

CheatSheet pour l'Algèbre Linéaire

Yehor KOROTENKO

March 10, 2025

1 Espaces euclidiens

Proposition 1.1. *Endomorphisme $f : E \rightarrow E$ un drapeau invariant (i.e $f(E_i) \subset E_i$) \iff $Mat(f)$ triangulaire supérieure*

1.1 Produits scalaires et normes

Définition 1.1. *Une forme bilinéaire sur E (**produit scalaire**) un espace euclidien est une application:*

$$\begin{aligned} f : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) \end{aligned}$$

qui vérifie ces propriétés:

1. **Bilinéarité:**

(a) $f(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$ avec $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) $f(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(u, w)$ avec $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

2. **Symétrie:** $B(u, v) = B(v, u) \quad \forall u, v \in E$

3. **Définie positive:** $\forall u \in E, B(u, u) \geq 0$

4. **Définie:** $B(u, u) = 0 \iff u = 0$

Remarque. *Le produit vectoriel est noté: $\langle \cdot, \cdot \rangle$*

Définition 1.2. *La norme $\forall X \in E$:*

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

Proposition 1.2. *Les formules utiles: (pour $X, Y \in E$)*

1. $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$

2. $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$

3. $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$

4. $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2)$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.3. *$u, v \in E$ sont **orthogonaux** si $\langle u, v \rangle = 0$ et on les notes $u \perp v$*