

Aide-Mémoire : Probabilités (MDD303)

Basé sur le polycopié de cours

1

Espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

- Ω : Ensemble des résultats possibles.
- \mathcal{F} : Tribu (σ -algèbre). Contient Ω , stable par complémentaire et union dénombrable.
- \mathbb{P} : Mesure de probabilité ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$, σ -additive).

Tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: Plus petite tribu contenant les intervalles ouverts/fermés de \mathbb{R} .

Variable Aléatoire (v.a.) : Application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable (i.e., $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Loi d'une v.a. \mathbb{P}_X : Mesure sur \mathbb{R} définie par $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$.

1.1 Espérance et Variance

Espérance : $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$.

- Si $X \geq 0$, $\mathbb{E}[X] = \sup\{\mathbb{E}[\delta] : \delta \text{ étagée}, 0 \leq \delta \leq X\}$.
- Cas général : $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$. Intégrable si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.

Variance : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

2

Mesure de Lebesgue (λ) : Unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\lambda([a, b]) = b - a$.

Loi à densité : Il existe $f \geq 0$ borélienne telle que :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

Condition : $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$.

Formule de Transfert (Fondamentale) :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\Omega} g(X(\omega)) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{P}_X(x)$$

Si densité f : $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$

Lois usuelles :

- **Uniforme** $\mathcal{U}([a, b])$: $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$.
- **Exponentielle** $\mathcal{E}(\alpha)$: $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
- **Normale** $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

3

Événements : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. **Variables** : X_1, \dots, X_n sont indép. si $\forall B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i)$$

Propriétés :

- X, Y indép $\implies \mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$.
- X, Y indép et intégrables $\implies \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
- X, Y indép $\implies \text{Cov}(X, Y) = 0$ (Réciproque fausse).
- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ (si indép).

Lemme des coalitions : Si X_i indép, les fonctions de paquets disjoints $(f(X_1, X_2), g(X_3))$ sont indép.

4

Modes de convergence :

1. **Presque sûre (p.s.)** : $\mathbb{P}(\lim X_n = X) = 1$.
2. **En moyenne** (L^r) : $\lim \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = 0$.
3. **En probabilité** (\mathbb{P}) : $\forall \epsilon > 0, \lim \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$.

Hiérarchie :

$$L^r \implies \mathbb{P} \text{ et } p.s. \implies \mathbb{P}$$

(p.s. n'implique pas L^r et vice-versa).

Lemmes de Borel-Cantelli (Évènement A_n i.s. = infiniement souvent) :

1. $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 0$.
2. $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$ ET (A_n) **indépendants** $\implies \mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 1$.

5

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec X_i i.i.d. **Critère de récurrence** : La marche repasse par 0 une infinité de fois p.s. ssi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$$

Résultats (Marche symétrique sur \mathbb{Z}^d) :

- $d = 1$: Récurrence ($\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$).
- $d = 2$: Récurrence ($\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\pi n}$).
- $d \geq 3$: Transiente ($\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim n^{-d/2}$).

6

Tribu asymptotique (de queue) : $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$.

Loi du 0-1 de Kolmogorov : Si (X_n) indépendants, tout événement $A \in \mathcal{T}$ vérifie $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. *Exemple : convergence d'une série aléatoire.*

Inégalité de Kolmogorov : Pour X_i centrées indép. :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \text{Var}(S_n)$$

7

Inégalités :

- Markov ($X \geq 0$) : $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$.
 - Bienaymé-Chebyshev : $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}$.
- Soit (X_n) i.i.d avec $\mathbb{E}[X_1] = m$.

Loi Faible (WLLN)

Si moment d'ordre 2 (ou 1) existe :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} m$$

Loi Forte (SLLN)

Si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} m$$

TCL

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Interprétation : La somme de v.a. i.i.d. centrées réduites converge vers une Gaussienne standard.

8

Définition $(X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X)$: Pour toute fonction f continue bornée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

Fonction de Répartition : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Caractérise la loi. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ en tout point de continuité de F_X .

9

Définition : $\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} d\mathbb{P}_X(x)$. **Propriétés** :

- $\phi_X(0) = 1$, $|\phi_X(u)| \leq 1$, continue.
- **Injectivité** : ϕ_X caractérise la loi de X .
- **Indépendance** : X, Y indép $\implies \phi_{X+Y} = \phi_X \cdot \phi_Y$.
- **Moments** : $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.
- **Affine** : $\phi_{aX+b}(u) = e^{iub} \phi_X(au)$.

Théorème de Paul Lévy : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall u, \phi_{X_n}(u) \rightarrow \phi_X(u)$.

Tableau des f.c. usuelles :

Loi	$\phi_X(u)$
$Ber(p)$	$1 - p + pe^{iu}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\exp(\lambda(e^{iu} - 1))$
$\mathcal{E}(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\alpha - iu}$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$e^{i um - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2}$
$\mathcal{U}([a, b])$	$\frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$

10

Soit (X_n) i.i.d avec $\mathbb{E}[X_i] = m$ et $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

11

Modélise des événements rares/aléatoires (sauts). **Définition** : Processus de comptage $(N(t))_{t \geq 0}$.

- Accroissements indépendants et stationnaires.
- $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

Instants de saut T_n :

- Temps inter-arrivées $Y_i = T_i - T_{i-1}$ sont i.i.d $\sim \mathcal{E}(\lambda)$.
- Temps d'arrivée $T_n = \sum Y_i \sim \Gamma(n, \lambda)$.

12

Modèle de milieux poreux. Chaque arête est ouverte avec proba p , fermée avec $1 - p$. **Cluster ouvert** $C(0)$: composante connexe de 0. **Probabilité de percolation** : $\Theta(p) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty)$.

Transition de phase : Il existe $p_c \in (0, 1)$ tel que :

- $p < p_c \implies \Theta(p) = 0$ (pas de percolation).
- $p > p_c \implies \Theta(p) > 0$ (percolation).

Théorème (Kesten) : Pour \mathbb{Z}^2 , $p_c = 1/2$.