Relación.1 de Ejercicios de Apoyo

Grado de dificultad: Bajo(B), Medio(M), Alto(A)

El problema del Aprendizaje

1. (B) Elementos de un problema de Aprendizaje Estadístico.
   a) Un problema de aprendizaje estadístico se nota formalmente por su vector de elementos. Considere el vector $\{\mathcal{P}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{D}, f, \mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{H}, g\}$ ¿Que significan cada uno de los elementos del vector? ¿Hay alguna propiedad que deba de cumplir $\mathcal{D}$?
   b) Identifique los elementos del vector que representan:
      1) La entrada al aprendizaje
      2) La salida del aprendizaje
      3) El clase de funciones usada
      4) El algoritmo de búsqueda usado
      5) Cómo se mide el error en cada punto
      6) ¿Que es el criterio ERM y cómo influye en la búsqueda de la solución?
   c) Dada, $h \in \mathcal{H}$ ¿Cómo se define el error de h dentro (E_{in}) y fuera (E_{out}) de la muestra ?
2. (B) Identificar, para cada una de las siguientes problemas, cual es la tarea a realizar, que tipo de aprendizaje es el adecuado (supervisado, no supervisado, por refuerzo) y los elementos de aprendizaje $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, f)$ que deberíamos usar en cada caso. Si una tarea se ajusta a más de un tipo, explicar como y describir los elementos para cada tipo.
   a) Clasificación automática de cartas por distrito postal.
   b) Decidir si un determinado índice del mercado de valores subirá o bajará dentro de un periodo de tiempo fijado.
   c) Hacer que un dron sea capaz de rodear un obstaculo.

d) Dada una colección de fotos de perros, posiblemente de distintas razas, establecer cuantas razas distintas hay representadas en la colección.

e) Diagnostico médico: Un paciente llega con su historia médica y algunos sintomas, y se desea identificar el problema.

f) Reconocimiento de digitos manuscritos (p.e. para clasificación automática de códigos postales)

g) Determinar si un correo electrónico es spam o no.

h) Predecir como varía el consumo eléctrico con el coste, la temperatura y el día de la semana.

i) Suponga que tiene un problema para el que no conoce una solución analítica pero dispone de datos a partir de los cuales construir una solución empírica.

3. (B) ¿Cuales de los siguientes problemas son más adecuados para una aproximación por aprendizaje y cuales más adecuados para una aproximación por diseño? Justificar la decisión

   a) Determinar si un vertebrado es mamífero, reptil, ave, anfibio o pez.

   b) Determinar si se debe aplicar una campaña de vacunación contra una enfermedad.

   c) Determinar perfiles de consumidor en una cadena de supermercados.

   d) Determinar el estado anímico de una persona a partir de una foto de su cara.

   e) Determinar el ciclo óptimo para las luces de los semáforos en un cruce con mucho tráfico.

   f) Determinar los ingresos medios de una persona a partir de sus datos de nivel de educación, edad, experiencia y estatus social.

   g) Determinar la edad a la cual se debería pasar un determinado examen médico.

   h) Clasificar números en primos y no primos.

   i) Detectar potenciales fraudes en cargos a tarjetas de crédito.

   j) Determinar el tiempo que tardará un objeto que cae en tocar el suelo.

   k) Determinar el ciclo óptimo para las luces de los semáforos en un cruce con mucho tráfico.

4. (B) Construir un problema de *aprendizaje desde datos* para un problema de clasificación de fruta en una explotación agraria que produce mangos, papayas y guayabas. Identificar los siguientes elementos formales $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{D}, f$ del problema. Dar una descripción de los mismos que pueda ser usada por un computador. ¿Considera que en este problema estamos ante un caso de etiquetas con ruido o sin ruido? Justificar las respuestas.

5. (B) Identificar, para cada una de las siguientes tareas, que tipo de aprendizaje es el adecuado (supervisado, no supervisado, por refuerzo) y los datos de aprendizaje que

deberiamos usar. Si una tarea se ajusta a más de un tipo, explicar como y describir los datos para cada tipo.

a) Recomendar un libro a un usuario en una librería on-line.

b) Jugar al tres en raya

c) Categorizar películas entre diferentes tipos/categorias

d) Aprender a tocar un instrumento musical

e) Decidir el máximo crédito permitido para cada cliente de un banco

MATRICES

1. (B) Verificar las siguientes propiedades de las matrices

   a) Dada una matriz $\mathrm{X}(N \times d)$,$N > d$, de números reales las matrices $\mathrm{XX^T}$ y $\mathrm{X^TX}$ son simétricas.

   b) ¿Que representan los valores de traza($\mathrm{XX^T}$) y traza($\mathrm{X^TX}$)? (Ayuda: la traza de una matriz es la suma de los valores de su diagonal principal)

   c) Sea X una matriz de números reales, Sea $\mathrm{X} = \mathrm{UDV^T}$ su descomposición en valores singulares (SVD). Calcular la SVD de $\mathrm{X^TX}$ y $\mathrm{XX^T}$. Identifique alguna propiedad interesante de la SVD de matrices simétricas.

   d) Establezca una relación entre los valores singulares de las matrices $\mathrm{X^TX}$ y $\mathrm{XX^T}$ y los valores singulares de X. (Ayuda: los valores singulares son los valores de la matriz D)

   e) ¿Existe conexión entre estos dos problemas?

   $$\min_{\mathbf{w}}\{(\mathbf{y} - X\mathbf{w})^T(\mathbf{y} - X\mathbf{w})\}$$

   $$\min_{\mathbf{w}}\{\mathrm{Traza}((\mathbf{y} - X\mathbf{w})(\mathbf{y} - X\mathbf{w})^T)\}$$

   f) Verificar que si una matriz cuadrada X tiene inversa, entonces $\mathrm{X^{-1}} = \mathrm{VD^{-1}U^T}$ si $\mathrm{SVD(X)} = \mathrm{UDV^T}$ ¿Cómo sería la inversa si además X es simétrica?

   g) Analizar el caso de matrices rectangulares. ¿Cómo sería la inversa de X?

2. (B) Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores de características. La covarianza de dos vectores mide la dependencia estadística que existe entre ellos. Covarianza cero indica que no existe dependencia estadística entre ellos. Su expresión está definida por

   $$\mathrm{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{\mathbf{x}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})$$

   donde $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ representan la media de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ respectivamente. Verificar:

   a) Que la covarianza de dos vectores se puede escribir como un producto escalar de vectores.

b) Que usando los dos vectores del producto escalar es posible definir una matriz cuya traza coincide con el valor de la covarianza. (Ayuda: La traza de una matriz es la suma de los valores de su diagonal principal)

3. Considere ahora una matriz X cuyas columnas representan vectores de características. La matriz de covarianzas asociada a la matriz $\mathrm{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N)$ es el conjunto de covarianzas definidas por cada dos de sus vectores columnas. Es decir,

$$\mathrm{cov}(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \mathrm{cov}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) \\ \mathrm{cov}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & \mathrm{cov}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{cov}(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) & \mathrm{cov}(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Sea $\mathbf{1}_M^T = (1, 1, \cdots, 1)$ un vector $M \times 1$ de unos. Mostrar que representan las siguientes expresiones

a) $E1 = \mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathrm{X}$

b) $E2 = (\mathrm{X} - \frac{1}{M}E1)^T(\mathrm{X} - \frac{1}{M}E1)$

4. (B) Verifique matematicamente la validez de la expresión encontrada en el estudio de la función de perdida de Regresión.

$$\frac{d}{d\mathbf{w}}||(\mathbf{y} - X\mathbf{w}||^2 = 2X^T(X\mathbf{w} - \mathbf{y})$$

Para ello calcule la derivada para un elemento genérico w_i y justifique la expresión matricial.

5. (B) Considere la matriz hat $\mathrm{H} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}^\mathrm{T}$, donde X es una matriz $N \times (d+1)$, $N >> d$, y $\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{X}$ es invertible.

a) Mostrar que H es simétrica

b) Mostrar que $\mathrm{H}^K = \mathrm{H}$ para cualquier entero K (Ayuda: probar $\mathrm{H}^2 = \mathrm{H}$)

c) Si I es la matriz identidad de tamaño N, mostrar que $(\mathrm{I} - \mathrm{H})^K = \mathrm{I} - \mathrm{H}$ para cualquier entero positivo K

d) Mostrar que traza(H) $= d + 1$, Ayuda: (considerar el uso de la SVD y que traza(AB)=traza(BA))