Lebesgue Integration Cheatsheet Lebesgue Integration Cheatsheet

Basé sur *Intégrale de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$ et *sur* $\mathbb{R}^d$

3

Intégration sur $\mathbb{R}$

1. Fonctions Simples (Fonctions Étagées)

1. Fonctions Simples (Fonctions Étagées) Une fonction $f : X \to [0, +\infty]$ est **positive simple** ($\mathcal{E}^+(X)$) si elle prend un nombre fini de valeurs $\{c_1, \dots, c_n\}$ sur des ensembles mesurables A_j :

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{A_j}$$

Définition de l'Intégrale :

$$\int_X f \, d\lambda = \sum_{c \in f(X)} c \lambda(f^{-1}(\{c\}))$$

Avec la convention $0 \times \infty = 0$.

2. Fonctions Positives Mesurables

2. Fonctions Positives Mesurables Pour une fonction mesurable $f : X \to [0, +\infty]$:

$$\int_X f \, d\lambda = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\lambda : \varphi \in \mathcal{E}^+(X), \varphi \leq f \right\}$$

Approximation : Toute fonction mesurable $f \geq 0$ est la limite d'une suite croissante de fonctions simples $\varphi_n \nearrow f$.

3. Fonctions Intégrables ($\mathcal{L}^1$)

3. Fonctions Intégrables ($\mathcal{L}^1$) Une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ est **intégrable** (notée $f \in \mathcal{L}^1(X)$) si :

$$\int_X |f| \, d\lambda < +\infty$$

Définition de l'Intégrale :

$$\int_X f \, d\lambda = \int_X f^+ \, d\lambda - \int_X f^- \, d\lambda$$

où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.

Propriétés Clés

Propriétés Clés

- **Linéarité :** $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.
- **Monotonie :** $f \leq g \implies \int f \leq \int g$.
- **Inégalité Triangulaire :** $|\int f| \leq \int |f|$.
- **Ensembles Nuls :** $\int_N f = 0$ si $\lambda(N) = 0$.
- **Intégrale Nulle :** Pour $f \geq 0$, $\int f = 0 \iff f = 0$ p.p.

Inégalité de Markov

Inégalité de Markov Pour $f \geq 0$ mesurable et $\alpha > 0$:

$$\lambda(\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f \, d\lambda$$

Relation avec Riemann

Relation avec Riemann Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue (ou Riemann-intégrable), elle est Lebesgue-intégrable et les intégrales coïncident.

Théorèmes de Limite

Convergence Monotone (Beppo-Levi)

Convergence Monotone (Beppo-Levi) Si (f_n) est une suite **croissante** de fonctions **positives** mesurables ($0 \leq f_n \leq f_{n+1}$) :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\lambda$$

Remarque : Permet l'échange limite/intégrale même si l'intégrale est infinie.

Lemme de Fatou

Lemme de Fatou Pour toute suite de fonctions **positives** mesurables ($f_n \geq 0$) :

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda$$

Théorème de Convergence Dominée (TCD)

Théorème de Convergence Dominée (TCD) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que :

1. $f_n(x) \to f(x)$ pour presque tout x.
2. **Domination :** Il existe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout n, p.p. x.

Alors $f \in \mathcal{L}^1(X)$ et :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda$$

Intégrales à Paramètres

Soit $F(u) = \int_X f(u, x) \, d\lambda(x)$ pour $u \in I$.

Continuité

Continuité F est continue sur I si :

- $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable.
- $u \mapsto f(u, x)$ est continue p.p.
- **Domination :** $|f(u, x)| \leq g(x)$ avec $g \in \mathcal{L}^1$.

Différentiabilité (Règle de Leibniz)

Différentiabilité (Règle de Leibniz) F est différentiable et $F'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u} d\lambda$ si :

- $x \mapsto f(u,x)$ est intégrable.
- $u \mapsto f(u,x)$ est différentiable p.p.
- **Domination :** $|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)| \leq g(x)$ avec $g \in \mathcal{L}^1$.

Intégration sur $\mathbb{R}^d$

Mesure sur $\mathbb{R}^d$

Mesure sur $\mathbb{R}^d$ Construite à partir de produits d'intervalles (pavés).

- $\lambda_d(A \times B) = \lambda_p(A)\lambda_{d-p}(B)$.
- Les ensembles de dimension $k < d$ (par exemple, les lignes dans $\mathbb{R}^2$) ont une mesure 0.
- Invariante par translation et rotation (isométries).

Théorème de Tonelli (Fonctions Positives)

Théorème de Tonelli (Fonctions Positives) Si $f : \mathbb{R}^{p+q} \to [0, +\infty]$ est mesurable **positive** :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Utilisez ceci pour vérifier l'intégrabilité (c'est-à-dire, si l'intégrale est finie).

Théorème de Fubini (Fonctions Intégrables)

Théorème de Fubini (Fonctions Intégrables) Si $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ est **intégrable** ($f \in \mathcal{L}^1$), alors :

- Les tranches $x \mapsto f(x,y)$ sont dans $\mathcal{L}^1$ pour presque tout y.
- L'ordre d'intégration peut être inversé (même formule que Tonelli).

Stratégie Standard : Utilisez Tonelli sur $|f|$ pour prouver que $f \in \mathcal{L}^1$, puis Fubini pour calculer.

Changement de Variables

Transformation Linéaire

Transformation Linéaire Si $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un isomorphisme et $f \in \mathcal{L}^1$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(Tx) \, |\det T| \, dx$$

Difféomorphisme Général (C^1)

Difféomorphisme Général (C^1) Soit $\Phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme entre des ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^d$. $f \in \mathcal{L}^1(V)$ ssi $(f \circ \Phi)|\det J_\Phi| \in \mathcal{L}^1(U)$.

$$\int_V f(y) \, dy = \int_U f(\Phi(x)) \, |\det J_\Phi(x)| \, dx$$

where $J_\Phi(x)$ est la matrice Jacobienne.

Exemple : Coordonnées Polaires ($\mathbb{R}^2$)

$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Déterminant : $|\det J_\Phi| = r$.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, dxdy = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \, r \, d\theta dr$$

Application : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.