

# Глубокое обучение для обработки изображений

## Лекция 2

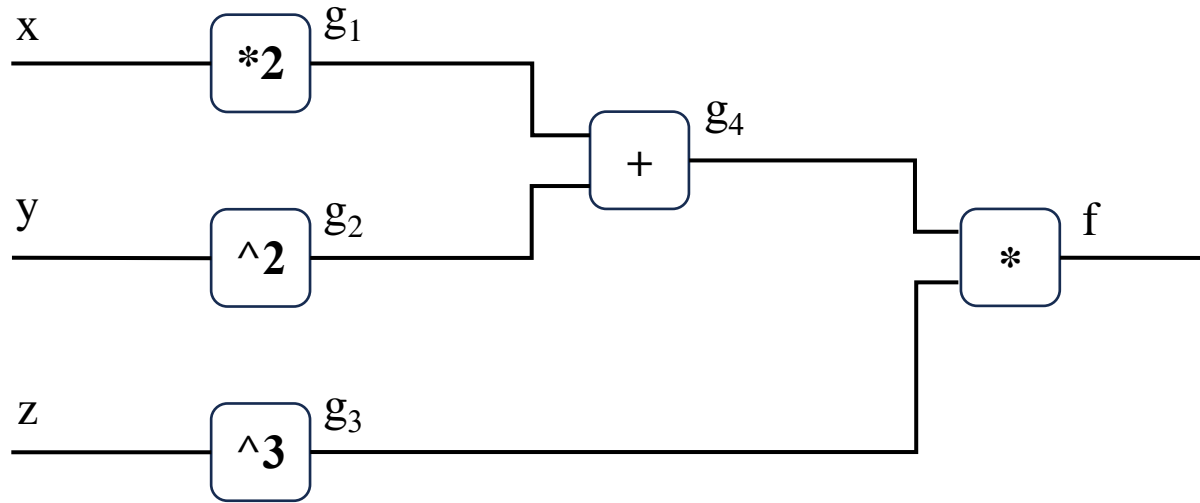
# Метод обратного распространения ошибки

При обучении нейронных сетей мы хотим найти оптимальные параметры модели. Для этого используются **градиентные методы**; с помощью них мы итеративно обновляем веса нашей модели. Для обновления весов нам необходимо знать градиенты функции потерь, которые можно найти с помощью алгоритма **обратного распространения ошибки (backpropagation)**.

Процесс обучения будет состоять таким образом из следующих шагов:

- На вход подаются данные, которые передаются по сети в прямом направлении, в результате чего получаются выходные данные (**Forward pass**)
- Сигнал ошибки передается в обратном направлении, находятся значения градиентов (**Backward pass**)
- С помощью оптимизатора (SGD, Adam и др.) обновляем значения весов

# Пример

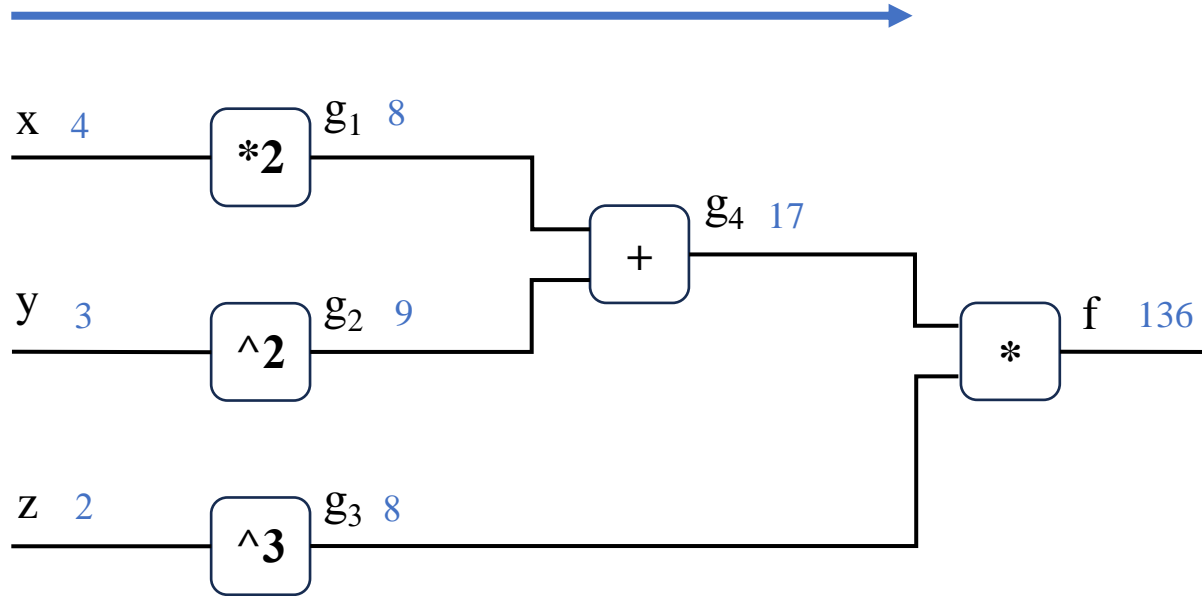


Пусть дана функция многих переменных:  
$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

Необходимо найти производные:  
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

Удобно представить функцию в виде  
вычислительного графа

# Пример



$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

Сначала найдем значение функции при некоторых входных значениях – **forward pass**. Пусть  $x = 4, y = 3, z = 2$

Для удобства введем обозначения для промежуточных математических операций

$$g_1 = 2x$$

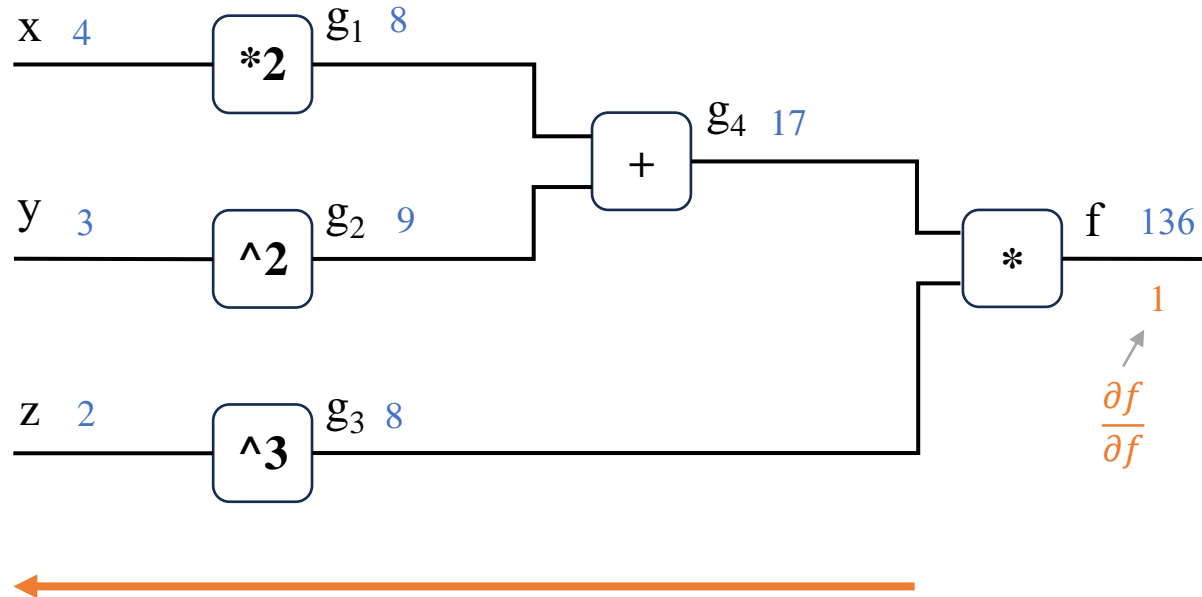
$$g_2 = y^2$$

$$g_3 = z^3$$

$$g_4 = g_1 + g_2$$

$$f(x, y, z) = g_3 g_4$$

# Пример



$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

$$g_1 = 2x$$

$$g_2 = y^2$$

$$g_3 = z^3$$

$$g_4 = g_1 + g_2$$

$$f(x, y, z) = g_3 g_4$$

Теперь, зная результат прямого прохода, будем искать градиенты – **backward pass**

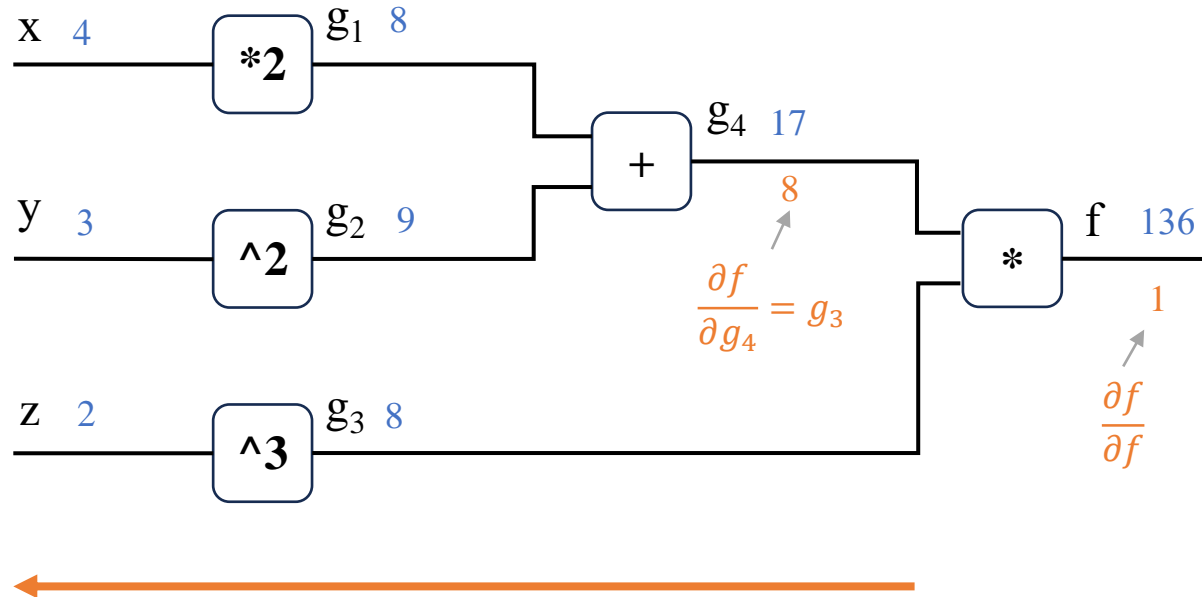
В нашем примере производные имеют вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial g_3} \frac{\partial g_3}{\partial z}$$

# Пример



$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

$$g_1 = 2x$$

$$g_2 = y^2$$

$$g_3 = z^3$$

$$g_4 = g_1 + g_2$$

$$f(x, y, z) = g_3 g_4$$

Теперь, зная результат прямого прохода, будем искать градиенты – **backward pass**

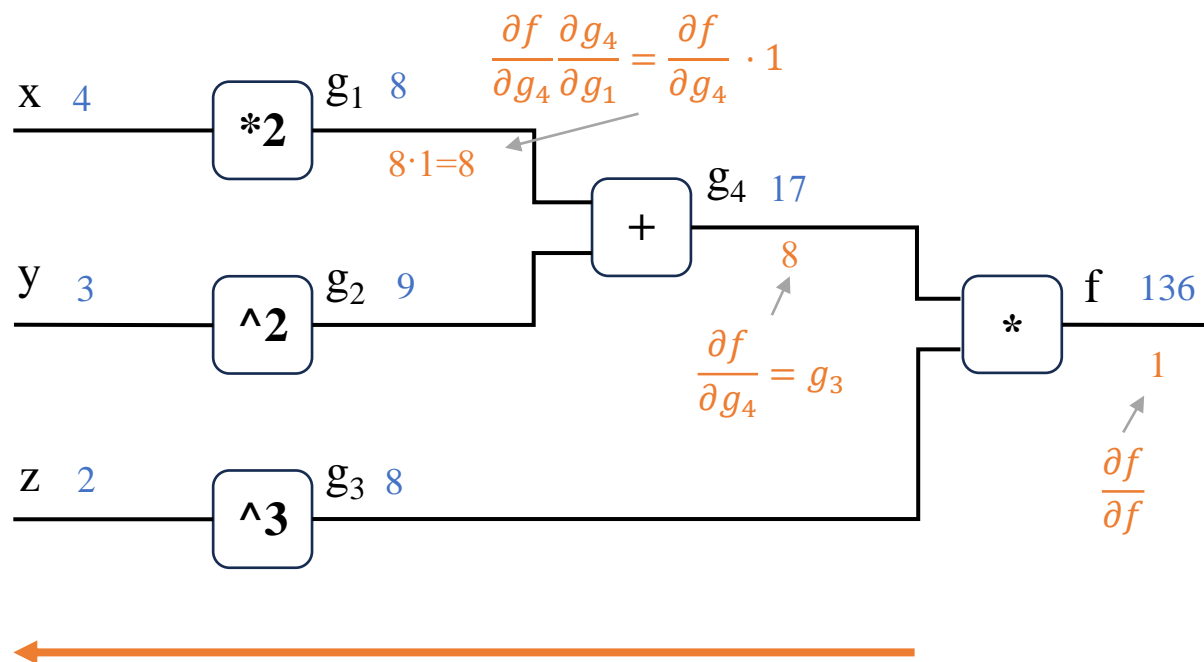
В нашем примере производные имеют вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial g_3} \frac{\partial g_3}{\partial z}$$

# Пример



$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

$$g_1 = 2x$$

$$g_2 = y^2$$

$$g_3 = z^3$$

$$g_4 = g_1 + g_2$$

$$f(x, y, z) = g_3 g_4$$

Теперь, зная результат прямого прохода, будем искать градиенты – **backward pass**

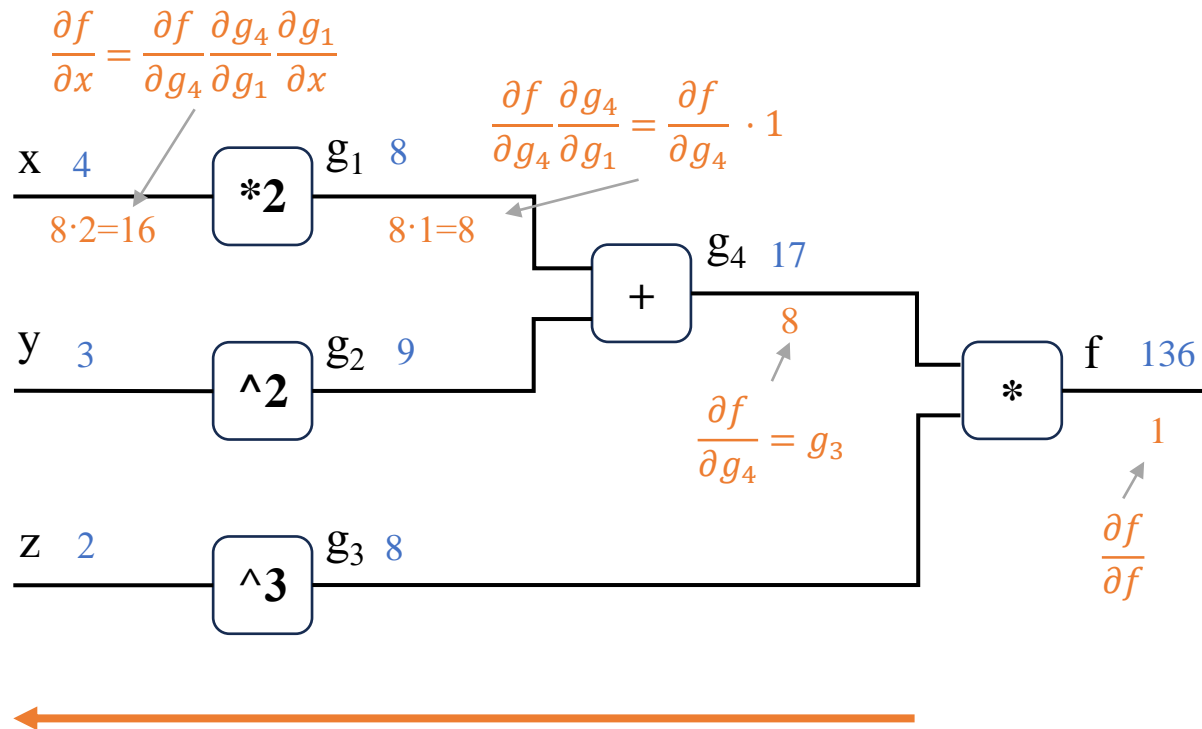
В нашем примере производные имеют вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial g_3} \frac{\partial g_3}{\partial z}$$

# Пример



$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

$$g_1 = 2x$$

$$g_2 = y^2$$

$$g_3 = z^3$$

$$g_4 = g_1 + g_2$$

$$f(x, y, z) = g_3 g_4$$

Теперь, зная результат прямого прохода, будем искать градиенты – **backward pass**

В нашем примере производные имеют вид:

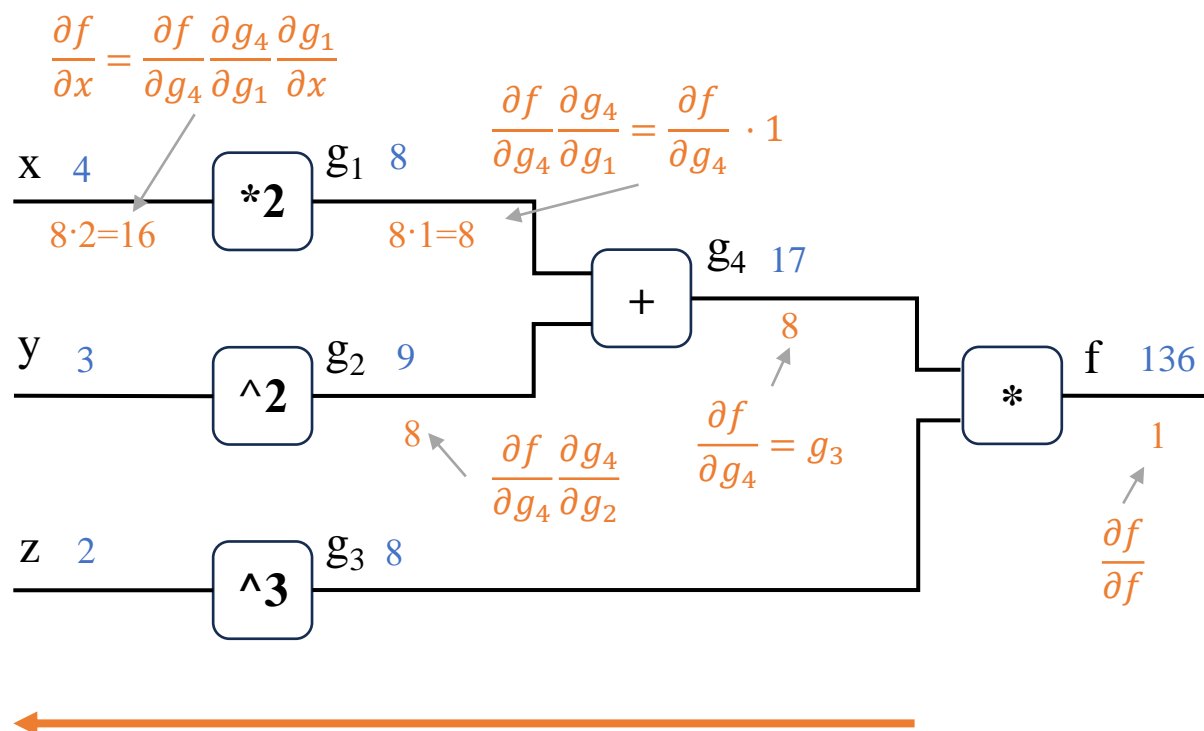
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial g_3} \frac{\partial g_3}{\partial z}$$



# Пример



$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

$$g_1 = 2x$$

$$g_2 = y^2$$

$$g_3 = z^3$$

$$g_4 = g_1 + g_2$$

$$f(x, y, z) = g_3 g_4$$

Теперь, зная результат прямого прохода, будем искать градиенты – **backward pass**

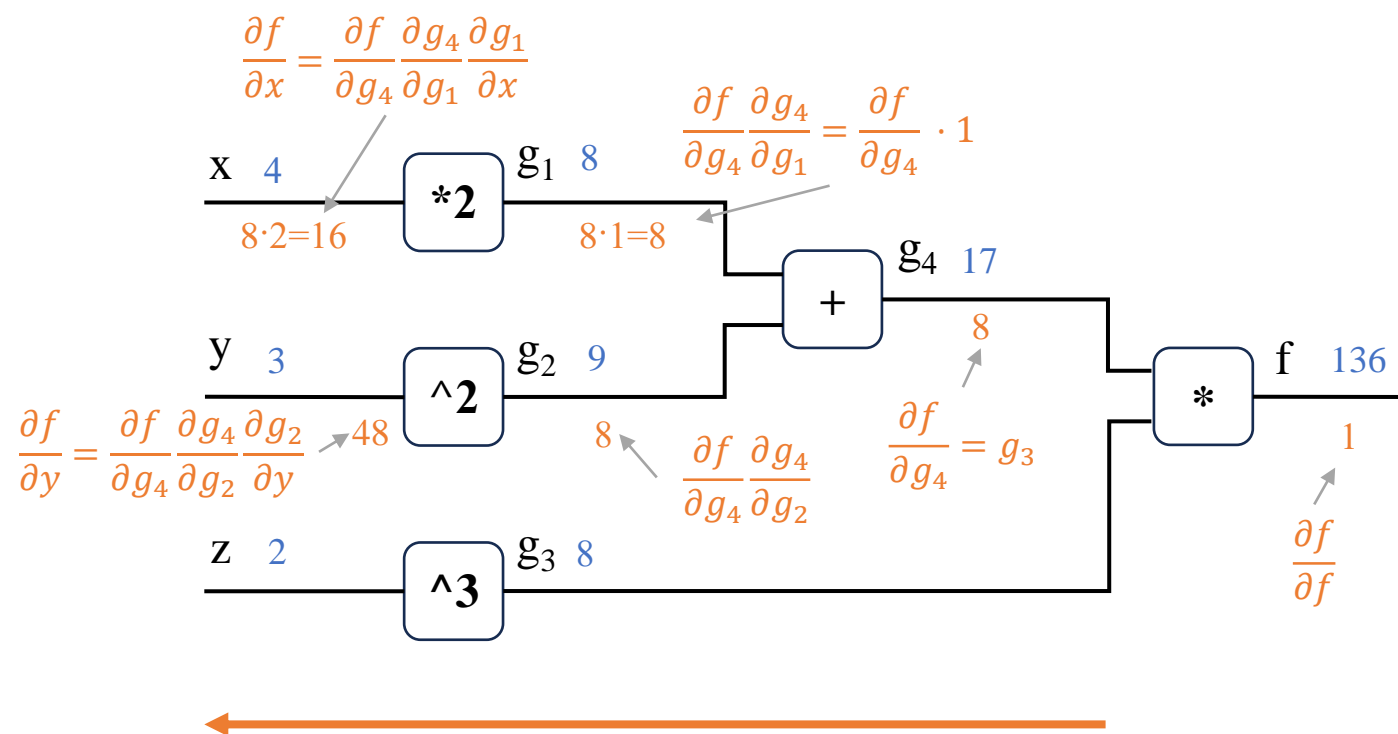
В нашем примере производные имеют вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial g_3} \frac{\partial g_3}{\partial z}$$

# Пример



$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

$$g_1 = 2x$$

$$g_2 = y^2$$

$$g_3 = z^3$$

$$g_4 = g_1 + g_2$$

$$f(x, y, z) = g_3 g_4$$

Теперь, зная результат прямого прохода, будем искать градиенты – **backward pass**

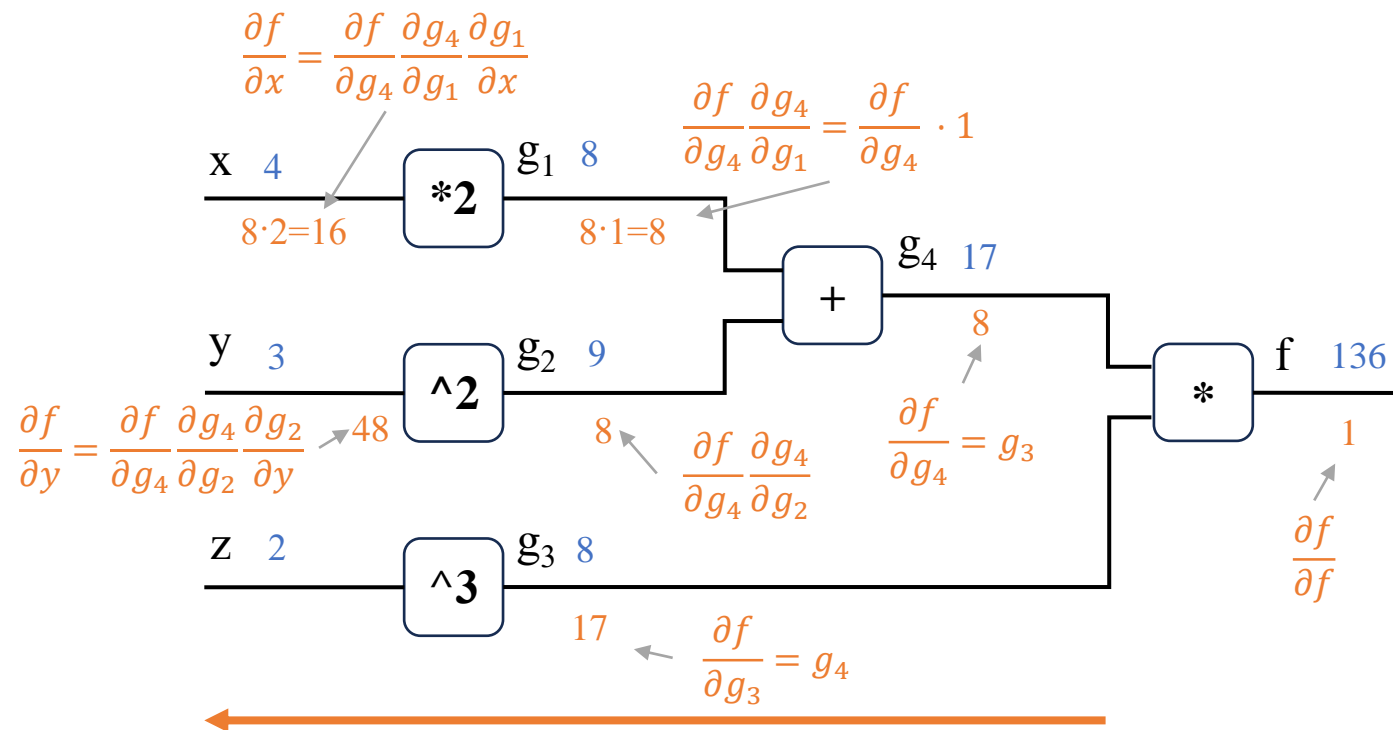
В нашем примере производные имеют вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial g_3} \frac{\partial g_3}{\partial z}$$

# Пример



$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

$$g_1 = 2x$$

$$g_2 = y^2$$

$$g_3 = z^3$$

$$g_4 = g_1 + g_2$$

$$f(x, y, z) = g_3 g_4$$

Теперь, зная результат прямого прохода, будем искать градиенты – **backward pass**

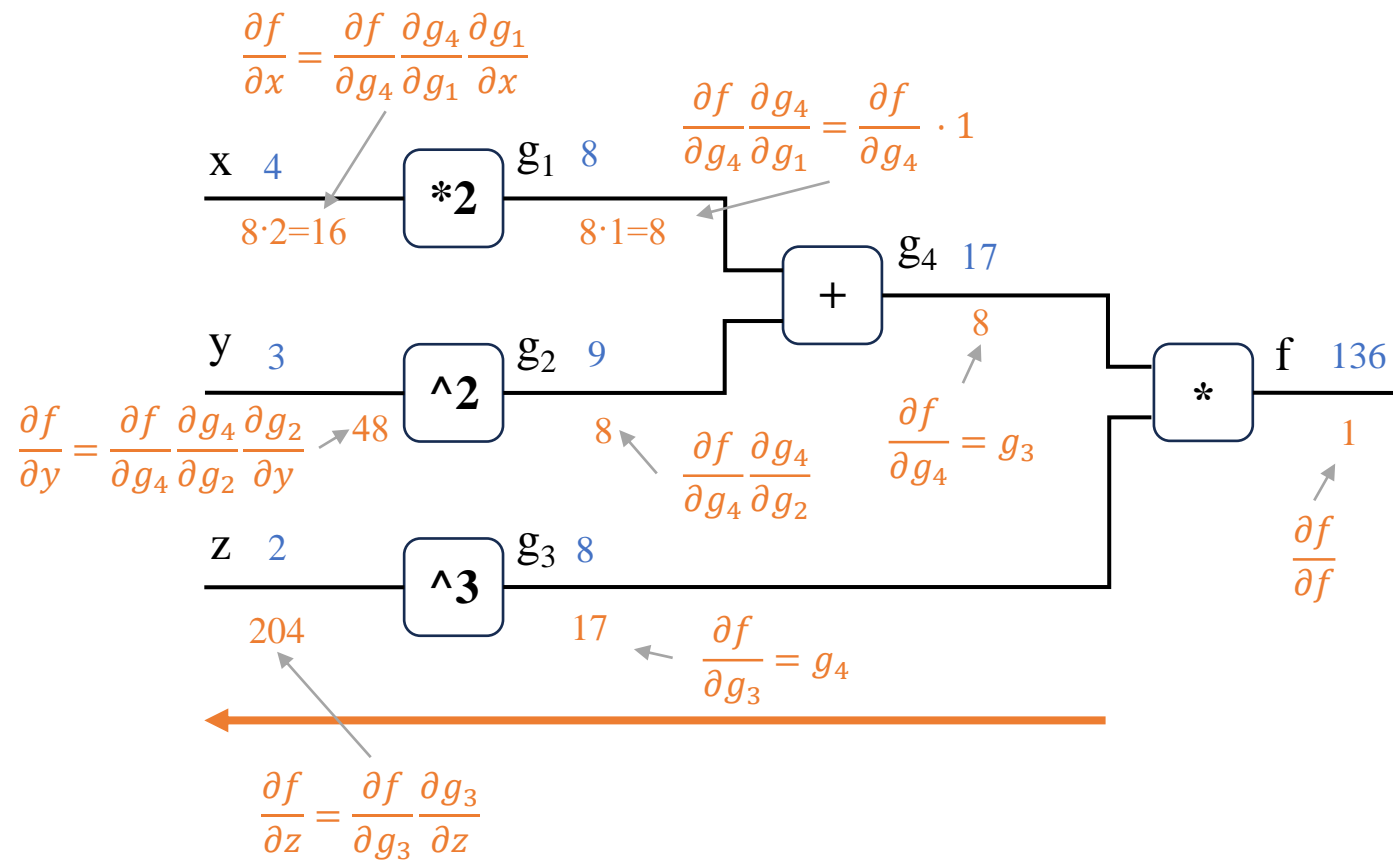
В нашем примере производные имеют вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial g_3} \frac{\partial g_3}{\partial z}$$

# Пример



$$f(x, y, z) = (2x + y^2)z^3$$

$$g_1 = 2x$$

$$g_2 = y^2$$

$$g_3 = z^3$$

$$g_4 = g_1 + g_2$$

$$f(x, y, z) = g_4 g_3$$

Теперь, зная результат прямого прохода, будем искать градиенты – **backward pass**

В нашем примере производные имеют вид:

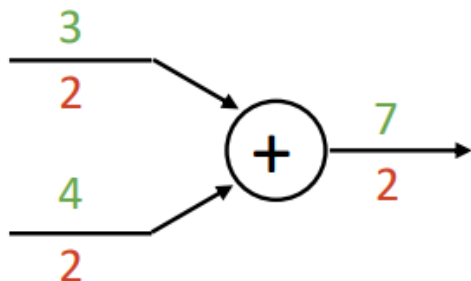
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g_4} \frac{\partial g_4}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

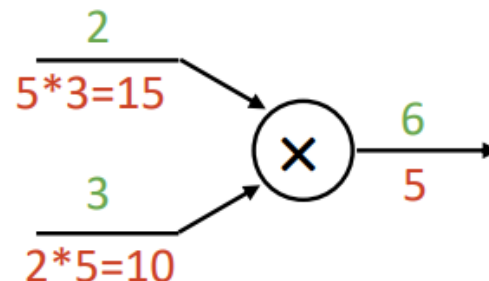
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial g_3} \frac{\partial g_3}{\partial z}$$

# Примеры операций в узлах вычислительного графа

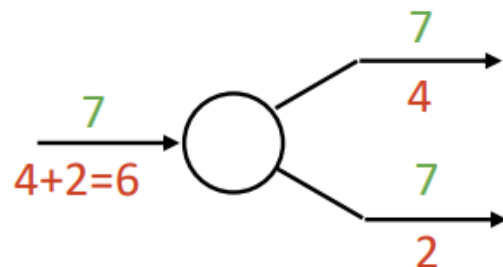
**add** gate: gradient distributor



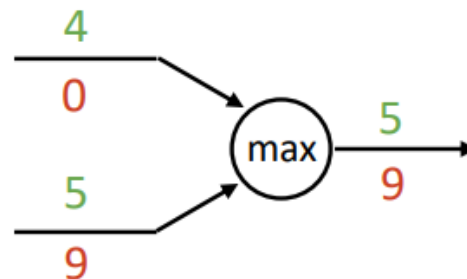
**mul** gate: "swap multiplier"



**copy** gate: gradient adder



**max** gate: gradient router



# Пример: логистическая регрессия

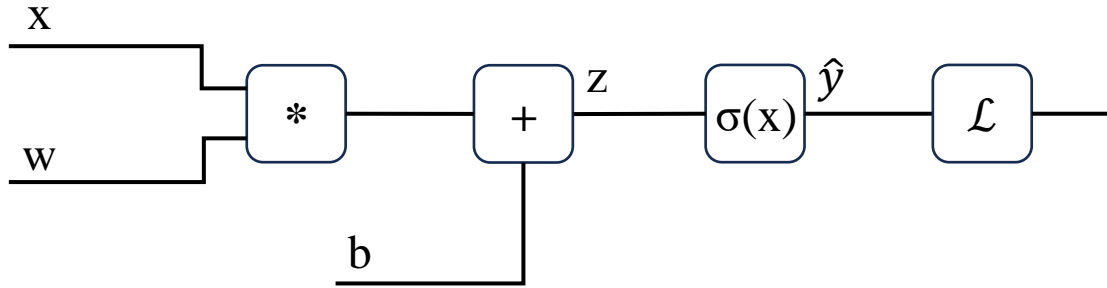
Рассмотрим упрощенный пример логистической регрессии, где все величины являются скалярами. В качестве функции потерь выберем *бинарную кросс-энтропию*. Тогда лосс можем найти следующим образом:

$$z = wx + b$$

$$\hat{y} = \sigma(z)$$

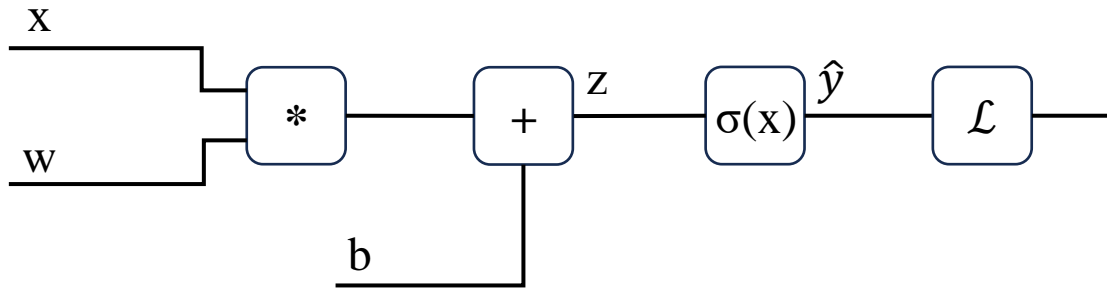
$$\mathcal{L} = -y \ln \hat{y} - (1 - y) \ln(1 - \hat{y})$$

Градиенты имеют вид:



Задача: найти  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$  и  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}$

# Пример: логистическая регрессия



Задача: найти  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$  и  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}$

Рассмотрим упрощенный пример логистической регрессии, где все величины являются скалярами. В качестве функции потерь выберем *бинарную кросс-энтропию*. Тогда лосс можем найти следующим образом:

$$z = wx + b$$

$$\hat{y} = \sigma(z)$$

$$\mathcal{L} = -y \ln \hat{y} - (1 - y) \ln(1 - \hat{y})$$

Градиенты имеют вид:

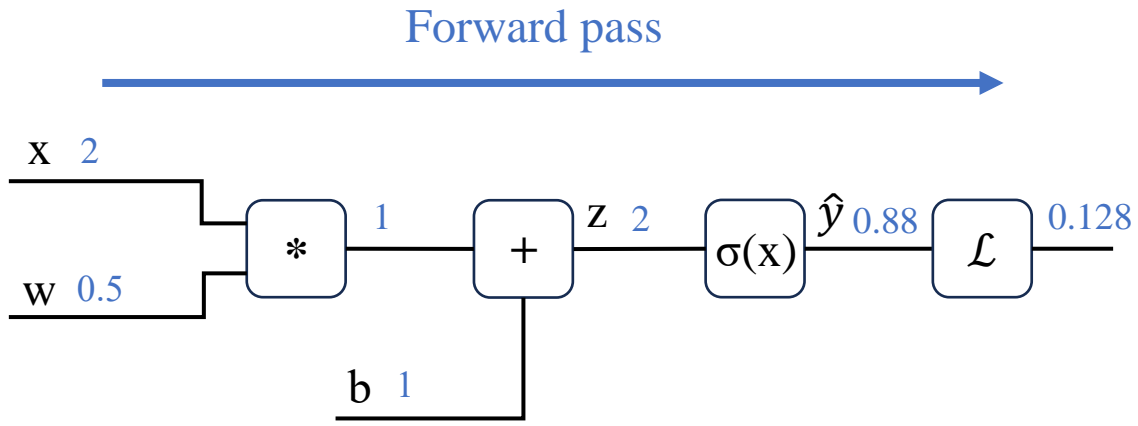
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{y}} = -\frac{y}{\hat{y}} + \frac{1 - y}{1 - \hat{y}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{y}} \sigma'(z) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{y}} \sigma(z)(1 - \sigma(z))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}$$

# Пример: логистическая регрессия



$$z = wx + b$$

$$\hat{y} = \sigma(z)$$

$$\mathcal{L} = -y \ln \hat{y} - (1 - y) \ln(1 - \hat{y})$$

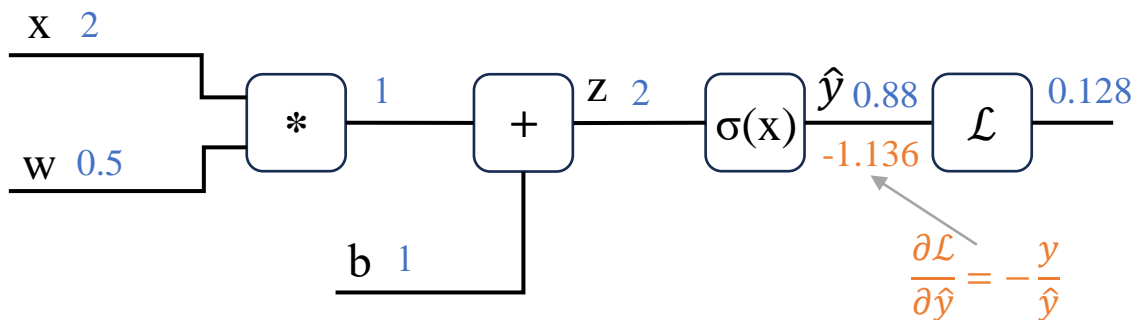
$$w = 0.5, b = 1$$

$$x = 2, y = 1$$

Задача: найти  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$  и  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}$



# Пример: логистическая регрессия



Backward pass

Задача: найти  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$  и  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}$

$$z = wx + b$$

$$\hat{y} = \sigma(z)$$

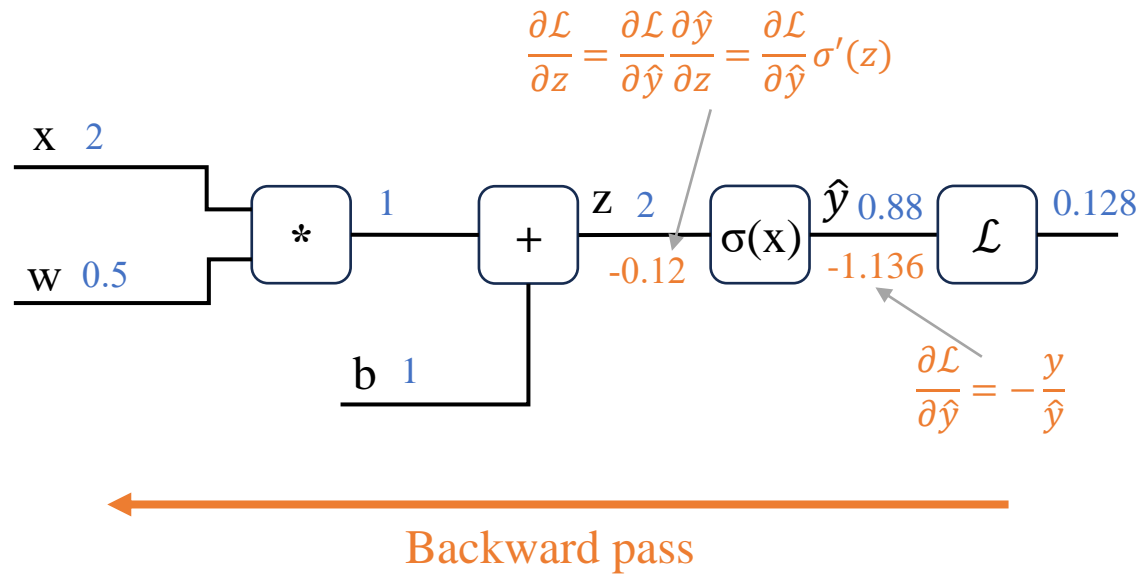
$$\mathcal{L} = -y \ln \hat{y} - (1 - y) \ln(1 - \hat{y})$$

$$w = 0.5, b = 1$$

$$x = 2, y = 1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{y}} = -\frac{y}{\hat{y}}$$

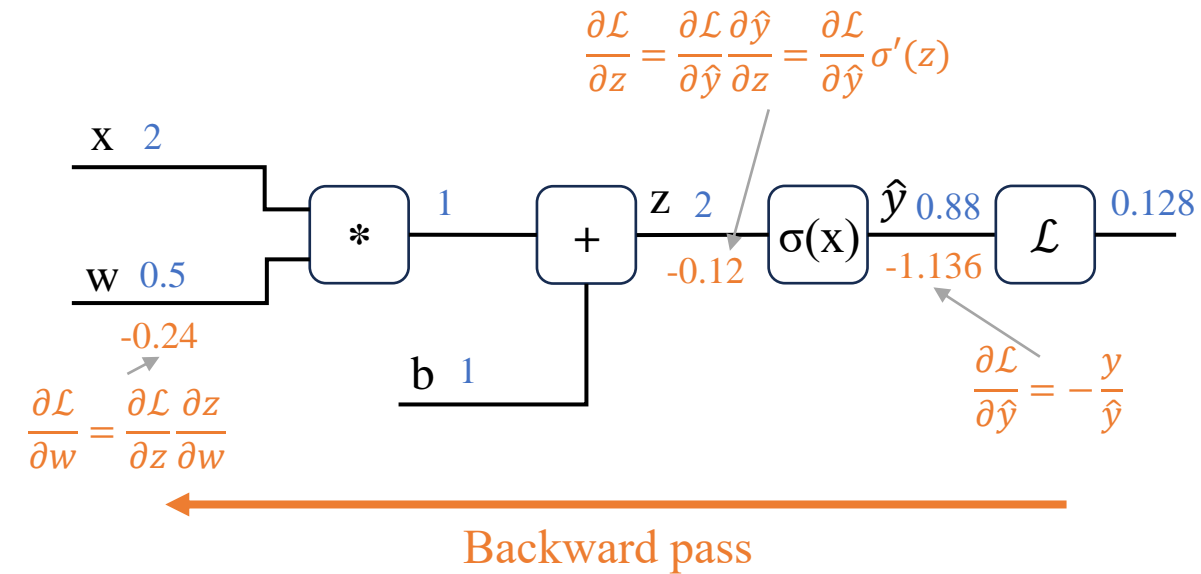
# Пример: логистическая регрессия



$$\begin{aligned} z &= wx + b \\ \hat{y} &= \sigma(z) \\ \mathcal{L} &= -y \ln \hat{y} - (1 - y) \ln(1 - \hat{y}) \\ \mathbf{w} &= \mathbf{0.5}, \mathbf{b} = \mathbf{1} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{2}, \mathbf{y} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Задача: найти  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$  и  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}$

# Пример: логистическая регрессия



$$z = wx + b$$

$$\hat{y} = \sigma(z)$$

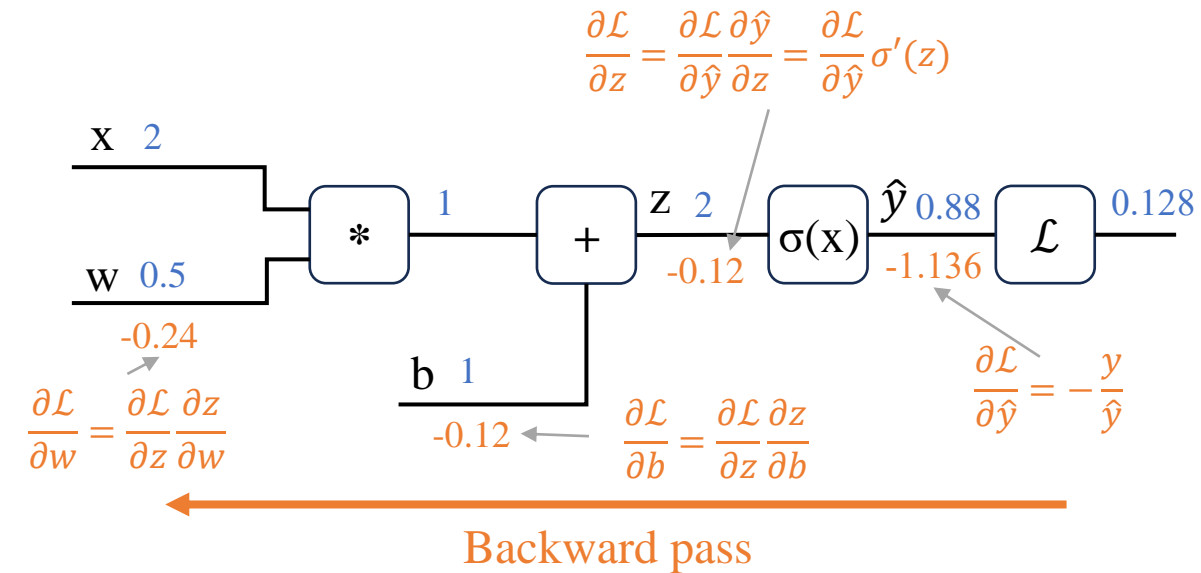
$$\mathcal{L} = -y \ln \hat{y} - (1 - y) \ln(1 - \hat{y})$$

$$w = 0.5, b = 1$$

$$x = 2, y = 1$$

Задача: найти  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$  и  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}$

# Пример: логистическая регрессия



Задача: найти  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$  и  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}$

$$z = wx + b$$
$$\hat{y} = \sigma(z)$$
$$\mathcal{L} = -y \ln \hat{y} - (1 - y) \ln(1 - \hat{y})$$
$$w = 0.5, b = 1$$
$$x = 2, y = 1$$

После нахождения градиентов можно переходить к обновлению весов с помощью оптимизатора