Analyse Numérique avec Python - Aide-Mémoire

Basé sur les notes de Yehor Korotenko (Prof. Jean-Baptiste APOUNG KAMGA)

April 28, 2025

1. Interpolation Polynomiale

Définition

Soit $(x_i, y_i)_{i=0,\dots,N-1}$ un nuage de N points distincts. Interpoler consiste à trouver un polynôme $P_{N-1}(x)$ de degré au plus $N-1$ tel que $P_{N-1}(x_i) = y_i$ pour tout i. Si $y_i = f(x_i)$, P_{N-1} est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f.

Polynôme de Lagrange

Existence et Unicité (Thm 2.17): Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i L_i(x) \quad \text{où} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Erreur d'interpolation (Thm 2.19): Si $f \in C^N([a,b])$ et P_{N-1} interpole f aux points $x_0, \dots, x_{N-1} \in [a,b]$:

$$\forall x \in [a,b], \exists \xi_x \in]a,b[\text{ tel que } f(x) - P_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\xi_x)}{N!} \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i)$$

On note $\omega_N(x) = \prod_{i=0}^{N-1}(x - x_i)$. **Python:** `from scipy.interpolate import lagrange; p = lagrange(x_nodes, y_nodes)`

Méthode des Différences Divisées (Newton)

Soit $f[x_0, \dots, x_k]$ la différence divisée d'ordre k. $f[x_i] = y_i$ $f[x_i, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$ Le polynôme de Newton est:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \dots, x_{N-1}] \prod_{i=0}^{N-2} (x - x_i)$$

$P(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega_k(x)$ où $a_k = f[x_0, \dots, x_k]$ et $\omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$.

Phénomène de Runge et Polynômes de Tchebychev

L'interpolation avec des points équidistants peut mal converger. Les **points de Tchebychev** sur $[-1,1]$ minimisent $||\omega_N(x)||_\infty$:

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2N}\right) \quad \text{pour } j = 0, \dots, N-1 \quad (\text{racines de } T_N(x))$$

Sur $[a,b]$: $t_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_j$. Polynômes de Tchebychev: $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$.

2. Intégration Numérique (Quadrature)

But: Calculer $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. **Formule de quadrature:** $\hat{I}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(x_i)$. Une formule est d'**ordre** p si elle est exacte pour tout polynôme de degré $\leq p-1$.

Formules de Newton-Cotes (points x_i équidistants)

Erreur (générale): Si la formule est d'ordre p, l'erreur $E(f) = I(f) - \hat{I}(f)$ est: $E(f) = C \cdot h^{p+1} f^{(p)}(\xi)$ (pour formule élémentaire, C constante) ou $E(f) = C \cdot (b-a)h^p ||f^{(p)}||_\infty$.

- **Rectangle à gauche (élémentaire α, β):** $\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx (\beta - \alpha) f(\alpha)$. Ordre 1. Erreur: $E_e(f) = \frac{f'(c)}{2}(\beta - \alpha)^2$.

- **Point Milieu (élémentaire α, β):** $\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx (\beta-\alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Ordre 2. Erreur: $E_e(f) = \frac{f''(c)}{24}(\beta-\alpha)^3$.
- **Trapèze (élémentaire α, β):** $\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$. Ordre 2. Erreur: $E_e(f) = -\frac{f''(c)}{12}(\beta-\alpha)^3$.
- **Simpson (élémentaire α, β):** $\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx \frac{\beta-\alpha}{6}\left(f(\alpha)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\beta)\right)$. Ordre 4. Erreur: $E_e(f) = -\frac{f^{(4)}(c)}{2880}(\beta-\alpha)^5$.

Formules composites: On subdivise $[a, b]$ en M sous-intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{M}$ et on applique la formule élémentaire sur chaque sous-intervalle. Ex. Trapèze composite: $I_T(f) = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_M)}{2} + \sum_{i=1}^{M-1} f(x_i)\right)$. Erreur: $E_T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$.

Quadrature de Gauss-Legendre

Points x_i et poids w_i choisis pour maximiser l'ordre. Pour N points, la formule est exacte pour les polynômes de degré $\leq 2N-1$. Sur $[-1, 1]$: $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$. Les x_i sont les racines du N-ième polynôme de Legendre $L_N(x)$. $L_0(x) = 1, L_1(x) = x, (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$.
Python: `from scipy.integrate import quad; I, err = quad(f, a, b)`

3. Résolution Approchée d'Équations Différentielles Ordinaires (EDO)

Problème de Cauchy: $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, pour $t \in [t_0, T]$. Discrétisation: $t_n = t_0 + n\Delta t$. On cherche $x_n \approx y(t_n)$. Forme générale des schémas à un pas explicites: $x_{n+1} = x_n + \Delta t \Phi(t_n, x_n, \Delta t)$.

Schémas Explicites à un Pas

- **Euler explicite**
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n, x_n)$$
Ordre local de consistance: 1. Erreur globale: $O(\Delta t)$.
- **Euler implicite**
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_{n+1}, x_{n+1})$$
- **Clank-Nicolas**
$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}\big(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\big)$$
- **Point-Milieu**
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f\big(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, x_n)\big)$$
Ordre local: 2. Erreur globale: $O(\Delta t^2)$.
- **de Heun**
$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}\big(f(t_n, x_n) + f\big(t_{n+1}, x_n + \Delta t f(t_n, x_n)\big)\big)$$
Ordre local: 2. Erreur globale: $O(\Delta t^2)$.

Consistance, Stabilité, Convergence

- **Erreur locale de troncature:** $\xi_n(\Delta t) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t \Phi(t_n, y(t_n), \Delta t)$. Le schéma est **consistant d'ordre** q si $||\xi_n(\Delta t)|| = O(\Delta t^{q+1})$.
- **Stabilité:** Un schéma est stable si de petites perturbations des données initiales ou des calculs n'entraînent pas de grandes déviations de la solution numérique. Pour Φ Lipschitzienne en y de constante A: stable avec constante $S = e^{A(T-t_0)}$.
- **Convergence (Thm de Lax):** Pour un problème bien posé, un schéma consistant est convergent si et seulement si il est stable. Si le schéma est stable et consistant d'ordre q, alors il est convergent d'ordre q: $||y(t_n) - x_n|| = O(\Delta t^q)$.

4. Résolution Approchée d'Équations Ordinaires (EO): $f(x) = 0$

Méthode de Dichotomie (Bissection)

Principe: Soit f continue sur $[a, b]$ avec $f(a)f(b) < 0$. À l'étape k, $I_k = [a_k, b_k]$. $c_k = (a_k + b_k)/2$. Si $f(a_k)f(c_k) < 0$, $I_{k+1} = [a_k, c_k]$. Sinon $I_{k+1} = [c_k, b_k]$. **Convergence:** Linéaire. $|x^* - c_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$. **Coût:** 1 éval. de f par itération.

Méthode de Fausse Position (Regula Falsi)

Principe: Similaire à la dichotomie, mais c_k est l'intersection de la sécante passant par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ avec l'axe des x. $c_k = b_k - f(b_k)\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}$. **Convergence:** Linéaire (souvent plus rapide que la dichotomie, mais peut être lente si une extrémité reste fixe).

Méthode du Point Fixe

Problème: Trouver x^* tel que $x^* = g(x^*)$ (équivalent à $f(x^*) = 0$ si $g(x) = x - f(x)$ ou autre transformation). **Itération:** $x_{k+1} = g(x_k)$. **Convergence (Thm du Point Fixe):** Si $g(I) \subset I$, I fermé, et g est contractante sur I (i.e., $\exists K < 1$ t.q. $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$), alors g a un unique point fixe x^* dans I et la suite (x_k) converge vers x^*. Si $g \in C^1(I)$ et $|g'(x)| \leq K < 1$ sur I, alors g est contractante. **Ordre de convergence:**

- Si $g'(x^*) \neq 0$, convergence linéaire avec $K_1 = |g'(x^*)|$.
- Si $g'(x^*) = \cdots = g^{(p-1)}(x^*) = 0$ et $g^{(p)}(x^*) \neq 0$, convergence d'ordre p.

Méthode de Newton-Raphson

Principe: Approximation de f par sa tangente en x_k. $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. C'est un cas particulier de point fixe avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On a $g'(x^*) = 0$ si $f'(x^*) \neq 0$. **Convergence:**

- Quadratique (ordre 2) si $f'(x^*) \neq 0$ (racine simple).
- Linéaire si $f'(x^*) = 0$ (racine multiple d'ordre $m > 1$). $K_1 = 1 - 1/m$.

Coût: 1 éval. de f et 1 éval. de f' par itération. **Python (pour point fixe):**

```
def PointFixe(g, x0, eps, IterMax):
    # ... (implementation)
def Newton(f, f_prime, x0, eps, IterMax):
    g = lambda x: x - f(x)/f_prime(x)
    return PointFixe(g, x0, eps, IterMax)
```