

# Aide-Mémoire : Probabilités (MDD303)

Basé sur le polycopié de cours

1

**Espace de probabilité**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  :

- $\Omega$  : Ensemble des résultats possibles.
- $\mathcal{F}$  : Tribu ( $\sigma$ -algèbre). Contient  $\Omega$ , stable par complémentaire et union dénombrable.
- $\mathbb{P}$  : Mesure de probabilité ( $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,  $\sigma$ -additive).

**Tribu Borélienne**  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  : Plus petite tribu contenant les intervalles ouverts/fermés de  $\mathbb{R}$ .

**Variable Aléatoire (v.a.)** : Application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable (i.e.,  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ).

**Loi d'une v.a.**  $\mathbb{P}_X$  : Mesure sur  $\mathbb{R}$  définie par  $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$ .

## 1.1 Espérance et Variance

**Espérance** :  $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$ .

- Si  $X \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[X] = \sup\{\mathbb{E}[\delta] : \delta \text{ étagée}, 0 \leq \delta \leq X\}$ .
- Cas général :  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$ . Intégrable si  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ .

**Variance** :  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ .

2

**Mesure de Lebesgue**  $(\lambda)$  : Unique mesure sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  telle que  $\lambda([a, b]) = b - a$ .

**Loi à densité** : Il existe  $f \geq 0$  borélienne telle que :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

Condition :  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ .

**Formule de Transfert** (Fondamentale) :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\Omega} g(X(\omega)) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{P}_X(x)$$

Si densité  $f$  :  $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$

**Lois usuelles** :

- **Uniforme**  $\mathcal{U}([a, b])$  :  $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$ .
- **Exponentielle**  $\mathcal{E}(\alpha)$  :  $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ .
- **Normale**  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  :  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ .

3

**Événements** :  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . **Variables** :  $X_1, \dots, X_n$  sont indép. si  $\forall B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  :

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i)$$

**Propriétés** :

- $X, Y$  indép  $\implies \mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$ .
- $X, Y$  indép et intégrables  $\implies \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ .
- $X, Y$  indép  $\implies \text{Cov}(X, Y) = 0$  (Réciproque fausse).
- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$  (si indép).

**Lemme des coalitions** : Si  $X_i$  indép, les fonctions de paquets disjoints  $(f(X_1, X_2), g(X_3))$  sont indép.

4

**Modes de convergence** :

1. **Presque sûre (p.s.)** :  $\mathbb{P}(\lim X_n = X) = 1$ .
2. **En moyenne** ( $L^r$ ) :  $\lim \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = 0$ .
3. **En probabilité** ( $\mathbb{P}$ ) :  $\forall \epsilon > 0, \lim \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$ .

**Hiérarchie** :

$$L^r \implies \mathbb{P} \text{ et } p.s. \implies \mathbb{P}$$

(p.s. n'implique pas  $L^r$  et vice-versa).

**Lemmes de Borel-Cantelli** (Évènement  $A_n$  i.s. = infiniement souvent) :

1.  $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 0$ .
2.  $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$  ET  $(A_n)$  **indépendants**  $\implies \mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 1$ .

5

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  avec  $X_i$  i.i.d. **Critère de récurrence** : La marche repasse par 0 une infinité de fois p.s. ssi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$$

**Résultats** (Marche symétrique sur  $\mathbb{Z}^d$ ) :

- $d = 1$  : Récurrence ( $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ ).
- $d = 2$  : Récurrence ( $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\pi n}$ ).
- $d \geq 3$  : Transiente ( $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim n^{-d/2}$ ).

6

**Tribu asymptotique (de queue)** :  $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ .

**Loi du 0-1 de Kolmogorov** : Si  $(X_n)$  indépendants, tout événement  $A \in \mathcal{T}$  vérifie  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ . *Exemple : convergence d'une série aléatoire.*

**Inégalité de Kolmogorov** : Pour  $X_i$  centrées indép. :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \text{Var}(S_n)$$

7

**Inégalités** :

- Markov ( $X \geq 0$ ) :  $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$ .
- Bienaymé-Chebyshev :  $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}$ .

Soit  $(X_n)$  i.i.d avec  $\mathbb{E}[X_1] = m$ .

**Loi Faible (WLLN)**

Si moment d'ordre 2 (ou 1) existe :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} m$$

## Loi Forte (SLLN)

Si  $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$  :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} m$$

## TCL

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Interprétation : La somme de v.a. i.i.d. centrées réduites converge vers une Gaussienne standard.

8

**Définition**  $(X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X)$  : Pour toute fonction  $f$  continue bornée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

**Fonction de Répartition** :  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ . Caractérise la loi.  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$  en tout point de continuité de  $F_X$ .

9

**Définition** :  $\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} d\mathbb{P}_X(x)$ . **Propriétés** :

- $\phi_X(0) = 1$ ,  $|\phi_X(u)| \leq 1$ , continue.
- **Injectivité** :  $\phi_X$  caractérise la loi de  $X$ .
- **Indépendance** :  $X, Y$  indép  $\implies \phi_{X+Y} = \phi_X \cdot \phi_Y$ .
- **Moments** :  $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$ .
- **Affine** :  $\phi_{aX+b}(u) = e^{iub} \phi_X(au)$ .

**Théorème de Paul Lévy** :  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall u, \phi_{X_n}(u) \rightarrow \phi_X(u)$ .

Tableau des f.c. usuelles :

Loi	$\phi_X(u)$
$Ber(p)$	$1 - p + pe^{iu}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\exp(\lambda(e^{iu} - 1))$
$\mathcal{E}(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\alpha - iu}$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$e^{i um - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2}$
$\mathcal{U}([a, b])$	$\frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$

10

Soit  $(X_n)$  i.i.d avec  $\mathbb{E}[X_i] = m$  et  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ .

11

Modélise des événements rares/aléatoires (sauts). **Définition** : Processus de comptage  $(N(t))_{t \geq 0}$ .

- Accroissements indépendants et stationnaires.
- $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ .

**Instants de saut**  $T_n$  :

- Temps inter-arrivées  $Y_i = T_i - T_{i-1}$  sont i.i.d  $\sim \mathcal{E}(\lambda)$ .
- Temps d'arrivée  $T_n = \sum Y_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ .

12

Modèle de milieux poreux. Chaque arête est ouverte avec proba  $p$ , fermée avec  $1 - p$ . **Cluster ouvert**  $C(0)$  : composante connexe de 0. **Probabilité de percolation** :  $\Theta(p) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty)$ .

**Transition de phase** : Il existe  $p_c \in (0, 1)$  tel que :

- $p < p_c \implies \Theta(p) = 0$  (pas de percolation).
- $p > p_c \implies \Theta(p) > 0$  (percolation).

**Théorème (Kesten)** : Pour  $\mathbb{Z}^2$ ,  $p_c = 1/2$ .