

CheatSheet d'Analyse et Géometrie

Yehor KOROTENKO

March 7, 2025

1 Distances et normes

Définition 1.1. Une **norme** sur \mathbb{R}^d est une application $N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tel que:

1. $N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$
2. $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
3. $N(X) \geq 0$ et $N(X) = 0 \iff X = 0_d$

Définition 1.2. Une **distance** sur \mathbb{R}^d est une application: $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tel que:

1. $d(X, Y) = d(Y, X)$
2. $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$
3. $d(X, Y) \geq 0 \quad \forall X, Y$ et $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$

Exemple 1.1. La distance et la norme canonique. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$

1. La norme:

$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

2. La distance:

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

2 Espaces métriques

Définition 2.1. Espace métrique est un ensemble muni de la distance.

Définition 2.2. (E, d) espace métrique et $x_0 \in E$ et $r \geq 0$, alors:

1. $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$ boule ouverte de centre x_0 et de rayon r
2. $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$ boule fermé de centre x_0 et de rayon r

Définition 2.3. Une partie $A \subset E$ est bornée si $\exists R > 0$ et $x_0 \in E$ tq $A \subset B(x_0, R)$. Autrement dit, s'il existe une boule dans laquelle A est inclu.

3 Ouverts - fermés

Définition 3.1. Soit (E, d) espace métrique.

1. $U \subset E$ est ouvert si $\forall x_0 \in U, \exists r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$ (si pour tout point de U il existe une boule ouverte inclu dans U)
2. $F \subset E$ est fermé si $E \setminus F$ est ouvert (si le complémentaire de F est ouvert).

Théorème 3.1. Très important!!

1. Soit $U_i, i \in I$ une collection d'ouverts. Alors, $\cup_{i \in I} U_i$ est ouvert.
Translate: Une union quelconque des ensembles ouverts est ouvert.

2. Si U_1, \dots, U_n sont ouverts

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \text{ est ouvert.}$$

Translate: intersection finie des ensembles ouverts est ouvert.

1. Soit $U_i, i \in I$ une collection de fermés. Alors, $\bigcup_{i \in I} U_i$ est fermé.
Translate: Une union quelconque des ensembles fermés est fermé.

2. Si U_1, \dots, U_n sont fermés

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \text{ est fermé.}$$

Translate: intersection finie des ensembles fermés est fermé.

Note: pour union quelconque, intersection finie!

Proposition 3.1. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\forall 1 \leq i \leq N, U_i \subset E$

1. Si tout U_i est ouvert, alors $U_1 \times \dots \times U_N$ est aussi ouvert.
2. Si tout U_i est fermé, alors $U_1 \times \dots \times U_N$ est aussi fermé.

4 Intérieur, Adhérence, Frontière

Définition 4.1. Un point $x_0 \in A$ est intérieur à A s'il existe $r > 0$ tq $B(x_0, r) \subset A$. **Intérieur** de A est l'ensemble de tous les points intérieurs à A :

$$\text{Int}(A) = \{x \in A : x \text{ est intérieur à } A\}$$

Note: le plus grand ouvert inclu dans A

Définition 4.2. Un point $x_0 \in A$ est adhérent à A s'il existe $r > 0$ tq $B(x_0, r)$ intersecte A . **Adhérence** de A est l'ensemble de tous les points intérieurs à A :

$$\text{Adh}(A) = \{x \in E : x \text{ est adhérent à } A\}$$

Note: le plus petit fermé contenant A

Définition 4.3. La **frontière**: $\partial A = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(E \setminus A)$

Définition 4.4. Soit $A \subset B$. On dit que A est **dense** dans B si $B \subset \text{Adh}(A)$

Proposition 4.1. Caractérisations séquentielles:

1. **de fermé**: A est fermé ssi pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge (supposons vers x), sa limite x est aussi dans A ($x \in A$)
2. **d'adhérence**: $x \in \text{Adh}(A)$ ssi il existe une suite (x_n) d'éléments de A tq $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
3. **de compact**: $A \subset E$ est compact si pour toute suite (x_n) d'éléments de A , il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers une limite $x \in A$

Proposition 4.2. 1. Si une suite (x_n) converge vers une limite x , cette limite est **unique**.

2. Si une suite (x_n) converge vers une limite x et cette suite admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers une limite x' . Alors on a toujours: $x = x'$

5 Compact

Définition 5.1. Soient $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ où U_i est ouvert $\forall i \in I$. Alors, si $A \subset U$, donc U est un recouvrement ouvert de A .

Définition 5.2. $K \subset E$ est **compact** si de TOUT recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini: i.e, on peut trouver $i_1, \dots, i_n \in I$ (un nombre fini de i_i) tels que:

$$K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

Proposition 5.1. 1. Un ensemble fini est compact.

2. K compact $\implies K$ fermé et borné
3. Si K compact et F fermé, alors $K \cap F$ est compact.
4. Si K compact, toute suite de Cauchy dans K converge dans K .

6 Utilisation des fonctions continues

Proposition 6.1. Soit $F : E_1 \rightarrow E_2$ une fonction continue avec E_1, E_2 espaces métriques, alors:

1. Pour tout $U_2 \subset E_2$ ouvert, $F^{-1}(U_2)$ est ouvert dans E_1 .
2. Pour tout $F_2 \subset E_2$ fermé, $F^{-1}(F_2)$ est fermé dans E_1 .
3. Pour toute suite (x_n) dans E_1 ayant limite x (i.e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$) on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$$

7 Montrer qu'un ensemble est fermé ou ouvert

Pour montrer qu'un ensemble \mathcal{U} est ouvert

- Utiliser la définition :

$$\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}$$

- Montrer que $E \setminus \mathcal{U}$ est fermé.
- Montrer que \mathcal{U} est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.
- Exprimer \mathcal{U} comme une boule ouverte.
- Écrire \mathcal{U} comme :
 - une réunion d'ouverts ;
 - une intersection finie d'ouverts.
- $\mathcal{U} = \text{Int}(U)$.
- Écrire $\mathcal{U} = I_1 \times \cdots \times I_n$ avec I_i ouvert.

Pour montrer qu'un ensemble $V \subset E$ est fermé

- Utiliser la définition : $E \setminus V$ est ouvert.
- Caractérisation séquentielle : Toute suite convergente dans V , sa limite est aussi dans V .
- Montrer que V est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.
- Montrer que V est compact.