# Notes de Probas

Yehor Korotenko

November 14, 2025

# Contents

**1 Lecture 8: La convergence en loi** **3**

1.1 Definition . . . . . 3

1.2 La fonction de répartition . . . . . 4

1.3 Exemples . . . . . 4

1.4 La bijection . . . . . 6

1.4.1 Construction d'une loi singulière . . . . . 7

1.5 Traduction sur les fonctions de répartition . . . . . 7

**2 Lecture 9: Fonctions Caractéristiques** **11**

2.1 Définition . . . . . 11

2.2 Exemples . . . . . 11

2.2.1 Bernoulli . . . . . 11

2.2.2 Poisson . . . . . 12

2.2.3 Exponentielle . . . . . 12

2.3 Propriétés . . . . . 12

2.4 La loi gaussienne . . . . . 12

2.5 Théorème d'injectivité . . . . . 14

# CHAPTER 1

## Lecture 8: La convergence en loi

La loi, c'est ce qu'il y a de plus important!

### 1.1 Definition

Il existe des suites de variables qui ne converge ni presque surement, ni en probabilité, ni dans $L^1$, mais dont la loi converge, même constante !

Example 1.1.1 — $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

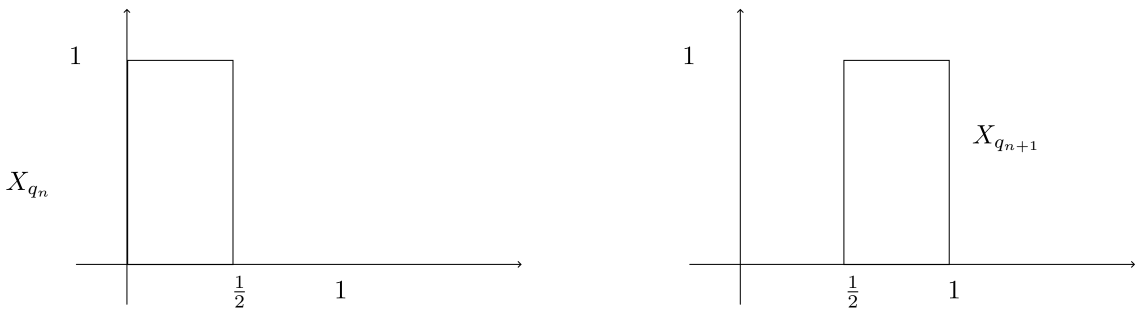


Figure 1.1: example-cv-loi

Pour tout $n$, la loi de $X_n$ est la loi $Bernoulli(\frac{1}{2})$

$$\forall n, P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

et donc $P_{X_n} = Ber(\frac{1}{2})$ ne dépend pas de $n$!

Definition 1.1.2 — Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire $X$, ce que l'on note $X_n \xrightarrow{L} X$, ssi:

- pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

Remarquons que $E[f(X_n)]$ ne dépend que de la loi de $X_n$, i.e.:

$$E[f(X_n)] = \int_\Omega f(X_n)\, dP \underset{\text{transfert}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\underbrace{P_{X_n}(x)}_{\text{loi de } X_n}$$

Ainsi, la convergence en loi s'applique même dans des situations où les variables aléatoires $X_n$ ne sont pas définies sur le même espace de probas $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, i.e. si:

$$X_n : (\Omega_n, \mathbb{F}_n, P_n) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

où $(\Omega_n, \mathbb{F}_n, P_n)$ n'ont aucun lien a priori. Ceci distingue fondamentalement la convergence en loi, des autres modes de convergence.

## 1.2 La fonction de répartition

Soit $X$ une variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Definition 1.2.1 — La fonction de répartition de $X$, notée $F_X$, est la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$$

On a $F_X(x) = P_X(]-\infty, x])$. Comme les intervalles $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ engendrent les boréliens et forment une famille stable par l'intersection finie, par unicité de l'extension, la loi $P_X$ est détérminée par $F_X$.

Corollary 1.2.2 — La fonction de répartition $F_X$ détérmine la loi $P_X$ de $X$.

Proposition 1.2.3 — Une fonction de répartition $F$ vérifie:

1. $F$ est croissante de $R$ dans $[0, 1]$.
2. $F$ est continue à droite.
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

*Proof* — 1. évident

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, Regardons

$$\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} F_X(x) = \lim_{x\to x_0,\, x>x_0} P_X(]-\infty, x]) \underset{\substack{\text{continuité}\\ \text{monotone de } P_X}}{=} P_X\left(\bigcap_{\substack{x>x_0\\ x\in\mathbb{Q}}} ]-\infty, x]\right) = P_X(]-\infty, x_0]) = F_X(x_0)$$

3. 
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{x\to-\infty, x\in\mathbb{Z}} P_X(]-\infty, x]) = P_X(\bigcap_{x\in\mathbb{Z}} ]-\infty, x]) = P_X(\emptyset) = 0$$

□

Note — Dans certains livres $F_X$ est définie par $F_X(x) = P(X < x)$

## 1.3 Exemples

Example 1.3.1 — $X \sim Ber(p)$, $P(X=0) = 1-p$, $F_X(0) = P(X \leq 0) = 1-p$

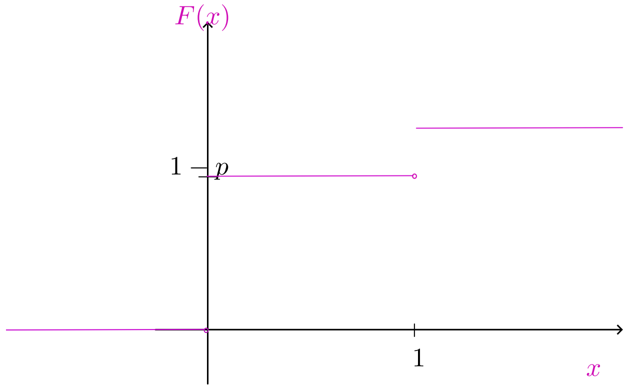


Figure 1.2: ex-fonction-repartition

Example 1.3.2 — $X \sim Unif(\{1, \ldots, n\})$

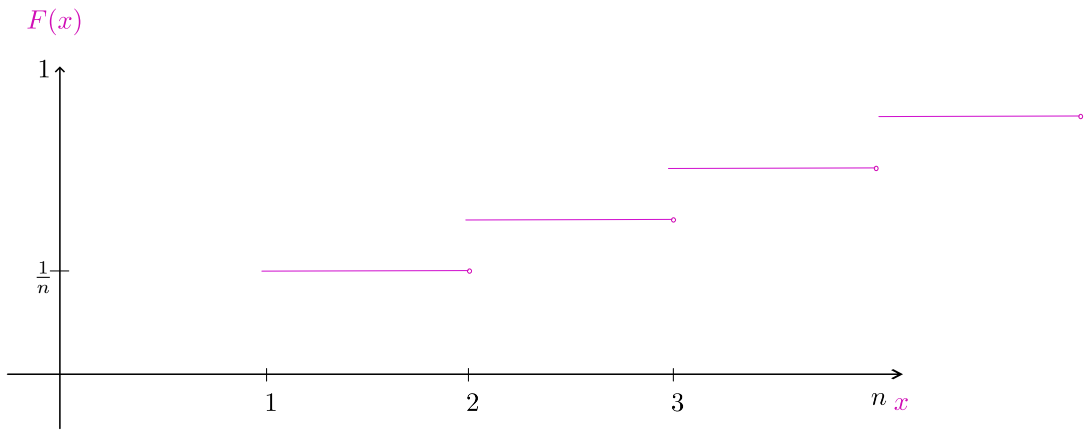


Figure 1.3: ex-fonction-repartition-unif

Example 1.3.3 — $X \sim Unif([0,1])$

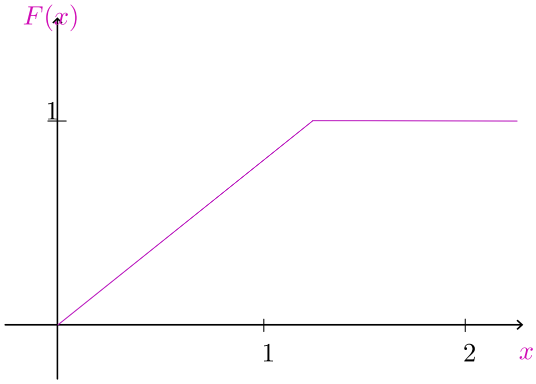


Figure 1.4: ex-fonction-repartition-unif-0-1

Example 1.3.4 — $F_X \sim Exp(\alpha)$, $F_X(x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t}\, dt = 1 - e^{-\alpha t}$, $x \geq 0$

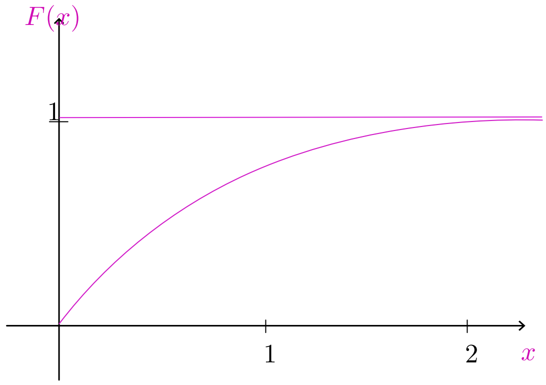


Figure 1.5: ex-fonction-repartition-exp

Plus généralement, si la loi de $X$ a une densité $f$, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

## 1.4 La bijection

Si $\mu$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sa fonction de répartition $F_\mu$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_\mu(x) = \mu(] - \infty, x])$$

Cohérence: si $X$ est une variable aléatoire

$$F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = F_{P_X}(x)$$

EXAMPLE 1.4.1 — La loi normale: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dt = erf(x)$$

$$1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dt = erfc(x)$$

Notons $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ (les fonction qui vérifie la proposition 1.2.3)

THEOREM 1.1 — L'application $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \longmapsto F_\mu \in \mathcal{R}$ est une bijection!

### 1.4.1 Construction d'une loi singulière

i.e. la loi $\mu$ sans atomes: $\forall x, \mu(\{x\}) = 0$ et telle que

$$\exists c,\ \mu(c) = 1 \qquad \underset{\text{Lebesgue}}{\lambda(c)} = 0$$

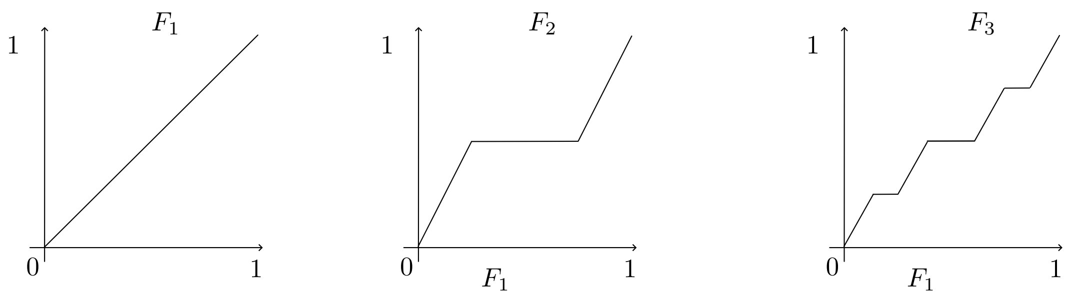


Figure 1.6: loi-singuliere

Puis, $(F_n)$. $\mu$ associée à $F_\infty$

Montrer que $F_n \longrightarrow F_\infty$ sur $[0,1]$ uniformément.

## 1.5 Traduction sur les fonctions de répartition

Comme la convergence en loi ne porte que sur les lois des variables aléatoires, elle doit pouvoir s'exprimer via les fonctions de répartitions.

**Theorem 1.2** — Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X$ des variables aléatoires réélles et notons $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $F_X$ les fonctions de répartitions associées. Alors, on a équivalence:

1. La suite $(X_n)$ converge en loi vers $X$
2. En tout point $x$ de $\mathbb{R}$ où $F_X$ est continue, la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F_X(x)$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

*Proof* —

- 1) $\Rightarrow$ 2): Je prends $f(x) = 1_{]-\infty,x]}$, alors

$$E\left(f(X_n)\right) = P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x)$$

avec $E(f(X_n)) \to E(f(X))$ et $F_{X_n} \to F_X(x)$. Par contre, problème: $f$ n'est pas continue en $x$.

**Vraie preuve:** Soit $x_0$ un point où $F_X$ est continue. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x_0) = F_X(x_0)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons les fonctions $f$, $g$ suivantes.

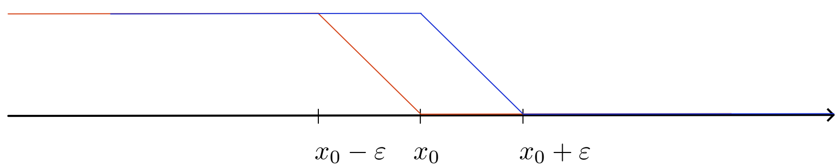


Figure 1.7: fonctions-f-et-g

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1_{]-\infty,x_0-\varepsilon]}(x) \leq f(x) \leq 1_{]-\infty,x_0]}(x) \leq g(x) \leq 1_{]-\infty,x_0+\varepsilon]}(x)$$

et $f$ et $g$ sont continues, donc

$$E(f(X_n)) \to E(f(X)) \qquad F(g(X_n)) \to E(g(X))$$

Mettons $X_n$ à la place de $x$ dans les inégalités et prenons l'esperance :

$$E(f(X_n)) \leq F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X_n)) \quad \forall n$$

avec $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(f(X))$

$$F_X(x_0-\varepsilon) \leq \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x_0) \leq \limsup_{n} F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X)) \leq F_X(x_0+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

avec $F_X(x_0+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} F_X(x_0)$ par la continuité à droite.

- 2) $\Rightarrow$ 1): $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$ en tout point $x$ où $F_X$ est continue. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée. Il faut montrer que $E(f(X_n)) \to E(f(X))$.

  Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{-\infty} F_X = 0$, $\lim_{+\infty} F_X = 1$, il existe $a < 0$ tel que $F_X(a) < \varepsilon$, $F_X(b) > 1-\varepsilon$, $F_X$ continue en $a$ et $b$. Ensuite on écrit

$$E(f(X_n)) = \int f(X_n)\,dP = \int_{X_n \le a} f(X_n)\,dP + \int_{a<X_n<b} f(X_n)\,dP + \int_{X_n>b} f(X_n)\,dP$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{X_n<a} f(X_n)\,dP\right| &\le \int_{X_n<a} |f(X_n)|\,dP \le \|f\|_\infty P(X_n \le a) = \|f\|_\infty F_{X_n}(a) \\
\left|\int_{X_n>b} f(X_n)\,dP\right| &\le \|f\|_\infty P(X_n > b) = \|f\|_\infty (1 - F_{X_n}(b))
\end{aligned}$$

  Soit $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_k = b$, une subdivision de $[a,b]$ telle que $F_X$ est continue en $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Définissons $f_k^+$

$$f_k^+(x) = \sum_{l=1}^{k} 1_{]x_{l-1},x_l]}(x) \sup_{]x_{l-1},x_l]} f$$

  Alors $f \le f_k^+$ sur $[a,b]$ et

$$\int_{a<X_n\le b} f(X_n)\,dP \le \int_{a<X_n\le b} f_k^+(X_n)\,dP = \sum_{l=1}^{k} \sup_{]x_{l-1},x_l]} f \int_{x_{l-1}<X_n<x_l} dP$$

  $k \to +\infty$. Je dis que: $\forall x \in ]a,b]$, $|f_k^+(x)| \le \|f\|_\infty$ et $\lim_{k\to+\infty} f_k^+(x) = f(x)$, par continuité de $f$ au point $x$. Lorsque $k \to +\infty$ le pas de la subdivision $\to 0$. Et donc

$$\lim_{k\to+\infty} E(f_k^+(X)) = E(f(X)1_{]a,b]}(X))$$

  grâce au théorème de convergence dominée. D'où $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\limsup_n \int f(X_n)\,dP &\le 2\varepsilon\|f\|_\infty + E(f(X)1_{]a,b]}(X)) \\
&\le 4\varepsilon\|f\|_\infty + E(f(X))
\end{aligned}$$

  Alors, avec $\varepsilon \to 0$,

$$\limsup_n E(f(X_n)) \le E(f(X))$$

  Même travail pour le lim sup.

$\square$

# CHAPTER 2

## Lecture 9: Fonctions Caractéristiques

Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et si $\mu$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on définit

$$\int f\,d\mu = \int \mathcal{R}ef\,d\mu + i\int \mathcal{I}mf\,d\mu$$

sous réserve que $Re\,f$ et $Im\,f$ sont intégrables.

## 2.1 Définition

Definition 2.1.1 — Si $\mu$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sa fonction caractéristique, notée $\phi_\mu$ est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par:

$$\forall u \in \mathbb{R},\, \phi_\mu(u) = \int_R e^{iux}\,d\mu(x)$$

qui est bien définie car $|e^{iux}| = 1$, et donc $Re\,e^{iux} = \cos ux$ est $\mu$ intégrable.

Definition 2.1.2 — Si $X$ est une v.a réelle définie sur un espace de probas $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, sa fonction caractéristique notée $\phi_X$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$$\forall u \in \mathbb{R},\, \phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \int_\Omega e^{iuX}\,dP = \int_{\omega\in\Omega} e^{iuX(\omega)}\,dP(\omega)$$

(bien définie car $\left|e^{iuX}\right| = 1$ donc $e^{iuX}$ est $P$ intégrable)

Lien entre les 2 définitions: Par la formule de transfert

$$E\left[e^{iuX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\,dP_X(x)$$

et donc $\phi_X = \phi_{P_X}$.

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire $X$ est, à un signe près, la transformée de Fourier de sa loi $P_X$

## 2.2 Exemples

### 2.2.1 Bernoulli

Si $X \sim \text{Ber}(p)$ $P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p$

### 2.2.2 Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$

$$\phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{iuk} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} e^{-\theta} \frac{(e^{iu}\theta)^k}{k!} = e^{-\theta} e^{\theta e^{iu}} = e^{\theta(e^{iu}-1)}$$

### 2.2.3 Exponentielle

$X \sim Exp(\alpha)$

$$E[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}^+} e^{iux} \alpha e^{-\alpha x}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \alpha e^{(iu-\alpha)x}\, d\lambda(x) = \frac{\alpha}{iu-\alpha} e^{(iu-\alpha)} x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{iu-\alpha}$$

## 2.3 Propriétés

**Proposition 2.3.1** — Si $X$ est une variable aléatoire, sa fonction caractéristique $\phi_X$ vérifie:

i) $\phi_X(0) = 1$.

ii) $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(u)| \leq 1$

iii) $\forall u \in \mathbb{R}, \overline{\phi_X(u)} = \phi_X(-u)$

iv) $\phi_X$ est continue sur $\mathbb{R}$

*Proof* — ii) $\left|E[e^{iuX}]\right| \leq E[|e^{iuX}|] = 1$

iv) Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et montrons que $\phi_X$ est continue en $u_0$

$$\phi_X(u) = \int e^{iux}\, dP_X(x)$$

Il s'agit d'une intégrale dependant d'un paramètre. Ici,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ |e^{iux}| \leq 1$$

majoration uniforme en $u$, par une fonction $P$ intégrable. Par le theorem de convergence dominé,

$$\lim_{u \to u_0} \phi_X(u) = \phi_X(u_0)$$

Effet d'une transformation affine: $X$ variable aléatoire, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_{\alpha X+\beta}(u) = e^{iu\beta}\phi_X(\alpha u)$$

car

$$E[e^{iu(\alpha X+\beta)}] = E\left[e^{iu\beta} e^{iu\alpha X}\right] = e^{iu\beta} E\left[e^{iu\alpha X}\right]$$

□

## 2.4 La loi gaussienne

Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $X$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Posons, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ ssi $X = m + \sigma Z$, alors $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et calculons $\phi_Z$.

$$\phi_Z(u) = E[e^{iuZ}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} e^{i\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

$iux - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x-iu)^2 - \frac{u^2}{2}$ donc

$$\phi_Z(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx = e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

Calcul de $I(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}\, dx$

$$I(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Figure 2.1: I-0-drawing

Calculons $I'(u)$.

$$I(u) = \int f(x,u)\, dx \text{ avec } f(x,u) = e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

On espère:

$$I'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\, dx$$

$f(x,u)$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = i(x-iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| \leq (|x| + |u|)e^{-\frac{1}{2}(x^2+u^2)}$$

La fonction avec $u \in \mathbb{R}$, $|u|e^{-\frac{u^2}{2}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\exists M > 0, \forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| \leq (|x| + M)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Cette fonction est $\lambda$ intégrable et ne dépend pas de $u$. Alors, $I$ est dérivable et sa dérivée vaut ainsi

$$I'(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial u} f(x,u)\, dx = \int_{\mathbb{R}} i(x-iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}\, dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = i(x-iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(x-iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

alors

$$I'(u) = -i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\, dx = -i \left[f(x,u)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

d'où $I(u) = \text{constante} = I(0) = \sqrt{2\pi}$.

On trouve finalement

$$\phi_Z(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $X = \sigma Z + m$

$$\phi_X(u) = e^{ium - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Posons

$$g_\sigma = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\int e^{iux} g_\sigma(x)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u)$$

## 2.5 Théorème d'injectivité

Theorem 2.1 *(Théorème d'injectivité)* — Notons $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probas sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. L'application qui à une mesure de probas $\mu$ associe sa fonction caractéristique $\phi_\mu$ est injective.

$$\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \phi_\mu$$

Ainsi, si $X$ est une variable aléatoire, la fonction $\phi_X$ caractérise la loi de $X$.

Cas particulier: Si $\mu$ admet une densité $f$, alors $\phi_\mu(u) = \int e^{iux} f(x)\, d\lambda(x)$

*Proof* — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probas sur lequel sont définies deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$ telles que $X \sim \mu$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et soit $signa > 0$.

Idée: Nous allons convoler $\mu$ avec une gaussienne pour la régulariser et nous allons montrer que cette loi convolée est déterminée par $\phi_\mu$. Pour cela, nous étudions $X + \sigma Y$. Soit, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact.

$$E\left(f(X + \sigma Y)\right) = \int_\Omega f(X + \sigma Y)\, dP = \int_x \int_y f(x + \sigma y)\, dP_{(X,Y)}(x,y) \text{ avec } P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$$

On sait que $P_X = \mu$ et $P_Y = \mathcal{N}(0,1)$

$$E\left(f(X + \sigma Y)\right) = \iint f(x + \sigma y)\, d\mu(x) g_1(y) dy = \iint f(x + \sigma y')\, d\mu(x) g_1(y') dy'$$

On a vu que $\int e^{iux} g_\sigma(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u)$, $x \to t$, $u \to y'$, $\sigma \to \frac{1}{\sigma}$

$$g_\sigma(y') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int e^{iy't} g_{\frac{1}{\sigma}}\, dt$$

$$\begin{aligned} E\left(f(X + \sigma Y)\right) &= \iiint f(x + y') \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{iy't} g_{\frac{1}{\sigma}}(t)\, dt\, dy'\, d\mu(x) \quad z = x + y' \text{ garde } t, x \\ &= \iiint f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{i(z-x)t} g_{\frac{1}{\sigma}}(t)\, dt\, dz\, d\mu(x) \end{aligned}$$

Par le theorem de Fubini

$$\left| f(z) e^{i(z-x)t} g_{\frac{1}{\sigma}} \right| \le \|f\|_\infty g_{\frac{1}{\sigma}}(t)$$

$f$ support compact, $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda \otimes \lambda)$

$$\begin{aligned} E\left(f(X+\sigma Y)\right) &= \int_z \int_t f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{izt} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \left( \int_x e^{-itx}\, d\mu(x) \right) dt\, dz \\ &= \int_z \int_t f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{izt} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \phi_\mu(-t)\, dt\, dz \end{aligned}$$

Ainsi, la loi de $X + \sigma Y$ est déterminée par $\phi_\mu$.

Faisons $\sigma \to 0$. Je dis que $X + \sigma Y \xrightarrow{L} X$, $\sigma \to 0$ et donc la loi de $X$ est déterminée par la famille de variable aléatoire $X + \sigma Y$, $\sigma > 0$ dont les lois sont déterminées par $\phi_\mu$.

Je dis que $X + \sigma Y \xrightarrow{P} X$. En effet: soit $\varepsilon > 0$

$$P\left(|X + \sigma Y - X| > \varepsilon\right) = P\left(\sigma|Y| > \varepsilon\right) = P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$\lim_{\sigma\to 0} P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = P\left(\bigcap_{\sigma>0} \left\{|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right\}\right) = P\left(|Y| = +\infty\right) = 0$$

$$X + \sigma Y \xrightarrow{P} X \Rightarrow X + \sigma Y \xrightarrow{L} X$$

here picture of all convergences

Prouvons finalement: $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$

Soit $x$ un point de continuité de $F_X$.

$$P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x) \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) + P(X \leq x + \varepsilon)$$

$$\limsup_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(X + \varepsilon) \forall \varepsilon > 0$$

$$P(X \leq x - \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) + P(X_n \leq x)$$

$$F_X(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$$

avec $F_X(x - \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F_X(x)$ car $F_X$ continue en $x$. □