

# Lebesgue Integration Cheatsheet Lebesgue Integration Cheatsheet

Basé sur *Intégrale de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^d$*

3

## Intégration sur $\mathbb{R}$

### 1. Fonctions Simples (Fonctions Étagées)

1. Fonctions Simples (Fonctions Étagées) Une fonction  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  est **positive simple** ( $\mathcal{E}^+(X)$ ) si elle prend un nombre fini de valeurs  $\{c_1, \dots, c_n\}$  sur des ensembles mesurables  $A_j$  :

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j}$$

Définition de l'Intégrale :

$$\int_X f d\lambda = \sum_{c \in f(X)} c \lambda(f^{-1}(\{c\}))$$

Avec la convention  $0 \times \infty = 0$ .

### 2. Fonctions Positives Mesurables

2. Fonctions Positives Mesurables Pour une fonction mesurable  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  :

$$\int_X f d\lambda = \sup \left\{ \int_X \varphi d\lambda : \varphi \in \mathcal{E}^+(X), \varphi \leq f \right\}$$

**Approximation** : Toute fonction mesurable  $f \geq 0$  est la limite d'une suite croissante de fonctions simples  $\varphi_n \nearrow f$ .

### 3. Fonctions Intégrables ( $\mathcal{L}^1$ )

3. Fonctions Intégrables ( $\mathcal{L}^1$ ) Une fonction mesurable  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable** (notée  $f \in \mathcal{L}^1(X)$ ) si :

$$\int_X |f| d\lambda < +\infty$$

Définition de l'Intégrale :

$$\int_X f d\lambda = \int_X f^+ d\lambda - \int_X f^- d\lambda$$

où  $f^+ = \max(f, 0)$  et  $f^- = \max(-f, 0)$ .

#### Propriétés Clés

Propriétés Clés

- **Linéarité** :  $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ .
- **Monotonie** :  $f \leq g \implies \int f \leq \int g$ .
- **Inégalité Triangulaire** :  $|\int f| \leq \int |f|$ .
- **Ensembles Nuls** :  $\int_N f = 0$  si  $\lambda(N) = 0$ .
- **Intégrale Nulle** : Pour  $f \geq 0$ ,  $\int f = 0 \iff f = 0$  p.p.

#### Inégalité de Markov

Inégalité de Markov Pour  $f \geq 0$  mesurable et  $\alpha > 0$  :

$$\lambda(\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\lambda$$

#### Relation avec Riemann

Relation avec Riemann Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue (ou Riemann-intégrable), elle est Lebesgue-intégrable et les intégrales coïncident.

## Théorèmes de Limite

### Convergence Monotone (Beppo-Levi)

Convergence Monotone (Beppo-Levi) Si  $(f_n)$  est une suite **croissante** de fonctions **positives** mesurables ( $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ ) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\lambda = \int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\lambda$$

*Remarque* : Permet l'échange limite/intégrale même si l'intégrale est infinie.

### Lemme de Fatou

Lemme de Fatou Pour toute suite de fonctions **positives** mesurables ( $f_n \geq 0$ ) :

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\lambda$$

### Théorème de Convergence Dominée (TCD)

Théorème de Convergence Dominée (TCD) Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables telle que :

1.  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour presque tout  $x$ .
  2. **Domination** : Il existe  $g \in \mathcal{L}^1(X)$  telle que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  pour tout  $n$ , p.p.  $x$ .
- Alors  $f \in \mathcal{L}^1(X)$  et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\lambda = \int_X f d\lambda$$

## Intégrales à Paramètres

Soit  $F(u) = \int_X f(u, x) d\lambda(x)$  pour  $u \in I$ .

### Continuité

Continuité  $F$  est continue sur  $I$  si :

- $x \mapsto f(u, x)$  est mesurable.
- $u \mapsto f(u, x)$  est continue p.p.
- **Domination** :  $|f(u, x)| \leq g(x)$  avec  $g \in \mathcal{L}^1$ .

### Différentiabilité (Règle de Leibniz)

Différentiabilité (Règle de Leibniz)  $F$  est différentiable et  $F'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u} d\lambda$  si :

- $x \mapsto f(u, x)$  est intégrable.
- $u \mapsto f(u, x)$  est différentiable p.p.
- **Domination :**  $|\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)| \leq g(x)$  avec  $g \in \mathcal{L}^1$ .

### Intégration sur $\mathbb{R}^d$

#### Mesure sur $\mathbb{R}^d$

Mesure sur  $\mathbb{R}^d$  Construite à partir de produits d'intervalles (pavés).

- $\lambda_d(A \times B) = \lambda_p(A)\lambda_{d-p}(B)$ .
- Les ensembles de dimension  $k < d$  (par exemple, les lignes dans  $\mathbb{R}^2$ ) ont une mesure 0.
- Invariante par translation et rotation (isométries).

#### Théorème de Tonelli (Fonctions Positives)

Théorème de Tonelli (Fonctions Positives) Si  $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow [0, +\infty]$  est mesurable **positif** :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^q} \left( \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

*Utilisez ceci pour vérifier l'intégrabilité (c'est-à-dire, si l'intégrale est finie).*

#### Théorème de Fubini (Fonctions Intégrables)

Théorème de Fubini (Fonctions Intégrables) Si  $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable** ( $f \in \mathcal{L}^1$ ), alors :

- Les tranches  $x \mapsto f(x, y)$  sont dans  $\mathcal{L}^1$  pour presque tout  $y$ .
- L'ordre d'intégration peut être inversé (même formule que Tonelli).

**Stratégie Standard :** Utilisez Tonelli sur  $|f|$  pour prouver que  $f \in \mathcal{L}^1$ , puis Fubini pour calculer.

### Changement de Variables

#### Transformation Linéaire

Transformation Linéaire Si  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est un isomorphisme et  $f \in \mathcal{L}^1$  :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(Tx) |\det T| dx$$

#### Difféomorphisme Général ( $C^1$ )

Difféomorphisme Général ( $C^1$ ) Soit  $\Phi : U \rightarrow V$  un  $C^1$ -difféomorphisme entre des ensembles ouverts dans  $\mathbb{R}^d$ .  $f \in \mathcal{L}^1(V)$  ssi  $(f \circ \Phi) |\det J_\Phi| \in \mathcal{L}^1(U)$ .

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\Phi(x)) |\det J_\Phi(x)| dx$$

where  $J_\Phi(x)$  est la matrice Jacobienne.

#### Exemple : Coordonnées Polaires ( $\mathbb{R}^2$ )

$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Déterminant :  $|\det J_\Phi| = r$ .

$$\int_{\mathbb{R}^2} f dx dy = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

*Application :*  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .