Notes du cours d'Analyse et Géometrie

Professeur: Christian Gérard

Yehor Korotenko

January 22, 2025

Contents

Abstract

Professeur: Christian Gérard

- CC: 0.15
  Pour les CC une semaine avant CC le prof va envoyer une liste des question. Les CC durent 30 minutes en TD en semaines:
  - 17/2
  - 17/3
  - 17/4
- P: 0.35
- E: 0.5

Il y aura des démonstrations en examens
Chercher dans google "page personnelle cristiang gérard Orsay", puis MDD251

Chapter 1

Introduction

1.1 Éspaces $\mathbb{R}^d$ $\mathbb{C}^d$

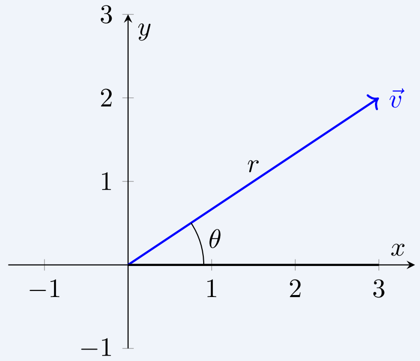
Definition 1.1.

$$\mathbb{R}^d = \{X = (x_1, \ldots, x_d), x_i \in \mathbb{R}\}$$

$x_1, \ldots, x_d$ coordonnées cartésiennes de X

Example 1.2. $d = 2$ coordonnées polaires:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$0 \leq r \leq \infty \quad \theta \in [0, 2\pi[$$



Definition 1.3. $\mathbb{R}^d$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d)$$
$$\lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_d) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\vec{0}_d = \vec{0} = (0, \ldots, 0)$$

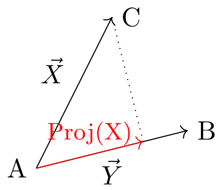
Definition 1.4. Un **produit scalaire**:

$$X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_dy_d = \|X\|\|Y\|\cos(\theta) \text{ (où } \theta \text{ est une angle entre } X \text{ et } Y)$$

Intuition. Ce produit nous dit *how closely the vectors point in the same direction* (cosinus tend vers 1 quand θ tend vers 0^{o}, et cosinus tend vers 0 quand θ tend vers 90^{o}). Et ce produit nous permet d'avoir une projection de X sur Y par la formule:

$$Proj(X) = \frac{X \cdot Y}{\|Y\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|}$$

$X \cdot Y$ donne la longeur de X et Y ensemble, en divisant cette longeur par $\|Y\|$ (la longeur de Y) on obtient la longeur de X sur Y, il nous reste de multiplier cette longeur par un vecteur unitaire(de longeur 1) qui pointe dans la même direction que Y, (on l'obtient par $\frac{Y}{\|Y\|}$)



Proposition 1.5. Produit scalaire respectes ces propriétés:

1. bilinaiarité $\quad \lambda \in \mathbb{R}$
   (a) $(X+Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$
   (b) $(\lambda X) \cdot Z = \lambda(X \cdot Z)$
   (c) $Z \cdot (X+Y) = Z \cdot X + Z \cdot Y$
   (d) $Z \cdot (\lambda X) = \lambda(Z \cdot X)$
2. symétrie $X \cdot Y = Y \cdot X$
3. défini positif: $X \cdot X \geq 0$ et $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

Proposition 1.6. Cauchy-Schwarz:

$$|X \cdot Y| \leq (X \cdot X)^{\frac{1}{2}} (Y \cdot Y)^{\frac{1}{2}}$$

Definition 1.7. La **norme euclidienne** d'un vecteur X est noté:

$$\|X\| = \left(\sum_{n=1}^{d} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2} = (X \cdot X)^{\frac{1}{2}}$$

souvent noté $\|X\|_2$

Intuition. Par le théorème de Pythogore, c'est une longeur de ce vecteur.

Proposition 1.8. La norme suit ces propriétés:

1. $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\| \; X \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (inégalité triangulaire)
3. $\|X\| \geq 0$ et $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

Proof. de (2)

$$\begin{aligned} \|X+Y\|^2 &= (X+Y) \cdot (X+Y) = X \cdot (X+Y) + Y \cdot (X+Y) = X \cdot X + X \cdot Y + Y \cdot X + Y \cdot Y \\ &= \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2 \leq \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2 \end{aligned}$$

Definition 1.9. Une <u>norme</u> sur $\mathbb{R}^d$ est une application $N:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tell que:

1. $N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$
2. $N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$
3. $N(X) \geq 0$ et $N(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

Example 1.10.

$$\|X\|_1 = \sum_{n=1}^{d} |x_i|$$
$$\|X\|_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max} |x_i|$$

1.2 Éspace $\mathbb{C}^d$

Definition 1.11.

$$\mathbb{C}^d = \{X = (x_1, \dots, x_d):\ x_i \in \mathbb{C}\}$$

$$\begin{aligned}
&z \in \mathbb{C} \quad \overline{z} = a - ib \quad \overline{z}z = a^2 + b^2 \quad |z| = \sqrt{\overline{z}z} = \sqrt{a^2+b^2} \\
&z = a + ib \qquad a = Re\, z,\ b = Im\, z \\
&Re\, X = (Re\, x_1, \dots, Re\, x_d) \in \mathbb{R}^d \\
&Im\, X = (Im\, x_1, \dots, Im\, x_d) \in \mathbb{R}^d \\
&\underset{\in \mathbb{C}^d}{X} = \underset{\in \mathbb{R}^d}{Re\, X} + i\, \underset{\in \mathbb{R}^d}{Im\, X}
\end{aligned}$$

$\mathbb{C}^d$ est un espace vécrotiel sur $\mathbb{C}$ (même formules avec $\lambda \in \mathbb{C}$ corps des scalaires)

Definition 1.12. <u>Produit scalaire:</u>

$$(X|Y) = \sum_{n=1}^{d} \overline{x_i} y_i \in \mathbb{C}$$

Proposition 1.13. .

1. $(X|Y)$ est "linéaire par rapport à Y"
   - $(Z|X+Y) = (Z|X) + (Z|Y)$
   - $(Z|\lambda X) = \lambda(Z|X) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
   - $(Z|\lambda X + \mu Y) = \lambda(Z|X) + \mu(Z|Y)$
   - $(X+Y|Z) = (X|Z) + (Y|Z)$
   - $(\lambda X|Z) = \overline{\lambda}(X|Z) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
   - $(\lambda X + \mu Y|Z) = \overline{\lambda}(X|Z) + \mu(Y|Z)$
2. $(Y|X) = \overline{(X|Y)}$
3. $(X|X) = \sum_{n=1}^{d} \overline{x_i} x_i = \sum_{n=1}^{d} |x_i|^2$
   $(X|X) \geq 0$ et $(X|X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_d$

Proof. On a Cauchy-Schwarz:

$$(X|Y) \leq (X|X)^{\frac{1}{2}}(Y|Y)^{\frac{1}{2}}$$

même preuve qu'avant

On pose:

$$\begin{aligned} &\|X\|(\text{ou } \|X\|_2) \\ &= (X|X)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{d} |x_i|^2\right)^2 \end{aligned}$$

norme hibertienne

$$\underbrace{\|X\|^2}_{\in \mathbb{C}^d} = \underbrace{\|Re\, X\|^2}_{\in \mathbb{R}^d} + i\, \underbrace{\|Im\, X\|^2}_{\in \mathbb{R}^d}$$

Lemma 1.14.

$$\|X\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

Proof. $|(X|Y)| \leq \|X\|\|Y\| \leq \|X\|$ si $\|Y\| \leq 1$

$$\sup_{\|Y\| \leq 1} |(X|Y)|$$

<u>Autre sens:</u>

$$\begin{aligned} &X \neq 0 \quad Y = \frac{X}{\|X\|} = \lambda X \quad \lambda = \frac{1}{\|X\|} \\ &\|Y\| = |\lambda|\|X\| = \frac{1}{\|X\|}\|X\| = 1 \\ &(X|Y) = (X|\frac{X}{\|X\|}) = \frac{1}{\|X\|}(X|X) = \|X\| \\ &sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\} \\ &\|X\| \leq sup\{|(X|Y)| : \|Y\| \leq 1\} \quad (\text{prendre } Y = \frac{X}{\|X\|}) \end{aligned}$$

<u>Autres normes sur $\mathbb{C}^d$</u>

- $\|X\|_1 = \sum_{n=1}^{d} |x_i| \quad X \in \mathbb{C}^d$
- $\|X\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

1.3 Distance sur $\mathbb{R}^d$

On oublie norme et produit scalaire. On introduit la distance

Definition 1.15. La distance

$$d(X, Y) = \|X - Y\|$$

Definition 1.16. La distance euclidienne

$$d(X,Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{d}(x_i - y_i)^2}$$

Proposition 1.17. Une distance est une application:

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longmapsto d((X,Y)) \end{aligned}$$

qui suit ces propriétés:

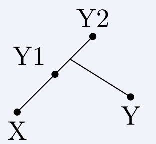
1. $d(X,Y) = d(Y,X)$ (symétrie)
2. $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ (inég. triangulaire) $\forall X, Y, Z$
3. $d(X,Y) \geq 0 \quad \forall X, Y$ et $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

Example 1.18. Distances

1. $d_2(X,Y) = \|X - Y\|_2$ (distance euclidienne sur $\mathbb{R}^d$)
2. $d_1(X,Y) = \|X - Y\|_1$
   $d_\infty(X,Y) = \|X - Y\|_\infty$
3. distance logarithmique sur $\mathbb{R}_+$: $d(a,b) = |b - a|$

   $$\log_{10}(a) = \frac{\log(a)}{\log(10)}$$

   $x, y \in]0, +\infty[$
   $d_{\log}(x,y) = |\log_{10}(\frac{y}{x})|$
   i est une distance sur $]0, +\infty[$
   $d_{\log}(100, 110) = \log_{10}(1,1)$
4. distance SNCF

   $d(X,Y)$ distance usuelle dans $\mathbb{R}^2$ on pose:

   $$\delta(X,Y) = \begin{cases} d(X,Y) \text{ si } X, 0, Y \text{ alignés} \\ d(X,0) + d(0,Y) \text{ sinon} \end{cases}$$

Chapter 2

Éspaces métriques

Definition 2.1. E muni d'une application de distance d (voir Definition 1.15) se note (E,d): espace métrique

Remark 2.2. si $d_1 \neq d_2$ (E,d_1) n'a rien à faire avec (E,d_2)

Remark 2.3. Retenir la version suivante de l'inégalité triangulaire:

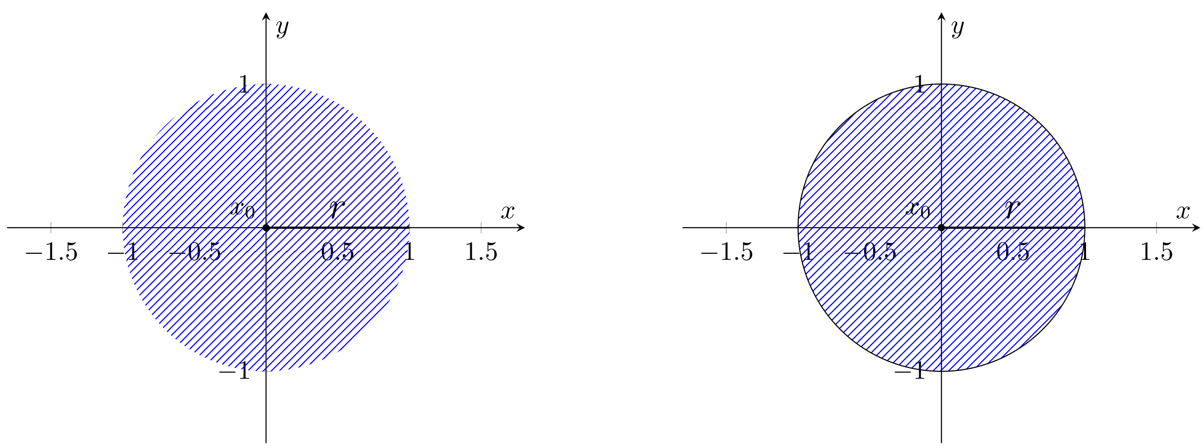
$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

Remark 2.4. Distance induite:
Si (E,d) espace métrique et $U \subset E$. Je peux restreidnre d à $U \times U$: (U,d) est aussi un éspace metrique.

2.1 Boules dans un espace métrique

Definition 2.5. (E,d) espace métrique. Soit $x_0 \in E$ et $r \geq 0$

1. $B(x_0,r) = \{x \in E : d(x_0,x) < r\ \}$ boule ouverte de centre x_0, de rayon r
2. $B_f(x_0,r) = \{x \in E : d(x_0,x) \leq r\}$ boule fermée de centre x_0, de rayon r



(a) boules ouverte (i.e $d(x_0,x) < r$)

(b) boules fermée (i.e $d(x_0,x) \leq r$)

Lemma 2.6. .

1. $B(x_0, 0) = \emptyset$ (car impossible d'avoir des points qui en distance sont strictement plus petit que 0)
2. $B_f(x_0, 0) = \{x_0\}$
3. $B(x_0, r_1) \subset B_f(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2)$ si $r_1 < r_2$
4. $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$ si $d(x_0, x_1) + r_1 \leq r$

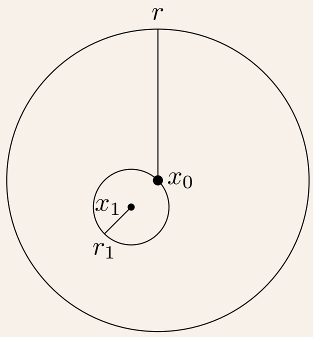


Figure 2.2: Lemma 4

Proof. Je suppose que $d(x_0, x_1) \leq r$
Soit $x \in B(x_1, r_1)$ donc $d(x_1, x) < r_1$ à montrer: $x \in B(x_0, r)$ (i.e $d(x_0, x) < r$?)
L'inégalité triangulaire me dit:

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &< d(x_0, x_1) + r_1 \leq r \\ &\Rightarrow x \in B(x_0, r) \end{aligned}$$

Example 2.7. 1. $E = \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|$

$$B(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$$

2. $E = \mathbb{R}^d, \quad d = 2, 3, \quad X = (x_1, \ldots, x_d)$

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{d} x_i$$
$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

$$\begin{aligned} &d_2(X, Y) = \|Y - X\|_2 = \|\vec{XY}\|_2 \\ &d_1(X, Y), d_\infty(X, Y) \end{aligned}$$

Property. Dans $\mathbb{R}^n$

- $d_\infty(X, Y) \leq d_1(X, Y) \leq n d_\infty(X, Y)$
- $d_\infty(X, Y) \leq d_2(X, Y) \leq \sqrt{n} d_\infty(X, Y)$

2.2 Parties bornées de (E, d)

Definition 2.8. Soit $A \subset E$. A est bornée si $\exists R > 0$ et $\exists x_0 \in E$ tel que

$$A \subset B(x_0, R)$$

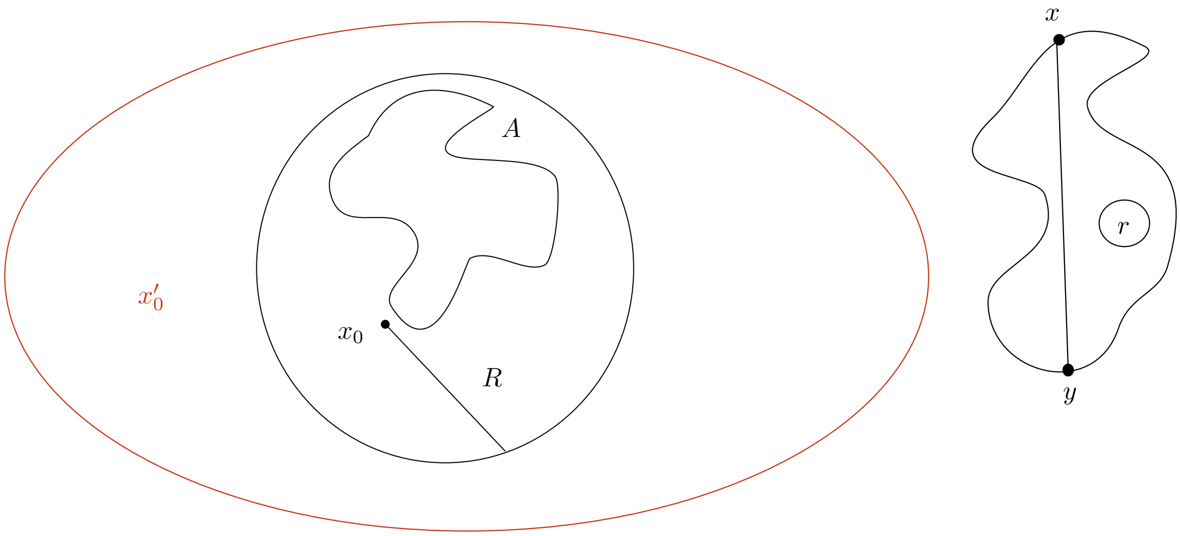


Figure 2.3: Exemple d'un enesemble borné

Lemma 2.9. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. A est bornée
2. $\forall x_0 \in E, \exists r > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r)$
3. $\exists r > 0$ tel que $\forall x, y \in A$ on a $d(x, y) < r$

Proof. de lemme

- $(1) \Rightarrow (2)$:
  Hyp: $\exists x_1 \in E, \exists r_1 \in E$ tq $A \subset B(x_1, r_1)$
  Soit $x_0 \in E$. But: trouver r tel que $A \subset B(x_0, r)$ si $x \in A$, on a: $d(x_1, x) < r_1$
  Je veux: $d(x_0, x) < r$

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \leq d(x_0, x_1) + r_1 < r \quad \text{si } r > d(x_0, x_1) + r_1$$

Property.
1. Toute partie finie est bornée
2. Si A botnée et $B \subset A$ alors B bornée
3. L'union d'un nombre fini de bornés est borné

Proof. de (3).
$A_1, \ldots, A_n$ sont bornés. Je fixe $x_0 \in E$, A_i borné $(1 \leq i \leq n)$, donc $\exists r_i > 0$ tel que $A_i \subset B(x_0, r_i)$ si $r = \underset{1 \leq i \leq n}{max}\, r_i$

$$A_i \subset B(x_0, r),\, \forall i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset B(x_0, r)$$

□

2.3 Fonctions bornées

Definition 2.10. Soit B un ensemble. Une fonction $F : B \to E$ est bornée si $F(B) = \{F(b) : b \in B\} \subset E$ est borné.

2.4 Distance entre ensembles

Definition 2.11. Soit A, B deux parties de E. On pose $d(A, B) = \underset{x \in A,\, y \in B}{inf} d(x, y)$

Property. $\forall x \in A,\, y \in B,\, d(x, y) \geq d(A, B)$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,\, y \in B$ tq $d(x, y) \leq d(A, B) + \varepsilon$

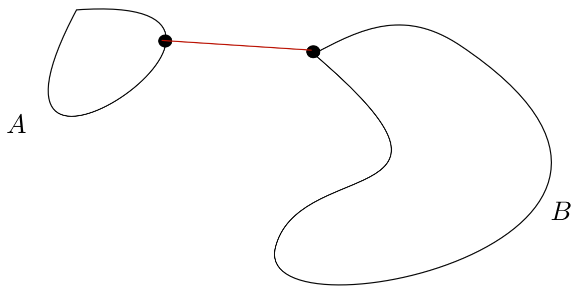


Figure 2.4: Distance entre ensembles

Definition 2.12. Distance entre un point et un ensemble:

$$d(x, A) = d(\{x\}, A) = \underset{y \in A}{inf}\, d(x, y)$$

$x \neq \{x\}$

2.5 Topologie des espaces métriques

distance $d(x, y) \longrightarrow$ boules $B(x_0, r) \longrightarrow$ ensembles ouverts

Definition 2.13. Soit (E, d) espace métrique.

1. $U \subset E$ est ouvert si $\forall x_0 \in U, \exists r > 0\, r(x_0)$ tel que $B(x_0, r) \subset U$
2. $F \subset E$ est fermé si $E \setminus F$ est ouvert

$\emptyset$ est ouvert et E est ouvert. $\emptyset$ est fermé et E est fermé.

Remark 2.14. dans $\mathbb{R}$ les intervalles ouverts sont des ouverts (pareil pour fermés)

Remark 2.15. Une distance entre deux ensembles ouverts toujours existe et elle est infimum (qui n'est jamais atteint)

Lemma 2.16. 1. $B(x_0, r_0)$ est ouvert.

2. $B_f(x_0, r_0)$ est fermé.

Proof. 1. Soit $x_1 \in B(x_0, r_0)$ $(d(x_0, x_1) < r_0)$.
But: touver $r_1 > 0$ tel que $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$?

$$\begin{aligned} &x \in B(x_1, r_1) : \ d(x_1, x) < r_1 \\ &x \in B(x_0, r_0) \text{ si } d(x_0, x) < r_0 \end{aligned}$$

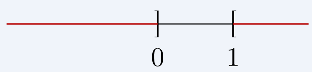
facile:

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &\leq d(x_0, x_1) + r_1 \\ &< r_0 \text{ si} \end{aligned}$$

$r_1 < r_0 - d(x_0, x_1) > 0$

□

Example 2.17. bizzare.
Soit $E = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |y - x|$, $A =]0, 1[$ ouvert, pas fermé dans $\mathbb{R}$.



Je regarde A comme partie de (A, d). Comme $A \setminus A = \emptyset$ qui est ouvert, donc A est fermé dans A. Par contre, les bornes ne sont jamais atteints, alors A est ouvert dans (A, d).

Theorem 2.18. .

1. Soit U_i, $i \in I$ une collection d'ouverts. Alors, $\cup_{i \in I} U_i$ est ouvert.
   Translate: Une union des ensembles ouverts est ouvert.

2. Si $U_1, \ldots, U_n$ sont ouverts
   $$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \text{ est ouvert.}$$
   Translate: intersection des ensembles ouverts est ouvert.

1. Soit U_i, $i \in I$ une collection de fermés. Alors, $\cup_{i \in I} U_i$ est fermé.
   Translate: Une union des ensembles fermés est fermé.

2. Si $U_1, \ldots, U_n$ sont fermés

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \text{ est fermé.}$$

Translate: intersection des ensembles fermés est fermé.

Proof. .

1. Soit $x \in U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Il existe un i noté i_0 tel que $x \in U_{i_0}$, U_{i_0} est ouvert, donc $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_{i_0} \subset U := \bigcup_{i \in I} U_i$.
2. Soit $x \in U := \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$.

   On fixe i. $x \in U_i$, U_i ouvert, donc $\exists r_i > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$, $1 \leq i \leq n$, donc $B(x, r) \subset U := \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$

□