

CheatSheet de Probabilité Continue

Yehor Korotenko

November 4, 2025

1 Mathématiques Générales

1.1 Factoriel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

1.2 Binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propriétés utiles:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = n$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Les approximations:

$$\binom{n}{n/2} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$$

Pour k fixé et n grand:

$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^n}{k!}$$

1.3 Peut être utile

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

2 Les loi à densité

2.1 Normale / Gaussienne

La sommes du grand nombre des v.a.s tend vers la v.a qui suit la loi normale.

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$f_Z(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Cette loi s'appelle loi normale standarde.

Soit $X = \mu Z + \sigma$, alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et

$$f_X(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'esperance et la variance sont:

$$E[X] = \mu \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

Propriétés utiles. Les propriétés suivantes s'appliquent à la loi normale standarde.

1. Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $-Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$
2. Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\Phi(z)$ est son CDF, alors

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

2.2 Loi exponentielle

Cette loi est un équivalent continue de la loi géométrique discrète. La v.a qui suit cette loi dit combien de temps il reste d'attendre avant que le premier succès arrive.

Soit $X \sim Exp(\lambda)$, alors

$$f_X(z) = \lambda e^{-\lambda z}$$

L'espérance et la variance sont:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Propriétés utiles.

- Si $X \sim Exp(\lambda)$, alors

$$P(X \geq s + t | X \geq s) = P(X \geq t)$$

Intuition: Une ampoule de durée de vie exponentielle : même si elle a déjà duré 3 heures, la probabilité qu'elle tienne encore 2 heures est la même que pour une ampoule toute neuve.

2.3 Loi Beta

Probabilité des probabilités. On utilise cette loi quand on veut estimer ou calculer le paramètre d'une probabilité en fonctions de nombres de succès et échecs.

Si $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ alors:

$$f_X(z) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1}$$

où

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

L'espérance et variance sont:

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

2.4 Loi Gamma

Si la loi exponentielle dit combien de temps il faut attendre avant que le succès arrive, alors la loi Gamma dit combien de temps il faut attendre avant que le $k^{\text{ième}}$ succès arrive.

Alors si $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ (notons aussi $r = \alpha$ et $\lambda = \beta$), alors:

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}$$

$$\text{où } \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \text{appelée une fonction Gamma}$$

dans le cas où $\alpha = r \in \mathbb{N}$:

$$f(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^r t^{r-1}}{(r-1)!}$$

L'espérance et variance sont:

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta} \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$