CheatSheet d'optimisation

Yehor Korotenko

November 21, 2025

Abstract

Ce cheatsheet donne les énoncés des théorèmes et propositions important(e)s du cours d'optiomisation de L2DD Info-Maths à Paris-Saclay.

Théorème 3.1.6 (Théorème des fonctions implicites) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g_1, \cdots, g_m : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $\tilde{\boldsymbol{x}} \in U$ tel que $g_i(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Si la famille de vecteurs

$$\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{x}}), \cdots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{x}}) \in \mathbb{R}^n$$

est libre, alors – **quitte à permuter les coordonnées** – il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ contenant $(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_{n-m})$, un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ contenant $(\tilde{x}_{n-m+1}, \cdots, \tilde{x}_n)$ et une fonction de classe $\mathcal{C}^k$

$$\varphi : V \to W$$

tels que pour tout $x \in V \times W$ on ait

$$g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0 \iff (x_{n-m+1}, \cdots, x_n) = \varphi(x_1, \cdots, x_{n-m}).$$

Proposition 3.1.8. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1.6, on a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-m}) = -\big(D_{\tilde{x},2}g\big)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}(\tilde{x})\right),$$

où $g = (g_1, \ldots, g_m)$.

Théorème 3.1.9 (Théorème des fonctions implicites) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, soient $g_1, \cdots, g_m : U \to \mathbb{R}$ des fonctions également de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que la restriction de f à l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in U \mid g_i(x) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m\}$$

admet un extremum local en un point $\bar{x}$. Si la famille de vecteurs

$$\nabla g_1(\bar{x}), \cdots, \nabla g_m(\bar{x})$$

est libre, alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}).$$