Нотатки до курсу Лінійної Алгебри 2

Єгор Коротенко

15 листопада 2025 р.

Анотація

Це мої нотатки, зроблені для курсу лінійної алгебри 2 в Університеті Париж-Сакле, який викладає професор Йоганнес Аншютц. Основна частина цих нотаток посилається на книгу "Лінійна алгебра написану Жозефом Гріфоном [2].

Мої нотатки з інших предметів доступні на моєму сайті: dobbikov.com

Ці нотатки перекладені українською та англійською мовами за допомогою інструменту sci-trans-git [3]

Зміст

Розділ 1

Евклідові простори

«Класична» лінійна алгебра розглядає векторні простори, де мова йде лише про лінійні комбінації, підпростори, бази, матриці тощо. У певний момент цього стає недостатньо. Щоб мати можливість досліджувати сильніші, складніші та корисніші поняття, нам потрібно буде обчислювати довжину вектора, кути між двома векторами, відносне розташування між векторами тощо. Щоб мати можливість вивчати ці концепції, ми вводимо поняття скалярного добутку (білінійної форми) і, отже, векторних просторів, забезпечених цим добутком.

Цей розділ присвячений вивченню двох основних понять:

- скалярні добутки
- евклідові простори

1.1 Вступ

Векторні простори, які розглядаються в цьому розділі, є дійсними. Припускається, що E є $\mathbb{R}$-векторним простором.

Скалярний добуток:

Definition 1.1. Білінійна форма на E — це відображення

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B((u, v)) \end{aligned}$$

що задовольняє наступні умови $\forall u, v, w \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2. $B(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(v, w)$

B називається

1. симетрична якщо $B(u, v) = B(v, u)\ \forall u, v \in E$
2. позитивна якщо $B(., u) \geq 0\, \forall u \in E$
3. визначена якщо $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Notation. Скалярний добуток позначається: $< u, v >$

Example 1.2. .

1. $E = \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in E$

$$< X, Y >:= \sum_{n=1}^{n} x_i y_i$$

Його називають "канонічним скалярним добутком"(або звичайним)

2. $E = \mathbb{R}^2$ і $< X, Y >= 2x_1y_1 + x_2y_2$
3. $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}) \ni f, g$ (простір неперервних функцій)

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$< A, B >:= Tr(A^t B)$$

Proposition 1.3. Ненульовий векторний простір має нескінченну кількість різних скалярних добутків.

Definition 1.4. Евклідовий простір — це пара $(E, < . >)$, де E є $\mathbb{R}$-векторним простором скінченновимірним та $< . >$ є скалярним добутком на E.

Property. Нехай $(E, < . >)$ евклідів простір. Покладемо:

$$\|X\| := \sqrt{< X, X >} \qquad X \in E$$

норма (або довжина) X. (Вона добре визначена, оскільки $< ., . >$ завжди позитивний)

Property. Нехай $X, Y \in E$, тоді:

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|^2$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
\|X + Y\|^2 = \sqrt{\langle X + Y, X + Y\rangle}^2 &= \langle X + Y, X + Y\rangle \\
&= \langle X, X + Y\rangle + \langle Y, X + Y\rangle \\
&= \langle X, X\rangle + \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle + \langle Y, Y\rangle \\
&= \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|
\end{aligned}$$

□

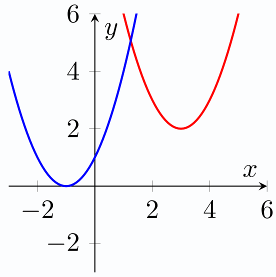
Lemma 1.5. нерівність Коші-Шварца Маємо

$$| < u, v > | \le \|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall u, v \in E$$

з рівністю тоді і тільки тоді, якщо u та v колінеарні, тобто $\exists t \in R$ такий, що $u = tv$ або $v = tu$

Proof. Якщо $v = 0$, зрозуміло
Якщо $v \neq 0$ розглянемо $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|u + tv\|^2 &=< u + tv, u + tv > \\
&=< u, u + tv > +t < v, u + tv > \\
&=< u, u > +t < u, v > +t < v, u > +t^2 < v, v > \\
&= \|u\|^2 + 2t < u, v > +t^2\|v\|^2 = f(t)
\end{aligned}$$



Випадок 1: $f(t)$ не має різних коренів

$$\begin{aligned}\Delta = 4 < u, v >^2 = 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow < u, v >^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\ \Rightarrow | < u, v > | \leq \|u\|\|v\|\end{aligned}$$

Випадок 2: $f(t)$ має лише один корінь:

$$\begin{aligned}&\Delta = 0 \\ \Rightarrow &\exists t \in \mathbb{R} \text{ така що } \|u + tv\|^2 = 0 \\ \Rightarrow &u + tv = 0 \Rightarrow u = -tv\end{aligned}$$

Наступне визначення буде вивчено в курсі аналізу:

Definition 1.6. Кажуть, що $N : E \to \mathbb{R}_+$ є нормою, якщо:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

Lemma 1.7. Відображення

$$\sqrt{< ., . >} = \|.\| : E \to \mathbb{R}_+$$

називається евклідовою нормою.

Proof. 1), 2) зроблено

3) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\Rightarrow \|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Proposition 1.8. Маємо наступні тотожності $\forall u, v \in E$

1. Тотожність паралелограма:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u^2\| + \|v\|^2)$$

2. Тотожність поляризації:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

Proof. .

1.

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2\end{aligned}$$

2. $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$

Маємо:

- $(1)+(2)$: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- $(1)-(2)$: $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle$

1.2 Ортогональність

Нехай E буде $\mathbb{R}$-векторним простором і $\langle,\rangle$ скалярним добутком на E.

Definition 1.9. $u, v \in E$ називаються ортогональними якщо $< u, v >= 0$. Позначають $u \perp v$

- Дві підмножини A, B з E є ортогональними якщо:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad < u, v >= 0$$

- Якщо $A \subseteq E$ називають ортогональним до A, що позначається $A^\perp$ множину

$$A^\perp = \{u \in E \mid < u, v >= 0 \quad \forall v \in A\}$$

  Також відомий як ортогональне доповнення A

- Сімейство $(v_1, \dots, v_n)$ векторів з E називається ортогональним, якщо $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$. Воно називається ортонормованим, якщо воно ортогональне, і крім того $\|v_i\| = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Example 1.10. $E = \mathbb{R}^n$, $<,>$ канонічний скалярний добуток

$$v_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$$

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 \text{ якщо } i = j \\ 0 \text{ якщо } i \neq j \end{cases}$$

$(v_1, \dots, v_n)$ є канонічним базисом

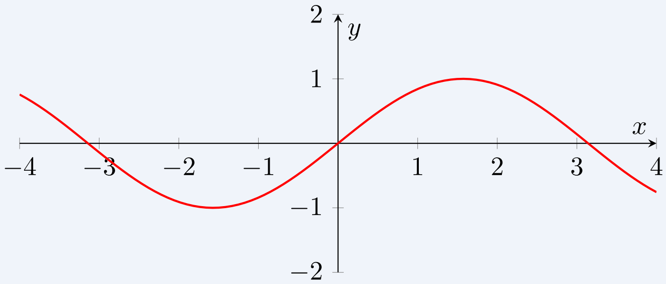
Proposition 1.11. 1. Якщо $A \subseteq E$ тоді $A^\perp$ є векторним підпростором E

2. Якщо $A \subseteq B$ тоді $B^\perp \subseteq A^\perp$
3. $A^\perp = Vect(A)^\perp$
4. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Proof. Вправа

Example 1.12. 1. $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$

$$< f, g > := \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$$



Тоді, $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ ортогональні: $2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^{1} \cos(t)\sin(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin(2t)\, dt = 0$$

Definition 1.13. Якщо E є евклідовим простором, ми називаємо "дуал E"множину

$$L(E,\mathbb{R}) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ є лінійною}\}$$

Його позначають E^*. Елемент $f \in E^*$ називається лінійною формою.

Нагадаємо:

Proposition 1.14. Якщо F, F' — два скінченновимірні в.п., то $dim(L(F,F')) = dim(F) \cdot dim(F')$ Зокрема, $dim(F^*) = dim(F)$. Справді, якщо $n = (e_1, \ldots, e_p)$ є базисом F є $n' = (e'_1, \ldots, e'_q)$ є базисом F', то відображення

$$\begin{aligned} : L(F,F') &\longrightarrow Mat_{f\times p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (f) = Mat_{n,n'}(f). \end{aligned}$$

є ізоморфізмом. Отже $dim(F,F) = qp$

Theorem 1.15. Теорема про ранг: Якщо F є скінченновимірним векторним простором і $f : F \to F'$ лінійне, тоді $dim(F) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$

Proposition 1.16. Якщо F, F' є два векторні простори скінченновимірні такі що $dim(F) = dim(F')$ і $f : F \to F'$ лінійне, тоді f є ізоморфізмом $\Leftrightarrow Ker(f) = 0$

Proof. Нагадаємо, що якщо G, G' є скінченновимірними підпросторами в тому ж векторному просторі, тоді:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ і } dim(G) = dim(G')$$

$\Rightarrow$) f ін'єктивне $\Rightarrow Ker(f) = 0$
$\Leftarrow$) Нехай $Ker(f) = 0$.
Тоді, обов'язково $dim(Ker(f)) = 0$ і за теоремою про ранг ми маємо $dim(F) = dim(Im(f))$, тому $Im(f) = F'$

Lemma 1.17. лема Ріса:
Нехай $(E, \langle .,. \rangle)$ скінченновимірний евклідовий простір і $f \in E^*$. Тоді, $\exists! u \in E$ такий що $f(x) = \langle u, x \rangle \quad \forall x \in E$. Лінійна форма f задається скалярним добутком з вектором.

Notation. Для будь-якого $v \in E$ позначаємо через f_v відображення:

$$\begin{aligned} f_v : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_v(x) =< v, x > . \end{aligned}$$

f_v є лінійним $\forall v \in E$ тобто E^*

Proof. лема Ріса
Розглянемо відображення

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

ϕ є лінійним (вправа). ϕ є ін'єктивним:

$$v \in Ker(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

зокрема для x = v, маємо:

$$0 = f_v(v) =< v, v >\Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} dim(E) = dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ є ізоморфізмом} \\ &\Rightarrow \phi \text{ бієктивним} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists! n \in E \text{ така що } \phi(n) = f, \text{ тобто } f(x) =< n, x > \forall x \in E$$

У цьому випадку $E = \mathbb{R}^n$, лема Ріса дуже проста для розуміння:
Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ лінійна форма. Якщо позначимо $(e_1, \dots, e_n)$ канонічний базис $\mathbb{R}^n$, будь-який $x \in \mathbb{R}^n$ записується

$$x = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i f(e_i) =< (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (a_1, \dots, a_n) >=< (a_1, \dots, a_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) >$$

1.3 Ортонормовані базиси

Нехай $(E, \langle , \rangle)$ буде евклідовим простором і $F \subset E$ векторним підпростором ($dim(F) < \infty$), оскільки $dim(E) < \infty$.

Note.

$$F^\perp := \{x \in E \mid \langle X, Z \rangle = 0 \forall z \in F\}$$

ортогонал до F.

Theorem 1.18. Маємо $E = F \oplus F^\perp$.
Зокрема, $dim(F^\perp) = dim(E) - dim(F)$ і $F = (F^\perp)^\perp$

Доведення. Ми повинні показати, що:

1. $F \cap F^\perp = \emptyset$

2. $E = F + F^{\perp}$ тобто $\forall x \in E, \exists x' \in F,\ x'' \in F^{\perp}$ такий що $x = x' + x''$

1. Нехай $x \in F \cap F^{\perp}$
$\Rightarrow \langle X, Z \rangle = 0 \, \forall Z \in F$ оскільки $x \in F \Rightarrow \langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 (\langle , \rangle$ визначено)

2. Нехай $x \in E$. Розглянемо $f_x \in E^*$, тобто $f_x : E \to \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y \rangle$ і $f := f_{x|F} : F \to \mathbb{R} \Rightarrow f \in E^*$ Лема Ріса $\Rightarrow \exists! x' \in F$ такий що $f = f_{x'} : F \to \mathbb{R}, z \mapsto \langle x', z \rangle$
$\Rightarrow f_x(z) = f_{x'}(z) = f(z) \, \forall z \in F$ (Увага: не рівність для всіх z у E)
Покладемо $x'' := x - x'$, тобто $x = x' + x'' \in F$. Доведемо $x'' \in F^{\perp}$.
Якщо $z \in F$, $\langle x'', z \rangle = \langle x - x', z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x', z \rangle = 0$. Отже $x'' \in F^{\perp}$ і $E = F \oplus F^{\perp}$ $(dim(E) = dim(F) + dim(F^{\perp}))$
$F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$ оскільки $\langle x, z \rangle = 0 \, \forall x \in F \, \forall z \in F^{\perp}$

$$dim(F) = dim(E) - dim(F^{\perp})$$

оскільки $E = G \oplus G^{\perp}$, отже $dim(G) = dim(E) - dim(G^{\perp})$ для $G = F^{\perp}$, $dim(F^{\perp}) = dim(G)$

□

Definition 1.19. Нехай E — векторний простір, оснащений скалярним добутком $\langle , \rangle$

- Сім'я $(v_i)_{i \geq 0}$ векторів з E називається ортогональною, якщо для $i \neq j$ ми маємо $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, тобто $v_i \perp v_j$
- Ортонормальна сім'я з E — це ортогональна сім'я $(v_i)_{i \geq 0}$, така що до того ж $\|v_i\| = 1$ для $i \geq 0$

Example 1.20. 1. $E = \mathbb{R}^n$ оснащене стандартним скалярним добутком. Канонічний базис $(e_1, \ldots, e_n)$ є ортогональним, тому що

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ якщо } i = j \\ 0 \text{ якщо } i \neq j \end{cases}$$

2. У $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ оснащене $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \, dt$. Сімейство $(\cos(t), \sin(t))$ є ортогональним. Сімейство $(1, t^2)$ не є ортогональним:

$$\left\langle 1, t^2 \right\rangle = \int_{-1}^{1} 1 t^2 \, dt = \frac{2}{3} \neq 0$$

Proposition 1.21. Ортогональна сім'я, що складається з ненульових векторів, є лінійно незалежною. Зокрема, ортонормована сім'я є лінійно незалежною.

Proof. Припустимо, $(v_1, \ldots, v_n)$ ортогональні з $v_i \neq 0 \, \forall i = 1, \ldots, n$
якщо $\sum_{j=1}^{n} \underset{\in \mathbb{R}}{\alpha_i} v_i = 0$, тоді

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} 0 = \left\langle v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i \underset{\neq 0}{\|v_i\|^2}$$

Отже, $\alpha_i = 0 \, \forall i = 1, \ldots, n$.
Якщо $(v_1, \ldots, v_n)$ є ортонормальною, тоді $\|v_i\| = 1$. Отже, $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. □

Intuition. Ортогональні (перпендикулярні) вектори ніколи не знаходяться один в одному (тобто $e_i = \lambda e_j$ неможливо), якщо вектори лінійно залежні, або кут $<$ 90ž (отже, вектори не є ортогональними, абсурд), (вони знаходяться один в одному, вони не є ортогональними, абсурд). Отже, вони справді лінійно незалежні.

Definition 1.22. $(E, \langle,\rangle)$ евклідів простір. Сім'я $B = (e_1, \ldots, e_n)$ є ортонормальним базисом (де БОН), якщо вона є базисом і ортонормальною сім'єю.

Theorem 1.23. $(E, \langle,\rangle)$ евклідів простір. Тоді він допускає БОН.

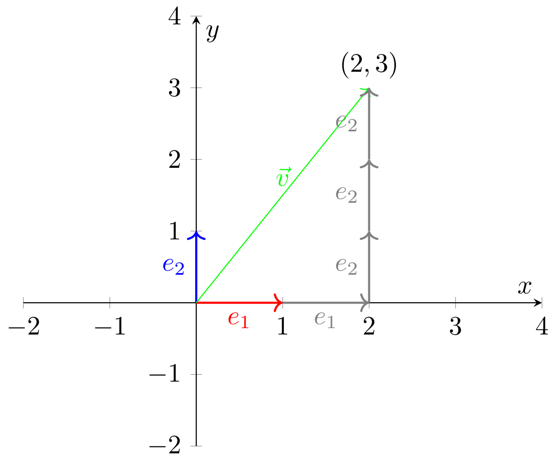
Proof. Нехай $n := dim(E)$. Нехай $(e_1, \ldots, e_p)$ ортогональна сім'я (з точки зору потужності p) така що $e_i \neq 0\, \forall i = 1, \ldots, p$.
Припустимо суперечливо, що $p < n$. Покладемо $F = Vect(e_1, \ldots, e_p)$. Тоді, $E = F \oplus F^\perp$ і $dim(F) \leq p < n$. Отже $F^\perp \neq \{0\}$. Нехай $x \in F^\perp$, $x \neq 0$. Тоді, $(e_1, \ldots, e_p, x)$ є ортогональною потужності $> p$. Отже, $p = n$ і $(e_1, \ldots, e_n)$ є базисом E. Щоб отримати ортонормальну сім'ю $(e'_1, \ldots, e'_n)$ достатньо взяти $e'_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i\, \forall i = \{1, \ldots, n\}$. □

Proposition 1.24. Нехай $(E, \langle,\rangle)$ евклідів простір, і нехай $(e_1, \ldots, e_n)$ ортонормальний базис E. Якщо $x \in E$, маємо:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Іншими словами, дійсне число $\langle x, e_i \rangle$ є $i^{\text{-та}}$ координата x у базисі $(e_1, \ldots, e_n)$.

Intuition. Ортогональність базису спрощує нам життя. Але спочатку невеликий вступ. Нехай векторний простір $E = \mathbb{R}^2$ і базис $(e_1, e_2) = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$. Нехай вектор $\vec{v} = (2, 3)$:



Отже, ми можемо записати $\vec{v} = (2, 3) = 2 \cdot \vec{e_1} + 3 \cdot \vec{e_2}$. Значення x та y (координати $\vec{v}$) показують, скільки частин кожного базисного вектора (число може бути $\in \mathbb{R}$) потрібно взяти і просумувати, щоб отримати $\vec{v}$. (Простіше кажучи: наскільки далеко ми повинні піти вліво і вгору).

У ортонормальному базисі $\langle v, e_i \rangle$ вказує, скільки потрібно взяти вектора e_i, щоб утворити вектор $\vec{v}$, а $\vec{e_i}$ задає напрямок. Звідси $\langle v, e_1 \rangle$ еквівалентно 2, і $\langle v, e_2 \rangle$ до 3, потім:

$$\vec{v} = \underbrace{\langle v, e_1 \rangle}_{=2} \cdot \vec{e_1} + \underbrace{\langle v, e_2 \rangle}_{=3} \cdot \vec{e_2}$$

Зазвичай, щоб знайти координати в базисі, слід розв'язувати лінійну систему, тоді як ортонормальний базис дозволяє отримати їх шляхом обчислення скалярного добутку з кожним вектором базису, що значно простіше.

Proof. Покладемо $y := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Тоді,

$$\begin{aligned}
&\forall j = 1, \ldots, n, \\
&\langle x - y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle}_{\substack{\text{винесено} \\ \text{як константу}}} \langle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle \\
&- \left(\langle x, e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1, e_j \rangle}_{=0} + \ldots + \langle x, e_{j-1} \rangle \underbrace{\langle e_{j-1}, e_j \rangle}_{=0} + \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} + \langle x, e_{j+1} \rangle \underbrace{\langle e_{j+1}, e_j \rangle}_{=0} + \ldots + \langle x, e_n \rangle \underbrace{\langle e_n, e_j \rangle}_{=0} \right) \\
&(\forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ оскільки це скалярний добуток ортогональних векторів}) \\
&(\forall j\ \langle e_j, e_j \rangle = 1 \text{ оскільки це скалярний добуток того ж вектора}) \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \underset{=1}{\langle e_j, e_j \rangle} = 0
\end{aligned}$$

Отже, $x - y \in Vect(e_1, \ldots, e_n)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$. Отже $x = y$ □

Corollary 1.25. $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$

Proof. Якщо $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ тому

$$\|x\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

□

1.4 Матриці та скалярні добутки

Proposition 1.26. Нехай $(E, \langle , \rangle)$ евклідовий простір та $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ ортонормований базис. Нехай $f \in \mathcal{L}(E, E)$ та $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ матриця, що представляє f у ε, тобто, $A = Mat_{\varepsilon}(f)$

$$a_{i,j} = \langle f(e_i), e_j \rangle \ \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Proof. A є матрицею, стовпцями якої є вектори $f(e_j)$, записані в базисі ε:

$$A = (f(e_1)| \ldots |f(e_n)) \quad f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Оскільки $\forall v \in E$, $v = c_1 e_1 + \ldots c_n e_n$ тому $f(v) = c_1 f(e_1) + \ldots c_n f(e_n)$ за лінійністю, отже нам залишається дослідити кожен $f(e_j)$

$$f(e_j) = a_{1,j}e_1 + \dots a_{n,j}e_n \Rightarrow$$
$$\langle f(e_j), e_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\langle e_k, e_i\rangle = a_{k,j}$$

car $\langle e_k, e_j\rangle = \begin{cases} 0 \text{ якщо } k \neq j \\ 1 \text{ якщо } k = j \end{cases}$ Отже:

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i\rangle$$

□

Матриця векторного добутку дуже корисна в лінійній алгебрі. Перш ніж дати визначення:

Нехай E векторний простір скінченної розмірності n, простір K і білінійна форма $b : E \times E \longrightarrow K$. Якщо $\{e_1, \dots, e_n\}$ є базисом E, то: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ і $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, тоді маємо:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j)$$

b отже, визначається знанням значень $b(e_i, e_j)$ на базі.

Definition 1.27. Називається матрицею b у базисі $\{e_i\}$ матриця:

$$M(b)_{e_i} = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \dots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \dots & b(e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b(e_n, e_1) & \dots & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Таким чином, елемент i-того рядка та j-того стовпця є коефіцієнтом $x_i y_j$.

Example 1.28. Матриця канонічного скалярного добутку в $\mathbb{R}^3$ дорівнює:

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$Mat(\langle,\rangle)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.29. скалярний добуток, представлений матрицею.

Зазначимо:

$$\underbrace{A = M(b)_{e_i}}_{\text{матриця скалярного добутку}} \qquad \underbrace{X = M(x)_{e_i}}_{\substack{\text{координати } x \\ \text{у базисі } e_i}} \qquad \underbrace{Y = M(y)_{e_i}}_{\substack{\text{координати } y \\ \text{у базисі } e_i}} \qquad (x, y \in E)$$

Тоді маємо:

$$b(x, y) = X^t A Y$$

Example 1.30. Знову розглянемо приклад з $b = \langle,\rangle$ канонічний скалярний добуток в $\mathbb{R}^3$. Нехай $X =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ та $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ в канонічному базисі $\mathbb{R}^3$. Отже:

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle = X^t A Y &= \overbrace{(1, 2, -1)}^{X^t} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{Y} \\
&= \underbrace{(1, 2, -1)}_{X} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A \times Y} \\
&= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2 + 6 - 1 = 7
\end{aligned}$$

TODO. зміна базису матриці білінійної форми

1.5 Ортогональні проєкції

Нехай $(E, \langle , \rangle)$ - евклідів простір, $F \subseteq E$ - векторний підпростір. Тоді, $E = F \oplus F^\perp$. Отже, $\forall x \in E$ записується як

$$x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in F^\perp}{x_{F^\perp}}$$

Definition 1.31. Ортогональна проєкція з E в F — це проєкція p_F з E на F паралельно до $F^\perp$, тобто

$$\begin{aligned}
p_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow F \\
x = x_F + x_{F^\perp} &\longmapsto p_F(x = x_F + x_{F^\perp}) = x_F.
\end{aligned}$$

Remark 1.32. 1. p_F є лінійним

2. $\forall x \in E \, p_F(x)$ повністю характеризується наступною властивістю:
   Нехай $y \in E$, тоді
   $$y = p_F(x) \Leftrightarrow \Big(\underset{\Rightarrow y = x_F}{y \in F \text{ та } x - y \in F^\perp} \Big)$$
   Зокрема $\langle p_F(x), x - p_F(x) \rangle = 0$. Тоді, якщо $(v_1, \ldots, v_R)$ є ортонормованим базисом F, маємо:
   $$\forall x \in E, \, p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle \, v_i$$
   Дійсно, достатньо перевірити, що вектор $y = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle \, v_i$ задовольняє:
   $$y \in F \text{ та } x - y \in F^\perp$$

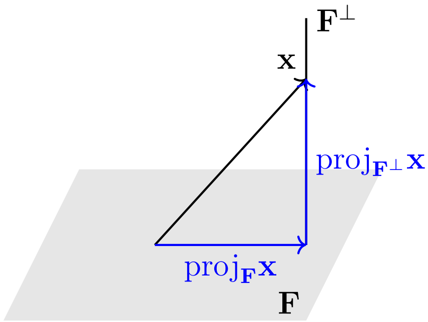


Рис. 1.1: Проекція

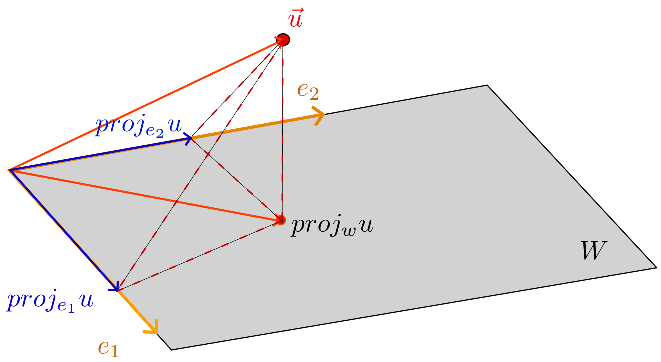


Рис. 1.2: Проєкція з ОНБ

Proposition 1.33. Нехай $x \in E$. Тоді,

$$\|x - p_F(x)\| = inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$$

тобто $\|x - p_F(x)\|$ є відстань від x до F.
Див. Figure 1.1

Proof. Оскільки $p_F(x) \in F$ достатньо довести, що, якщо $y \in F$, тоді

$$\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$$

Але, $$\underbrace{\|x - y\|^2}_{(x-p_F(x))+(p_F(x)-y)} = \|x - p_F(x)\|^2 + 2\overbrace{\left\langle \overset{\in F^{\perp}}{x - p_F(x)}, \overset{\in F}{p_F(x) - y} \right\rangle}^{} = 0 + \underbrace{\|p_F(x) - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - p_F(x)\|^2 \quad \square$$

Theorem 1.34. Грам-Шмідт
Нехай E — векторний простір, оснащений скалярним добутком $\langle , \rangle$. Нехай $(v_1, \dots, v_n)$ — лінійно незалежна сім'я елементів $\in E$. Тоді, існує сім'я $(w_1, \dots, w_n)$ ортогональна така що

$$\forall i = 1, \dots, n \quad Vect(v_1, \dots, v_i) = Vect(w_1, \dots, w_i)$$

Крім того, ця теорема дає нам метод побудови ортонормованого базису з довільного базису.

Proof. Теореми 1.34 Побудуємо ортогональний базис: $\{w_1, \dots, w_p\}$. Спершу покладемо:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 + \lambda w_1, \qquad \text{де } \lambda \text{ такий, що } w_1 \perp w_2 \end{cases}$$

Накладаючи цю умову, знаходимо:

$$0 = \langle v_2 + \lambda w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + \lambda \|w_1\|^2$$

Оскільки $w_1 \neq 0$, отримуємо $\lambda = -\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}$. Зауважимо, що:

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \end{cases}$$

отже $Vect\{v_1, v_2\} = Vect\{w_1, w_2\}$.

Після побудови w_2, будуємо w_3, поклавши:

$$w_3 = v_3 + \mu w_1 + \nu w_2$$
де μ та ν такі, що: $w_3 \perp w_1$ та $w_3 \perp w_2$

Можна розглядати $w_3 = v_3 - \lambda' w_1 - \lambda'' w_2$ як $w_3 = v_3 - proj_{F_2} v_3$ де $F_i = Vect\{w_1, \dots, w_i\}$

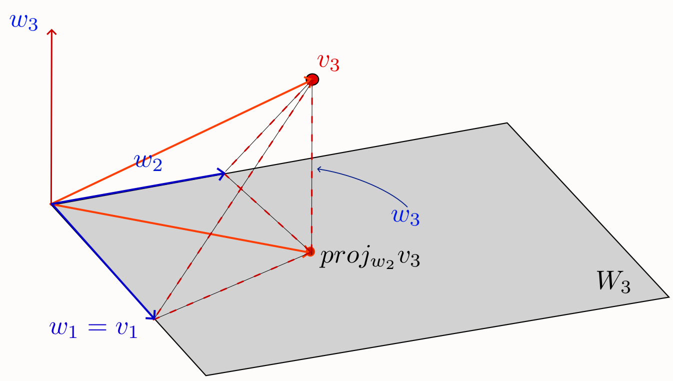


Рис. 1.3: Вектор за допомогою проекції

Це дає

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_3 + \mu w_1 + \nu w_2, w_1 \rangle = \langle v_3, w_1 \rangle + \mu \underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle}_{=\|w_1\|^2} + \nu \underbrace{\langle w_2, w_1 \rangle}_{=0} \\ &= \langle v_3, w_1 \rangle + \mu \|w_1\|^2 \end{aligned}$$

звідки $\mu = -\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}$. Аналогічно, накладаючи умову, що $w_3 \perp w_2$, знаходимо $\nu = -\frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2}$. Оскільки

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \\ v_3 = w_3 - \mu w_1 - \nu w_2 \end{cases}$$

добре видно, що $Vect\{w_1, w_2, w_3\} = Vect\{v_1, v_2, v_3\}$. Тобто, $\{w_1, w_2, w_3\}$ є ортогональним базисом простору, породженого v_1, v_2, v_3. Тепер добре видно процес рекурсії.

Припустимо, що ми побудували $w_1, \dots, w_{k-1}$ для $k \leq p$. Покладемо:

$$\begin{aligned} w_k &= v_k + \text{ лінійна комбінація вже знайдених векторів} \\ &= v_k + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{k-1} w_{k-1} \end{aligned}$$

Умови $w_k \perp w_i$ (для $i \in \{1, \dots, k-1\}$) еквівалентні:

$$\lambda_i = -\frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$$

як це негайно перевіряється. Оскільки $v_k = w_k - \lambda_1 - \dots - \lambda_{k-1} w_{k-1}$, за індукцією бачимо, що $Vect\{w_1, \dots, w_k\} = Vect\{v_1, \dots, v_k\} \Leftrightarrow \{w_1, \dots, w_k\}$ є ортогональним базисом $Vect\{v_1, \dots, v_k\}$.

Нам залишається лише нормувати її, тобто $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$, звідки $\{e_1, \dots, e_k\}$ є ортонормальним базисом $F = Vect\{v_1, \dots, v_k\}$. $\square$

Proposition 1.35. Щоб зрозуміти цю пропозицію, раджу прочитати розділ 1.6

Будь-яка ортогональна проекція є самоспряженою, тобто якщо p є ортогональною проекцією, тоді:

$$p^* = p$$

У матричному записі: нехай A матриця проекції p, тоді:

$$A^T = A$$

1.6 Ізометрії та Спряжені оператори

1.6.1 Ізометрії

Definition 1.36. Ізометрія з E (або ортогональне перетворення) є ендоморфізмом $f \in \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$, що зберігає скалярний добуток, тобто:

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$$

Definition 1.37. Нехай $x, y \in E$ — два ненульові вектори. Маємо, згідно з нерівністю Коші-Буняковського (див. лему 1.5):

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Тоді існує єдиний $\theta \in [0, \pi]$ такий, що:

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{1.1}$$

θ називається кутом (неорієнтованим) між векторами x і y.

Proposition 1.38. Якщо f є ізометрією E, отже, маємо:

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$$

Proof. Припустимо, що f є ізометрією E. Нехай $x, y \in E$. За визначенням: $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, отже, покладемо $y := x$, тоді маємо:

$$\underbrace{\langle f(x), f(x) \rangle}_{\|f(x)\|^2} = \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|^2}$$
$$\Leftrightarrow \|f(x)\|^2 = \|x\|^2$$
$$\Leftrightarrow \|f(x)\| = \|x\|$$

$\square$

Proposition 1.39. Нехай f ізометрія в E, тоді:

1. f є бієктивною
2. f зберігає евклідову відстань та кути

Proof. Нехай f — ізометрія в E і два вектори $u, v \in E$

1.

$$\|f(u) - f(v)\| = \sqrt{\langle f(u), f(v)\rangle} = \sqrt{\langle u, v\rangle} = \|u - v\|$$

2. Нехай θ_1 — кут між $f(u)$ і $f(v)$, а θ_2 — кут між u і v, тому:

$$\cos\theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|}$$

$$\cos\theta_2 := \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

За визначенням, $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, згідно з пропозицією 1.38, $\forall x, \|f(x)\| = \|x\|$, тому:

$$\cos\theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos\theta_2$$

□

Definition 1.40. Нехай F — векторний підпростір E, отже $E = F \oplus F^{\perp}$ звідки $\forall v \in E, \exists v_1 \in F, v_2 \in F^{\perp}$ такий що $v = v_1 + v_2$. Покладемо:

$$s_F(v) = v_1 - v_2$$

і s_F називається ортогональною симетрією відносно осі F.

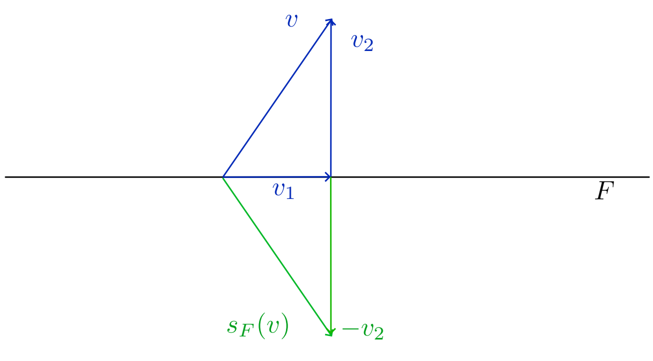


Рис. 1.4: Ортогональна симетрія відносно осі F

Proposition 1.41. Ортогональна симетрія є ізометрією.

Доведення. ЗРОБИТИ або не потрібно □

Proposition 1.42. f є ізометрією тоді і лише тоді, якщо вона перетворює будь-який ортонормований базис на ортонормований базис.

Доведення. Нехай f — ізометрія, тоді вона перетворює будь-який базис на базис, оскільки f бієктивна за проп. 1.39.

- ($\Rightarrow$) Припустимо, що f — ізометрія. Нехай $\{e_i\}$ — ортонормований базис, тоді маємо:

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$$

  Отже, $\{f(e_i)\}$ — ортонормований базис.

- ($\Leftarrow$) Припустимо, що існує ортонормований базис $\{e_i\}$ такий, що $\{f(e_i)\}$ також є ортонормованим базисом. Крім того, нехай $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$ та $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ з $x_i, y_i \in \mathbb{R}$

  Оскільки $\{e_i\}$ — ортонормований, то маємо:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \tag{1.2}$$

  З іншого боку:

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j \langle f(e_i), f(e_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j \langle e_i, e_j\rangle \underset{\text{оскільки } \{e_i\} \text{ ортонормований}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \underset{\text{Згідно з 1.2}}{=} \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

  Отже f — ізометрія.

□

Proposition 1.43. Якщо $\{e_i\}$ є ортонормованою базою, f ізометрія та $A = M(f)_{e_i}$, тоді $A^TA = I = AA^T$.

Proof. Щоб довести це, ми використаємо пропозицію 1.29.

За визначенням ізометрії, маємо:

$$\begin{aligned}&\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E \\ \Leftrightarrow &\underbrace{(AX)^T(AY)}_{\langle f(x), f(y)\rangle} = X^TA^TAY = \underbrace{X^TY}_{\langle x,y\rangle} \\ \Leftrightarrow &A^TA = I\end{aligned}$$

□

Proposition 1.44. Якщо A є матрицею ізометрії в ортонормованому базисі, тоді $det(A) = \pm 1$

Proof. За пропозицією 1.43, маємо: $A^TA = I$, звідки:

$$\begin{aligned}det(A^TA) = det(I) = 1 &\Rightarrow det(A)^2 = 1 \quad (\text{бо } det(A^T) = det(A)) \\ &\Rightarrow det(A) = \pm 1\end{aligned}$$

□

Intuition. Ізометрія виконує обертання або відображення, вона зберігає відстані, тому площа (або об'єм) фігури, яка побудована на основі цього перетворення, дорівнює 1.

1.6.2 Спряжений ендоморфізм

Proposition 1.45. Нехай E — евклідовий простір, а $f \in End(E)$. Існує один і лише один ендоморфізм $f^* \in E$ такий, що
$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle\,, \quad \forall x, y \in E$$
f^* називається спряженим до f.

Якщо $\{e_i\}$ є ортонормованим базисом, а $A = M(f)_{e_i}$, тоді матриця $A^* = M(f^*)_{e_i}$ є транспонованою до A, тобто $A^* = A^T$

Доведення. Знову ж таки, для доказу ми використаємо пропозицію 1.29, яка є дуже корисною, тому я раджу вам опанувати цю концепцію.

Нехай $\{e_i\}$ — ортонормований базис E, і позначимо
$$A = M(f)_{e_i} \quad A^* = M(f^*)_{e_i} \quad X = M(x)_{e_i} \quad Y = M(y)_{e_i}$$
Оскільки ми знаходимося в ортонормованому базисі, твердження записується:
$$\underbrace{(AX)^T Y}_{\langle f(x), y\rangle} = X^T A^T Y = \underbrace{X^T(A^* Y)}_{\langle x, f^*(y)\rangle} \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
що означає, що $A^* = A$, і, крім того, демонструє єдиність такого спряженого. □

1.7 Ортогональні групи

Нагадування:

Definition 1.46. Загальна лінійна група:
$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$$
це група всіх лінійних перетворень (квадратних матриць), які є оборотними (оскільки $det(A) \neq 0$).

Definition 1.47. Ортогональна група: Множина:
$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$$
задовольняє наступні властивості:

1. якщо $A, B \in O(n, \mathbb{R})$, тоді $AB \in O(n, \mathbb{R})$
2. $I \in O(n, \mathbb{R})$
3. якщо $A \in O(n, \mathbb{R})$ тоді $A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$

Зокрема, $O(n, \mathbb{R})$ є підгрупою $GL(n, \mathbb{R})$ (група оборотних матриць) (див. визначення 1.46).

Intuition. Значення ортогональних матриць зрозуміле: вони представляють матриці ортогональних перетворень (ізометрії) в ортонормованому базисі (див. визн. 1.9).

Можна помітити, що якщо $det(A) = 1$, то ця ізометрія представляє собою обертання, крім того, ми маємо наступне визначення:

Definition 1.48. Множина прямих ортогональних матриць (тобто таких, що $det(A) = 1$)
$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}$$
є групою, що називається спеціальною ортогональною групою.

Example 1.49. Матриця

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

є ортогональною. Можна перевірити, що $A^T A = I$, або достатньо показати, що c_1, c_2, c_3 є ортонормованою сім'єю, тобто:

$$\|c_i\|^2 = 1 \quad \text{та} \quad \langle c_i, c_j \rangle = 0 \quad \text{якщо } i \neq j$$

Можна інтерпретувати A як матрицю перетворення f у канонічному базисі $\{e_i\}$, отже маємо: $c_i = f(e_i)$, згідно з пропозицією 1.42 f є ортогональним. Крім того, бачимо, що $det(A) = +1$. Отже, f є прямим ортогональним перетворенням.

Proposition 1.50. Матриця переходу від ортонормованого базису до ортонормованого базису є ортогональною матрицею.

Proof. Я даю інтуїцію. Матриця переходу перетворює один базис на інший, вона переводить вектори базису, отже, вона перетворює базис БОН на вектори базису БОН, тому, згідно з пропозицією 1.42, ця матриця є ортогональною. □

Розділ 2

Визначники

Цей розділ скоріше є шпаргалкою з детермінантів, оскільки я не буду наводити докази, а дам корисні властивості, приклади та інтуїцію.

Definition 2.1. Нехай $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця $n \times n$, тоді:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{signe}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

де

- S_n це група всіх перестановок $\{1, \ldots, n\}$
- $\text{signe}(\sigma)$ це знак перестановки

Це визначення дуже формальне, тому наприкінці цього розділу ми переформулюємо це визначення. Спочатку ми вивчимо властивості визначників:

2.1 Найбільш важливі властивості

Proposition 2.2. властивості визначника. Для цієї пропозиції, ми позначаємо $\det(c_1, \ldots, c_n)$ визначник, де $\forall i$, r_i і $\forall i$, y_i представляють стовпець (або вектор-стовпець). І $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

1. Визначник одиничної матриці дорівнює 1:

$$\det(I_n) = 1$$

2. Визначник матриці рангу 1 є її єдиним елементом:

$$\det(\begin{bmatrix} a_{1,1} \end{bmatrix}) = a_{1,1} \qquad \text{де } a_{1,1} \in \mathbb{R}$$

3. Лінійність 1:

$$\det(r_1, \ldots, r_i + y_i, \ldots, r_n) = \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_n) + \det(r_1, \ldots, y_i, \ldots, r_n)$$

4. Лінійність 2:

$$\det(r_1, \ldots, \lambda_i r_i, \ldots, r_n) = \lambda_i \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_n)$$

> Note. Ось чому:
>
> $$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

5. Однакові стовпці: Припустимо, що $i \neq j$ і $c_i = c_j$ тоді:

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = 0$$

Якщо є два однакових стовпці, тоді det дорівнює 0.

6. Переміщення стовпців:

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = -\det(c_1, \dots, \underbrace{c_j, \dots, c_i}_{\text{permutation}}, \dots, c_n)$$

Інакше кажучи, перестановка стовпців змінює знак.

7. Визначник помножених матриць: Нехай $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

8. Визначник транспонованої матриці: Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

2.2 Розкладання відносно рядка/стовпця

Definition 2.3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, i.e:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,i-1} & a_{j,i} & a_{j,i+1} & \dots & a_{j,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Alors, $A_{j,i}$ est une matrice où la ligne j et la colonne i sont supprimé, i.e:

$$A_{j,i} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i-1} & & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,i-1} & & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,i-1} & & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ & & & & & & & \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,i-1} & & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,i-1} & & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

Це дозволяє нам розкласти визначник за рядком або стовпцем:

Proposition 2.4. Нехай $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця і нехай $1 \leq k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{k,i} \det(A_{k,i})$$

є обчисленням детермінанта відносно $k^{\text{го}}$ рядка.

Example 2.5. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Ce qui est au centre des lignes est le $a_{i,j}$. Ici: $a_{2,1}$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.1: Розклад по другому рядку

Тому:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{2,i} \det(A_{2,i}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot a_{2,1} \cdot \det(A_{2,1}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{2,2} \cdot \det(A_{2,2}) + (-1)^{3+2} \cdot a_{2,3} \cdot \det(A_{2,3}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot 2 \cdot (-11) + 1 \cdot 9 \cdot (-9) + (-1) \cdot 8 \cdot (-5) \\
&= 22 - 81 + 40 \\
&= -19
\end{aligned}$$

Proposition 2.6. Нехай $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця і нехай $1 \leq k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(A_{i,k})$$

є обчисленням визначника відносно $k^{\text{ій}}$ стовпця.

Example 2.7. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.2: Розклад за другою колонкою

Отже:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{i,2} \det(A_{i,2}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot \det(A_{1,2}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{2,2} \cdot \det(A_{2,2}) + (-1)^{3+2} \cdot a_{3,2} \cdot \det(A_{3,2}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot 4 \cdot (-12) + 1 \cdot 9 \cdot (-9) + (-1) \cdot 7 \cdot (-2) \\
&= 48 - 81 + 14 \\
&= -19
\end{aligned}$$

2.3 Визначник трикутної матриці

Corollary 2.8. Визначник трикутної матриці є добутком її діагональних елементів. Тобто, нехай трикутна матриця

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

тоді

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$$

Example 2.9. Нехай

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Розгорнемо цей визначник відносно першого стовпця:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{i,2} \det(A_{i,2}) \\
&= (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot \det(A_{1,1}) + (-1)^{2+1} \cdot a_{2,1} \cdot \det(A_{2,1}) + (-1)^{3+1} \cdot a_{3,1} \cdot \det(A_{3,1}) \\
&= (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^3 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{(-1)^4 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}}_{=0} \\
&= \underbrace{1}_{=a_{1,1}} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} =: B\right) \\
&= (-1)^{1+1} \cdot b_{1,1} \cdot \det(B_{1,1}) + (-1)^{2+1} \cdot b_{2,1} \cdot \det(B_{2,1}) \quad \text{розклад відносно першого стовпця} \\
&= 1 \cdot \underbrace{9}_{a_{2,2}} \cdot |6| + \underbrace{(-1) \cdot 0 \cdot |8|}_{=0} \\
&= \underbrace{1}_{=a_{1,1}} \cdot \underbrace{9}_{=a_{2,2}} \cdot \underbrace{6}_{=a_{3,3}}
\end{aligned}$$

2.4 Коматриця та приєднана матриця

Спочатку нагадаємо визначення $A_{i,j}$. Це квадратна матриця, де $i^{\text{та}}$ лінія та $j^{\text{тий}}$ стовпець видалено. (Див. визначення 2.3).

Definition 2.10. Нехай квадратна матриця $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Позначимо

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

Потім, позначимо матрицю

$$N = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} = \mathrm{Com}(A)$$

Матриця N називається коматрицею матриці A. Тоді, спряжена матриця матриці A визначається як транспонована коматриця:

$$A^* = N^T = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,n} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Theorem 2.11. Нехай $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ квадратна матриця та A^* її спряжена матриця, тоді маємо:

$$A^*A = AA^* = \det(A)I_n = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

Яка користь від такої матриці?

2.5 Обернена матриця

Theorem 2.12. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ квадратна матриця така що $\det(A) \neq 0$, тоді:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$$

є оберненою матрицею до A.

Corollary 2.13. Якщо $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ оборотна квадратна матриця, тоді:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Розділ 3

Зведення ендоморфізмів

Під час написання цього розділу я надихався відео з каналу 3blue1brown, які я вам раджу подивитися, принаймні плейлист щодо лінійної алгебри. Другим джерелом натхнення була книга Джозефа Гріфона [2].

3.1 Вступ

У попередньому розділі ми вивчили поняття ортонормованого базису, корисність якого полягає у спрощенні обчислень координат у базисі та обчисленні проєкції. Це поняття є одним з перших кроків до вивчення SVD[1], яке застосовується в багатьох областях, наприклад: зменшення розмірів зображень.

У цьому розділі ми продовжуємо вивчення базисів, щоб зрештою зрозуміти SVD. Ми вивчимо редукцію ендоморфізмів, to be more precise, діагоналізацію та тригоналізацію. Для початку: невеличка вправа:

Exercise. Обчислити

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{15 \text{ разів}}$$

Це не виглядає дуже легко, чи не так? Наприкінці цього розділу ми знайдемо спосіб спростити обчислення, і в кінці ми розв'яжемо цю вправу.

З лінійної алгебри відомо, що можна представити матрицю відображення в різних базисах, тобто нехай $\{e_i\}$ - базис E і f - відображення. Тоді це відображення в базисі $\{e_i\}$ представлено так:

$$A = M(f)_{e_i} = \|f(e_1), \ldots, f(e_n)\|$$

Нехай $\{e'_i\}$ - інший базис E, тоді ми можемо представити відображення f в цьому базисі також, позначимо: $P = P_{e_i \to e'_i}$ матрицю переходу з базису$\{e_i\}$ до бази $\{e'_i\}$

$$A' = M(f)_{e'_i} = P^{-1}AP = \|f(e'_1), \ldots, f(e'_n)\|_{e'_i}$$

Definition 3.1. Матриця A є діагоналізованою якщо існує подібна матриця[a] A' діагональна:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

[a] A подібна до A' якщо існує матриця переходу P така що $A' = P^{-1}AP$

[1] Singular Value Decomposition

Definition 3.2. Матриця A є тригоналізованою якщо існує подібна матриця A' трикутна (верхня/нижня)

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \text{ або } A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Отже, проблеми цієї глави, які ми збираємося вирішити, такі:

1. Визначити, чи є ендоморфізм f діагоналізованим/тригоналізованим, тобто чи існує така матриця A'.
2. Визначити матрицю переходу P та матрицю A'.

У всьому розділі ми припускаємо, що векторний простір E має скінченну розмірність.

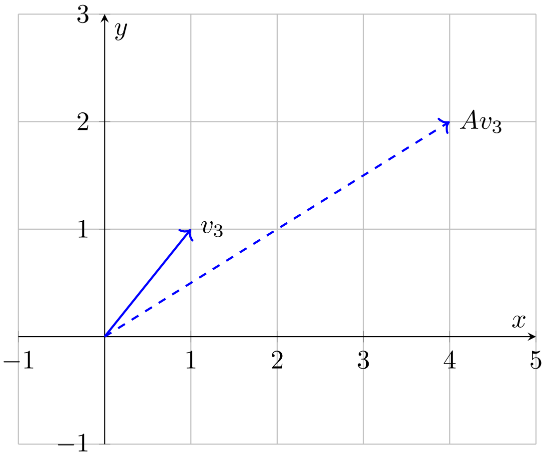
3.2 Власні вектори

Почнемо з уточнення поняття лінійного відображення та його матриці. Візьмемо для цього матрицю з вправи на початку розділу:

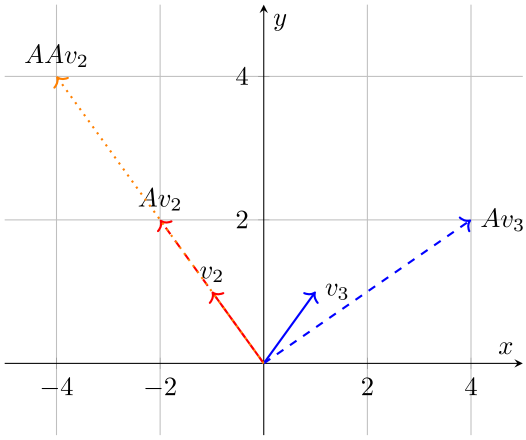
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ця матриця перетворює векторний простір, який ми задаємо, або, спрощуючи, вона перетворює кожен вектор векторного простору. Візьмемо вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, застосовуючи A, отримуємо:

$$Av_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Можна помітити, що вектор Av_3 більше не знаходиться на тій самій лінії, що й вектор v_3, що логічно, оскільки, якби вектори були на одній лінії після перетворення, це не мало б сенсу. Однак, іноді трапляються випадки, коли вектор, застосований до матриці, залишається на тій самій лінії, наприклад, вектор $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, де $Av_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_2$



І це не лише випадок вектора $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, якщо взяти будь-який вектор, породжений $v = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, ми отримаємо $Av = 2v$. Такі вектори v та скаляри (тут: 2) називаються власними векторами та власними значеннями відповідно. Отже, маємо формальне визначення:

Definition 3.3. Нехай f — ендоморфізм у E, а вектор $v \in E$ називається власним вектором для f, якщо:

1. $v \neq 0$
2. Існує дійсне число λ таке, що $f(v) = \lambda v$

Скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$ називається власним значенням що відповідає v.

Intuition. Власні вектори — це вектори, які під дією f не змінюють напрямків, лише довжину (і навіть не завжди). Це спрощує обчислення таких векторів. Чи можете ви обчислити $A^3 v_3$? Не дуже легко, а вектор $A^3 v_2$?

$$Av_2 = 2v_2 \Rightarrow A^2 v_2 = 2 \cdot 2v_2 = 4v_2 \Rightarrow A^3 v_2 = 2 \cdot 4v_2 = 8v_2 = \begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}$$

Це круто, чи не так?

З іншого боку, це не єдина корисність власних векторів, і ми повернемося до цього, щоб обговорити це, але спочатку, як знайти такі вектори?

3.3 Пошук власних значень

Ми шукаємо вектори, які під дією ендоморфізму f масштабуються на коефіцієнт $\lambda \in \mathbb{R}$, отже, ми повинні розв'язати це рівняння:

$$\begin{aligned}
& f(v) = \lambda v \\
\Leftrightarrow\quad & Av = \lambda v \quad \text{у матричній нотації} \\
\Leftrightarrow\quad & Av = \lambda(Iv) \quad \text{де } I \text{ є одиничною матрицею} \\
\Leftrightarrow\quad & Av - \lambda I v = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (A - \lambda I)v = 0
\end{aligned}$$

Отже, ми повинні вивчити застосування $(A - \lambda I)$ і пов'язати його з поняттям детермінантів. Нагадаємо: якщо детермінант матриці не дорівнює нулю, то ця матриця (тобто ендоморфізм) є ін'єктивною. У нашому випадку, якщо $\det(A-\lambda I)$ був би нулем, єдиним вектором v, який давав би $(A-\lambda I)v = 0$, був би нульовий вектор $v = 0$, оскільки $(A - \lambda I)$ є лінійним і (як ми припустили) ін'єктивним.

З іншого боку, згідно з визначенням, власні вектори не є нульовими, тому ін'єктивний випадок не підходить, отже, щоб мати власні вектори, застосування $(A-\lambda I)$має бути неін'єктивним, що еквівалентно твердженню, що $\det(A - \lambda I) = 0$. Отже, ми повинні обчислити наступний детермінант:

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

Розкладаючи цей визначник, ми отримуємо рівняння такого типу:

$$(-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

коренями якого є власні значення f (нагадуємо: власне значення є множником λ). Не зосереджуйтеся надто сильно на цьому рівнянні зараз, ми ще до нього повернемося.

Proposition 3.4. Нехай f — ендоморфізм у скінченновимірному векторному просторі E розмірності n, а A — матриця, що представляє f у базисі E. Власні значення f є коренями полінома:

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Цей поліном називається характеристичним поліномом f.

Definition 3.5. Множина власних значень f називається спектром f і позначається $\mathrm{Sp}_K(f)$ або $\mathrm{Sp}_K(A)$, якщо A — матриця f.

Для уточнення:

Example 3.6. Нехай f ендоморфізм в $\mathbb{R}^2$ матриця представлення якого в канонічному базисі є:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Обчислимо його власні значення:

$$\begin{aligned}
& & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v &= \lambda v \\
&\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v - \lambda I v &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I \right) v &= 0 \\
&\Rightarrow & \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I \right) &= 0 \\
&\Rightarrow & \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\
&\Rightarrow & \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\
& & &= (3-\lambda)(2-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

Добре видно, що розв'язки: $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_2 = 2$

Тим не менш, можна знайти власні значення, а ми шукали власні вектори. І ми тут:

3.4 Пошук власних векторів

Припустимо, для $q \in \mathbb{N}^*$ ми вже знайшли q власних значень матриці $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, щоб знайти власні вектори, нам залишається знайти базу для:

$$\ker(A - \lambda_i I) \quad \forall i \in \{1, \ldots, q\}$$

що еквівалентно:

$$(A - \lambda_i I)\, v = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, q\}$$

Example 3.7. Ще раз матриця

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

в канонічному базисі $\mathbb{R}^2$. Ми вже знайшли її власні вектори: $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_2 = 2$. Тоді, шукаємо вектори:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Отже $\ker(A - 3I) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Ось, наш перший власний вектор: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для другого:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \end{cases}$$

Отже $\ker(A - 2I) = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ і ось другий власний вектор: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (це був наш вектор v_2 на початку розділу).

Нарешті, корисна властивість:

Proposition 3.8. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ з його власними векторами: $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, тоді:

$$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$
$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

3.5 Діагоналізовані ендоморфізми

Повернімося до корисності власних векторів. Нехай f — ендоморфізм E, базою якого є $\{e_1, \ldots, e_n\}$, і $\mathrm{Mat}_{e_i}(f) = A$ — матриця f у цій базі. Розглянемо наступний приклад:

Example 3.9. Маємо: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ у канонічному базисі $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ та $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Нагадаємо, що ми знайшли два власні вектори:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Зауважимо, що ці два вектори є лінійно незалежними і, отже, утворюють базис для $\mathbb{R}^2$. Спробуємо змінити базис для A, маючи два способи:

1. Можна обчислити координати $f(v_1)$ та $f(v_2)$ у базисі $\{v_1, v_2\}$, маємо:

$$f(v_1) = 3v_1 = 3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$$
$$f(v_2) = 2v_2 = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$$

   І тоді $\mathrm{Mat}_{v_i}(f) = \|f(v_1), f(v_2)\|_{v_i} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Можна обчислити матрицю $P = P_{e_i \to v_i}$ переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{v_i\}$ та вивести з неї

матрицю f у новому базисі. Маємо:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{e_i} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{e_i} \end{cases}$$

отже $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ та $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ви можете перевірити обчислення). І отже:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{AP} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

І ось, магія, ми знайшли діагональну матрицю.

Далі, узагальнимо те, що ми зробили.

Definition 3.10. Нехай $\lambda \in K$, позначимо:

$$E_\lambda := \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$$

E_λ є векторним простором E, який називається власним простором, що відповідає λ.

Remark 3.11.

1. Якщо λ не є власним значенням f, тому $E_\lambda = \{0\}$
2. Якщо λ є власним значенням, тоді:

$$E_\lambda = \{\text{ власні вектори, асоційовані з } \lambda\} \cup \{0\} \text{ та } \dim E_\lambda \geq 1$$

Proposition 3.12. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — попарно різні скаляри. Тоді власні простори $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ знаходяться в прямій сумі. Інакше кажучи, якщо $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ є базисами $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$, то сім'я $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$ є лінійно незалежною (але не обов'язково породжуючою E).

Proof. Нехай $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ — власні підпростори, асоційовані з власними значеннями $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ендоморфізму f векторного простору E. Ми повинні показати, що ці підпростори знаходяться в прямій сумі, тобто, якщо вектор належить їхньому перетину, то він дорівнює нулю.

Візьмемо елемент v, що належить їхній сумі, тобто, він може бути записаний у формі:

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p$$

де $v_i \in E_{\lambda_i}$ для всіх i.

Оскільки кожен v_i є власним вектором для f, асоційованим з λ_i, маємо:

$$f(v_i) = \lambda_i v_i.$$

Застосуємо f до суми:

$$f(v) = f(v_1 + v_2 + \cdots + v_p) = f(v_1) + f(v_2) + \cdots + f(v_p).$$

Використовуючи лінійність f, це дає:

$$f(v) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

Проте, v також є комбінацією цих самих векторів:

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p.$$

Отже, перегрупувавши:

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p) - (v_1 + v_2 + \cdots + v_p) = 0.$$

Що дає:

$$(\lambda_1 - 1)v_1 + (\lambda_2 - 1)v_2 + \cdots + (\lambda_p - 1)v_p = 0.$$

Факторизуємо кожен член:

$$(\lambda_1 - \lambda)v_1 + (\lambda_2 - \lambda)v_2 + \cdots + (\lambda_p - \lambda)v_p = 0.$$

Проте, λ_i вважаються попарно різними. З цього випливає, що коефіцієнти є різними, і що сума дорівнює нулю лише тоді, коли всі v_i дорівнюють нулю (оскільки власні підпростори, як правило, знаходяться в прямій сумі).

Таким чином, $v = 0$, що доводить, що власні підпростори знаходяться в прямій сумі. □

Таким чином, власні простори завжди знаходяться в прямій сумі, але не обов'язково дорівнюють E:

$$E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p} \subsetneq E$$

що ми маємо, якщо:

$$\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} < \dim E$$

Theorem 3.13. Нехай f ендоморфізм в E і $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ його власні значення, тоді наступні властивості є еквівалентними:

1. f діагоналізовний
2. E є прямою сумою своїх власних просторів: $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$
3. $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$

Corollary 3.14. Якщо f є ендоморфізмом E з $\dim E = n$ і f має n власних значень, попарно відмінних, то f є діагоналізованим.

Але, оскільки власні значення є коренями характеристичного многочлена (див. твердження 3.4), ми маємо:

Proposition 3.15. Нехай f ендоморфізм у E та λ власне значення порядку α (тобто α є коренем $P_f(\lambda)$ порядку α, тобто $P_f(\lambda) = (X - \lambda)^\alpha Q(X)$). Тоді:

$$\dim E_\lambda \leq \alpha$$

Theorem 3.16. Нехай f — ендоморфізм у E з $\dim E = n$. Тоді f є діагоналізованим тоді й лише тоді, якщо:

1. $P_f(X)$ є <u>розщеплюваним</u>, тобто:

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

   (λ_i є коренями, отже, власними значеннями) і $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$. Тоді, якщо сума кратностей коренів дорівнює розмірності векторного простору.

2. Розмірності власних просторів є <u>максимальними</u>, тобто $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$

$$\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$$

Intuition. Не завжди легко зрозуміти ідею через характеристичні поліноми, тому інший спосіб побачити це:

1. Знаходимо власні значення: $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$
2. Потім знаходимо власні підпростори: $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i I)$
3. Сумуємо розмірності: $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} =: d$.
   - Якщо $d = \dim E$ тобто якщо сума розмірностей дорівнює розмірності простору E, власні підпростори породжують E і отже f діагоналізовний (бо його матриця може бути записана в базисі цих власних векторів).
   - В іншому випадку кількості лінійних власних векторів недостатньо, щоб породити E.

3.6 Застосунки

3.6.1 Обчислення потужності

Отже, ми повернулися туди, звідки почали, я вам нагадаю задачу з початку розділу:

Exercise. Обчислити

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{15 \text{ разів}}$$

Нагадаємо, що власні вектори A це:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ та } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

які є лінійно незалежними та породжують $\mathbb{R}^2$, отже, утворюють базис $\mathbb{R}^2$, тоді ми можемо записати в цьому новому базисі і, як ми вже знайшли:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

в базисі (v_1, v_2) з матрицею переходу:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ та } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Крім того, множачи A' на A', маємо:

$$A' \cdot A' = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = A'^2$$

звідки

$$A'^n = P^{-1}A^nP \Rightarrow PA'^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n$$

Це дає нам можливість спочатку обчислити степінь A':

$$A'^{15} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

Ось, набагато простіше, ніж обчислювати A^15 безпосередньо, тоді нам залишається повернутися до канонічного базису:

$$P \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{15} & 3^{15} - 2^{15} \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

Дуже корисним у діагональних матрицях є те, що степінь такої матриці дорівнює тій самій матриці, але з діагональними елементами, зведеними до степеня, тобто:

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A'^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

Узагальнимо: Якщо $A \in \mathcal{M}_n(K)$ діагоналізовна (тобто існує P та A' такі, що $A' = P^{-1}AP$), тоді:

$$A^n = P(A'^n)P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

3.6.2 Розв'язання системи рекурентних послідовностей

Нехай $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – дві послідовності такі, що:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \tag{3.1}$$

з $u_0 = 2$ і $v_n = 1$. Нехай $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, тоді система 3.1 записується:

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{з} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

за рекурентністю отримуємо:

$$X_n = A^n X_0 \quad \text{з } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отже, ми звели задачу до обчислення степеня матриці: A^n, що ми розглядали в розділі 3.6.1. Ви можете перевірити, що існує $P \in GL_2(\mathbb{R})$ такий, що

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{з} \quad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

і тоді

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

Звідки

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n + 2^n - 3^n \\ -4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n - 2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

тобто:

$$\begin{cases} u_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n \\ v_n = -5 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n \end{cases}$$

3.6.3 Розв'язання диференціальних рівнянь

Отже, потрібно розв'язати диференціальну систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

з $a_{ij} \in \mathbb{R}$ та $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовними.

У матричній формі система записується так:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad \text{де} \quad A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Припустимо, A діагоналізована. Тоді існує A' діагональна матриця та P оборотна матриця такі, що:

$$A' = P^{-1}AP.$$

Якщо ми розглядатимемо A як матрицю ендоморфізму в канонічній базі, A' є матрицею f у базі власних векторів $\{v_i\}$.
Аналогічно, X є матрицею вектора $\vec{x}$ в канонічній базі, а $X' = M(\vec{x})_{v_i}$ пов'язана з X співвідношенням

$$X' = P^{-1}X$$

> Note. Увага! У цьому розділі X' не описує похідну, а вектор, позначений X'!

Виводячи це співвідношення:

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}$$

(оскільки A має сталі коефіцієнти, P також матиме сталі коефіцієнти). Отже:

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX = \left(P^{-1}AP\right)X' = A'X'$$

Система 3.2 є, таким чином, еквівалентною системі

$$\frac{dX'}{dt} = A'X'$$

Ця система легко інтегрується, оскільки A' є діагональною.
Таким чином, ми можемо розв'язати систему $\frac{dX}{dt} = AX$ наступним чином:

a) Діагоналізуємо A. Нехай $A' = P^{-1}AP$ — діагональна матриця, подібна до A;

b) інтегруємо систему $\frac{dX'}{dt} = A'X'$;

c) повертаємося до X через $X = PX'$.

Приклад

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$$

Маємо $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ та $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Система $\frac{dX'}{dt} = A'X'$ записується так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = 2x' \\ \dfrac{dy'}{dt} = 3y' \end{cases}$$

що одразу дає

$$\begin{cases} x' = C_1e^{2t} \\ y' = C_2e^{3t} \end{cases}$$

і отже, повертаючись до X через $X = PX'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ -C_1e^{2t} - 2C_2e^{3t} \end{pmatrix}$$

тобто:

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ y = -C_1e^{2t} - 2C_2e^{3t} \end{cases}$$

3.7 Тригоналізація

Матриця $A \in \mathcal{M}_n(K)$ називається верхньою трикутною, якщо вона має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

відповідно, нижня трикутна:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Remark 3.17. Будь-яка верхня трикутна матриця A подібна до нижньої трикутної матриці.

Доведення. Нехай A верхня трикутна матриця та f ендоморфізм K^n, який у базисі $\{e_1, \dots, e_n\}$ представлений матрицею A, тоді:

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{1,1}e_1 \\ f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 \\ \vdots \\ f(e_n) = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \dots + a_{n,n}e_n \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Розглянемо базис

$$\varepsilon_1 = e_n, \quad \varepsilon_2 = e_{n-1}, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = e_1$$

тоді маємо:

$$\begin{cases} f(\underbrace{\varepsilon_1}_{e_n}) == a_{1,n}\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} + a_{2,n}\underbrace{\varepsilon_{n-1}}_{e_2} + \dots + a_{n,n}\underbrace{\varepsilon_1}_{e_n} \\ f(\underbrace{\varepsilon_2}_{e_{n-1}}) == a_{1,n-1}\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} + \dots + a_{n-1,n-1}\underbrace{\varepsilon_2}_{e_{n-1}} \\ \vdots \\ f(\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1}) = a_{1,1}\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} \end{cases}$$

отже

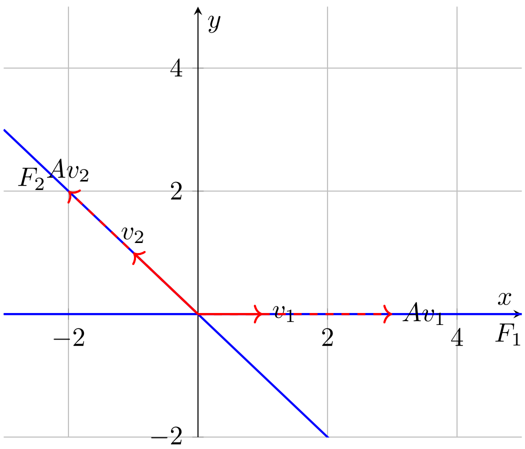
$$A' = M(f)_{\varepsilon_i} = \begin{bmatrix} a_{n,n} & & \dots & 0 \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1,n} & \dots & & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

□

3.7.1 Геометрична інтуїція діагоналізації

Нагадаємо діагоналізацію. Матриця A, що представляє ендоморфізм f в $K^n = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, є діагоналізованою, якщо існує достатньо векторних підпросторів $\{F_1, \dots, F_n\}$ розмірності 1 кожен, таких, що $K^n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ і $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(F_i) \subset F_i$ (вектор після застосування f залишається в просторі). Це можна побачити геометрично:

Перетворення власних векторів



Вже відомо, що такий ендоморфізм дуже корисний, але не часто трапляється, що його можна діагоналізувати, тому було б корисно мати щось більш загальне, але все ще схоже на діагоналізацію.

3.7.2 Геометрична інтуїція тригонализації

Геометрія тригоналізовного ендоморфізму є подібною, але все ж відмінною. Нехай A буде представницькою матрицею ендоморфізму f в K^n. Він є тригоналізовним, якщо існує база $\{v_1, \ldots, v_n\}$ з K^n, позначимо $F_1 = \mathrm{Vect}(v_1), F_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2), \ldots, F_n = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ такі, що

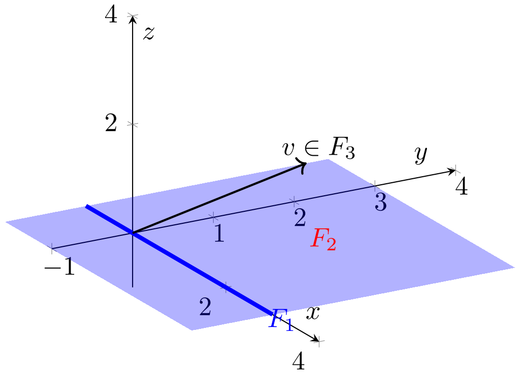
$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$$

і

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, f(F_i) \subset F_i$$

Бачите подібність? Ендоморфізм є стабільним відносно підпростору! Вектор, застосований до f, ніколи не покидає свій підпростір. Візьмемо для прикладу наступну матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}(f)_{e_i}$$



Оскільки ми маємо інтуїтивне розуміння тригоналізовного ендоморфізму, повернімося до чистої математики.

3.7.3 Теорія

Theorem 3.18. Ендоморфізм є тригонализованим в K тоді й тільки тоді, коли його характеристичний многочлен розкладається на лінійні множники в K.

Це означає, що характеристичний многочлен має рівно n коренів, де $n = \dim(E)$, і записується так:

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

де $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$

Proof. -

(⇒) Припустимо, ендоморфізм f тригонізується, і нехай буде базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ такий що

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & * \\ 0 & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$P_f(X) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - X & & & * \\ 0 & a_{2,2} - X & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,n} - X \end{pmatrix} = (a_{1,1} - X) \cdots (a_{n,n} - X)$$

Отже, $P_f(X)$ добре розщеплюється (можна помітити, що його корені — це власні значення f).

(⇐) Припустимо, $P_f(X)$ розщеплюється, і доведемо за індукцією, що f тригонізується.

Для $n = 1$ тривіально.

Припустимо, що результат вірний для порядку $n - 1$. Але $P_f(X)$ розщеплюється, він має принаймні один корінь $\lambda_1 \in K$ і отже власний вектор $\varepsilon_1 \in E_{\lambda_1}$. Доповнимо $\{\varepsilon_1\}$ до базису $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, отже маємо:

$$A = M(f)_{\varepsilon_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \text{де:} B \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$$

Нехай $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ і $g : F \to F$ єдиний ендоморфізм F такий що $M(g)_{\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n} = B$, маємо:

$$P_f(X) = \det(A - XI_n) = (\lambda_1 - X)\det(B - XI_{n-1}) = (\lambda_1 - X)P_g(X)$$

Але $P_f(X)$ розщеплюється, $P_g(X)$ також, і згідно з індуктивним припущенням B тригонізується, отже існує базис $\{v_2, \ldots, v_n\}$ в якому $M(g)_{v_2, \ldots, v_n}$ є трикутною, і отже матриця f у базисі $\{\varepsilon_1, v_2, \ldots, v_n\}$ є трикутною, отже f тригонізується.

□

Corollary 3.19. Будь-яка матриця $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ подібна до трикутної матриці з $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Intuition. Згідно з курсом абстрактної алгебри, кожен многочлен у $\mathbb{C}$ є розкладним.

Remark 3.20. -

1. Якщо A є тригонализовна і A' трикутна, подібна до A, тому A' має власні значення на діагоналях.
2. Будь-яка матриця $A \in \mathcal{M}_n(K)$ є тригонализовна над замиканням K' з K. (напр.: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ є тригонализовна над $\mathbb{C}$).

Corollary 3.21. Нехай $A \in \mathcal{M}_n(K)$ і $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ її власні значення, тому

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A) &= \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \\ \det(A) &= \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n\end{aligned}$$

Доведення. Маємо $A' \in \mathcal{M}_n(K')$ трикутну, подібну до A (нагадування: замикання K' над K), отже власні значення знаходяться на діагоналях A'. Однак подібні матриці мають ті ж самі сліди та визначники, тому $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A') = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ та $\det(A) = \det(A') = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. □

Ми покажемо процес тригоналізації на наступному прикладі:

Example 3.22. Нехай матриця

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Маємо характеристичний многочлен $P_A(X) = -(X-1)^2(X+2)$, який розщеплюється в $\mathbb{R}$, тому A є тригоналізованою (згідно з теоремою 3.18), отже, якщо розглядати A як ендоморфізм у канонічному базисі, ми знаємо, що існує базис $\{v_i\}$ з $\mathbb{R}^3$ такий що:

$$M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

я нагадую, що це означає:

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = av_1 + v_2 \\ f(v_3) = bv_1 + cv_2 - 2v_3 \end{cases} \tag{3.3}$$

Почнемо з пошуку v_1. Ми знаємо, що v_1 є власним вектором, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 1$, тобто $(f - \mathrm{Id})v_1 = 0$, тому обчислимо $(A - I)v_1 = 0$ (іншими словами, ми шукаємо v_1, який породжує $\ker(A - I)$) :

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 2z &= 0 \\ 5x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

Тоді ми можемо взяти $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ (іншими словами $\ker(A - I) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix})$).

Далі, шукаємо v_2, згідно з 3.3,

$$\begin{aligned} &f(v_2) = av_1 + v_2 \\ \Rightarrow &f(v_2) - v_2 = av_1 \\ \Rightarrow &(f - I)v_2 = av_1 \\ \Rightarrow &(A - I)v_2 = av_1 \end{aligned}$$

Отже, маємо:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 2z = 2a \\ 5x + y + 2z = -5a \end{cases}$$

Тоді, взявши $a = 1$, маємо

$$\begin{cases} -5x - 2z = 2 \\ 5x + y + 2z = -5 \end{cases}$$

тому $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (просто розв'язання системи).

Для v_3 маємо два варіанти:

1. або діяти так само з розв'язанням системи
2. або зауважити, що існує власний вектор A, що відповідає власному значенню -2, тобто $\exists v_3 \in \mathbb{R}^3$ такий що $f(v_3) = -2v_3$, тоді ми можемо взяти цей вектор v_3 і, отже, покласти $b = c = 0$.

Remark 3.23. Чому ми можемо так робити? Тому що для кожного власного значення f завжди існує власний простір кратності принаймні 1, отже, і для власного значення -2 теж.

Тоді шукаємо v_3:

$$(A + 2I)v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

тому ми можемо взяти $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Отже, матриця A подібна до

$$A' = M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

з матрицею переходу:

$$P = \|v_1, v_2, v_3\| = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3.8 Анулюючі многочлени

У попередніх розділах ми дізналися, що для того, щоб з'ясувати, чи є матриця діагоналізованою, необхідно вивчити власні простори, що не завжди дуже легко і не є найшвидшим способом. Отже, в цьому розділі ми розглянемо один з інших методів вивчення діагоналізовності, одним з цих методів є вивчення анулюючих многочленів.

Remark 3.24. У цьому розділі я не пишу більшість доказів, а скоріше інтуїцію, чому це правда і чому це працює.

Definition 3.25. Нехай $f \in \mathbb{K}^n$ ендоморфізм. Поліном $Q(X) \in K[X]$ є анулюючим поліномом для f якщо $Q(f) = 0$.

Example 3.26. Нехай f проєкція, тоді, ми знаємо, що $f^2 = f$, звідки $f^2 - f = 0$, тому $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ є анулюючим поліномом для f.

Важливо те, що анулюючі многочлени тісно пов'язані з власними значеннями:

Proposition 3.27. Нехай $Q(X)$ є анулюючим многочленом для f, тоді власні значення f знаходяться серед коренів Q, тобто:

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \mathrm{Rac}(Q)$$

Доведення. Нехай $Q(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ — анулюючий многочлен для f і λ — власне значення для f. Отже, $\exists v \neq 0 \in E$ така що $f(v) = \lambda v$, більше того:

$$Q(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_0 \operatorname{Id} = 0$$

Але $f(v) = \lambda v$, тому $f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda^2 v$, звідки $f^k(v) = \lambda^k v \ \forall k \in \mathbb{N}$, тоді:

$$Q(f(v)) = 0 = (a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_0 \operatorname{Id})v = (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 \operatorname{Id})v = 0$$

Але $v \neq 0$, тому $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 \operatorname{Id} = 0$, звідки λ є коренем Q. □

Note. Однак, рівність не є загалом вірною, наприклад $\operatorname{Id}^2 = \operatorname{Id}$, отже $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ обнуляє Id з коренями 0 та 1, але 0 не є власним значенням для Id.

Theorem 3.28. Кайлі-Гамільтона. Нехай $f \in K^n$ ендоморфізм та $P_f(X)$ його характеристичний поліном, тоді

$$P_f(f) = 0$$

Іншими словами, характеристичний поліном ендоморфізму є його анулюючим поліномом.

Intuition. Характеристичний поліном описує нам структуру f, тобто які операції потрібно виконати, щоб втратити принаймні один вимір, якщо ми отримуємо множники вигляду $(X - \lambda)^n$, отже, потрібно застосувати $f(v) - \lambda v) = v_r$, а потім до результату v_r знову, тобто $f(v_r) - \lambda v_r$, і повторюємо n разів (це відбувається у випадках тригоналізованих матриць)

Теорема залишається вірною навіть у випадках, коли ендоморфізм не є тригоналізовним, оскільки ми можемо вибрати замикання K' поля K, в якому знаходиться наш ендоморфізм, і він стає тригоналізовним (наприклад, $\mathbb{C}$ для $\mathbb{R}$).

Крім того, характеристичний поліном дає нам $\ker(P_f(X)) = E$, тобто вектори, які стають нульовими під дією $P_f(f)$, цікавий факт полягає в тому, що всі вектори з E належать до цього ядра, і тому $\forall v \in E$, $p_f(f)v = 0$, звідки $p_f(f) = 0$.

Definition 3.29. Нехай Q — розкладений поліном:

$$Q(X) = (X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_r)^{\alpha_r}$$

Поліном

$$Q_1 = (X - a_1) \cdots (X - a_r)$$

називається радикалом Q (тобто розкладений поліном (той самий поліном, але без степенів біля дужок).

Більше того, $Q_1 \mid Q$, тобто радикал полінома ділить сам поліном.

Proposition 3.30. Нехай f є ендоморфізмом і

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

є його характеристичним многочленом. Тоді, якщо f є діагоналізовним, радикал Q_1 анулює f також, тобто

$$Q_1(f) = (f - \lambda_1) \cdots (f - \lambda_r) = 0$$

Intuition. Я даю інтуїцію доведення. Якщо f є діагоналізованою з характеристичним поліномом

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

з $r := \alpha_i > 1$ це <u>не означає</u>, що потрібно застосовувати $(f - \lambda_i \operatorname{Id})$ r разів для зменшення розмірності як у випадку тригоналізованих матриць, але це означає, що E_{λ_i} власний простір власного значення λ_i має розмірність $\alpha_i = r$ і тому $\forall v \in E_{\lambda_i}, f(v) = \lambda_i v$.

Оскільки $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$, якщо $v \in E$, тоді $\exists i \in \{1, \ldots, p\}$ така що $v \in E_{\lambda_i}$ і тому $f(v) - \lambda_i v = 0$ тобто $(f - \lambda_i \operatorname{Id})(v) = 0$. Звідси радикал P_f анулює f.

3.9 Лема про ядра

Lemma 3.31. про ядра Нехай $f \in K^n$ ендоморфізм і

$$Q(X) = Q_1(X) \cdots Q_p(X)$$

многочлен, розкладений у добуток попарно взаємно простих многочленів. Якщо $Q(f) = 0$, то:

$$E = \operatorname{Ker} Q_1(f) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} Q_p(f)$$

Intuition. Оскільки $Q(f) = 0$, тому $\forall v \in E, Q(f)(v) = 0$ отже $\operatorname{Ker}(Q(f)) = E$. $\exists v_1, \ldots, v_p$ такі що $v = v_1 + \ldots + v_p$. Але усі поліноми попарно взаємно прості, тоді лише один з них анулює v_i тому $v_i \in \operatorname{Ker} Q_i(f)$ і це залишається правдою для всіх $v_1, \ldots, v_p$. І оскільки поліноми взаємно прості, тож якщо $k \neq j$ і $Q_k(v_i) = 0$, тоді $Q_j(v_i) \neq 0$ бо Q_j і Q_k відрізняються. Тоді, $\forall i, j$ $\operatorname{Ker} Q_i \cap \operatorname{Ker} Q_j = \{0\}$.

Remark 3.32. Повернімося до прикладу f, яка є проєкцією, отже $f^2 - f = 0$ і $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ анулює f. Проте X і $X - 1$ є взаємно простими, тоді

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$$

Щоб бути більш загальною, нехай f є ендоморфізмом, і $Q(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_p)$ така що $Q(f) = 0$, маємо:

$$E = \underbrace{\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})}_{E_{\lambda_1}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id})}_{E_{\lambda_p}}$$

Звісно, $\lambda_i \neq \lambda_j$. І тоді f є діагоналізованим, оскільки прямою сумою цих власних підпросторів.

Corollary 3.33. Ендоморфізм f є діагоналізованим тоді і тільки тоді, якщо існує анулюючий поліном Q для f, який є розкладним і має лише прості корені [a]

[a]розкладний: $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ - X в степені 1! прості корені: якщо $\alpha_i = 1$ також, тобто множники $(X - \lambda)$ в степені 1!

3.10 Пошук анулюючих многочленів. Мінімальний многочлен

Definition 3.34. Називається мінімальний многочлен для f, позначений $m_f(X)$ - нормалізований многочлен [a] який анулює f найменшого степеня.

[a]тобто з коефіцієнтом 1 при члені найвищого степеня, тобто: $1 * X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$

Proposition 3.35. Анулюючі многочлени f мають вигляд:

$$Q(X) = A(X) m_f(X) \quad \text{де} \quad A(X) \in K[X]$$

тобто $m_f(X)$ ділить $Q(X)$.

Proposition 3.36. Корені мінімального полінома $m_f(X)$ є точно коренями характеристичного полінома $P_f(X)$, тобто власні значення.

Proof. Ми знаємо, що $P_f(X) = A(X) m_f(X)$ тому якщо λ є коренем $m_f(X)$, тоді вона є коренем $P_f(X)$ також. Навпаки, якщо λ є коренем $P_f(X)$ тоді вона є власним значенням, а $m_f(X)$ анулює f, отже

λ також є коренем $m_f(X)$. $\square$

Theorem 3.37. Ендоморфізм f є діагоналізовним тоді і тільки тоді, коли його мінімальний многочлен є розкладним і всі його корені прості.

Example 3.38. 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $P_A(X) = -(X-1)(X+2)^2$, отже, маємо дві можливості:

- $m_A(X) = (X-1)(X+2)$ - отже A діагоналізована
- $m_A(X) = (X-1)(X+2)^2$ - отже A не діагоналізована

Обчислимо:

$$(A-I)(A+2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, $m_f(X) = (X-1)(X+2)$ і тому A є діагоналізованою.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Маємо: $P_A(X) = -(X-1)(X-2)^2$, отже:

$$m_A(X) = \begin{cases} (X-1)(X-2) & \text{тобто } A \text{ діагоналізована} \\ (X-1)(X-2)^2 & \text{тобто } A \text{ не діагоналізована} \end{cases}$$

Обчислимо:

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси $m_A(X) \neq (X-1)(X-2)$ і тому A не є діагоналізованою.

Appendices

ДОДАТОК A

Нагадування про концепції Лінійної Алгебри

A.1 Матриці

A.1.1 Множення матриць

Definition A.1. Нехай $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ та $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ такі що $A = (a_{j,i})$ та $B = (b_{m,k})$, тоді:

$$AB = C = (c_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,k})$$

A.1.2 Слід

Definition A.2. Слід $n \times n$ квадратної матриці A, позначений $\text{tr}(A)$, є сумою діагональних елементів

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

де a_{ii} є діагональними елементами матриці A.

Property. сліду.

- Лінійність:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(cA) = c\text{tr}(A), \quad c \in \mathbb{R} \text{ (або } \mathbb{C})$$

- Транспонування:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$$

- Множення матриць:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad (\text{якщо } A \text{ та } B \text{ мають розмір } n \times n)$$

  Однак, слід не є дистрибутивним щодо множення:

$$\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(BC)$$

- Власні значення:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

  де λ_i є власними значеннями A. Це робить слід важливим інструментом у спектральному аналізі.

- Слід Одиничної Матриці

$$\operatorname{tr}(I_n) = n$$

оскільки всі діагональні елементи дорівнюють 1.

Example A.3. Для

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

слід дорівнює:

$$\operatorname{tr}(A) = 3 + 5 + 9 = 17$$

Example A.4. Якщо

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

тоді

$$\operatorname{tr}(B + C) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = 6 + 8 = 14$$

що відповідає

$$\operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(C) = (2 + 3) + (4 + 5) = 14$$

таким чином підтверджуючи лінійність.

Література

[1] Johannes Anschütz. Algèbre linéaire 2 (OLMA252). 2024-2025.

[2] Grifone Joseph. Algèbre linéaire. fre. 4e édition. Toulouse: Cépaduès Éditions , DL 2011, 2011. isbn: 978-2-85428-962-6.

[3] Yehor Korotenko. sci-trans-git. Вер. 0.2.0-alpha. 2025. doi: 10.5281/zenodo.15775111. url: https://github.com/DobbiKov/sci-trans-git.