

Notes du cours d'Algebre Linéaire 2

Yehor Korotenko

January 29, 2025

Abstract

Le cours porte sur deux sujets liés:

1. la théorie des espaces euclidiens (i.e un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire) et leur endomorphismes
2. la réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

Chapter 1

Espaces euclidiens

1.1 Introduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont réels. On suppose que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
Produit scalaire:

Definition 1.1. Une forme bilinéaire sur E est une application

$$\begin{aligned} B : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B((u, v)) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes $\forall u, v, w \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$
2. $B(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(u, w)$

B est dite

1. symétrique si $B(u, v) = B(v, u) \ \forall u, v \in E$
2. positive si $B(u, u) \geq 0 \ \forall u \in E$
3. définie si $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Proof.

$$\begin{aligned} B(0, 0) &= B(0 + 1 \cdot 0, 0) \\ &\stackrel{\text{linéarité}}{=} B(0, 0) + 1 \cdot B(0, 0) \\ &= B(0, 0) + B(0, 0) \\ &\Rightarrow B(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

Notation. Produit scalaire est noté: $\langle u, v \rangle$

Example 1.2. .

1. $E = \mathbb{R}^n, X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in E$

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

On l'appelle "produit scalaire canonique" (ou usuel)

2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle X, Y \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_2$

3. $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R}) \ni f, g$ (un espace des fonctions continues)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A, B$

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}(A^t B)$$

Proposition 1.3. Un espace vectoriel non-nul possède une infinité de produits scalaires différents.

Definition 1.4. Un espace euclidien est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Property. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On pose:

$$\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle} \quad X \in E$$

la norme (ou longueur) de X . (Il est bien définie car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est toujours positif)

Lemma 1.5. inégalité de Cauchy-Schwarz On a

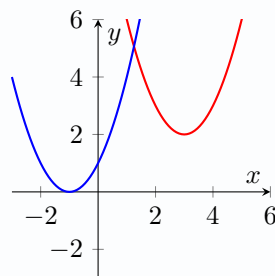
$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in E$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires, i.e $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $u = tv$ ou $v = tu$

Proof. Si $v = 0$, clair

Si $v \neq 0$ on considère $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|u + tv\|^2 &= \langle u + tv, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u + tv \rangle + t \langle v, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + t \langle u, v \rangle + t \langle v, u \rangle + t^2 \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2 = f(t) \end{aligned}$$



Cas 1: $f(t)$ n'a pas de racines différentes

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 \langle u, v \rangle^2 = 4 \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow \langle u, v \rangle^2 &\leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\ \Rightarrow |\langle u, v \rangle| &\leq \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

Cas 2: $f(t)$ a seulement une racine:

$$\begin{aligned}\Delta &= 0 \\ \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \|u + tv\|^2 &= 0 \\ \Rightarrow u + tv &= 0 \Rightarrow u = -tv\end{aligned}$$

La définition suivante sera étudiée dans le cours d'analyse:

Definition 1.6. On dit que $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme si:

1. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$
2. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in E$

Lemma 1.7. L'application

$$\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

est dite norme euclidienne.

Proof. 1), 2) sont faites

$$\begin{aligned}3) \quad \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\Rightarrow \|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2\end{aligned}$$

Proposition 1.8. On a les identités suivantes $\forall u, v \in E$

1. Identité du parallélogramme:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

2. Identité de polarisation:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

Proof. .

- 1.

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2\end{aligned}$$

2. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$

On a:

- (1) + (2): $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$
- (1) - (2): $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$

1.2 Orthogonalité

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Definition 1.9. $u, v \in E$ sont dits orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$. On note $u \perp v$

- Deux sous-ensembles A, B de E sont orthogonaux si:

$$\forall u \in A, \forall v \in B, \quad \langle u, v \rangle = 0$$

- Si $A \subseteq E$ on appelle orthogonal de A , noté A^\perp l'ensemble

$$A^\perp = \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

- Une famille (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j, v_i \perp v_j$. Elle est dite orthogonale si elle est orthogonale et si de plus $\|v_i\| = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Example 1.10. $E = \mathbb{R}^n$, \langle, \rangle produit scalaire canonique

$$v_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(v_1, \dots, v_n) est une base canonique

Proposition 1.11. 1. Si $A \subseteq E$ alors A^\perp est un sous-espace vectoriel de E

2. Si $A \subseteq B$ alors $B^\perp \subseteq A^\perp$

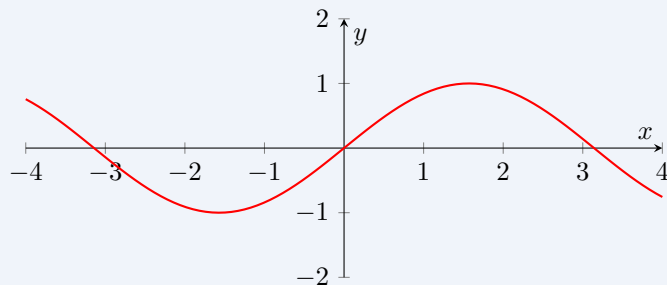
3. $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

4. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Proof. Exercice

Example 1.12. 1. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$



Alors, $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$ sont orthogonaux: $2 \cos(t) \sin(t) = \sin(2t)$

$$\int_{-1}^1 \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin(2t) dt = 0$$

Definition 1.13. Si E est un espace euclidien, on appelle "dual de E " l'ensemble

$$L(E, \mathbb{R}) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est linéaire}\}$$

On le note E^* . Un élément $f \in E^*$ s'appelle une forme linéaire.

Rappele:

Proposition 1.14. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie, on $\dim(L(F, F')) = \dim(F) \cdot \dim(F')$
En particulier, $\dim(F^*) = \dim(F)$. En effet si $n = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et $n' = (e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de F' , alors l'application

$$\begin{aligned} : L(F, F') &\longrightarrow \text{Mat}_{f \times p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (f) = \text{Mat}_{n, n'}(f). \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc $\dim(F, F) = qp$

Theorem 1.15. Théorème du rang: Si F est un e.v de dimension finie et $f : F \rightarrow F'$ linéaire, alors $\dim(F) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$

Proposition 1.16. Si F, F' sont deux e.v de dimension finie tq $\dim(F) = \dim(F')$ et $f : F \rightarrow F'$ linéaire, alors f est un isomorphisme $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = 0$

Proof. On rappelle que si G, G' sont des sous-e.v de dimension finie dans le même e.v, alors:

$$G = G' \Leftrightarrow G \subseteq G' \text{ et } \dim(G) = \dim(G')$$

\Rightarrow) f injective $\Rightarrow \text{Ker}(f) = 0$

\Leftarrow) Soit $\text{Ker}(f) = 0$.

Alors, forcément $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ et par le théorème du rang on a $\dim(F) = \dim(\text{Im}(f))$, donc $\text{Im}(f) = F'$

Lemma 1.17. du Riesz:

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie et $f \in E^*$. Alors, $\exists! u \in E$ tel que $f(x) = \langle u, x \rangle \forall x \in E$. La forme linéaire f est donné par un produit scalaire avec un vecteur.

Notation. Pour tout $v \in E$ on note par f_v l'application:

$$\begin{aligned} f_v : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_v(x) = \langle v, x \rangle. \end{aligned}$$

f_v est linéaire $\forall v \in E$ i.e E^*

Proof. lemma de Reisz

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ v &\longmapsto \phi(v) = f_v. \end{aligned}$$

ϕ est linéaire (exercice). ϕ est injective:

$$v \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow f_v(x) = 0 \quad \forall x \in E$$

en particulier pour $x = v$, on a :

$$0 = f_v(v) = \langle v, v \rangle \Rightarrow v = 0$$

$$\begin{aligned} \dim(E) = \dim(E^*) &\Rightarrow \phi \text{ est un isomorphisme} \\ &\Rightarrow \phi \text{ bijective} \end{aligned}$$

$$\forall f \in E^*, \exists ! n \in E \text{ tq } \phi(n) = f, \text{ i.e } f(x) = \langle n, x \rangle \quad \forall x \in E$$

Dans ce cas $E = \mathbb{R}^n$, le lemme de Riesz est très simple à comprendre :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Si on note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle = \langle (a_1, \dots, a_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle$$

1.3 Bases orthonormales

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel ($\dim(F) < \infty$) car $\dim(E) < \infty$.

Note.

$$F^\perp := \{x \in E \mid \langle x, z \rangle = 0 \quad \forall z \in F\}$$

l'orthogonale de F .

Theorem 1.18. On a $E = F \oplus F^\perp$.

En particulier, $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ et $F = (F^\perp)^\perp$

Proof. On doit montrer que :

1. $F \cap F^\perp = \emptyset$
2. $E = F + F^\perp$ i.e $\forall x \in E, \exists x' \in F, x'' \in F^\perp$ tq $x = x' + x''$
1. Soit $x \in F \cap F^\perp$
 $\Rightarrow \langle x, z \rangle = 0 \quad \forall z \in F$ car $x \in F \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (\langle, \rangle est définie)
2. Soit $x \in E$. Considérons $f_x \in E^*$, i.e $f_x : E \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y \rangle$ et $f := f_x|_F : F \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f \in E^*$ Lemme de Riesz $\Rightarrow \exists ! x' \in F$ tq $f = f_{x'} : F \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \langle x', z \rangle$
 $\Rightarrow f_x(z) = f_{x'}(z) = f(z) \quad \forall z \in F$ (Attention: pas l'égalité pour tout z dans E)
 Posons $x'' := x - x'$, i.e $x = x' + x'' \in F$. Montrons $x'' \in F^\perp$.
 Si $z \in F$, $\langle x'', z \rangle = \langle x - x', z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x', z \rangle = 0$. Donc $x'' \in F^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$ ($\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$)
 $F \subseteq (F^\perp)^\perp$ car $\langle x, z \rangle = 0 \quad \forall x \in F \quad \forall z \in F^\perp$

$$\dim(F) = \dim(E) - \dim(F^\perp)$$

$$\text{car } E = G \oplus G^\perp, \text{ donc } \dim(G) = \dim(E) - \dim(G^\perp) \text{ pour } G = F^\perp, \dim(F^\perp) = \dim(G)$$

□

Definition 1.19. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire \langle, \rangle

- Une famille $(v_i)_{i \geq 0}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si pour $i \neq j$ on a $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ i.e $v_i \perp v_j$

- Une famille orthogonale de E est une famille orthogonale $(v_i)_{i \geq 0}$ tq de plus $\|v_i\| = 1$ pour $i \geq 0$

Exemple 1.20. 1. $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. La base canonique (e_1, \dots, e_n) est orthogonale car

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2. Dans $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$. La famille $(\cos(t), \sin(t))$ est orthogonale. La famille $(1, t^2)$ n'est pas orthogonale:

$$\langle 1, t^2 \rangle = \int_{-1}^1 1t^2 dt = \frac{2}{3} \neq 0$$

Proposition 1.21. Une famille orthogonale constituée de vecteurs non-nuls est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.

Proof. Supposons (v_1, \dots, v_n) orthogonale avec $v_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$
si $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$, alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} 0 = \langle v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0} = \alpha_i \|v_i\|^2$$

Donc $\alpha_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$.

Si (v_1, \dots, v_n) est orthonormale, alors $\|v_i\| = 1$. Donc $v_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. □

Intuition. Les vecteurs orthogonaux (perpendiculaires) ne sont jamais dans l'un l'autre (i.e $e_i = \lambda e_j$ n'est pas possible) si les vecteurs sont liés, soit l'angle est < 90 (donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux, absurde), (ils sont dans l'un l'autre, ils ne sont pas orthogonaux, absurde). Donc ils sont bien libres.

Definition 1.22. (E, \langle, \rangle) espace euclidien. Une famille $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale (où BON) si elle est une base et famille orthonormale.

Theorem 1.23. (E, \langle, \rangle) espace euclidien. Alors, il admet une BON.

Proof. Soit $n := \dim(E)$. Soit (e_1, \dots, e_p) une famille orthogonale (du point de vue du cardinal p) tq $e_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, p$.

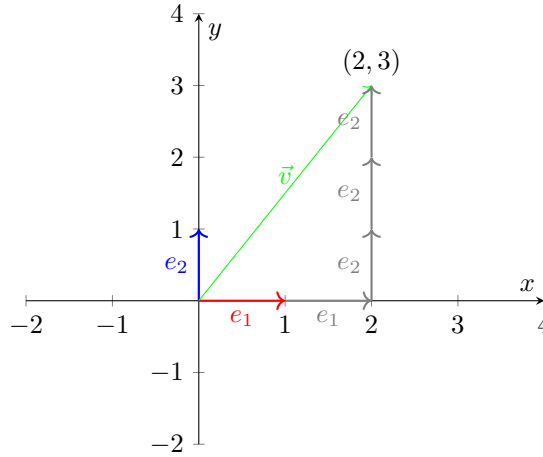
Supposons par l'absurde que $p < n$. Posons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Alors, $E = F \oplus F^\perp$ et $\dim(F) \leq p < n$. Donc $F^\perp \neq \{0\}$. Soit $x \in F^\perp, x \neq 0$. Alors, (e_1, \dots, e_p, x) est orthogonale de cardinal $> p$. Donc, $p = n$ et (e_1, \dots, e_n) est une base de E . Pour avoir une famille orthonormale (e'_1, \dots, e'_n) il suffit de prendre $e'_i = \frac{1}{\|e_i\|} e_i \forall i = \{1, \dots, n\}$. □

Proposition 1.24. Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et soit (e_1, \dots, e_n) une BON de E . Si $x \in E$, on a:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

Autrement dit, le réel $\langle x, e_i \rangle$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x dans la base (e_1, \dots, e_n) .

Intuition. L'orthonormalité de la base nous simplifie la vie. Mais avant, petite introduction. Soit un e.v $E = \mathbb{R}^2$ et la base $(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Soit un vecteur $\vec{v} = (2, 3)$:



Donc, on peut écrire $\vec{v} = (2, 3) = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2$. Les x et y (les coordonnées de v) nous donnent combien de parties de chaque vecteur de bases (le nombre peut être $\in \mathbb{R}$) et prendre leurs sommes, pour obtenir \vec{v} . (Le plus simple: combien on doit aller à gauche et en haut).

Dans la base orthonormale $\langle v, e_i \rangle$ nous donne combien on prend d'un vecteur e_i pour faire le vecteur \vec{v} et \vec{e}_i donne la direction. D'où $\langle v, e_1 \rangle$ équivaut à 2, et $\langle v, e_2 \rangle$ à 3, puis:

$$\vec{v} = \underbrace{\langle v, e_1 \rangle}_{=2} \cdot \vec{e}_1 + \underbrace{\langle v, e_2 \rangle}_{=3} \cdot \vec{e}_2$$

Habituellement, pour trouver les coordonnées dans une base, on devrait résoudre un système linéaire.

Proof. Posons $y := \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. Alors,

$$\begin{aligned} & \forall j = 1, \dots, n, \\ & \langle x - y, e_j \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle}_{\substack{\text{moved out} \\ \text{like constant}}} \\ &= \langle x, e_j \rangle \\ &= \left(\langle x, e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1, e_j \rangle}_{=0} + \dots + \langle x, e_{j-1} \rangle \underbrace{\langle e_{j-1}, e_j \rangle}_{=0} + \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} + \langle x, e_{j+1} \rangle \underbrace{\langle e_{j+1}, e_j \rangle}_{=0} + \dots + \langle x, e_n \rangle \underbrace{\langle e_n, e_j \rangle}_{=0} \right) \\ & \quad (\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ car un produit scalaire des vecteurs orthogonaux}) \\ & \quad (\forall j \langle e_j, e_j \rangle = 1 \text{ car un produit scalaire de même vecteur}) \\ &= \langle x, e_j \rangle - \underbrace{\langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_j \rangle}_{=1} = 0 \end{aligned}$$

Donc, $x - y \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$. Donc $x = y$ □

Corollaire 1.25. $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$

Proof. Si $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ donc

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

□

1.4 Matrices et produits vectoriels

Proposition 1.26. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ une B.O.N. Soient $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice représentative de f dans ε , i.e. $A = \text{Mat}_\varepsilon(f)$

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Proof. A est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $f(e_j)$ écrits dans la base ε :

$$A = (f(e_1) | \dots | f(e_n)) \quad f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Car $\forall v \in E, v = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$ donc $f(v) = c_1 f(e_1) + \dots + c_n f(e_n)$ par la linéarité, donc il nous reste à étudier chaque $f(e_j)$

$$\begin{aligned} f(e_j) &= a_{1,j} e_1 + \dots + a_{n,j} e_n \Rightarrow \\ \langle f(e_j), e_i \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \langle e_k, e_i \rangle = a_{i,j} \end{aligned}$$

$$\text{car } \langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases} \quad \text{Donc:}$$

$$a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle$$

□

La matrice d'un produit vectoriel est très utile dans l'algèbre linéaire. Avant donner une définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , un espace K et une forme bilinéaire $b : E \times E \rightarrow K$. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E , alors: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors on a:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j)$$

b est donc déterminé par la connaissance des valeurs $b(e_i, e_j)$ sur une base.

Definition 1.27. On appelle **matrice de b** dans la base $\{e_i\}$ la matrice:

$$M(b)_{e_i} = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \dots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \dots & b(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_n, e_1) & \dots & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Ainsi l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est le coefficient de $x_i y_j$.

Example 1.28. La matrice du produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^3 est:

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$Mat(\langle, \rangle)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.29. Notons:

$$\underbrace{A = M(b)_{e_i}}_{\text{matrice de produit scalaire}}$$

$$\underbrace{X = M(x)_{e_i}}_{\substack{\text{coordonnées de } x \\ \text{dans la base } e_i}}$$

$$\underbrace{Y = M(y)_{e_i}}_{\substack{\text{coordonnées de } y \\ \text{dans la base } e_i}}$$

$$(x, y \in E)$$

Alors, on a:

$$b(x, y) = X^t A Y$$

Example 1.30. Reprenons l'exemple avec $b = \langle, \rangle$ le produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^3 . Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Donc:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= X^t A Y = \underbrace{(1, 2, -1)}_{X^t} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_Y \\ &= \underbrace{(1, 2, -1)}_X \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{A \times Y}} \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2 + 6 - 1 = 7 \end{aligned}$$

TODO. changement de base de la matrice d'une forme bilinéaire

1.5 Projections orthogonales

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Alors, $E = F \oplus F^\perp$. Donc $\forall x \in E$ s'écrit

$$x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$$

Definition 1.31. La **projection orthogonale** de E dans F est la projection p_F de E sur F parallèlement à F^\perp , i.e

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow F \\ x = x_F + x_{F^\perp} &\longmapsto p_F(x = x_F + x_{F^\perp}) = x_F. \end{aligned}$$

Remark 1.32. 1. p_F est linéaire

2. $\forall x \in E$ $p_F(x)$ est complètement caractérisé par la propriété suivante:
Soit $y \in E$, alors

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \left(y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp \right) \Rightarrow y = x_F$$

En particulier $\langle p_F(x), x - p_F(x) \rangle = 0$. Alors, si (v_1, \dots, v_R) est une BON de F , on a:

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i$$

En effet, il suffit de vérifier que le vecteur $y = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i$ vérifie:

$$y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp$$

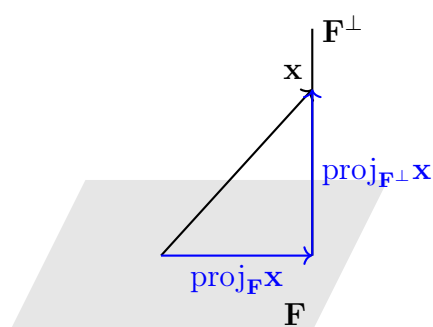


Figure 1.1: Projection

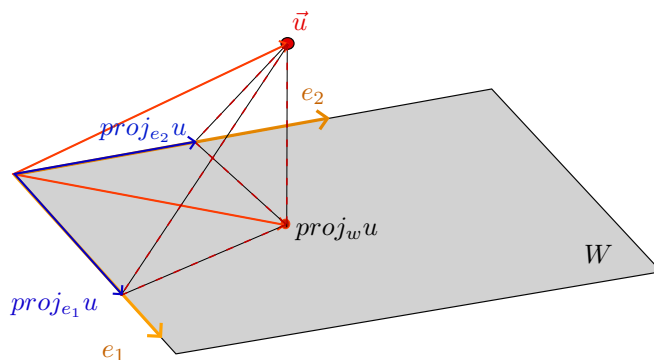


Figure 1.2: Projection avec BON

Proposition 1.33. Soit $x \in E$. Alors,

$$\|x - p_F(x)\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$$

i.e $\|x - p_F(x)\|$ est la distance de x à F .

Voir Figure 1.1

Proof. Comme $p_F(x) \in F$ il suffit de prouver que, si $y \in F$, alors

$$\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$$

$$\text{Mais, } \underbrace{\|x - y\|^2}_{(x-p_F(x))+(p_F(x)-y)} = \underbrace{\|x - p_F(x)\|^2}_{\in F^\perp} + 2 \underbrace{\langle x - p_F(x), p_F(x) - y \rangle}_{\in F} = 0 + \underbrace{\|p_F(x) - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - p_F(x)\|^2 \quad \square$$

Theorem 1.34. Gram-Schmidt

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire \langle, \rangle . Soit (v_1, \dots, v_n) une famille libre d'éléments $\in E$. Alors, il existe une famille (w_1, \dots, w_n) orthogonale tq

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \text{Vect}(v_1, \dots, v_i) = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i)$$

Proof. Récurrence sur i

- $i = 1$: $w_1 := v_1$ suffit
- $i \geq 1$: Supposons (w_1, \dots, w_i) construits. Posons $F_i = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$. Alors on prend $w_{i+1} := v_{i+1} - p_{F_i}(v_{i+1})$. Donc, $w_{i+1} \in F_i^\perp$ (par caractérisation de p_{F_i}) et (w_1, \dots, w_{i+1}) est orthogonale. On note $p_{F_i}(v_{i+1}) \in F_i$, donc

$$\text{Vect}(w_1, \dots, w_i, w_{i+1}) \underset{w_{i+1}=v_{i+1}-p_{F_i}(v_{i+1})}{=} \text{Vect}(w_1, \dots, w_i, v_{i+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i, v_{i+1})$$

□

Remark 1.35. La preuve donne une recette concrète pour construire une BON.

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien. (v_1, \dots, v_n) base de E .

Le but: construire une base (w'_1, \dots, w'_n) orthogonale de E avec $\text{Vect}(v_1, \dots, v_i) = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

Posons:

1. $w'_1 := v_1$
2. $w'_{i+1} = \sum_{j=1}^i \frac{\langle v_{i+1}, w'_j \rangle}{\langle w'_j, w'_j \rangle} w'_j$.

Alors, (w_1, \dots, w_n) avec $w_i = \frac{1}{\|w'_i\|} w'_i$ est une BON.