

Notes de Probas

Yehor Korotenko

November 11, 2025

CONTENTS

1 Lecture 8: La convergence en loi	3
1.1 Définition	3
1.2 La fonction de répartition	4
1.3 Exemples	4
1.4 La bijection	6
1.4.1 Construction d'une loi singulière	7
1.5 Traduction sur les fonctions de répartition	7

CHAPTER 1

LECTURE 8: LA CONVERGENCE EN LOI

La loi, c'est ce qu'il y a de plus important!

1.1 Definition

Il existe des suites de variables qui ne converge ni presque sûrement, ni en probabilité, ni dans L^1 , mais dont la loi converge, même constante !

EXAMPLE 1.1.1 — $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$

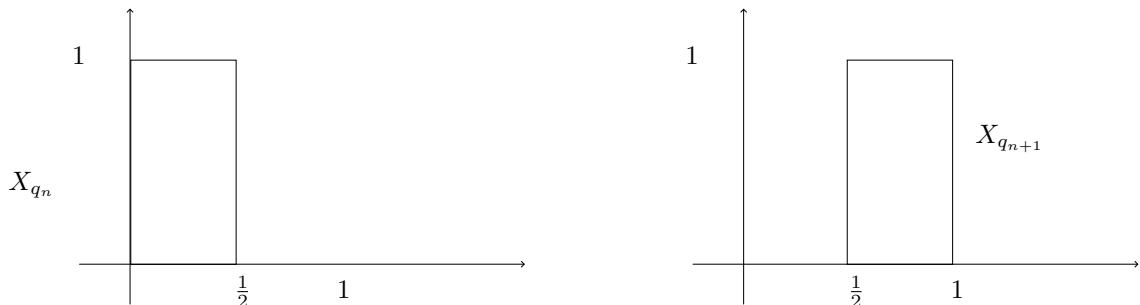


Figure 1.1: example-cv-loi

Pour tout n , la loi de X_n est la loi $Bernoulli(\frac{1}{2})$

$$\forall n, P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

et donc $P_{X_n} = Ber(\frac{1}{2})$ ne dépend pas de n !

DEFINITION 1.1.2 — Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X , ce que l'on note $X_n \xrightarrow{L} X$, ssi:

- pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

Remarquons que $E[f(X_n)]$ ne dépend que de la loi de X_n , i.e.:

$$E[f(X_n)] = \int_{\Omega} f(X_n) dP \xrightarrow{\text{transfert}} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\underbrace{P_{X_n}(x)}_{\text{loi de } X_n}$$

Ainsi, la convergence en loi s'applique même dans des situations où les variables aléatoires X_n ne sont pas définies sur le même espace de probas (Ω, \mathcal{F}, P) , i.e. si:

$$X_n : (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

où $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ n'ont aucun lien a priori. Ceci distingue fondamentalement la convergence en loi, des autres modes de convergence.

1.2 La fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

DEFINITION 1.2.1 — La fonction de répartition de X , notée F_X , est la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$$

On a $F_X(x) = P_X(]-\infty, x])$. Comme les intervalles $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ engendrent les boréliens et forment une famille stable par l'intersection finie, par unicité de l'extension, la loi P_X est déterminée par F_X .

COROLLARY 1.2.2 — La fonction de répartition F_X détermine la loi P_X de X .

PROPOSITION 1.2.3 — Une fonction de répartition F vérifie:

1. F est croissante de \mathbb{R} dans $[0, 1]$.
2. F est continue à droite.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Proof — 1. évident

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, Regardons

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} P_X(]-\infty, x]) \underset{\substack{\text{continuité} \\ \text{monotone de } P_X}}{=} P_X \left(\bigcap_{\substack{x > x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}}]-\infty, x] \right) = P_X(]-\infty, x_0]) = F_X(x_0)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty, x \in \mathbb{Z}} P_X(]-\infty, x]) = P_X(\bigcap_{x \in \mathbb{Z}}]-\infty, x]) = P_X(\emptyset) = 0$$

□

NOTE — Dans certains livres F_X est définie par $F_X(x) = P(X < x)$

1.3 Exemples

EXAMPLE 1.3.1 — $X \sim Ber(p)$, $P(X = 0) = 1 - p$, $F_X(0) = P(X \leq 0) = 1 - p$

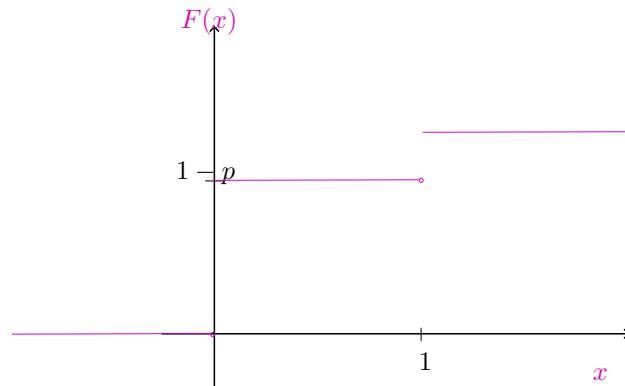


Figure 1.2: ex-fonction-repartition

EXAMPLE 1.3.2 — $X \sim Unif(\{1, \dots, n\})$

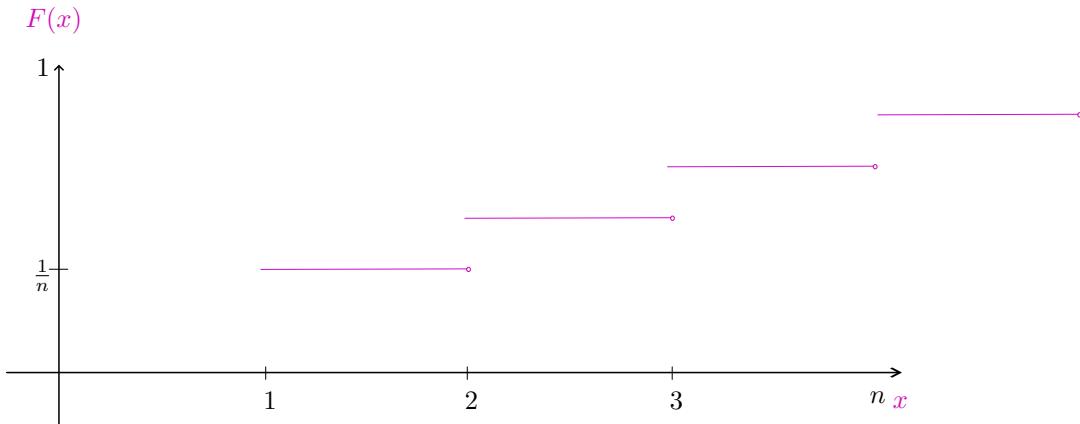


Figure 1.3: ex-fonction-repartition-unif

EXAMPLE 1.3.3 — $X \sim Unif([0, 1])$

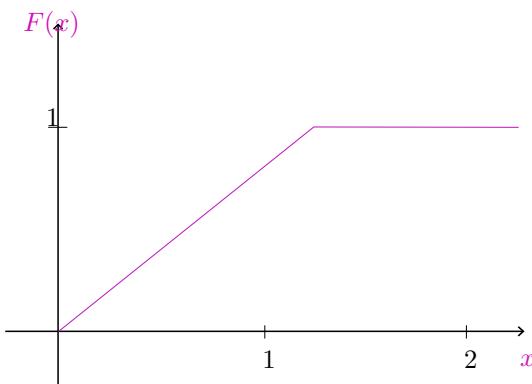


Figure 1.4: ex-fonction-repartition-unif-0-1

EXAMPLE 1.3.4 — $F_X \sim \text{Exp}(\alpha)$, $F_X(x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha t}$, $x \geq 0$

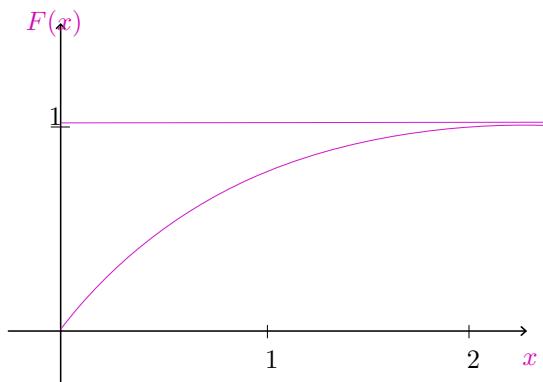


Figure 1.5: ex-fonction-repartition-exp

Plus généralement, si la loi de X a une densité f , alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

1.4 La bijection

Si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sa fonction de répartition F_μ est l'application de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_\mu(x) = \mu(-\infty, x])$$

Cohérence: si X est une variable aléatoire

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = F_{P_X}(x)$$

EXAMPLE 1.4.1 — La loi normale: $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \text{erf}(x)$$

$$1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \text{erfc}(x)$$

Notons $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notons \mathcal{R} l'ensemble des fonction de répartition sur \mathbb{R} (les fonction qui vérifie la proposition 1.2.3)

THEOREM 1.1 — L'application $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \mapsto F_\mu \in \mathcal{R}$ est une bijection!

1.4.1 Construction d'une loi singulière

i.e. la loi μ sans atomes: $\forall x, \mu(\{x\}) = 0$ et telle que

$$\exists c, \mu(c) = 1 \quad \lambda(c)_{\text{Lebesgue}} = 0$$

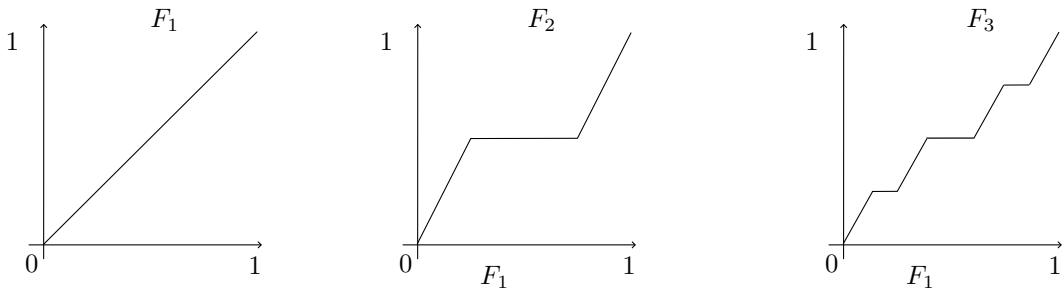


Figure 1.6: loi-singuliere

Puis, (F_n) . μ associée à F_∞

Montrer que $F_n \rightarrow F_\infty$ sur $[0, 1]$ uniformément.

1.5 Traduction sur les fonctions de répartition

Comme la convergence en loi ne porte que sur les lois des variables aléatoires, elle doit pouvoir s'exprimer via les fonctions de répartitions.

THEOREM 1.2 — Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X des variables aléatoires réelles et notons $(F_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$, F_X les fonctions de répartitions associées. Alors, on a équivalence:

1. La suite (X_n) converge en loi vers X
2. En tout point x de \mathbb{R} où F_X est continue, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F_X(x)$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Proof — • 1) \Rightarrow 2): Je prends $f(x) = 1_{]-\infty, x]}$, alors

$$E(f(X_n)) = P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x)$$

avec $E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X))$ et $F_{X_n} \rightarrow F_X(x)$. Par contre, problème: f n'est pas continue en x .

Vraie preuve: Soit x_0 un point où F_X est continue. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x_0) = F_X(x_0)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons les fonctions f , g suivantes.

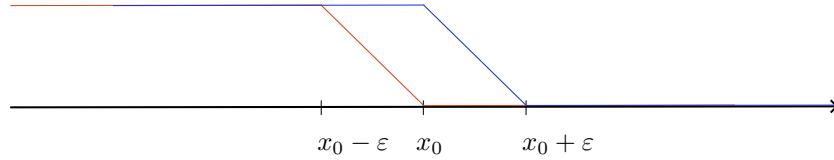


Figure 1.7: fonctions-f-et-g

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1_{]-\infty, x_0 - \varepsilon]}(x) \leq f(x) \leq 1_{]-\infty, x_0]}(x) \leq g(x) \leq 1_{]-\infty, x_0 + \varepsilon]}(x)$$

et f et g sont continues, donc

$$E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X)) \quad F(g(X_n)) \rightarrow E(g(X))$$

Mettons X_n à la place de x dans les inégalités et prenons l'espérance :

$$E(f(X_n)) \leq F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X_n)) \quad \forall n$$

$$\text{avec } E(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E(f(X))$$

$$F_X(x_0 - \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x_0) \leq \limsup_n F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X)) \leq F_X(x_0 + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

avec $F_X(x_0 + \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} F_X(x_0)$ par la continuité à droite.

- 2) \Rightarrow 1): $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ en tout point x où F_X est continue. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. Il faut montrer que $E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X))$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{-\infty} F_X = 0$, $\lim_{+\infty} F_X = 1$, il existe $a < 0$ tel que $F_X(a) < \varepsilon$, $F_X(b) > 1 - \varepsilon$, F_X continue en a et b . Ensuite on écrit

$$E(f(X_n)) = \int f(X_n) dP = \int_{X_n \leq a} f(X_n) dP + \int_{a < X_n < b} f(X_n) dP + \int_{X_n > b} f(X_n) dP$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{X_n < a} f(X_n) dP \right| &\leq \int_{X_n < a} |f(X_n)| dP \leq \|f\|_\infty P(X_n \leq a) = \|f\|_\infty F_{X_n}(a) \\ \left| \int_{X_n > b} f(X_n) dP \right| &\leq \|f\|_\infty P(X_n > b) = \|f\|_\infty (1 - F_{X_n}(b)) \end{aligned}$$

Soit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_k = b$, une subdivision de $[a, b]$ telle que F_X est continue en x_0, x_1, \dots, x_k . Définissons f_k^+

$$f_k^+(x) = \sum_{l=1}^k 1_{[x_{l-1}, x_l]}(x) \sup_{[x_{l-1}, x_l]} f$$

Alors $f \leq f_k^+$ sur $[a, b]$ et

$$\int_{a < X_n \leq b} f(X_n) dP \leq \int_{a < X_n \leq b} f_k^+(X_n) dP = \sum_{l=1}^k \sup_{[x_{l-1}, x_l]} f \int_{x_{l-1} < X_n < x_l} dP$$

$k \rightarrow +\infty$. Je dis que: $\forall x \in [a, b]$, $|f_k^+(x)| \leq \|f\|_\infty$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k^+(x) = f(x)$, par continuité de f au point x . Lorsque $k \rightarrow +\infty$ le pas de la subdivision $\rightarrow 0$. Et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E(f_k^+(X)) = E(f(X) 1_{[a, b]}(X))$$

grâce au théorème de convergence dominée. D'où $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \limsup_n \int f(X_n) dP &\leq 2\varepsilon \|f\|_\infty + E(f(X) 1_{[a, b]}(X)) \\ &\leq 4\varepsilon \|f\|_\infty + E(f(X)) \end{aligned}$$

Alors, avec $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\limsup_n E(f(X_n)) \leq E(f(X))$$

Même travail pour le \limsup .

□