

Analyse Numérique avec Python - Aide-Mémoire

Basé sur les notes de Yehor Korotenko (Prof. Jean-Baptiste APOUNG KAMGA)

April 28, 2025

1. Interpolation Polynomiale

Définition

Soit $(x_i, y_i)_{i=0, \dots, N-1}$ un nuage de N points distincts. Interpoler consiste à trouver un polynôme $P_{N-1}(x)$ de degré au plus $N-1$ tel que $P_{N-1}(x_i) = y_i$ pour tout i . Si $y_i = f(x_i)$, P_{N-1} est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f .

Polynôme de Lagrange

Existence et Unicité (Thm 2.17): Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i L_i(x) \quad \text{où} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Erreur d'interpolation (Thm 2.19): Si $f \in C^N([a, b])$ et P_{N-1} interpole f aux points $x_0, \dots, x_{N-1} \in [a, b]$:

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in]a, b[\text{ tel que } f(x) - P_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\xi_x)}{N!} \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i)$$

On note $\omega_N(x) = \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i)$. **Python:** `from scipy.interpolate import lagrange; p = lagrange(x_nodes, y_nodes)`

Méthode des Différences Divisées (Newton)

Soit $f[x_0, \dots, x_k]$ la différence divisée d'ordre k . $f[x_i] = y_i$ $f[x_i, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$ Le polynôme de Newton est:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_{N-1}] \prod_{i=0}^{N-2} (x - x_i)$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega_k(x) \quad \text{où} \quad a_k = f[x_0, \dots, x_k] \quad \text{et} \quad \omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Phénomène de Runge et Polynômes de Tchebychev

L'interpolation avec des points équidistants peut mal converger. Les **points de Tchebychev** sur $[-1, 1]$ minimisent $\|\omega_N(x)\|_\infty$:

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2N}\right) \quad \text{pour } j = 0, \dots, N-1 \quad (\text{racines de } T_N(x))$$

Sur $[a, b]$: $t_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_j$. Polynômes de Tchebychev: $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$.

2. Intégration Numérique (Quadrature)

But: Calculer $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. **Formule de quadrature:** $\hat{I}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(x_i)$. Une formule est d'ordre p si elle est exacte pour tout polynôme de degré $\leq p-1$.

Formules de Newton-Cotes (points x_i équidistants)

Erreur (générale): Si la formule est d'ordre p , l'erreur $E(f) = I(f) - \hat{I}(f)$ est: $E(f) = C \cdot h^{p+1} f^{(p)}(\xi)$ (pour formule élémentaire, C constante) ou $E(f) = C \cdot (b-a)h^p \|f^{(p)}\|_\infty$.

- **Rectangle à gauche (élémentaire α, β):** $\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx (\beta - \alpha)f(\alpha)$. Ordre 1. Erreur: $E_e(f) = \frac{f'(\zeta)}{2}(\beta - \alpha)^2$.

- **Point Milieu (élémentaire α, β):** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx (\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Ordre 2. Erreur: $E_e(f) = \frac{f''(c)}{24}(\beta - \alpha)^3$.
- **Trapèze (élémentaire α, β):** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha) + f(\beta))$. Ordre 2. Erreur: $E_e(f) = -\frac{f''(c)}{12}(\beta - \alpha)^3$.
- **Simpson (élémentaire α, β):** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx \frac{\beta-\alpha}{6}\left(f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)\right)$. Ordre 4. Erreur: $E_e(f) = -\frac{f^{(4)}(c)}{2880}(\beta - \alpha)^5$.

Formules composites: On subdivise $[a, b]$ en M sous-intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{M}$ et on applique la formule élémentaire sur chaque sous-intervalle. Ex. Trapèze composite: $I_T(f) = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_M)}{2} + \sum_{i=1}^{M-1} f(x_i)\right)$. Erreur: $E_T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)$.

Quadrature de Gauss-Legendre

Points x_i et poids w_i choisis pour maximiser l'ordre. Pour N points, la formule est exacte pour les polynômes de degré $\leq 2N - 1$. Sur $[-1, 1]$: $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$. Les x_i sont les racines du N -ième polynôme de Legendre $L_N(x)$. $L_0(x) = 1, L_1(x) = x, (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$.

Python: `from scipy.integrate import quad; I, err = quad(f, a, b)`

3. Résolution Approchée d'Équations Différentielles Ordinaires (EDO)

Problème de Cauchy: $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, pour $t \in [t_0, T]$. Discrétisation: $t_n = t_0 + n\Delta t$. On cherche $x_n \approx y(t_n)$. Forme générale des schémas à un pas explicites: $x_{n+1} = x_n + \Delta t \Phi(t_n, x_n, \Delta t)$.

Schémas Explicites à un Pas

- **Euler explicite**

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n, x_n)$$

Ordre local de consistance: 1. Erreur globale: $O(\Delta t)$.

- **Euler implicite**

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_{n+1}, x_{n+1})$$

- **Clank-Nicolas**

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}))$$

- **Point-Milieu**

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, x_n)\right)$$

Ordre local: 2. Erreur globale: $O(\Delta t^2)$.

- **de Heun**

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + \Delta t f(t_n, x_n)))$$

Ordre local: 2. Erreur globale: $O(\Delta t^2)$.

Consistance, Stabilité, Convergence

- **Erreur locale de troncature:** $\xi_n(\Delta t) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t \Phi(t_n, y(t_n), \Delta t)$. Le schéma est **consistant d'ordre q** si $\|\xi_n(\Delta t)\| = O(\Delta t^{q+1})$.
- **Stabilité:** Un schéma est stable si de petites perturbations des données initiales ou des calculs n'entraînent pas de grandes déviations de la solution numérique. Pour Φ Lipschitzienne en y de constante A : stable avec constante $S = e^{A(T-t_0)}$.
- **Convergence (Thm de Lax):** Pour un problème bien posé, un schéma consistant est convergent si et seulement si il est stable. Si le schéma est stable et consistant d'ordre q , alors il est convergent d'ordre q : $\|y(t_n) - x_n\| = O(\Delta t^q)$.

4. Résolution Approchée d'Équations Ordinaires (EO): $f(x) = 0$

Méthode de Dichotomie (Bissection)

Principe: Soit f continue sur $[a, b]$ avec $f(a)f(b) < 0$. À l'étape k , $I_k = [a_k, b_k]$. $c_k = (a_k + b_k)/2$. Si $f(a_k)f(c_k) < 0$, $I_{k+1} = [a_k, c_k]$. Sinon $I_{k+1} = [c_k, b_k]$. **Convergence:** Linéaire. $|x^* - c_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$. **Coût:** 1 éval. de f par itération.

Méthode de Fausse Position (Regula Falsi)

Principe: Similaire à la dichotomie, mais c_k est l'intersection de la sécante passant par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ avec l'axe des x . $c_k = b_k - f(b_k) \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}$. **Convergence:** Linéaire (souvent plus rapide que la dichotomie, mais peut être lente si une extrémité reste fixe).

Méthode du Point Fixe

Problème: Trouver x^* tel que $x^* = g(x^*)$ (équivalent à $f(x^*) = 0$ si $g(x) = x - f(x)$ ou autre transformation). **Itération:** $x_{k+1} = g(x_k)$. **Convergence (Thm du Point Fixe):** Si $g(I) \subset I$, I fermé, et g est contractante sur I (i.e., $\exists K < 1$ t.q. $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$), alors g a un unique point fixe x^* dans I et la suite (x_k) converge vers x^* . Si $g \in C^1(I)$ et $|g'(x)| \leq K < 1$ sur I , alors g est contractante. **Ordre de convergence:**

- Si $g'(x^*) \neq 0$, convergence linéaire avec $K_1 = |g'(x^*)|$.
- Si $g'(x^*) = \dots = g^{(p-1)}(x^*) = 0$ et $g^{(p)}(x^*) \neq 0$, convergence d'ordre p .

Méthode de Newton-Raphson

Principe: Approximation de f par sa tangente en x_k . $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. C'est un cas particulier de point fixe avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On a $g'(x^*) = 0$ si $f'(x^*) \neq 0$. **Convergence:**

- Quadratique (ordre 2) si $f'(x^*) \neq 0$ (racine simple).
- Linéaire si $f'(x^*) = 0$ (racine multiple d'ordre $m > 1$). $K_1 = 1 - 1/m$.

Coût: 1 éval. de f et 1 éval. de f' par itération. **Python (pour point fixe):**

```
def PointFixe(g, x0, eps, IterMax):
    # ... (implementation)
def Newton(f, f_prime, x0, eps, IterMax):
    g = lambda x: x - f(x)/f_prime(x)
    return PointFixe(g, x0, eps, IterMax)
```