t \mapsto y(t)$
- Si l'on ne sait pas détérminer la solution analytique, on peut:
  1. s'assurer de **l'éxistence** et **l'unicité** de la solution et de sa **stabilité** vis à vis des données du problème.
  2. Puis analyser les propriétés qualitatives de cette solution pour simple analyse de $f(t, x)$

C'est ici qu'intervient les champs de vecteurs.

Illustations.

1. Prenons le modèle de Malthus
$$\begin{cases} N'(t) = rN(t), & t \in]0, \pi[\\ N(0) = N_0 \end{cases}$$
   On sait que $N(t) = N_0 e^{rt}$
2. Voici ce que fait python pour traiter N.

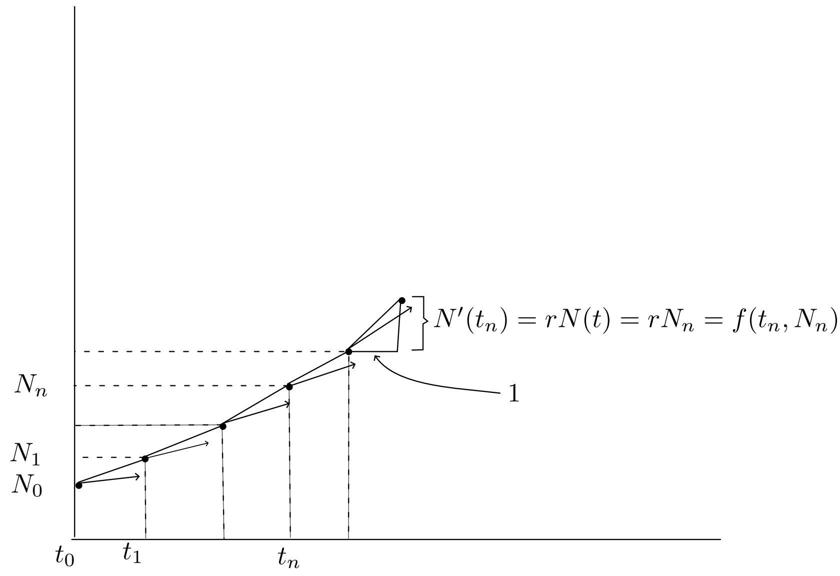


Figure 2.1: Ce que fait python

3. Traitons les vecteurs tangents à la courbe $t \mapsto N(t)$ aux points t_n, $n = 0$
4. Si l'on connaît les valeurs minimals et maximales de la solutions on peut avoir l'allure de la solution.

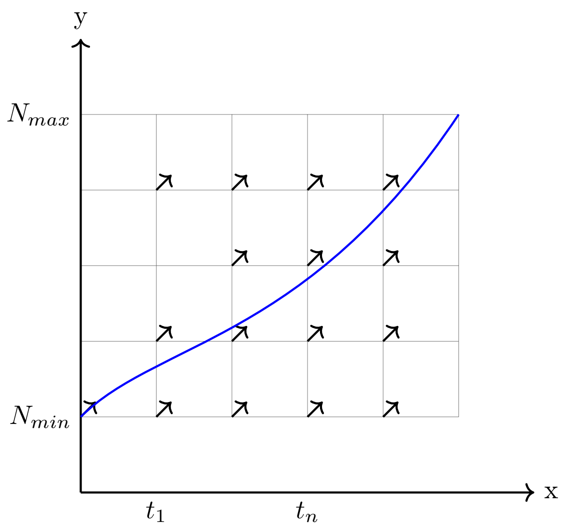


Figure 2.2: Une courbe sur des champs de vecteurs

Analysons ce que represente le vecteurs tangent:

- pour une courbe $y = g(x)$
- python et tout autre logiciel procède ainsi

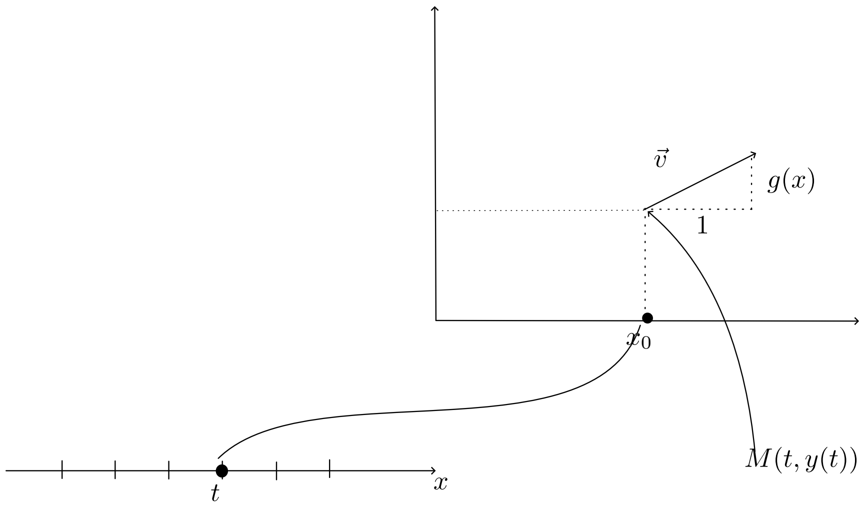


Figure 2.3: Ce que represente vecteur

Le vecteur tangent à la courbe:

$$\vec{v} = (1, g'(x)) = (1, \frac{dy}{dx}) = (1, \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dt}})$$
$$= \frac{1}{\frac{dy}{dt}}(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = \underbrace{\frac{1}{\dot{x}(t)}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}_{\text{vecteur tangent}}$$
$$\vec{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

Càd $\vec{v}$ est le vecteur vitesse au points $M(x(t), y(t))$ a la courbe parametrée $t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{cases}$. On a le résultat.

Proposition 2.1.

$$\text{(y obtient solution de l'EDO } y'(t) = f(t, y(t)))$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{(vecteur vitesse de la courbe parametrée } t \mapsto (x(t), y(t)) \text{ au point } M(t_0) = (t_0, y(t_0))$$
$$\text{si le vecteur } (1, f(t_0, y(t_0))))$$

Proposition 2.2.

$$V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(t, y) \longmapsto V((t, y)).$$

$$\text{(si le champ de vecteur associé à l'EDO } y'(t) = f(t, y(t))) \Leftrightarrow V(t, y) = (1, f(t, y))$$

2.1.2 Dessins de champs de vecteurs

Principe:

À chaque points $P = (p_x, p_y)$ on trace le vecteur $\varepsilon V(P)$ où ε est une constance positive choisi pour écrire les vecteurs trop longs.

Avec python on écrit *quiver*(P_x, P_y, V_x, V_y, *angles='xy'*) RQ 1: Cette fonction est vectorielle, i.e P_x, P_y, V_x, V_y, sont des numpy array de taille n. RQ 2: On peut ajouter un paramètre pour controles la longeur des vecteurs:

$$\text{plt.quiver}(P_x, P_y, V_x, V_y, \text{ angles='xy', sacle=1})$$

Par conséquent, il faut normaliser les vecteurs (i.e le champ de vecteur)

Example 2.3. Champ de vecteur du modèle de Verhulst:

```
def f(t, y):
  return r * y * (1 - y/k)
```

la grille:

```
lt = np.linspace(tmin, tmax, N+1)
ly = np.linspace(ymin, ymax, M+1)
T, Y = np.meshgrid(lx, ly)
```

Construire les vecteurs:

```
Y = 1 + 0 * T
V = f(T, Y)
norm = np.sqrt(U*U + V*V)
 U = U/norm
 V = V/norm
```

On place les points:

```
plt.scatter(T, Y, marker='+', alpha = 0.5)
```

On place les vecteurs

```
plt.quiver(T, Y, U, V, angles='xy', scale=N)
```

2.1.3 Recherche de solution approchée de modèles sous python

On cherche une solution approchée de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in]t_0, t_0 + T[\\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec python. Pour cela il suffit de dire **en quels points** on veut cette solution.
On se donne:

- une liste des instants $[t_0, t_1, \ldots, t_N]$
- t_0, y_0
- Puis, on appelle la fonction odeint du module scipy.integrate de python.
- On obtient une liste $[y_0, y_1, \ldots, y_N]$

Example 2.4. Cas du modèle du Verhulst

- EDO:

```
def f(t, y):
  return \ldots
```

- Instants

```
t0, tf = a, b
N = 100
t = np.linspace(t0, tf, N)
```

- On appelle odeint

```
from scipy.integrate import odeint
yapp = odeint(f, t, y), rtol=None, atol=None, tfloat=False)
plt.plot(t, yapp, \ldots)
```

2.2 Modèle de prédateur prose (lotka-voltena (1931))

$H(t)$: population de vardins
$P(t)$: pupulation de reguins

$$\frac{H'(t)}{H(t)} = \text{taux de variation de sardins} = \underbrace{a}_{\text{taux de croissance}} - \underbrace{bP(t)}_{\text{taux de mortalité}}$$

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \text{taux d'arrivé des requetes} = \underbrace{-c}_{\text{taux de décès}} + \underbrace{dH(t)}_{\text{taux de croissance}}$$

D'où le modèle:

$$\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - bP(t)) \quad t > 0 \\ P'(t) = P(t)(-c + dH(t)) \\ H(0) = H_0, \quad P(0) = P_0 \end{cases}$$

Si l'on désigne par $p \geq 0$ la proportion des requêtes en sardines pêchés

$$\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - p - bP(t)) \quad t > 0 \\ P'(t) = P(t)(-c - p - dH(t)) \\ H(0) = H_0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$