

# Notes de Probas

Yehor Korotenko

December 9, 2025



# CONTENTS

<b>1</b>	<b>Lecture 8: La convergence en loi</b>	<b>3</b>
1.1	Définition . . . . .	3
1.2	La fonction de répartition . . . . .	4
1.3	Exemples . . . . .	4
1.4	La bijection . . . . .	6
1.4.1	Construction d'une loi singulière . . . . .	7
1.5	Traduction sur les fonctions de répartition . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Lecture 9: Fonctions Caractéristiques</b>	<b>11</b>
2.1	Définition . . . . .	11
2.2	Exemples . . . . .	11
2.2.1	Bernoulli . . . . .	11
2.2.2	Poisson . . . . .	12
2.2.3	Exponentielle . . . . .	12
2.3	Propriétés . . . . .	12
2.4	La loi gaussienne . . . . .	12
2.5	Théorème d'injectivité . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Lecture 10: Le Théorème Limite Central</b>	<b>17</b>
3.1	Le théorème de Paul Lévy . . . . .	17
3.2	Moments . . . . .	18
3.3	Exemples . . . . .	19
3.4	Convolution . . . . .	19
3.5	Le théorème limite central . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Lecture 11: Processus de Poisson</b>	<b>23</b>
4.1	Introduction . . . . .	23
4.2	Construction d'un modèle discret . . . . .	23
4.3	Instants de saut . . . . .	24
4.4	Le processus de Poisson . . . . .	26
4.5	La loi exponentielle . . . . .	26
4.6	Applications . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Lecture 12: Percolation</b>	<b>29</b>
5.1	Le problème . . . . .	29
5.2	Le réseau carré . . . . .	29
5.3	L'espace de probabilité . . . . .	29
5.4	Les clusters ouverts . . . . .	30

5.5	La probabilité de percolation . . . . .	30
5.6	La transition de phase . . . . .	30



# CHAPTER 1

## LECTURE 8: LA CONVERGENCE EN LOI

La loi, c'est ce qu'il y a de plus important!

### 1.1 Definition

Il existe des suites de variables qui ne converge ni presque sûrement, ni en probabilité, ni dans  $L^1$ , mais dont la loi converge, même constante !

**EXAMPLE 1.1.1** —  $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$

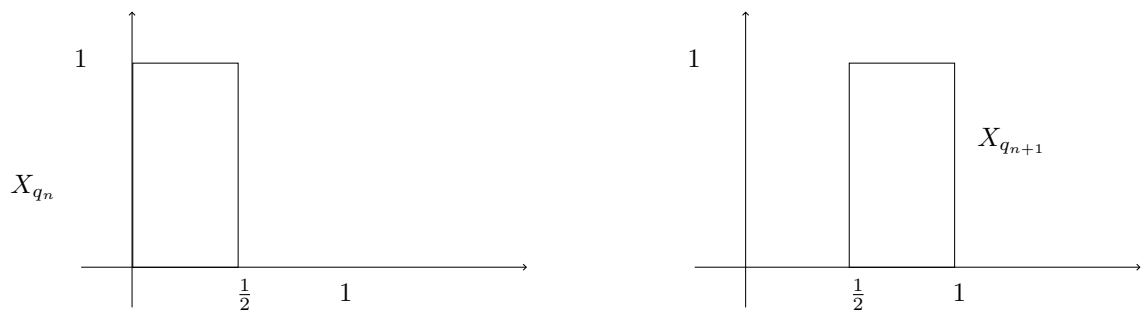


Figure 1.1: example-cv-loi

Pour tout  $n$ , la loi de  $X_n$  est la loi  $Bernoulli(\frac{1}{2})$

$$\forall n, P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

et donc  $P_{X_n} = Ber(\frac{1}{2})$  ne dépend pas de  $n$ !

**DEFINITION 1.1.2** — Une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$ , ce que l'on note  $X_n \xrightarrow{L} X$ , ssi:

- pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

Remarquons que  $E[f(X_n)]$  ne dépend que de la loi de  $X_n$ , i.e.:

$$E[f(X_n)] = \int_{\Omega} f(X_n) dP \underset{\text{transfert}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{dP_{X_n}(x)}_{\text{loi de } X_n}$$

Ainsi, la convergence en loi s'applique même dans des situations où les variables aléatoires  $X_n$  ne sont pas définies sur le même espace de probas  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ , i.e. si:

$$X_n : (\Omega_n, \mathbb{F}_n, P_n) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

où  $(\Omega_n, \mathbb{F}_n, P_n)$  n'ont aucun lien a priori. Ceci distingue fondamentalement la convergence en loi, des autres modes de convergence.

## 1.2 La fonction de répartition

Soit  $X$  une variable aléatoire  $(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

**DEFINITION 1.2.1** — La fonction de répartition de  $X$ , notée  $F_X$ , est la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$$

On a  $F_X(x) = P_X(]-\infty, x])$ . Comme les intervalles  $]-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  engendrent les boréliens et forment une famille stable par l'intersection finie, par unicité de l'extension, la loi  $P_X$  est déterminée par  $F_X$ .

**COROLLARY 1.2.2** — La fonction de répartition  $F_X$  détermine la loi  $P_X$  de  $X$ .

**PROPOSITION 1.2.3** — Une fonction de répartition  $F$  vérifie:

1.  $F$  est croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$ .
2.  $F$  est continue à droite.
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

*Proof* — 1. évident

2. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , Regardons

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} P_X(]-\infty, x]) \underset{\substack{\text{continuité} \\ \text{monotone de } P_X}}{=} P_X\left(\bigcap_{\substack{x > x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} ]-\infty, x]\right) = P_X(]-\infty, x_0]) = F_X(x_0)$$

- 3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty, x \in \mathbb{Z}} P_X(]-\infty, x]) = P_X\left(\bigcap_{x \in \mathbb{Z}} ]-\infty, x]\right) = P_X(\emptyset) = 0$$

□

**NOTE** — Dans certains livres  $F_X$  est définie par  $F_X(x) = P(X < x)$

## 1.3 Exemples

EXAMPLE 1.3.1 —  $X \sim \text{Ber}(p)$ ,  $P(X = 0) = 1 - p$ ,  $F_X(0) = P(X \leq 0) = 1 - p$

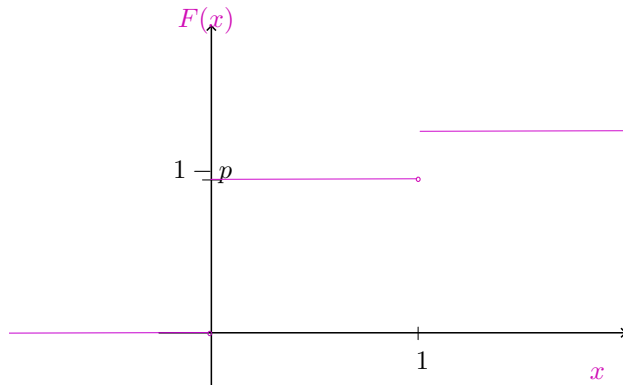


Figure 1.2: ex-fonction-repartition

EXAMPLE 1.3.2 —  $X \sim \text{Unif}(\{1, \dots, n\})$

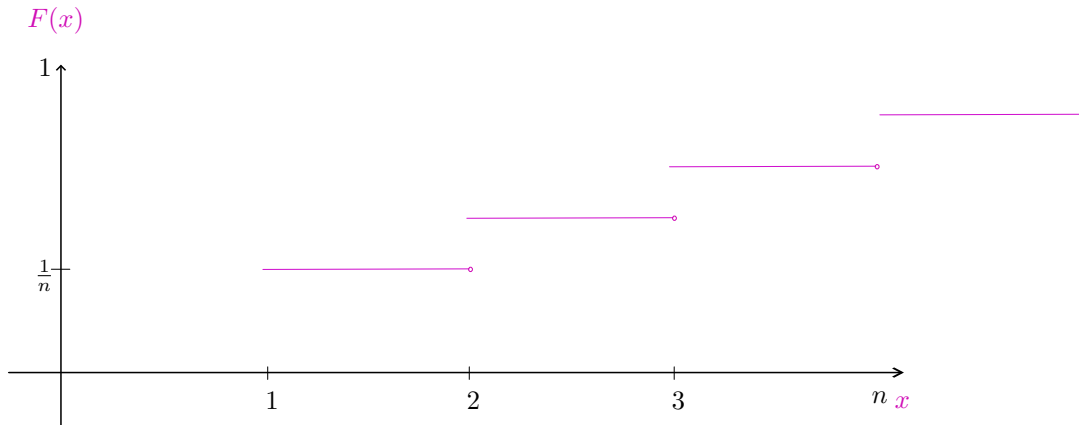


Figure 1.3: ex-fonction-repartition-unif

EXAMPLE 1.3.3 —  $X \sim \text{Unif}([0, 1])$



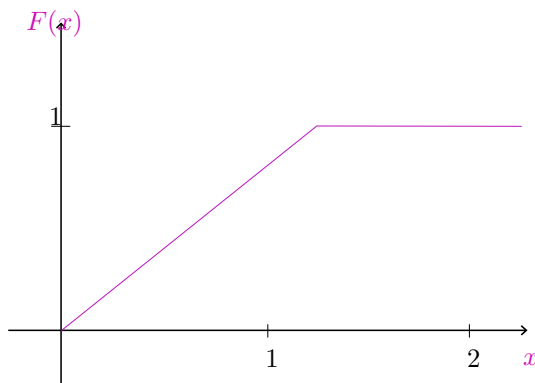


Figure 1.4: ex-fonction-repartition-unif-0-1

EXAMPLE 1.3.4 —  $F_X \sim \text{Exp}(\alpha)$ ,  $F_X(x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha t}$ ,  $x \geq 0$

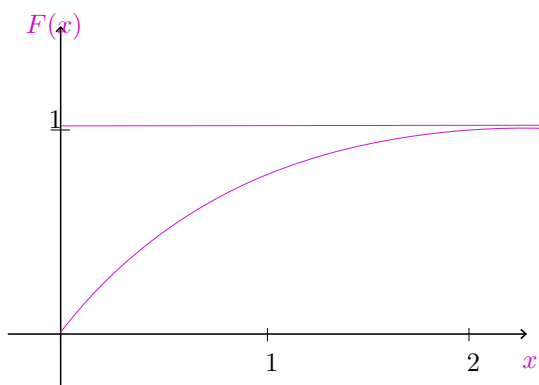


Figure 1.5: ex-fonction-repartition-exp

Plus généralement, si la loi de  $X$  a une densité  $f$ , alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

## 1.4 La bijection

Si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , sa fonction de répartition  $F_\mu$  est l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_\mu(x) = \mu([-\infty, x])$$

Cohérence: si  $X$  est une variable aléatoire

$$F_X(x) = P_X([-\infty, x]) = F_{P_X}(x)$$

**EXAMPLE 1.4.1** — La loi normale:  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \operatorname{erf}(x)$$

$$1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \operatorname{erfc}(x)$$

Notons  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , notons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des fonction de répartition sur  $\mathbb{R}$  (les fonction qui vérifie la proposition 1.2.3)

**THEOREM 1.1** — L'application  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \mapsto F_\mu \in \mathcal{R}$  est une bijection!

### 1.4.1 Construction d'une loi singulière

i.e. la loi  $\mu$  sans atomes:  $\forall x, \mu(\{x\}) = 0$  et telle que

$$\exists c, \mu(c) = 1 \quad \lambda(c) \underset{\text{Lebesgue}}{=} 0$$

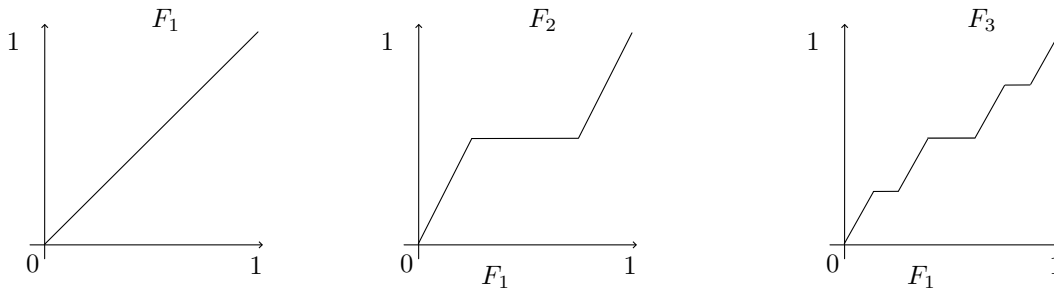


Figure 1.6: loi-singuliere

Puis,  $(F_n)$ .  $\mu$  associée à  $F_\infty$

Montrer que  $F_n \rightarrow F_\infty$  sur  $[0, 1]$  uniformément.

## 1.5 Traduction sur les fonctions de répartition

Comme la convergence en loi ne porte que sur les lois des variables aléatoires, elle doit pouvoir s'exprimer via les fonctions de répartition.

**THEOREM 1.2** — Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  des variables aléatoires réelles et notons  $(F_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $F_X$  les fonctions de répartition associées. Alors, on a équivalence:

1. La suite  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$
2. En tout point  $x$  de  $\mathbb{R}$  où  $F_X$  est continue, la suite  $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F_X(x)$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

*Proof* — • 1)  $\Rightarrow$  2): Je prends  $f(x) = 1_{]-\infty, x]}$ , alors

$$E(f(X_n)) = P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x)$$

avec  $E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X))$  et  $F_{X_n} \rightarrow F_X(x)$ . Par contre, problème:  $f$  n'est pas continue en  $x$ .

**Vraie preuve:** Soit  $x_0$  un point où  $F_X$  est continue. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x_0) = F_X(x_0)$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et considérons les fonctions  $f, g$  suivantes.

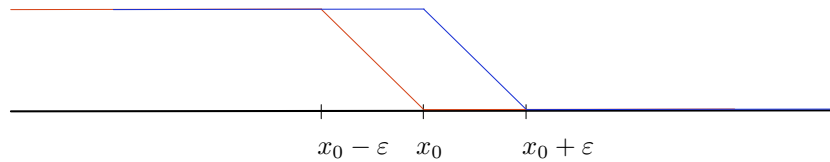


Figure 1.7: fonctions-f-et-g

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1_{]-\infty, x_0 - \varepsilon]}(x) \leq f(x) \leq 1_{]-\infty, x_0]}(x) \leq g(x) \leq 1_{]-\infty, x_0 + \varepsilon]}(x)$$

et  $f$  et  $g$  sont continues, donc

$$E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X)) \quad F(g(X_n)) \rightarrow E(g(X))$$

Mettons  $X_n$  à la place de  $x$  dans les inégalités et prenons l'esperance :

$$E(f(X_n)) \leq F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X_n)) \quad \forall n$$

avec  $E(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E(f(X))$

$$F_X(x_0 - \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x_0) \leq \limsup_n F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X)) \leq F_X(x_0 + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

avec  $F_X(x_0 + \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F_X(x_0)$  par la continuité à droite.

- 2)  $\Rightarrow$  1):  $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$  en tout point  $x$  où  $F_X$  est continue. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée. Il faut montrer que  $E(f(X_n)) \rightarrow E(f(X))$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\lim_{-\infty} F_X = 0$ ,  $\lim_{+\infty} F_X = 1$ , il existe  $a < 0$  tel que  $F_X(a) < \varepsilon$ ,  $F_X(b) > 1 - \varepsilon$ ,  $F_X$  continue en  $a$  et  $b$ . Ensuite on écrit

$$E(f(X_n)) = \int f(X_n) dP = \int_{X_n \leq a} f(X_n) dP + \int_{a < X_n < b} f(X_n) dP + \int_{X_n > b} f(X_n) dP$$

$$\left| \int_{X_n < a} f(X_n) dP \right| \leq \int_{X_n < a} |f(X_n)| dP \leq \|f\|_{\infty} P(X_n \leq a) = \|f\|_{\infty} F_{X_n}(a)$$

$$\left| \int_{X_n > b} f(X_n) dP \right| \leq \|f\|_{\infty} P(X_n > b) = \|f\|_{\infty} (1 - F_{X_n}(b))$$

Soit  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_k = b$ , une subdivision de  $[a, b]$  telle que  $F_X$  est continue en  $x_0, x_1, \dots, x_k$ . Définissons  $f_k^+$

$$f_k^+(x) = \sum_{l=1}^k 1_{]x_{l-1}, x_l]}(x) \sup_{]x_{l-1}, x_l]} f$$

Alors  $f \leq f_k^+$  sur  $[a, b]$  et

$$\int_{a < X_n \leq b} f(X_n) dP \leq \int_{a < X_n \leq b} f_k^+(X_n) dP = \sum_{l=1}^k \sup_{]x_{l-1}, x_l]} f \int_{x_{l-1} < X_n \leq x_l} dP$$

$k \rightarrow +\infty$ . Je dis que:  $\forall x \in ]a, b]$ ,  $|f_k^+(x)| \leq \|f\|_{\infty}$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k^+(x) = f(x)$ , par continuité de  $f$  au point  $x$ . Lorsque  $k \rightarrow +\infty$  le pas de la subdivision  $\rightarrow 0$ . Et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E(f_k^+(X)) = E(f(X)1_{]a, b]}(X))$$

grâce au théorème de convergence dominée. D'où  $\forall \varepsilon > 0$

$$\limsup_n \int f(X_n) dP \leq 2\varepsilon \|f\|_{\infty} + E(f(X)1_{]a, b]}(X))$$

$$\leq 4\varepsilon \|f\|_{\infty} + E(f(X))$$

Alors, avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\limsup_n E(f(X_n)) \leq E(f(X))$$

Même travail pour le  $\liminf$ .

□



# CHAPTER 2

## LECTURE 9: FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , on définit

$$\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu$$

sous réserve que  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont intégrables.

### 2.1 Définition

**DEFINITION 2.1.1** — Si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , sa fonction caractéristique, notée  $\phi_\mu$  est la fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} d\mu(x)$$

qui est bien définie car  $|e^{iux}| = 1$ , et donc  $\operatorname{Re} e^{iux} = \cos ux$  est  $\mu$  intégrable.

**DEFINITION 2.1.2** — Si  $X$  est une v.a réelle définie sur un espace de probas  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ , sa fonction caractéristique notée  $\phi_X$  est la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \int_{\Omega} e^{iuX} dP = \int_{\omega \in \Omega} e^{iuX(\omega)} dP(\omega)$$

(bien définie car  $|e^{iuX}| = 1$  donc  $e^{iuX}$  est  $P$  intégrable)

Lien entre les 2 définitions: Par la formule de transfert

$$E[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dP_X(x)$$

et donc  $\phi_X = \phi_{P_X}$ .

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire  $X$  est, à un signe près, la transformée de Fourier de sa loi  $P_X$

### 2.2 Exemples

#### 2.2.1 Bernoulli

Si  $X \sim \operatorname{Ber}(p)$   $P(X = 1) = p$   $P(X = 0) = 1 - p$

### 2.2.2 Poisson

Si  $X \sim \mathcal{P}(\theta)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $P(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$

$$\phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{iuk} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} e^{-\theta} \frac{(e^{iu}\theta)^k}{k!} = e^{-\theta} e^{\theta e^{iu}} = e^{\theta(e^{iu}-1)}$$

### 2.2.3 Exponentielle

$X \sim \text{Exp}(\alpha)$

$$E[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}^+} e^{iux} \alpha e^{-\alpha x} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \alpha e^{(iu-\alpha)x} d\lambda(x) = \frac{\alpha}{iu - \alpha} e^{(iu-\alpha)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{iu - \alpha}$$

## 2.3 Propriétés

**PROPOSITION 2.3.1** — Si  $X$  est une variable aléatoire, sa fonction caractéristique  $\phi_X$  vérifie:

- i)  $\phi_X(0) = 1$ .
- ii)  $\forall u \in \mathbb{R}, |\phi_X(u)| \leq 1$
- iii)  $\forall u \in \mathbb{R}, \overline{\phi_X(u)} = \phi_X(-u)$
- iv)  $\phi_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$

*Proof* — ii)  $|E[e^{iuX}]| \leq E[|e^{iuX}|] = 1$

iv) Soit  $u_0 \in \mathbb{R}$  et montrons que  $\phi_X$  est continue en  $u_0$

$$\phi_X(u) = \int e^{iux} dP_X(x)$$

Il s'agit d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Ici,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |e^{iux}| \leq 1$$

majoration uniforme en  $u$ , par une fonction  $P$  intégrable. Par le theorem de convergence dominé,

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \phi_X(u) = \phi_X(u_0)$$

Effet d'une transformation affine:  $X$  variable aléatoire,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_{\alpha X + \beta}(u) = e^{iu\beta} \phi_X(\alpha u)$$

car

$$E[e^{iu(\alpha X + \beta)}] = E[e^{iu\beta} e^{iu\alpha X}] = e^{iu\beta} E[e^{iu\alpha X}]$$

□

## 2.4 La loi gaussienne

Soit  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  et  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ . Posons,  $Z = \frac{X-m}{\sigma}$  ssi  $X = m + \sigma Z$ , alors  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et calculons  $\phi_Z$ .

$$\phi_Z(u) = E[e^{iuZ}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$iux - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x - iu)^2 - \frac{u^2}{2} \text{ donc}$$

$$\phi_Z(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$\text{Calcul de } I(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} dx$$

$$I(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

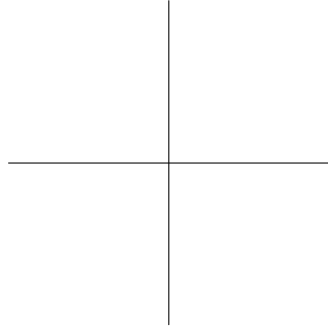


Figure 2.1: I-0-drawing

Calculons  $I'(u)$ .

$$I(u) = \int f(x, u) dx \text{ avec } f(x, u) = e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

On espère:

$$I'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) dx$$

$f(x, u)$  est  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = i(x - iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right| \leq (|x| + |u|)e^{-\frac{1}{2}(x^2+u^2)}$$

La fonction avec  $u \in \mathbb{R}$ ,  $|u|e^{-\frac{u^2}{2}}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et donc

$$\exists M > 0, \forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right| \leq (|x| + M)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Cette fonction est  $\lambda$  intégrable et ne dépend pas de  $u$ . Alors,  $I$  est dérivable et sa dérivée vaut ainsi

$$I'(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) dx = \int_{\mathbb{R}} i(x - iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = i(x - iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(x - iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$



alors

$$I'(u) = -i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) dx = -i [f(x, u)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

d'où  $I(u) = \text{constante} = I(0) = \sqrt{2\pi}$ .

On trouve finalement

$$\phi_Z(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

si  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Si  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ,  $X = \sigma Z + m$

$$\phi_X(u) = e^{i u m - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Posons

$$g_\sigma = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\int e^{i u x} g_\sigma(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u)$$

## 2.5 Théorème d'injectivité

**THEOREM 2.1 (THÉORÈME D'INJECTIVITÉ)** — Notons  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  l'ensemble des mesures de probas sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . L'application qui à une mesure de probas  $\mu$  associe sa fonction caractéristique  $\phi_\mu$  est injective.

$$\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \phi_\mu$$

Ainsi, si  $X$  est une variable aléatoire, la fonction  $\phi_X$  caractérise la loi de  $X$ .

Cas particulier: Si  $\mu$  admet une densité  $f$ , alors  $\phi_\mu(u) = \int e^{i u x} f(x) d\lambda(x)$

*Proof* — Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probas sur lequel sont définies deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$  telles que  $X \sim \mu$  et  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et soit  $\text{signa} > 0$ .

Idée: Nous allons convoler  $\mu$  avec une gaussienne pour la régulariser et nous allons montrer que cette loi convolée est déterminée par  $\phi_\mu$ . Pour cela, nous étudions  $X + \sigma Y$ . Soit,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue à support compact.

$$E(f(X + \sigma Y)) = \int_{\Omega} f(X + \sigma Y) dP = \int_x \int_y f(x + \sigma y) dP_{(X,Y)}(x, y) \text{ avec } P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$$

On sait que  $P_X = \mu$  et  $P_Y = \mathcal{N}(0, 1)$

$$E(f(X + \sigma Y)) = \iint f(x + \sigma y) d\mu(x) g_1(y) dy = \iint f(x + \sigma y') d\mu(x) g_1(y') dy'$$

On a vu que  $\int e^{i u x} g_\sigma(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u)$ ,  $x \rightarrow t$ ,  $u \rightarrow y'$ ,  $\sigma \rightarrow \frac{1}{\sigma}$

$$g_\sigma(y') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int e^{i y' t} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) dt$$

$$\begin{aligned} E(f(X + \sigma Y)) &= \iiint f(x + y') \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{i y' t} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) dt dy' d\mu(x) \quad z = x + y' \text{ garde } t, x \\ &= \iiint f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{i(z-x)t} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) dt dz d\mu(x) \end{aligned}$$

Par le theoreme de Fubini

$$\left| f(z) e^{i(z-x)t} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \right| \leq \|f\|_{\infty} g_{\frac{1}{\sigma}}(t)$$

$f$  support compact,  $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda \otimes \lambda)$

$$\begin{aligned}
E(f(X + \sigma Y)) &= \int_z \int_t f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{izt} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \left( \int_x e^{-itx} d\mu(x) \right) dt dz \\
&= \int_z \int_t f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{izt} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \phi_\mu(-t) dt dz
\end{aligned}$$

Ainsi, la loi de  $X + \sigma Y$  est déterminée par  $\phi_\mu$ .

Faisons  $\sigma \rightarrow 0$ . Je dis que  $X + \sigma Y \xrightarrow{L} X$ ,  $\sigma \rightarrow 0$  et donc la loi de  $X$  est déterminée par la famille de variable aléatoire  $X + \sigma Y$ ,  $\sigma > 0$  dont les lois sont déterminées par  $\phi_\mu$ .

Je dis que  $X + \sigma Y \xrightarrow{P} X$ . En effet: soit  $\varepsilon > 0$

$$P(|X + \sigma Y - X| > \varepsilon) = P(\sigma|Y| > \varepsilon) = P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = P\left(\bigcap_{\sigma > 0} \left\{|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right\}\right) = P(|Y| = +\infty) = 0$$

$$X + \sigma Y \xrightarrow{P} X \Rightarrow X + \sigma Y \xrightarrow{L} X$$

here picture of all convergences

Prouvons finalement:  $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$

Soit  $x$  un point de continuité de  $F_X$ .

$$P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x) \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) + P(X \leq x + \varepsilon)$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) \forall \varepsilon > 0$$

$$P(X \leq x - \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) + P(X_n \leq x)$$

$$F_X(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x)$$

avec  $F_X(x - \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F_X(x)$  car  $F_X$  continue en  $x$ . □



# CHAPTER 3

## LECTURE 10: LE THÉORÈME LIMITE CENTRAL

### 3.1 Le théorème de Paul Lévy

**THEOREM 3.1 (DE PAUL LÉVY)** — Soit  $X, X_n, n \in \mathbb{N}$  des variables aléatoires réelles et soit  $\phi_X, \phi_{X_n}, n \in \mathbb{N}$  leurs fonctions caractéristiques. Nous avons équivalence entre:

- i)  $X_n \xrightarrow{L} X$
- ii)  $\forall u \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{X_n}(u) = \phi_X(u)$

*Proof* — Sens facile:

- i)  $\Rightarrow$  ii)

$$\phi_{X_n}(u) = E[e^{iuX_n}] = E[\cos(uX_n)] + iE[\sin(uX_n)]$$

Les fonctions  $x \mapsto \cos(ux), \sin(ux)$   $u$  étant fixé sont continues bornées et donc par la définition de la convergence en loi

$$E[\cos(uX_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E[\cos(ux)]$$

$$E[\sin(uX_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E[\sin(ux)]$$

et donc

$$\phi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi_X(u)$$

- ii)  $\Rightarrow$  i)

Nous utilisons la même stratégie que pour prouver l'injectivité de la transformation de Fourier des mesures de probabilités. Nous supposons que  $X, X_n, n \in \mathbb{N}$  sont toutes définies sur un même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , sur lequel est aussi définie une variable aléatoire  $Y$ , indépendante de  $X, X_n, n \in \mathbb{N}$  et de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue à support compact. Nous supposons ii) vraie et nous voulons montrer que  $X_n \xrightarrow{L} X$ .

Soit  $\sigma > 0$  et écrivons

$$E[f(X_n)] - E[f(X)] = E[f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)] + E[f(X_n + \sigma Y)] - E[f(X + \sigma Y)] + E[f(X + \sigma Y) - f(X)]$$

Comme  $f$  est continue à support compact, elle est uniformément continue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R} |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Soit  $\delta$  associé à  $\varepsilon$  comme ci-dessus. Écrivons

$$\begin{aligned} |E(f(X_n) - f(X_n + \sigma Y))| &\leq E(|f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)|) \\ &= \int_{|\sigma Y| \geq \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| dP + \int_{|\sigma Y| < \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| dP \end{aligned}$$

$$\int_{|\sigma Y| \geq \delta} || dP \leq 2\|f\|_\infty \int_{|\sigma Y| \geq \delta} 1 dP = 2\|f\|_\infty P(|\sigma Y| \geq \delta)$$

Je dis que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} P(|\sigma Y| > \delta) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} P\left(|Y| > \frac{\delta}{\sigma}\right) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \exists \sigma_0 \ 2\|f\|_\infty P(|\sigma_0 Y| \geq \delta) &< \varepsilon \\ \int_{|\sigma Y| < \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)| dP &< \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc  $|E[f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)]| < 2\varepsilon$  vraie pour tout  $n!$ . Par le même argument, on a  $|E[f(X + \sigma_0 Y) - f(X)]| < 2\varepsilon$ . Reste le terme du milieu. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \ |E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq 2\varepsilon + |E[f(X_n + \sigma_0 Y) - f(X + \sigma_0 Y)]| + 2\varepsilon$$

Nous utilisons la formule du cours précédent

$$E[f(X_n + \sigma_0 Y)] = \iint_{u,z} f(z) e^{iuz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u) \phi_{X_n}(-u) du dz$$

Posons

$$F_n(u, z) = f(z) e^{iuz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} g_{\frac{1}{\sigma_0}}(u) \phi_{X_n}(-u)$$

$$|F_n(u, z)| \leq |f(z)| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} g_{\frac{1}{\sigma_0}}(u)$$

domination par une fonction qui ne dépend pas de  $n$  et qui est dans  $\mathcal{L}^1(d\lambda(u), d\lambda(z)) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, d\lambda(u), d\lambda(z))$

Par le TCD:

$$\exists N \ \forall n \geq N \ |E[f(X_n + \sigma_0 Y)] - E[f(X + \sigma_0 Y)]| < \varepsilon$$

Alors, pour  $n \geq N$

$$|E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon < 5\varepsilon$$

□

## 3.2 Moments

**PROPOSITION 3.2.1** — Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Soit  $k \geq 1$  et supposons que  $E[|X|^k] < +\infty$ . Alors  $\phi_X$  est  $k$  fois dérivable. Et de plus

$$E[X^k] = i^k \phi_X^{(k)}(0)$$

*Proof* —

$$\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dP_X(x)$$

Faisons le cas où  $k = 1$  :  $E[|X|] < +\infty$ . Il s'agit d'une intégrale à paramètre et on veut donner par rapport à  $u$ . Pose  $F(x, u) = e^{iux}$  On

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, u) = ix e^{iux}$$

$|\frac{\partial F}{\partial u}(x, u)| \leq |x|$  fonction majorante qui est  $P_X$  intégrable et qui ne dépend pas de  $u$ .

Thm de dérivation:  $\phi_X$  dérivable et

$$\phi'_X(u) = \int \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) dx = i \int x e^{iux} dP_X(x)$$

d'où

$$\phi'_X(0) = i \int x dP_X(x) = iE(X)$$

Ce résultat de (re)trouver facilement la suite des moments. □

### 3.3 Exemples

EXAMPLE 3.3.1 —  $X \sim \mathcal{U}([-1, 1])$

$$\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} 1_{[-1,1]} \frac{1}{2} dx = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2iu} = \frac{\sin u}{u} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$$

car

$$\sin u = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{d'où } \phi_X^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n)! = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$E[X^{2n}] = \frac{1}{2n+1}$$

et

$$E[X^{2n}] = \int_{-1}^1 x^{2n} \frac{1}{2} dx$$

EXAMPLE 3.3.2 (GAUSSIENNE) —  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\phi_X(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{u^{2n}}{2^n}$$

d'où

$$\phi_X^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n! 2^n} = (i)^{2n} E[X^{2n}]$$

d'où

$$E[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n! 2^n}$$

### 3.4 Convolution

LEMMA 3.4.1 — Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes. Alors,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u) \phi_Y(u)$$

*Proof* —

$$\phi_{X+Y}(u) = E[e^{iu(X+Y)}] = E[e^{iuX} e^{iuY}] = E[e^{iuX}] E[e^{iuY}] = \phi_X(u) \phi_Y(u)$$

car indépendante. □

**COROLLARY 3.4.2** — Si  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires i.i.d. alors

$$\phi_{X_1+\dots+X_n}(u) = (\phi_{X_1}(u))^n$$

Supposons que  $X$  variable aléatoire une loi de densité  $f$  et  $Y$  une variable aléatoire de densité  $g$  et  $X, Y$  indépendantes. Alors,

$$\phi_{X+Y}(u) = \iint_{x,y} e^{iu(x+y)} f(x)g(y) dx dy$$

Pose  $z = x + y$ , garde  $x$ , remplace  $y$ .

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(u) &= \iint_{x,z} e^{iuz} f(x)g(z-x) dx dz \quad \text{Fubini} \\ &= \int_z \left( \int_x f(x)g(z-x) dx \right) dz = \int e^{iuz} h(z) dz \end{aligned}$$

où

$$h(z) = \int f(x)g(z-x) dx = (f * g)(z)$$

produit de convolution de  $f$  et  $g$ .

Par identification des deux formules, on conclut que  $X + Y$  a une loi de densité  $f * g$ .

**EXAMPLE 3.4.3** —  $g = g_\sigma(x)$

$$f * g_\sigma(z) = \int f(x)g_\sigma(z-x) dx = \int f(z-x)g_\sigma(x) dx$$

Dès que  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{L}^1$ , le produit de convolution  $f * g$  est bien définie et aussi dans  $\mathcal{L}^1(\lambda)$

### 3.5 Le théorème limite central

**THEOREM 3.2 (LIMITE CENTRAL)** — Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d qui admettent un moment d'ordre 2. Posons  $m = E[X_1]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ . Alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

**REMARK 3.5.1** — Attention, il faut absolument centrer les variables aléatoires en soustrayant  $nE[X_1] = nm$ . Par contre, on peut normaliser  $\sqrt{n\text{Var}(X_1)}$ , i.e

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Il s'agit d'un résultat universel. Dès que les variables aléatoires  $(X_n)$  ont un moment d'ordre 2, les fluctuations de  $X_1 + \dots + X_n$  autour de sa moyenne sont décrites par la loi gaussienne.

Le TLC ou TCL est un raffinement de la loi des grands nombres, sous l'hypothèse d'existence d'un moment d'ordre 2.

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = E[X_1] + \frac{R_n}{\sqrt{n}}$$

avec  $R_n$  une variable aléatoire (représentant le reste) qui  $R_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Histoire: Abraham de Moivre (1733). The doctrine of chances.

Pierre Simon de Laplace (1812).

Lindeberg.

Turing 1934.

*Proof* — Posons  $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}}$  et aussi  $\tilde{X}_k = X_k - m$  pour  $1 \leq k \leq n$  et étudions la convergence en loi de  $Y_n$  à l'aide des fonctions caractéristiques.

$$\phi_{Y_n}(u) = E[e^{iuY_n}] = E\left(e^{iu(\frac{\tilde{X}_1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{\tilde{X}_n}{\sqrt{n}})}\right) = E\left(e^{iu\frac{\tilde{X}_1}{\sqrt{n}}}\right) \dots E\left(e^{iu\frac{\tilde{X}_n}{\sqrt{n}}}\right) = \left(\phi_{\tilde{X}_1}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$\phi_{\tilde{X}_1}(u)$  est 2 fois dérivable car  $E[\tilde{X}_1^2] < +\infty$  et donc elle admet un développement limité à l'ordre 2.

$$\begin{aligned}\phi_{\tilde{X}_1}(u) &= \phi_{\tilde{X}_1}(0) + u\phi'_{\tilde{X}_1}(0) + \frac{u^2}{2}\phi''_{\tilde{X}_1}(0) + o(u^2) \\ &= 1 + iE[\tilde{X}_1]u - \frac{u^2}{2}E[\tilde{X}_1^2] + o(u^2)\end{aligned}$$

$$\phi_{\tilde{X}_1}(u) = 1 + 0 - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + o(u^2) \quad \sigma^2 = E[\tilde{X}_1^2]$$

d'où

$$\phi_{\tilde{X}_1}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

d'où

$$\begin{aligned}\phi_{Y_n}(u) &= \left(1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2} + o(1)\right) \rightarrow e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} = \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(u)\end{aligned}$$

Ici on utilise le  $\ln$  complexe

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

□





# CHAPTER 4

## LECTURE 11: PROCESSUS DE POISSON

### 4.1 Introduction

Nous voulons modéliser des événements qui arrivent à des dates précises mais imprévisibles.

**EXAMPLE 4.1.1** — Séismes, désintégration des atomes, pluie, début ou fin d'appel téléphoniques.

À chaque occurrence d'un événement, nous marquons un impact sur l'axe des temps:



Figure 4.1: exemple-laxe-temps-processus-poisson2

Hypothèses:

- i) Les conditions de l'expérience ne changent pas au cours du temps
- ii) Les nombres d'impacts dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

Pour  $t \geq 0$ , nous notons  $N(t)$  le nombre d'impacts dans  $[0, t]$ . Nous avons une famille de v.a.  $(N(t))_{t \geq 0}$  indexée par un paramètre continu: c'est un processus stochastique.

### 4.2 Construction d'un modèle discret

Soit  $n \geq 1$  un entier: Nous subdivisons l'axe réel en intervalles de longueur  $\frac{1}{n}$ :  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ ,  $k \geq 0$

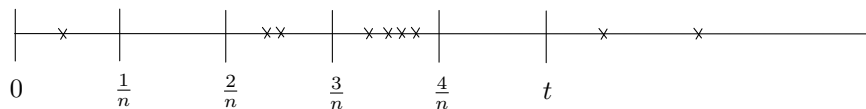


Figure 4.2: subdivision axe processus poisson

Un intervalle  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$  est dit occupé s'il contient au moins un impact et vide sinon. Notons  $p_n$  la probabilité qu'un intervalle  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$  soit occupé. Par l'hyp i),  $p_n$  ne depend pas de l'intervalle.

Pour  $t > 0$ , nous notons  $N_n(t)$  le nombre d'intervalles  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$  qui sont inclus dans  $[0, t]$  ( $\frac{k+1}{n} \leq t$ ) et qui sont occupés. Par l'hypothèse ii), les états vides ou occupés de ces intervalles sont indépendants et  $N_n(t)$  suit la loi binomiale  $B(\lfloor nt \rfloor, p_n)$

Étudions la limite en loi de  $N_n(t)$  par exemple à l'aide des fonctions caractéristiques:

$$\phi_{N_n(t)}(u) = E(e^{iuN_n(t)})$$

Hypothèse:  $p_n \rightarrow 0$ , sinon le modèle explose

$$\begin{aligned}\phi_{N_n(t)}(u) &= (1 - p_n + p_n e^{iu})^{\lfloor nt \rfloor} \\ &= e^{\lfloor nt \rfloor \ln(1 + p_n(e^{iu} - 1))} \\ &= e^{\lfloor nt \rfloor (p_n(e^{iu} - 1) + o(p_n))} \\ &= e^{\lfloor nt \rfloor p_n(e^{iu} - 1) + o(np_n)}\end{aligned}$$

Supposons  $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{N_n(t)}(u) = e^{\lambda(e^{iu} - 1)}$$

et donc

$$N_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

**REMARK 4.2.1** —  $x \sim \mathcal{P}(\lambda)$  si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et

$$\forall k \in \mathbb{N} P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E[X] = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda \quad \phi_X(u) = e^{\lambda(e^{iu} - 1)}$$

### 4.3 Instants de saut

Nous avons montré que, à  $t$  fixé,  $N_n(t) \rightarrow \mathcal{P}(\lambda t)$ , mais en fait la fonction  $t \mapsto N_n(t)$  est une fonction aléatoire nulle en 0, croissante, d'accroissements 0 ou 1.

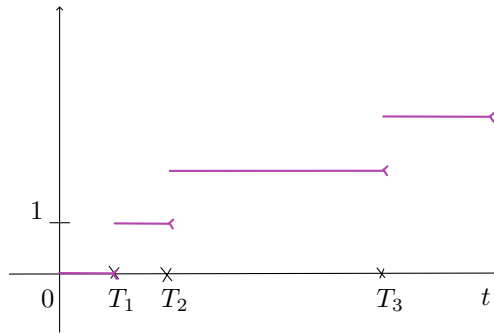


Figure 4.3: instants-de-sauts

La loi de la fonction aléatoire  $t \mapsto N_n(t)$  converge-t-elle quand  $n \rightarrow \infty$ ?

Nous définissons les instants de sauts de  $N_n(t)$ :

$$\forall k \geq 1 T_k^n = \inf \{t \geq 0 : N_n(t) = k\}$$

la fonction  $N_n(t)$  est complètement déterminée par ses instants de saut: en effet

$$N_n(t) = \sum_k k 1_{[T_k^n, T_{k+1}^n[}(t)$$

Examinons la convergence des instants de saut  $T_k^n$  et commençons par  $T_1^n$ . Soit  $i \geq 0$ , regardons

$$P(T_1^n > \frac{i}{n}) = P([0, \frac{1}{n}[, \dots, [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[ \text{ vide})$$

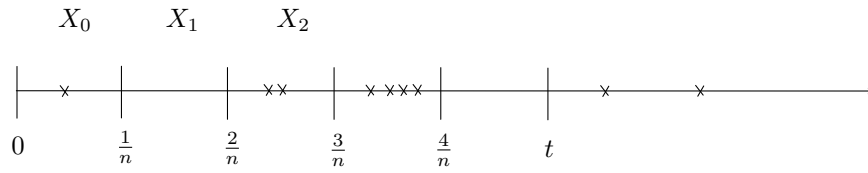


Figure 4.4: introduisons-suite-de-vas-convergence-sauts

Nous introduisons une suite de variables aléatoires  $X_k$ ,  $k \geq 0$  tq:

$$X_k = \begin{cases} 0 & \text{si l'intervalle } [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[ \text{ vide} \\ 1 & \text{si l'intervalle } [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[ \text{ occupé} \end{cases}$$

$$P(T_1^n > \frac{i}{n}) = P(X_0 = 0, \dots, X_{i-1} = 0) = (1 - p_n)^i$$

d'où

$$\forall t > 0 \quad P(T_1^n > t) = (1 - p_n)^{\lfloor nt \rfloor} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t}$$

comme  $(1 - p_n)^{\lfloor nt \rfloor} = e^{\lfloor nt \rfloor \ln(1 - p_n)}$  et  $np_n \rightarrow \lambda$  et  $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ , d'où

$$\forall t \quad F_{T_1^n}(t) \rightarrow 1 - e^{-\lambda t}$$

d'où

$$T_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Exp}(\lambda)$$

**REMARK 4.3.1** — Une variable aléatoire  $X$  suit la loi  $\text{Exp}(\lambda)$  si sa loi est de densité

$$1_{\mathbb{R}^+}(x) \lambda e^{-\lambda x}$$

et alors

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

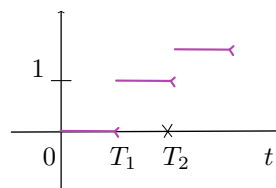


Figure 4.5: sauts-loi-exp

Je dis que  $T_2^n - T_1^n$  est indépendant de  $T_1^n$  et il a même loi:

Vérifions: soit  $i, j \geq 1$  et regardons

$$\begin{aligned} P(T_1^n = \frac{i}{n}, T_2^n - T_1^n = \frac{j}{n}) &= P(X_0 = 0, X_1 = 0, \dots, X_{i-1} = 0, X_i = 1, X_{i+1} = 0, \dots, X_{i+j-1} = 0, X_{i+j} = 1) \\ &= (1 - p_n)^i p_n (1 - p_n)^j p_n^j \end{aligned}$$

d'où le résultat

$$= P(T_1^n = \frac{i}{n}) P(T_2^n - T_1^n = \frac{j}{n})$$

aussi

$$(T_1^n, T_2^n - T_1^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Exp}(\lambda) \otimes \text{Exp}(\lambda)$$

deux lois exponentielles indépendantes.

Par récurrence, on montre que

$$(T_1^n, T_2^n - T_1^n, \dots, T_k^n - T_{k-1}^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (\text{Exp}(\lambda))^{\otimes k}$$

## 4.4 Le processus de Poisson

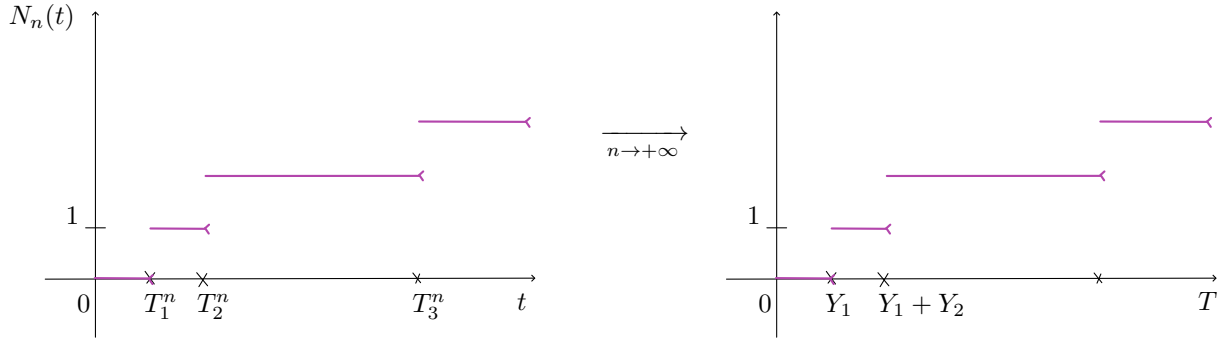


Figure 4.6: nnt-de-t

Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite i.i.d.  $\text{Exp}(\alpha)$ . Posons

$$\forall n \geq 1 \quad S_n = Y_1 + \dots + Y_n$$

Définissons

$$\forall t \geq 0 \quad N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$$

Alors  $(N(t))_{t \geq 0}$  est le processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . Pour chaque  $t$ ,  $N(t)$  est une variable aléatoire  $\mathcal{P}(\lambda t)$ , mais nous avons construit un continuum de variables aléatoires  $(N(t), t \geq 0)$  sur le même espace de probas !

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ p.s.}$$

$N(t)$  est l'unique indice tq  $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$

## 4.5 La loi exponentielle

La loi qui régit l'intervalle entre 2 impacts successifs est la loi  $\text{Exp}(\lambda)$ . Elle surgit comme limite de lois géométriques renormalisées ?

Si  $X \sim \text{Geom}(\frac{\lambda}{n})$ ,

$$\frac{1}{n} X \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Exp}(\lambda)$$

Ces 2 lois possèdent une propriété remarquable, l'absence de mémoire ! i.e

$$\forall s, t > 0 \quad P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t)$$

La loi du temps résiduel à attendre sachant qu'on a déjà attendu  $s$  est la même que la loi du temps d'attente total.

Elles sont utilisées pour modéliser des phénomènes qui ne présentent pas de vieillissement:

- temps de vie d'un atome
- durée d'un appel téléphonique incohérent

## 4.6 Applications

Carte de Londres. 537 impacts. Quadrillage  $0,25 \text{ km}^2 \rightarrow 576$  carrés donc 0,9323 impacts/carré

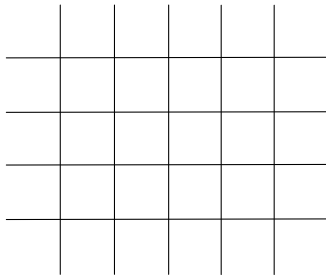


Figure 4.7: carte-de-londres

$k$ impacts	0	1	2	3	4	5
relevés	229	211	93	35	7	1
$576\mathcal{P}(0,9323)$	226,74	211,39	98,54	30,62	7,14	1,57

Autobus: Les arrivées de bus à un arrêt sont modélisées par un processus de  $\mathcal{P}(\alpha)$ , le temps moyen entre 2 bus est  $\frac{1}{\alpha}$ . J'arrive à l'instant  $t$ . quel sera mon temps d'attente ?

1<sup>er</sup> raisonnement: Vu l'absence de memoire de la loi  $\text{Exp}(\alpha)$ , mon temps d'attente suit une loi  $\text{Exp}(\alpha)$  donc en moyenne  $\frac{1}{\alpha}$ .

2<sup>eme</sup> raisonnement: j'arrive au hasard entre 2 bus, par symétrie, mon temps moyen d'attente est la moitié de la longueur typique de  $s$  intervalles  $\frac{1}{2\alpha}$

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n \quad N(t)$$

$S_n$  instants d'arrivées des bus. Soit  $K$  tel que

$$S_{K-1} < t \leq S_{K-1} + Y_K$$

Mon temps d'attente est  $S_K - t$  et temps moyen  $E[S_K - t]$  mais cet intervalle  $Y_K$  ne suit pas la loi exponentielle et donc (pas  $\frac{1}{2\alpha}$  mais  $\frac{2}{2\alpha}$ )



# CHAPTER 5

## LECTURE 12: PERCOLATION

### 5.1 Le problème

Immergons une pierre spongieuse dans l'eau. Elle contient plein canaux

$$\text{molécule d'eau} \ll \text{diamètre canal} \ll \text{pierre}$$

Le centre de la pierre sera-t-il mouillé?

En 1957, Broadbent et Hammersley inventèrent le modèle math de la percolation, pour étudier les milieux poreux aléatoires.

### 5.2 Le réseau carré

**DEFINITION 5.2.1** — Un graphe est un couple  $(V, E)$  où

- $V$  est un ensemble de points: les sommets
- $E$  un ensemble des paires de points de  $V$ : les arrêtes (edges)

**EXAMPLE 5.2.2** —  $V = \{1, 2, 3\}$ ,  $E = \{\{2, 3\}\}$

Nous munissons  $\mathbb{Z}^2$  d'une structure de graphe. L'ensemble  $\mathbb{E}^2$  des arrêtes est constitué des paires  $\{x, y\}$  où  $x, y \in \mathbb{Z}^2$  sont plus proches voisins, i.e.  $|x - y|_2 = 1$

**DEFINITION 5.2.3** — Le réseau carré est le graphe  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ .

**DEFINITION 5.2.4** — Un chemin est une suite de sommets  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , 2 à 2 distincts tels que: pour tout  $i \geq 0$ ,  $\{x_i, x_{i+1}\}$  est une arrête. Si le chemin s'arrête au sommet  $x_n$ , nous disons qu'il relie  $x_0$  à  $x_n$  et qu'il est fini de longueur  $n$ . S'il est infini, nous disons qu'il relie  $x_0$  à l'infini.

**DEFINITION 5.2.5** — Un circuit est un chemin  $x_0, \dots, x_n$  tels que  $x_0$  et  $x_n$  sont voisins. Un tel circuit a pour longueur  $n + 1$ .

### 5.3 L'espace de probabilité

Les arrêtes du graphe jouent le rôle des canaux. Nous allons les ouvrir ou les fermer au hasard, indépendamment, avec proba  $p \in ]0, 1[$ .

Ouvrir - l'eau peut passer, fermer - bloquer.



Nous prenons comme space de configurations

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$$

Un élément  $\omega$  de  $\Omega$  est une fonction de  $\mathbb{E}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ . L'arrête  $e \in \mathbb{E}^2$  est ouverte (resp. fermé) dans la configuration  $\omega$  si  $\omega(e) = 1$  (resp. 0).

Nous munissons  $\Omega$  de la tribu  $\mathcal{F}$  cylindrique, engendré par les événements de la forme:

$$\{\omega \in \Omega : \omega(e_1) = \varepsilon_1, \dots, \omega(e_n) = \varepsilon_n\}, n \geq 1, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{E}^2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$$

A-t-on que  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ? Nous munissons finalement l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$  de la proba

$$P_p = \bigoplus_{e \in \mathbb{E}^2} ((1-p)\delta_{\omega(e)=0} + p\delta_{\omega(e)=1})$$

produit tensoriel des Bernoulli( $p$ ).

## 5.4 Les clusters ouverts

Nous tirons au hasard l'état des arrêtes. Nous enlevons les arrêtes fermés.

Nous obtenons ainsi un graphe aléatoire. Précisément, soit  $\omega$  une configuration. Nous considérons le graphe de sommets les points de  $\mathbb{Z}^2$ , et d'arêtes les arrêtes ouvertes dans  $\omega$  uniquement.

Le but de la percolation est de comprendre la géométrie de ce graphe aléatoire.

Si  $x \in \mathbb{Z}^2$ , la composante connexe de  $x$  dans ce graphe est appelé le cluster ouvert de  $x$ , dans  $\omega$  et est noté  $C(x, \omega)$ .

Si  $x, y \in \mathbb{Z}^2$ , on note  $\{x \leftrightarrow y\}$  l'événement: il existe dans  $\omega$  un chemin qui relie  $x$  à  $y$  et dont toutes les arêtes sont ouvertes. Alors

$$C(x) = \{y \in \mathbb{Z}^2 : y \leftrightarrow x\}$$

Ainsi  $C(x) = C(x, \omega)$  est un ensemble aléatoire avec  $|C(x, \omega)|$  cardinal.

## 5.5 La probabilité de percolation

La quantité fondamentale pour analyser le modèle est

$$\Theta(p) = P_p(|C(0)| = \infty) = P_p(\leftrightarrow \infty)$$

$$\Theta : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

- $\Theta(0) = 0$
- $\Theta(1) = 1$
- $\Theta$  croissante

Pour cela on utilise un couplage; i.e, on construit un espace  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2, P)$  tel que sous  $P$  la loi de la 1<sup>ère</sup> marginale  $\omega_1$  est  $p_1$ , 2<sup>nde</sup> marginale  $\omega_2$  et tel que toutes les arêtes ouvertes dans  $\omega_1$  le sont aussi dans  $\omega_2$ . Si on a pu faire cela, alors

$$\begin{aligned} \Theta(p_1) &= P_{p_1}(0 \leftrightarrow \infty) = P(0 \leftrightarrow \infty \text{ dans } \omega_1) \\ &\leq P(0 \leftrightarrow \infty \text{ dans } \omega_2) = P_{p_2}(0 \leftrightarrow \infty) = \Theta(p_2) \end{aligned}$$

$p_1 < p_2$  et  $x_1 \leq x_2$

On prends  $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$  et on pose  $X_\phi = 1_{U \leq p}$ ,  $P(X_p = 1) = p$ , alors  $0 \leq p \leq 1$  et  $X_{p_1} \leq X_{p_2}$ .

## 5.6 La transition de phase

Le modèle de percolation est fascinant car c'est le modèle le plus simple qui présente une transition de phase.

**THEOREM 5.1** — Il existe une valeur critique  $p_c$  strictement entre 0 et 1 tel que:

$$\Theta(p) = 0 \text{ si } p < p_c \text{ et } \Theta(p) > 0 \text{ si } p > p_c$$

*Proof* — Montrons que  $p_c > 0$ ,

$$P_c = \sup\{p \in [0, 1] : \Theta(p) = 0\}$$

Soit  $n \geq 1$ ,  $\Theta(p) = P_p(0 \leftrightarrow \infty) \leq P_p$ , (il existe chemin de longueur  $n$  issu de 0 dont les arêtes sont ouvertes).

$$\Theta(p) = P_p \left( \bigcup_{x_0=0, \dots, x_n \text{ chemin}} \{ \text{les arêtes de } x_0, \dots, x_n \text{ sont ouvertes} \} \right)$$

$$\begin{aligned} \Theta(p) &\leq \sum_{x_0=0, \dots, x_n} P(\text{les arêtes de } x_0, \dots, x_n \text{ sont ouvertes}) \\ &= p^n |\{\text{chemins } x_0, \dots, x_n \text{ issus de } 0\}| \\ &= p^n |\{\text{chemins de longueur } n \text{ issus de } 0\}| \leq p^n \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 4 \cdot 3^{n-1} \leq 4p^n 3^{n-1} \end{aligned}$$

donc  $\Theta(p) = 0$ .

$p_c < 1$ . Dualité, le réseau dual de  $\mathbb{Z}^2$  est  $\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \mathbb{Z}^{2*}$ . À une arête du réseau  $\mathbb{Z}^2$  nous associons l'arête  $e^*$  de  $\mathbb{Z}^{2*}$  tel que  $e$  et  $e^*$  se coupent orthogonalement en leur milieu. Si  $e$  est ouverte dans  $\omega$ , nous déclarons  $e^*$  ouverte dans  $\omega^*$ . Le modèle est auto-dual.

$\Theta(p) > 0$  pour  $p$  proche de 1.

$$1 - \Theta(p) = 1 - P_p(|C(0)| = \infty) = P_p(|C(0)| < \infty)$$

Fait topologique: Si  $C(0)$  est fini, alors il existe un circuit dual d'arêtes fermées qui entoure 0.

$$\begin{aligned} 1 - \Theta(p) &\leq P_p(\exists \text{ circuit dual fermé entourant } 0) \\ &= P_p \left( \bigcup_{\gamma=x_0^* \dots x_n^* \text{ circuit dual entourant } 0} \{ \text{les arêtes de } \gamma \text{ sont fermées} \} \right) \\ &= P_p \left( \bigcup_{n \geq 4} \bigcup_{\exists \gamma \text{ dual fermé longueur } n} \{ \text{les arêtes de } \gamma \text{ sont fermées} \} \right) \leq \sum_{n \geq 4} \sum_{\gamma} P(\text{les arêtes de } \gamma \text{ sont fermées}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \Theta(p) &\leq \sum_{n \geq 4} \sum_{\gamma} (1-p)^n = \sum_{n \geq 4} (1-p)^n |\{\text{circuits fermés de longueur } n \text{ entourant } 0\}| \\ &\leq \sum_{n \geq 4} (1-p)^n n 4 3^{n-1} \xrightarrow{p \rightarrow 1} \\ &\leq (1-p)^4 \sum \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{p \rightarrow 1} \Theta(p) = 1$$

et donc  $p_c < 1$ .

Allure de  $\Theta$

Kesten 1980,  $p_c = \frac{1}{2}$ ,  $d \geq 3$

□