

CheatSheet d'optimisation

Yehor Korotenko

December 4, 2025

Abstract

Ce cheatsheet donne les énoncés des théorèmes et propositions important(e)s du cours d'optimisation de L2DD Info-Maths à Paris-Saclay.

Théorème 3.1.6 (THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $g_1, \dots, g_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^k . Soit $\tilde{\mathbf{x}} \in U$ tel que $g_i(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Si la famille de vecteurs

$$\nabla g_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^n$$

est libre, alors – **quitte à permuter les coordonnées** – il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ contenant $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})$, un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ contenant $(\tilde{x}_{n-m+1}, \dots, \tilde{x}_n)$ et une fonction de classe \mathcal{C}^k

$$\varphi : V \rightarrow W$$

tels que pour tout $x \in V \times W$ on ait

$$g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0 \iff (x_{n-m+1}, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-m}).$$

Proposition 3.1.8. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1.6, on a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m}) = -\left(D_{\tilde{x},2}g\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}})\right),$$

où $g = (g_1, \dots, g_m)$.

Théorème 3.1.9 (THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , soient $g_1, \dots, g_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions également de classe \mathcal{C}^1 . Supposons que la restriction de f à l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in U \mid g_i(x) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m\}$$

admet un extremum local en un point \bar{x} . Si la famille de vecteurs

$$\nabla g_1(\bar{x}), \dots, \nabla g_m(\bar{x})$$

est libre, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}).$$