

# Algebre Linéaire

Yehor Korotenko

January 19, 2025

### **Abstract**

Le cours porte sur deux sujets liés:

1. la théorie des espaces euclidiens (i.e un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire) et leur endomorphismes
2. la réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

# Chapter 1

## Espaces euclidiens

### 1.1 Introduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont réels. On suppose que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.  
Produit scalaire:

**Definition 1.1.** Une forme bilinéaire sur  $E$  est une application

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B((u, v)) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes  $\forall u, v, w \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ :

1.  $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2.  $B(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(v, w)$

B est dite

1. symétrique si  $B(u, v) = B(v, u) \ \forall u, v \in E$
2. positive si  $B(., u) \geq 0 \ \forall u \in E$
3. définie si  $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

**Proof.**

$$\begin{aligned} B(0, 0) &= B(0 + 1 \cdot 0, 0) \\ &\stackrel{\text{linéarité}}{=} B(0, 0) + 1 \cdot B(0, 0) \\ &= B(0, 0) + B(0, 0) \\ &\Rightarrow B(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

**Notation.** Produit scalaire est noté:  $\langle u, v \rangle$

**Example 1.2.** .

1.  $E = \mathbb{R}^n, X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in E$

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

On l'appelle "produit scalaire canonique" (ou usuel)

2.  $E = \mathbb{R}^2$  et  $\langle X, Y \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_2$

3.  $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R}) \ni f, g$  (un espace des fonctions continues)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

4.  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}(A^t B)$$

**Proposition 1.3.** Un espace vectoriel non-nul possède une infinité de produits scalaires différents.

**Definition 1.4.** Un espace euclidien est un couple  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  où  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**Property.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. On pose:

$$\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle} \quad X \in E$$

la norme (ou longueur) de  $X$ . (Il est bien définie car  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est toujours positif)

**Lemma 1.5.** inégalité de Cauchy-Schwarz On a

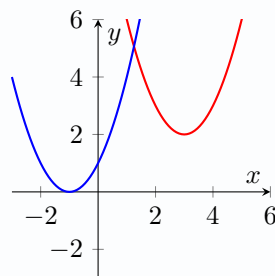
$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in E$$

avec égalité si et seulement si  $u$  et  $v$  sont colinéaires, i.e  $\exists t \in \mathbb{R}$  tel que  $u = tv$  ou  $v = tu$

**Proof.** Si  $v = 0$ , clair

Si  $v \neq 0$  on considère  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|u + tv\|^2 &= \langle u + tv, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u + tv \rangle + t \langle v, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + t \langle u, v \rangle + t \langle v, u \rangle + t^2 \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2 = f(t) \end{aligned}$$



Cas 1:  $f(t)$  n'a pas de racines différentes

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 \langle u, v \rangle^2 = 4 \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow \langle u, v \rangle^2 &\leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\ \Rightarrow |\langle u, v \rangle| &\leq \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

Cas 2:  $f(t)$  a seulement une racine:

$$\begin{aligned}\Delta &= 0 \\ \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \|u + tv\|^2 &= 0 \\ \Rightarrow u + tv &= 0 \Rightarrow u = -tv\end{aligned}$$

La définition suivante sera étudiée dans le cours d'analyse:

**Definition 1.6.** On dit que  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une norme si:

1.  $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2.  $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3.  $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

**Lemma 1.7.** L'application

$$\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

est dite norme euclidienne.

**Proof.** 1), 2) sont faites

$$\begin{aligned}3) \quad \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\Rightarrow \|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2\end{aligned}$$

**Proposition 1.8.** On les identités suivantes  $\forall u, v \in E$

1. Identité du parallélogramme:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

2. Identité de polarisation:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

**Proof.** .

- 1.

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2\end{aligned}$$

2.  $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$

On a:

- (1) + (2):  $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- (1) - (2):  $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$

## 1.2 Orthogonalité

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $E$ .

**Definition 1.9.**  $u, v \in E$  sont dits orthogonaux si  $\langle u, v \rangle = 0$ . On note  $u \perp v$

- Deux sous-ensembles  $A, B$  de  $E$  sont orthogonaux si:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad \langle u, v \rangle = 0$$

- Si  $A \subseteq E$  on appelle orthogonal de  $A$ , noté  $A^\perp$  l'ensemble

$$A^\perp = \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

- Une famille  $(v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs de  $E$  est dite orthogonale si  $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$ . Elle est dite orthogonale si elle est orthogonale et si de plus  $\|v_i\| = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$

**Example 1.10.**  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $\langle, \rangle$  produit scalaire canonique

$$v_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$(v_1, \dots, v_n)$  est une base canonique

**Proposition 1.11.** 1. Si  $A \subseteq E$  alors  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

2. Si  $A \subseteq B$  alors  $B^\perp \subseteq A^\perp$

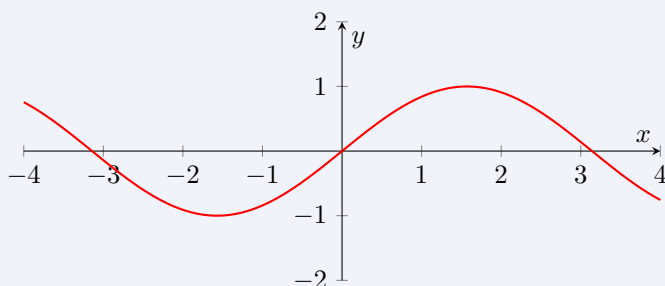
3.  $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

4.  $A \subset (A^\perp)^\perp$

**Proof.** Exercice

**Example 1.12.** 1.  $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$



Alors,  $f(t) = \cos(t)$ ,  $g(t) = \sin(t)$  sont orthogonaux:  $2 \cos(t) \sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^1 \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin(2t) dt = 0$$

**Definition 1.13.** Si  $E$  est un espace euclidien, on appelle "dual de  $E$ " l'ensemble

$$L(E, \mathbb{R}) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est linéaire}\}$$

On le note  $E^*$ . Un élément  $f \in E^*$  s'appelle une forme linéaire.

Rappele:

**Proposition 1.14.** Si  $F, F'$  sont deux e.v de dimension finie, on  $\dim(L(F, F')) = \dim(F) \cdot \dim(F')$   
En particulier,  $\dim(F^*) = \dim(F)$ . En effet si  $n = (e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $F$  et  $n' = (e'_1, \dots, e'_q)$  est une base de  $F'$ , alors l'application

$$\begin{aligned} : L(F, F') &\longrightarrow \text{Mat}_{f \times p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (f) = \text{Mat}_{n, n'}(f). \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc  $\dim(F, F') = qp$

**Theorem 1.15.** Théorème du rang: Si  $F$  est un e.v de dimension finie et  $f : F \rightarrow F'$  linéaire, alors  $\dim(F) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$

**Proposition 1.16.** Si  $F, F'$  sont deux e.v de dimension finie tq  $\dim(F) = \dim(F')$  et  $f : F \rightarrow F'$  linéaire, alors  $f$  est un isomorphisme  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = 0$

**Proof.** On rappelle que si  $G, G'$  sont des sous-e.v de dimension finie dans le même e.v, alors:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ et } \dim(G) = \dim(G')$$

$\Rightarrow$ )  $f$  injective  $\Rightarrow \text{Ker}(f) = 0$

$\Leftarrow$ ) Soit  $\text{Ker}(f) = 0$ .

Alors, forcément  $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$  et par le théorème du rang on a  $\dim(F) = \dim(\text{Im}(f))$ , donc  $\text{Im}(f) = F'$

**Lemma 1.17.** du Riesz:

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension finie et  $f \in E^*$ . Alors,  $\exists! u \in E$  tel que  $f(x) = \langle u, x \rangle \forall x \in E$ . La forme linéaire  $f$  est donné par un produit scalaire avec un vecteur.

**Notation.** Pour tout  $v \in E$  on note par  $f_v$  l'application:

$$\begin{aligned} f_v : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_v(x) = \langle v, x \rangle. \end{aligned}$$

$f_v$  est linéaire  $\forall v \in E$  i.e  $E^*$

**Proof.** lemma de Reisz

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

$\phi$  est linéaire (exercice).  $\phi$  est injective:

$$v \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

en particulier pour  $x = v$ , on a:

$$0 = f_v(v) = \langle v, v \rangle \Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} \dim(E) = \dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ est un isomorphisme} \\ &\Rightarrow \phi \text{ bijective} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists ! n \in E \text{ tq } \phi(n) = f, \text{ i.e } f(x) = \langle n, x \rangle \quad \forall x \in E$$

Dans ce cas  $E = \mathbb{R}^n$ , le lemme de Riesz est très simple à comprendre:

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire. Si on note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , tout  $x \in \mathbb{R}^n$  s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle = \langle (a_1, \dots, a_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle$$