Notes du cours d'Algebre Linéaire 2

Yehor Korotenko

April 2, 2025

Abstract

Le cours parte sur deux sujets liées:

1. la théorie des espaces euclidiens (i.e un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire) et leur endomorphismes
2. la réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

Contents

CHAPTER 1

Espaces euclidiens

1.1 Introduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont réels. On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Produit scalaire:

Definition 1.1. Une forme bilinéaire sur E est une application

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B((u, v)) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes $\forall u, v, w \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2. $B(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(v, w)$

B est dite

1. symétrique si $B(u, v) = B(v, u)$ $\forall u, v \in E$
2. positive si $B(., u) \geq 0 \, \forall u \in E$
3. définie si $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Notation. Produit scalaire est noté: $< u, v >$

Example 1.2. .

1. $E = \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$

$$< X, Y >:= \sum_{n=1}^{n} x_i y_i$$

On l'appelle "produit scalaire canonique"(ou usuel)

2. $E = \mathbb{R}^2$ et $< X, Y >= 2x_1y_1 + x_2y_2$
3. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \ni f, g$ (un espace des fonctions continues)

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t) \, dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$< A, B >:= Tr(A^t B)$$

Proposition 1.3. Un espace vectoriel non-nul possede une infinité de produits scalaires differents.

Definition 1.4. Un espace euclidien est un couple $(E, < . >)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $< . >$ est un produit scalaire sur E.

Property. Soit $(E, < . >)$ un espace euclidien. On pose:

$$\|X\| := \sqrt{< X, X >} \qquad X \in E$$

la norme (ou longeur) de X. (Il est bien définie car $< ., . >$ est toujours positif)

Property. Soient $X, Y \in E$, alors:

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|^2$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\|X + Y\|^2 = \sqrt{\langle X + Y, X + Y\rangle}^2 &= \langle X + Y, X + Y\rangle \\
&= \langle X, X + Y\rangle + \langle Y, X + Y\rangle \\
&= \langle X, X\rangle + \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle + \langle Y, Y\rangle \\
&= \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|
\end{aligned}$$

□

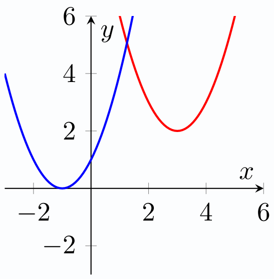
Lemma 1.5. inégalité de Cauchy-Schwarz On a

$$| < u, v > | \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall u, v \in E$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires, i.e $\exists t \in R$ tel que $u = tv$ ou $v = tu$

Proof. Si $v = 0$, clair
Si $v \neq 0$ on considère $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|u + tv\|^2 &=< u + tv, u + tv > \\
&=< u, u + tv > +t < v, u + tv > \\
&=< u, u > +t < u, v > +t < v, u > +t^2 < v, v > \\
&= \|u\|^2 + 2t < u, v > +t^2\|v\|^2 = f(t)
\end{aligned}$$



Cas 1: $f(t)$ n'a pas de racinces différentes

$$\begin{aligned}
&\Delta = 4 < u, v >^2 = 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow < u, v >^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\
&\Rightarrow | < u, v > | \leq \|u\|\|v\|
\end{aligned}$$

Cas 2: $f(t)$ a seulement une racine:

$$
\begin{aligned}
&\Delta = 0 \\
\Rightarrow &\exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \|u + tv\|^2 = 0 \\
\Rightarrow &u + tv = 0 \Rightarrow u = -tv
\end{aligned}
$$

La définition suivante sera étudiée dans le cours d'analyse:

Definition 1.6. On dit que $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme si:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

Lemma 1.7. L'application

$$\sqrt{< .,. >} = \|.\| : E \to \mathbb{R}_+$$

est dite norme euclidienne.

Proof. 1), 2) sont faites

3) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\Rightarrow \|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Proposition 1.8. On a les identités suivantes $\forall u, v \in E$

1. Identité du parallèlograme:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u^2\| + \|v\|^2)$$

2. Identité de polarisation:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

Proof. .

1.

$$
\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\
&= \|u\|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2
\end{aligned}
$$

2. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2$

On a:

- $(1) + (2)$: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- $(1) - (2)$: $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4 \langle u, v \rangle$

1.2 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur E.

Definition 1.9. $u, v \in E$ sont dits orthogonaux si $< u, v >= 0$. On note $u \perp v$

- Deux sous-ensembles A, B de E sont orthogonaux si:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad < u, v >= 0$$

- Si $A \subseteq E$ on appelle **orthogonal de** A, noté $A^\perp$ l'ensemble

$$A^\perp = \{u \in E \,|< u, v >= 0 \quad \forall v \in A\}$$

  Aussi connu comme **orthogonal complement of** A

- Une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$. Elle est dite orthonomée si elle est orthogonale et de plus $\|v_i\| = 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Example 1.10. $E = \mathbb{R}^n$, $<,>$ produit scalaire canonique

$$v_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$$

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$(v_1, \ldots, v_n)$ est une base canonique

Proposition 1.11.

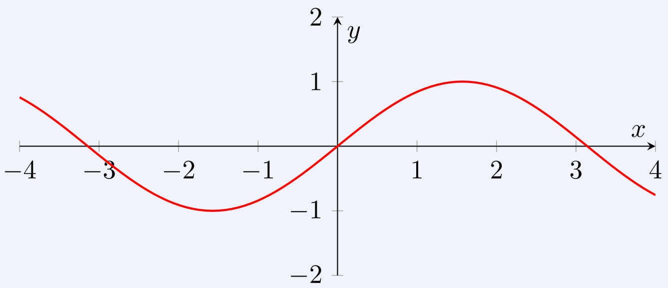
1. Si $A \subseteq E$ alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
2. Si $A \subseteq B$ alors $B^\perp \subseteq A^\perp$
3. $A^\perp = Vect(A)^\perp$
4. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Proof. Exercice

Example 1.12.

1. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$$



Alors, $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ sont orthogonaux: $2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^{1} \cos(t)\sin(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin(2t)\, dt = 0$$

Definition 1.13. Si E est un espace euclidien, on appelle "dual de E" l'ensemble

$$L(E, \mathbb{R}) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ est linéaire}\}$$

On le note E^*. Un élément $f \in E^*$ s'appelle une forme linéaire.

Rappele:

Proposition 1.14. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie, on $dim(L(F, F')) = dim(F) \cdot dim(F')$
En particulier, $dim(F^*) = dim(F)$. En effet si $n = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F est $n' = (e'_1, \ldots, e'_q)$ est une base de F', alors l'application

$$\begin{aligned} : L(F, F') &\longrightarrow Mat_{f \times p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (f) = Mat_{n,n'}(f). \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc $dim(F, F) = qp$

Theorem 1.15. Théorème du rang: Si F est un e.v de dimension finie et $f : F \to F'$ linéaire, alors $dim(F) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$

Proposition 1.16. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie tq $dim(F) = dim(F')$ et $f : F \to F'$ linéaire, alors f est un isomorphisme $\Leftrightarrow Ker(f) = 0$

Proof. On rappelle que si G, G' sont des sous-e.v de dimension finie dans le même e.v, alors:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ et } dim(G) = dim(G')$$

$\Rightarrow$) f injective $\Rightarrow Ker(f) = 0$
$\Leftarrow$) Soit $Ker(f) = 0$.
Alors, forcément $dim(Ker(f)) = 0$ et par le théorème du rang on a $dim(F) = dim(Im(f))$, donc $Im(f) = F'$

Lemma 1.17. du Riesz:
Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie et $f \in E^*$. Alors, $\exists! u \in E$ tel que $f(x) = \langle u, x \rangle \quad \forall x \in E$. La forme linéaire f est donné par un produit scalaire avec un vecteur.

Notation. Pour tout $v \in E$ on note par f_v l'application:

$$\begin{aligned} f_v : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_v(x) =< v, x > . \end{aligned}$$

f_v est linéaire $\forall v \in E$ i.e E^*

Proof. lemma de Reisz
On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

ϕ est linéaire (exercice). ϕ est injective:

$$v \in Ker(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

en particulier pour x = v, on a:

$$0 = f_v(v) =< v, v >\Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} dim(E) = dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ est un isomorphisme} \\ &\Rightarrow \phi \text{ bijective} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists ! n \in E \text{ tq } \phi(n) = f, \text{ i.e } f(x) =< n, x > \forall x \in E$$

Dans ce cas $E = \mathbb{R}^n$, le lemme de Riesz est tres simple à comprendre:
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$x = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i f(e_i) =< (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (a_1, \ldots, a_n) >=< (a_1, \ldots, a_n), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) >$$

1.3 Bases orthonormales

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel $(dim(F) < \infty)$ car $dim(E) < \infty$.

Note.

$$F^\perp := \{x \in E \mid \langle X, Z \rangle = 0 \, \forall z \in F\}$$

l'orthogonale de F.

Theorem 1.18. On a $E = F \oplus F^\perp$.
En particulier, $dim(F^\perp) = dim(E) - dim(F)$ et $F = (F^\perp)^\perp$

Proof. On doit montrer que:

1. $F \cap F^\perp = \emptyset$
2. $E = F + F^\perp$ i.e $\forall x \in E, \exists x' \in F,\, x'' \in F^\perp$ tq $x = x' + x''$

1. Soit $x \in F \cap F^\perp$
   $\Rightarrow \langle X, Z \rangle = 0 \, \forall Z \in F$ car $x \in F \Rightarrow \langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow x = 0(\langle , \rangle$ est définie)
2. Soit $x \in E$. Considérons $f_x \in E^*$, i.e $f_x : E \to \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y \rangle$ et $f := f_{x|F} : F \to \mathbb{R} \Rightarrow f \in E^*$ Lemme de Riesz $\Rightarrow \exists ! x' \in F$ tq $f = f_{x'} : F \to \mathbb{R}, z \mapsto \langle x', z \rangle$
   $\Rightarrow f_x(z) = f_{x'}(z) = f(z) \forall z \in F$ (Attention: pas l'égalité pour tout z dans E)
   Posons $x'' := x - x'$, i.e $x = x' + x'' \in F$. Montrons $x'' \in F^\perp$.
   Si $z \in F$, $\langle x'', z \rangle = \langle x - x', z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x', z \rangle = 0$. Donc $x'' \in F^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$ $(dim(E) = dim(F) + dim(F^\perp))$
   $F \subseteq (F^\perp)^\perp$ car $\langle x, z \rangle = 0 \, \forall x \in F \, \forall z \in F^\perp$

   $$dim(F) = dim(E) - dim(F^\perp)$$

   car $E = G \oplus G^\perp$, donc $dim(G) = dim(E) - dim(G^\perp)$ pour $G = F^\perp$, $dim(F^\perp) = dim(G)$

□

Definition 1.19. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$

- Une famille $(v_i)_{i \geq 0}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si pour $i \neq j$ on a $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ i.e $v_i \perp v_j$

- Une famille orthonormale de E est une famille orthogonale $(v_i)_{i\geq 0}$ tq de plus $\|v_i\| = 1$ pour $i \geq 0$

Example 1.20. 1. $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. La base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale car

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

2. Dans $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. La famille $(\cos(t), \sin(t))$ est orthogonale. La famille $(1, t^2)$ n'est pas orthogonale:

$$\left\langle 1, t^2 \right\rangle = \int_{-1}^{1} 1t^2\,dt = \frac{2}{3} \neq 0$$

Proposition 1.21. Une famille orthogonale constituée de vecteurs non-nuls est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.

Proof. Suppososns $(v_1, \ldots, v_n)$ orthogonale avec $v_i \neq 0\,\forall i = 1, \ldots, n$
si $\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\alpha_i}_{\in\mathbb{R}} v_i = 0$, alors

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} 0 = \left\langle v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left\langle v_i, v_j\right\rangle = \alpha_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0}$$

Donc $\alpha_i = 0\,\forall i = 1, \ldots, n$.
Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est orthonormale, alors $\|v_i\| = 1$. Donc $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. ☐

Intuition. Les vecteurs orthogonales (perpendiculaires) ne sont jamais dans l'un l'autre (i.e $e_i = \lambda e_j$ n'est pas possible) si les vecteurs sont liés, soit l'angle est < 90 (donc les vecteurs ne sont pas orthogonales, absurd), (ils sont dans l'un l'autre, ils ne sont pas orthogonales, absurd). Donc ils sont bien libres.

Definition 1.22. $(E, \langle , \rangle)$ espace euclidien. Une famille $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale (où BON) si elle est une base et famille orthonormale.

Theorem 1.23. $(E, \langle , \rangle)$ espace euclidien. Alors, il admet une BON.

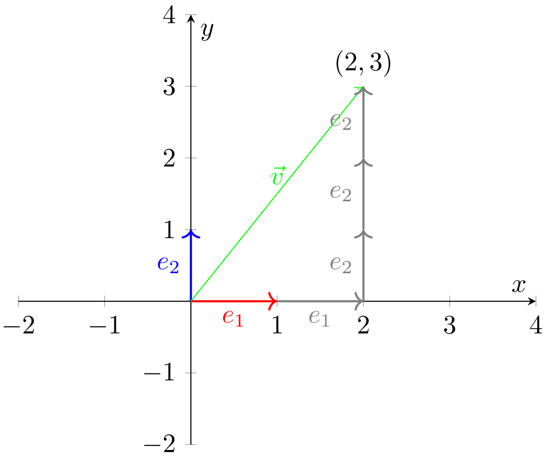
Proof. Soit $n := dim(E)$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthogonale (du point de vue du cardinal p) tq $e_i \neq 0\,\forall i = 1, \ldots, p$.
Supposons par l'absurde que $p < n$. Posons $F = Vect(e_1, \ldots, e_p)$. Alors, $E = F \oplus F^{\perp}$ et $dim(F) \leq p < n$. Donc $F^{\perp} \neq \{0\}$. Soit $x \in F^{\perp}$, $x \neq 0$. Alors, $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est orthogonale de cardinale $> p$. Donc, $p = n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Pour avoir une famille orthonormale $(e'_1, \ldots, e'_n)$ il suffit de prendre $e'_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i\,\forall i = \{1, \ldots, n\}$. ☐

Proposition 1.24. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E. Si $x \in E$, on a:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$$

Autrement dit, le réél $\langle x, e_i \rangle$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Intuition. L'orthonormalité de la base nous simplifie la vie. Mais avant, petite introduction. Soit un e.v $E = \mathbb{R}^2$ et la base $(e_1, e_2) = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$. Soit un vecteur $\vec{v} = (2, 3)$:



Donc, on peut écrire $\vec{v} = \vec{(2, 3)} = 2 \cdot \vec{e_1} + 3 \cdot \vec{e_2}$. Les x et y (les coordonnées de v) nous donnes combien de parties de chaque vecteur de bases (le nombre peut être $\in \mathbb{R}$) et prendre leurs sommes, pour obtenir $\vec{v}$. (Le plus simple: combien on doit aller à gauche et en haut).

Dans la base orthonormale $\langle v, e_i \rangle$ nous donne combien on prend d'un vecteur e_i pour faire le vecteur $\vec{v}$ et $\vec{e_i}$ donne la direction. D'où $\langle v, e_1 \rangle$ équivaut à 2, et $\langle v, e_2 \rangle$ à 3, puis:

$$\vec{v} = \underbrace{\langle v, e_1 \rangle}_{=2} \cdot \vec{e_1} + \underbrace{\langle v, e_2 \rangle}_{=3} \cdot \vec{e_2}$$

Habituelement, pour trouver les coordonnées dans une base, on devrait résoudre un système linéaire, tandis qu'une base orthonormale permet de les obtenir en calculant le produit scalaire avec chaque vecteur de la base, ce qui est beaucoup plus simple.

Proof. Posons $y := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\forall j = 1, \dots, n, \\
&\langle x - y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle}_{\substack{\text{moved out}\\ \text{like constant}}} \langle e_i, e_j \rangle \\
=&\langle x, e_j \rangle \\
&- \left(\langle x, e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1, e_j \rangle}_{=0} + \dots + \langle x, e_{j-1} \rangle \underbrace{\langle e_{j-1}, e_j \rangle}_{=0} + \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} + \langle x, e_{j+1} \rangle \underbrace{\langle e_{j+1}, e_j \rangle}_{=0} + \dots + \langle x, e_n \rangle \underbrace{\langle e_n, e_j \rangle}_{=0} \right) \\
&(\forall i \neq j, \ \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ car un produit scalaire des vecteur orthogonaux}) \\
&(\forall j \ \langle e_j, e_j \rangle = 1 \text{ car un produit scalaire de même vecteur}) \\
=&\langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} = 0
\end{aligned}$$

Donc, $x - y \in Vect(e_1, \dots, e_n)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$. Donc $x = y$ □

Corollary 1.25. $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$

Proof. Si $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ donc

$$\|x\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

□

1.4 Matrices et produits scalaires

Proposition 1.26. Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ une BON. Soient $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice représentative de f dans ε, i.e, $A = Mat_\varepsilon(f)$

$$a_{i,j} = \langle f(e_i), e_j \rangle \ \forall i, j = 1, \dots, n$$

Proof. A est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $f(e_j)$ écrits dans la base ε:

$$A = (f(e_1)| \dots |f(e_n)) \quad f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Car $\forall v \in E$, $v = c_1 e_1 + \dots c_n e_n$ donc $f(v) = c_1 f(e_1) + \dots c_n f(e_n)$ par la linéarité, donc il nous reste à étudier chaque $f(e_j)$

$$f(e_j) = a_{1,j} e_1 + \dots a_{n,j} e_n \Rightarrow$$
$$\langle f(e_j), e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \langle e_k, e_i \rangle = a_{k,j}$$

car $\langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ 1 \text{ si } k = j \end{cases}$ Donc:

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle$$

□

La matrice d'un produit vectoriel est très utile dans l'algèbre linéaire. Avant donner une definition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, un espace K et une forme bilinéaire $b : E \times E \longrightarrow K$. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, alors: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, alors on a:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j)$$

b est donc détérminé par la conaissance des valeurs $b(e_i, e_j)$ sur une base.

Definition 1.27. On appelle **matrice de** b dans la base $\{e_i\}$ la matrice:

$$M(b)_{e_i} = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \dots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \dots & b(e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b(e_n, e_1) & \dots & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Ainsi l'élément de la i$^{\text{ème}}$ ligne et j$^{\text{ème}}$ colonne est le coefficient de $x_i y_j$.

Example 1.28. La matrice du produit scalair canonique dans $\mathbb{R}^3$ est:

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$Mat(\langle,\rangle)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.29. produit scalair représenté par une matrice.

Notons:

$$\underbrace{A = M(b)_{e_i}}_{\text{matrice de produit scalair}} \qquad \underbrace{X = M(x)_{e_i}}_{\substack{\text{coordonnées de } x \\ \text{dans la base } e_i}} \qquad \underbrace{Y = M(y)_{e_i}}_{\substack{\text{coordonnées de } y \\ \text{dans la base } e_i}} \qquad (x, y \in E)$$

Alors, on a:

$$b(x, y) = X^t AY$$

Example 1.30. Repronnons l'exemple avec $b = \langle,\rangle$ le produit scalair canonique dans $\mathbb{R}^3$. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc:

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle = X^t AY &= \overbrace{(1, 2, -1)}^{X^t} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \times \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{Y} \\ &= \underbrace{(1, 2, -1)}_{X} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A \times Y} \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2 + 6 - 1 = 7 \end{aligned}$$

TODO. changement de base de la matrice d'une forme bilinéaire

1.5 Projections orthogonales

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Alors, $E = F \oplus F^\perp$. Donc $\forall x \in E$ s'ecrit

$$x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in F^\perp}{x_{F^\perp}}$$

Definition 1.31. La **projection orthogonale** de E dans F est la projection p_F de E sur F parallèlement à $F^\perp$, i.e

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow F \\ x = x_F + x_{F^\perp} &\longmapsto p_F(x = x_F + x_{F^\perp}) = x_F. \end{aligned}$$

Remark 1.32.

1. p_F est linéaire

2. $\forall x \in E\, p_F(x)$ est complétement caractérisé par la propriété suivante:
Soit $y \in E$, alors
$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \Big(\underbrace{y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp}_{\Rightarrow y = x_F}\Big)$$
En particulier $\langle p_F(x), x - p_F(x)\rangle = 0$. Alors, si $(v_1, \dots, v_R)$ est une BON de F, on a:
$$\forall x \in E,\, p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i\rangle\, v_i$$
En effet, il suffit de vérfier que le vecteur $y = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i\rangle\, v_i$ vérfie:
$$y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp$$

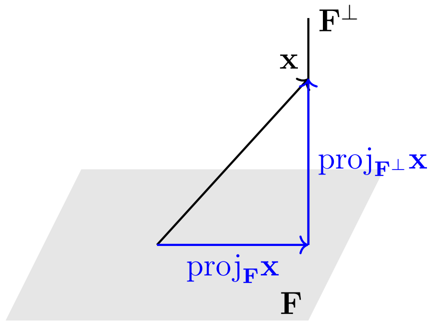


Figure 1.1: Projection

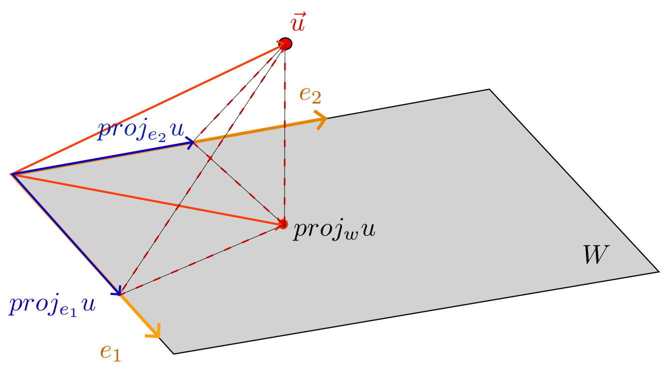


Figure 1.2: Projection avec BON

Proposition 1.33. Soit $x \in E$. Alors,
$$\|x - p_F(x)\| = inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$$
i.e $\|x - p_F(x)\|$ est la distance de x à F.
Voir Figure 1.1

Proof. Comme $p_F(x) \in F$ il suffit de prouver que, si $y \in F$, alors

$$\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$$

Mais, $$\underbrace{\|x-y\|^2}_{(x-p_F(x))+(p_F(x)-y)} = \|x-p_F(x)\|^2 + 2\overbrace{\left\langle \overset{\in F^\perp}{x - p_F(x)}, \overset{\in F}{p_F(x) - y} \right\rangle} = 0 + \underbrace{\|p_F(x) - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

□

Theorem 1.34. Gram-Shmidt
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre d'élement $\in E$. Alors, il existe une famille $(w_1, \ldots, w_n)$ orthogonale tq

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad Vect(v_1, \ldots, v_i) = Vect(w_1, \ldots, w_i)$$

De plus, ce théorème nous donne un procédé de construction d'une base orthonormée à partir d'une base quelconque.

Proof. du Théorème 1.34 Construisons la base orthogonale: $\{w_1, \ldots, w_p\}$. Posons d'abord:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 + \lambda w_1, & \text{avec } \lambda \text{ tel que } w_1 \perp w_2 \end{cases}$$

En imposant cette condition on trouve:

$$0 = \langle v_2 + \lambda w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + \lambda \|w_1\|^2$$

Comme $w_1 \neq 0$, on obtient $\lambda = -\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}$. On remarque que:

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \end{cases}$$

donc $Vect\{v_1, v_2\} = Vect\{w_1, w_2\}$.

Une fois construit w_2, on construit w_3 en posant:

$$w_3 = v_3 + \mu w_1 + \nu w_2$$
$$\text{avec } \mu \text{ et } \nu \text{ tels que: } w_3 \perp w_1 \text{ et } w_3 \perp w_2$$

On peut voir $w_3 = v_3 - \lambda' w_1 - \lambda'' w_2$ comme $w_3 = v_3 - proj_{F_2} v_3$ où $F_i = Vect\{w_1, \ldots, w_i\}$

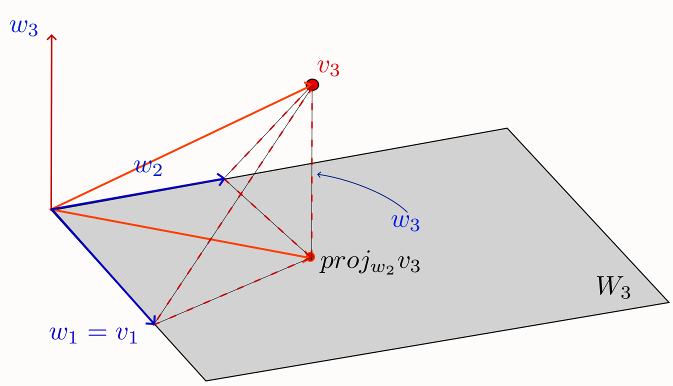


Figure 1.3: Vecteur par projection

Ceci donne

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_3 + \mu w_1 + \nu w_2, w_1\rangle = \langle v_3, w_1\rangle + \mu\underbrace{\langle w_1, w_1\rangle}_{=\|w_1\|^2} + \nu\underbrace{\langle w_2, w_1\rangle}_{=0} \\ &= \langle v_3, w_1\rangle + \mu\|w_1\|^2 \end{aligned}$$

d'où $\mu = -\frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}$. De même, en imposant que $w_3 \perp w_2$, on trouve $\nu = -\frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}$. Comme

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 - \lambda w_1 \\ v_3 = w_3 - \mu w_1 - \nu w_2 \end{cases}$$

on voit bien que $Vect\{w_1, w_2, w_3\} = Vect\{v_1, v_2, v_3\}$. C'est-à-dire, $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base orthogonale de l'éspace engendre par v_1, v_2, v_3. On voit bien maintenant le procédé de récurrence.

Supposons avoir construit $w_1, \ldots, w_{k-1}$ pour $k \leq p$. On pose:

$$\begin{aligned} w_k &= v_k + \text{ combinaison linéaire des vecteurs déjà trouvés} \\ &= v_k + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{k-1} w_{k-1} \end{aligned}$$

Les conditions $w_k \perp w_i$ (pour $i \in \{1, \ldots, k-1\}$) sont équivalentes à:

$$\lambda_i = -\frac{\langle v_k, w_i\rangle}{\|w_i\|^2}$$

comme on le vérifie immédiatement. Puisque $v_k = w_k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_{k-1} w_{k-1}$, on voit par récurrence que $Vect\{w_1, \ldots, w_k\} = Vect\{v_1, \ldots, v_k\} \Leftrightarrow \{w_1, \ldots, w_k\}$ est une base orthogonale de $Vect\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Ce qu'il nous rester c'est à la normaliser, i.e $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ $e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$, d'où $\{e_1, \ldots, e_k\}$ est une base orthonormale de $F = Vect\{v_1, \ldots, v_k\}$. □

Proposition 1.35. Pour comprendre cette proposition, je vous conseil de lire la section 1.6

Toute projection orthogonale est autoadjoint, i.e si p est une projection orthogonale, donc:

$$p^* = p$$

En notation matricielle: soit A une matrice de la projection p, donc:

$$A^T = A$$

1.6 Isométries et Adjoints

1.6.1 Isométries

Definition 1.36. Une **isométrie** de E (ou **transformation orthogonale**) est un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ préservant le produit vectoriel, i.e:

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E$$

Definition 1.37. Soient $x, y \in E$ deux vecteurs non nuls. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir lemma 1.5):

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Alors, il existe un et un seul $\theta \in [0, \pi]$ tel que:

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{1.1}$$

θ est dit **angle** (non-orienté) entre les vecteurs x et y.

Proposition 1.38. Si f est une isométrie de E, donc, on a:

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$$

Proof. Supposons que f est une isométrie de E. Soit $x, y \in E$. Par définition: $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, donc, posons $y := x$, alors, on a:

$$\underbrace{\langle f(x), f(x)\rangle}_{\|f(x)\|^2} = \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|^2}$$
$$\Leftrightarrow \|f(x)\|^2 = \|x\|^2$$
$$\Leftrightarrow \|f(x)\| = \|x\|$$

□

Proposition 1.39. Soit f une isométrie dans E, alors:

1. f est bijective
2. f préserve la distance euclidienne et les angles

Proof. Soit f une isométrie dans E et deux vecteurs $u, v \in E$

1. $$\|f(u) - f(v)\| = \sqrt{\langle f(u), f(v)\rangle} = \sqrt{\langle u, v\rangle} = \|u - v\|$$

2. Soit θ_1 angle entre $f(u)$ et $f(v)$ et θ_2 angle entre u et v, donc:

$$\cos\theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|}$$

$$\cos\theta_2 := \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Par définition, $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, d'après proposition 1.38, $\forall x, \|f(x)\| = \|x\|$, donc:

$$\cos\theta_1 := \frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos\theta_2$$

□

Definition 1.40. Soit F un sous-espace vectoriel de E, donc $E = F \oplus F^\perp$ d'où $\forall v \in E, \exists v_1 \in F, v_2 \in F^\perp$ tel que $v = v_1 + v_2$. On pose:

$$s_F(v) = v_1 - v_2$$

et on appelle s_F une symétrie orthogonale d'axe F.

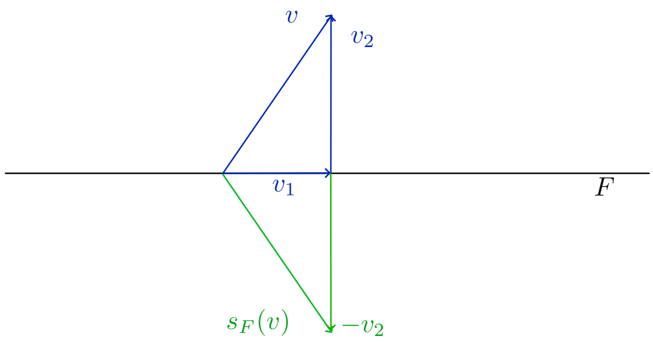


Figure 1.4: Symétrie orthogonale d'axe F

Proposition 1.41. La symétrie orthogonale est une isométrie.

Proof. TODO ou pas besoin □

Proposition 1.42. f est une isométrie si et seulement si elle transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.

Proof. Soit f une isométrie, alors elle transforme toute base en une base car f est bijective par la prop. 1.39.

- ($\Rightarrow$) Supposons que f est une isométrie. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée, alors, on a:

  $$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

  Donc, $\{f(e_i)\}$ est une base orthonormée.

- ($\Leftarrow$) Supposons, qu'il existe une base orthonormée $\{e_i\}$ telle que $\{f(e_i)\}$ est aussi une base orthonormée. De plus, soit $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ avec $x_i, y_i \in \mathbb{R}$

  Comme $\{e_i\}$ est orthonormée, alors on a:

  $$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \tag{1.2}$$

  D'autre part:

  $$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_if(e_i), \sum_{i=1}^{n} y_if(e_i) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j \langle e_i, e_j \rangle \underset{\text{car } \{e_i\} \text{ orthonormée}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \underset{\text{D'apres 1.2}}{=} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

  Donc f est une isométrie.

□

Proposition 1.43. Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée, f une isométrie et $A = M(f)_{e_i}$, alors $A^TA = I = AA^T$.

Proof. Pour prouver cela, on va utiliser la proposition 1.29.

Par définition de l'isométrie, on a:

$$\begin{aligned} &\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in E \\ \Leftrightarrow &\underbrace{(AX)^T(AY)}_{\langle f(x), f(y)\rangle} = X^T A^T A Y = \underbrace{X^T Y}_{\langle x, y\rangle} \\ \Leftrightarrow &A^T A = I \end{aligned}$$

□

Proposition 1.44. Si A est une matrice de l'isométrie dans une base orthonormée, alors $det(A) = \pm 1$

Proof. Par la proposition 1.43, on a: $A^T A = I$, d'où:

$$\begin{aligned} det(A^T A) = det(I) = 1 \Rightarrow &det(A)^2 = 1 \quad (\text{car } det(A^T) = det(A)) \\ \Rightarrow &det(A) = \pm 1 \end{aligned}$$

□

Intuition. Une isométrie fait une rotation ou une réflexion, elle conserve les distance, donc l'air (ou volume) d'une figure qui est construit par la base de cette transfomation est égale à 1.

1.6.2 Endomorphisme adjoint

Proposition 1.45. Soit E un espace euclidien et $f \in End(E)$. Il existe un et un seul endomorphisme $f^* \in E$ tel que

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle, \quad \forall x, y \in E$$

f^* est dit **adjoint** de f.

Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée et $A = M(f)_{e_i}$, alors la matrice $A^* = M(f^*)_{e_i}$ est la transposée de A, i.e $A^* = A^T$

Proof. Encore, pour la preuve, on va utiliser la proposition 1.29 qui est très utile, donc je vous conseil maîtriser ce concept.

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de E et notons

$$A = M(f)_{e_i} \quad A^* = M(f^*)_{e_i} \quad X = M(x)_{e_i} \quad Y = M(y)_{e_i}$$

Comme on est dans une base orthonormée, alors l'énoncé s'ecrit:

$$\underbrace{(AX)^T Y}_{\langle f(x), y\rangle} = X^T A^T Y = \underbrace{X^T (A^* Y)}_{\langle x, f^*(y)\rangle} \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

ce qui implique que $A^* = A$ et, de plus, démontre l'unicité de tel adjoint. □

1.7 Groupes orthogonaux

Rappel:

Definition 1.46. Un groupe linéaire général:

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$$

est un groupe de toutes transfomrations linéaires (matrices carrées) qui sont invérsibles (car $det(A) \neq 0$).

Definition 1.47. **Groupe orthogonal**: L'ensemble:

$$O(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$$

vérifie les propriétés suivantes:

1. si $A, B \in O(n,\mathbb{R})$, donc $AB \in O(n,\mathbb{R})$
2. $I \in O(n,\mathbb{R})$
3. si $A \in O(n,\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in O(n,\mathbb{R})$

En particulier, $O(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ (groupe des matrices inversibles) (voir la definition 1.46).

Intuition. La signification des matrices orthogonales est claire: elles représentent les matrices des transformations orthogonales (isométrie) dans **une base orthonormée** (voir defn 1.9).

On peut remarquer que si $det(A) = 1$, cette isométrie représente une rotation, de plus, on a la définition suivante:

Definition 1.48. L'ensemble des matrices orthogonales directes (i.e telles que $det(A) = 1$)

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n,\mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}$$

est un groupe, dit **groupe spécial orthogonal**.

Example 1.49. La matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est orthogonale. On peut vérifier que $A^T A = I$, ou, il suffit de montrer que c_1, c_2, c_3 est une famille orthonormée, i.e:

$$\|c_i\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \langle c_i, c_j \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

On peut interpreter A comme une matrice d'une transformation f dans la base canonique $\{e_i\}$, donc on a bien: $c_i = f(e_i)$, d'après la proposition 1.42 f est orthogonale. De plus, on voit que $det(A) = +1$. En conséquent, f est une transformation orthogonale directe.

Proposition 1.50. La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Proof. Je donne de l'intuition. Matrice de passage transforme une base en autre base, elle passe les vecteurs de la base, alors elle transforme la base de la BON en vecteurs de la base de la BON, donc, d'après la proposition 1.42, cette matrice est orthogonale. □

CHAPTER 2

Déterminants

Ce chapitre est plutôt un cheatsheet des déterminants car je ne vais pas donner des preuves mais les propriétés utiles, les exemples et de l'intuition.

Definition 2.1. Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carée $n \times n$, alors:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{signe}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

où

- S_n est un groupe de toute permutation de $\{1, \dots, n\}$
- $\text{signe}(\sigma)$ est une signe de pérmutation

Cette définition est très formelle, alors au bout de ce chapitre on va reformuler cette définition. D'abord, on va étudier les propriétés de déterminants:

2.1 Propriétés les plus improtants

Proposition 2.2. les propriétés de déterminant. Pour cette proposition, on note $\det(c_1, \dots, c_n)$ un déterminant où $\forall i$, r_i et $\forall i$, y_i représentent une colonne (ou un vecteur colonne). Et $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

1. **Déterminant de la matrice identité est 1:**

$$\det(I_n) = 1$$

2. **Déterminant de la matrice du rang 1 est son seul élément**:

$$\det(\begin{bmatrix} a_{1,1} \end{bmatrix}) = a_{1,1} \qquad \text{où } a_{1,1} \in \mathbb{R}$$

3. **Linéarité 1**:

$$\det(r_1, \dots, r_i + y_i, \dots, r_n) = \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) + \det(r_1, \dots, y_i, \dots, r_n)$$

4. **Linéarité 2**:

$$\det(r_1, \dots, \lambda_i r_i, \dots, r_n) = \lambda_i \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n)$$

Note. C'est pourquoi:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

5. **Mêmes colonnes**: Supposons que $i \neq j$ et $c_i = c_j$ alors:

$$\det(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n) = 0$$

S'il y a deux colonnes identiques, alors det est égale à 0.

6. **Déplacements des colonnes**:

$$\det(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n) = -\det(c_1, \ldots, \underbrace{c_j, \ldots, c_i}_{\text{permutation}}, \ldots, c_n)$$

Autrement dire, une permutation des colonnes change la signe.

7. **Détérminant des matrices multipliées**: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

8. **Détérminant d'une matrice transposé**: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

2.2 Développement par rapport à une ligne/colonne

Definition 2.3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, i.e:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,i-1} & a_{j,i} & a_{j,i+1} & \cdots & a_{j,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Alors, $A_{j,i}$ est une matrice où la ligne j et la colonne i sont supprimé, i.e:

$$A_{j,i} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i-1} & & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i-1} & & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,i-1} & & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ & & & & & & & \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,i-1} & & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i-1} & & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

Cela nous permet de développer le détérminant par rapport à une ligne ou une colonne:

Proposition 2.4. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et soit $1 \leq k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{k,i} \det(A_{k,i})$$

est le calcul de détérminant par rapport à $k^{\text{ième}}$ ligne.

Example 2.5. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 4 & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ \cancel{3} & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Ce qui est au centre des lignes est le $a_{i,j}$. Ici: $a_{2,1}$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{4} & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ 3 & \cancel{7} & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \cancel{5} \\ \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{8} \\ 3 & 7 & \cancel{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Figure 2.1: Développement par rapport à la deuxiemme ligne

Donc:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{2,i} \det(A_{2,i}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot a_{2,1} \cdot \det(A_{2,1}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{2,2} \cdot \det(A_{2,2}) + (-1)^{3+2} \cdot a_{2,3} \cdot \det(A_{2,3}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot 2 \cdot (-11) + 1 \cdot 9 \cdot (-9) + (-1) \cdot 8 \cdot (-5) \\
&= 22 - 81 + 40 \\
&= -19
\end{aligned}$$

Proposition 2.6. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et soit $1 \leq k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(A_{i,k})$$

est le calcul de détérminant par rapport à $k^{\text{ième}}$ colonne.

Example 2.7. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Figure 2.2: Développement par rapport à la deuxiemme colonne

Donc:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{i,2} \det(A_{i,2}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot \det(A_{1,2}) + (-1)^{2+2} \cdot a_{2,2} \cdot \det(A_{2,2}) + (-1)^{3+2} \cdot a_{3,2} \cdot \det(A_{3,2}) \\
&= (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot 4 \cdot (-12) + 1 \cdot 9 \cdot (-9) + (-1) \cdot 7 \cdot (-2) \\
&= 48 - 81 + 14 \\
&= -19
\end{aligned}$$

2.3 Déterminant d'une matrice triangulaire

Corollary 2.8. Le déterminant d'une matrice triangulaire est un produit de ces éléments diagonaux. I.e, soit une matrice triangulaire

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

alors

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$$

Example 2.9. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Développons ce déterminant par rapport à la première colonne:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2}a_{i,2}\det(A_{i,2}) \\
&= (-1)^{1+1}\cdot a_{1,1}\cdot\det(A_{1,1}) + (-1)^{2+1}\cdot a_{2,1}\cdot\det(A_{2,1}) + (-1)^{3+1}\cdot a_{3,1}\cdot\det(A_{3,1}) \\
&= (-1)^2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}9 & 8\\ 0 & 6\end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^3\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 0 & 6\end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{(-1)^4\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 9 & 8\end{vmatrix}}_{=0} \\
&= \underbrace{1}_{=a_{1,1}}\cdot\begin{vmatrix}9 & 8\\ 0 & 6\end{vmatrix} \\
&= \det(\begin{bmatrix}9 & 8\\ 0 & 6\end{bmatrix} =: B) \\
&= (-1)^{1+1}\cdot b_{1,1}\cdot\det(B_{1,1}) + (-1)^{2+1}\cdot b_{2,1}\cdot\det(B_{2,1}) \quad \text{développement par rapport à la premiere colonne} \\
&= 1\cdot\underbrace{9}_{a_{2,2}}\cdot|6| + \underbrace{(-1)\cdot 0\cdot|8|}_{=0} \\
&= \underbrace{1}_{=a_{1,1}}\cdot\underbrace{9}_{=a_{2,2}}\cdot\underbrace{6}_{=a_{3,3}}
\end{aligned}$$

2.4 Comatrice et matrice adjointe

D'abord, rappelons la définition de $A_{i,j}$. C'est une matrice carrée où $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne sont supprimé. (Voir la définition 2.3).

Definition 2.10. Soit une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

Ensuite, on note la matrice

$$N = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} = \mathrm{Com}(A)$$

La matrice N est appelée **la comatrice** de A. Alors, la **matrice adjointe** de A est définie comme la comatrice transposée:

$$A^* = N^T = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,n} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Theorem 2.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ une matrice carrée et A^* sa matrice adjointe, alors on a:

$$A^*A = AA^* = \det(A)I_n = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

Utilité de telle matrice?

2.5 Matrice inverse

Theorem 2.12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle que $\det(A) \neq 0$, alors:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$$

est la matrice inverse de A.

Corollary 2.13. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible, alors:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

CHAPTER 3

Réduction des endomorphismes

En écrivant ce chapitre, j'étais inspiré par les videos du chaîne *3blue1brown* que je vous conseille de regarder, au moins le playlist concernant l'algèbre linéaire. La deuxieme source de l'inspiration était le livre de Joseph Grifone [2].

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent on a étudié une notion d'une base orthonormale dont les utilités sont: simplification des calculs des coordonnées dans une base et calcule d'une projection. Cette notion est l'un des premiers pas vers l'étude de SVD[1] qui est appliqué dans plusieurs domaines, e.g: la réduction des tailles d'images.

Dans ce chapitre on continue l'étude des bases pour pouvoir finalement comprendre le SVD. On va étudier la réduction des endomorphismes, *to be more precise* la diagonalisation et la triagonalisation. Pour commencer: un petit exo:

Exercise. Calculer

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{15 \text{ fois}}$$

Cela ne semble pas très facile, n'est-ce pas? Au bout de ce chapitre, on va trouver une façon à simplifier le calcule et à la fin on résoudra cet exercice.

On sait d'algèbre linéaire qu'on peut représenter une matrice d'une application dans des bases différentes, i.e soit une base $\{e_i\}$ de E et f une application. Alors cette aplication dans la base $\{e_i\}$ est représentée:

$$A = M(f)_{e_i} = \|f(e_1), \ldots, f(e_n)\|$$

Soit $\{e'_i\}$ une autre base de E, alors on peut représenter l'application f dans cette base aussi, notons: $P = P_{e_i \to e'_i}$ une matrice de passage de la base $\{e_i\}$ vers la base $\{e'_i\}$

$$A' = M(f)_{e'_i} = P^{-1}AP = \|f(e'_1), \ldots, f(e'_n)\|_{e'_i}$$

Definition 3.1. La matrice A est **diagonalisable** s'il existe une matrice semblable[a] A' diagonale:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

[a] A est semblable à A' s'il existe une matrice de passage P telle que $A' = P^{-1}AP$

[1] Singular Value Decomposition

Definition 3.2. La matrice A est **triagonalisable** s'il existe une matrice semblable A' triangulaire (supérieure/inférieure)

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \text{ ou } A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Alors les problèmes de ce chapitre qu'on va résoudre sont:

1. Détérminer si un endomorphisme f est diagonalisable/triagonalisable i.e s'il existe telle matrice A'.
2. Détérminer la matrice de passage P et la matrice A'.

Dans tout le chapitre on suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie.

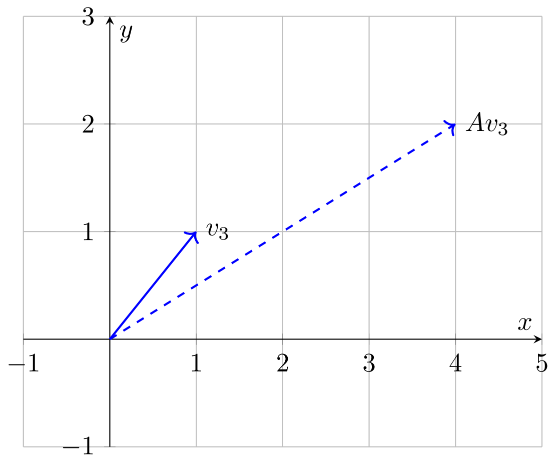
3.2 Vecteurs propres - Eigenvectors

Commençons par clarification d'une notion de l'application linéaire et sa matrice. Preonons pour ça la matrice de l'exercice du début du chapitre:

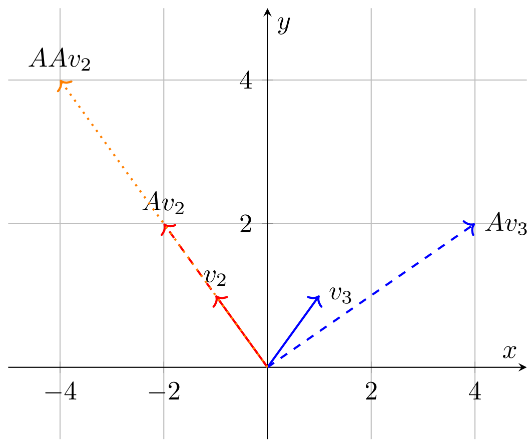
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Cetter matrice transforme l'espace vectoriel qu'on le donne, ou en simplifiant, elle transforme chaque vecteur de l'espace vectoriel. Prennons un vecteur $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en appliquant A on obtient:

$$Av_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



On remarque que le vecteur Av_3 n'est plus situé en même ligne que le vecteur v_3, ce qui est logique car si les vecteurs étaient en même lignes après une transformation, cela n'aurait pas de sens. Par contre, parfois il y'a des cas, quand le vecteur appliqué à la matrice reste en même ligne, par exemple le vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $Av_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_2$



Et c'est pas uniquement le cas du vecteur $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, en prennant n'importe quel vecteur engendré pas $v = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, on obtiendra $Av = 2v$. Tels vecteurs v et les scalaire (ici: 2) sont appelés vecteurs propres et valeurs propres respectivement. Alors, on a la définition formelle:

Definition 3.3. Soit f un endomorphisme dans E et un vecteur $v \in E$ est dit **vecteur propre** de f si:

1. $v \neq 0$
2. Il existe un réél λ tel que $f(v) = \lambda v$

Le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est dit **valeur propre** correspondante à v.

Intuition. Les vecteurs propres sont les vecteurs qui sous l'action de f ne changent pas de diréctions, justement la longueure (même pas toujours). Cela simplifie le calcul de tel vecteurs. Pouvez-vous calculer $A^3 v_3$? Pas très facile, alors le vecteur $A^3 v_2$?

$$Av_2 = 2v_2 \Rightarrow A^2 v_2 = 2 \cdot 2v_2 = 4v_2 \Rightarrow A^3 v_2 = 2 \cdot 4v_2 = 8v_2 = \begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}$$

C'est cool, n'est-ce pas?

Par contre, ce n'est pas la seule utilité des vecteurs propres et on va revenir ici pour en discuter, mais d'abord, comment trouver tels vecteurs?

3.3 Recherche des valeurs propres

On cherche des vecteurs qui sous l'action de l'endomorphisme f sont mis à l'échelle par un facteur de $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on est sensé de résoudre cette équation:

$$\begin{aligned}
& f(v) = \lambda v \\
\Leftrightarrow\quad & Av = \lambda v \quad \text{en notation matricielle} \\
\Leftrightarrow\quad & Av = \lambda(Iv) \quad \text{où } I \text{ est une matrice identité} \\
\Leftrightarrow\quad & Av - \lambda I v = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (A - \lambda I)v = 0
\end{aligned}$$

Donc, on doit étudier l'application $(A - \lambda I)$ et la connecter à la notion des détérminants. Rappelle: si le détérminant d'une matrice n'est pas nul, cette matrice (i.e endomorphisme) est injective. Dans notre cas, si $\det(A - \lambda I)$ était nul, le seul vecteur v qui donnerait $(A - \lambda I)v = 0$ était le vecteur nul $v = 0$ car $(A - \lambda I)$ est linéaire et (comme on a suppoé) injective.

Par contre, d'après la définition, les vecteurs propres ne sont pas nul, alors le cas injectif ne convient pas, donc pour avoir des vecteurs propres l'application $(A - \lambda I)$ doit ne pas être injectif ce qui équivaut à dire que $\det(A - \lambda I) = 0$. Alors, on est sensé de calculer le détérminant suivant:

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

En développant ce détérminant on obtient une équation du type:

$$(-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

dont les racines sont les valeurs propres de f (rappelle: valeur propre est un facteur λ). Ne vous concentrez pas trop sur cette équation pour l'instant, on va y revenir.

Proposition 3.4. Soit f un endomorphisme dans un espace vectoriel E de dimension finie n et A la matrice représentative de f dans une base de E. Les valeurs propres de f sont les racine du polynôme:

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Ce polynôme est dit **polynôme caracteristique** de f.

Definition 3.5. L'ensemble des valeurs propres de f est dit **spectre** de f et est noté $\mathrm{Sp}_K(f)$ ou $\mathrm{Sp}_K(A)$ si A une matrice de f.

Pour clarifier:

Example 3.6. Soit f un endomorphisme dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique est:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculons ses valeurs propres:

$$\begin{aligned}
& & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v = \lambda v \\
&\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v - \lambda I v = 0 \\
&\Leftrightarrow & \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I \right) v = 0 \\
&\Rightarrow & \det \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I \right) = 0 \\
&\Rightarrow & \det \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \\
&\Rightarrow & \det \left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \\
& & = (3-\lambda)(2-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

On voit bien, que les solutions sont: $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$

On peut trouver des valeurs propres, néanmoins, on cherchait les vecteurs propres. Et on est là:

3.4 Recherche des vecteurs propres

Supposons pour $q \in \mathbb{N}^*$ on a déjà trouvé q valeurs propres d'une matrice $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, pour trouver les vecteurs propres, il nous reste à trouver la base de:

$$\ker(A - \lambda_i I) \quad \forall i \in \{1, \ldots, q\}$$

ce qui équivaut à:

$$(A - \lambda_i I)\, v = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, q\}$$

Example 3.7. Encore la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a déjà trouvé ses vecteurs propres: $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$. Alors, cherchons les vecteurs:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $\ker(A - 3I) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Voilà, notre premier vecteur propre: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour le deuxième:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \end{cases}$$

Donc $\ker(A - 2I) = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et voilà le deuxieme vecteur propre: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c'était notre vecteur v_2 au début du chapitre).

Enfin, la propriété utile:

Proposition 3.8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec ses vecteurs propres: $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, alors:

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$
$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

3.5 Les endomorphismes diagonalisables

Revenons sur l'utilité des vecteurs propres. Soit f un endomorphisme de E dont la base est $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\text{Mat}_{e_i}(f) = A$ et la matrice de f dans cette base. Reprennons l'exemple suivant:

Example 3.9. On a: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dans la base canonique $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On rappelle qu'on a trouvé deux vecteurs propres:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On remarque que ces deux vecteurs sont libres et donc forment une base de $\mathbb{R}^2$. Essayons de changer la base de A dont on a deux façon:

1. On peut calculer les coordonnées de $f(v_1)$ et $f(v_2)$ dans la base $\{v_1, v_2\}$, on a:

$$f(v_1) = 3v_1 = 3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$$
$$f(v_2) = 2v_2 = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$$

   Et alors $\text{Mat}_{v_i}(f) = \|f(v_1), f(v_2)\|_{v_i} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. On peut calculer la matrice $P = P_{e_i \to v_i}$de passage d'une base $\{e_i\}$ vers la base $\{v_i\}$ et en déduire la

matrice de f dans la nouvelle base. On a:

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{e_i} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{e_i} \end{cases}$$

donc $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (vous pouvez vérifier le calcul). Et donc:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{AP} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Et voilà, la magie, on a trouvé la matrice diagonale.

Ensuite, généralisons ce qu'on a fait.

Definition 3.10. Soit $\lambda \in K$, on note:

$$E_\lambda := \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$$

E_λ est un espace vectoriel de E dit **espace propre** correspondant à λ.

Remark 3.11.

1. Si λ n'est pas valeur propre de f, donc $E_\lambda = \{0\}$
2. Si λ est valeur propre, alors:

$$E_\lambda = \{\text{ vecteurs propres associés à } \lambda\} \cup \{0\} \text{ et } \dim E_\lambda \geq 1$$

Proposition 3.12. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts. Alors les espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe. Autrement dit, si $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ sont des bases de $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$, la famille $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$ est libre (mais pas nécessairement génératrice de E).

Proof. Soient $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E. Nous devons montrer que ces sous-espaces sont en somme directe, c'est-à-dire que si un vecteur appartient à leur intersection, alors il est nul.

Prenons un élément v appartenant à leur somme, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire sous la forme :

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p$$

avec $v_i \in E_{\lambda_i}$ pour tout i.

Puisque chaque v_i est un vecteur propre pour f associé à λ_i, on a :

$$f(v_i) = \lambda_i v_i.$$

Appliquons f à la somme :

$$f(v) = f(v_1 + v_2 + \cdots + v_p) = f(v_1) + f(v_2) + \cdots + f(v_p).$$

En utilisant la linéarité de f, cela donne :

$$f(v) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

Or, v est aussi une combinaison de ces mêmes vecteurs :

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p.$$

Donc, en réarrangeant :

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p) - (v_1 + v_2 + \cdots + v_p) = 0.$$

Ce qui donne :

$$(\lambda_1 - 1)v_1 + (\lambda_2 - 1)v_2 + \cdots + (\lambda_p - 1)v_p = 0.$$

Factorisons chaque terme :

$$(\lambda_1 - \lambda)v_1 + (\lambda_2 - \lambda)v_2 + \cdots + (\lambda_p - \lambda)v_p = 0.$$

Or, les λ_i sont supposés deux à deux distincts. On en déduit que les coefficients sont différents, et que la somme est nulle uniquement si tous les v_i sont nuls (puisque les espaces propres sont en général en somme directe).

Ainsi, $v = 0$, ce qui prouve que les espaces propres sont en somme directe. □

Ainsi, les espaces propres sont toujours en sommes directe, mais pas necessairement égale à E:

$$E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p} \underset{\neq}{\subset} E$$

ce qu'on a si:

$$\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} < \dim E$$

Theorem 3.13. Soit f un endomorphisme dans E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est diagonalisable
2. E est somme directe de ses espaces propres: $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$
3. $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$

Corollary 3.14. Si f est un endomorphisme de E avec $\dim E = n$ et f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.

Mais comme les valeurs propres sont les racines du polynôme caracteristique (voir prop 3.4) on a:

Proposition 3.15. Soit f un endomorphisme dans E et λ une valeur propre d'ordre α (i.e α est une racine de $P_f(\lambda)$ d'ordre α, i.e $P_f(\lambda) = (X - \lambda)^n Q(X)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$). Alors:

$$\dim E_\lambda \leq \alpha$$

Theorem 3.16. Soit f un endomorphisme dans E avec $\dim E = n$. Alors f est diagonalisable si et seulement si:

1. $P_f(X)$ est <u>scindé</u>, i.e:
$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$
(λ_i sont les racines donc les valeurs propres) et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$. Alors, si la somme des multiplicités des racines est égale à la dimension de l'éspace vectoriel.

2. Les dimensions des espaces propres sont <u>maximales</u>, i.e $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$
$$\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$$

Intuition. Ce n'est pas toujours facile de comprendre l'idée par les polynômes caracteristiques, alors une autre façon de voir ça est:

1. On trouve les valeurs propres: $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$
2. Puis on trouve les espaces propres: $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i I)$
3. On somme les dimension: $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} =: d$.
   - Si $d = \dim E$ i.e si la somme des dimension est égale à la dimension de l'espace E, les espaces propres engendrent E et donc f est diagonalisable (car sa matrice peut s'écrire dans la base de ces vecteurs propres).
   - Sinon le nombre de vecteurs propres libres ne suffit pas pour engendrer E.

3.6 Les applications

3.6.1 Calcul de la puissance

Alors, on est revenu là, où on a commencé, je vous rappele l'exercice du début du chapitre:

Exercise. Calculer

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{15 \text{ fois}}$$

On rappelle, que les vecteurs propres de A sont:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui sont libres et engendrent $\mathbb{R}^2$ alors forment une base de $\mathbb{R}^2$, alors on peut écrire à dans cette nouvelle base et comme on a déjà trouvé:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dans la base (v_1, v_2) avec la matrice de passage:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De plus, en multipliant A' avec A', on a:

$$A' \cdot A' = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = A'^2$$

d'où

$$A'^n = P^{-1}A^nP \Rightarrow PA'^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n$$

Cela nous donne la possibilité de calculer d'abord la puissance de A':

$$A'^{15} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

Voilà, beaucoup plus facile, que calculer A^15 directement, alors il nous reste à revenir en base canonique:

$$P \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{15} & 3^{15} - 2^{15} \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$$

Ce qui est très utile dans les matrices diagonales, c'est que la puissance de telle matrice égale à la même matrice avec les éléments diagonaux pris à la puissance, i.e:

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A'^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

Généralisons: Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable (i.e il existe P et A' telles que $A' = P^{-1}AP$), alors:

$$A^n = P(A'^n)P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

3.6.2 Résolution d'un système de suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $u_0 = 2$ et $v_n = 1$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, alors le système 3.1 s'écrit:

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

par récurrence on obtient:

$$X_n = A^n X_0 \quad \text{avec } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors, on est ramené au calcul de la puissance d'une matrice: A^n ce qu'on a vu à la section 3.6.1. Vous pouvez vérifiez qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tq

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et alors

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2\cdot 2^n + 2\cdot 3^n & -2^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2\cdot 2^n + 2\cdot 3^n & -2^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2^n - 2\cdot 3^n + 2^n - 3^n \\ -4\cdot 2^n + 4\cdot 3^n - 2^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} u_n = 5\cdot 2^n - 3\cdot 3^n \\ v_n = -5\cdot 2^n + 6\cdot 3^n \end{cases}$$

3.6.3 Résolution des equations différentielles

Soit à résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables.

Sous forme matricielle le système s'écrit :

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad \text{où} \quad A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Supposons A diagonalisable. Il existe alors A' matrice diagonale et P matrice inversible telles que :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Si on considère A comme la matrice d'un endomorphisme dans la base canonique, A' est la matrice de f dans la base de vecteurs propres $\{v_i\}$.
De même X est la matrice d'un vecteur $\vec{x}$ dans la base canonique et $X' = M(\vec{x})_{v_i}$, est liée à X par

$$X' = P^{-1}X$$

> **Note.** Attention! Dans cette section X' ne décrit pas la dérivé, mais un vecteur noté X'!

En dérivant cette relation :

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}$$

(car A étant à coefficients constants, P sera aussi à coefficients constants). Donc :

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX = \left(P^{-1}AP\right)X' = A'X'$$

Le système 3.2 est donc équivalent au système

$$\frac{dX'}{dt} = A'X'$$

Ce système s'intègre facilement, car A' est diagonale.
Ainsi, on peut résoudre le système $\frac{dX}{dt} = AX$ de la manière suivante :

a) On diagonalise A. Soit $A' = P^{-1}AP$ une matrice diagonale semblable à A;

b) on intègre le système $\frac{dX'}{dt} = A'X'$;

c) on revient à X par $X = PX'$.

Exemple

Soit le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$$

On a $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
Le système $\frac{dX'}{dt} = A'X'$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = 2x' \\ \dfrac{dy'}{dt} = 3y' \end{cases}$$

qui donne immédiatement

$$\begin{cases} x' = C_1e^{2t} \\ y' = C_2e^{3t} \end{cases}$$

et donc, en revenant à X par $X = PX'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ -C_1e^{2t} - 2C_2e^{3t} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ y = -C_1e^{2t} - 2C_2e^{3t} \end{cases}$$

3.7 Trigonalisation

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite triangulaire supérieure si elle est de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

respectivement triangulaire inférieure:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Remark 3.17. Toute matrice A triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Proof. Soit A une matrice triangulaire supérieure et f l'endomorphisme de K^n qui dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ est représentée par la matrice A, alors:

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{1,1}e_1 \\ f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 \\ \vdots \\ f(e_n) = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \dots + a_{n,n}e_n \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Considérons la base

$$\varepsilon_1 = e_n, \quad \varepsilon_2 = e_{n-1}, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = e_1$$

alors, on a:

$$\begin{cases} f(\underbrace{\varepsilon_1}_{e_n}) == a_{1,n}\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} + a_{2,n}\underbrace{\varepsilon_{n-1}}_{e_2} + \dots + a_{n,n}\underbrace{\varepsilon_1}_{e_n} \\ f(\underbrace{\varepsilon_2}_{e_{n-1}}) == a_{1,n-1}\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} + \dots + a_{n-1,n-1}\underbrace{\varepsilon_2}_{e_{n-1}} \\ \vdots \\ f(\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1}) = a_{1,1}\underbrace{\varepsilon_n}_{e_1} \end{cases}$$

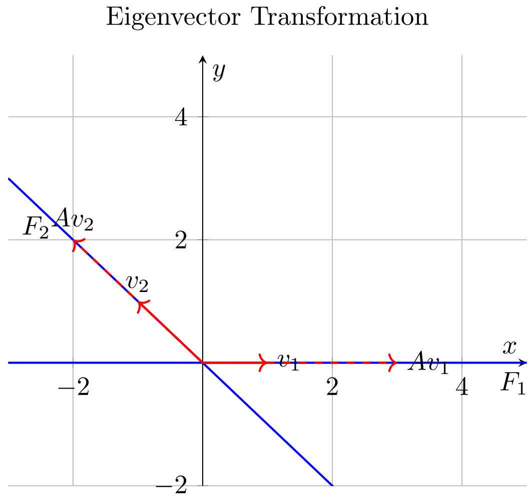
donc

$$A' = M(f)_{\varepsilon_i} = \begin{bmatrix} a_{n,n} & & \dots & 0 \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1,n} & \dots & & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

□

3.7.1 L'intuition géométrique de la diagonalisation

Rappellons la diagonalisation. La matrice A représentative de l'endomorphisme f dans $K^n = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ ést diagonalisable, s'il existe suffisament de sous-espaces vectoriels $\{F_1, \dots, F_n\}$ de dimension 1 chaqun, tel que $K^n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(F_i) \subset F_i$ (un vecteur après l'application de f reste dans l'espace). Ce qu'on peut voir géométriquement:



On sait déjà que tel endomorphisme est très utile mais ça n'arrive pas souvent qu'on peut le diagonaliser, alors, ça serait utile d'avoir quelque chose plus général mais encore semblable à la diagonalisation.

3.7.2 L'intuition géométrique de la trigonalisation

La géométrie de l'endomorphisme trigonalisable est similaire mais quand même différente. Soit A une matrice représentative de l'endomorphisme f dans K^n. Il est trigonalisable s'il existe une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de K^n, notons $F_1 = \text{Vect}(v_1), F_2 = \text{Vect}(v_1, v_2), \ldots, F_n = \text{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tels que

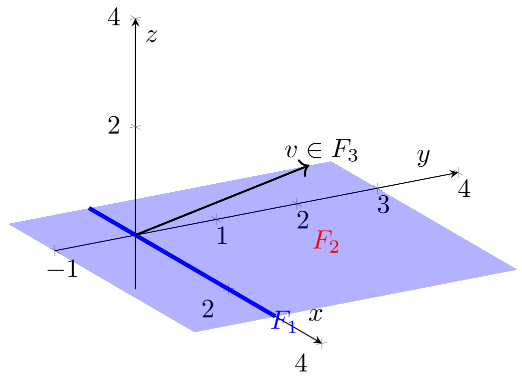
$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$$

et

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, f(F_i) \subset F_i$$

Voyez-vous la similarité? L'endomorphisme est stable par le sous-espace! Le vecteur appliqué à f ne quite jamais son sous-espace. Prennons pour l'exemple la matrice suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{Mat}(f)_{e_i}$$



Comme on a de l'intuition de l'endomorphisme trigonalisable, revenons sur les maths pures.

3.7.3 Théorie

Theorem 3.18. Un endomorphisme est trigonalisable dans K si et seulement si son polyôme caractéristique est scindé dans K.

Ça veut dire que le polynôme caractéristique admet exactement n racine où $n = \dim(E)$ et dont s'écrit:

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$

Proof. -

($\Rightarrow$) Supposons l'endomorphisme f est trigonalisable et soit une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & * \\ 0 & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On a:

$$P_f(X) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - X & & & * \\ 0 & a_{2,2} - X & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,n} - X \end{pmatrix} = (a_{1,1} - X) \cdots (a_{n,n} - X)$$

Donc $P_f(X)$ est bien scindé (on peut remarquer que ses racines sont les valeurs propres de f).

($\Leftarrow$) Supposons $P_f(X)$ scindé et montrons par récurrence que f trigonalisable.

Pour $n = 1$ triviale.

Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $n-1$. Or $P_f(X)$ est scindé il admet au moins une racine $\lambda_1 \in K$ et donc un vecteur propre $\varepsilon_1 \in E_{\lambda_1}$. Complétons $\{\varepsilon_1\}$ en une base $\{varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, donc on a:

$$A = M(f)_{\varepsilon_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \text{où:} B \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$$

Soit $F = \text{Vect}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ et $g : F \to F$ l'unique endomorphisme de F tel que $M(g)_{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n} = B$, on a:

$$P_f(X) = \det(A - XI_n) = (\lambda_1 - X)\det(B - XI_{n-1}) = (\lambda_1 - X)P_g(X)$$

Or $P_f(X)$ est scindé, $P_g(X)$ l'est aussi et d'après l'hypothèse de récurrence B est trigonalisable, donc il existe une base $\{v_2, \ldots, v_n\}$ dans laquelle $M(g)_{v_2,\ldots,v_n}$ est triangulaire et donc la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est triangulaire donc f est trigonalisable.

$\square$

Corollary 3.19. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Intuition. D'après le cours d'algèbre abstrait, tout polyôme dans $\mathbb{C}$ est scindé.

Remark 3.20. -

1. Si A est trigonalisable et A' triangulaire semblable à A, donc A' a des valeurs propres sur les diagonales.
2. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable sur la clôture K' de K. (e.g: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$).

Corollary 3.21. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ ses valeurs propres, donc

$$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$
$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Proof. On $A' \in \mathcal{M}_n(K')$ triangulaire semblable à A (reappel: clôture K' sur K), donc les valeurs prorpes sont sur les diagonales de A'. Or les matrices semblables ont les même traces et déterminant, donc $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A') = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ et $\det(A) = \det(A') = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. □

TODO. exemple du processus de trigonalisation.

Appendices

APPENDIX A

Rappels des concepts d'Algèbre Linéaire

A.1 Matrices

A.1.1 Multiplication des matrices

Definition A.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ tels que $A = (a_{j,i})$ et $B = (b_{m,k})$, alors:

$$AB = C = (c_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,k})$$

A.1.2 La trace

Definition A.2. La trace de la $n \times n$ matrice carée A, notée $\mathrm{tr}(A)$, est la somme des éléments diagonales

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

où a_{ii} sont des éléments diagonales de la matrice A.

Property. de la trace.

- Linéarité:

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

$$\mathrm{tr}(cA) = c\mathrm{tr}(A), \quad c \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$

- Transposé:

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$$

- Multiplication des matrices:

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \quad \text{(si } A \text{ et } B \text{ sont de taille } n \times n)$$

  Cependant, la trace n'est pas distributive sur la multiplication :

$$\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(BC)$$

- Valeurs propres:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

  où λ_i sont les valeurs propres de A. Cela fait de la trace un outil important en analyse spectrale.

- Trace de la Matrice Identité

$$\operatorname{tr}(I_n) = n$$

puisque tous les éléments diagonaux valent 1.

Example A.3. Pour

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

la trace est :

$$\operatorname{tr}(A) = 3 + 5 + 9 = 17$$

Example A.4. Si

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

alors

$$\operatorname{tr}(B + C) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = 6 + 8 = 14$$

ce qui correspond bien à

$$\operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(C) = (2 + 3) + (4 + 5) = 14$$

confirmant ainsi la linéarité.

Bibliography

[1] Johannes Anschütz. *Algèbre linéaire 2 (OLMA252)*. 2024-2025.

[2] Grifone Joseph. *Algèbre linéaire*. fre. 4e édition. Toulouse: Cépaduès Éditions , DL 2011, 2011. ISBN: 978-2-85428-962-6.