

# Analyse numérique avec python

Yehor Korotenko

March 31, 2025

### **Abstract**

Ce sont les notes prises aux CMs d'Analyse Numériques avec Python (UE MDD253DU) fait par le professeur Jean-Baptiste APOUNG KAMGA. Je n'ai rien ajouté dans ces notes. Ce qui est écrit dans ce fichier est ce que le professeur a écrit sur le tableau pendant les CMs.

# CONTENTS

<b>1</b>	<b>Équations Différentielles</b>	<b>3</b>
1.1	Modèles discrètes . . . . .	3
1.1.1	Modèle de croissance géométrique . . . . .	3
1.2	Modèles continues . . . . .	4
1.2.1	Modèle de Malthus . . . . .	4
1.2.2	Modèle Verhulst . . . . .	5
1.3	Modèle de croissance logistique . . . . .	6
1.4	Notion de champ de vecteurs associée à une EDO . . . . .	6
1.4.1	Généralités et définitions . . . . .	6
1.4.2	Dessins de champs de vecteurs . . . . .	9
1.4.3	Recherche de solution approchée de modèles sous python . . . . .	9
1.5	Modèle de prédateur proie (lotka-voltena (1931)) . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Interpolation polynomiale</b>	<b>11</b>
2.1	Rappels sur les nuts numériques	
	Vitesse (ordre) de convergence	
	valeur ajoutée par itérations . . . . .	11
2.1.1	Valeur ajoutée par l'itération . . . . .	12
2.1.2	Obtenir numériquement la vitesse de convergence . . . . .	13
2.2	Interpolation: définition-motivation-exemples . . . . .	14
2.2.1	Définition . . . . .	14
2.2.2	Motivations . . . . .	14
2.2.3	exemples d'interpolation . . . . .	14
2.3	Polynôme interpolateur de lagrange . . . . .	17
2.3.1	Définition et propriétés . . . . .	17
2.3.2	Estimation d'erreur . . . . .	17
2.3.3	Implémentation avec python . . . . .	18
2.4	Construction des polynôme d'interpolation de lagrange . . . . .	18
2.4.1	Interpolation dans la base canonique (Vandermonde) . . . . .	18
2.4.2	Interpolation dans la base duale: Formule de lagrange et points barycentrique . . . . .	19
2.4.3	Méthode des différences divisées . . . . .	21
2.5	Comportement asymptotique "lorsque $N \rightarrow \infty$ " . . . . .	23
2.5.1	Observation . . . . .	23
2.5.2	Polynôme de Tchebychev . . . . .	23
2.5.3	Application . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Intégration numérique</b>	<b>26</b>
3.1	Formule de quadrature . . . . .	27
3.1.1	Construction de formule de quadrature à points donnés . . . . .	27
3.2	Utilisation des formules de quadrature. Formule de quadrature élémentaires et composées . . . . .	29
3.2.1	Définition . . . . .	29
3.2.2	Méthode de quadrature clamique . . . . .	30
3.2.3	Méthode de trapèze . . . . .	31
3.2.4	Méthode de point-milieu . . . . .	32
3.2.5	Méthode de Simpson . . . . .	33
3.2.6	Méthode de Newton-Côte . . . . .	34
3.3	Construction de formule de quadrature (à points inconnus): Formules de Gauss Legedre . . . . .	36

<b>4</b>	<b>Résolution approchée d'équations différentielles ordinaires (EDOs)</b>	<b>38</b>
4.1	Motivations . . . . .	38
4.1.1	Définitions . . . . .	38
4.1.2	Exemple . . . . .	39
4.1.3	Nécessite de la solution approchée . . . . .	40
4.2	Problème d'évolution de population des lapins . . . . .	41
4.3	Exemple de Schémas numériques . . . . .	42
4.3.1	Formulation intégrale . . . . .	42
4.3.2	Construction de schema d'Euler explicite . . . . .	42
4.3.3	Autres schémas et forme général des schemas explicites à un pas . . . . .	44

# CHAPTER 1

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

### 1.1 Modèles discrets

On désigne par  $N(t)$  la population d'individus à l'instant  $t$ .

Équation du modèle discret:

$$\underbrace{N(t + \Delta t) - N(t)}_{\text{variation de la population}} = \underbrace{n}_{\text{nombre de naissances}} - \underbrace{m}_{\text{nombre de décès}} + \underbrace{i}_{\text{immigration}} - \underbrace{e}_{\text{émigration}}$$

sol de migration

#### 1.1.1 Modèle de croissance géométrique

- hypothèse:

- solde migration nul: i.e  $i - e = 0$
- nombre de croissance proportionnel à la taille de la population  $n = \lambda \Delta t N(t)$   
taux de natalité
- Idem pour le nombre de décès:  $m = \mu \Delta t N(t)$   
taux de mortalité

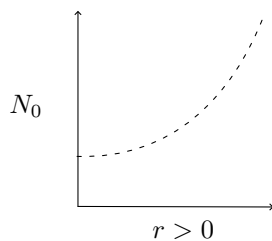
- Modèle: On pose  $N_n = N(t_n)$  la taille de la population à l'instant  $t_n$ .

$$N_{n+1} - N_n = \lambda \Delta t N_n - \mu \Delta t N_n$$

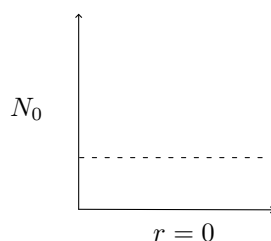
on pose  $r = \lambda - \mu$

$$N_{n+1} = (1 + r \Delta t) N_n, \quad n = 0 \tag{1.1}$$

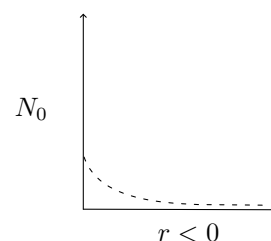
- Solution:  $N_n = (1 + r \Delta t)^n N_0, \quad n \in \mathbb{N}$
- Visualisation:  $\Delta t$  fixé



(a) Natalité supérieure à la mortalité



(b) Natalité égale à la mortalité



(c) Natalité inférieure à la mortalité

Property. .

- Lorsque  $t \rightarrow 0$ , la population semble tendre vers une courbe  $N(t) = N_0 e^{rt}$ , solution de  $\begin{cases} N'(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Si  $r > 0$ , la population croît indéfiniment
- Si  $r < 0$ , il y a extinction de l'espèce.

Inconvénients:

1. Une croissance infinie n'est pas réaliste
2. Pour être rigoureux, on devrait écrire  $E(rN_n)$  i.e partie entière.

## 1.2 Modèles continus

Motivation: L'observation qui prend  $\Delta t$  proche de 0 aura beaucoup plus d'information.

**Remark 1.1.** Le modèle de croissance géométrique

$$\begin{aligned} N(t + \Delta t) - N(t) &= \lambda \Delta t N(t) - \mu \Delta t N(t) \\ \Rightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= \lambda N(t) - \mu N(t) \end{aligned}$$

en faisant  $\Delta t \rightarrow 0$

$$N'(t) = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

D'où l'équation des modèles continus:

$$\underbrace{N'(t)}_{\text{vitesse de variation}} = \underbrace{n(t)}_{\text{vitesse de naissance}} - \underbrace{m(t)}_{\text{vitesse de décès}} + \underbrace{i(t)}_{\text{vitesse d'immigration}} - \underbrace{e(t)}_{\text{vitesse d'émigration}}$$

### 1.2.1 Modèle de Malthus

- hypothèse:
  - solde migration nul:  $i(t) - e(t) = 0$
  - vitesse de naissance proportionnel à la population à l'instant  $t$ :  $n(t) = \lambda N(t)$
  - vitesse de décès:  $m(t) = \mu N(t)$
- Modèle:  $\begin{cases} N'(t) = (\lambda - \mu)N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$
- Solution:  $N(t) = N_0 e^{(\lambda - \mu)t}$
- **Property.** – Il peut être si comme limite du modèle de croissance géométrique.
  - Lorsque  $r = \lambda - \mu > 0$  croissance est proportionnel.
  - Lorsque  $r = \lambda - \mu = 0$  la population n'évolue pas.
  - Lorsque  $r = \lambda - \mu < 0$  la population tend vers 0.
- Inconvénients:
  - croissance exponentielle pas réaliste. Il faut prendre en compte:
    - \* la limitation des ressources
    - \* l'interaction avec l'environnement

### 1.2.2 Modèle Verhulst

Corrige le modèle de Malthus en prenant en compte la limitation de ressources.

- Idée: limiter la croissance à un seuil  $K$  appelé capacité biotique

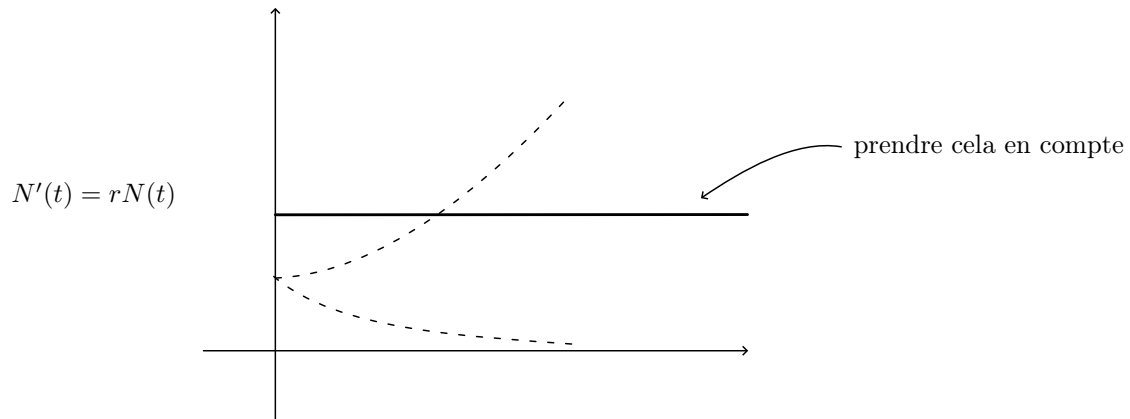


Figure 1.2: Modèle de Malthus

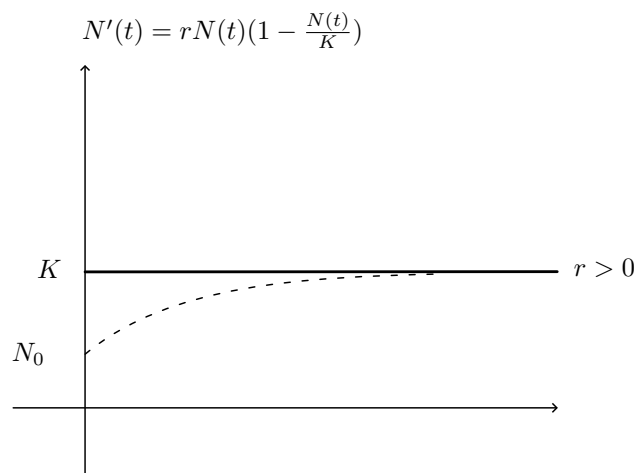


Figure 1.3: Modèle de Verhulst

- hypothèse: Sole de migration nul
  - taux de natalité fonction affine décroissante de la population  $\lambda \approx \lambda(1 - \frac{N(t)}{K})$
  - taux de mortalité fonction affine croissante de la population  $\mu \approx -\mu(1 - \frac{N(t)}{K})$
- Modèle: 
$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$
- Solutions:  $N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}} \quad t > 0$
- Visualisation:



Figure 1.4: Verhulst solution

**Property.** Si  $r > 0$ , on a:

- si  $N_0 = 0$   $N_0 = K$  on a:  $N(t) = N_0 \forall t > 0$
- si  $0 < N_0 < K$ ,  $N$  croissante
- si  $N_0 > K$ ,  $N$  décroissante
- $N$  possède une limite si  $N_0 > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$$

### 1.3 Modèle de croissance logistique

C'est un modèle discret

- hypothèse: i.e = 0  
 $n - m$  est une fonction affine de la population, i.e  $n - m = r\Delta t N(t)(1 - \frac{N(t)}{K})$
- Modèle: On suppose  $\Delta t = 1$ : On pose  $N_n = N(t_n)$

$$\text{On a: } \begin{cases} N_{n+1} - N_n = rN_n(1 - \frac{N_n}{K}) \\ N_0 \text{ donné} \end{cases}$$

**Property.** (À vérifier numériquement)

- si  $r < 2$ , la suite converge vers  $K$
- si  $2 < r < 2.449$ , la suite converge vers un cycle
- si  $2.449 < r < 2.57$ , la suite est encore un cycle mais plus complexe
- si  $r > 2.57$ , la suite devient chaotique

## 1.4 Notion de champ de vecteurs associée à une EDO

### 1.4.1 Généralités et définitions

Les modèles continus de la dynamique de populations sont des problèmes de Cauchy pour les EDO.

$$(EDO) \begin{cases} y'(x) = f(t, y(t)) & t \in ]0, \pi[ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Où

$$\begin{aligned} y : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y(t). \end{aligned}$$



$$f : ]0, \pi[ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x) \longmapsto f(t, x).$$

- Si l'on sait résoudre analytiquement l'EDO (i.e donner l'expression de  $t \mapsto y(t)$ ) alors c'est terminé car il suffit d'étudier la fonction  $t \mapsto y(t)$
- Si l'on ne sait pas déterminer la solution analytique, on peut:
  1. s'assurer de **l'existence** et **l'unicité** de la solution et de sa **stabilité** vis à vis des données du problème.
  2. Puis analyser les propriétés qualitatives de cette solution pour simple analyse de  $f(t, x)$

**C'est ici qu'intervient les champs de vecteurs.**

Illustrations.

1. Prenons le modèle de Malthus

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t), & t \in ]0, \pi[ \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

On sait que  $N(t) = N_0 e^{rt}$

2. Voici ce que fait python pour traiter  $N$ .

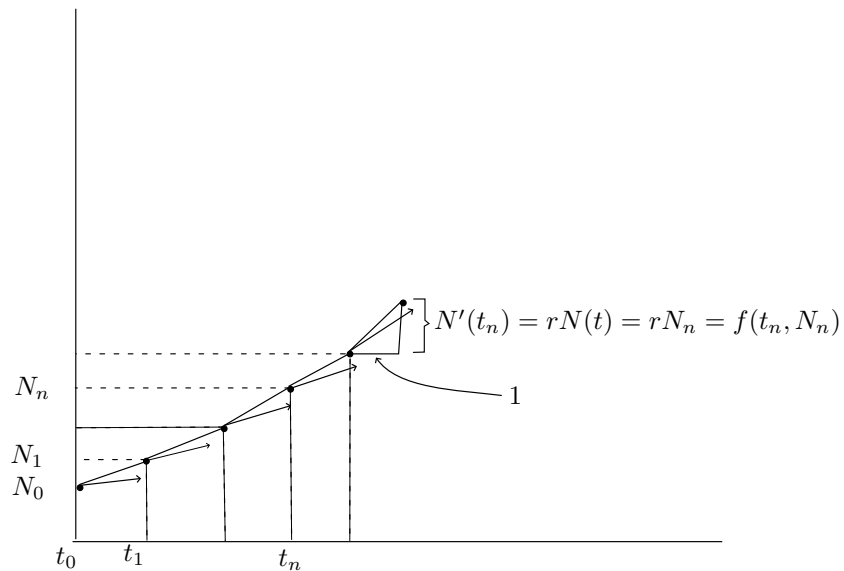


Figure 1.5: Ce que fait python

3. Traitons les vecteurs tangents à la courbe  $t \mapsto N(t)$  aux points  $t_n$ ,  $n = 0$
4. Si l'on connaît les valeurs minimales et maximales de la solutions on peut avoir l'allure de la solution.

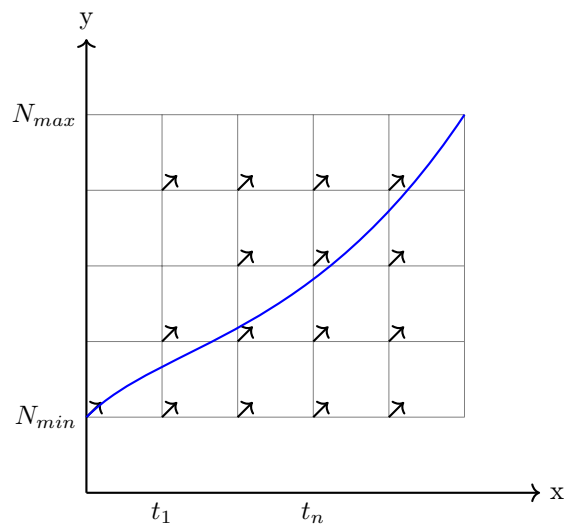


Figure 1.6: Une courbe sur des champs de vecteurs

Analysons ce que représente le vecteurs tangent:

- pour une courbe  $y = g(x)$
- python et tout autre logiciel procède ainsi

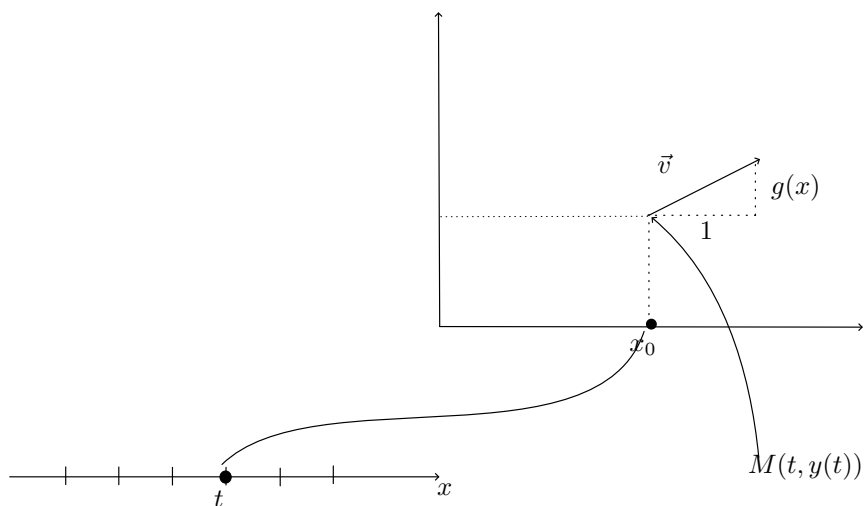


Figure 1.7: Ce que représente vecteur

Le vecteur tangent à la courbe:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= (1, g'(x)) = (1, \frac{dy}{dx}) = (1, \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}) \\
 &= \frac{1}{\frac{dx}{dt}} (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = \frac{1}{\dot{x}(t)} \underbrace{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \text{vecteur tangent}}} \\
 \vec{v} &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t))
 \end{aligned}$$

Càd  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse au points  $M(x(t), y(t))$  a la courbe paramétrée  $t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ . On a le résultat.

### Proposition 1.2.

(y obtient solution de l'EDO  $y'(t) = f(t, y(t))$ )

⇕

(vecteur vitesse de la courbe paramétrée  $t \mapsto (x(t), y(t))$  au point  $M(t_0) = (t_0, y(t_0))$  si le vecteur  $(1, f(t_0, y(t_0)))$ )

### Proposition 1.3.

$$V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(t, y) \longmapsto V((t, y)).$$

(si le champ de vecteur associé à l'EDO  $y'(t) = f(t, y(t)) \Leftrightarrow V(t, y) = (1, f(t, y))$ )

## 1.4.2 Dessins de champs de vecteurs

### Principe:

À chaque points  $P = (p_x, p_y)$  on trace le vecteur  $\varepsilon V(P)$  où  $\varepsilon$  est une constance positive choisi pour écrire les vecteurs trop longs.

Avec python on écrit `quiver(Px, Py, Vx, Vy, angles='xy')` RQ 1: Cette fonction est vectorielle, i.e  $P_x, P_y, V_x, V_y$ , sont des numpy array de taille  $n$ . RQ 2: On peut ajouter un paramètre pour controles la longueur des vecteurs:

`plt.quiver(Px, Py, Vx, Vy, angles='xy', scale=1)`

Par conséquent, il faut normaliser les vecteurs (i.e le champ de vecteur)

### Example 1.4. Champ de vecteur du modèle de Verhulst:

```
def f(t, y):
    return r * y * (1 - y/k)
```

la grille:

```
lt = np.linspace(tmin, tmax, N+1)
ly = np.linspace(ymin, ymax, M+1)
T, Y = np.meshgrid(lx, ly)
```

Construire les vecteurs:

```
Y = 1 + 0 * T
V = f(T, Y)
norm = np.sqrt(U*U + V*V)
U = U/norm
V = V/norm
```

On place les points:

```
plt.scatter(T, Y, marker='+', alpha = 0.5)
```

On place les vecteurs

```
plt.quiver(T, Y, U, V, angles='xy', scale=N)
```

## 1.4.3 Recherche de solution approchée de modèles sous python

On cherche une solution approchée de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in ]t_0, t_0 + T[ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec python. Pour cela il suffit de dire **en quels points** on veut cette solution.  
On se donne:

- une liste des instants  $[t_0, t_1, \dots, t_N]$
- $t_0, y_0$
- Puis, on appelle la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` de python.
- On obtient une liste  $[y_0, y_1, \dots, y_N]$

#### Example 1.5. Cas du modèle du Verhulst

- EDO:

```
1 def f(t, y):
2     return \ldots
```

- Instants

```
1 t0, tf = a, b
2 N = 100
3 t = np.linspace(t0, tf, N)
```

- On appelle `odeint`

```
1 from scipy.integrate import odeint
2 yapp = odeint(f, t, y), rtol=None, atol=None, tfloat=False)
3 plt.plot(t, yapp, \ldots)
```

## 1.5 Modèle de prédateur proie (lotka-voltena (1931))

$H(t)$ : population de sardins

$P(t)$ : population de requins

$$\frac{H'(t)}{H(t)} = \text{taux de variation de sardins} = \underbrace{a}_{\text{taux de croissance}} - \underbrace{bP(t)}_{\text{taux de mortalité}}$$

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \text{taux d'arrivé des requetes} = \underbrace{-c}_{\text{taux de décès}} + \underbrace{dH(t)}_{\text{taux de croissance}}$$

D'où le modèle:

$$\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - bP(t)) & t > 0 \\ P'(t) = P(t)(-c + dH(t)) \\ H(0) = H_0, \quad P(0) = P_0 \end{cases}$$

Si l'on désigne par  $p \geq 0$  la proportion des requêtes en sardines pêchés

$$\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - p - bP(t)) & t > 0 \\ P'(t) = P(t)(-c - p - dH(t)) \\ H(0) = H_0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

# CHAPTER 2

## INTERPOLATION POLYNOMIALE

On va essayer de construire des polynômes qui passent par un ensemble (nuages) de points donnés.

Si ces points sont les valeurs d'une fonction, on aimerait:

- savoir si le polynôme construit est d'autant plus proche de la fonction que le nombre de point est grand. C'est-à-dire, est-ce que l'erreur des "erreurs" tend vers zéro lorsque le nombre de points tend vers l'infini.
- Si oui, comment quantifier cette convergence? C'est-à-dire, quelle est la vitesse (ordre) de cette convergence.

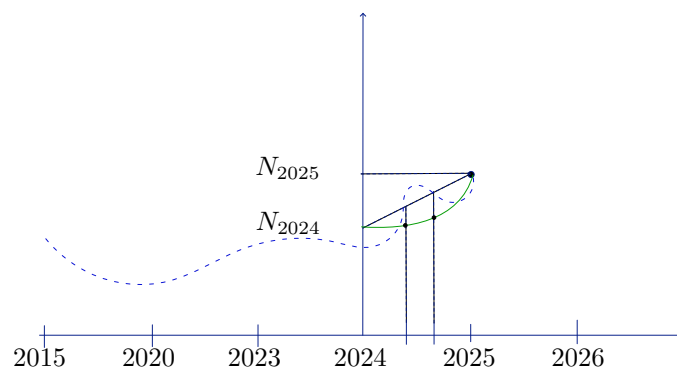


Figure 2.1: evolution-de-population-en-annee

1. Approche 1: approximation linéaire.
  - Polynôme de degré 1
2. Approche 2:
  - polynôme de degré 2
  - approximation quadratique
3. Approche 3: prise en compte d'Historique

### 2.1 Rappels sur les nuts numériques

#### Vitesse (ordre) de convergence

#### valeur ajoutée par itérations

**Definition 2.1.** Soit  $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^n$  une suite qui converge vers  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , pour une norme  $\| \cdot \|$  de  $\mathbb{R}^n$

- Si  $k_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|}$  existe et  $k_1 \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ . On dit que la suite converge linéairement vers  $x^*$  ou que la convergence est d'ordre 1.
- Si  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^2}$  existe et non nul. On dit que la suite converge quadratiquement vers  $x^*$ , ou que la convergence est d'ordre 2.
- Si  $k_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q}$  existe et  $\neq 0$  la convergence est d'ordre  $q$ . La constante  $K_q$  est appelée constante asymptotique d'erreur.

**Example 2.2.** 1.  $x_n = (0.2)^n$

- On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . La convergence vers  $x^* = 0$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(0.2)^{n+1}}{(0.2)^n} = 0.2 \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$

D'où

- $x_n$  converge à l'ordre 1
- Sa constante asymptotique est  $k_1 = 0.2$

2.  $I_n = (0.2)^{2^n}$ . On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

On a:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (0.2)^{2^{n+1}} = (0.2)^{2^n \cdot 2} \\ &= \left( (0.2)^{2^n} \right)^2 \\ &= (I_n)^2 \end{aligned}$$

D'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{(I_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(I_n)^2}{(I_n)^2} = 1$  D'où

- convergence d'ordre 2
- de constante  $k_2 = 1$

En pratique, on ne dispose pas de  $K_q$

**Definition 2.3.**

$$x_n \text{ converge vers } x^* \text{ à l'ordre } q \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \exists A, B \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \geq N, 0 < A \leq \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} \leq B < +\infty$$

La convergence est au moins d'ordre  $q$  si et seulement si on a (deuxieme partie d'équation)

## 2.1.1 Valeur ajoutée par l'itération

Il est question de comparer 2 suites qui ont la même vitesse de convergence.

**Remark 2.4.** Si  $|x_n - x^*| = 4 \cdot 10^{-8} = \underbrace{0.0000000}_{7 \text{ chiffres}}4$ . On dira que  $x_n$  et  $x^*$  ont 7 chiffres exactes apres la virgule.

$$\begin{aligned} \log_{10} |x_n - x^*| &= \log_{10} 4 - 8 \log_{10}(10) \\ \frac{\log |x_n - x^*|}{\log 10} &= \frac{\log 4}{\log 10} - 8 \end{aligned}$$

i.e  $d_n = -\log_{10} |x_n - x^*|$  mesure de nombre de chiffres décimales entre  $x_n$  et  $x^*$  qui coïncident.

**Remark 2.5.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} = K_q \Rightarrow K_q \approx \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q}$$

D'où  $d_{n+1} - qd_n \approx -\log_{10} K_q$ , i.e

$$d_{n+1} + \frac{\log_{10} K_q}{1-q} \approx q(d_n + \frac{\log_{10} K_q}{1-q})$$

Donc, le nombre de chiffres significatives est multiplié par  $q$ .

**Proposition 2.6.** Si  $x_n$  converge à l'ordre 1 vers  $x^*$  de constante asymptotique  $K_1$ , alors le nombre d'itérations nécessaires pour gagner un chiffre exacte est la partie entière de  $-\frac{1}{\log_{10} K_1}$

**Proof.** Soit  $m$  le nombre d'itérations pour gagner un chiffre. Comme  $d_{n+m} - d_n = -\log_{10} K_1$ , en partant de  $d_n$ , après  $m$  itérations on aura

$$d_{n+m} - d_n = -m \log_{10} K_1$$

D'où on aura gagné 1 chiffre si  $d_{n+m} - d_n = 1$ , i.e

$$1 = -m \log_{10} K_1 \Rightarrow m = \left( -\frac{1}{\log_{10} K_1} \right)$$

□

## 2.1.2 Obtenir numériquement la vitesse de convergence

On cherche  $q$  tq:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} = K_q \in \mathbb{R}^*$

**Remark 2.7.**

$$\frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|^q} \approx K_q \Rightarrow \underbrace{\log \|x_{n+1} - x^*\|}_Y - q \underbrace{\log \|x_n - x^*\|}_X = \log K_q$$

i.e  $Y = aX + b$ .

Conclusion: pour déterminer  $q$ :

- Traiter la courbe  $\log \|x_n - x^*\| \mapsto \log \|x_{n+1} - x^*\|$
- Déterminer  $q$  comme la pente de la droite passant par le maximum de points.

$$x_n = x_0, x_1, \dots, x_N$$

$$x_n - x^* = x_0 - x^*, x_1 - x^*, \dots, x_N - x^*$$

$$x_{n+1} - x^* = x_1 - x^*, x_2 - x^*, \dots, x_{N+1} - x^*$$

En python:

```
1 xn = np.array([x0, ..., xN])
2 e = np.log(np.abs(xn - x*))
3 ex = e[0:-1] #de premier a avant dernier
4 ey = e[1:] #de deuxieme au dernier
5 plt.scatter(ex, ey, label="miage")
6 a,b = np.polyfit(ex, ey, 1)
7 plt.plot(ex, b + a * ex, label=f"$x \mapsto {b:.32f} + {a:.32f}x$")
```

## 2.2 Interpolation: définition-motivation-exemples

### 2.2.1 Définition

**Definition 2.8.** Soient  $(x_i, y_i)_{i=\{1, \dots, N\}}$  un nuage de points (exemple un ensemble discret de point du graphe d'une fonction). Interpoler ce nuage de points correspond à chercher un polynôme de degré  $N - 1$ , qui passe par chacun de ces points.



Figure 2.2: L'exemple visuel de la définition

Questions:

1. Comment le construire?
2.  $P_{N-1} \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$
3.  $P_{N-1}(x_i) = y_i$

### 2.2.2 Motivations

- La solution d'un problème est fournie par une formule représentative: Noyau de la chaleur (i.e convolution) est un cherche la solution en un nombre de points.
  - On approche alors la fonction par un polynôme: i.e chercher le polynôme de degré "bas" proche de la fonction
- La solution d'un problème n'est connue qu'à table des valeurs en un nombre fini de points et on souhaite l'évaluer partout.
  - l'interpolation
- On peut utiliser l'interpolation dans
  - l'intégration numérique
  - la résolution numérique des EDO
  - la visualisation scientifique

**Definition 2.9.** Un tel polynôme est appelé **polynôme interpolateur de lagrange** de degré  $N - 1$  de ces points.

### 2.2.3 exemples d'interpolation



**Theorem 2.10.** Polynôme interpolateur de degré 1.

Soient  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  2 points distincts de  $\mathbb{R}^2$

- Il existe une unique droite passant par les 2 points.

$$(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

- Si de plus,  $x_1 \neq x_2$ , il existe un unique polynôme de degré 1 (i.e  $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ ) tq:

$$(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow y = P(x) \text{ avec } P_1 = \frac{(x - x_1)y_1 - (x - x_2)y_2}{x_2 - x_1}$$

**Proof.** •

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow M\vec{M}_1 / M_1\vec{M}_2 \\ &\Leftrightarrow \det(M\vec{M}_1, M_1\vec{M}_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}$$

- Si  $x_1 \neq x_2$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow y - y_1 = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \\ &\Leftrightarrow y = P_1(X) \end{aligned}$$

□

**Remark 2.11.** On a l'écriture équivalente de  $P_1$ :

- 

$$P_1 \frac{x_0 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} + X \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv a_0 + a_1 X$$

C'est l'écriture dans la base  $(1, X)$  de  $\mathbb{R}_1[X]$

- 

$$P_1 = \underbrace{\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}}_{l_1} y_1 + \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{l_2} y_2$$

C'est l'écriture dans la base  $(l_1, l_2)$  de  $\mathbb{R}_1[X]$

RQ:

$$l_1(x_1) = 1 \quad l_1(x_2) = 0 \quad l_2(x_1) = 0 \quad l_2(x_2) = 1$$

(base de lagrange)

- 

$$P_1 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

C'est l'écriture dans la base  $(1, x - x_1)$  de  $\mathbb{R}_1[X]$  (base de newton)

**Example 2.12.** Méthode de calcul employée

Chercher le polynôme interpolateur de lagrange aux points  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$

- Méthode 1:  $x_1 \neq x_2 \neq x_3$

$P_2$  est un polynôme de degré 2

$$P_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

**Lemma 2.13.**

$$P_2(x_1) = y_1, \quad P_2(x_2) = y_2 \quad \text{i.e } a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \underbrace{M^{-1}}_{???} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

**Remark 2.14.** Par 2 points

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \text{ et } M^{-1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Méthode 2:

$$P_2 = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{aligned} P_2(x_i) = y_i \Rightarrow \begin{cases} a_0 & = y_1 \\ a_0 + a_1(x_2 - x_1) & = y_2 \\ a_0 + a_1(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & = y_3 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_0 & = y_1 \\ a_1 & = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ a_2 & = \frac{y_3 - y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{cases} \end{aligned}$$

**Remark 2.15.** On a:

$$a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{x_3 - x_1}$$

càd

$$P_3 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{x_3 - x_1}(x - x_1)(x - x_2)$$

$x_1$	$y_1 =: a_3$		
$x_2$	$y_2$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =: a_1$	
$x_3$	$y_3$	$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$\frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{x_3 - x_1} =: a_2$

- Méthode 3:

$$P_3 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3 = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\left( \prod_{j=1}^3 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)}_{l_i(x)} y_i$$

**Remark 2.16.**  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$y = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2$$

## 2.3 Polynôme interpolateur de lagrange

### 2.3.1 Définition et propriétés

**Theorem 2.17.** (existence et utilité)

Soit  $x_1, \dots, x_n$  des réels 2 à 2 distincts et  $y_1, \dots, y_n$  des réels quelconques: Il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  (i.e de degré  $n - 1$ ) tel que  $p(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$

On dit que  $P$  est le polynôme interpolateur de lagrange aux points  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

**Proof.** Soit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ P &\longmapsto \Phi(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n)). \end{aligned}$$

on a:

- $\Phi$  linéaire
- $\Phi$  injective

En effet,  $\Phi(P) = 0 \Leftrightarrow P(x_i) = 0 \Leftrightarrow P \equiv 0$  car  $\deg(P) \leq n - 1$ . D'où  $\Phi$  isomorphisme d'espace vectoriel et la surjection assure le résultat.  $\square$

**Definition 2.18.** Si  $f$  est continue sur  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  2 à 2 distincts, alors, l'unique  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tq  $P(x_i) = f(x_i) i = 1, \dots, n$  est appelé polynôme d'interpolation de lagrange de  $f$  aux points  $x_1, \dots, x_n$

### 2.3.2 Estimation d'erreur

**Theorem 2.19.** l'erreur

Soient

- $a < b$   $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue
- $x_1, \dots, x_n$  2 à 2 distincts de  $[a, b]$
- $P$  polyôme d'interpolation de lagrange de  $f$  aux points  $x_i$

Si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $]a, b[$ , alors, pour tout  $a \in [a, b]$ , il existe  $t \in ]a, b[$  tq

$$f(x) - P(x) = \omega_n(x) \frac{f^{(n)}(t)}{n!}$$

où  $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$

**Corollary 2.20.** Si  $f^{(n)}$  est bornée par  $M$  sur  $]a, b[$ , alors  $\forall x \in [a, b]$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{n!} |\omega_n(x)| \leq \frac{M}{n!} (b - a)^n$$

### 2.3.3 Implémentation avec python

```

1 from scipy.interpolate import lagrange
2 x = np.array([x_1, x_2, x_3])
3 y = np.array([y_1, y_2, y_3])
4 p = lagrange(x, y)
5 print(p) # affiche le polynome
6 print(p(3)) # collable

```

## 2.4 Construction des polynôme d'interpolation de lagrange

$x_0, \dots, x_{n-1}$  2 à 2 distincts

### 2.4.1 Interpolation dans la base canonique (Vandermonde)

Construction

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$P(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n-1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{V(x_0, \dots, x_{n-1})} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}}_a = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}}_b$$

Matrice de Vandermonde

- elle pleine
- malconditionnée

```

1 def VDM_Mat(x):
2     x_n = np.reshape(x, (x.size, 1))
3     return x_n ** np.arange(x.size)

```

```

1 def VDM_Poly(x, y):
2     M = VDM_Mat(x)
3     a = np.linalg.solve(M, y)
4     return a

```

### Evaluation efficace de $P$ algorithme de Horner

**Proposition 2.21.** Si  $X$  est un réel et  $Q$  est le polynôme défini par

$$Q(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$$

alors la suite

$$\begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_k = q_{k-1}x + a_k, k = 1, \dots, n \end{cases}$$

vérifie  $q_n = Q(x)$

**Proof.** (laissé exo)

$$Q(X) = X^2 + 2X + 1 \equiv (X + 2)X + 1$$

□

```

1 def Horner(P, xx):
2     y = 0
3     for a in P:
4         y = y * xx + a
5     return y

```

```

1 def IntuP_VDM(x, y, xx):
2     a = VDM_Poly(x, y)
3     yy = Horner(a[::-1], xx)
4     return yy

```

## 2.4.2 Interpolation dans la base duale: Formule de lagrange et points barycentrique

### Construction

Idée prendre pour base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  l'image réciproque de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n-1}$  pour  $\Phi$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}^{n-1} (x - x_j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (x_i - x_j)} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i L_i(X)$$

### Theorem 2.22.

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_1, \dots, x_n$$

$$P$$

Si  $f$   $n$  fois dérivable,

$$\forall x \in [a, b], \exists t \in ]a, b[, f(x) - P(x) = \omega_n(x) \frac{f^{(n)}(t)}{n!}$$

**Proof.** du théorème (erreur)

Soit  $x$  fixé des  $[a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$

On pose

$$F(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x) - P(x)}{\omega_n(t)} \omega_n(t)$$

$F$  est  $n$  fois dérivable et  $P$  annule aux  $n + 1$  points  $x_1, \dots, x_n, x$ . D'après le théorème Rolle (généralisé)

$$\exists t \in ]a, b[ \text{ tq } f^{(n)}(t) = 0$$

Or

$$\underbrace{F^{(n)}(t)}_{=0 \text{ par hyp}} = f^{(n)}(t) - \underbrace{P^{(n)}(t)}_{=0 \text{ car } \deg(P) < n} - \frac{f(x) - P(x)}{\omega_n(x)} n!$$

D'où

$$f(x) - P(x) = \omega_n(x) \frac{f^{(n)}(t)}{n!}$$

Par ailleurs, si  $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $f(x) - P(x) = 0$

$$\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

□

**Proof.** corollaire

$$|f(x) - P(x)| = |\omega_n(x)| \frac{|f^{(n)}(t)|}{n!}$$

comme  $x, x_i \in [a, b]$ , on a  $|x - x_i| \leq b - a$  et  $|f^{(n)}(t)| \leq M$ , on a:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{n!} (b - a)^n$$

□

## Evaluation efficace: formule barycentrique

**Proposition 2.23.** On a

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)}} \end{aligned}$$

**Proof.** Comme

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \Rightarrow \omega'_n(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j)$$

D'où

$$\omega'_n(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad i = 1, \dots, n$$

D'où

$$L_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{x - x_i} \frac{1}{\omega'_n(x_i)}$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i L_i(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} \omega_n(x) \\ &= \omega_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} \end{aligned}$$

Or pour  $P \equiv 1$  on a  $y_i = 1, i = 1, \dots, n$ , on a

$$1 = \omega_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)}$$

D'où

$$\omega_n(x) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} \right)^{-1}$$

Enfin,

$$P(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(x-x_i)\omega'_n(x)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x-x_i)\omega'_n(x)}}$$

□

- Remark 2.24.**
1. Attention: si  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$
  2. Exercice: calculer la complexité de cette formule et comparer à la première.
  3. Ajouter un nouveau point d'interpolation oblige à refaire tous les calculs.

## 2.4.3 Méthode des différences divisées

### Préliminaires: Interpolation de Neville

**Lemma 2.25.** Considérons  $n$  points 2 à 2 distincts  $x_1, \dots, x_n$  et  $n$  réels  $y_1, \dots, y_n$ . Pour  $1 \leq k \leq l \leq n$ , posons  $P_{x_k, \dots, x_l}$  le polynôme d'interpolation aux points

$$(x_k, y_k) \dots (x_l, y_l)$$

Nous avons

$$P_{x_k, \dots, x_l}(x) = \frac{(x - x_l)P_{x_l \dots x_{l-1}}(x) - (x - x_k)P_{x_{k+1} \dots x_l}(x)}{x_k - x_l}$$

Schématiquement

$$P(x) = \underbrace{x_k, \overbrace{x_{k+1}, \dots, x_{l-1}}^{P_2}, x_l}_{P_1}$$

$$\frac{x - x_l}{x_k - x_l} P_1 + \frac{x - x_k}{x_l - x_k} P_2$$

### Construction de l'interpolation de Newton

**Definition 2.26.** (Polynôme de Newton) Soit  $n \geq 1$  entier,  $x_1, \dots, x_n$   $n$  réels 2 à 2 distincts. Les polynômes de Newton  $\omega_0, \dots, \omega_n$  associés à ces points sont définis par

$$\begin{cases} \omega_0 = 1 \\ \omega_j = (x - x_1) \dots (x - x_j), \quad (1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

**Remark 2.27.**  $\{\omega_j\}_{j=1, \dots, k}$  est une base de  $\mathbb{R}_k[x]$

- Ainsi le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points  $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$  s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \omega_k$$

où  $\alpha_k$  sont solutions de

$$y_i = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \omega_k(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

On parle de développement de Newton du polynôme de Lagrange

**Definition 2.28.** On appelle différences divisées d'ordre  $j-1$  ( $1 \leq j \leq n$ ) associées aux points  $(x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i)$  les nombres  $d_{i,j}$  ( $i = j$  à  $n$ ) définis par

- $d_{i,1} = y_i \quad i = 1, \dots, n$
- $d_{i,j} = \frac{d_{i,j-1} - d_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}} \quad j = 2 \text{ à } n, i = j \text{ à } n$

Lorsque  $y_i = f(x_i) \quad i = 1, \dots, n$ ,  $d_{i,j}$  est généralement noté  $f[x_{j-i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j]$  et est appelé différence divisée d'ordre  $j-1$  aux  $i$  points  $x_{j-i+1}, \dots, x_j$

Python:

```
1 def MatriceDifferencesDivisee(x, y):
2     n = len(y)
3     d = np.zeros((n, n))
4     d[:, 0] = 1.0 * y
5     for j in range(1, n):
6         d[j:n, j] = (d[j:n, j-1] - d[j-1:n, j-1]) / (x[j:n] - x[0:n-j])
7     return d
```

**Remark 2.29.** • Le "stencil" (squelette) est

$$\begin{array}{ccc} & i-1, j-1 & \\ & \diagdown & \\ i, j-1 & \text{---} & i, j \end{array}$$

- La hauteur de stencil est  $j$
- Le support du stencil est  $[x_{i-j}, \dots, x_i]$

**Proposition 2.30.** On a  $d_{j,j} = \alpha_{j-1}$  pour  $j \in [1, \dots, n]$ , càd:

$$P = \sum_{j=1}^n d_{j,j} \omega_{j-1}$$

Ainsi, pour calculer  $P$  il suffit de connaître  $d_{j,j} \quad j = 1, \dots, n$

## Calcul efficace du polynôme

**Proposition 2.31.** Soit donné  $x_0, \dots, x_n$  des réels 2 à 2 distincts. Soit  $Q$  le polynôme défini par

$$Q(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \equiv \sum_{i=0}^n a_i \omega_i(x)$$

La suite des polynômes  $Q_0, \dots, Q_n$  définies par

$$\begin{cases} Q_n = a_n \\ Q_k = a_k + (x - x_k)Q_k \quad k = n-1, \dots, 0 \end{cases}$$

vérifie  $Q_0 = Q$

```
1 def HornerNewton(d, x, xx):
2     n = len(d)
3     yy = 0 * xx + d[n-1]
4     for i in range(n-2, -1, -1):
5         yy = d[i] + (xx - x[i]) * yy
```



```

6 |     return yy
|
1 | def DifferencesDivisees(x, y):
2 |     d = MatriceDifferencesDivisee(x, y)
3 |     a = np.diag(d)
4 |     return a

```

## 2.5 Comportement asymptotique "lorsque $N \rightarrow \infty$ "

### 2.5.1 Observation

On n'a pas toujours une convergence uniforme de l'interpolation

**Example 2.32.**  $f(x) = \sqrt{x}$  avec  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $x_1, \dots, x_n$  équirépartis sur  $[a, b]$

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t) - P(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

ce phénomène est appelé phénoème de Runge.

Il en reste une solution:

- si  $f$  est lipschitzienne sur  $[a, b]$  ou Hölderienne

$$\exists a \in ]0, 1[, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

- Si  $x_1, \dots, x_n$  sont les racines du  $n$ -ème polynôme de Tchebychev.

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

### 2.5.2 Polynôme de Tchebychev

**Definition 2.33.** Les polynômes de Tchebychev sont définis par la recurrence:

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = x \\ T_n = 2xT_{n-1} - T_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

**Proposition 2.34.** Le  $n$ -ième polynôme de Tchebychev vérifie:

1.  $T_n$  est de degré exactement  $n$  et son coefficient de plus haut degré est  $2^{n-1}$ ,  $n \geq 1$
2.  $T_n$  a  $n$  racines distinctes simples

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, \dots, x_n\}, x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) \quad (1 \leq j \leq n)$$

3.  $|T_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1], |T_n(x)| = 1 \Leftrightarrow x \in \{x_0, \dots, x_n\} x_k = \cos(k\frac{\pi}{n})$

$$|T_n(x)| = 1 \text{ si } x \in \{x_k\} \quad x_k = \cos(k\frac{\pi}{n}) \quad (0 \leq k \leq n)$$

**Proof.** 1. Par récurrence:

Soit  $(P_n)$  la propriété " $T_n$  est de degré  $n$  et son coef. de plus haut degré est  $2^{n-1}$ ",  $n \geq 1$ .  $P_0$  et  $P_1$  vraies ( $k \leq n$ ).

Supposons  $P_k$  vrai et montrons que  $P_{n+1}$  vrai.

En effet, nous avons  $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$ , on en déduit que  $P_{n+1}$  est vraie.

Maintenant,

$$\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$$

En effet, pour  $\begin{cases} n = 0, T_0(x) = 1 = \cos(0) \\ n = 1, T_1(x) = \cos(\arccos(x)) \end{cases}$  et  $n > 1$

$$\cos((n+1) \arccos(x)) = \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$$

$$\cos((n-1) \arccos(x)) = \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) + \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x))$$

On a:

$$\cos((n+1) \arccos(x)) = 2x \cos(n \arccos(x)) - \cos((n-1) \arccos(x))$$

D'où  $x \mapsto \cos(n \arccos(x))$  vérifie la même récurrence sur  $[-1, 1]$  que  $T_n$ . Par conséquent les 2 coïncident sur  $[-1, 1]$ . On en déduit  $\forall x \in [-1, 1]$

2.

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \arccos(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$$

$$\Leftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2n} \bmod \frac{\pi}{n} \quad \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n}\right) \quad 0 \leq k \leq n-1$$

3.  $|\cos(x)| \leq 1$  D'où  $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$

$$|T_n(x)| = 1 \Leftrightarrow n \arccos(x) = 0 \bmod \pi$$

$$\arccos(x) = 0 \bmod \frac{\pi}{n}$$

$$\in x \in \left\{ \cos\left(k \frac{\pi}{n}\right), k \in [0, n] \right\}$$

□

**Proposition 2.35.** Si  $Q_n$  est un polyôme de degré  $n$  de même coeff. de plus haut degré que  $T_n$ , alors:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |Q_n(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1$$

**Corollary 2.36.** Si  $\xi_1, \dots, \xi_n$  sont  $n$  points 2 à 2 distincts de  $[-1, 1]$ , on a:

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| \prod_{j=1}^n (x - \xi_j) \right| \geq \max_{x \in [-1, 1]} \left| \prod_{j=1}^n (x - x_j) \right| = \max_{x \in [-1, 1]} \frac{1}{2^{n-1}} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

où  $x_j$  sont les racines de  $T_n$

### 2.5.3 Application

Soit  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , 2 à 2 distincts,  $P$  le polynôme de lagrange de  $f$  (suffisamment régulière), alors:

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} |\omega_n(x)| \\ &\leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \|\omega_n(x)\|_\infty \end{aligned}$$

où  $\omega_i = \prod_{j=1}^n (x - \xi_j)$  et  $\|\cdot\|_\infty$  et loi norme inf sur  $[-1, 1]$ . Ainsi, le choix de  $\xi_i$  qui possède la plus petite valeur de  $\|\omega_n\|_\infty$  est celui des racines du  $n$ -ième polynôme de Tchebychev.

**Remark 2.37.** On se ramène à un intervalle quelconque  $[a, b]$  par

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) \quad (1 \leq j \leq n)$$

sont les racines des polynômes de Tchebychev sur  $[a, b]$

# CHAPTER 3

## INTÉGRATION NUMÉRIQUE

But: On souhaite calculer au mieux

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

où  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  donné

Contraintes

- $f$  n'a pas de primitive connue (ou évidente)
- $f$  n'est connue ou ne peut être évaluée qu'en un certain nombre fini de points

$$(x_i, 0 \leq i \leq n \text{ sur } [a, b])$$

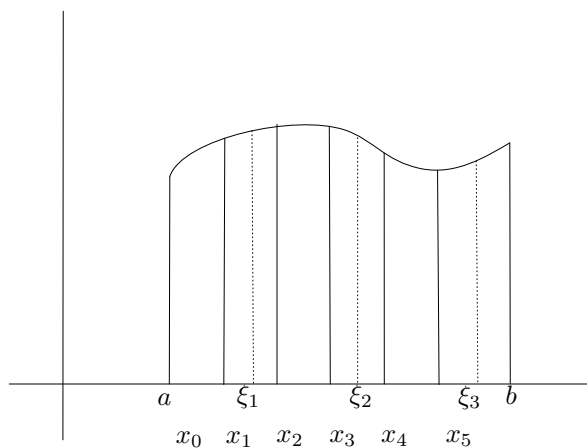


Figure 3.1: Exemple d'une intégration

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

$$S(f, \sum_N) = \sum_{i=0}^N f(\xi_i) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\omega_i}$$

somme de Rieman associée à  $\sum_N$ . Théorème:  $\lim_{N \rightarrow \infty} S(f, \sum_N) = \int_a^b f(x) dx$

### 3.1 Formule de quadrature

**Definition 3.1.** Étant donnée  $N$  points  $x_1, \dots, x_N$  de l'intervalle  $[a, b]$  et  $N$  poids  $\omega_1, \dots, \omega_N \in \mathbb{R}$  associées à chaque points.

On appelle formule de quadrature associé aux  $(x_i), (\omega_i)$  l'application linéaire sur  $\mathcal{C}^0([a, b])$

$$\tilde{I}(f) = \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i)$$

On dit que la formule de quadrature est d'ordre  $p$  si elle est exacte pour les polynôme de degré  $p-1$ . i.e

$$\tilde{I}(Q) = \int_a^b Q dx \forall Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$$

et s'il existe  $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$  tq  $\tilde{I}(Q) \neq \int_a^b Q dx$ , autrement dit si elle exacte pour le polyôme de degré au plus  $p-1$ .

**Remark 3.2.** On note:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

Points	$x_1$	$x_2$	$\dots$
Poids	$\omega_1$	$\omega_2$	$\dots$

**Example 3.3.** Soit la formule de quadrature

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(a)$$

- si  $f = 1$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx = b-a = (b-a)f(a)$$

elle exacte pour les polynômes de degré 0.

- si  $f(x) = x$  on a

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{(b-a)(a+b)}{2} \neq (b-a)a$$

elle n'est pas exacte pour les polynômes de degré 1.

Conclusion: elle est exacte pour les polynômes de degré au plus 0. Elle est donné d'ordre 1.

#### 3.1.1 Construction de formule de quadrature à points donnés

**Proposition 3.4.** Soit  $x_1, \dots, x_N$ ,  $N$  points 2 à 2 distincts de  $[a, b]$ .

1. Il existe un unique  $(\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N$  tels que

$$\tilde{I}(Q) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^N \omega_i Q(x_i) = \int_a^b Q(x) dx \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$$

2. Pour toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^N$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \tilde{I}(f) \right| \leq \frac{(b-a)^{N+1}}{N!} \|f^{(N)}\|_\infty$$

**Proof.** Soit  $l_i, i = 1, \dots, N$  la base de Lagrange associé aux  $x_i$ , i.e

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

on a  $l_i \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$ .

Soit  $Q \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$ ,  $Q$  coïncide avec le polynôme d'interpolation de lagrange aux points  $x_1, \dots, x_N$

$$Q(X) = \sum_{i=1}^N Q(x_i) l_i(X)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_a^b Q(x) dx &= \sum_{i=1}^N Q(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n Q(x_i) \omega_i \end{aligned}$$

où  $\omega_i = \int_a^b l_i(x) dx$ . D'où l'existence.

Unicité: Soit  $\tilde{\omega}_i, i = 1, \dots, N$ ,

$$k : \int_a^b Q(x) dx = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_i Q(x_i) \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$$

alors, puisque  $l_i \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$ , on a

$$\int_a^b l_i(x) dx = \tilde{\omega}_i \quad i = 1, \dots, N$$

D'où ( $\tilde{\omega}_i = \omega_i$ ) et on a l'unicité

Estimation d'erreur:

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^N$  sur  $[a, b]$  et  $R_f$  un poly d'interpolation aux points  $x_i \quad i = 1, \dots, N$ . On a:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(f) &= \sum_{i=1}^N f(x_i) \omega_i = \sum_{i=1}^N P_f(x_i) \omega_i \\ &= \int_a^b P_f(x) dx \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \tilde{I}(f) \right| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P_f(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - P_f(x)| dx \\ &\leq \frac{\|f^{(N)}\|_\infty (b-a)^N}{N!} (b-a) \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \tilde{I}(f) \right| \leq \frac{\|f^{(N)}\|_\infty}{N!} (b-a)^N (b-a)$$

□

python:

```
1 from scipy.integrate import quad
2 quad(f, a, b) =
```

## 3.2 Utilisation des formules de quadrature. Formule de quadrature élémentaires et composées

### 3.2.1 Définition

On appelle formule de quadrature élémentaire  $I_e$  sur  $[-1, 1]$  associée aux points  $\xi_i \in [-1, 1]$  et de poids  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , la formule

$$I_e(f) = \sum_{i=1}^N \omega_i f(\xi_i) \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$$

Une subdivision d'un intervalle  $[a, b]$  en  $n$  points  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  étant donnée, elle induit une formule de quadrature composite  $I_c$  pour  $[a, b]$

$$I_c = \sum_{i=1}^{n-1} I_e(f; x_i, x_{i+1}) \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_{i,j}) \quad \text{où } x_{i,j} = \frac{(x_j + x_{j+1}) + \xi_i(x_{j+1} - x_j)}{2}$$

Illustration:

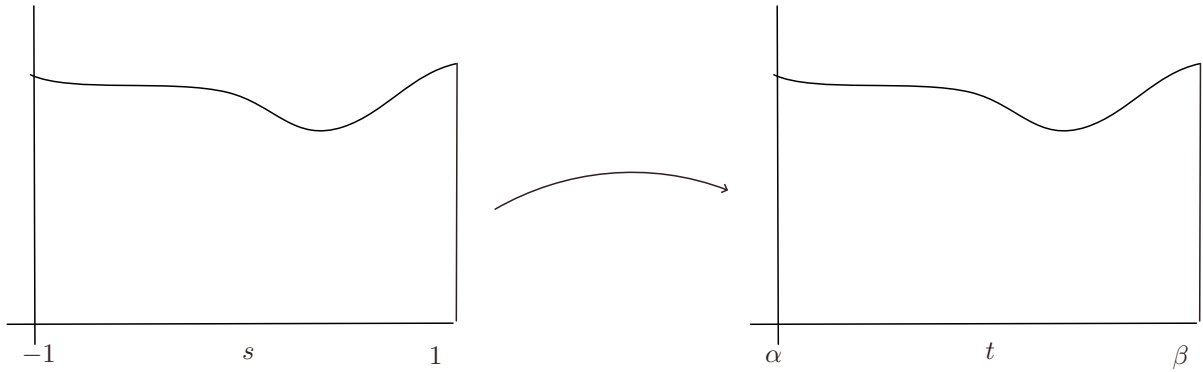


Figure 3.2:  $I_e(f) = \sum_{i=1}^N \omega_i f(\xi_i) \approx \int_\alpha^\beta f(t) dt$

$$\int_\alpha^\beta f(t) dt \approx \frac{s+1}{2} = \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha} \Rightarrow \eta = \alpha + \frac{s+1}{2}(\beta-\alpha)$$

$$dt = \frac{\beta-\alpha}{2} ds$$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-1}^1 f\left(\alpha + \frac{s+1}{2}(\beta - \alpha)\right) ds \approx \frac{\beta - \alpha}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i f\left(\alpha + \underbrace{\frac{\xi_i + 1}{2}(\beta - \alpha)}_{x_i}\right) \\
&\approx \sum_{i=1}^N \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \omega_i\right) f(x_i) \\
&\approx I_e(f, \alpha, \beta)
\end{aligned}$$

### 3.2.2 Méthode de quadrature clmique

#### Méthode de rectangles

**Definition 3.5.**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \approx f(\alpha)(\beta - \alpha)$$

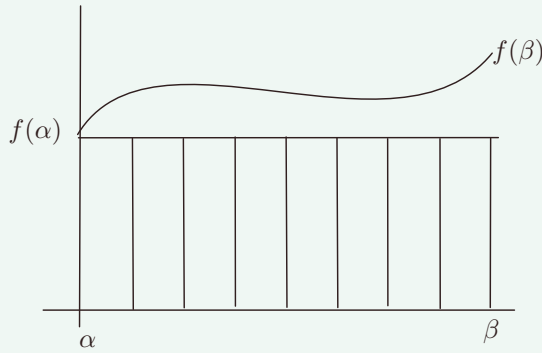


Figure 3.3: methode-rectangle

**Proposition 3.6.** • Si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$  l'erreur de la méthode de quadrature élémentaires :

$$E_e(f) = I(f) - I_e(f) = \frac{f'(c)}{2}(\beta - \alpha)^2 \text{ où } c \in ]\alpha, \beta[$$

- Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , l'erreur de quadrature de la méthode composite associée à une subdivision uniforme de pas  $h$  est majorée par

$$|E_c(f)| = |I(f) - I_c(f)| \leq h \underbrace{\|f'\|_{\mathcal{C}^0([a,b])}}_{\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|} \frac{b-a}{2}$$

**Proof.** Posons  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $F$  est de  $\mathcal{C}^2$  car  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ . Par Taylor lagrange à l'ordre 2 en  $\alpha$  donne

$$F(\beta) = F(\alpha) + F'(\alpha)(\beta - \alpha) + F''(c)\frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \text{ où } c \in ]\alpha, \beta[$$



D'où

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - f(\alpha)(\beta - \alpha) = \frac{f'(\alpha)}{2}(\beta - \alpha)^2$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |I(f) - I_c(f)| &= \left| \int_a^b f(t) dt - I_c(f) \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) dt - \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) dt - f(x_j)(x_{j+1} - x_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\|f'\|_{\infty}}{2} (x_{j+1} - x_j)^2 \\ &\leq h \frac{\|f'\|_{\infty}}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq h \frac{\|f'\|_{\infty}}{2} (b - a) \end{aligned}$$

□

### 3.2.3 Méthode de trapèze

**Definition 3.7.**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a)f(b)}{2}(b - a)$$

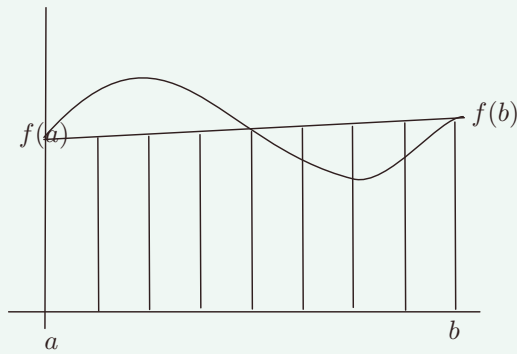


Figure 3.4: Méthode de trapeze

**Proposition 3.8.** Si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$

$$|E_c(f)| = |I(f) - I_c(f)| \leq h^2 \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^2}{12}$$

**Proof.** La formule était exacte pour les poly de degré 1, elle est du type interpolation:

$$I_c(f) = \int_a^b P_f(t) dt \text{ où } P_f \text{ est le poly d'ext aux points } a, b$$

D'où

$$\begin{aligned} |E_c(f)| &= |I(f) - I_c(f)| = \left| \int_a^b (f(t) - P_f(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{2!} \int_a^b (x-a)(b-x) dx \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} |I(f) - I_c(f)| &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) dt \right) - \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} (x_{j+1} - x_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |E_c(f)| \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \sum_{j=0}^{n-1} h^3 = \frac{h^2}{12} \|f''\|_\infty \sum_{j=0}^{n-1} h \\ &\leq \frac{1}{12} h^2 \|f''\|_\infty (b-a) \end{aligned}$$

□

### 3.2.4 Méthode de point-milieu

**Definition 3.9.**

$$\int_\alpha^\beta f(t) dt \approx f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha)$$

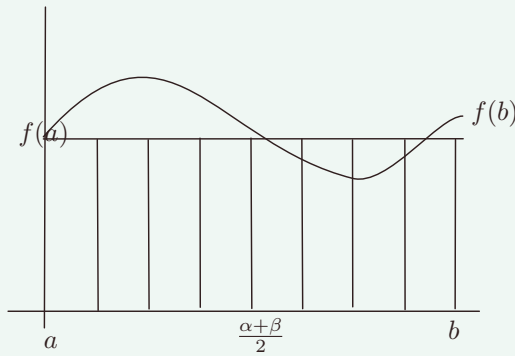


Figure 3.5: methode-de-point-milieu

**Example 3.10.** degré d'exactitude sur  $[-1, 1]$  elle devient

$$\int_{-1}^1 f(s) ds \approx 2f(0)$$

- Pour  $f = 1$ , on a  $I(f) = \int_{-1}^1 ds = 2 \cdot 1 = I_c(f)$ . D'où  $I_c$  est exacte pour poly de degré au moins 0.
- Pour  $f = s$  on a  $I(f) = \int_{-1}^1 s ds = 0 = 2 \cdot 0 = I_c(f)$ . D'où  $I_c$  est exacte pour poly de degré au moins 1.
- Pour  $f = s^2$  on a  $I(f) = \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{2}{3} \neq 2 \cdot 0^2 = I_c(f)$ . La formule élémentaire n'est pas exacte pour poly de degré 2. Donc, la formule de point-milieu est exacte pour les polynômes de degré 1.

**Proposition 3.11.** • Si  $f$  est  $\mathcal{C}^2([a, b])$  on a:

$$E_c(f) = I(f) - I_c(f) = \frac{f''(c)}{24}(b-a)^3$$

- Si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$ , l'erreur de quadrature de la méthode composite associée à une subdivision uniforme de  $[a, b]$  de pas  $h$  est majorée par

$$|E_c(f)| = |I(f) - I_c(f)| \leq h^2 \frac{\|f''\|_\infty}{24}(b-a)$$

**Proof.** exo

□

### 3.2.5 Méthode de Simpson

**Definition 3.12.**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \approx \frac{\beta - \alpha}{6} \left( f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right)$$



Figure 3.6: methode-de-simpson

**Proposition 3.13.** • Si  $f$  est  $\mathcal{C}^{3+1}$  sur  $[\alpha, \beta]$  on a:

$$E_c(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - I_e(f) = -\frac{f^{(4)}}{2880}(\beta - \alpha)^5 \text{ où } c \in ]\alpha, \beta[$$

$$|E_c(f)| \leq h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty} \frac{(b-a)}{2880}$$

### 3.2.6 Méthode de Newton-Côte

C'est une généralisation des methodes élémentaires.

**Definition 3.14.** On appelle méthode de Newton-Côte d'ordre  $k$  la méthode élémentaire construite en utilisant le polynôme d'interpolation d'ordre  $k$ , associé aux  $k+1$  points équidistants

$$x_i = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{k}, \quad i = 0, \dots, k$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^k \omega_i f(x_i)$$

où  $x_i = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{k}$ ,  $i = 0, \dots, k$  et

$$\omega_i = \int_{\alpha}^{\beta} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

**Remark 3.15.** • Cette formule est  $\begin{cases} \text{d'ordre } k \text{ si } k \text{ impair} \\ \text{d'ordre } k+1 \text{ si } k \text{ pair} \end{cases}$

- On n'utilise les méthodes que pour  $k$  pair sauf le cas  $k = 1$
- Si  $k = 1$  on a la formule des trapèzes

- Si  $k = 2$  on a la formule de Simpson
- Si  $k = 4$  on a la formule de Boole-Villarceau

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{7}{90}f(-1) + \frac{16}{49}f(-\frac{1}{2}) + \frac{2}{15}f(0) + \frac{16}{45}f(\frac{1}{2}) + \frac{7}{90}f(1)$$

- Pour  $k = 6$ , on a la formule de Hordy
- Pour  $k \geq 8$  on a des points  $\omega_i$ , négatifs, ce qui rendent les formules sensibles aux erreurs d'arrondi.

**Theorem 3.16.** Soient  $I(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ ,  $I_e(f) = \sum_{i=0}^k \omega_i f(x_i)$ ,  $E(f) = I(f) - I_e(f)$ . Supposons que la méthode d'intégration soit d'ordre  $p \geq k$ . Posons

$$K(t) = E(x \mapsto (x - t)_+^p) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - t)_+^p dx - \sum_{i=0}^k \omega_i (x_i - t)_+^p$$

avec  $x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . On a:

$$E(f) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{K(t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \quad \forall f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha, \beta])$$

Si de plus  $K$  est de signe constante sur  $[\alpha, \beta]$ , il existe  $c \in [\alpha, \beta]$  telle que

$$E(f) = f^{(p+1)}(c) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{K(t)}{p!} dt$$

On appelle Noyau de Peano associée à la méthode, la fonction

$$t \mapsto \frac{K(t)}{p!}$$

**Proof.** Formule de Taylor avec reste intégrale:

$$f(x) = \sum_{i=0}^l \frac{(x - \alpha)^i}{i!} f^{(i)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x \frac{(x - t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$$

$$E(f) = E\left(\sum_{i=0}^l \frac{(x - \alpha)^i}{i!} f^{(i)}(\alpha)\right) + E\left(\int_{\alpha}^x \frac{(x - t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt\right)$$

□

**Remark 3.17.** Lorsque  $K$  est de signe constante,

$$E(t \mapsto x^{p+1}) = (p+1)! \int_{\alpha}^{\beta} \frac{K(t)}{p!} dt$$

D'où

$$E(f) = \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} E(x \mapsto x^{p+1})$$

Dans les méthodes de Newton-Côte le noyau de Peano a un signe constant.

### 3.3 Construction de formule de quadrature (à points inconnus): Formules de Gauss Legendre

On cherche s'il existe un meilleur choix des points  $x_1, \dots, x_n$  de  $[\alpha, \beta]$  tel que la formule de quadrature associée soit exacte sur  $\mathbb{R}_{n'}[X]$  pour  $n' > n$ .

**Example 3.18.** Cherchons une table fomrle à 2 ponts

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

En effet, on a 4 inconnus, il faut donc 4 équations. On pose comme condition l'exactitude de cette formule pour les polynômes  $1, x, x^2, x^3$ , d'où

$$\begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 \\ 0 = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \\ \frac{2}{3} = \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 \\ 0 = \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 \end{cases}$$

**Remark 3.19.**  $x_1$  et  $x_2$  sont racines du polynôme  $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$  i.e  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . D'où  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ .

D'où

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

est exacte sur  $\mathbb{R}_3[X]$  ( $3 = 2 \cdot 2 - 1$ )

**Example 3.20.** Formule à 3 points

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \omega_3 f(x_3)$$

On impose l'exactitude  $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - I_e[f, \alpha, \beta] \right| &\leq c(\beta - \alpha)^{5+2} \\ \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - I_c[f, \alpha, \beta] \right| &\leq ch^6 \end{aligned}$$

On obtient  $x_i$  sont racines du polynôme  $\frac{1}{3}(5x^3 - 3x)$ . D'où,  $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$  et  $\omega_1 = \frac{5}{9}, \omega_2 = \frac{8}{9}, \omega_3 = \frac{5}{9}$ . D'où

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

**Proposition 3.21.** Considérons la formule à  $n$  points

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n)$$

exacte pour les polynômes de degré  $\leq 2n - 1$ . Alors les abscisses  $x_1, \dots, x_n$  sont les  $n$  racines du polynôme

de Legendre de degré  $n$  définie par la récurrence.

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} [(2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)]$$

$$\omega_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La formule de quadrature ainsi construite est appelée formule de Gauss-Legendre.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$$

exacte pour  $1, x, x^2, x^3$  pour  $(x - x_1)(x - x_2)$

$$\int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2) dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 x(x - x_1)(x - x_2) dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 dx = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} + (x_1x_2)2 = 0 \\ -\frac{2}{3}(x_1x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \omega_2 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- $f \equiv (x - \frac{1}{\sqrt{3}}) \equiv (x - x_1) \Rightarrow -x_1 2 = \omega_1 2x_1$
- $f \equiv (x + \frac{1}{\sqrt{3}}) \equiv (x - x_2)$

# CHAPTER 4

## RÉSOLUTION APPROCHÉE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES (EDOs)

### 4.1 Motivations

#### 4.1.1 Définitions

**Definition 4.1.** Soit

$$\begin{aligned} f : [a, b] \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, x) &\longmapsto f((t, x)) \end{aligned}$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $d \in \mathbb{N}^*$  donnée par des  $d$  composantes

$$\begin{aligned} f_i : [a, b] \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, x) &\longmapsto f_i(t, x) \end{aligned}$$

On note  $g^{(p)}$  la dérivée d'ordre  $p$  d'une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g'$  sa dérivée d'ordre 1.

Si  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  est continue ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $p$ , on notera  $g \in \mathcal{C}^p([a, b], \mathbb{R}^d)$  ou simplement  $g \in \mathcal{C}^p([a, b])$  s'il n'y a pas ambiguïté. On a:

$$(g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}), i = 1, \dots, d) \Leftrightarrow (g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^d))$$

**Definition 4.2.** On appelle équation différentielle d'ordre 1 une équation de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in ]t_0, t_0 + \tau[$$

On appelle EDO d'ordre  $p$  une équation de la forme

$$y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t))$$

où  $f : [a, b] \times (\mathbb{R}^d)^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  est continue.

**Definition 4.3.** -

- Une fonction  $y$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant une EDO est dite solution de l'EDO.
- Résoudre une EDO c'est déterminer toutes les solutions de cette EDO.
- Lorsque  $d \neq 1$ , on parle de système d'EDOs.

**Remark 4.4.** Toute EDO d'ordre  $p > 1$  peut se ramener à un système d'EDOs d'ordre 1.



**Definition 4.5.** On appelle condition de Cauchy de l'EDO, la donnée de la valeur de la solution en un point

$$t_0 \in [a, b] : \quad y(t_0) = y^0$$

Le couple  $(t_0, y^0)$  est appelé **condition initiale** et le problème de Cauchy consiste à la recherche d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in ]t_0, t_0 + \tau[ \\ y(t_0) = y^0, & t_0 \text{ donné des } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

## 4.1.2 Exemple

**Example 4.6.** Pendule.



Figure 4.1: pendule-exemple-edo

$$\begin{cases} m = 1 \\ \phi(t) = ? \\ \phi' + \frac{g}{L} \sin(\phi) = 0 \end{cases}$$

c'est une EDO d'ordre 2.

$$\begin{cases} x_1 = \phi \Rightarrow x'_1 = \phi' = x_2 \\ x_2 = \phi' \Rightarrow x'_2 = \phi'' = -\frac{g}{L} \sin(\phi) = -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{cases}$$

D'où  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  on a  $X'(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{pmatrix} = f(t, X(t))$  où

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) &\longmapsto f((t, X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Example 4.7.** Objet en chute libre.

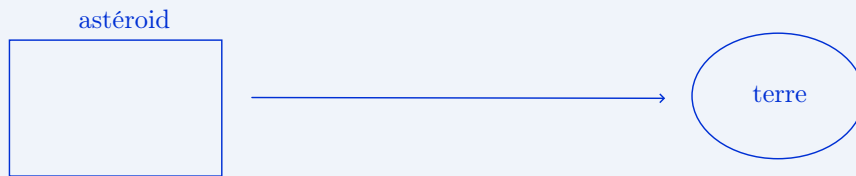


Figure 4.2: asteroid-EDO

$$\begin{cases} \text{vitesse: } v \\ \text{altitude: } z \end{cases}$$

$k$  a coef. de frottement.

$$z'' = -g + k(z')^2 e^{-az} \text{ c\`ad EDO d'ordre 2}$$

ou encore

$$\begin{cases} z' = v \\ v' = -g + kv^2 e^{-az} \end{cases} \text{ c\`ad syst\`eme d'EDOs d'ordre 1}$$

Posons  $Y = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$   $Y' = f(t, Y)$ ???

$$f(t, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -g + ky_2^2 e^{-ay_1} \end{pmatrix}$$

```
1 def f(t, Y):
2     x, y = Y
3     return np.array([y, -g + (k*y**2)*np.exp(-a*x)])
```

#### Exemple 4.8. Taux d'infection

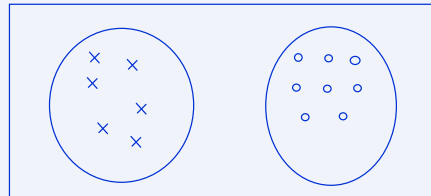


Figure 4.3: taux-d-infection-EDO

$y$ : infectés,  $x$ : soins,  $\alpha$ : taux d'infection

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha xy \\ x + y = n \end{cases} \Rightarrow y' = \alpha y(n - y)$$

### 4.1.3 Nécessite de la solution approchée

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in ]t_0, t_0 + \tau[ \\ x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (4.1)$$

On ne sait résoudre 4.1 dans des cas particuliers.

$d = 1$ ,  $f$  est à variables séparées.

**Example 4.9.**

$$\begin{cases} \dot{L} = \tau_L L & ]0, T[ \\ L(0) = L_0 \end{cases} \Rightarrow L(t) = L_0 e^{t\tau_L}$$

Illustration graphique

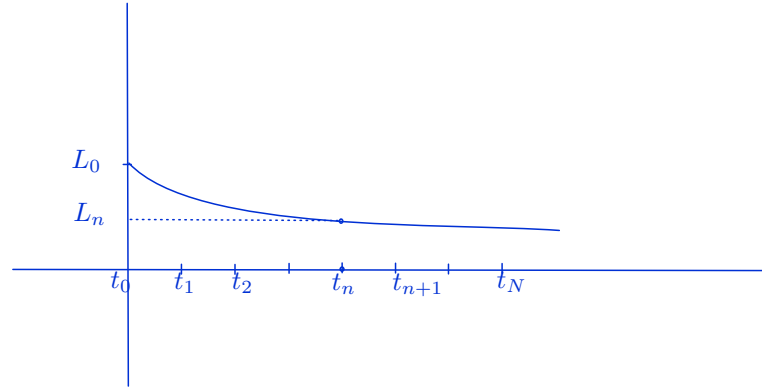


Figure 4.4: illustration-graphique-sol-approche

- On se donne  $t_n = n\Delta t$

$$n = 0, \dots, N, \text{ où } \Delta t = \frac{T}{N}, N \in \mathbb{N}^*$$

- On calcule  $L_n = L_0 e^{t_n \tau_L}$ ,  $n = 0, \dots, N$
- On place  $(t_n, L_n)$  sur un figure et on les relie pour obtenir un graphe de  $t \mapsto L(t)$

## 4.2 Problème d'évolution de population des lapins

$L$ : population des lapins,  $R$ : population renards.

On a le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{L} = L(\tau_L - pR) \\ \dot{R} = R\tau_R(\alpha L - 1) \\ L(0) = L_0, \quad R(0) = R_0 \end{cases}$$

Ce système n'est pas résolvable analytiquement.

On peut cependant le résoudre numériquement à condition de s'assurer que le problème est bien posé.

- Existence et l'unicité de la solution
- Régularité de la solution
- Dépendance continue de la solution vis à vis des données du problème (où Stabilité)

$$\Phi : (t_0, f) \mapsto y$$

$$\|\Phi(y_1 - y_2)\|_* \leq C_1 \|L - L_0^2\| + C_2 \|f_1 - f_2\|_{**}$$

**Definition 4.10.** On dit que  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est lipschizienne par rapport à sa seconde variable s'il existe une constante positive  $L$  (appelée constante de lipschitz) telle que

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq L\|y_2 - y_1\| \quad \forall t \in [a, b] \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$$

**Theorem 4.11.** de Cauchy lipshitz.

Soit

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in ]t_0, t_0 + \tau[ \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (4.2)$$

- Si  $f : [t_0, t_0 + \tau] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie

1.  $f$  continue
2.  $\|f(t, y) - f(t, z)\| \ll \|y - z\|$

Alors 4.2 admet une unique solution (globale) de classe  $\mathcal{C}^1([t_0, t_0 + \tau], \mathbb{R}^d)$

## 4.3 Exemple de Schémas numériques

### 4.3.1 Formulation intégrale

**Proposition 4.12.**  $x$  solution de 4.2 ssi  $x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \forall t \in [t_0, t_0 + \tau]$

**Proof.** -

$\Rightarrow$ )

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0 \\ x'(t) = f(t, x(t)) \end{cases}$$

$\Leftarrow$ )

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

□

### 4.3.2 Construction de schema d'Euler explicite

Étape 1 maillage du domaine

$N$  donné, pose  $\Delta t = \frac{T}{N}, t_n = n\Delta t, n = 0, \dots, N$

Étape 2 : Formulation intégrale:

Suite  $[t_n, t_{n+1}]$  problème discrèt ("continue")

$$\begin{cases} x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds, n = 0, \dots, N-1 \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Étape 3 Approximation des intégrales (Formules de quadratures)



Figure 4.5: etape-3-rectangles-a-gauche

Récrangles à gauche

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \Delta t g(t_n) + o(\Delta t^2) \approx \Delta t g(t_n)$$

On a

$$\begin{cases} x(t_{n+1}) = x(t_n) + \Delta t f(t_n, x(t_n)) + o(\Delta t^2) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + \Delta t f(t_n, x(t_n)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (4.5)$$

On pose  $x_n \approx x(t_n)$ ,  $n = 0, \dots, N$  lorsque des dans (PDC) on se sépare des restes

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n, x_n), & n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 = x^0 \end{cases} \quad (4.6)$$

On a le schéma d'Euler explicite

**Remark 4.13.** Schéma du point-milieu

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \Delta t g\left(\frac{t_{n+1} + t_n}{2} + o(\Delta t^3)\right)$$

On aurait

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \Delta t f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x(t_{n+\frac{1}{2}})\right) + o(\Delta t^3)$$

Soit

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}}\right), & n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 = x^0 \end{cases}$$

Comme  $x_{n+\frac{1}{2}}$  est inconnu, on l'approche par le schéma d'Euler explicite.

$$\text{i.e } x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, x_n)$$

D'où

$$\begin{cases} x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, x_n) \\ x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_{n+\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, x_n)), n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 = x^0 \end{cases} \quad (4.8)$$

### 4.3.3 Autres schémas et forme général des schemas explicites à un pas

**Remark 4.14.** Si Rectangles à droites, on aurait eu

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_{n+1}, x_{n+1}), n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 = x^0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Il est implicite c'est le schema d'Euler implicite

**Remark 4.15.** Formule des trapeze - on aurait

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})), n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (4.10)$$

C'est le schema de CLANK-NICOLAS il est implicite. On peut expliciter le schema de C-N.

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n, x_n)$$

On aura

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + \Delta t f(t_n, x_n))] \\ x_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n + \Delta t f(t_n, x_n) & n = 0, \dots, N-1 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^*)] \end{cases} \quad (4.12)$$

C'est un schema explicite appelé schema de Heun. Généralisation des schema à un pas.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t \Phi(t_n, x_n, \Delta t), & n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$

**Example 4.16.** • Euler explicite :  $\Phi(t, y, \Delta t) = f(t, y)$

- Point - Millieu :  $\Phi(t, y, \Delta t) = f(t + \frac{\Delta t}{2}, y + \frac{\Delta t}{2} f(t, y))$
- HEUN:  $\Phi(t, y, \Delta t) = \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t + \Delta t, y + \Delta t f(t, y))]$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, x_n)) \\ x_0 = x^0 \end{cases} \quad (4.14)$$