

# Notes du cours d'Analyse et Géometrie

Professeur: Christian Gérard

Yehor Korotenko

February 13, 2025

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Espaces $\mathbb{R}^d$ $\mathbb{C}^d$ . . . . .	1
1.2	Espace $\mathbb{C}^d$ . . . . .	3
1.3	Distance sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Espaces métriques</b>	<b>6</b>
2.1	Boules dans un espace métrique . . . . .	6
2.2	Parties bornées de $(E, d)$ . . . . .	8
2.3	Fonctions bornées . . . . .	9
2.4	Distance entre ensembles . . . . .	9
2.5	Topologie des espaces métriques . . . . .	9
2.6	Intérieur, adhérent, frontière . . . . .	11
2.6.1	Intérieur . . . . .	11
2.6.2	Adhérent . . . . .	12
2.6.3	Frontière . . . . .	13
2.7	Suite dans un espace métrique . . . . .	14
2.8	Suites de Cauchy . . . . .	16
2.9	Sous-suites . . . . .	17
2.10	Procédé de construction de l'intérieur et l'adhérence . . . . .	18
2.11	Compacité . . . . .	21
2.11.1	Compacité dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle . . . . .	24
2.12	Limites et continuité . . . . .	25
2.12.1	Limites . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>27</b>

## Abstract

Professeur: Christian Gérard

- CC: 0.15  
Pour les CC une semaine avant CC le prof va envoyer une liste des question. Les CC durent 30 minutes en TD en semaines:
  - 17/2
  - 17/3
  - 17/4
- P: 0.35
- E: 0.5

Il y aura des démonstrations en examens

Chercher dans google "page personnelle cristiang gérard Orsay", puis MDD251

# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Espaces $\mathbb{R}^d$ $\mathbb{C}^d$

#### Definition 1.1.

$$\mathbb{R}^d = \{X = (x_1, \dots, x_d), x_i \in \mathbb{R}\}$$

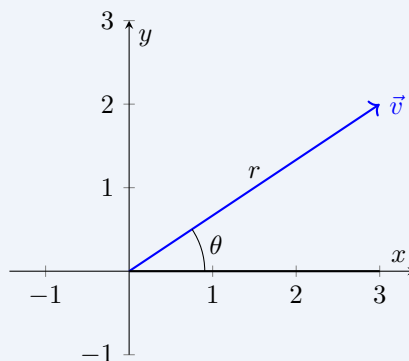
$x_1, \dots, x_d$  coordonnées cartésiennes de  $X$

#### Example 1.2. $d = 2$ coordonnées polaires:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$0 \leq r \leq \infty \quad \theta \in [0, 2\pi[$$



#### Definition 1.3. $\mathbb{R}^d$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$$

$$\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{0}_d = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

#### Definition 1.4. Un produit scalaire:

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d = \|X\| \|Y\| \cos(\theta) \text{ (où } \theta \text{ est une angle entre } X \text{ et } Y)$$

**Intuition.** Ce produit nous dit *how closely the vectors point in the same direction* (cosinus tend vers 1 quand  $\theta$  tend vers  $0^\circ$ , et cosinus tend vers 0 quand  $\theta$  tend vers  $90^\circ$ ). Et ce produit nous permet d'avoir une projection

de  $X$  sur  $Y$  par la formule:

$$Proj(X) = \frac{X \cdot Y}{\|Y\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|}$$

$X \cdot Y$  donne la longueur de  $X$  et  $Y$  ensemble, en divisant cette longueur par  $\|Y\|$  (la longueur de  $Y$ ) on obtient la longueur de  $X$  sur  $Y$ , il nous reste de multiplier cette longueur par un vecteur unitaire (de longueur 1) qui pointe dans la même direction que  $Y$ , (on l'obtient par  $\frac{Y}{\|Y\|}$ )



**Proposition 1.5.** Produit scalaire respectes ces propriétés:

1. bilinaiarité  $\lambda \in \mathbb{R}$ 
  - (a)  $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$
  - (b)  $(\lambda X) \cdot Z = \lambda(X \cdot Z)$
  - (c)  $Z \cdot (X + Y) = Z \cdot X + Z \cdot Y$
  - (d)  $Z \cdot (\lambda X) = \lambda(Z \cdot X)$
2. symétrie  $X \cdot Y = Y \cdot X$
3. défini positif:  $X \cdot X \geq 0$  et  $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Proposition 1.6.** Cauchy-Schwarz:

$$|X \cdot Y| \leq (X \cdot X)^{\frac{1}{2}} (Y \cdot Y)^{\frac{1}{2}}$$

**Definition 1.7.** La **norme euclidienne** d'un vecteur  $X$  est noté:

$$\|X\| = \left( \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} = (X \cdot X)^{\frac{1}{2}}$$

souvent noté  $\|X\|_2$

**Intuition.** Par le théorème de Pythagore, c'est une longueur de ce vecteur.

**Proposition 1.8.** La norme suit ces propriétés:

1.  $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$   $X \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
2.  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$  (inégalité triangulaire)
3.  $\|X\| \geq 0$  et  $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Proof.** de (2)

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= (X + Y) \cdot (X + Y) = X \cdot (X + Y) + Y \cdot (X + Y) = X \cdot X + X \cdot Y + Y \cdot X + Y \cdot Y \\ &= \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2 \leq \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2 \end{aligned}$$

**Definition 1.9.** Une norme sur  $\mathbb{R}^d$  est une application  $N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que:

1.  $N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$
2.  $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
3.  $N(X) \geq 0$  et  $N(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Example 1.10.**

$$\|X\|_1 = \sum_{n=1}^d |x_n|$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

## 1.2 Espace $\mathbb{C}^d$

**Definition 1.11.**

$$\mathbb{C}^d = \{X = (x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

$$z \in \mathbb{C} \quad \bar{z} = a - ib \quad \bar{z}z = a^2 + b^2 \quad |z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = a + ib \quad a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

$$\operatorname{Re} X = (\operatorname{Re} x_1, \dots, \operatorname{Re} x_d) \in \mathbb{R}^d$$

$$\operatorname{Im} X = (\operatorname{Im} x_1, \dots, \operatorname{Im} x_d) \in \mathbb{R}^d$$

$$\underset{\in \mathbb{C}^d}{X} = \underset{\in \mathbb{R}^d}{\operatorname{Re} X} + i \underset{\in \mathbb{R}^d}{\operatorname{Im} X}$$

$\mathbb{C}^d$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  (même formules avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  corps des scalaires)

**Definition 1.12.** Produit scalaire:

$$(X|Y) = \sum_{n=1}^d \bar{x}_n y_n \in \mathbb{C}$$

**Proposition 1.13.** .

1.  $(X|Y)$  est "linéaire par rapport à Y"
  - $(Z|X + Y) = (Z|X) + (Z|Y)$
  - $(Z|\lambda X) = \lambda(Z|X) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
  - $(Z|\lambda X + \mu Y) = \lambda(Z|X) + \mu(Z|Y)$
  - $(X + Y|Z) = (X|Z) + (Y|Z)$
  - $(\lambda X|Z) = \bar{\lambda}(X|Z) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
  - $(\lambda X + \mu Y|Z) = \bar{\lambda}(X|Z) + \bar{\mu}(Y|Z)$
2.  $(Y|X) = \overline{(X|Y)}$
3.  $(X|X) = \sum_{n=1}^d \bar{x}_n x_n = \sum_{n=1}^d |x_n|^2$   
 $(X|X) \geq 0$  et  $(X|X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

**Proof.** On a Cauchy-Schwarz:

$$(X|Y) \leq (X|X)^{\frac{1}{2}}(Y|Y)^{\frac{1}{2}}$$

même preuve qu'avant

On pose:

$$\begin{aligned} \|X\| \text{ (ou } \|X\|_2) \\ = (X|X)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{n=1}^d |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

norme hermitienne

$$\|X\|^2 = \left\| \begin{matrix} \text{Re } X \\ \text{Im } X \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^d}^2 = \left\| \begin{matrix} \text{Re } X \\ \text{Im } X \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^d}^2$$

**Lemma 1.14.**

$$\|X\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

**Proof.**  $|(X|Y)| \leq \|X\| \|Y\| \leq \|X\|$  si  $\|Y\| \leq 1$

$$\sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

Autre sens:

$$\begin{aligned} X \neq 0 \quad Y = \frac{X}{\|X\|} = \lambda X \quad \lambda = \frac{1}{\|X\|} \\ \|Y\| = |\lambda| \|X\| = \frac{1}{\|X\|} \|X\| = 1 \\ (X|Y) = (X|\frac{X}{\|X\|}) = \frac{1}{\|X\|} (X|X) = \|X\| \\ \sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\} \\ \|X\| \leq \sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\} \quad (\text{prendre } Y = \frac{X}{\|X\|}) \end{aligned}$$

Autres normes sur  $\mathbb{C}^d$

- $\|X\|_1 = \sum_{n=1}^d |x_n| \quad X \in \mathbb{C}^d$
- $\|X\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

### 1.3 Distance sur $\mathbb{R}^d$

On oublie norme et produit scalaire. On introduit la distance

**Definition 1.15.** La distance

$$d(X, Y) = \|X - Y\|$$

**Definition 1.16.** La distance euclidienne

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^d (x_n - y_n)^2}$$

**Proposition 1.17.** Une distance est une application:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto d((X, Y)) \end{aligned}$$

qui suit ces propriétés:

1.  $d(X, Y) = d(Y, X)$  (symétrie)
2.  $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$  (inég. triangulaire)  $\forall X, Y, Z$
3.  $d(X, Y) \geq 0 \quad \forall X, Y$  et  $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

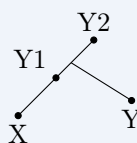
**Example 1.18.** Distances

1.  $d_2(X, Y) = \|X - Y\|_2$  (distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ )
2.  $d_1(X, Y) = \|X - Y\|_1$   
 $d_\infty(X, Y) = \|X - Y\|_\infty$
3. distance logarithmique sur  $\mathbb{R}_+$ :  $d(a, b) = |b - a|$

$$\log_{10}(a) = \frac{\log(a)}{\log(10)}$$

$x, y \in ]0, +\infty[$   
 $d_{\log}(x, y) = |\log_{10}(\frac{y}{x})|$   
 $i$  est une distance sur  $]0, +\infty[$   
 $d_{\log}(100, 110) = \log_{10}(1, 1)$

4. distance SNCF



$d(X, Y)$  distance usuelle dans  $\mathbb{R}^2$  on pose:

$$\delta(X, Y) = \begin{cases} d(X, Y) & \text{si } X, 0, Y \text{ alignés} \\ d(X, 0) + d(0, Y) & \text{sinon} \end{cases}$$



## Chapter 2

# Éspaces métriques

**Definition 2.1.**  $E$  muni d'une application de distance  $d$  (voir Definition 1.15) se note  $(E, d)$ : espace métrique

**Remark 2.2.** si  $d_1 \neq d_2$   $(E, d_1)$  n'a rien à faire avec  $(E, d_2)$

**Remark 2.3.** Retenir la version suivante de l'inégalité triangulaire:

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

**Remark 2.4.** Distance induite:

Si  $(E, d)$  espace métrique et  $U \subset E$ . Je peux restreindre  $d$  à  $U \times U$ :  $(U, d)$  est aussi un espace métrique.

## 2.1 Boules dans un espace métrique

**Definition 2.5.**  $(E, d)$  espace métrique. Soit  $x_0 \in E$  et  $r \geq 0$

1.  $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$  boule ouverte de centre  $x_0$ , de rayon  $r$
2.  $B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$  boule fermée de centre  $x_0$ , de rayon  $r$



(a) boules ouverte (i.e  $d(x_0, x) < r$ )



(b) boules fermée (i.e  $d(x_0, x) \leq r$ )

**Lemma 2.6.** .

1.  $B(x_0, 0) = \emptyset$  (car impossible d'avoir des points qui en distance sont strictement plus petit que 0)
2.  $B_f(x_0, 0) = \{x_0\}$
3.  $B(x_0, r_1) \subset B_f(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2)$  si  $r_1 < r_2$
4.  $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$  si  $d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$

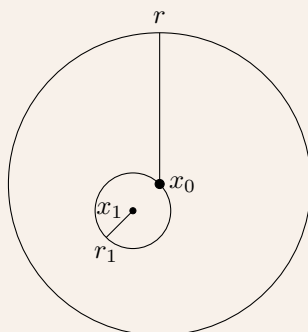


Figure 2.2: Lemma 4

**Proof.** Je suppose que  $d(x_0, x_1) \leq r$

Soit  $x \in B(x_1, r_1)$  donc  $d(x_1, x) < r_1$  à montrer:  $x \in B(x_0, r)$  (i.e  $d(x_0, x) < r$ ?)

L'inégalité triangulaire me dit:

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &< d(x_0, x_1) + r_1 \leq r \\ &\Rightarrow x \in B(x_0, r) \end{aligned}$$

**Example 2.7.** 1.  $E = \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$

$$B(x_0, r) = ]x_0 - r, x_0 + r[$$

2.  $E = \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ ,  $X = (x_1, \dots, x_d)$

$$\|X\|_2 = \left( \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^d x_i$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

$$d_2(X, Y) = \|Y - X\|_2 = \|\vec{XY}\|_2$$

$$d_1(X, Y), d_\infty(X, Y)$$

**Property.** Dans  $\mathbb{R}^n$

- $d_\infty(X, Y) \leq d_1(X, Y) \leq n d_\infty(X, Y)$
- $d_\infty(X, Y) \leq d_2(X, Y) \leq \sqrt{n} d_\infty(X, Y)$

## 2.2 Parties bornées de $(E, d)$

**Definition 2.8.** Soit  $A \subset E$ .  $A$  est bornée si  $\exists R > 0$  et  $\exists x_0 \in E$  tel que

$$A \subset B(x_0, R)$$



Figure 2.3: Exemple d'un ensemble borné

**Lemma 2.9.** Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1.  $A$  est bornée
2.  $\forall x_0 \in E, \exists r > 0$  tel que  $A \subset B(x_0, r)$
3.  $\exists r > 0$  tel que  $\forall x, y \in A$  on a  $d(x, y) < r$

**Proof.** de lemme

- $(1) \Rightarrow (2)$  :  
Hyp:  $\exists x_1 \in E, \exists r_1 \in E$  tq  $A \subset B(x_1, r_1)$   
 Soit  $x_0 \in E$ . But: trouver  $r$  tel que  $A \subset B(x_0, r)$  si  $x \in A$ , on a:  $d(x_1, x) < r_1$   
Je veux:  $d(x_0, x) < r$

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \leq d(x_0, x_1) + r_1 < r \quad \text{si } r > d(x_0, x_1) + r_1$$

- Property.**
1. Toute partie finie est bornée
  2. Si  $A$  bornée et  $B \subset A$  alors  $B$  bornée
  3. L'union d'un nombre fini de bornés est borné

**Proof.** de (3).

$A_1, \dots, A_n$  sont bornés. Je fixe  $x_0 \in E$ ,  $A_i$  borné ( $1 \leq i \leq n$ ), donc  $\exists r_i > 0$  tel que  $A_i \subset B(x_0, r_i)$  si  $r = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$

$$A_i \subset B(x_0, r), \forall i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \subset B(x_0, r)$$

□

## 2.3 Fonctions bornées

**Definition 2.10.** Soit  $B$  un ensemble. Une fonction  $F : B \rightarrow E$  est bornée si  $F(B) = \{F(b) : b \in B\} \subset E$  est borné.

## 2.4 Distance entre ensembles

**Definition 2.11.** La distance entre deux ensembles  $A, B$  est:

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

Intuitivement, on cherche deux points  $x$  et  $y$  tel que la distance est la plus petite possible.

**Definition 2.12.** La distance entre un points  $x$  et un ensemble  $B$  est:

$$d(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$$

La même intuition.

**Property.**  $\forall x \in A, y \in B, d(x, y) \geq d(A, B)$  et  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, y \in B$  tq  $d(x, y) \leq d(A, B) + \varepsilon$



Figure 2.4: Distance entre ensembles

## 2.5 Topologie des espaces métriques

distance  $d(x, y) \longrightarrow$  boules  $B(x_0, r) \longrightarrow$  ensembles ouverts

**Definition 2.13.** Soit  $(E, d)$  espace métrique.

1.  $U \subset E$  est ouvert si  $\forall x_0 \in U, \exists r > 0$  tel que  $B(x_0, r) \subset U$

2.  $F \subset E$  est fermé si  $E \setminus F$  est ouvert

$\emptyset$  est ouvert et  $E$  est ouvert.  $\emptyset$  est fermé et  $E$  est fermé.



(a) Un ensemble fermé

À la borne, il est impossible de trouver une boules qui appartient à  $F$ , car il est impossible d'avoir une boule ouverte de  $r = 0$ . Exemple: circle bleu foncé  
Pour tout point dans  $E \setminus F$  on peut trouver une boule ouverte



(b) Un ensemble ouvert

pour tout point pres de la borne on peut trouver une boule infiniment petite avec des points autour ce point inclu dans  $U$ .

Figure 2.5: Démonstration des espaces ouverts et fermés

**Remark 2.14.** dans  $\mathbb{R}$  les intervalles ouverts sont des ouverts (pareil pour fermés)

**Remark 2.15.** Une distance entre deux ensembles ouverts toujours existe et elle est infimum (qui n'est jamais atteint)

**Lemma 2.16.** 1.  $B(x_0, r_0)$  est ouvert.

2.  $B_f(x_0, r_0)$  est fermé.

**Proof.** 1. Soit  $x_1 \in B(x_0, r_0)$  ( $d(x_0, x_1) < r_0$ ).

But: trouver  $r_1 > 0$  tel que  $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$ ?

$$x \in B(x_1, r_1) : d(x_1, x) < r_1$$

$$x \in B(x_0, r_0) \text{ si } d(x_0, x) < r_0$$

facile:

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &\leq d(x_0, x_1) + r_1 \\ &< r_0 \text{ si} \end{aligned}$$

$$r_1 < r_0 - d(x_0, x_1) > 0$$

□

**Example 2.17.** bizzare.

Soit  $E = \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |y - x|$ ,  $A = ]0, 1[$  ouvert, pas fermé dans  $\mathbb{R}$ .



Je regarde  $A$  comme partie de  $(A, d)$ . Comme  $A \setminus A = \emptyset$  qui est ouvert, donc  $A$  est fermé dans  $A$ . Par contre, les bornes ne sont jamais atteints, alors  $A$  est ouvert dans  $(A, d)$ .

**Theorem 2.18.** .

1. Soit  $U_i$ ,  $i \in I$  une collection d'ouverts. Alors,  $\cup_{i \in I} U_i$  est ouvert.

Translate: Une union des ensembles ouverts est ouvert.

2. Si  $U_1, \dots, U_n$  sont ouverts

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \text{ est ouvert.}$$

Translate: intersection des ensembles ouverts est ouvert.

1. Soit  $U_i$ ,  $i \in I$  une collection de fermés. Alors,  $\cup_{i \in I} U_i$  est fermé.

Translate: Une union des ensembles fermés est fermé.

2. Si  $U_1, \dots, U_n$  sont fermés

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \text{ est fermé.}$$

Translate: intersection des ensembles fermés est fermé.

**Proof.** .

1. Soit  $x \in U := \bigcup_{i \in I} U_i$ . Il existe un  $i$  noté  $i_0$  tel que  $x \in U_{i_0}$ ,  $U_{i_0}$  est ouvert, donc  $\exists r > 0$  tel que

$$B(x, r) \subset U_{i_0} \subset U := \bigcup_{i \in I} U_i.$$

2. Soit  $x \in U := \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$ .

On fixe  $i$ .  $x \in U_i$ ,  $U_i$  ouvert, donc  $\exists r_i > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , donc  $B(x, r) \subset U :=$

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$$

□

## 2.6 Intérieur, adhérent, frontière

### 2.6.1 Intérieur

**Definition 2.19.** Soit  $A \subset E$ .

1.  $x_0 \in E$  est intérieur à  $A$  si  $\exists \delta > 0$  tel que:

$$B(x_0, \delta) \subset A$$

2.  $\text{Int}(A)$  (intérieur de  $A$ ) = tous les points intérieurs à  $A$ . (aussi noté  $A^\circ$ )

**Intuition.**  $\text{Int}(A)$  est un ensemble qui se trouve totalement dans  $A$  et qui est loin des bords de  $A$ .

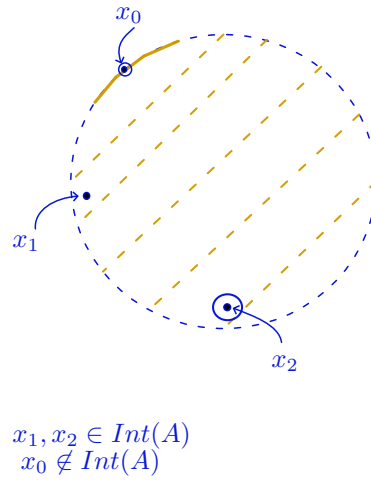


Figure 2.6: Exemple d'un intérieur

**Proposition 2.20.**  $\text{Int}(A)$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ . De manière équivalente,  $\text{Int}(A)$  est la réunion de tous les ouverts inclus dans  $A$ .

**Proof.** 1.  $\text{Int}(A) \subset A$ : clair

2.  $\text{Int}(A)$  est ouvert:

Soit  $x_0 \in \text{Int}(A)$ .

**But:** trouver  $\delta_0$  tel que  $B(x_0, \delta_0) \subset \text{Int}(A)$ . Trouver  $\delta_0$  tel que si  $d(x_0, x) < \delta_0$  alors  $x \in \text{Int}(A)$  ?

**Hyp:**  $x_0 \in \text{Int}(A)$ .  $\exists \delta_1 > 0$  tel que  $B(x_0, \delta_1) \subset A$ . On a vu que  $B(x_0, \delta_1)$  est ouvert. Je dis que  $B(x_0, \delta_1) \subset \text{Int}(A)$ .

**Preuve:** Soit  $x \in B(x_0, \delta_1)$ .  $B(x_0, \delta_1)$  ouvert, donc  $\exists \delta_2 > 0$  tel que  $B(x, \delta_2) \subset B(x_0, \delta_1) \subset A$ . Donc  $x \in \text{Int}(A)$ , donc  $B(x_0, \delta_1) \subset \text{Int}(A)$ .

$\text{Int}(A)$  est ouvert.

3. Si  $U$  est ouvert et  $U \subset A$  alors  $U \subset \text{Int}(A)$ ?

$x_0 \in U$ .  $U$  ouvert  $\Rightarrow \exists \delta$  tel que  $B(x_0, \delta) \subset U \subset A \Rightarrow x_0 \in \text{Int}(A)$

□

## 2.6.2 Adhérent

**Definition 2.21.** Soit  $A \subset E$ .

1.  $x_0 \in E$  est adhérent à  $A$ , si  $\forall \delta > 0$ ,  $B(x_0, \delta)$  intersecte  $A$ . (équivalent à  $d(x_0, A) = 0$ )
2.  $Adh(A)$  (adhérence ou fermeture de  $A$ ) = ensemble des points adhérents à  $A$  (aussi noté  $\overline{A}$ )

**Intuition.** Adherent aide à compléter des ensembles. Si  $A$  est ouvert, alors ses bords n'appartiennent pas à  $A$ , mais ils appartiennent à  $Adh(A)$ .



Figure 2.7: Adhérent

**Proposition 2.22.**  $Adh(A)$  est le plus petit fermé qui contient  $A$  (l'intersection de tous les fermés qui contiennent  $A$ )

**Proof.** 1.  $A \subset Adh(A)$  clair

2.  $Adh(A)$  est fermé?

On montre que  $E \setminus Adh(A)$  est ouvert.

$$x_0 \in Adh(A) \Leftrightarrow \forall \delta > 0, B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_0 \notin Adh(A) \Leftrightarrow \exists \delta_0 > 0 \text{ tq } B(x_0, \delta_0) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \delta_0 > 0 \text{ tq } B(x_0, \delta_0) \subset E \setminus A \Leftrightarrow x_0 \in Int(E \setminus A)$$

Alors:

$$\begin{aligned} E \setminus Adh(A) &= Int(E \setminus A) \\ Adh(A) &= (Int(\underbrace{A^c}_{=E \setminus A}))^c \end{aligned}$$

□

**Definition 2.23.** Soit  $A \subset B$ . On dit que  $A$  est dense dans  $B$  si  $B \subset Adh(A)$

Soit  $x_0 \in B$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A$  tel que  $d(x_0, x_\varepsilon) < \varepsilon$

**Example 2.24.**

$$\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\} \text{ dense dans } \mathbb{R}^2$$

### 2.6.3 Frontière

**Definition 2.25.** Soit  $A \subset E$ . La **frontière** de  $A$  (ou le bord de  $A$ ) noté  $Fr(A)$  ou  $\partial A$  c'est:

$$Adh(A) \cap Adh(E \setminus A)$$

**Example 2.26.** dans  $\mathbb{R}$

1.  $Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$



2.  $\text{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$
3.  $\text{Adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
4.  $\text{Adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
5.  $\text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
6.  $\text{Fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

**Example 2.27.**  $E = \{a, b, c\}$  On pose:

- $d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$
- $d(a, b) = d(b, a) = d(b, c) = d(c, b) = 1$
- $d(a, c) = d(c, a) = 2$

$$B(a, 2) = \{a, b\} = \text{Adh}(B(a, 2))$$

$$B_f(a, 2) = \{a, b, c\}$$

**Proposition 2.28.** 1.  $\text{Int}(A) \subset A \subset \text{Adh}(A)$

2.  $E = \text{Int}(E \setminus A) \cup \text{Fr}(A) \cup \text{Int}(A)$  (union disjointe)
3.  $E \setminus \text{Int}(A) = \text{Adh}(E \setminus A)$
4.  $E \setminus \text{Adh}(A) = \text{Int}(E \setminus A)$
5.  $\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)$

**Proposition 2.29.** 1.  $A$  ouvert  $\Leftrightarrow A = \text{Int}(A)$

2.  $A$  fermé  $\Leftrightarrow A = \text{Adh}(A)$
3.  $x \in \text{Adh}(A) \Leftrightarrow d(x, A) = 0$
4.  $x \in \text{Int}(A) \Leftrightarrow d(x, E \setminus A) > 0$

## 2.7 Suite dans un espace métrique

**Definition 2.30.**  $E$  un ensemble. Une suite dans  $E$ : notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  c'est une fonction  $u : \mathbb{N} \rightarrow E$  où  $u(n)$  est noté  $u_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Si  $E = \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d \ni X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$$

où  $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$  suites dans  $\mathbb{R}$

**Definition 2.31.** Soit  $(x_n)$  une suite dans  $E$  et  $x \in E$ . On dit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ .  
 $(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq si } n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon)$

**Proposition 2.32.**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} (\subset E)$  est un ensemble borné.

**Remark 2.33.** dans  $\mathbb{R}^d$  muni de  $d_2$  (distance euclidienne)

$$X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$$

$$X = (x_1, \dots, x_d)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = x_i \quad (1 \leq i \leq d)$$

**Proposition 2.34.** la limite d'une suite convergente est unique.

**Proof.**

$$\begin{aligned} & \text{Si } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \text{ et } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X' \\ d(X, X') & \leq \underbrace{d(X, X_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(X_n, X')}_{\rightarrow 0} \Rightarrow d(X, X') = 0 \Rightarrow X = X' \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.35.** (lien avec l'adhérence)

1.  $x \in \text{Adh}(A)$  si et seulement s'il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
2.  $A$  est fermé ssi pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x \in E$  on a  $x \in A$

**Intuition.** 1. Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est d'éléments de  $A$  ( $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ ), donc elle converge vers un élément  $x$  qui peut être soit dans  $A$ , soit à la borne des éléments de  $A$ , alors à la frontière.  
 2. Si la limite de toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des éléments de  $A$  est aussi dans  $A$ , alors la frontière de  $A$  est incluse dans  $A$ . Car l'une des suites tend vers la borne.

**Proof.** de Prop. 2.35

1. ( $\Leftarrow$ ) Soit  $(x_n)$  avec  $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

J'ai  $d(x_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  et  $x_n \in A$ , donc

$$\inf_{y \in A} (d(x, y)) = 0 = d(x, A)$$

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Adh}(A)$$

( $\Rightarrow$ ) Soit  $x \in \text{Adh}(A)$

$$\Leftrightarrow d(x, A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \text{ tel que } d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$$

Prendre  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , je pose  $u_n = x_{\frac{1}{n}}$ .  $u_n \in A$   $d(x, u_n) < \frac{1}{n}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$

2. ( $\Rightarrow$ ) Soit  $A$  fermé, donc

$$A = \text{Adh}(A)$$

Si  $(x_n)$  suite dans  $A$  qui converge vers  $x$ .

$$x \in \text{Adh}(A) = A$$

( $\Leftarrow$ ) On dit que  $\text{Adh}(A) \subset A$ . Comme  $A \subset \text{Adh}(A)$ , donc  $A = \text{Adh}(A)$

□

## 2.8 Suites de Cauchy

**Definition 2.36.**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite dans  $E$  est de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, p \geq N(\varepsilon), d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$$

**Intuition.** Une suite de Cauchy c'est comme on mesure un point et on le localise, i.e:

1. On dit qu'il est entre 0 et 1.
2. Ensuite, on precise plus et on dit qu'il est entre 0.5 et 0.6.
3. Puis, entre 0.55 et 0.56

On peut infiniment augmenter le niveau de précision. C'est ça l'idée d'une suite de Cauchy.

**Proposition 2.37.** 1. Toute suite de Cauchy est bornée.

2. Toute suite convergente est de Cauchy

**Proof.** 1. voir poly

2. Soit  $(x_n)$  une suite avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  avec  $x \in E$ .

- Hyp:  $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N(\frac{\varepsilon}{2}), d(x_n, x) \leq \varepsilon/2$
- À montrer:  $\varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n, p \geq M(\varepsilon), d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$

$$d(x_n, x_p) \leq d(x_n, x) + d(x, x_p) \text{ si } n, p \geq N(\frac{\varepsilon}{2}) d(x_n, x_p) \leq 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

**Definition 2.38.**  $(E, d)$  est complet si toute suite de cauchy dans  $E$  est convergente.

**Definition 2.39.** Un espace métrique  $(E, d)$  est **complet** si toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  converge vers une limite  $x$  qui appartient aussi à  $E$ .

**Example 2.40.** Un espace métrique  $(]0, 1], d)$  avec  $d$  une distance euclidienne n'est pas complet, car soit une suite:  $x_n = \frac{1}{n}$  dont la limite est 0. Par contre,  $0 \notin ]0, 1]$ . Donc cet espace n'est pas complet.



Figure 2.8:  $(]0, 1], d)$  n'est pas complet

**Example 2.41.** Un espace  $(\mathbb{Q}, d)$  n'est pas complet. Car on peut prendre une suite  $x_n$  tendant vers  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

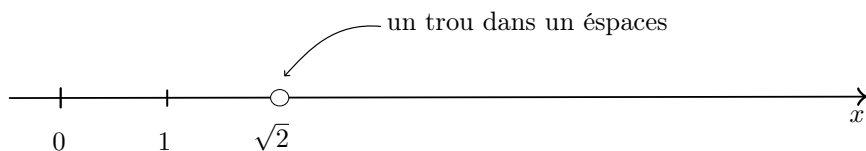


Figure 2.9:  $\mathbb{Q}$  pas complet

**Proposition 2.42.**  $\mathbb{R}^d$  muni de la distance usuelle est complet.

**Proof.**

$$X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$$

$$|x_i - y_i| \leq d(X, Y) = \|X - Y\|_2 \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

les suites réelles  $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$  sont de Cauchy si  $(X_n)$  est de Cauchy. □

**Property.**  $\mathbb{R}$  est complet

**Proof.** (Suit de la propriété de la borne supérieure)

Il existe  $x_i \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq i \leq d$  tels que  $|x_{i,n} - x_i| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$$d(X, Y) \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$$

donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ ,  $X = (x_1, \dots, x_d)$  □

## 2.9 Sous-suites

**Definition 2.43.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $E$ . Une suite

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec } y_n = x_{\phi(n)}$$

où  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante est appelée **sous-suite** de la suite  $(x_n)$ .

**Example 2.44.** Soit une application  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\phi(n) = 2n$ . Donc  $(x_n)_{\phi(n)}$  est une sous-suite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et:

$$(x_n)_{\phi(n)} = \{x_0, x_2, x_4, \dots\}$$

**Proposition 2.45.** 1. Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la limite de cette suite.

Cela signifie que,  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tq  $\exists x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

$$\forall \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\phi(n)} = x$$

2. Si  $(x_n)$  est de Cauchy et admet une sous-suite qui converge vers  $X$ , alors  $(x_n)$  converge vers  $x$ .

**Proof.** 1. Soit  $(x_n)$  avec  $\lim x_n = x$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \text{ tq si } n \geq N(\varepsilon), d(x_n, x) \leq \varepsilon$$

Soit  $y_n = x_{\phi(n)}$  une sous-suite.

- But: Soit  $\varepsilon > 0$ , trouver  $N(\varepsilon)$  tq si  $n \geq N(\varepsilon)$ ,  $d(\underbrace{y_n}_{:=x_{\phi(n)}}, x) \leq \varepsilon$

Je choisis  $N(\varepsilon)$  tel que si  $n \geq N(\varepsilon)$  alors  $\phi(n) \geq M(\varepsilon)$ , donc  $d(y_n, x) = d(x_{\phi(n)}, x) \leq \varepsilon$ . C'est possible car  $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ,  $N(\varepsilon) = M(\varepsilon)$

2.
  - Hyp1:  $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon)$  tq si  $n, p \geq M(\varepsilon)$   $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$
  - Hyp2:  $\forall \varepsilon > 0 \exists P(\varepsilon)$  tq si  $p \geq P(\varepsilon)$ ,  $d(y_p, x) \leq \varepsilon$ ,  $d(y_p, x) = d(x_{\phi(p)}, x)$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\phi(p)}) + d(x_{\phi(p)}, x) \quad \text{par l'inégalité triangulaire}$$

$$d(x_n, x_{\phi(p)}) \leq \varepsilon \text{ si } n \geq M(\varepsilon) \text{ et } \phi(p) \geq M(\varepsilon)$$

$$d(x_{\phi(p)}, x) \leq \varepsilon \text{ si } p \geq P(\varepsilon)$$

Si  $n \geq M(\varepsilon)$ , je choisis  $p$  tel que  $\phi(p) \geq M(\varepsilon)$  et  $p \geq P(\varepsilon)$ . Je fixe ce  $p$ !

$$\text{si } n \geq M(\varepsilon) \text{ alors } d(x_n, x) \leq 2\varepsilon$$

□

## 2.10 Procédé de construction de l'intérieur et l'adhérence

J'ai  $A \subset \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ). Je dois trouver  $\text{Int}(A)$  et  $\text{Adh}(A)$

1. Je dessine  $A$  sur une feuille
2. Je pense que  $\text{Int}(A) = C$  ( $C$  dit être inclu dans  $A$ !)
  - (a) Je montre que  $C$  est ouvert (facile), donc

$$C \subset \text{Int}(A)$$

car  $\text{Int}(A)$  est le plus grand ouvert inclu dans  $A$ .

- (b) Je montre que  $\text{Int}(A) \subset C$ , i.e je montre que les points dans  $A$  mais pas dans  $C$  ne sont pas dans  $\text{Int}(A)$ : je prends  $X \in A, X \notin C$ , je montre que  $X \notin \text{Int}(A)$  Je construit une suite  $(X_n)$  avec  $X_n \notin A$  mais  $X_n \rightarrow X$ .

3. Je pense que  $\text{Adh}(A) = B$  (il faut que  $A \subset B$ )

- (a) Je montre que  $B$  est fermé (facile)

$$\text{donc } \text{Adh}(A) \subset B$$

- (b) On montre que  $B \subset \text{Adh}(A)$ : On fixe  $X \in B$ , on cherche une suite  $(X_n)$  avec  $X_n \in A$  et  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ .  
On regarde seulement les  $X \in B, X \notin A$

**Exemple 2.46.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y \leq 4, x \neq y\}$$

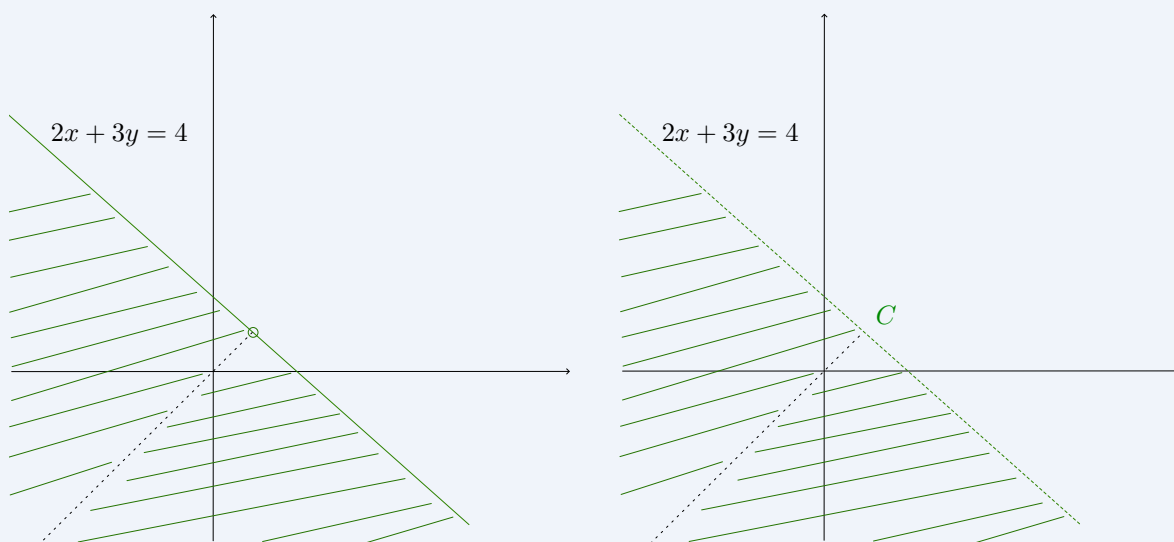


Figure 2.10: Exemple de l'intérieur

- Je devine que  $\text{Int}(A) = C = \{(x, y) \mid 2x + 3y < 4, x \neq y\}$
- Convect:  $\{(x, y) \mid 2x + 3y < 4, x < y\} \cup \{(x, y) \mid 2x + 3y < 4, x > y\}$

Je construis une suite  $(X_n)$  avec  $X_n \notin A$  mais  $X_n \rightarrow X$ . Soit  $X \in A, X \notin C, X = (x, y)$  donc:  
 $2x + 3y = 4 \quad x \neq y$

$$X_n = (x, y + \frac{1}{n})$$

$$2x_n + 3y_n = 2x + 3y + \frac{3}{n} = 4 + \frac{3}{n} > 4$$

$$X_n \notin A \text{ mais } X_n \rightarrow X$$

**Exemple 2.47.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = x^{-1}\}$$

$\text{Int}(A) = \emptyset? \quad C = \emptyset$

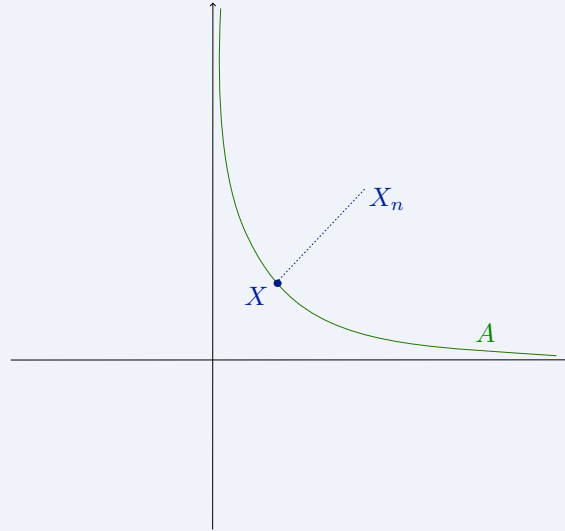


Figure 2.11: Exemple de l'intérieur de l'hyperbole

$\emptyset$  ouvert, donc  $C \subset \text{Int}(A)$   
 Soit  $X \in A$   $X \notin C$ , donc  $X \in A$ .

$$X_n := (x, y + \frac{1}{n}) \quad X_n \notin A$$

$$x_n y_n = xy + \frac{x}{n} = 1 + \frac{x}{n} \neq 1$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \text{ donc } X \notin \text{Int}(A)$$

$$\text{Int}(A) = \emptyset$$

**Example 2.48.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = x^{-1}\}$$

$\text{Adh}(A) = ?$

Je pense que  $\text{Adh}(A) = A$  ( $B = A$ ). Il suffit de montrer que  $A$  est fermé.

$$x > 0 \quad y \leq \frac{1}{x} \quad y \geq \frac{1}{x}$$

Si  $X_n = (x_n, y_n)$   $X_n \in A$  et  $X_n \rightarrow X$ , alors  $X \in A$

$$X = (x, y) \quad \begin{matrix} x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_n \rightarrow x \\ \frac{1}{x_n} \rightarrow y \end{matrix} \quad (x_n > 0)$$

donc  $x > 0$  et  $y = \frac{1}{x}$  donc  $X \in A$

$A$  est fermé

**Example 2.49.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y \leq 4, x \neq y\}$$



Figure 2.12: example-adherence

1.  $B$  est fermé (facile), donc  $\text{Adh}(A) \subset B$
2. Soit  $X \in B$ . On montre que  $X \in \text{Adh}(A)$  (on cherche  $X_n \in A$  avec  $X_n \rightarrow X$ )  
Je regarde juste  $X \in B, X \notin A$

$$X_n = (x_n, y_n) \in A \quad x_n \rightarrow x \text{ et } y_n \rightarrow y$$

$$x_n = x + \frac{1}{n}, y_n = y = x$$

$$X_n \rightarrow X \text{ et } 2x_n + 3y_n = 2x + 3y - \frac{2}{n} \leq 4 \text{ et } x_n \neq y_n$$

donc  $X_n \in A$

### Example 2.50.

$$A = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| < 1\}$$

$$\text{Int}(A) = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$$

$$\text{Adh}(A) = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

### Example 2.51.

$$A = \{(x, y) \mid x > 0, y = \sin(\frac{1}{n})\}$$

$$\text{Adh}(A) = A \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \quad \text{Int}(A) =$$

## 2.11 Compacité

**Definition 2.52.** Soit  $F \subset E$ . Un recouvrement ouvert de  $F$  est une collection  $(U_i)_{i \in I}$  où  $U_i$  sont des ouverts et  $F \subset \cup_{i \in I} U_i$  ("les  $U_i$  recouvrent  $F$ ")





Figure 2.13: recouvrement-ouvert

**Example 2.53.** •  $U_x = B(x, \frac{1}{2})$

- $\bigcup_{x \in F} U_x$  contient  $F$
- $(U_x)_{x \in F}$  recouvrement ouvert de  $F$

**Definition 2.54.**  $K \subset E$  est compact si de tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $F$  on peut extraire un sous-recouvrement fini: je peux choisir  $i_1, \dots, i_n \in I$  tels que

$$F \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

**Property.** Un ensemble fini est compact.

$$F = \{a_1, \dots, a_p\} \quad a_j \in E$$

$(U_i)_{i \in I}$  recouvre  $F$ . Je choisisit  $a_j$  (point de  $F$ ), il existe un  $i \in I$  noté  $i(j)$  tel que

$$a_j \in U_{i(j)} \quad F \subset U_{i(1)} \cup \dots \cup U_{i(p)}$$

**Theorem 2.55.** Caractérisation à l'aide de suites.

$K \subset E$  est compact ssi toute suite d'éléments de  $K$  admet une sous-suite qui converge vers un élément de  $K$ .



Figure 2.14: compactness-with-sequences

**Example 2.56.** •  $E = \mathbb{R}^2$

- $F = B(x_0, r)$  pas compact
- $x_n \in F, x_n \rightarrow x, x \notin F$
- si  $y_n = x_{\phi(n)}, y_n \rightarrow x$  mais  $x \notin F$



Figure 2.15: suite-sans-sous-suite-convergente

**Example 2.57.**

$$F = \{(x, y) : x \geq 0, -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

$u_n = (n, 0)$  ( $u_n$ ) suite dans  $F$  sans sous-suite convergente.

**Proposition 2.58.** 1.  $K$  compact  $\Rightarrow K$  fermé et borné. (réciproque est fausse en général!)

2. Si  $K$  compact et  $F$  fermé, alors  $K \cap F$  est compact.

3. Si  $K$  compact, toute suite de Cauchy dans  $K$  converge dans  $K$

**Proof.** 1. Soit  $K$  compact.  $K$  fermé si  $(u_n)$  suite dans  $K$  qui converge vers  $u$ , alors  $u \in K$ .

clair:  $(u_n)$  a une suite-suite  $v_n = u_{\phi(n)}$  avec  $v_n \rightarrow v \in K, u_n \rightarrow u$ , donc  $v_n \rightarrow u \Rightarrow u = v \Rightarrow u \in K$

$K$  est borné:

Supposons  $K$  non borné. Je fixe  $a \in E, \forall n \in \mathbb{N}$

$$K \not\subset B(a, n)$$

donc, il existe  $u_n \in K$  tel que

$$d(a, u_n) \geq n$$

$(u_n)$  n'a pas de sous-suite convergente: si  $v_n = u_{\phi(n)}$  sous-suite

$$(\text{contradiction!}) \begin{cases} d(a, v_n) \geq \phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \\ \text{si } v_n \rightarrow v, d(a, v_n) \rightarrow d(a, v) \end{cases}$$

2.  $K$  compact et  $F$  fermé.  $(u_n)$  une suite dans  $K \cap F$ .  $u_n \in K$ .  $\exists$  sous-suite  $v_n = u_{\phi(n)}$  avec  $v_n \rightarrow x \in K$ .  $v_n \in F, v_n \rightarrow x, F$  fermé donc  $x \in F, x \in K \cap F$ .
3. Sout  $(u_n)$  suite de Cauchy dans  $K$ .  $(u_n)$  a une sous-suite  $v_n = u_{\phi(n)}$  qui converge vers  $x \in K$ .  $u_n \rightarrow x \in K$

□

### 2.11.1 Compacité dans $\mathbb{R}^n$ avec la distance usuelle

**Theorem 2.59.** (Borel-Lebesgue)

dans  $\mathbb{R}^n$  avec la distance usuelle  $K$  est compact ssi  $K$  est fermé et borné

**Proposition 2.60.** Les boules fermées  $B_f(x_0, r)$  sont compactes dans  $\mathbb{R}^n$ .

- Implique le théorème: Soit  $K$  fermé et borné.  $K$  borné, donc  $K \subset B_f(0, r)$  avec  $r$  grand, donc  $K = K \cap B_f(0, r)$ . Donc  $K$  compact.

**Proof.** de la prop. 2.60

1.  $n = 1$ . À montrer:  $[a, b]$  est compact.

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $[a, b]$ . Soit  $F$ : les  $x \in [a, b]$  tels que  $[a, x]$  est recouvert par un nombre fini de  $U_i$ .

But: montrer que  $b \in F$ ! (si  $x \in F$ , et  $x' \leq x, x' \in F$ )

- (a)  $F \neq \emptyset$ :  $a \in F, [a, a] = \{a\}$
- (b)  $c = \sup(F)$ . On montre que  $c = b$

Supposons que  $c < b$ .

- $c$  appartient à un des  $U_i$  noté  $U_{i_0}$
- $U_{i_0}$  est ouvert,  $c \in U_{i_0}$  donc  $\exists \delta_0 > 0$  tel que  $]c - \delta_0, c + \delta_0[ \subset U_{i_0}$
- $c = \sup(F)$ :  $\forall \delta > 0, \exists x_\delta \in F$  avec  $c - \delta < x_\delta \leq c$

$$\delta = \delta_{0,2} \quad \exists x_{\delta_0} \in F, c - \delta_{0,2} < x_{\delta_0}$$

$[a, x_{\delta_0}]$  recouvert par  $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$  et  $]c - \delta_0, c + \delta_0[ \subset U_{i_0}$  donc  $[a, c + \delta_{0,2}]$  est recouvert par  $U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ , donc  $c + \delta_{0,2} \in F$  contredit que  $c = \sup(F)$ . Donc  $c = b$ .  
 $F$  c'est  $[a, b[$  ou  $[a, b]$ .  $b \in F \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  tq  $[a, b] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}, [a, b]$  compact.

□

## 2.12 Limites et continuité

### 2.12.1 Limites

Je prends  $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$  deux espaces métriques et  $F : E_1 \rightarrow E_2$ .  $x_0 \in E_1, l \in E_2$ .

#### Definition 2.61. .

1. Limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = l$$

si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tq si  $d_1(x_0, x) < \delta$  alors  $d_2(l, F(x)) < \varepsilon$

2.  $F$  continue en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$

3.  $F$  est continue (sur  $E$ ) si elle est continue en tout  $x_0$  de  $E$

**Proposition 2.62.** Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1.  $F : (E_1, d_1) \rightarrow (E_2, d_2)$  est continue.
2.  $\forall U_2 \subset E_2$  ouvert,  $F^{-1}(U_2)$  est ouvert dans  $E_1$ .
3.  $\forall F_2 \subset E_2$  fermé,  $F^{-1}(F_2) \subset E_1$  est fermé.
4.  $\forall (x_n)$  suite dans  $E_1$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$$

#### Example 2.63.

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \sin(y) - e^x > 1\}$$

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto F((x, y)) = x \sin(y) - e^x$$

évidemment continue.

$$U = F^{-1}(\underbrace{]1, +\infty[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$$

**Proof.**  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$ : Hyp:  $F$  continue et  $U_2 \subset E_2$  est ouvert.

Conclusion:  $U_1 = F^{-1}(U_2)$  est ouvert?

Je fixe  $x_0 \in U_1$  ( $F(x_0) \in U_2$ ).

1.  $U_2$  ouvert  $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$  tq  $B_2(F(x_0), \varepsilon_0) \subset U_2$

2.  $F$  continue en  $x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } d_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_2(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$$

$$x \in B_1(x_0, \delta) \Rightarrow F(x) \in B_2(F(x_0), \varepsilon)$$

$\delta_0 =$  le  $\delta$  qui marche pour  $\varepsilon_0$

$$x \in B_1(x_0, \delta_0) \Rightarrow F(x) \in B_2(F(x_0), \varepsilon_0)$$

Donc  $B_1(x_0, \delta_0) \subset F^{-1}(U_2)$ . Donc  $F^{-1}(U_2)$  ouvert.

$2 \Rightarrow 3: F^{-1}(U_2)^c = F^{-1}(U_2^c)$

□

## Chapter 3

# Fonctions de plusieurs variables

Cadre:  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$   $D \subset \mathbb{R}^n$

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^p$$

sur  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$  distances usuelles, sur  $D$  la distance héritée de  $\mathbb{R}^n$ .  
avec des coordonnées cartésiennes

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_p(x_1, \dots, x_n))$$

où  $F_i : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ continue}$$

on connaît:

**Lemma 3.1.**

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ continue ssi:}$$

chaque  $F_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  est continue

**Proof.**  $Y_n = (Y_{1,n}, \dots, Y_{p,n})$  suite des  $\mathbb{R}^p$ .  $Y_n \rightarrow Y$  ssi  $Y_{i,n} \rightarrow Y_i$  ( $1 \leq i \leq p$ )

□

# Bibliography

- [1] Christian Gérard. *Analyse et Géométrie (OLMA251)*. fre.
- [2] Christian Gérard. *Cours Magistral d'Analyse et Géométrie (OLMA251) à l'Université Paris-Saclay*. 2024-2025.