

Ogrzewanie w domu

Dobrosława Hetmańczyk

2 lutego 2025

1 Wprowadzenie

Celem tego projektu jest sprawdzenie jak działa ogrzewanie w domu. Dokładniej zgłębione zostaną dwa problemy badawcze:

2 Analiza matematyczno-fizyczna

Rozpatrujemy następujące zagadnienie przewodnictwa cieplnego w domu opisanym przez obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u + f_i(x, u), & x \in R, \ t > 0, \ i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{rooms}}\} \\ u = T_{\text{out}}(t), & x \in W_i, \ t > 0, \ i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{windows}}\} \\ \nabla u \cdot n = 0, & x \in W_i, \ t > 0, \ i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{walls}}\} \\ u = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} u \, dx, & x \in D_i, \ t > 0, \ i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{doors}}\} \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

$u := u(x, t)$ to temperatura (wyrażona w Kelwinach) w punkcie x i czasie t . U nas $u(x, y, 0) = e^{(x+1)^2(y+1)^2}$. α czyli współczynnik dyfuzji wynosi 0.025.

Wyrażenie $f_i := f_i(x, u)$ jest źródłem ciepła. Oznaczamy zbiór strategii:

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_{N_{\text{radiators}}}\}$$

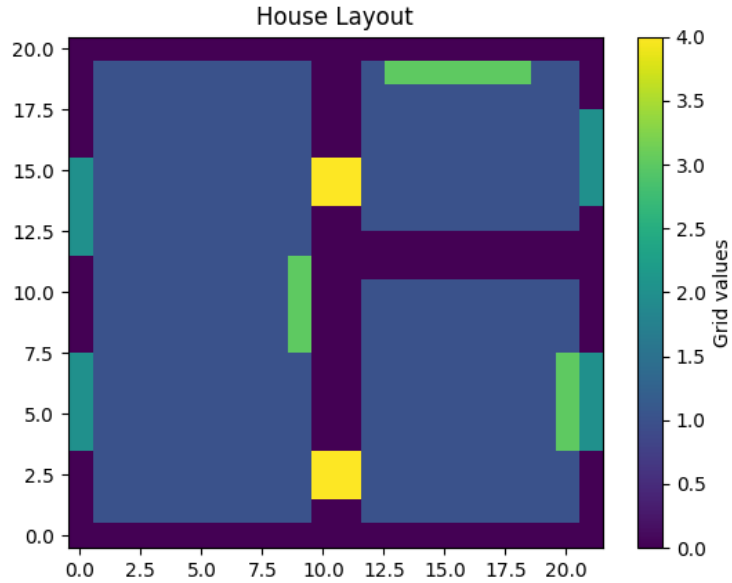
— oznacza to zestaw temperatur granicznych dla ustalonych wartości na "pokrętłach grzejnika". W szczególności będziemy modelować ciepło dostarczane przez grzejnik f_i jako funkcję daną jawnym wzorem poniżej:

$$f_i(x, u) = \frac{P}{\rho \cdot |R_i| \cdot c} \cdot 1_{\{x \in R_i\}}(x) \cdot 1_{\{\frac{1}{|R_i|} \int_{R_i} u(x, t) \, dx < S_i\}}(u)$$

Oznaczając przez $R_i \subset R_i$ obszar umiejscowienia grzejnika (o mocy P (u nas 2000 W) - zakładamy, że wszystkie grzejniki w domu mają tę samą moc) w pokoju R_i , możemy zauważyć, że powyższa definicja oznacza, iż ciepło jest produkowane tylko i wyłącznie dla $x \in R_i$ (ciepło jest „produkowane” tylko tam, gdzie znajdują się grzejniki) i tylko wtedy, gdy średnia temperatura w pokoju R_i jest poniżej ustalonej (przez pokrętło) temperatury granicznej S_i . Dodatkowo $\rho = 1,293 \text{ kg/m}$ i $c = 1005 \text{ J/kg} \cdot K$

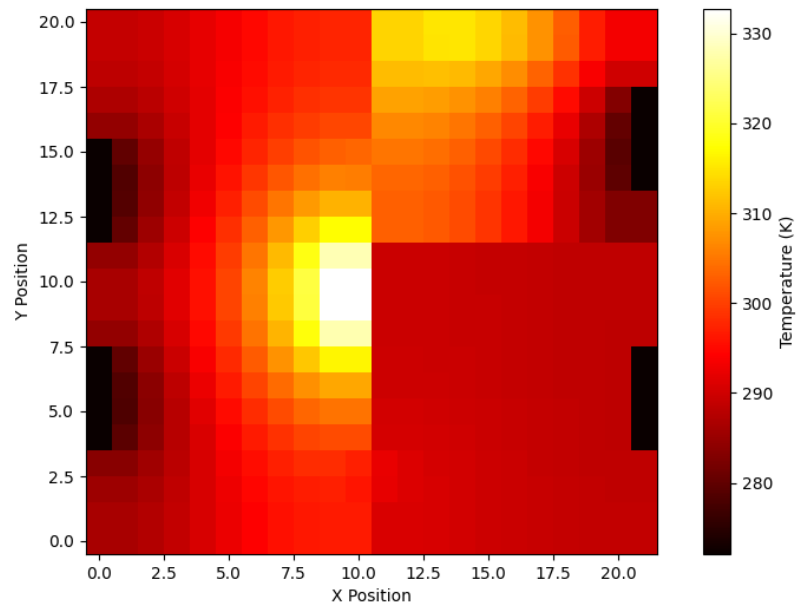
2.1 Czy grzejnik musi być pod oknem?

W większości polskich domów możemy zauważyć, że kaloryfery znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie okien. Zostanie wykonany mały eksperyment, żeby sprawdzić czy jest to optymalne położenie. Na potrzebę eksperymentu stworzono prosty model mieszkania.



Ściany (fioletowe kratki) zewnętrzne mają grubość jednej kratki, a ściany wewnętrzne grubość dwóch krutek. Drzwi (żółte kratki) też są przewidziane na grubość dwóch krutek. Okna (niebieskie kratki) są również jednokrutekowe i przyjmujemy, że mają tą samą temperaturę, co jest na zewnątrz. Grzejniki (zielone kratki) także mają grubość jednej kratki.

Zobaczmy jak po czasie $T=61$ wygląda rozprzewodzenie ciepła.



Jak widać najbardziej jednolita temperatura jest w pokoju w dolnym prawym rogu (potocznie będzie nazywany łazienką). Może się wydawać, że nie ma tam źródła ciepła, jednak w załączonej animacji widać od razu co innego. Warto zwrócić uwagę, że zimno od okna jest zatrzymywane przez grzejnik i nie rozprzestrzenia się, dzięki czemu pozwala to utrzymać stałą temperaturę w pokoju.

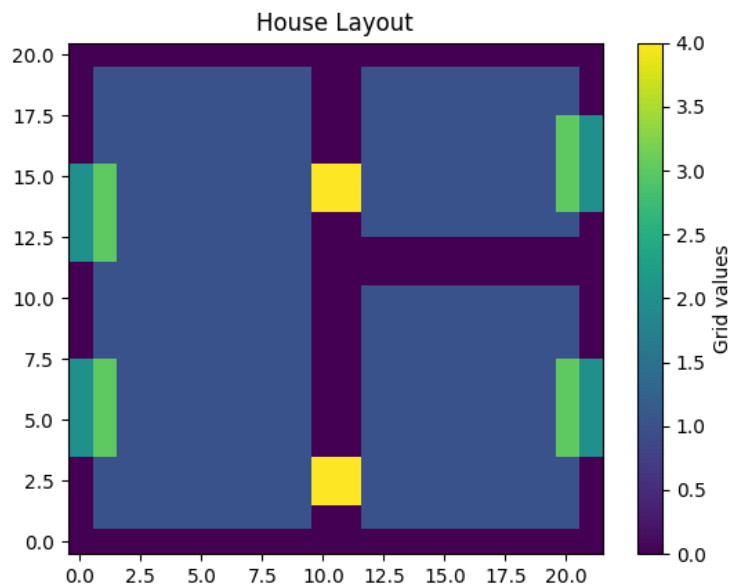
Inaczej sytuacja prezentuje się w przypadku reszty pokoi, gdzie widać, że miejscowo osiągnięte są dość ekstremalne temperatury. W kuchni (prawy górny pokój) są skrajne temperatury ponad 320K i koło 280K sprawiając, że jest to ciężkie miejsce do przebywania. Trochę lepiej jest w salonie, jednak nadal koło okien jest dość zimno, a koło grzejnika zdecydowanie za gorąco.

Podsumowując, zgodnie z intuicją najlepszy jest grzejnik pod oknem, trochę już gorszy ten w salonie na przeciwko okien, a ten w kuchni prostopadły do okna wydaje się być najgorszą opcją.

2.2 Czy wyłączać grzejniki przed wyjściem z domu?

W trosce o finanse, wielu z nas wyłącza ogrzewanie przed wyjściem z domu. Jednakże wracając, musimy na nowo ogrzać mieszkanie. Zostanie wykonany eksperyment, w którym okaże się czy bardziej opłaca się zostawić odkręcony kaloryfer (na jakim pokrętle?) czy może ogrzać mieszkanie na nowo. Rozważone będą przypadki, gdy na dworze jest bardzo zimno, zimno i chłodno.

Wiedząc już, że najlepsze grzejniki to te pod oknem, zmienimy trochę model naszego mieszkania na łatwiejszy do ogrzania (A na pewno łatwiejszy dla kieszeni lokatorów).



Model mieszkania działa na tej samej zasadzie, co ten stworzony na potrzeby poprzedniego problemu badawczego.

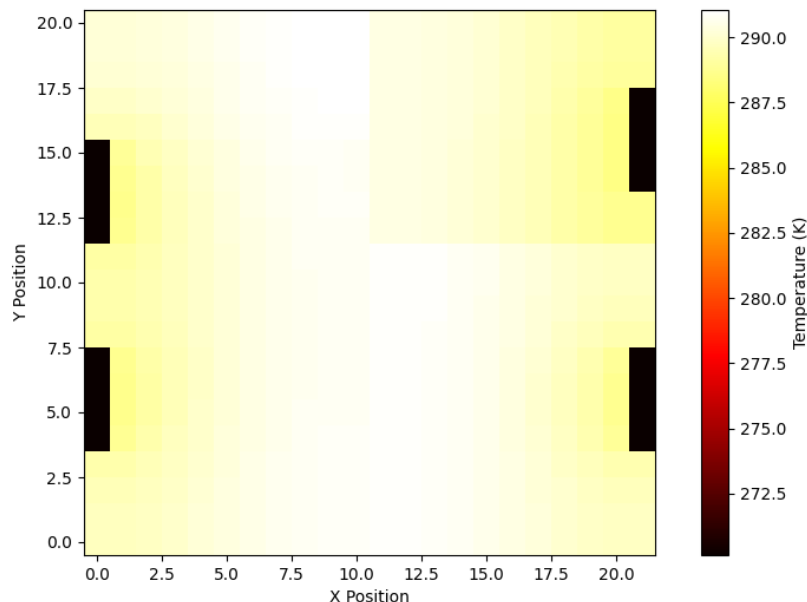
Rozważymy trzy przypadki temperatury na zewnątrz:

- bardzo zimno: temperatura między -5 a -3 stopni Celcjusza
- zimno: temperatura między 0 a 2 stopnie Celcjusza
- chłodno: temperatura między 5 a 7 stopni Celcjusza

Będziemy także rozważać dwa przypadki zależne od tego, na jakim pokrętle jest ustawiony kaloryfer:

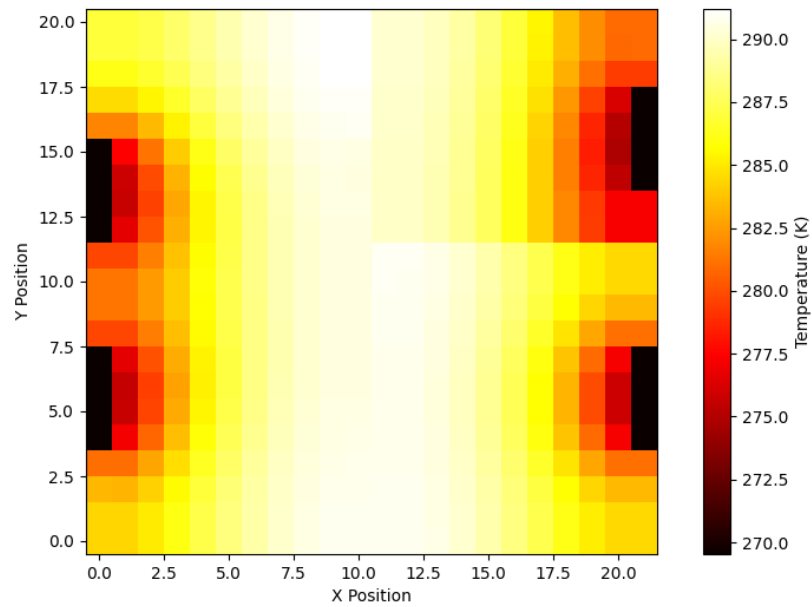
- pokrętło na 3: temperatura pomiędzy 18 a 20 stopni, która jest uważana za najbardziej komfortową temperaturę do przebywania.
- pokrętło na 4: temperatura trochę wyższa pomiędzy 22 a 24 stopnie Celcjusza, przeważnie używana w pokojach łazienkowych

Rozpatrzmy najpierw sytuację, w której na dworze jest bardzo zimno i wychodzimy z domu zostawiając włączony kaloryfer na 4. Po powrocie do domu (zakładamy, że wydarzyło się to około godziny 16:00) w naszym domu jest przyjemna temperatura i od razu widać, że kaloryfery dobrze spełniły swoją rolę w utrzymaniu temperatury przed wyjściem.

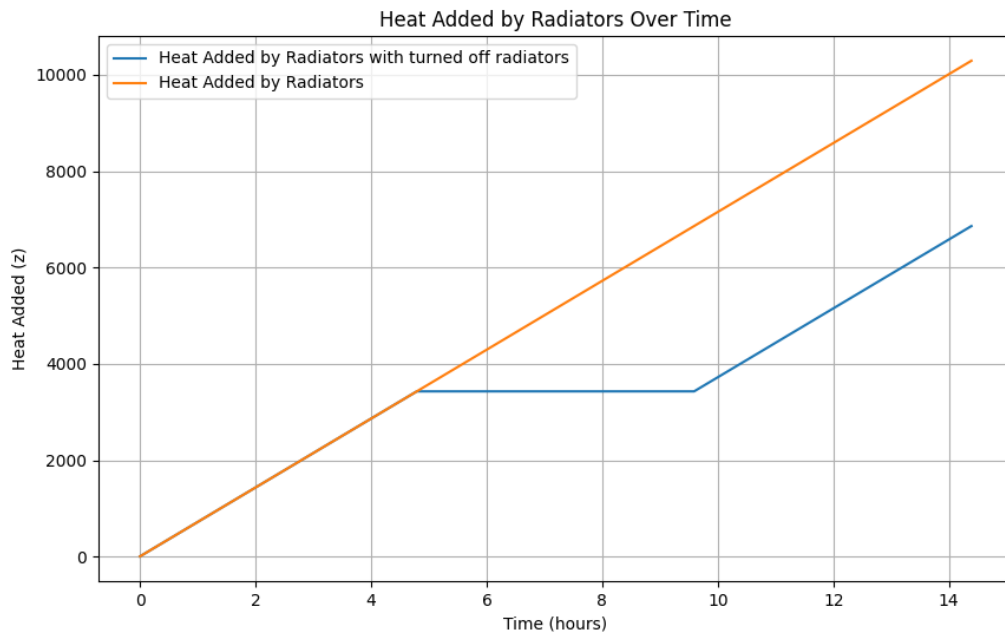


Na załączonej animacji będzie widoczne, jak nasze kaloryfery dawały sobie radę. Warto podkreślić, że w momencie w którym średnia temperatura w danym pokoju była mniejsza niż 22 stopnie kaloryfery się wyłączały.

Porównajmy teraz co się stanie jeżeli kaloryfery będą działać do naszego wyjścia z domu, a potem je wyłączymy na czas nieobecności. Po powrocie do domu widać, że w naszym domku zdecydowanie zdążyło się ochłodzić na czas naszej nieobecności.

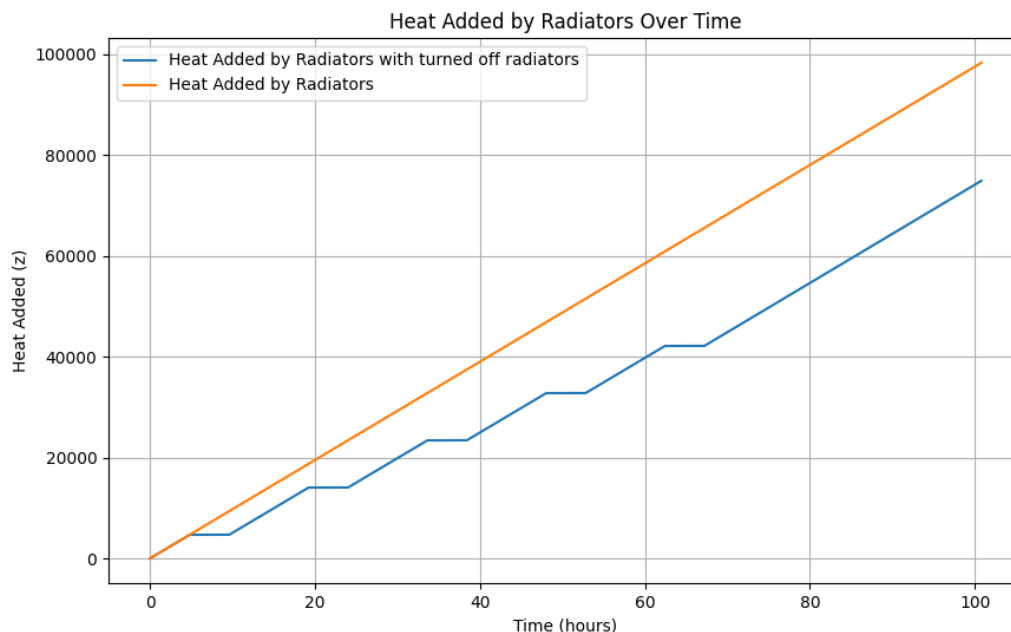


Porównajmy jednak jaka ilość energii musiała zostać dostarczona do ogrzania naszego domu w ciągu 24 godzin w obydwu przypadkach.



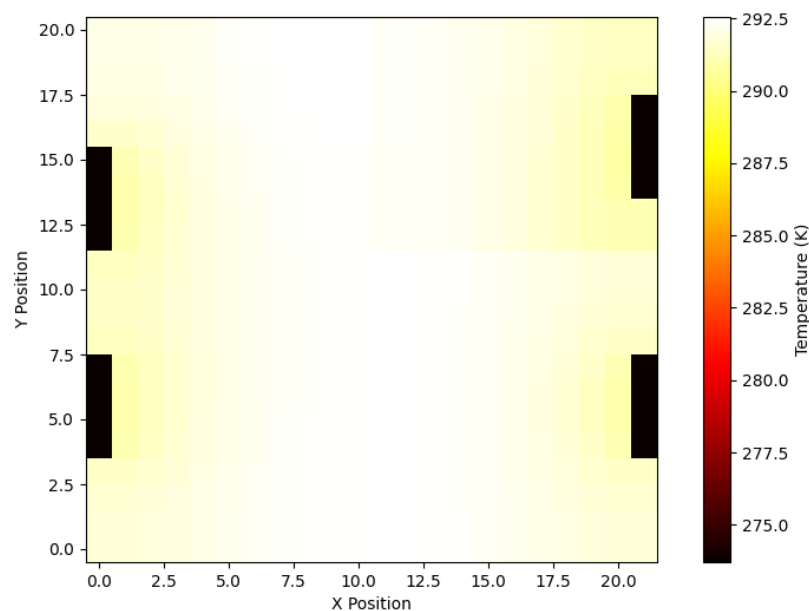
Jak widać przy tak niskich temperaturach dużo bardziej opłaca się zostawić wyłączone kaloryfery na czas wyjścia, jako że wtedy zużywają mniej energii w ciągu doby.

Zobaczmy jeszcze jak wygląda sytuacja w ciągu tygodnia, zakładając, że w dni robocze codziennie wychodzi do pracy, w godzinach 8:00-16:00.



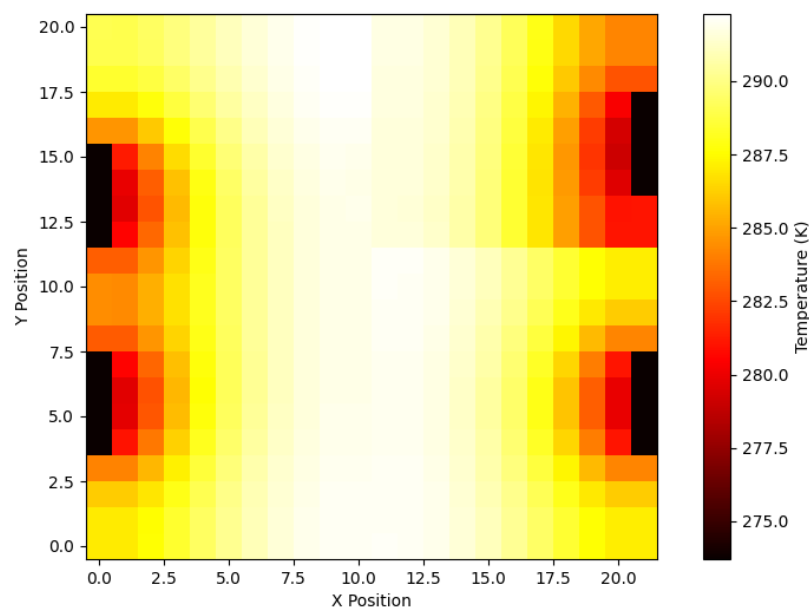
Jak widać nawet w perspektywie regularnych wyjść warto wyłączać kaloryfery na wyjścia. Warto jednak zwrócić uwagę, że przy tak niskich temperaturach pokoje bardzo wolno się ogrzewają, a więc przez większość czasu przebywania przez nas w domu będzie po prostu zimno. Warto to podkreślić jako, że biorąc to pod uwagę wyłączanie kaloryferów co wyjściu nie jest opłacalne, jeżeli po przyjeździe chcemy siedzieć w zimnie.

Skupmy się teraz na drugiej sytuacji, kiedy w domu jest zimno. Jeżeli zostawimy włączone kaloryfery, po powrocie do domu temperatura tak jak w poprzednim przypadku będzie dość wyrównana.



Jednak jeżeli je wyłączymy i będziemy chcieli ogrzać mieszkanie ponownie to zastaniemy je w dość

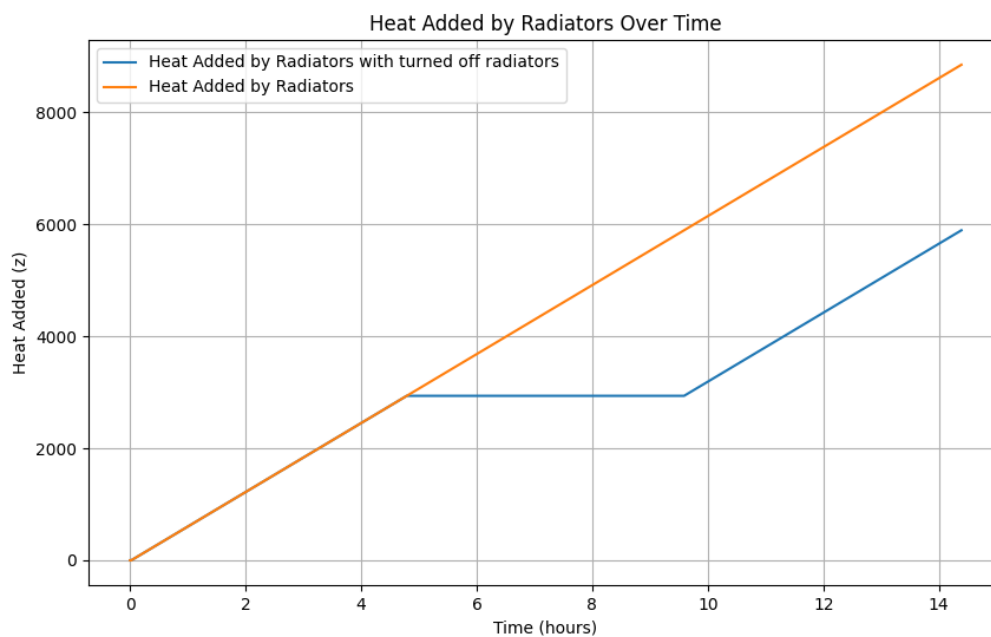
zimnym stanie:



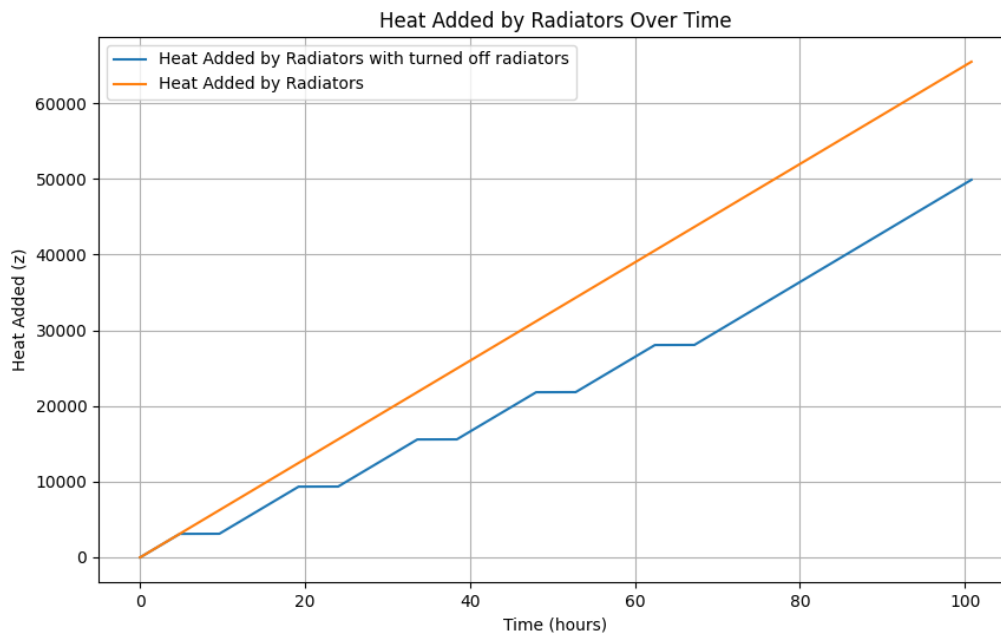
Tym razem kaloryfery mają ustawione pokrętki na 3, ale jak widać efekty są dość podobne do poprzedniej symulacji z tą różnicą, że w momencie przyjscia do domu średnio temperatura jest wyższa niż ostatnio, co jest zgodne z intuicją.

Zmiany w ciągu dnia można zaobserwować w dodanych gifach. Pokazują one bardzo dobrze momenty zaprzestania i wznowienia grzania.

Porównajmy jednak jaką ilość energii musiała zostać dostarczona do ogrzania naszego domu w ciągu 24 godzin przy takiej temperaturze na zewnątrz.

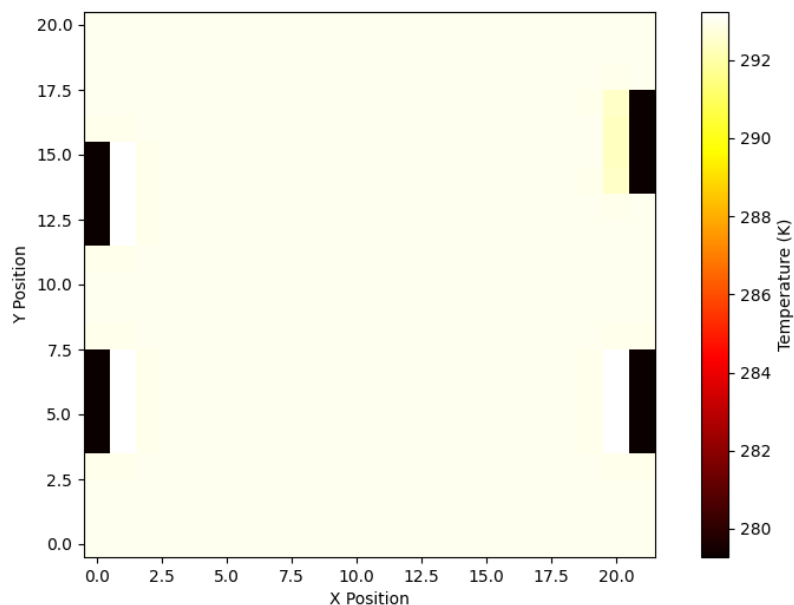


Oraz zobaczymy także tygodniowe zużycie energii przy założeniu codziennego wychodzenia do pracy.



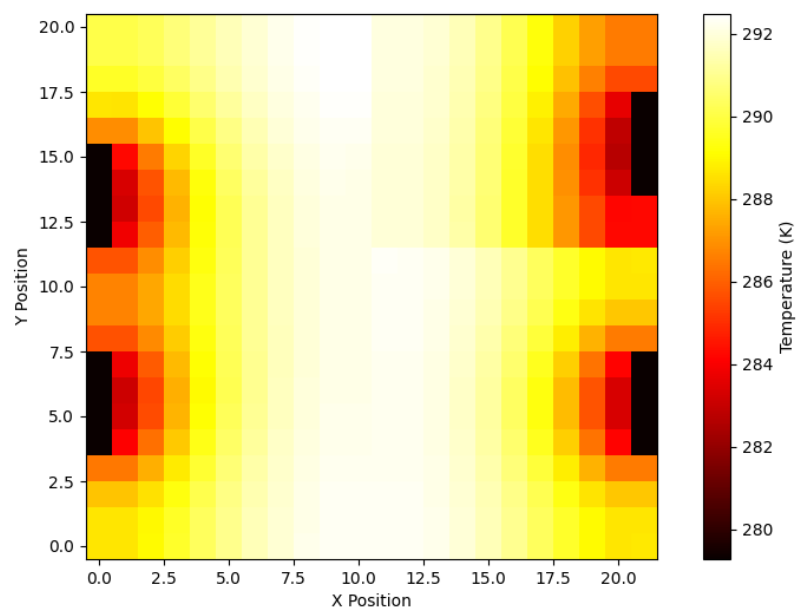
Jak można zauważyć wykresy wyglądają bardzo podobnie, a więc tak jak poprzednio możemy dojść do wniosku, że dużo lepiej jest całkowicie wyłączyć ogrzewanie na czas wyjścia z domu.

Spójrzmy jeszcze na ostatni przypadek, gdzie rozważamy że na dworze jest chłodno. Tak samo jak ostatnio wychodząc zostawmy kaloryfer włączony na 3. Po powrocie czeka nas taka oto sytuacja:



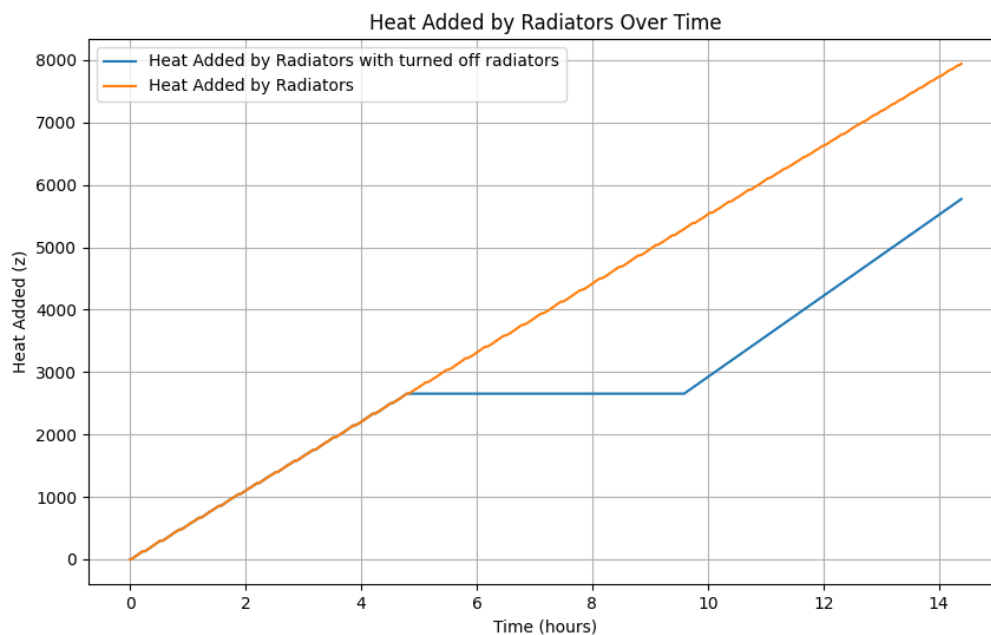
W tym przypadku widać najbardziej jednolitą temperaturę po powrocie do domu, co miałoby sens, jako że temperatura na zewnątrz jest najwyższa z badanych.

Jeżeli wyłączymy kaloryfery i będziemy chcieli ogrzać mieszkanie ponownie to zastaniemy je tak:



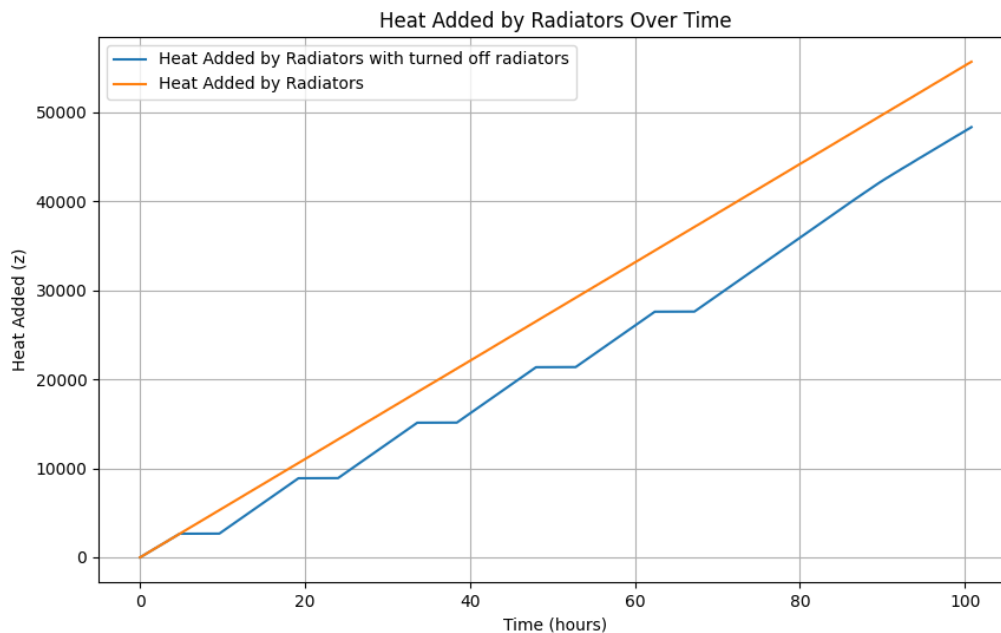
A więc nie jest to idealna temperatura do przebywania w domu.

Porównajmy jednak jaką ilość energii musiała zostać dostarczona do ogrzania naszego domu w ciągu 24 godzin w obydwu przypadkach.



Jak widać przy tak niskich temperaturach dużo bardziej opłaca się zostawić wyłączone kaloryfery na czas wyjścia, jako że wtedy zużywają mniej energii w ciągu doby.

Zobaczmy jeszcze jak wygląda sytuacja w ciągu tygodnia, zakładając, że w dni robocze codziennie wychodzi do pracy, w godzinach 8:00-16:00.



Tak jak poprzednia można dojść do tych samych wniosków, czyli dużo bardziej opłacalne jest wyłączenie grzejników na czas wyjścia. Warto jednak zauważyć, że im wyższa temperatura na dworze tym przewaga wyłączania grzejników maleje.

Stąd jeżeli opuszczamy dom w środku bardzo zimnej zimy, chcemy wyłączyć kaloryfery, żeby zaoszczędzić jak najwięcej.