

Anal avec python

Yehor Korotenko

February 1, 2025

Contents

1	cours 1	2
1.1	Modèles discrètes	2
1.1.1	Modèle de croissance géométrique	2
1.2	Modèles continues	3
1.2.1	Modèle de Malthus	3
1.2.2	Modèle Verhulst	4
1.3	Modèle de croissance logistique	5
2	cours 2	6
2.1	Notion de champ de vecteurs associée à une EDO	6
2.1.1	Généralités et définitions	6
2.1.2	Dessins de champs de vecteurs	8
2.1.3	Recherche de solution approchée de modèles sous python	9
2.2	Modèle de prédateur proie (lotka-voltena (1931))	10
3	cours3:	
	Interpolation polynomiale	11
3.0.1	Valeur ajoutée par l'itération	12
3.0.2	Obtenir numériquement la vitesse de convergence	13

Chapter 1

cours 1

1.1 Modèles discretes

On désigne par $N(t)$ la population d'individus à l'instant t .

Équation du modèle discret:

$$\underbrace{N(t + \Delta t) - N(t)}_{\text{variation de la population}} = \underbrace{n}_{\text{nombre de naissances}} - \underbrace{m}_{\text{nombre de décès}} + \underbrace{\underbrace{i}_{\text{immigration}} - \underbrace{e}_{\text{émigration}}}_{\text{sol de migration}}$$

1.1.1 Modèle de croissance géométrique

- hypothèse:

- solde migration nul: i.e $i - e = 0$

- nombre de croissance proportionnel à la taille de la population $n = \underbrace{\lambda \Delta t N(t)}_{\text{taux de natalité}}$

- Idem pour le nombre de décès: $m = \underbrace{\mu \Delta t N(t)}_{\text{taux de mortalité}}$

- Modèle: On pose $N_n = N(t_n)$ la taille de la population à l'instant t_n .

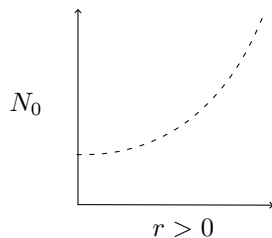
$$N_{n+1} - N_n = \lambda \Delta t N_n - \mu \Delta t N_n$$

on pose $r = \lambda - \mu$

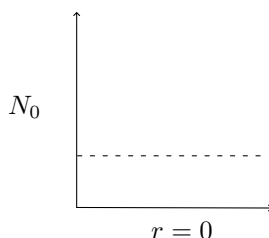
$$N_{n+1} = (1 + r \Delta t) N_n, \quad n = 0 \quad (1.1)$$

- Solution: $N_n = (1 + r \Delta t)^n N_0, \quad n \in \mathbb{N}$

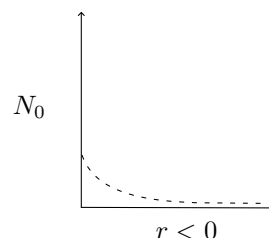
- Visualisation: Δt fixé



(a) Natalité supérieure à la mortalité



(b) Natalité égale à la mortalité



(c) Natalité inférieure à la mortalité

Property. .

- Lorsque $t \rightarrow 0$, la population semble tendre vers une courbe $N(t) = N_0 e^{rt}$, solution de $\begin{cases} N'(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Si $r > 0$, la population croît indéfiniment
- Si $r < 0$, il y a extinction de l'espèce.

Inconvénients:

1. Une croissance infinie n'est pas réaliste
2. Pour être rigoureux, on devrait écrire $E(rN_n)$ i.e partie entière.

1.2 Modèles continus

Motivation: L'observation qui prend Δt proche de 0 aura beaucoup plus d'information.

Remark 1.1. Le modèle de croissance géométrique

$$\begin{aligned} N(t + \Delta t) - N(t) &= \lambda \Delta t N(t) - \mu \Delta t N(t) \\ \Rightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= \lambda N(t) - \mu N(t) \end{aligned}$$

en faisant $\Delta t \rightarrow 0$

$$N'(t) = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

D'où l'équation des modèles continus:

$$\underbrace{N'(t)}_{\text{vitesse de variation}} = \underbrace{n(t)}_{\text{vitesse de naissance}} - \underbrace{m(t)}_{\text{vitesse de décès}} + \underbrace{i(t)}_{\text{vitesse d'immigration}} - \underbrace{e(t)}_{\text{vitesse d'émigration}}$$

1.2.1 Modèle de Malthus

- hypothèse:
 - solde migration nul: $i(t) - e(t) = 0$
 - vitesse de naissance proportionnel à la population à l'instant t : $n(t) = \lambda N(t)$
 - vitesse de décès: $m(t) = \mu N(t)$
- Modèle: $\begin{cases} N'(t) = (\lambda - \mu)N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Solution: $N(t) = N_0 e^{(\lambda - \mu)t}$
- **Property.** – Il peut être si comme limite du modèle de croissance géométrique.
 - Lorsque $r = \lambda - \mu > 0$ croissance est proportionnel.
 - Lorsque $r = \lambda - \mu = 0$ la population n'évolue pas.
 - Lorsque $r = \lambda - \mu < 0$ la population tend vers 0.
- Inconvénients:
 - croissance exponentielle pas réaliste. Il faut prendre en compte:
 - * la limitation des ressources
 - * l'interaction avec l'environnement

1.2.2 Modèle Verhulst

Corrige le modèle de Malthus en prenant en compte la limitation de ressources.

- Idée: limiter la croissance à un seuil K appelé capacité biotique

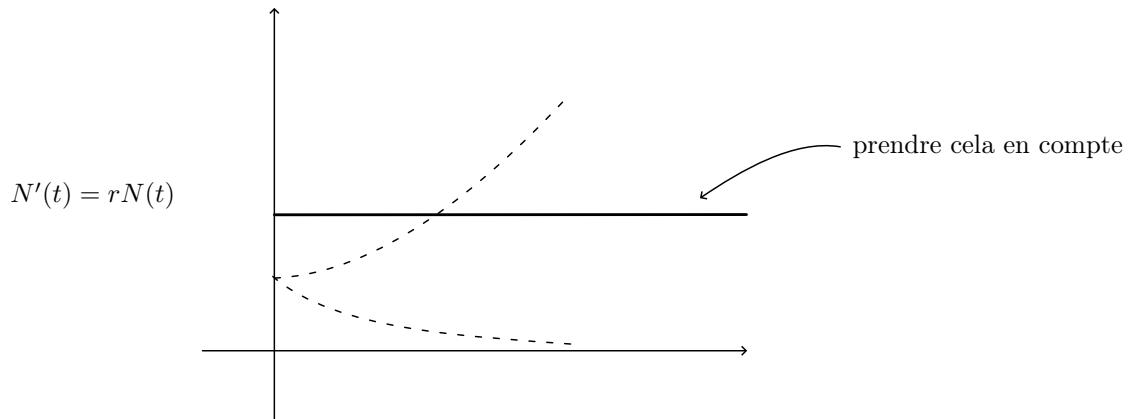


Figure 1.2: Modèle de Malthus



Figure 1.3: Modèle de Verhulst

- hypothèse: Sole de migration nul
 - taux de natalité fonction affine décroissante de la population $\lambda \approx \lambda(1 - \frac{N(t)}{K})$
 - taux de mortalité fonction affine croissante de la population $\mu \approx -\mu(1 - \frac{N(t)}{K})$
- Modèle:
$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$
- Solutions: $N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}} \quad t > 0$
- Visualisation:

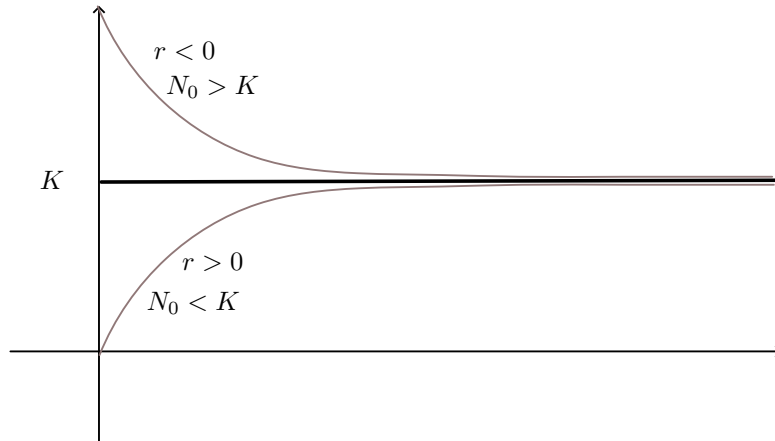


Figure 1.4: Verhulst solution

Property. Si $r > 0$, on a:

- si $N_0 = 0$ $N_0 = K$ on a: $N(t) = N_0 \forall t > 0$
- si $0 < N_0 < K$, N croissante
- si $N_0 > K$, N décroissante
- N possède une limite si $N_0 > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$$

1.3 Modèle de croissance logistique

C'est un modèle discret

- hypothèse: i.e = 0
 $n - m$ est une fonction affine de la population, i.e $n - m = r\Delta t N(t)(1 - \frac{N(t)}{K})$
- Modèle: On suppose $\Delta t = 1$: On pose $N_n = N(t_n)$

$$\text{On a: } \begin{cases} N_{n+1} - N_n = rN_n(1 - \frac{N_n}{K}) \\ N_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Property. (À vérifier numériquement)

- si $r < 2$, la suite converge vers K
- si $2 < r < 2.449$, la suite converge vers un cycle
- si $2.449 < r < 2.57$, la suite est encore un cycle mais plus complexe
- si $r > 2.57$, la suite devient chaotique

Chapter 2

cours 2

2.1 Notion de champ de vecteurs associée à une EDO

2.1.1 Généralités et définitions

Les modèles continus de la dynamique de populations sont des problèmes de Cauchy pour les EDO.

$$(EDO) \begin{cases} y'(x) = f(t, y(t)) & t \in]0, \pi[\\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Où

$$\begin{aligned} y : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f :]0, \pi[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x). \end{aligned}$$

- Si l'on sait résoudre analytiquement l'EDO (i.e donner l'expression de $t \mapsto y(t)$) alors c'est terminé car il suffit d'étudier la fonction $t \mapsto y(t)$
- Si l'on ne sait pas déterminer la solution analytique, on peut:
 1. s'assurer de **l'existence** et **l'unicité** de la solution et de sa **stabilité** vis à vis des données du problème.
 2. Puis analyser les propriétés qualitatives de cette solution pour simple analyse de $f(t, x)$

C'est ici qu'intervient les champs de vecteurs.

Illustrations.

1. Prenons le modèle de Malthus

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t), & t \in]0, \pi[\\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

On sait que $N(t) = N_0 e^{rt}$

2. Voici ce que fait python pour traiter N .

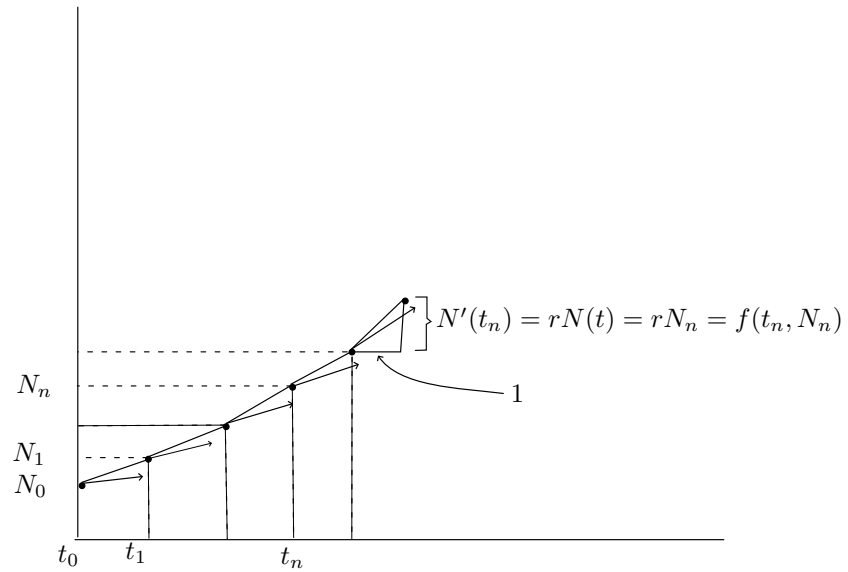


Figure 2.1: Ce que fait python

3. Traitons les vecteurs tangents à la courbe $t \mapsto N(t)$ aux points t_n , $n = 0$
4. Si l'on connaît les valeurs minimales et maximales de la solutions on peut avoir l'allure de la solution.

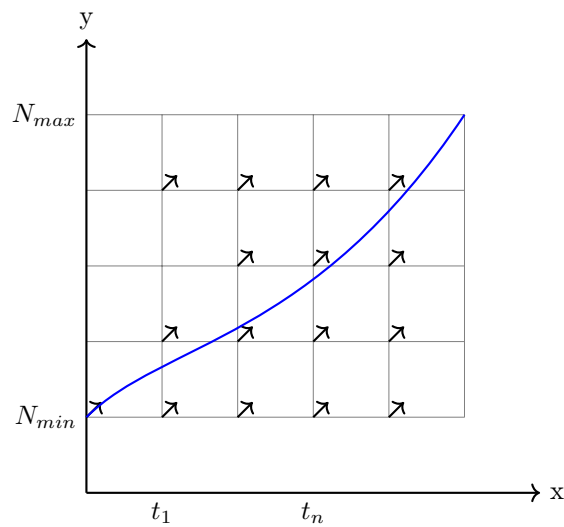


Figure 2.2: Une courbe sur des champs de vecteurs

Analysons ce que représente le vecteurs tangent:

- pour une courbe $y = g(x)$
- python et tout autre logiciel procède ainsi

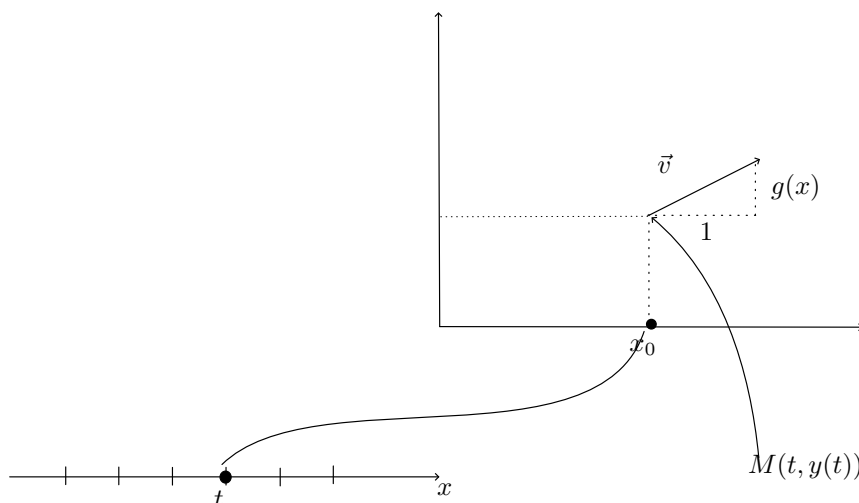


Figure 2.3: Ce que represente vecteur

Le vecteur tangent à la courbe:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (1, g'(x)) = (1, \frac{dy}{dx}) = (1, \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}) \\ &= \frac{1}{\frac{dx}{dt}} (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = \frac{1}{\dot{x}(t)} \underbrace{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \text{vecteur tangent}}} \\ \vec{v} &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t))\end{aligned}$$

Càd \vec{v} est le vecteur vitesse au points $M(x(t), y(t))$ a la courbe paramétrée $t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{cases}$. On a le résultat.

Proposition 2.1.

(y obtient solution de l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$)
 \Updownarrow
 (vecteur vitesse de la courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), y(t))$ au point $M(t_0) = (t_0, y(t_0))$
 si le vecteur $(1, f(t_0, y(t_0)))$)

Proposition 2.2.

$$\begin{aligned}V : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y) &\longmapsto V((t, y)).\end{aligned}$$

(si le champ de vecteur associé à l'EDO $y'(t) = f(t, y(t)) \Leftrightarrow V(t, y) = (1, f(t, y))$)

2.1.2 Dessins de champs de vecteurs

Principe:

À chaque points $P = (p_x, p_y)$ on trace le vecteur $\varepsilon V(P)$ où ε est une constance positive choisi pour écrire les vecteurs trop longs.

Avec python on écrit `quiver(Px, Py, Vx, Vy, angles='xy')` RQ 1: Cette fonction est vectorielle, i.e P_x, P_y, V_x, V_y , sont des numpy array de taille n . RQ 2: On peut ajouter un paramètre pour contrôler la longueur des vecteurs:

`plt.quiver(Px, Py, Vx, Vy, angles='xy', scale=1)`

Par conséquent, il faut normaliser les vecteurs (i.e le champ de vecteur)

Example 2.3. Champ de vecteur du modèle de Verhulst:

```
def f(t, y):
    return r * y * (1 - y/k)
```

la grille:

```
lt = np.linspace(tmin, tmax, N+1)
ly = np.linspace(ymin, ymax, M+1)
T, Y = np.meshgrid(lt, ly)
```

Construire les vecteurs:

```
Y = 1 + 0 * T
V = f(T, Y)
norm = np.sqrt(U*U + V*V)
U = U/norm
V = V/norm
```

On place les points:

```
plt.scatter(T, Y, marker='+', alpha = 0.5)
```

On place les vecteurs

```
plt.quiver(T, Y, U, V, angles='xy', scale=N)
```

2.1.3 Recherche de solution approchée de modèles sous python

On cherche une solution approchée de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in]t_0, t_0 + T[\\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec python. Pour cela il suffit de dire **en quels points** on veut cette solution.

On se donne:

- une liste des instants $[t_0, t_1, \dots, t_N]$
- t_0, y_0
- Puis, on appelle la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` de python.
- On obtient une liste $[y_0, y_1, \dots, y_N]$

Example 2.4. Cas du modèle du Verhulst

- EDO:

```
def f(t, y):
    return \ldots
```

- Instants

```
t0, tf = a, b
N = 100
t = np.linspace(t0, tf, N)
```

- On appelle odeint

```

1 from scipy.integrate import odeint
2 yapp = odeint(f, t, y), rtol=None, atol=None, tfloat=False)
3 plt.plot(t, yapp, \ldots)

```

2.2 Modèle de prédateur proie (lotka-voltena (1931))

$H(t)$: population de sardins

$P(t)$: population de requins

$$\frac{H'(t)}{H(t)} = \text{taux de variation de sardins} = \underbrace{a}_{\text{taux de croissance}} - \underbrace{bP(t)}_{\text{taux de mortalité}}$$

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \text{taux d'arrivé des requetes} = \underbrace{-c}_{\text{taux de décès}} + \underbrace{dH(t)}_{\text{taux de croissance}}$$

D'où le modèle:

$$\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - bP(t)) & t > 0 \\ P'(t) = P(t)(-c + dH(t)) \\ H(0) = H_0, \quad P(0) = P_0 \end{cases}$$

Si l'on désigne par $p \geq 0$ la proportion des requêtes en sardines pêchés

$$\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - p - bP(t)) & t > 0 \\ P'(t) = P(t)(-c - p - dH(t)) \\ H(0) = H_0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Chapter 3

cours3: Interpolation polynomiale

On va essayer de construire des polynômes qui passent par un ensemble (nuages) de points donnés.

Si ces points sont les valeurs d'une fonction, on aimerait:

- savoir si le polynôme construit est d'autant plus proche de la fonction que le nombre de point est grand. C'est-à-dire, est-ce que nute des "erreurs" tend vers zero lorsque le nombre de points tend vers l'infini.
- Si oui, comment quantifier cette convergence? C'est-à-dire, quelle est la vitesse (ordre) de cette convergence.

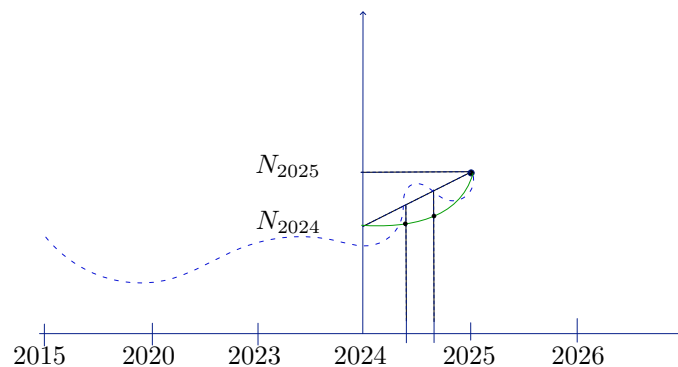


Figure 3.1: evolution-de-population-en-annee

1. Approche 1: approximation linéaire.
 - Polynôme de degré 1
2. Approche 2:
 - polynôme de degré 1
 - approximation quadratique
3. Approche 3: prise en compte d'Historique

Rappels sur les nuts numériques

Vitesse (ordre) de convergence

valeur ajoutée par itérations

Definition 3.1. Soit $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ une suite qui converge vers $x^* \in \mathbb{R}^n$, pour une norme $\| \cdot \|$ de \mathbb{R}^n

- Si $k_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|}$ existe et $k_1 \in]-1, 1[\setminus \{0\}$. On dit que la suite converge linéairement vers x^* ou que la convergence est d'ordre 1.
- Si $k_1 = 0$, $k_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^2}$ existe et non nul. On dit que la suite converge quadratiquement vers x^* , ou que la convergence est d'ordre 2.
- Si $k_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q}$ existe et $\neq 0$ la convergence est d'ordre q . La constante K_q est appelée constante asymptotique d'erreur.

Example 3.2. 1. $x_n = (0.2)^n$

- On a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. La convergence vers $x^* = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(0.2)^{n+1}}{(0.2)^n} = 0.2 \in]-1, 1[\setminus \{0\}$

D'où

- x_n converge à l'ordre 1
- Sa constante asymptotique est $k_1 = 0.2$

2. $I_n = (0.2)^{2^n}$. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

On a:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (0.2)^{2^{n+1}} = (0.2)^{2^n \cdot 2} \\ &= \left((0.2)^{2^n} \right)^2 \\ &= (I_n)^2 \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{(I_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(I_n)^2}{(I_n)^2} = 1$ D'où

- convergence d'ordre 2
- de constante $k_2 = 1$

En pratique, on ne dispose pas de K_q

Definition 3.3.

$$x_n \text{ converge vers } x^* \text{ à l'ordre } q \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \exists A, B \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \geq N, 0 < A \leq \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} \leq B < +\infty$$

La convergence est au moins d'ordre q si et seulement si on a (deuxieme partie d'équation)

3.0.1 Valeur ajoutée par l'itération

Il est question de comparer 2 suites qui ont la même vitesse de convergence.

Remark 3.4. Si $|x_n - x^*| = 4 \cdot 10^{-8} = 0.\underbrace{0000000}_7 \text{ chiffres} 4$. On dira que x_n et x^* ont 7 chiffres exactes apres la

virgule.

$$\begin{aligned}\log_{10} |x_n - x^*| &= \log_{10} 4 - 8 \log_{10}(10) \\ \frac{\log |x_n - x^*|}{\log 10} &= \frac{\log 4}{\log 10} - 8\end{aligned}$$

i.e $d_n = -\log_{10} |x_n - x^*|$ mesure de nombre de chiffres décimales entre x_n et x^* qui coïncident.

Remark 3.5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} = K_q \Rightarrow K_q \approx \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q}$$

D'où $d_{n+1} - qd_n \approx -\log_{10} K_q$, i.e

$$d_{n+1} + \frac{\log_{10} K_q}{1-q} \approx q(d_n + \frac{\log_{10} K_q}{1-q})$$

Donc, le nombre de chiffres significatives est multiplié par q .

Proposition 3.6. Si x_n converge à l'ordre 1 vers x^* de constante asymptotique K_1 , alors le nombre d'itérations nécessaires pour gagner un chiffre exacte est la partie entière de $-\frac{1}{\log_{10} K_1}$

Proof. Soit m le nombre d'itérations pour gagner un chiffre. Comme $d_{n+m} - d_n = -\log_{10} K_1$, en partant de d_n , après m itérations on aura

$$d_{n+m} - d_n = -m \log_{10} K_1$$

D'où on aura gagné 1 chiffre si $d_{n+m} - d_n = 1$, i.e

$$1 = -m \log_{10} K_1 \Rightarrow m = \left(-\frac{1}{\log_{10} K_1} \right)$$

□

3.0.2 Obtenir numériquement la vitesse de convergence

On cherche q tq: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} = K_q \in \mathbb{R}^*$

Remark 3.7.

$$\frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} \approx K_q \Rightarrow \underbrace{\log \|x_{n+1} - x^*\|}_Y - q \underbrace{\log \|x_n - x^*\|}_X = \log K_q$$

i.e $Y = aX + b$.

Conclusion: pour déterminer q :

- Traiter la courbe $\log \|x_n - x^*\| \mapsto \log \|x_{n+1} - x^*\|$
- Déterminer q comme la pente de la droite passant par le maximum de points.

$$x_n = x_0, x_1, \dots, x_N$$

$$x_n - x^* = x_0 - x^*, x_1 - x^*, \dots, x_N - x^*$$

$$x_{n+1} - x^* = x_1 - x^*, x_2 - x^*, \dots, x_{N+1} - x^*$$

En python:

```
1 xn = np.array([x0, ..., xN])
2 e = np.log(np.abs(xn - x*))
```

```

3 | ex = e[0:-1] #de premier a avant dernier
4 | ey = e[1:] #de deuxieme au dernier
5 | plt.scatter(ex, ey, label="miage")
6 | a,b = np.polyfit(ex, ey, 1)
7 | plt.plot(ex, b + a * ex, label=f"$x \mapsto {b:32f} + {a:32f}x$")

```