

# CheatSheet d'optimisation

Yehor Korotenko

December 12, 2025

## Abstract

Ce cheatsheet donne les énoncés des théorèmes et propositions important(e)s du cours d'optimisation de L2DD Info-Maths à Paris-Saclay.

**Théorème 3.1.6** (THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $g_1, \dots, g_m : U \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ . Soit  $\tilde{\mathbf{x}} \in U$  tel que  $g_i(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ . Si la famille de vecteurs

$$\nabla g_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^n$$

est libre, alors – **quitte à permuter les coordonnées** – il existe un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$  contenant  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})$ , un ouvert  $W \subset \mathbb{R}^m$  contenant  $(\tilde{x}_{n-m+1}, \dots, \tilde{x}_n)$  et une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$

$$\varphi : V \rightarrow W$$

tels que pour tout  $x \in V \times W$  on ait

$$g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0 \iff (x_{n-m+1}, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-m}).$$

**Proposition 3.1.8.** *Sous les hypothèses du Théorème 3.1.6, on a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m}) = -\left(D_{\tilde{x}, 2}g\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}})\right),$$

où  $g = (g_1, \dots, g_m)$ .

**Théorème 3.1.9** (THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES) Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , soient  $g_1, \dots, g_m : U \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions également de classe  $\mathcal{C}^1$ . Supposons que la restriction de  $f$  à l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in U \mid g_i(x) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m\}$$

admet un extremum local en un point  $\bar{x}$ . Si la famille de vecteurs

$$\nabla g_1(\bar{x}), \dots, \nabla g_m(\bar{x})$$

est libre, alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tels que

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}).$$