

CheatSheet pour l'Algèbre Linéaire

Yehor KOROTENKO

March 12, 2025

1 Espaces euclidiens

Proposition 1.1. *Endomorphisme $f : E \rightarrow E$ un drapeau invariant (i.e $f(E_i) \subset E_i$) \iff $\text{Mat}(f)$ triangulaire supérieure*

1.1 Produits scalaires et normes

Définition 1.1. *Une forme bilinéaire sur E (**produit scalaire**) un espace euclidien est une application:*

$$\begin{aligned} f : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) \end{aligned}$$

qui vérifie ces propriétés:

1. **Bilinéarité:**

(a) $f(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$ avec $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) $f(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(u, w)$ avec $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

2. **Symétrie:** $B(u, v) = B(v, u) \quad \forall u, v \in E$

3. **Définie positive:** $\forall u \in E, B(u, u) \geq 0$

4. **Définie:** $B(u, u) = 0 \iff u = 0$

Remarque. *Le produit vectoriel est noté: $\langle \cdot, \cdot \rangle$*

Définition 1.2. *La norme $\forall X \in E$:*

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

Proposition 1.2. *Les formules utiles: (pour $X, Y \in E$)*

1. $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$

2. $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$

3. $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$

4. $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2)$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.3. *$u, v \in E$ sont **orthogonaux** si $\langle u, v \rangle = 0$ et on les notes $u \perp v$*

Définition 1.4. ***Orthogonale de A :***

$$A^\perp = \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

*aussi connu comme **complement orthogonal**.*

Proposition 1.3. *Si E est un espace euclidien et $A \subset E$ son sous-espace vectoriel, alors:*

$$E = A \oplus A^\perp$$

i.e tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire comme $x = e + e'$ où $e \in A$ et $e' \in A^\perp$.

Proposition 1.4. *Si f est une projection orthogonale sur $F \subset E$, alors:*

$$f(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Définition 1.5. *La **projection orthogonale** sur un sous-espace $A \subset E$ est une application:*

$$\begin{aligned} p_F : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto p_F(x = e + e') = e \end{aligned}$$

Proposition 1.5. *La **distance** d'un vecteur x à un sous-espace F est:*

$$\|x - p_F(x)\|$$

Définition 1.6. *Une **isométrie** de E est un endomorphisme tel que:*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

de plus,

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$$