

Notes de Probas

Yehor Korotenko

November 21, 2025

CONTENTS

1 Lecture 8: La convergence en loi	3
1.1 Définition	3
1.2 La fonction de répartition	4
1.3 Exemples	4
1.4 La bijection	6
1.4.1 Construction d'une loi singulière	7
1.5 Traduction sur les fonctions de répartition	7
2 Lecture 9: Fonctions Caractéristiques	11
2.1 Définition	11
2.2 Exemples	11
2.2.1 Bernoulli	11
2.2.2 Poisson	12
2.2.3 Exponentielle	12
2.3 Propriétés	12
2.4 La loi gaussienne	12
2.5 Théorème d'injectivité	14
3 Lecture 10: Le Théorème Limite Central	17
3.1 Le théorème de Paul Lévy	17
3.2 Moments	18
3.3 Exemples	19
3.4 Convolution	19
3.5 Le théorème limite central	20

CHAPTER 1

LECTURE 8: LA CONVERGENCE EN LOI

La loi, c'est ce qu'il y a de plus important!

1.1 Definition

Il existe des suites de variables qui ne converge ni presque sûrement, ni en probabilité, ni dans L^1 , mais dont la loi converge, même constante !

EXAMPLE 1.1.1 — $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$

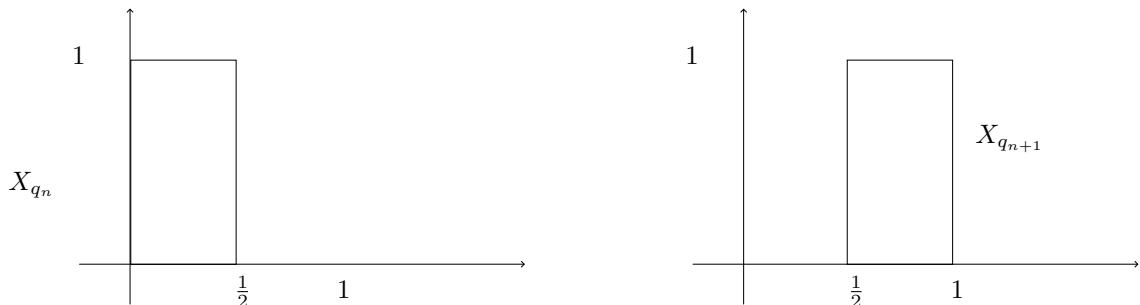


Figure 1.1: example-cv-loi

Pour tout n , la loi de X_n est la loi $Bernoulli(\frac{1}{2})$

$$\forall n, P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

et donc $P_{X_n} = Ber(\frac{1}{2})$ ne dépend pas de n !

DEFINITION 1.1.2 — Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X , ce que l'on note $X_n \xrightarrow{L} X$, ssi:

- pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

Remarquons que $E[f(X_n)]$ ne dépend que de la loi de X_n , i.e.:

$$E[f(X_n)] = \int_{\Omega} f(X_n) dP \xrightarrow{\text{transfert}} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\underbrace{P_{X_n}(x)}_{\text{loi de } X_n}$$

Ainsi, la convergence en loi s'applique même dans des situations où les variables aléatoires X_n ne sont pas définies sur le même espace de probas (Ω, \mathcal{F}, P) , i.e. si:

$$X_n : (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

où $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ n'ont aucun lien a priori. Ceci distingue fondamentalement la convergence en loi, des autres modes de convergence.

1.2 La fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

DEFINITION 1.2.1 — La fonction de répartition de X , notée F_X , est la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$$

On a $F_X(x) = P_X(]-\infty, x])$. Comme les intervalles $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ engendrent les boréliens et forment une famille stable par l'intersection finie, par unicité de l'extension, la loi P_X est déterminée par F_X .

COROLLARY 1.2.2 — La fonction de répartition F_X détermine la loi P_X de X .

PROPOSITION 1.2.3 — Une fonction de répartition F vérifie:

1. F est croissante de \mathbb{R} dans $[0, 1]$.
2. F est continue à droite.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Proof — 1. évident

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, Regardons

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} P_X(]-\infty, x]) \underset{\substack{\text{continuité} \\ \text{monotone de } P_X}}{=} P_X \left(\bigcap_{\substack{x > x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}}]-\infty, x] \right) = P_X(]-\infty, x_0]) = F_X(x_0)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty, x \in \mathbb{Z}} P_X(]-\infty, x]) = P_X(\bigcap_{x \in \mathbb{Z}}]-\infty, x]) = P_X(\emptyset) = 0$$

□

NOTE — Dans certains livres F_X est définie par $F_X(x) = P(X < x)$

1.3 Exemples

EXAMPLE 1.3.1 — $X \sim Ber(p)$, $P(X = 0) = 1 - p$, $F_X(0) = P(X \leq 0) = 1 - p$

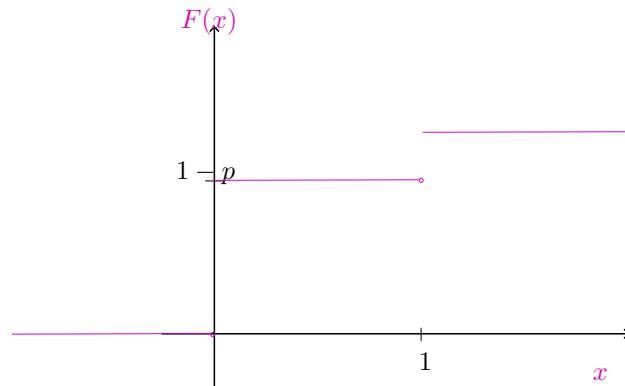


Figure 1.2: ex-fonction-repartition

EXAMPLE 1.3.2 — $X \sim Unif(\{1, \dots, n\})$

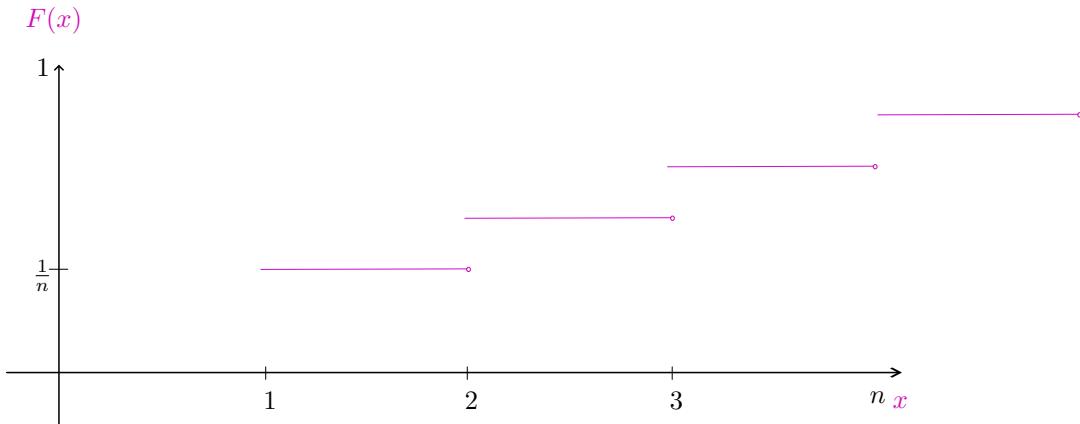


Figure 1.3: ex-fonction-repartition-unif

EXAMPLE 1.3.3 — $X \sim Unif([0, 1])$

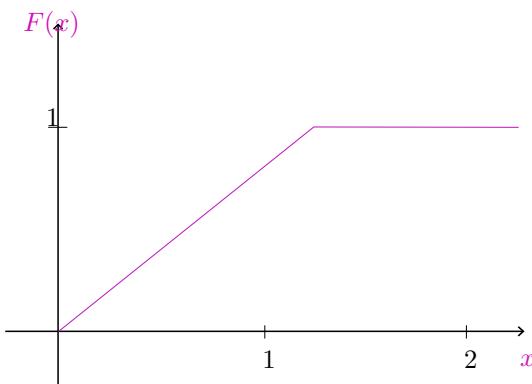


Figure 1.4: ex-fonction-repartition-unif-0-1

EXAMPLE 1.3.4 — $F_X \sim \text{Exp}(\alpha)$, $F_X(x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha t}$, $x \geq 0$

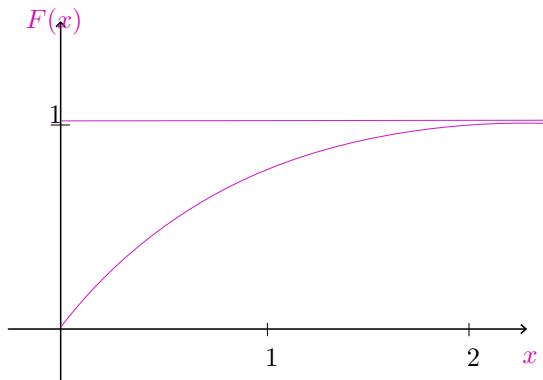


Figure 1.5: ex-fonction-repartition-exp

Plus généralement, si la loi de X a une densité f , alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

1.4 La bijection

Si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sa fonction de répartition F_μ est l'application de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_\mu(x) = \mu(-\infty, x])$$

Cohérence: si X est une variable aléatoire

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = F_{P_X}(x)$$

EXAMPLE 1.4.1 — La loi normale: $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \text{erf}(x)$$

$$1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \text{erfc}(x)$$

Notons $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notons \mathcal{R} l'ensemble des fonction de répartition sur \mathbb{R} (les fonction qui vérifie la proposition 1.2.3)

THEOREM 1.1 — L'application $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \mapsto F_\mu \in \mathcal{R}$ est une bijection!

1.4.1 Construction d'une loi singulière

i.e. la loi μ sans atomes: $\forall x, \mu(\{x\}) = 0$ et telle que

$$\exists c, \mu(c) = 1 \quad \lambda(c)_{\text{Lebesgue}} = 0$$

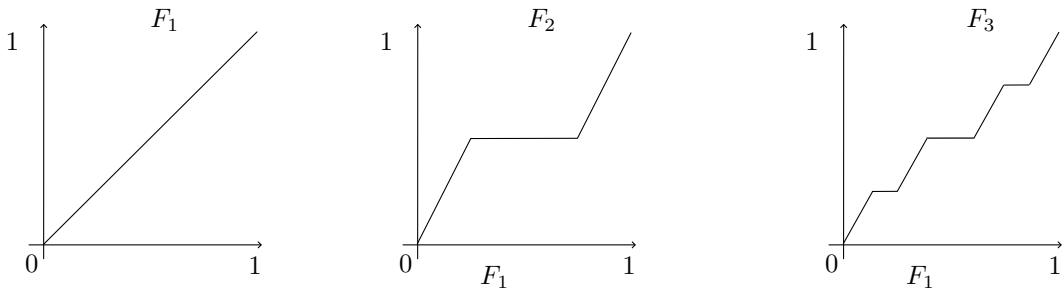


Figure 1.6: loi-singuliere

Puis, (F_n) . μ associée à F_∞

Montrer que $F_n \rightarrow F_\infty$ sur $[0, 1]$ uniformément.

1.5 Traduction sur les fonctions de répartition

Comme la convergence en loi ne porte que sur les lois des variables aléatoires, elle doit pouvoir s'exprimer via les fonctions de répartitions.

THEOREM 1.2 — Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X des variables aléatoires réelles et notons $(F_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$, F_X les fonctions de répartitions associées. Alors, on a équivalence:

1. La suite (X_n) converge en loi vers X
2. En tout point x de \mathbb{R} où F_X est continue, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F_X(x)$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Proof — • 1) \Rightarrow 2): Je prends $f(x) = 1_{]-\infty, x]}$, alors

$$E(f(X_n)) = P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x)$$

avec $E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X))$ et $F_{X_n} \rightarrow F_X(x)$. Par contre, problème: f n'est pas continue en x .

Vraie preuve: Soit x_0 un point où F_X est continue. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x_0) = F_X(x_0)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons les fonctions f , g suivantes.

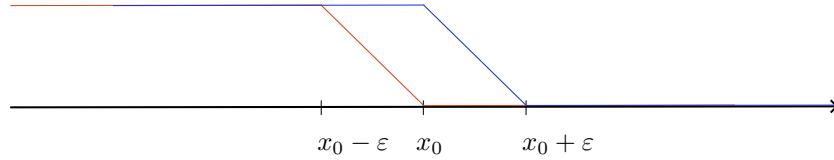


Figure 1.7: fonctions-f-et-g

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1_{]-\infty, x_0 - \varepsilon]}(x) \leq f(x) \leq 1_{]-\infty, x_0]}(x) \leq g(x) \leq 1_{]-\infty, x_0 + \varepsilon]}(x)$$

et f et g sont continues, donc

$$E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X)) \quad F(g(X_n)) \rightarrow E(g(X))$$

Mettons X_n à la place de x dans les inégalités et prenons l'espérance :

$$E(f(X_n)) \leq F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X_n)) \quad \forall n$$

$$\text{avec } E(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E(f(X))$$

$$F_X(x_0 - \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x_0) \leq \limsup_n F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X)) \leq F_X(x_0 + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

avec $F_X(x_0 + \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} F_X(x_0)$ par la continuité à droite.

- 2) \Rightarrow 1): $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ en tout point x où F_X est continue. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. Il faut montrer que $E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X))$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{-\infty} F_X = 0$, $\lim_{+\infty} F_X = 1$, il existe $a < 0$ tel que $F_X(a) < \varepsilon$, $F_X(b) > 1 - \varepsilon$, F_X continue en a et b . Ensuite on écrit

$$E(f(X_n)) = \int f(X_n) dP = \int_{X_n \leq a} f(X_n) dP + \int_{a < X_n < b} f(X_n) dP + \int_{X_n > b} f(X_n) dP$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{X_n < a} f(X_n) dP \right| &\leq \int_{X_n < a} |f(X_n)| dP \leq \|f\|_\infty P(X_n \leq a) = \|f\|_\infty F_{X_n}(a) \\ \left| \int_{X_n > b} f(X_n) dP \right| &\leq \|f\|_\infty P(X_n > b) = \|f\|_\infty (1 - F_{X_n}(b)) \end{aligned}$$

Soit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_k = b$, une subdivision de $[a, b]$ telle que F_X est continue en x_0, x_1, \dots, x_k . Définissons f_k^+

$$f_k^+(x) = \sum_{l=1}^k 1_{[x_{l-1}, x_l]}(x) \sup_{[x_{l-1}, x_l]} f$$

Alors $f \leq f_k^+$ sur $[a, b]$ et

$$\int_{a < X_n \leq b} f(X_n) dP \leq \int_{a < X_n \leq b} f_k^+(X_n) dP = \sum_{l=1}^k \sup_{[x_{l-1}, x_l]} f \int_{x_{l-1} < X_n < x_l} dP$$

$k \rightarrow +\infty$. Je dis que: $\forall x \in [a, b]$, $|f_k^+(x)| \leq \|f\|_\infty$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k^+(x) = f(x)$, par continuité de f au point x . Lorsque $k \rightarrow +\infty$ le pas de la subdivision $\rightarrow 0$. Et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E(f_k^+(X)) = E(f(X) 1_{[a, b]}(X))$$

grâce au théorème de convergence dominée. D'où $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \limsup_n \int f(X_n) dP &\leq 2\varepsilon \|f\|_\infty + E(f(X) 1_{[a, b]}(X)) \\ &\leq 4\varepsilon \|f\|_\infty + E(f(X)) \end{aligned}$$

Alors, avec $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\limsup_n E(f(X_n)) \leq E(f(X))$$

Même travail pour le \limsup .

□

CHAPTER 2

LECTURE 9: FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on définit

$$\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu$$

sous réserve que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont intégrables.

2.1 Définition

DEFINITION 2.1.1 — Si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sa fonction caractéristique, notée ϕ_μ est la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} d\mu(x)$$

qui est bien définie car $|e^{iux}| = 1$, et donc $\operatorname{Re} e^{iux} = \cos ux$ est μ intégrable.

DEFINITION 2.1.2 — Si X est une v.a réelle définie sur un espace de probas (Ω, \mathcal{F}, P) , sa fonction caractéristique notée ϕ_X est la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} définie par:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \int_{\Omega} e^{iuX} dP = \int_{\omega \in \Omega} e^{iuX(\omega)} dP(\omega)$$

(bien définie car $|e^{iuX}| = 1$ donc e^{iuX} est P intégrable)

Lien entre les 2 définitions: Par la formule de transfert

$$E[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dP_X(x)$$

et donc $\phi_X = \phi_{P_X}$.

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est, à un signe près, la transformée de Fourier de sa loi P_X

2.2 Exemples

2.2.1 Bernoulli

Si $X \sim \text{Ber}(p)$ $P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$

2.2.2 Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$

$$\phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{iuk} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} e^{-\theta} \frac{(e^{iu}\theta)^k}{k!} = e^{-\theta} e^{\theta e^{iu}} = e^{\theta(e^{iu}-1)}$$

2.2.3 Exponentielle

$X \sim Exp(\alpha)$

$$E[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}^+} e^{iux} \alpha e^{-\alpha x} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \alpha e^{(iu-\alpha)x} d\lambda(x) = \frac{\alpha}{iu - \alpha} e^{(iu-\alpha)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{iu - \alpha}$$

2.3 Propriétés

PROPOSITION 2.3.1 — Si X est une variable aléatoire, sa fonction caractéristique ϕ_X vérifie:

- i) $\phi_X(0) = 1$.
- ii) $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(u)| \leq 1$
- iii) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\overline{\phi_X(u)} = \phi_X(-u)$
- iv) ϕ_X est continue sur \mathbb{R}

Proof — ii) $|E[e^{iuX}]| \leq E[|e^{iuX}|] = 1$

iv) Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et montrons que ϕ_X est continue en u_0

$$\phi_X(u) = \int e^{iux} dP_X(x)$$

Il s'agit d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Ici,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |e^{iux}| \leq 1$$

majoration uniforme en u , par une fonction P intégrable. Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \phi_X(u) = \phi_X(u_0)$$

Effet d'une transformation affine: X variable aléatoire, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_{\alpha X + \beta}(u) = e^{iu\beta} \phi_X(\alpha u)$$

car

$$E[e^{iu(\alpha X + \beta)}] = E[e^{iu\beta} e^{iu\alpha X}] = e^{iu\beta} E[e^{iu\alpha X}]$$

□

2.4 La loi gaussienne

Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Posons, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ ssi $X = m + \sigma Z$, alors $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et calculons ϕ_Z .

$$\phi_Z(u) = E[e^{iuZ}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} e^{i\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$iux - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x - iu)^2 - \frac{u^2}{2}$ donc

$$\phi_Z(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Calcul de $I(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} dx$

$$I(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Figure 2.1: I-0-drawing

Calculons $I'(u)$.

$$I(u) = \int f(x, u) dx \text{ avec } f(x, u) = e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

On espère:

$$I'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) dx$$

$f(x, u)$ est \mathcal{C}^1 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = i(x - iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right| \leq (|x| + |u|)e^{-\frac{1}{2}(x^2+u^2)}$$

La fonction avec $u \in \mathbb{R}$, $|u|e^{-\frac{u^2}{2}}$ est bornée sur \mathbb{R} et donc

$$\exists M > 0, \forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right| \leq (|x| + M)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Cette fonction est λ intégrable et ne dépend pas de u . Alors, I est dérivable et sa dérivée vaut ainsi

$$I'(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) dx = \int_{\mathbb{R}} i(x - iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = i(x - iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(x - iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

alors

$$I'(u) = -i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) dx = -i [f(x, u)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

d'où $I(u) = \text{constante} = I(0) = \sqrt{2\pi}$.

On trouve finalement

$$\phi_Z(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $X = \sigma Z + m$

$$\phi_X(u) = e^{ium - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Posons

$$g_\sigma = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

$$\int e^{iux} g_\sigma(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u)$$

2.5 Théorème d'injectivité

THEOREM 2.1 (THÉORÈME D'INJECTIVITÉ) — Notons $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probas sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. L'application qui à une mesure de probas μ associe sa fonction caractéristique ϕ_μ est injective.

$$\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \phi_\mu$$

Ainsi, si X est une variable aléatoire, la fonction ϕ_X caractérise la loi de X .

Cas particulier: Si μ admet une densité f , alors $\phi_\mu(u) = \int e^{iux} f(x) d\lambda(x)$

Proof — Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probas sur lequel sont définies deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $X \sim \mu$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et soit $signa > 0$.

Idée: Nous allons convoler μ avec une gaussienne pour la régulariser et nous allons montrer que cette loi convolée est déterminée par ϕ_μ . Pour cela, nous étudions $X + \sigma Y$. Soit, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact.

$$E(f(X + \sigma Y)) = \int_{\Omega} f(X + \sigma Y) dP = \int_x \int_y f(x + \sigma y) dP_{(X,Y)}(x, y) \text{ avec } P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$$

On sait que $P_X = \mu$ et $P_Y = \mathcal{N}(0, 1)$

$$E(f(X + \sigma Y)) = \iint f(x + \sigma y) d\mu(x) g_1(y) dy = \iint f(x + \sigma y') d\mu(x) g_1(y') dy'$$

On a vu que $\int e^{iux} g_\sigma(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u)$, $x \rightarrow t$, $u \rightarrow y'$, $\sigma \rightarrow \frac{1}{\sigma}$

$$g_\sigma(y') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int e^{iy't} g_{\frac{1}{\sigma}} dt$$

$$\begin{aligned} E(f(X + \sigma Y)) &= \iiint f(x + y') \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{iy't} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) dt dy' d\mu(x) \quad z = x + y' \text{ garde } t, x \\ &= \iiint f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{i(z-x)t} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) dt dz d\mu(x) \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini

$$\left| f(z) e^{i(z-x)t} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \right| \leq \|f\|_\infty g_{\frac{1}{\sigma}}(t)$$

f support compact, $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda \otimes \lambda)$

$$\begin{aligned} E(f(X + \sigma Y)) &= \int_z \int_t f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{izt} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \left(\int_x e^{-itx} d\mu(x) \right) dt dz \\ &= \int_z \int_t f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{izt} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \phi_\mu(-t) dt dz \end{aligned}$$

Ainsi, la loi de $X + \sigma Y$ est déterminée par ϕ_μ .

Faisons $\sigma \rightarrow 0$. Je dis que $X + \sigma Y \xrightarrow{L} X$, $\sigma \rightarrow 0$ et donc la loi de X est déterminée par la famille de variable aléatoire $X + \sigma Y$, $\sigma > 0$ dont les lois sont déterminées par ϕ_μ .

Je dis que $X + \sigma Y \xrightarrow{P} X$. En effet: soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P(|X + \sigma Y - X| > \varepsilon) &= P(\sigma|Y| > \varepsilon) = P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) &= P\left(\bigcap_{\sigma > 0} \left\{|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right\}\right) = P(|Y| = +\infty) = 0 \\ X + \sigma Y \xrightarrow{P} X \Rightarrow X + \sigma Y &\xrightarrow{L} X \end{aligned}$$

here picture of all convergences

Prouvons finalement: $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$

Soit x un point de continuité de F_X .

$$\begin{aligned} P(X_n \leq x) &= F_{X_n}(x) \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) + P(X \leq x + \varepsilon) \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) &\leq F_X(x + \varepsilon) \forall \varepsilon > 0 \\ P(X \leq x - \varepsilon) &\leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) + P(X_n \leq x) \\ F_X(x - \varepsilon) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) \end{aligned}$$

avec $F_X(x - \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} F_X(x)$ car F_X continue en x .

□

CHAPTER 3

LECTURE 10: LE THÉORÈME LIMITÉ CENTRAL

3.1 Le théorème de Paul Lévy

THEOREM 3.1 (DE PAUL LÉVY) — Soit $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ des variables aléatoires réelles et soit $\phi_X, \phi_{X_n}, n \in \mathbb{N}$ leurs fonctions caractéristiques. Nous avons équivalence entre:

- i) $X_n \xrightarrow{L} X$
- ii) $\forall u \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{X_n}(u) = \phi_X(u)$

Proof — Sens facile:

- i) \Rightarrow ii)

$$\phi_{X_n}(u) = E[e^{iuX_n}] = E[\cos(uX_n)] + iE[\sin(uX_n)]$$

Le fonctions $x \mapsto \cos(ux), \sin(ux)$ u étant fixé sont continues bornées et donc par la définition de la convergence en loi

$$\begin{aligned} E[\cos(uX_n)] &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E[\cos(ux)] \\ E[\sin(uX_n)] &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E[\sin(ux)] \end{aligned}$$

et donc

$$\phi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi_X(u)$$

- ii) \Rightarrow i)

Nous utilisons la même stratégie que pour prouver l'injectivité de la transformation de Fourier des mesures de probabilités. Nous supposons que $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ sont toutes définies sur un même espace de probabilités (Ω, \mathcal{F}, P) , sur lequel est aussi définie une variable aléatoire Y , indépendante de $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Nous supposons ii) vraie et nous voulons montrer que $X_n \xrightarrow{L} X$.

Soit $\sigma > 0$ et écrivons

$$E[f(X_n)] - E[f(X)] = E[f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)] + E[f(X_n + \sigma Y) - E[f(X + \sigma Y)] + E[f(X + \sigma Y) - f(X)]$$

Comme f est continue à support compact, elle est uniformément continue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R} |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit δ associé à ε comme ci-dessus. Écrivons

$$\begin{aligned} |E(f(X_n) - f(X_n + \sigma Y))| &\leq E(|f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)|) \\ &= \int_{|\sigma Y| \geq \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| dP + \int_{|\sigma Y| < \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| dP \end{aligned}$$

$$\int_{|\sigma Y| \geq \delta} || dP \leq 2\|f\|_\infty \int_{|\sigma Y| \geq \delta} 1 dP = 2\|f\|_\infty P(|\sigma Y| \geq \delta)$$

Je dis que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} P(|\sigma Y| > \delta) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} P\left(|Y| > \frac{\delta}{\sigma}\right) = 0$$

donc

$$\exists \sigma_0 2\|f\|_\infty P(|\sigma_0 Y| \geq \delta) < \varepsilon$$

$$\int_{|\sigma Y| < \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| dP < \varepsilon$$

On a donc $|E[f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)]| < 2\varepsilon$ vraie pour tout n !. Par le même argument, on a $|E[f(X + \sigma_0 Y) - f(X)]| < 2\varepsilon$. Reste le terme du milieu. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} |E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq 2\varepsilon + |E[f(X_n + \sigma Y) - f(X + \sigma Y)]| + 2\varepsilon$$

Nous utilisons la formule du cours précédent

$$E[f(X_n + \sigma_0 Y)] \iint_{u,z} f(z) e^{iuz} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} g_{\frac{1}{\sigma}}(u) \phi_{X_n}(-u) du dz$$

Posons

$$F_n(u, z) = f(z) e^{iuz} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} g_{\frac{1}{\sigma_0}}(u) \phi_{X_n}(-u)$$

$$|F_n(u, z)| \leq |f(z)| \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} g_{\frac{1}{\sigma_0}}(u)$$

domination par une fonction qui ne dépend pas de n et qui est dans $L^1(d\lambda(u), d\lambda(z)) = L^1(\mathbb{R}^2, d\lambda(u), d\lambda(z))$

Par le TCD:

$$\exists N \forall n \geq N |E[f(X_n + \sigma_0 Y)] - E[f(X + \sigma_0 Y)]| < \varepsilon$$

Alors, pour $n \geq N$

$$|E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon < 5\varepsilon$$

□

3.2 Moments

PROPOSITION 3.2.1 — Soit X une variable aléatoire réelle. Soit $k \geq 1$ et supposons que $E[|X|^k] < +\infty$. Alors ϕ_X est k fois dérivable. Et de plus

$$E[X^k] = i^k \phi_X^{(k)}(0)$$

Proof —

$$\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dP_X(x)$$

Faisons le cas où $k = 1$: $E[|X|] < +\infty$. Il s'agit d'une intégrale à paramètre et on veut donner par rapport à u . Pose $F(x, u) = e^{iux}$ On

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, u) = ix e^{iux}$$

$|\frac{\partial F}{\partial u}(x, u)| \leq |x|$ fonction majorante qui est P_X intégrable et qui ne dépend pas de u .

Thm de dérivation: ϕ_X dérivable et

$$\phi'_X(u) = \int \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) dx = i \int x e^{iux} dP_X(x)$$

d'où

$$\phi'_X(0) = i \int x dP_X(x) = iE(X)$$

Ce résultat de (re)trouver facilement la suite des moments. \square

3.3 Exemples

EXAMPLE 3.3.1 — $X \sim \mathcal{U}([-1, 1])$

$$\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} 1_{[-1, 1]} \frac{1}{2} dx = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2iu} = \frac{\sin u}{u} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$$

car

$$\sin u = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

d'où $\phi_X^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n)! = \frac{(-1)^n}{2^n}$

$$E[X^{2n}] = \frac{1}{2^n}$$

et

$$E[X^{2n}] = \int_{-1}^1 x^{2n} \frac{1}{2} dx$$

EXAMPLE 3.3.2 (GAUSSIENNE) — $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\phi_X(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{u^{2n}}{2^n}$$

d'où

$$\phi_X^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n! 2^n} = (i)^{2n} E[X^{2n}]$$

d'où

$$E[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n! 2^n}$$

3.4 Convolution

LEMMA 3.4.1 — Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$$

Proof —

$$\phi_{X+Y}(u) = E[e^{iu(X+Y)}] = E[e^{iuX} e^{iuY}] = E[e^{iuX}] E[e^{iuY}] = \phi_X(u)\phi_Y(u)$$

car indépendante. \square

COROLLARY 3.4.2 — Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires i.i.d. alors

$$\phi_{X_1+\dots+X_n}(u) = (\phi_{X_1}(u))^n$$

Supposons que X variable aléatoire une loi de densité f et Y une variable aléatoire de densité g et X, Y indépendantes. Alors,

$$\phi_{X+Y}(u) = \iint_{x,y} e^{iu(x+y)} f(x)g(y) dx dy$$

Pose $z = x + y$, garde x , remplace y .

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(u) &= \iint_{x,z} e^{iuz} f(x)g(z-x) dx dz \quad \text{Fubini} \\ &= \int_z \left(\int_x f(x)g(z-x) dx \right) dz = \int e^{iuz} h(z) dz \end{aligned}$$

où

$$h(z) = \int f(x)g(z-x) dx = (f * g)(z)$$

produit de convolution de f et g .

Par identification des deux formules, on conclut que $X + Y$ a une loi de densité $f * g$.

EXAMPLE 3.4.3 — $g = g_\sigma(x)$

$$f * g_\sigma(z) = \int f(x)g_\sigma(z-x) dx = \int f(z-x)g_\sigma(x) dx$$

Dès que f et g sont dans \mathcal{L}^1 , le produit de convolution $f * g$ est bien définie et aussi dans $\mathcal{L}^1(\lambda)$

3.5 Le théorème limite central

THEOREM 3.2 (LIMITÉ CENTRAL) — Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d qui admettent un moment d'ordre 2. Posons $m = E[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$. Alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

REMARK 3.5.1 — Attention, il faut absolument centrer les variables aléatoires en soustrayant $nE[X_1] = nm$. Par contre, on peut normaliser $\sqrt{n}\text{Var}(X_1)$, i.e

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Il s'agit d'une résultat universel. Dès que les variables aléatoires (X_n) ont un moment d'ordre 2, les fluctuations de $X_1 + \dots + X_n$ autour de sa moyenne sont décrites par la loi gaussienne.

Le TLC ou TCL est un raffinement de la loi des grands nombres, sous l'hypothèse d'existence d'un moment d'ordre 2.

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = E[X_1] + \frac{R_n}{\sqrt{n}}$$

avec R_n une variable aléatoire (représentant le reste) qui $R_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Histoire: Abraham de Moivre (1733). The doctrine of chances.

Pierre Simon de Laplace (1812).

Lindeberg.

Turing 1934.

Proof — Posons $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}}$ et aussi $\tilde{X}_k = X_k - m$ pour $1 \leq k \leq n$ et étudions la convergence en loi de Y_n à l'aide des fonctions caractéristiques.

$$\phi_{Y_n}(u) = E[e^{iuY_n}] = E\left(e^{iu(\frac{\tilde{X}_1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{\tilde{X}_n}{\sqrt{n}})}\right) = E\left(e^{iu\frac{\tilde{X}_1}{\sqrt{n}}}\right) \dots E\left(e^{iu\frac{\tilde{X}_n}{\sqrt{n}}}\right) = \left(\phi_{\tilde{X}_1}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$\phi_{\tilde{X}_1}(u)$ est 2 fois dérivable car $E[\tilde{X}_1^2] < +\infty$ et donc elle admet un développement limité à l'ordre 2.

$$\begin{aligned}\phi_{\tilde{X}_1}(u) &= \phi_{\tilde{X}_1}(0) + u\phi'_{\tilde{X}_1}(0) + \frac{u^2}{2}\phi''_{\tilde{X}_1}(0) + o(u^2) \\ &= 1 + iE[\tilde{X}_1]u - \frac{u^2}{2}E[\tilde{X}_1^2] + o(u^2)\end{aligned}$$

$$\phi_{\tilde{X}_1}(u) = 1 + 0 - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + o(u^2) \quad \sigma^2 = E[\tilde{X}_1^2]$$

d'où

$$\phi_{\tilde{X}_1}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

d'où

$$\begin{aligned}\phi_{Y_n}(u) &= \left(1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2} + o(1)\right) \rightarrow e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} = \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(u)\end{aligned}$$

Ici on utilise le ln complexe

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

□