

CheatSheet pour l'Algèbre Linéaire

Yehor KOROTENKO

April 4, 2025

1 Espaces euclidiens

Proposition 1.1. Endomorphisme $f : E \rightarrow E$ un drapeau invariant (i.e $f(E_i) \subset E_i$) \iff $Mat(f)$ triangulaire supérieure

1.1 Produits scalaires et normes

Définition 1.1. Une forme bilinéaire sur E (**produit scalaire**) un espace euclidien est une application:

$$\begin{aligned} f : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) \end{aligned}$$

qui vérifie ces propriétés:

1. **Bilinéarité:**

(a) $f(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$ avec $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) $f(u, v + \lambda w) = B(u, v) + \lambda B(u, w)$ avec $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

2. **Symétrie:** $B(u, v) = B(v, u) \quad \forall u, v \in E$

3. **Définie positive:** $\forall u \in E, B(u, u) \geq 0$

4. **Définie:** $B(u, u) = 0 \iff u = 0$

Remarque. Le produit vectoriel est noté: $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Définition 1.2. La norme $\forall X \in E$:

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

Proposition 1.2. Les formules utiles: (pour $X, Y \in E$)

1. $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ (égalité si X et Y sont colinéaires)

2. $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$

3. $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$

4. $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2)$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.3. $u, v \in E$ sont **orthogonaux** si $\langle u, v \rangle = 0$ et on les notes $u \perp v$

Définition 1.4. **Orthogonale de A :**

$$A^\perp = \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in A\}$$

aussi connu comme **complement orthogonal**.

Proposition 1.3. Si E est un espace euclidien et $A \subset E$ son sous-espace vectoriel, alors:

$$E = A \oplus A^\perp$$

i.e tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire comme $x = e + e'$ où $e \in A$ et $e' \in A^\perp$.

Proposition 1.4. Si f est une projection orthogonale sur $F \subset E$, alors:

$$f(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Définition 1.5. La **projection orthogonale** sur un sous-espace $A \subset E$ est une application:

$$\begin{aligned} p_F : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto p_F(x = e + e') = e \end{aligned}$$

Proposition 1.5. La **distance** d'un vecteur x à un sous-espace F est:

$$\|x - p_F(x)\|$$

Définition 1.6. Une **isométrie** de E est un endomorphisme tel que:

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

de plus,

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$$

Proposition 1.6. Si $X \in E$ et (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E , donc:

$$X = \langle X, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle X, e_n \rangle e_n$$

Où $\langle X, e_i \rangle$ sont les coordonnées dans la base (e_1, \dots, e_n)

2 Déterminants

2.1 Propriétés les plus importantes

Proposition 2.1. les propriétés de déterminant. Pour cette proposition, on note $\det(c_1, \dots, c_n)$ un déterminant où $\forall i, r_i$ et $\forall i, y_i$ représentent une colonne (ou un vecteur colonne). Et $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

1. **Déterminant de la matrice identité est 1:**

$$\det(I_n) = 1$$

2. **Déterminant de la matrice du rang 1 est son seul élément:**

$$\det([a_{1,1}]) = a_{1,1} \quad \text{où } a_{1,1} \in \mathbb{R}$$

3. **Linéarité 1:**

$$\det(r_1, \dots, r_i + y_i, \dots, r_n) = \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) + \det(r_1, \dots, y_i, \dots, r_n)$$

4. **Linéarité 2:**

$$\det(r_1, \dots, \lambda_i r_i, \dots, r_n) = \lambda_i \det(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n)$$

C'est pourquoi:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

5. **Mêmes colonnes:** Supposons que $i \neq j$ et $c_i = c_j$ alors:

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = 0$$

S'il y a deux colonnes identiques, alors \det est égale à 0.

6. **Déplacements des colonnes:**

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = -\det(c_1, \dots, \underbrace{c_j, \dots, c_i}_{\text{permutation}}, \dots, c_n)$$

Autrement dire, une permutation des colonnes change la signe.

7. **Déterminant des matrices multipliées:** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

8. **Déterminant d'une matrice transposée:** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

3 Utile

3.1 Multiplication des matrices

Définition 3.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ tels que $A = (a_{j,i})$ et $B = (b_{i,k})$, alors:

$$AB = C = (c_{j,k} = \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,k})$$

3.2 La trace

Définition 3.2. La trace de la $n \times n$ matrice carée A , notée $\text{tr}(A)$, est la somme des éléments diagonales

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

où a_{ii} sont des éléments diagonales de la matrice A .