

# CheatSheet d'Analyse et Géometrie

Yehor KOROTENKO

March 26, 2025

## 1 Distances et normes

**Définition 1.1.** Une **norme** sur  $\mathbb{R}^d$  est une application  $N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tel que:

1.  $N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$
2.  $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
3.  $N(X) \geq 0$  et  $N(X) = 0 \iff X = 0_d$

**Définition 1.2.** Une **distance** sur  $\mathbb{R}^d$  est une application:  $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tel que:

1.  $d(X, Y) = d(Y, X)$
2.  $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$
3.  $d(X, Y) \geq 0 \quad \forall X, Y$  et  $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$

**Exemple 1.1.** La distance et la norme canonique. Soit  $X = (x_1, \dots, x_n)$

1. La norme:

$$\|X\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

2. La distance:

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

## 2 Espaces métriques

**Définition 2.1.** Espace métrique est un ensemble muni de la distance.

**Définition 2.2.**  $(E, d)$  espace métrique et  $x_0 \in E$  et  $r \geq 0$ , alors:

1.  $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}$  boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$
2.  $B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}$  boule fermé de centre  $x_0$  et de rayon  $r$

**Définition 2.3.** Une partie  $A \subset E$  est bornée si  $\exists R > 0$  et  $x_0 \in E$  tq  $A \subset B(x_0, R)$ . Autrement dit, s'il existe une boule dans laquelle  $A$  est inclu.

## 3 Ouverts - fermés

**Définition 3.1.** Soit  $(E, d)$  espace métrique.

1.  $U \subset E$  est ouvert si  $\forall x_0 \in U, \exists r > 0$  tel que  $B(x_0, r) \subset U$  (si pour tout point de  $U$  il existe une boule ouverte inclu dans  $U$ )
2.  $F \subset E$  est fermé si  $E \setminus F$  est ouvert (si le complémentaire de  $F$  est ouvert).

**Théorème 3.1.** Très important!!

1. Soit  $U_i, i \in I$  une collection d'ouverts. Alors,  $\cup_{i \in I} U_i$  est ouvert.  
Translate: Une union quelconque des ensembles ouverts est ouvert.

2. Si  $U_1, \dots, U_n$  sont ouverts

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \text{ est ouvert.}$$

Translate: intersection finie des ensembles ouverts est ouvert.

1. Soit  $U_i, i \in I$  une collection de fermés. Alors,  $\cup_{i \in I} U_i$  est fermé.  
Translate: Une union quelconque des ensembles fermés est fermé.

2. Si  $U_1, \dots, U_n$  sont fermés

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \text{ est fermé.}$$

Translate: intersection finie des ensembles fermés est fermé.

Note: pour union quelconque, intersection finie!

**Proposition 3.1.** Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $\forall 1 \leq i \leq N, U_i \subset E$

1. Si tout  $U_i$  est ouvert, alors  $U_1 \times \dots \times U_N$  est aussi ouvert.
2. Si tout  $U_i$  est fermé, alors  $U_1 \times \dots \times U_N$  est aussi fermé.

## 4 Intérieur, Adhérence, Frontière

**Définition 4.1.** Un point  $x_0 \in A$  est intérieur à  $A$  s'il existe  $r > 0$  tq  $B(x_0, r) \subset A$ . **Intérieur** de  $A$  est l'ensemble de tous les points intérieurs à  $A$ :

$$\text{Int}(A) = \{x \in A : x \text{ est intérieur à } A\}$$

Note: le plus grand ouvert inclu dans  $A$

**Définition 4.2.** Un point  $x_0 \in A$  est adhérent à  $A$  s'il existe  $r > 0$  tq  $B(x_0, r)$  intersecte  $A$ . **Adhérence** de  $A$  est l'ensemble de tous les points intérieurs à  $A$ :

$$\text{Adh}(A) = \{x \in E : x \text{ est adhérent à } A\}$$

Note: le plus petit fermé contenant  $A$

**Définition 4.3.** La **frontière**:  $\partial A = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(E \setminus A)$

**Définition 4.4.** Soit  $A \subset B$ . On dit que  $A$  est **dense** dans  $B$  si  $B \subset \text{Adh}(A)$

**Proposition 4.1.** Caractérisations séquentielles:

1. **de fermé**:  $A$  est fermé ssi pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge (supposons vers  $x$ ), sa limite  $x$  est aussi dans  $A$  ( $x \in A$ )
2. **d'adhérence**:  $x \in \text{Adh}(A)$  ssi il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  tq  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
3. **de compact**:  $A \subset E$  est compact si pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$ , il existe une sous-suite  $(x_{\phi(n)})$  qui converge vers une limite  $x \in A$

**Proposition 4.2.** 1. Si une suite  $(x_n)$  converge vers une limite  $x$ , cette limite est **unique**.

2. Si une suite  $(x_n)$  converge vers une limite  $x$  et cette suite admet une sous-suite  $(x_{\phi(n)})$  qui converge vers une limite  $x'$ . Alors on a toujours:  $x = x'$

## 5 Compact

**Définition 5.1.** Soient  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  où  $U_i$  est ouvert  $\forall i \in I$ . Alors, si  $A \subset U$ , donc  $U$  est un recouvrement ouvert de  $A$ .

**Définition 5.2.**  $K \subset E$  est **compact** si de TOUT recouvrement ouvert de  $K$  on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini: i.e, on peut trouver  $i_1, \dots, i_n \in I$  (un nombre fini de  $i_i$ ) tels que:

$$K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

**Proposition 5.1.** 1. Un ensemble fini est compact.

2.  $K$  compact  $\implies K$  fermé et borné
3. Si  $K$  compact et  $F$  fermé, alors  $K \cap F$  est compact.
4. Si  $K$  compact, toute suite de Cauchy dans  $K$  converge dans  $K$ .

## 6 Utilisation des fonctions continues

**Proposition 6.1.** Soit  $F : E_1 \rightarrow E_2$  une fonction continue avec  $E_1, E_2$  espaces métriques, alors:

1. Pour tout  $U_2 \subset E_2$  ouvert,  $F^{-1}(U_2)$  est ouvert dans  $E_1$ .
2. Pour tout  $F_2 \subset E_2$  fermé,  $F^{-1}(F_2)$  est fermé dans  $E_1$ .
3. Pour toute suite  $(x_n)$  dans  $E_1$  ayant limite  $x$  (i.e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ) on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$$

## 7 Montrer qu'un ensemble est fermé ou ouvert

Pour montrer qu'un ensemble  $\mathcal{U}$  est ouvert

- Utiliser la définition :

$$\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}$$

- Montrer que  $E \setminus \mathcal{U}$  est fermé.
- Montrer que  $\mathcal{U}$  est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.
- Exprimer  $\mathcal{U}$  comme une boule ouverte.
- Écrire  $\mathcal{U}$  comme :
  - une réunion d'ouverts ;
  - une intersection finie d'ouverts.
- $\mathcal{U} = \text{Int}(U)$ .
- Écrire  $\mathcal{U} = I_1 \times \cdots \times I_n$  avec  $I_i$  ouvert.

Pour montrer qu'un ensemble  $V \subset E$  est fermé

- Utiliser la définition :  $E \setminus V$  est ouvert.
- Caractérisation séquentielle : Toute suite convergente dans  $V$ , sa limite est aussi dans  $V$ .
- Montrer que  $V$  est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.
- Montrer que  $V$  est compact.