

Prep partiel

Partiel 2025, Exercice P.3

1.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 16 & -16 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -6 & 12 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} -6 - \lambda & 16 & -16 & 5 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 - \lambda & -1 \\ -6 & 12 & -12 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det |A - \lambda \text{Id}| &= (2 - \lambda) \begin{pmatrix} -6 - \lambda & -16 & 5 \\ 1 & 4 - \lambda & -1 \\ -6 & -12 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{pmatrix} -\lambda & -4 & \lambda \\ 1 & 4 - \lambda & -1 \\ -6 & -12 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{pmatrix} -\lambda & -4 & 0 \\ 1 & 4 - \lambda & 0 \\ -6 & -12 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-1 - \lambda) \begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-1 - \lambda) \begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 - \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-1 - \lambda)(\lambda^2 + (4 - 4\lambda)) \\ &= (2 - \lambda)^2(-1 - \lambda) \end{aligned}$$

donc $\text{Spec}(A) = \{2, -1\}$. De plus $\lambda_1 = -1$ car c'est une valeur propre de multiplicité 1.

2. Espace propre de λ_1

$$\text{Ker}(A - \lambda_1 \text{ Id}) = \text{Ker}(A + \text{Id}) = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 16 & -16 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & -1 \\ -6 & 12 & -12 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 16 & -16 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \\ -6 & 12 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 16y - 16z + 5t = 0 \\ 3y = 0 \\ x - 2y + 5z - t = 0 \\ -6x + 12y - 12z + 6t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + -16z + 5t = 0 \\ y = 0 \\ x + 5z - t = 0 \\ -6x - 12z + 6t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + -16z + 5t = 0 \\ y = 0 \\ x + 5z - t = 0 \\ 18z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5t = 0 \\ x - t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(A + \text{Id}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}, \text{ d'où } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Sous-espace propre pour $\lambda_2 = 2$

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(A - \lambda_2 \text{ Id}) &= \text{Ker}(A - 2 \text{ Id}) = \begin{pmatrix} -8 & 16 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ -6 & 12 & -12 & 3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 16y - 16z + 5t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 0 \\ -6x + 12y - 12z + 3t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -3t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 0 \\ -6x + 12y - 12z + 3t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ -6x + 12y - 12z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 2y - 2z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda_2 \text{ Id}) = \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda_2 \text{ Id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Donc $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_2 \text{ Id})) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_1 \text{ id})) = 1$ et $2 + 1 \neq 4$ = qqch avec A, d'où la matrice A n'est pas diagonalisable. On note $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Trouver vecteur w pour trigonalisation

$$\begin{aligned}
& (A - \lambda_2 \text{ Id})w = v_2 = (A - 2 \text{ id})w = v_2 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} -8w_1 + 16w_2 - 16w_3 + 5w_4 = -2 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ w_1 - 2w_2 + 2w_3 - w_4 = 1 \\ -6w_1 + 12w_2 - 12w_3 + 3w_4 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} -8w_1 + 16w_2 - 16w_3 + 5w_4 = -2 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ w_1 - 2w_2 + 2w_3 - w_4 = 1 \\ 0 + 0 + 0 + -3w_4 = 6 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} -8w_1 + 16w_2 - 16w_3 + 5w_4 = -2 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ w_1 - 2w_2 + 2w_3 - w_4 = 1 \\ w_4 = -2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} -8w_1 + 16w_2 - 16w_3 = -2 - 5(-2) = 8 \\ w_1 - 2w_2 + 2w_3 = 1 + (-2) = -1 \\ w_4 = -2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} w_1 - 2w_2 + 2w_3 = -1 \\ w_4 = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Si on choisit $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, ce vecteur vérifie le système.

5 $B = (u_1, u_2, v_2, w)$ est une base de \mathbb{R}^4 . Donc P est la base des vecteurs trouvé (u_1, u_2, v_2, w) , d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

P est une matrice de passage donc elle est inversible (ses colonnes forment une base de \mathbb{R}^4 donc elles sont linéairement indépendantes)

6. Calcule de P^{-1}

$$\begin{aligned}
P^{-1} &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array} \right) \\
&\Rightarrow P^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

7. Résolution du système

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = X_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P^{-1}Y)' = P^{-1}APP^{-1}Y \\ (P^{-1}Y)(0) = P^{-1}X_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z' = TZ \\ Z(0) = P^{-1}X_0 \text{ et } Z = P^{-1}Y \end{cases}$$

$$Z(0) = \left(\begin{array}{cccc} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 8 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 18 \\ -3 \\ 0 \\ 13 \end{array} \right)$$

$T = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \hookrightarrow e^M = \sum_{k \geq 0} \frac{M^k}{k!}$$

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

$$e^D = \text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n})$$

N nilpotente, $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $N^p = 0$,

$$e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$$

D et N commutent et $N^2 = 0$ donc $e^{tT} = e^{tD} \times e^{tN}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{tD} &= \text{diag}(e^{-t}, e^{2t}, e^{2t}, e^{2t})(I + tN) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'unique solution du problème de Cauchy est pour $t \in \mathbb{R}$, $Z(t) = e^{tT}Z(0)$. Ainsi, l'unique solution globale du système est

$$Y(t) = PZ(t)$$