Notes de Probas

Yehor Korotenko

December 18, 2025

Contents

CHAPTER 1

Lecture 8: La convergence en loi

La loi, c'est ce qu'il y a de plus important!

1.1 Definition

Il existe des suites de variables qui ne converge ni presque surement, ni en probabilité, ni dans L^1, mais dont la loi converge, même constante !

Example 1.1.1 — $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

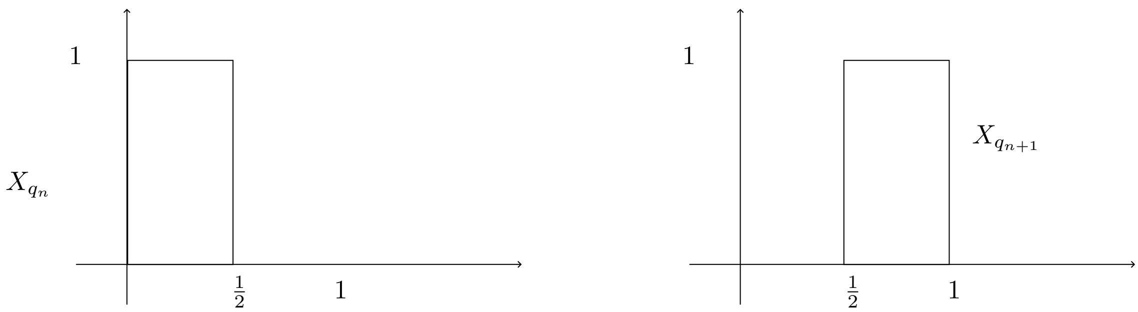

Figure 1.1: example-cv-loi

Pour tout n, la loi de X_n est la loi $Bernoulli(\frac{1}{2})$

$$\forall n, P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

et donc $P_{X_n} = Ber(\frac{1}{2})$ ne dépend pas de n!

Definition 1.1.2 — Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X, ce que l'on note $X_n \xrightarrow{L} X$, ssi:

- pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

Remarquons que $E[f(X_n)]$ ne dépend que de la loi de X_n, i.e.:

$$E[f(X_n)] = \int_\Omega f(X_n)\, dP \underset{\text{transfert}}{=} \int_\mathbb{R} f(x)\, d\underbrace{P_{X_n}(x)}_{\text{loi de } X_n}$$

Ainsi, la convergence en loi s'applique même dans des situations où les variables aléatoires X_n ne sont pas définies sur le même espace de probas $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, i.e. si:

$$X_n : (\Omega_n, \mathbb{F}_n, P_n) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

où $(\Omega_n, \mathbb{F}_n, P_n)$ n'ont aucun lien a priori. Ceci distingue fondamentalement la convergence en loi, des autres modes de convergence.

1.2 La fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Definition 1.2.1 — La fonction de répartition de X, notée F_X, est la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$$

On a $F_X(x) = P_X(]-\infty, x])$. Comme les intervalles $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ engendrent les boréliens et forment une famille stable par l'intersection finie, par unicité de l'extension, la loi P_X est détérminée par F_X.

Corollary 1.2.2 — La fonction de répartition F_X détérmine la loi P_X de X.

Proposition 1.2.3 — Une fonction de répartition F vérifie:

1. F est croissante de R dans $[0, 1]$.
2. F est continue à droite.
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Proof — 1. évident

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, Regardons

$$\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} F_X(x) = \lim_{x\to x_0,\, x>x_0} P_X(]-\infty, x]) \underset{\substack{\text{continuité} \\ \text{monotone de } P_X}}{=} P_X\left(\bigcap_{\substack{x>x_0 \\ x\in\mathbb{Q}}}]-\infty, x]\right) = P_X(]-\infty, x_0]) = F_X(x_0)$$

3. $$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{x\to-\infty, x\in\mathbb{Z}} P_X(]-\infty, x]) = P_X(\bigcap_{x\in\mathbb{Z}}]-\infty, x]) = P_X(\emptyset) = 0$$

□

Note — Dans certains livres F_X est définie par $F_X(x) = P(X < x)$

1.3 Exemples

Example 1.3.1 — $X \sim Ber(p)$, $P(X = 0) = 1 - p$, $F_X(0) = P(X \leq 0) = 1 - p$

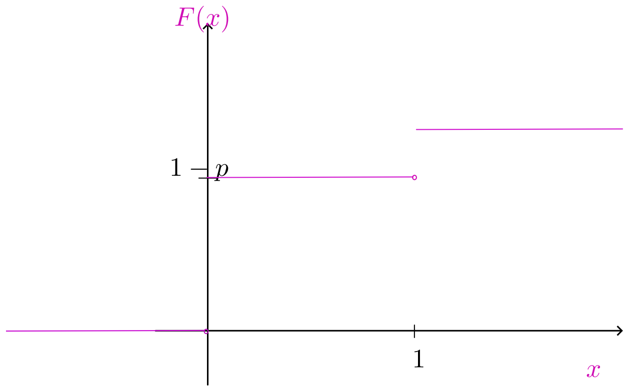

Figure 1.2: ex-fonction-repartition

Example 1.3.2 — $X \sim Unif(\{1, \ldots, n\})$

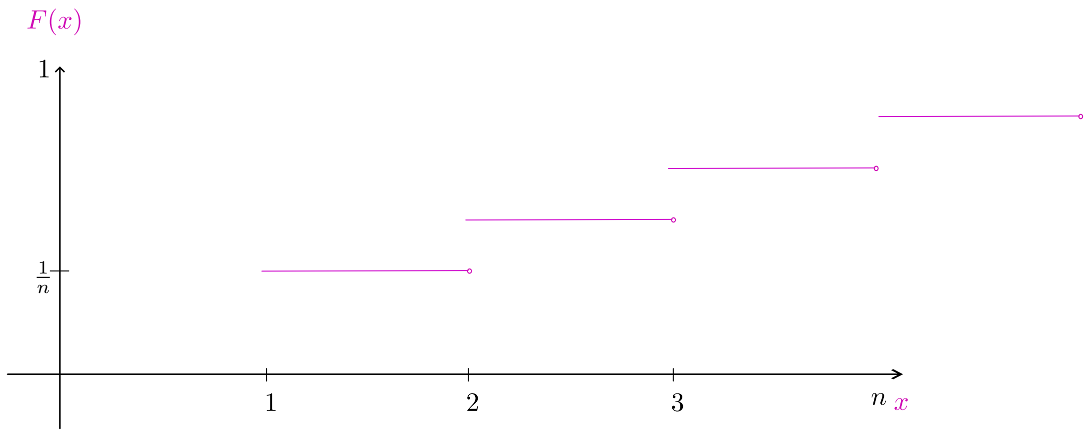

Figure 1.3: ex-fonction-repartition-unif

Example 1.3.3 — $X \sim Unif([0, 1])$

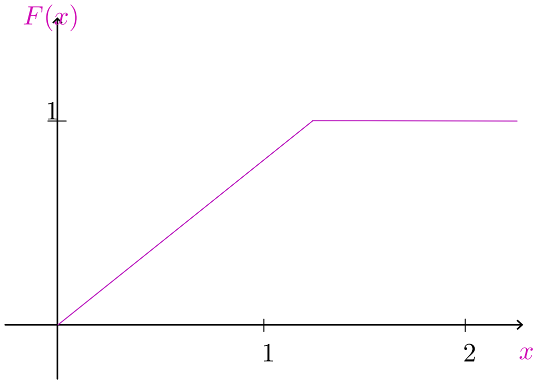

Figure 1.4: ex-fonction-repartition-unif-0-1

EXAMPLE 1.3.4 — $F_X \sim Exp(\alpha)$, $F_X(x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t}\,dt = 1 - e^{-\alpha t}$, $x \geq 0$

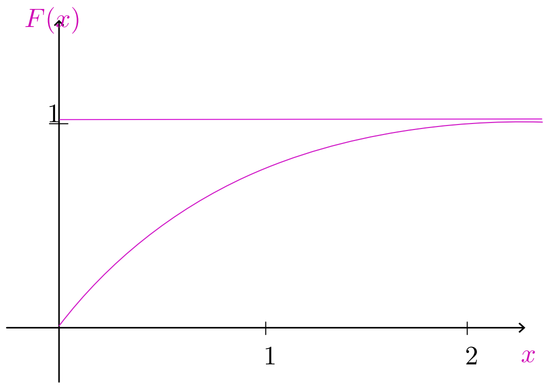

Figure 1.5: ex-fonction-repartition-exp

Plus généralement, si la loi de X a une densité f, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

1.4 La bijection

Si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sa fonction de répartition F_μ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_\mu(x) = \mu(] - \infty, x])$$

Cohérence: si X est une variable aléatoire

$$F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = F_{P_X}(x)$$

EXAMPLE 1.4.1 — La loi normale: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dt = erf(x)$$

$$1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dt = erfc(x)$$

Notons $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ (les fonction qui vérifie la proposition 1.2.3)

THEOREM 1.1 — L'application $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \longmapsto F_\mu \in \mathcal{R}$ est une bijection!

1.4.1 Construction d'une loi singulière

i.e. la loi μ sans atomes: $\forall x, \mu(\{x\}) = 0$ et telle que

$$\exists c,\ \mu(c) = 1 \quad \underset{\text{Lebesgue}}{\lambda(c)} = 0$$

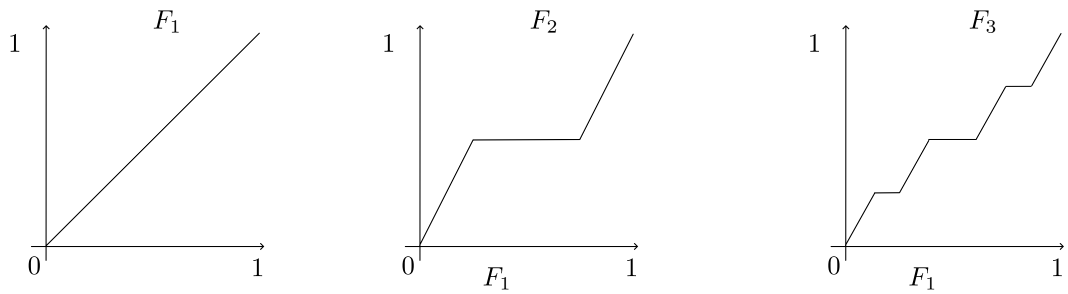

Figure 1.6: loi-singuliere

Puis, (F_n). μ associée à F_∞

Montrer que $F_n \longrightarrow F_\infty$ sur $[0,1]$ uniformément.

1.5 Traduction sur les fonctions de répartition

Comme la convergence en loi ne porte que sur les lois des variables aléatoires, elle doit pouvoir s'exprimer via les fonctions de répartitions.

Theorem 1.2 — Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X des variables aléatoires réélles et notons $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$, F_X les fonctions de répartitions associées. Alors, on a équivalence:

1. La suite (X_n) converge en loi vers X
2. En tout point x de $\mathbb{R}$ où F_X est continue, la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F_X(x)$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Proof —

- 1) $\Rightarrow$ 2): Je prends $f(x) = 1_{]-\infty,x]}$, alors

$$E\left(f(X_n)\right) = P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x)$$

avec $E(f(X_n)) \to E(f(X))$ et $F_{X_n} \to F_X(x)$. Par contre, problème: f n'est pas continue en x.

Vraie preuve: Soit x_0 un point où F_X est continue. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x_0) = F_X(x_0)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons les fonctions f, g suivantes.

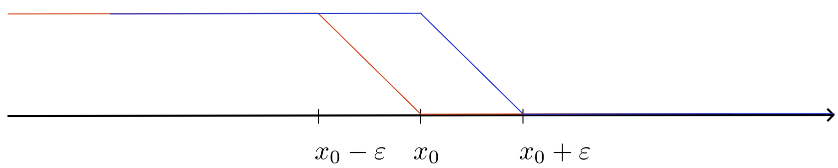

Figure 1.7: fonctions-f-et-g

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1_{]-\infty,x_0-\varepsilon]}(x) \leq f(x) \leq 1_{]-\infty,x_0]}(x) \leq g(x) \leq 1_{]-\infty,x_0+\varepsilon]}(x)$$

et f et g sont continues, donc

$$E(f(X_n)) \to E(f(X)) \qquad F(g(X_n)) \to E(g(X))$$

Mettons X_n à la place de x dans les inégalités et prenons l'esperance :

$$E(f(X_n)) \leq F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X_n)) \quad \forall n$$

avec $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(f(X))$

$$F_X(x_0-\varepsilon) \leq \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x_0) \leq \limsup_{n} F_{X_n}(x_0) \leq E(g(X)) \leq F_X(x_0+\varepsilon) \quad \forall\varepsilon > 0$$

avec $F_X(x_0+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F_X(x_0)$ par la continuité à droite.

- 2) $\Rightarrow$ 1): $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$ en tout point x où F_X est continue. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue bornée. Il faut montrer que $E(f(X_n)) \to E(f(X))$.

  Soit $\varepsilon>0$. Comme $\lim_{-\infty} F_X = 0$, $\lim_{+\infty} F_X = 1$, il existe $a<0$ tel que $F_X(a)<\varepsilon$, $F_X(b)>1-\varepsilon$, F_X continue en a et b. Ensuite on écrit

$$E(f(X_n)) = \int f(X_n)\,dP = \int_{X_n\le a} f(X_n)\,dP + \int_{a<X_n<b} f(X_n)\,dP + \int_{X_n>b} f(X_n)\,dP$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{X_n<a} f(X_n)\,dP\right| &\le \int_{X_n<a} |f(X_n)|\,dP \le \|f\|_\infty P(X_n\le a) = \|f\|_\infty F_{X_n}(a)\\ \left|\int_{X_n>b} f(X_n)\,dP\right| &\le \|f\|_\infty P(X_n>b) = \|f\|_\infty(1-F_{X_n}(b))\end{aligned}$$

  Soit $x_0=a<x_1<\ldots<x_k=b$, une subdivision de $[a,b]$ telle que F_X est continue en $x_0,x_1,\ldots,x_k$. Définissons f_k^+

$$f_k^+(x) = \sum_{l=1}^{k} 1_{]x_{l-1},x_l]}(x) \sup_{]x_{l-1},x_l]} f$$

  Alors $f\le f_k^+$ sur $[a,b]$ et

$$\int_{a<X_n\le b} f(X_n)\,dP \le \int_{a<X_n\le b} f_k^+(X_n)\,dP = \sum_{l=1}^{k} \sup_{]x_{l-1},x_l]} f \int_{x_{l-1}<X_n<x_l} dP$$

  $k\to+\infty$. Je dis que: $\forall x\in]a,b]$, $|f_k^+(x)|\le\|f\|_\infty$ et $\lim_{k\to+\infty} f_k^+(x) = f(x)$, par continuité de f au point x. Lorsque $k\to+\infty$ le pas de la subdivision $\to 0$. Et donc

$$\lim_{k\to+\infty} E(f_k^+(X)) = E(f(X)1_{]a,b]}(X))$$

  grâce au théorème de convergence dominée. D'où $\forall\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\limsup_n \int f(X_n)\,dP &\le 2\varepsilon\|f\|_\infty + E(f(X)1_{]a,b]}(X))\\ &\le 4\varepsilon\|f\|_\infty + E(f(X))\end{aligned}$$

  Alors, avec $\varepsilon\to 0$,

$$\limsup_n E(f(X_n)) \le E(f(X))$$

  Même travail pour le lim sup.

$\square$

CHAPTER 2

Lecture 9: Fonctions Caractéristiques

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on définit

$$\int f \, d\mu = \int \mathcal{R}ef \, d\mu + i \int \mathcal{I}mf \, d\mu$$

sous réserve que $Re\, f$ et $Im\, f$ sont intégrables.

2.1 Définition

Definition 2.1.1 — Si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sa fonction caractéristique, notée ϕ_μ est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \, \phi_\mu(u) = \int_R e^{iux} \, d\mu(x)$$

qui est bien définie car $|e^{iux}| = 1$, et donc $Re\, e^{iux} = \cos ux$ est μ intégrable.

Definition 2.1.2 — Si X est une v.a réelle définie sur un espace de probas $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, sa fonction caractéristique notée ϕ_X est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \, \phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \int_\Omega e^{iuX} \, dP = \int_{\omega \in \Omega} e^{iuX(\omega)} \, dP(\omega)$$

(bien définie car $\left|e^{iuX}\right| = 1$ donc e^{iuX} est P intégrable)

Lien entre les 2 définitions: Par la formule de transfert

$$E\left[e^{iuX}\right] = \int_\mathbb{R} e^{iux} \, dP_X(x)$$

et donc $\phi_X = \phi_{P_X}$.

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est, à un signe près, la transformée de Fourier de sa loi P_X

2.2 Exemples

2.2.1 Bernoulli

Si $X \sim \text{Ber}(p)$ $P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$

2.2.2 Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$

$$\phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{iuk} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} e^{-\theta} \frac{(e^{iu}\theta)^k}{k!} = e^{-\theta} e^{\theta e^{iu}} = e^{\theta(e^{iu}-1)}$$

2.2.3 Exponentielle

$X \sim Exp(\alpha)$

$$E[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}^+} e^{iux} \alpha e^{-\alpha x}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \alpha e^{(iu-\alpha)x}\, d\lambda(x) = \frac{\alpha}{iu-\alpha} e^{(iu-\alpha)} x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{iu - \alpha}$$

2.3 Propriétés

Proposition 2.3.1 — Si X est une variable aléatoire, sa fonction caractéristique ϕ_X vérifie:

i) $\phi_X(0) = 1$.

ii) $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(u)| \leq 1$

iii) $\forall u \in \mathbb{R}, \overline{\phi_X(u)} = \phi_X(-u)$

iv) ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$

Proof — ii) $\left|E[e^{iuX}]\right| \leq E[|e^{iuX}|] = 1$

iv) Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et montrons que ϕ_X est continue en u_0

$$\phi_X(u) = \int e^{iux}\, dP_X(x)$$

Il s'agit d'une intégrale dependant d'un paramètre. Ici,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ |e^{iux}| \leq 1$$

majoration uniforme en u, par une fonction P intégrable. Par le theorem de convergence dominé,

$$\lim_{u \to u_0} \phi_X(u) = \phi_X(u_0)$$

Effet d'une transformation affine: X variable aléatoire, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall u \in \mathbb{R}, \phi_{\alpha X + \beta}(u) = e^{iu\beta} \phi_X(\alpha u)$$

car

$$E[e^{iu(\alpha X + \beta)}] = E\left[e^{iu\beta} e^{iu\alpha X}\right] = e^{iu\beta} E\left[e^{iu\alpha X}\right]$$

□

2.4 La loi gaussienne

Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Posons, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ ssi $X = m + \sigma Z$, alors $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et calculons ϕ_Z.

$$\phi_Z(u) = E[e^{iuZ}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} e^{i\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

$iux - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x-iu)^2 - \frac{u^2}{2}$ donc

$$\phi_Z(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx = e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

Calcul de $I(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}\, dx$

$$I(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

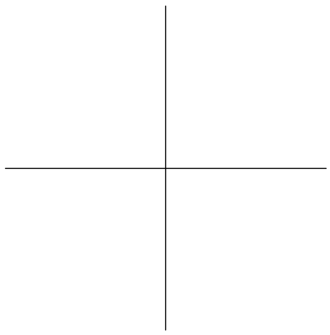

Figure 2.1: I-0-drawing

Calculons $I'(u)$.

$$I(u) = \int f(x,u)\, dx \text{ avec } f(x,u) = e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

On espère:

$$I'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\, dx$$

$f(x,u)$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = i(x-iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| \leq (|x| + |u|)e^{-\frac{1}{2}(x^2+u^2)}$$

La fonction avec $u \in \mathbb{R}$, $|u|e^{-\frac{u^2}{2}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\exists M > 0, \forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| \leq (|x| + M)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Cette fonction est λ intégrable et ne dépend pas de u. Alors, I est dérivable et sa dérivée vaut ainsi

$$I'(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial u} f(x,u)\, dx = \int_{\mathbb{R}} i(x-iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}\, dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = i(x-iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(x-iu)e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}$$

alors

$$I'(u) = -i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\, dx = -i\, [f(x,u)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

d'où $I(u) = \text{constante} = I(0) = \sqrt{2\pi}$.

On trouve finalement

$$\phi_Z(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $X = \sigma Z + m$

$$\phi_X(u) = e^{ium - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Posons

$$g_\sigma = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\int e^{iux} g_\sigma(x)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u)$$

2.5 Théorème d'injectivité

Theorem 2.1 *(Théorème d'injectivité)* — Notons $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probas sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. L'application qui à une mesure de probas μ associe sa fonction caractéristique ϕ_μ est injective.

$$\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \phi_\mu$$

Ainsi, si X est une variable aléatoire, la fonction ϕ_X caractérise la loi de X.

Cas particulier: Si μ admet une densité f, alors $\phi_\mu(u) = \int e^{iux} f(x)\, d\lambda(x)$

Proof — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probas sur lequel sont définies deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $X \sim \mu$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et soit $signa > 0$.

Idée: Nous allons convoler μ avec une gaussienne pour la régulariser et nous allons montrer que cette loi convolée est déterminée par ϕ_μ. Pour cela, nous étudions $X + \sigma Y$. Soit, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact.

$$E\left(f(X+\sigma Y)\right) = \int_\Omega f(X+\sigma Y)\, dP = \int_x \int_y f(x+\sigma y)\, dP_{(X,Y)}(x,y) \text{ avec } P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$$

On sait que $P_X = \mu$ et $P_Y = \mathcal{N}(0,1)$

$$E\left(f(X+\sigma Y)\right) = \iint f(x+\sigma y)\, d\mu(x) g_1(y) dy = \iint f(x+\sigma y')\, d\mu(x) g_1(y') dy'$$

On a vu que $\int e^{iux} g_\sigma(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u)$, $x \to t$, $u \to y'$, $\sigma \to \frac{1}{\sigma}$

$$g_\sigma(y') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int e^{iy't} g_{\frac{1}{\sigma}}\, dt$$

$$\begin{aligned} E\left(f(X+\sigma Y)\right) &= \iiint f(x+y') \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{iy't} g_{\frac{1}{\sigma}}(t)\, dt\, dy'\, d\mu(x) \quad z = x + y' \text{ garde } t, x \\ &= \iiint f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{i(z-x)t} g_{\frac{1}{\sigma}}(t)\, dt\, dz\, d\mu(x) \end{aligned}$$

Par le theorem de Fubini

$$\left| f(z) e^{i(z-x)t} g_{\frac{1}{\sigma}} \right| \leq \|f\|_\infty g_{\frac{1}{\sigma}}(t)$$

f support compact, $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda \otimes \lambda)$

$$
\begin{aligned}
E\left(f(X+\sigma Y)\right) &= \int_z \int_t f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{izt} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \left(\int_x e^{-itx} \, d\mu(x) \right) \, dt \, dz \\
&= \int_z \int_t f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{izt} g_{\frac{1}{\sigma}}(t) \phi_\mu(-t) \, dt \, dz
\end{aligned}
$$

Ainsi, la loi de $X + \sigma Y$ est déterminée par ϕ_μ.

Faisons $\sigma \to 0$. Je dis que $X + \sigma Y \xrightarrow{L} X$, $\sigma \to 0$ et donc la loi de X est déterminée par la famille de variable aléatoire $X + \sigma Y$, $\sigma > 0$ dont les lois sont déterminées par ϕ_μ.

Je dis que $X + \sigma Y \xrightarrow{P} X$. En effet: soit $\varepsilon > 0$

$$
P\left(|X + \sigma Y - X| > \varepsilon\right) = P\left(\sigma |Y| > \varepsilon\right) = P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)
$$

$$
\lim_{\sigma \to 0} P\left(|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = P\left(\bigcap_{\sigma > 0} \left\{|Y| > \frac{\varepsilon}{\sigma}\right\}\right) = P\left(|Y| = +\infty\right) = 0
$$

$$
X + \sigma Y \xrightarrow{P} X \Rightarrow X + \sigma Y \xrightarrow{L} X
$$

here picture of all convergences

Prouvons finalement: $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$

Soit x un point de continuité de F_X.

$$
P(X_n \leq x) = F_{X_n}(x) \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) + P(X \leq x + \varepsilon)
$$

$$
\limsup_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(X + \varepsilon) \forall \varepsilon > 0
$$

$$
P(X \leq x - \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) + P(X_n \leq x)
$$

$$
F_X(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n \to +\infty} F_{X_n}(x)
$$

avec $F_X(x - \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} F_X(x)$ car F_X continue en x. □

CHAPTER 3

Lecture 10: Le Théorème Limite Central

3.1 Le théorème de Paul Lévy

Theorem 3.1 *(de Paul Lévy)* — Soit X, X_n, $n \in \mathbb{N}$ des variables aléatoires réelles et soit ϕ_X, ϕ_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$ leurs fonctions caractéristiques. Nous avons équivalence entre:

i) $X_n \xrightarrow{L} X$

ii) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(u) = \phi_X(u)$

Proof — Sens facile:

- i) $\Rightarrow$ ii)

$$\phi_{X_n}(u) = E\left[e^{iuX_n}\right] = E[\cos(uX_n)] + iE[\sin(uX_n)]$$

Le fonctions $x \mapsto \cos(ux), \sin(ux)$ u étant fixé sont continues bornées et donc par la définition de la convergence en loi

$$E[\cos(uX_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[\cos(ux)]$$
$$E[\sin(uX_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[\sin(ux)]$$

et donc

$$\phi_{X_n}(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_X(u)$$

- ii) $\Rightarrow$ i)

Nous utilisons la même stratégie que pour prouver l'injectivité de la transformation de Fourier des mesures de probabilités. Nous supposons que X, X_n, $n \in \mathbb{N}$ sont toutes définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sur lequel est aussi définie une variable aléatoire Y, indépendante de X, X_n, $n \in \mathbb{N}$ et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Nous supposons ii) vraie et nous voulons montrer que $X_n \xrightarrow{L} X$.

Soit $\sigma > 0$ et écrivons

$$E[f(X_n)] - E[f(X)] = E[f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)] + E[f(X_n + \sigma Y)] - E[f(X + \sigma Y)] + E[f(X + \sigma Y) - f(X)]$$

Comme f est continue à support compact, elle est uniformément continue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}\, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit δ associé à ε comme ci-dessus. Écrivons

$$|E(f(X_n) - f(X_n + \sigma Y))| \leq E(|f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)|)$$
$$= \int_{|\sigma Y| \geq \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)|\, dP + \int_{|\sigma Y| < \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)|\, dP$$

$$\int_{|\sigma Y| \geq \delta} ||\, dP \leq 2\|f\|_\infty \int_{|\sigma Y| \geq \delta} 1\, dP = 2\|f\|_\infty P(|\sigma Y| \geq \delta)$$

Je dis que

$$\lim_{\sigma \to 0} P(|\sigma Y| > \delta) = \lim_{\sigma \to 0} P\left(|Y| > \frac{\delta}{\sigma}\right) = 0$$

donc

$$\exists \sigma_0\, 2\|f\|_\infty P\left(|\sigma_0 Y| \geq \delta\right) < \varepsilon$$
$$\int_{|\sigma Y| < \delta} |f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)|\ dP < \varepsilon$$

On a donc $|E[f(X_n) - f(X_n + \sigma Y)]| < 2\varepsilon$ vraie pour tout n!. Par le même argument, on a $|E[f(X + \sigma_0 Y) - f(X)] < 2\varepsilon$. Reste le terme du milieu. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ |E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq 2\varepsilon + |E[f(X_n + \sigma Y) - f(X + \sigma Y)]| + 2\varepsilon$$

Nous utilisons la formule du cours précédent

$$E[f(X_n + \sigma_0 Y)] \iint_{u,z} f(z) e^{iuz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} g_{\frac{1}{\sigma}}(u) \phi_{X_n}(-u)\, du\, dz$$

Posons

$$F_n(u, z) = f(z) e^{iuz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} g_{\frac{1}{\sigma_0}}(u) \phi_{X_n}(-u)$$
$$|F_n(u, z)| \leq |f(z)| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} g_{\frac{1}{\sigma_0}}(u)$$

domination par une fonction qui ne dépend pas de n et qui est dans $\mathcal{L}^1\left(d\lambda(u),\ d\lambda(z)\right) = \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^2, d\lambda(u),\ d\lambda(z)\right)$

Par le TCD:

$$\exists N\ \forall n \geq N\ \ |E[f(X_n + \sigma_0 Y)] - E[f(X + \sigma_0 Y)]| < \varepsilon$$

Alors, pour $n \geq N$

$$|E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon < 5\varepsilon$$

□

3.2 Moments

Proposition 3.2.1 — Soit X une variable aléatoire réelle. Soit $k \geq 1$ et supposons que $E[|X|^k] < +\infty$. Alors ϕ_X est k fois dérivable. Et de plus

$$E[X^k] = i^k \phi_X^{(k)}(0)$$

Proof —

$$\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\, dP_X(x)$$

Faisons le cas où $k = 1$: $E[|X|] < +\infty$. Il s'agit d'une intégrale à paramètre et on veut donner par rapport à u. Pose $F(x, u) = e^{iux}$ On

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, u) = ixe^{iux}$$

$|\frac{\partial F}{\partial u}(x,u)| \leq |x|$ fonction majorante qui est P_X intégrable et qui ne dépend pas de u.

Thm de dérivation: ϕ_X dérivable et

$$\phi_X^{'}(u) = \int \frac{\partial F}{\partial u}(x,u)\,dx = i\int xe^{iux}\,dP_X(x)$$

d'où

$$\phi_X^{'}(0) = i\int x\,dP_X(x) = iE(X)$$

Ce résultat de (re)trouver facilement la suite des moments. □

3.3 Exemples

Example 3.3.1 — $X \sim \mathcal{U}([-1,1])$

$$\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}1_{[-1,1]}\frac{1}{2}\,dx = \frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2iu} = \frac{\sin u}{u} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$$

car

$$\sin u = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

d'où $\phi_X^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n)! = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$$E[X^{2n}] = \frac{1}{2n+1}$$

et

$$E[X^2n] = \int_{-1}^{1} x^{2n}\frac{1}{2}\,dx$$

Example 3.3.2 *(Gaussienne)* — $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\phi_X(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\frac{u^{2n}}{2^n}$$

d'où

$$\phi_X^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!2^n} = (i)^{2n}E[X^{2n}]$$

d'où

$$E[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n!2^n}$$

3.4 Convolution

Lemma 3.4.1 — Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors,

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$$

Proof —

$$\phi_{X+Y}(u) = E[e^{iu(X+Y)}] = E[e^{iuX}e^{iuY}] = E[e^{iuX}]E[e^{iuY}] = \phi_X(u)\phi_Y(u)$$

car indépendante. □

COROLLARY 3.4.2 — Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires i.i.d. alors

$$\phi_{X_1+\dots+X_n}(u) = (\phi_{X_1}(u))^n$$

Supposons que X variable aléatoire une loi de densité f et Y une variable aléatoire de densité g et X, Y indépendantes. Alors,

$$\phi_{X+Y}(u) = \iint_{x,y} e^{iu(x+y)} f(x)g(y)\, dx\, dy$$

Pose $z = x + y$, garde x, remplace y.

$$\phi_{X+Y}(u) = \iint_{x,z} e^{iuz} f(x)g(z-x)\, dx\, dz \quad \text{Fubini}$$

$$= \int_z \left(\int_x f(x)g(z-x)\, dx \right) dz = \int e^{iuz} h(z)\, dz$$

où

$$h(z) = \int f(x)g(z-x)\, dx = (f * g)(z)$$

produit de convolution de f et g.

Par identification des deux formules, on conclut que $X + Y$ a une loi de densité $f * g$.

EXAMPLE 3.4.3 — $g = g_\sigma(x)$

$$f * g_\sigma(z) = \int f(x) g_\sigma(z-x)\, dx = \int f(z-x) g_\sigma(x)\, dx$$

Dès que f et g sont dans $\mathcal{L}^1$, le produit de convolution $f * g$ est bien définie et aussi dans $\mathcal{L}^1(\lambda)$

3.5 Le théorème limite central

THEOREM 3.2 *(LIMITE CENTRAL)* — Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d qui admettent un moment d'ordre 2. Posons $m = E[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

REMARK 3.5.1 — Attention, il faut abosolument centrer les variables aléatoires en soustrayant $nE[X_1] = nm$. Par contre, on peut normaliser $\sqrt{nVar(X_1)}$, i.e

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \to \mathcal{N}(0, 1)$$

Il s'agit d'une résultat universel. Dès que les variables aléatoires (X_n) ont un moment d'ordre 2, les fluctuations de $X_1 + \dots + X_n$ autour de sa moyenne sont décrites par la loi gaussienne.

Le TLC ou TCL est un raffinement de la loi des grands nombres, sous l'hypothèse d'existence d'un moment d'ordre 2.

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = E[X_1] + \frac{R_n}{\sqrt{n}}$$

avec R_n une variable aléatoire (représentant le reste) qui $R_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Histoire: Abraham de Moivre (1733). The doctrine of chances.

Pierre Simon de laplace (1812).

Lindeberg.

Turing 1934.

Proof — Posons $Y_n = \frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}}$ et aussi $\tilde{X}_k = X_k - m$ pour $1 \leq k \leq n$ et étudions la convergence en loi de Y_n à l'aide des fonctions caractéristiques.

$$\phi_{Y_n}(u) = E[e^{iuY_n}] = E\left(e^{iu(\frac{\tilde{X}_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{\tilde{X}_n}{\sqrt{n}})}\right) = E\left(e^{iu\frac{\tilde{X}_1}{\sqrt{n}}}\right)\ldots E\left(e^{iu\frac{\tilde{X}_n}{\sqrt{n}}}\right) = \left(\phi_{\tilde{X}_1}(\frac{u}{\sqrt{n}})\right)^n$$

$\phi_{\tilde{X}_1}(u)$ est 2 fois dérivable car $E[\tilde{X}_1^2] < +\infty$ et donc elle admet un développement limité à l'ordre 2.

$$\begin{aligned}\phi_{\tilde{X}_1}(u) &= \phi_{\tilde{X}_1}(0) + u\phi'_{\tilde{X}_1}(0) + \frac{u^2}{2}\phi''_{\tilde{X}_1}(0) + o(u^2)\\ &= 1 + iE[\tilde{X}_1]u - \frac{u^2}{2}E[\tilde{X}_1^2] + o(u^2)\end{aligned}$$

$$\phi_{\tilde{X}_1}(u) = 1 + 0 - \frac{\sigma^2u^2}{2} + o(u^2) \qquad \sigma^2 = E[\tilde{X}_1^2]$$

d'où

$$\phi_{\tilde{X}_1}(\frac{u}{\sqrt{n}}) = 1 - \frac{\sigma^2u^2}{2n} + o(\frac{1}{n}) \quad n \to +\infty$$

d'où

$$\begin{aligned}\phi_{Y_n}(u) &= \left(1 - \frac{\sigma^2u^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)^n\\ &= \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{\sigma^2u^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\sigma^2u^2}{2} + o(1)\right) \to e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}} = \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(u)\end{aligned}$$

Ici on utilise le ln complexe

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

□

CHAPTER 4

Lecture 11: Processus de Poisson

4.1 Introduction

Nous voulons modéliser des événements qui arrivent à des dates précises mais imprévisibles.

Example 4.1.1 — Séismes, désintégration des atomes, pluie, début ou fin d'appel téléphoniques.

À chaque occurrence d'un événement, nous marquons un impact sur l'axe des temps:

Figure 4.1: exemple-laxe-temps-processus-poisson2

Hypothèses:

i) Les conditions de l'expérience ne changent pas au cours du temps

ii) Les nombres d'impacts dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

Pour $t \geq 0$, nous notons $N(t)$ le nombre d'impacts dans $[0, t]$. Nous avons une famille de v.a. $(N(t))_{t\geq 0}$ indexée par un paramètre continu: c'est un processus stochastique.

4.2 Construction d'un modèle discret

Soit $n \geq 1$ un entier: Nous subdivisons l'axe réel en intervalles de longueur $\frac{1}{n}$: $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, $k \geq 0$

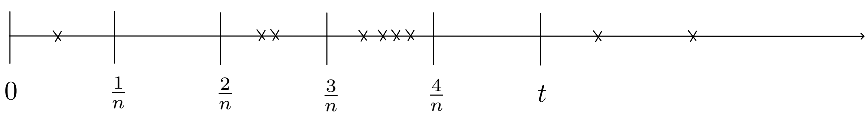

Figure 4.2: subdivision axe processus poisson

Un intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ est dit occupé s'il contient au moins un impact et vide sinon. Notons p_n la probabilité qu'un intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ soit occupé. Par l'hypothèse $i)$, p_n ne dépend pas de l'intervalle.

Pour $t > 0$, nous notons $N_n(t)$ le nombre d'intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ qui sont inclus dans $[0, t]$ ($\frac{k+1}{n} \leq t$) et qui sont occupés. Par l'hypothèse $ii)$, les états vides ou occupés de ces intervalles sont indépendants et $N_n(t)$ suit la loi binomiale $B(\lfloor nt \rfloor, p_n)$

Étudions la limite en loi de $N_n(t)$ par exemple à l'aide des fonctions caractéristiques:

$$\phi_{N_n(t)}(u) = E(e^{iuN_n(t)})$$

Hypothèse: $p_n \to 0$, sinon le modèle explose

$$\begin{aligned}\phi_{N_n(t)}(u) &= (1 - p_n + p_n e^{iu})^{\lfloor nt \rfloor} \\ &= e^{\lfloor nt \rfloor} \ln(1 + p_n(e^{iu} - 1)) \\ &= e^{\lfloor nt \rfloor}(p_n(e^{iu} - 1) + o(p_n)) \\ &= e^{\lfloor nt \rfloor} p_n(e^{iu} - 1) + o(np_n)\end{aligned}$$

Supposons $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{N_n(t)}(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$$

et donc

$$N_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

Remark 4.2.1 — $x \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}\, P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E[X] = \lambda \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda \qquad \phi_X(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$$

4.3 Instants de saut

Nous avons montré que, à t fixé, $N_n(t) \to \mathcal{P}(\lambda t)$, mais en fait la fonction $t \mapsto N_n(t)$ est une fonction aléatoire nulle en 0, croissante, d'accroissements 0 ou 1.

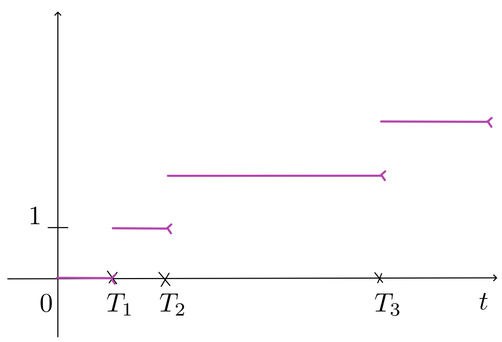

Figure 4.3: instants-de-sauts

La loi de la fonction aléatoire $t \mapsto N_n(t)$ converge-t-elle quand $n \to \infty$?

Nous définissons les instants de sauts de $N_n(t)$:

$$\forall k \geq 1\, T_k^n = \inf\{t \geq 0 : N_n(t) = k\}$$

la fonction $N_n(t)$ est complément déterminée par ses instants de saut: en effet

$$N_n(t) = \sum_k k 1_{[T_k^n, T_{k+1}^n[}(t)$$

Examinons la convergence des instrants de saut T_k^n et commençons par T_1^n. Soit $i \geq 0$, regardons

$$P(T_1^n > \frac{i}{n}) = P([0, \frac{1}{n}[, \dots, [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[\text{ vide})$$

.

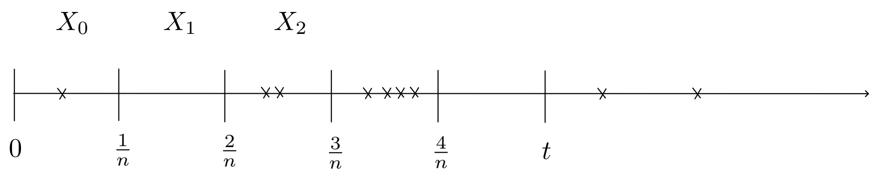

Figure 4.4: introduisons-suite-de-vas-convergence-sauts

Nous introduisons une suite de variables aléatoires X_k, $k \geq 0$ tq:

$$X_k = \begin{cases} 0 \text{ si l'intervalle } [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[\text{ vide} \\ 1 \text{ si l'intervalle } [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[\text{ occupé} \end{cases}$$

$$P(T_1^n > \frac{i}{n}) = P(X_0 = 0, \dots, X_{i-1} = 0) = (1 - p_n)^i$$

d'où

$$\forall t > 0\, P(T_1^n > t) = (1 - p_n)^{\lfloor nt \rfloor} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda t}$$

comme $(1 - p_n)^{\lfloor nt \rfloor} = e^{\lfloor nt \rfloor} \ln(1 - p_n)$ et $np_n \to \lambda$ et $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, d'où

$$\forall t\, F_{T_1^n}(t) \to 1 - e^{-\lambda t}$$

d'où

$$T_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Exp}(\lambda)$$

Remark 4.3.1 — Une variable aléatoire X suit la loi $\text{Exp}(\lambda)$ si sa loi est de densité

$$1_{\mathbb{R}^+}(x) \lambda e^{-\lambda x}$$

et alors

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

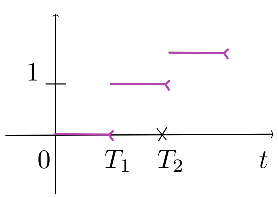

Figure 4.5: sauts-loi-exp

Je dis que $T_2^n - T_1^n$ est indépendant de T_1^n et il a même loi:

Vérifions: soit $i, j \geq 1$ et regardons

$$\begin{aligned} P(T_1^n = \frac{i}{n}, T_2^n - T_1^n = \frac{j}{n}) &= P(X_0 = 0, X_1 = 0, \dots, X_{i-1} = 0, X_i = 1, X_{i+1} = 0, \dots, X_{i+j-1} = 0, X_{i+j} = 1) \\ &= (1 - p_n)^i p_n (1 - p_n)^j p_n^j \end{aligned}$$

d'où le résultat

$$= P(T_1^n = \frac{i}{n}) P(T_2^n - T_1^n = \frac{j}{n})$$

aussi

$$(T_1^n, T_2^n - T_1^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Exp}(\lambda) \otimes \text{Exp}(\lambda)$$

deux lois exponentielles indépendantes.

Par récurrence, on montre que

$$(T_1^n, T_2^n - T_1^n, \dots, T_k^n - T_{k-1}^n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} (\text{Exp}(\lambda))^{\otimes k}$$

4.4 Le processus de Poisson

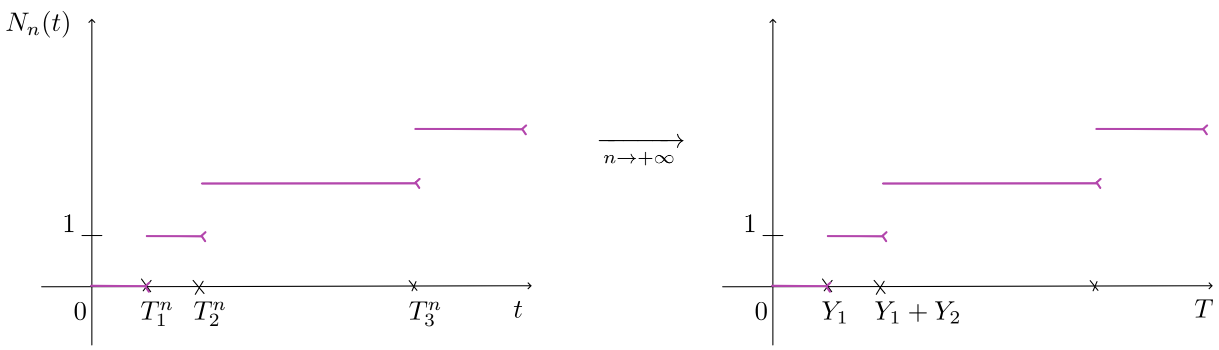

Figure 4.6: nnt-de-t

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. Exp(α). Posons

$$\forall n \geq 1\, S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$$

Définissons

$$\forall t \geq 0\, N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$$

Alors $(N(t))_{t \geq 0}$ est le processus de Poisson d'intensité λ. Pour chaque t, $N(t)$ est une variable aléatoire $\mathcal{P}(\lambda t)$, mais nous avons construit un continum de variables aléatoires $(N(t), t \geq 0)$ sur le même espace de probas !

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \text{ p.s.}$$

$N(t)$ est l'unique indice tq $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$

4.5 La loi exponentielle

La loi qui régit l'intervalle entre 2 impacts successifs est la loi Exp(λ). Elle surgit comme limite de lois géométriques renormalisées ?

Si $X \sim \text{Geom}(\frac{\lambda}{n})$,

$$\frac{1}{n} X \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Exp}(\lambda)$$

Ces 2 lois possèdent une propriété remarquable, l'absence de mémoire ! i.e

$$\forall s, t > 0\, P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t)$$

La loi du temps résiduel à attendre sachant qu'on a déjà attendu s est la même que la loi du temps d'attente total.

Elles sont utilisées pour modéliser des phénomènes qui ne présentent pas de vieillissement:

- temps de vie d'un atome
- durée d'un appel téléphonique incohérent

4.6 Applications

Carte de Londres. 537 impacts. Quadrillage $0,25$ km^2 $\to$ 576 carrés donc $0,9323$ impacts/carré

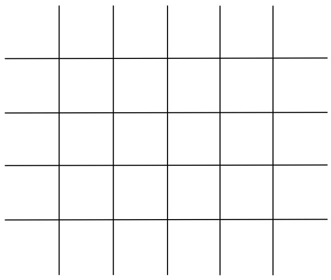

Figure 4.7: carte-de-londres

k impacts	0	1	2	3	4	5
relevés	229	211	93	35	7	1
$576\mathcal{P}(0,9323)$	226,74	211,39	98,54	30,62	7,14	1,57

Autobus: Les arrivées de bus à un arrêt sont modeliées par un processus de $\mathcal{P}(\alpha)$, le temps moyen entre 2 bus est $\frac{1}{\alpha}$. J'arrive à l'instant t. quel sera mon temps d'attente ?

1$^{\text{er}}$ raisonnement: Vu l'absence de memoire de la loi $\text{Exp}(\alpha)$, mon temps d'attente suit une loi $\text{Exp}(\alpha)$ donc en moyenne $\frac{1}{\alpha}$.

2$^{\text{eme}}$ raisonnement: j'arrive au hasard entre 2 bus, par symétrie, mon temps moyen d'attente est la moitié de la longueur typique de s intervalles $\frac{1}{2\alpha}$

$$S_n = Y_1 + \ldots + Y_n \qquad N(t)$$

S_n instants d'arrivées des bus. Soit K tel que

$$S_{K-1} < t \leq S_{K-1} + Y_K$$

Mon temps d'attente est $S_k - t$ et temps moyen $E[S_K - t]$ mais cet intervalle Y_K ne suit pas la loi exponentielle et donc (pas $\frac{1}{2\alpha}$ mais $\frac{2}{2\alpha}$)

CHAPTER 5

Lecture 12: Percolation

5.1 Le problème

Immergons une pierre spongieuse dans l'eau. Elle contient plein canaux

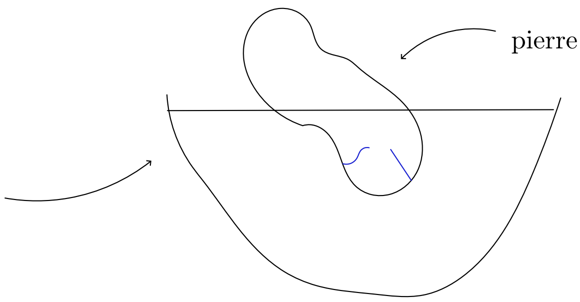

Figure 5.1: pierre-dans-l-eau

$$\text{molécule d'eau} \ll \text{ diamètre canal } \ll \text{ pierre}$$

Le centre de la pierre sera-t-il mouillé?

En 1957, Broadbent et Hammersley inventèrent le modèle math de la percolation, pour étudier les milieux poreux aléatoires.

5.2 Le réseau carré

Definition 5.2.1 — Un graphe est un couple (V, E) où

- V est un ensemble de points: les sommets
- E un ensemble des paires de points de V: les arrêtes (edges)

Example 5.2.2 — $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{\{2, 3\}\}$

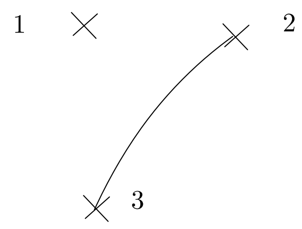

Figure 5.2: graphe-simple-example

Nous munissons $\mathbb{Z}^2$ d'une structure de graphe. L'ensemble $\mathbb{E}^2$ des arrêtes est constitué des paires $\{x, y\}$ où $x, y \in \mathbb{Z}^2$ sont plus proches voisins, i.e. $|x - y|_2 = 1$

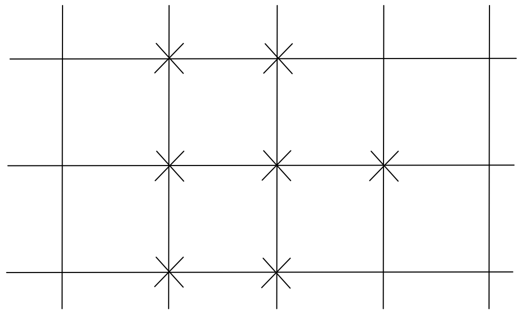

Figure 5.3: reseau-carree-example

Definition 5.2.3 — Le réseau carré est le graphe $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$.

Definition 5.2.4 — Un chemin est une suite de sommets $x_0, x_1, \dots, x_n$, 2 à 2 distincts tels que: pour tout $i \geq 0$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arrête. Si le chemin s'arrête au sommet x_n, nous disons qu'il relie x_0 à x_n et qu'il est fini de longueur n. S'il est infini, nous disons qu'il relie x_0 à l'infini.

Definition 5.2.5 — Un circuit est un chemin $x_0, \dots, x_n$ tels que x_0 et x_n sont voisins. Un tel circuit a pour longueur $n + 1$.

5.3 L'espace de probabilité

Les arrêtes du graphe jouent le rôle des canaux. Nous allons les ouvrir ou les fermer au hasard, indépendamment, avec proba $p \in]0, 1[$.

Ouvrir - l'eau peut passer, fermer - bloquer.

Nous prennons comme space de configurations

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$$

Un élément ω de Ω est une fonction de $\mathbb{E}^2 \to \{0, 1\}$. L'arrête $e \in \mathbb{E}^2$ est ouverte (resp. fermé) dans la configuration ω si $\omega(e) = 1$ (resp. 0).

Nous munissons Ω de la tribu $\mathcal{F}$ cylindrique, engendré par les événements de la forme:

$$\{\omega \in \Omega : \omega(e_1) = \varepsilon_1, \dots, \omega(e_n) = \varepsilon_n\}, n \geq 1, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{E}^2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$$

A-t-on que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$? Nous munissons finalement l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ de la proba

$$P_p = \oplus_{e \in \mathbb{E}^2}((1 - p)\delta_{\omega(e)=0} + p\delta_{\omega(e)=1})$$

produit tensoriel des Bernoulli(p).

5.4 Les clusters ouverts

Nous tirons au hasard l'état des arrêtes. Nous enlevons les arrêtes fermés.

Nous obtenons ainsi un graphe aléatoire. Précisement, soit ω une configuration. Nous considérons le graphe de sommets les points de $\mathbb{Z}^2$, et d'arêtes les arrêtes ouvertes dans ω uniquement.

Le but de la percolation est de comprendre la géométrie de ce graphe aléatoire.

Si $x \in Z^2$, la composante connexe de x dans ce graphe est appelé le cluster ouvert de x, dans ω et est noté $C(x, \omega)$.

Si $x, y \in \mathbb{Z}^2$, on note $\{x \leftrightarrow y\}$ l'événement: il existe dans ω un chemin qui relie x à y et dont toutes les arêtes sont ouvertes. Alors

$$C(x) = \{y \in \mathbb{Z}^2 : y \leftrightarrow x\}$$

Ainsi $C(x) = C(x, \omega)$ est un ensemble aléatoire avec $|C(x, \omega)|$ cardinal.

5.5 La probabilité de percolation

La quantité fondamentale pour analyser le modèleest

$$\Theta(p) = P_p(|C(0)| = \infty) = P_p(\leftrightarrow \infty)$$

$$\Theta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

- $\Theta(0) = 0$
- $\Theta(1) = 1$
- Θ croissante

Pour cela on utilise un couplage; i.e, on construit un espace $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2, P)$ tel que sous P la loi de la $1^{\text{ère}}$ marginale ω_1 est p_1, 2^{nde} marginale ω_2 et tel que toutes les arêtes ouvertes dans ω_1 le sont aussi dans ω_2. Si on a pu faire cela, alors

$$\begin{aligned}\Theta(p_1) = P_{p_1}(0 \leftrightarrow \infty) &= P(0 \leftrightarrow \infty \text{ dans } \omega_1) \\ &\leq P(0 \leftrightarrow \infty \text{ dans } \omega_2) = P_{p_2}(0 \leftrightarrow \infty) = \Theta(p_2)\end{aligned}$$

$p_1 < p_2$ et $x_1 \leq x_2$

On prends $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et on pose $X_\phi = 1_{U \leq p}$, $P(X_p = 1) = p$, alors $0 \leq p \leq 1$ et $X_{p_1} \leq X_{p_2}$.

5.6 La transition de phase

Le modèle de percolation est fascinant car c'est le modèle le plus simple qui présente une transition de phase.

Theorem 5.1 — Il existe une valeur critique p_c strictement entre 0 et 1 tel que:

$$\Theta(p) = 0 \text{ si } p < p_c \text{ et } \Theta(p) > 0\, p > p_c$$

Proof — Montrons que $p_c > 0$,

$$P_c = \sup\{p \in [0,1] : \Theta(p) = 0\}$$

Soit $n \geq 1$, $\Theta(p) = P_p(0 \leftrightarrow \infty) \leq P_p$, (il existe chemin de longueur n issu de 0 dont les arêtes sont ouvertes).

$$\Theta(p) = P_p\left(\bigcup_{x_0=0,\dots,x_n \text{ chemin}} \{\text{ les arêtes de} x_0, \dots, x_n \text{ sont ouvertes}\}\right)$$

$$\begin{aligned}\Theta(p) &\leq \sum_{x_0=0,\ldots,x_n} P\,(\text{les arêtes de } x_0,\ldots,x_n \text{ sont ouvertes})\\ &= p^n|\{\text{chemins } x_0,\ldots,x_n \text{ issus de } 0\}|\\ &= p^n|\{\text{chemins de longueur } n \text{ issus de } 0\}| \leq p^n \cdot x \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 4\cdot 3^{n-1} \leq 4p^n 3^{n-1}\end{aligned}$$

donc $\Theta(p) = 0$.

$p_c < 1$. Dualité, le reseau dual de $\mathbb{Z}^2$ est $\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \mathbb{Z}^{2*}$. À une arête du reseau $\mathbb{Z}^2$ nous associons l'arête e^* de $\mathbb{Z}^{2*}$ tel que e et e^* se coupent orthogonalement en leur milieu. Si e est ouverte dans ω, nous déclarons e^* ouverte dans ω^*. Le modèle est auto-dual.

$\Theta(p) > 0$ pour p proche de 1.

$$1 - \Theta(p) = 1 - P_p(|C(0)| = \infty) = P_p(|C(0)| < \infty)$$

Fait topologique: Si $C(0)$ est fini, alors il existe un circuit dual d'arêtes fermées qui entoure 0.

$$\begin{aligned}1 - \Theta(p) &\leq P_p(\exists \text{ circuit dual fermé entourant } 0)\\ &= P_p\left(\bigcup_{\gamma = x_0^*\ldots x_n^* \text{ circuit dual entourant } 0} \{\text{les arêtes de } \gamma \text{ sont fermés}\}\right)\\ &= P_p\left(\bigcup_{n\geq 4}\ \bigcup_{\exists\gamma \text{ dual fermé longueur } n}\right) \leq \sum_{n\geq 4}\sum_{\gamma} P(\text{les arêtes de } \gamma \text{ sont fermées})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 - \Theta(p) &\leq \sum_{n\geq 4}\sum_{\gamma}(1-p)^n = \sum_{n\geq 4}(1-p)^n|\{\text{circuits fermés de longueure } n \text{ entourant } 0\}|\\ &\leq \sum_{n\geq 4}(1-p)^n n 4 3^{n-1} \xrightarrow[p\to 1]{}\\ &\leq (1-p)^4 \sum\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{p\to 1}\Theta(p) = 1$$

et donc $p_c < 1$.

Allure de Θ

Kesten 1980, $p_c = \frac{1}{2}$, $d \geq 3$ □