CheatSheet pour l'Algèbre Linéaire

Yehor KOROTENKO

March 30, 2025

1 Éspaces euclidiens

Proposition 1.1. *Endomorphisme $f : E \to E$ un drapeau invariant (i.e $f(E_i) \subset E_i$) $\iff$ $Mat(f)$ triangulaire supérieure*

1.1 Produits scalairs et normes

Définition 1.1. *Une forme bilinéaire sur E (**produit scalair**) un espace euclidien est une application:*

$$\begin{aligned} f : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) \end{aligned}$$

qui vérifie ces propriétés:

1. ***Bilinéarité**:*
   (a) $f(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$ *avec* $u, v, w \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$
   (b) $f(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(v, w)$ *avec* $u, v, w \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$
2. ***Symétrie**:* $B(u, v) = B(v, u) \qquad \forall u, v \in E$
3. ***Définie positive**:* $\forall u \in E, B(u, u) \geq 0$
4. ***Définie**:* $B(u, u) = 0 \iff u = 0$

Remarque. *Le produit vectoriel est noté:* $\langle ., . \rangle$

Définition 1.2. *La norme $\forall X \in E$:*

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

Proposition 1.2. *Les formules utiles: (pour $X, Y \in E$)*

1. $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ *(égalité si X et Y sont colinéaires)*
2. $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$
3. $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2\right)$
4. $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2\right)$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.3. *$u, v \in E$ sont **orthogonaux** si $\langle u, v \rangle = 0$ et on les notes $u \perp v$*

Définition 1.4. ***Orthogonale de** A:*

$$A^{\perp} = \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

*aussi connu comme **complement orthogonale**.*

Proposition 1.3. *Si E est un espace euclidien et $A \subset E$ son sous-espace vectoriel, alors:*

$$E = A \oplus A^{\perp}$$

i.e tout vecteur $x \in E$ peut s'écrit comme $x = e + e'$ où $e \in A$ et $e' \in A'$.

Proposition 1.4. *Si f est une projection orthogonale sur $F \subset E$, alors:*

$$f(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Définition 1.5. *La* ***projection orthogonale*** *sur un sous-espace $A \subset E$ est une application:*

$$\begin{aligned} p_F : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto p_F(x = e + e') = e \end{aligned}$$

Proposition 1.5. ***La distance*** *d'un vecteur x à un sous-espace F est:*

$$\|x - p_F(x)\|$$

Définition 1.6. *Une* ***isométrie*** *de E est un endomorphisme tel que:*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

de plus,

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$$

Proposition 1.6. *Si $X \in E$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, donc:*

$$X = \langle X, e_1 \rangle \, e_1 + \ldots + \langle X, e_n \rangle \, e_n$$

Où $\langle X, e_i \rangle$ sont les coordonées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$

2 Détérminants

2.1 Propriétés les plus improtants

Proposition 2.1. *les propriétés de déterminant. Pour cette proposition, on note $\det(c_1, \ldots, c_n)$ un déterminant où $\forall i$, r_i et $\forall i$, y_i représentent une colonne (ou un vecteur colonne). Et $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$.*

1. ***Déterminant de la matrice identité est 1:***

$$\det(I_n) = 1$$

2. ***Déterminant de la matrice du rang 1 est son seul élément:***

$$\det(\begin{bmatrix} a_{1,1} \end{bmatrix}) = a_{1,1} \qquad \text{où } a_{1,1} \in \mathbb{R}$$

3. ***Linéarité 1:***

$$\det(r_1, \ldots, r_i + y_i, \ldots, r_n) = \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_n) + \det(r_1, \ldots, y_i, \ldots, r_n)$$

4. ***Linéarité 2:***

$$\det(r_1, \ldots, \lambda_i r_i, \ldots, r_n) = \lambda_i \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_n)$$

   C'est pourquoi:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

5. ***Mêmes colonnes****: Supposons que $i \neq j$ et $c_i = c_j$ alors:*

$$\det(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n) = 0$$

   S'il y a deux colonnes identiques, alors det *est égale à 0.*

6. ***Déplacements des colonnes:***

$$\det(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n) = -\det(c_1, \ldots, \underbrace{c_j, \ldots, c_i}_{permutation}, \ldots, c_n)$$

   Autrement dire, une permutation des colonnes change la signe.

7. ***Détérminant des matrices multipliées****: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

8. ***Détérminant d'une matrice transposé****: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

$$\det(A^T) = \det(A)$$

3 Utile

3.1 Multiplication des matrices

Définition 3.1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ *tels que* $A = (a_{j,i})$ *et* $B = (b_{m,k})$*, alors:*

$$AB = C = (c_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,k})$$

3.2 La trace

Définition 3.2. *La trace de la* $n \times n$ *matrice carée* A*, notée* $tr(A)$*, est la somme des éléments diagonales*

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

où a_{ii} *sont des éléments diagonales de la matrice* A*.*