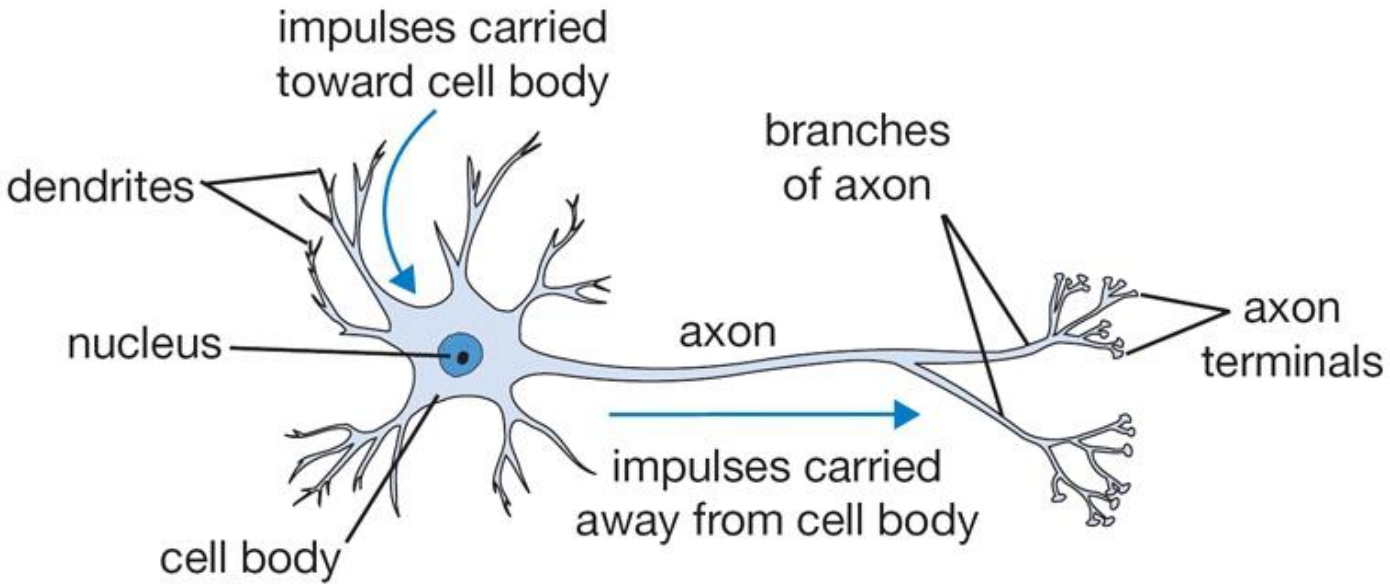
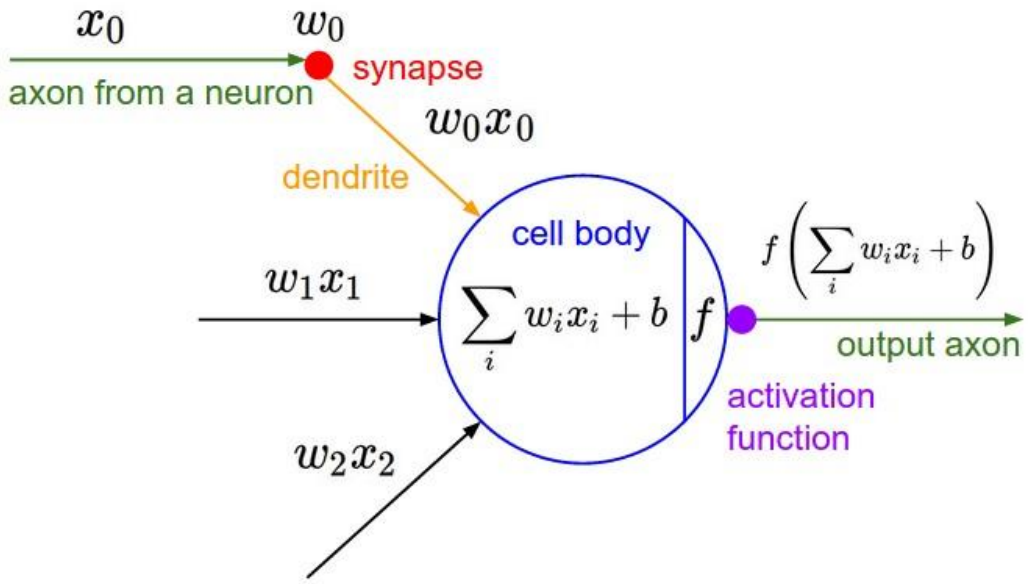
Компьютерные методы обработки изображений

Лекция 1

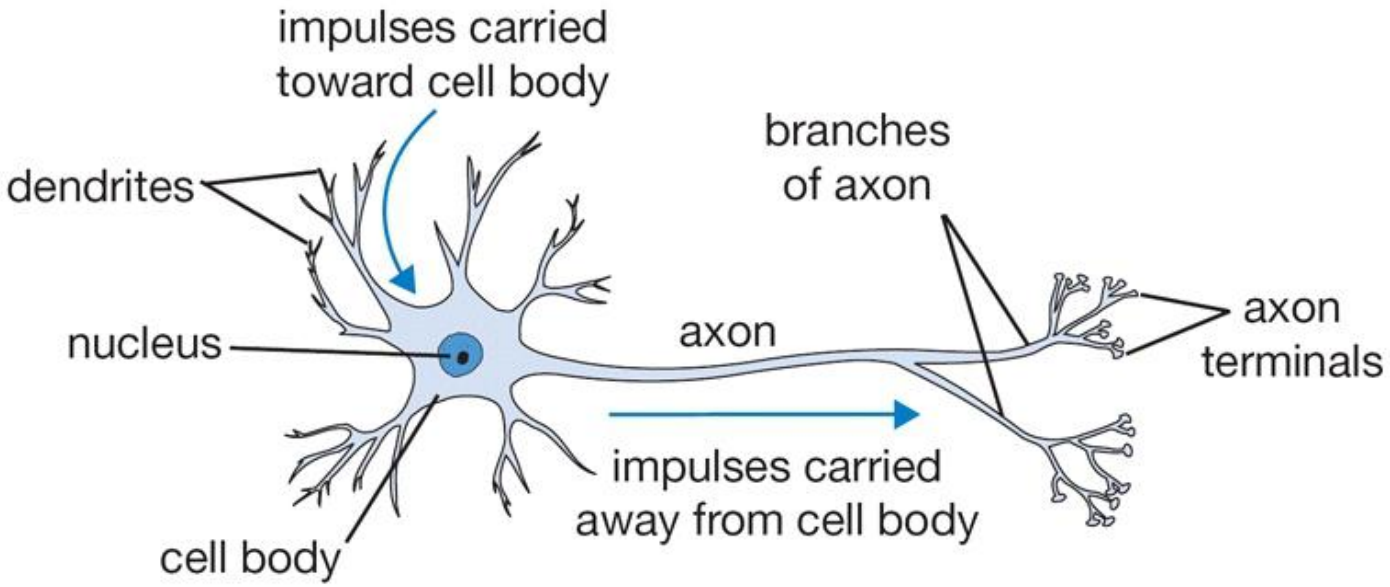
Связь с биологией

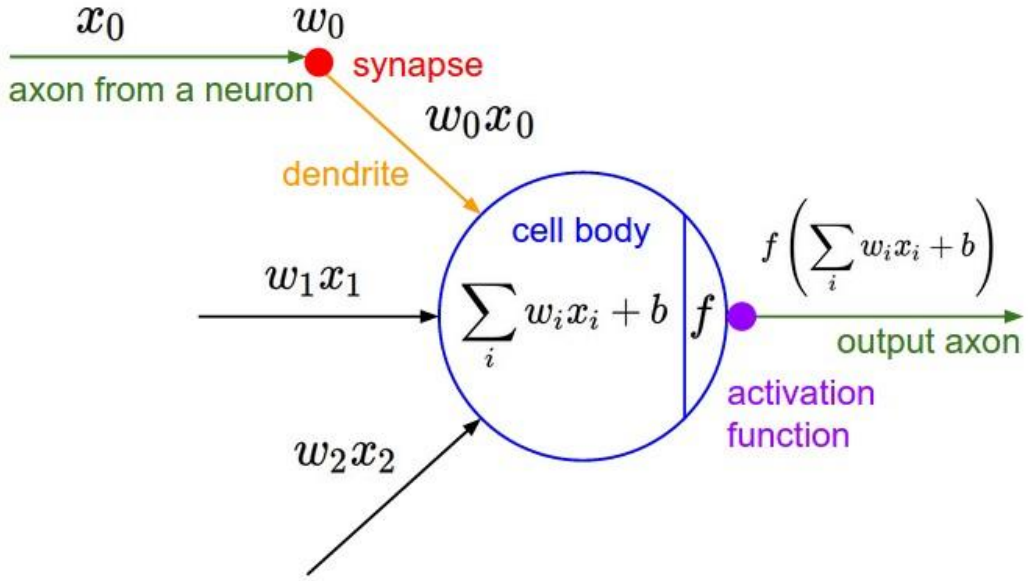




Слева: изображений биологического нейрона. Справа: математическая модель

Связь с биологией

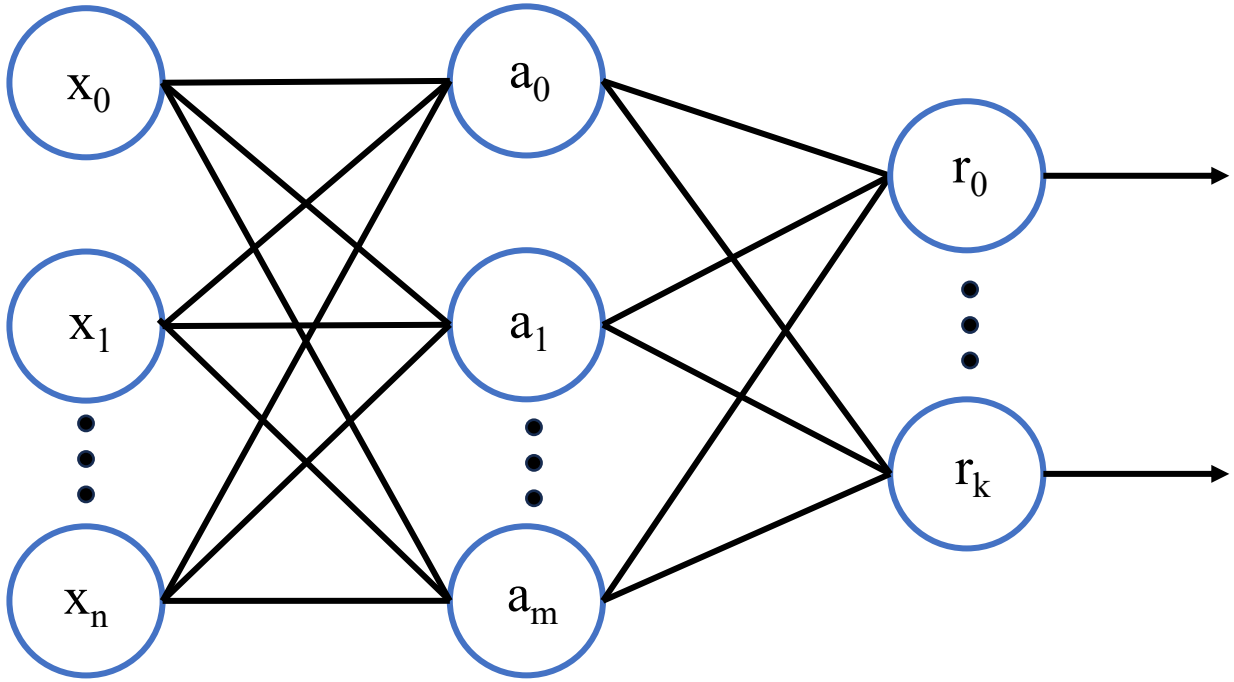




Слева: изображений биологического нейрона. Справа: математическая модель

Математическая модель нейрона является довольно грубым приближением **биологического нейрона**, поэтому проводить аналогии между ними нужно с большой осторожностью!

Перцептрон Розенблатта (1958 г.)



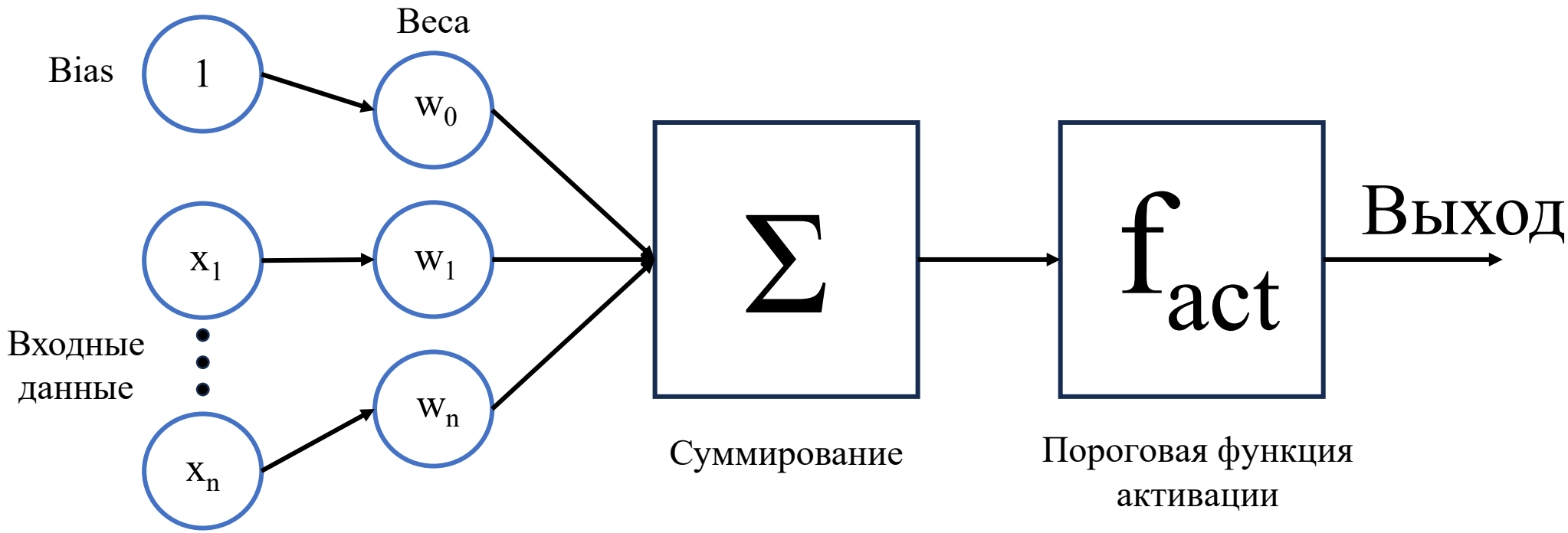
Входной слой

Скрытый слой (ассоциативные элементы)

Выходной слой (реагирующие элементы)

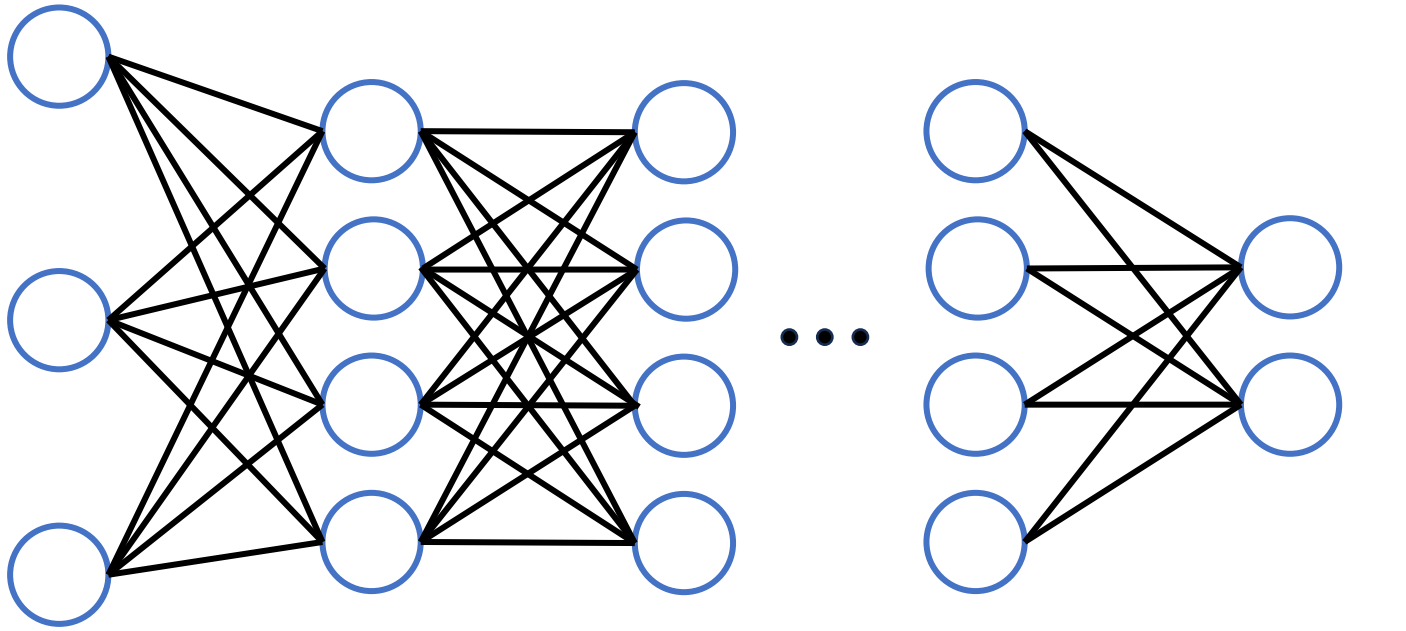
Перцептрон Розенблатта. По сути он стал первой моделью искусственной нейронной сети

Перцептрон Розенблатта (1958 г.)



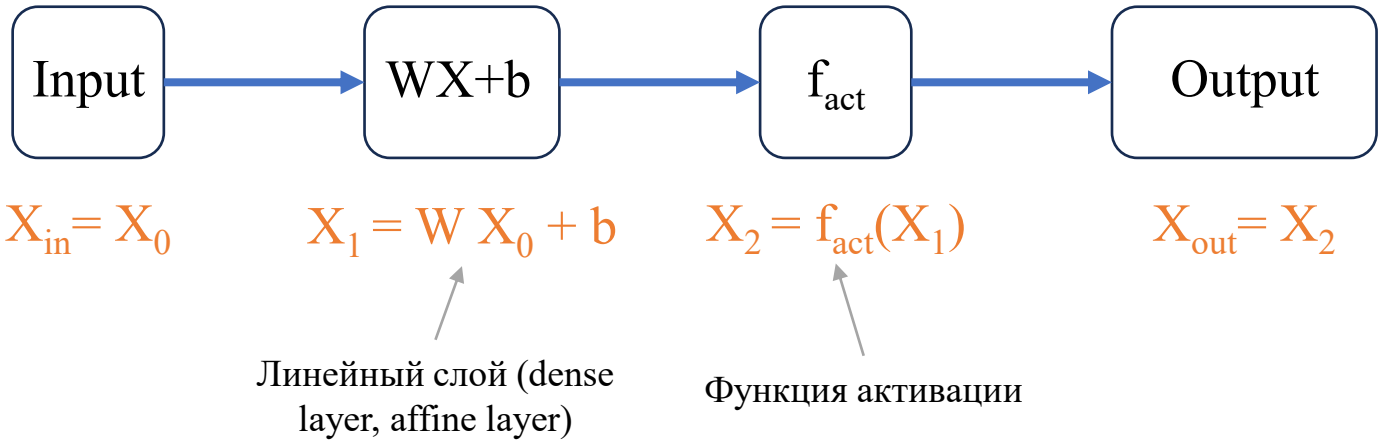
Модель нейрона. Основной “кирпичик” в построение перцептрона

Искусственная нейронная сеть



В перцептроне Розенблатта предполагался один скрытый слой. В общем случае количество скрытых слоев может быть достаточно большим и зависит от выбранной архитектуры.

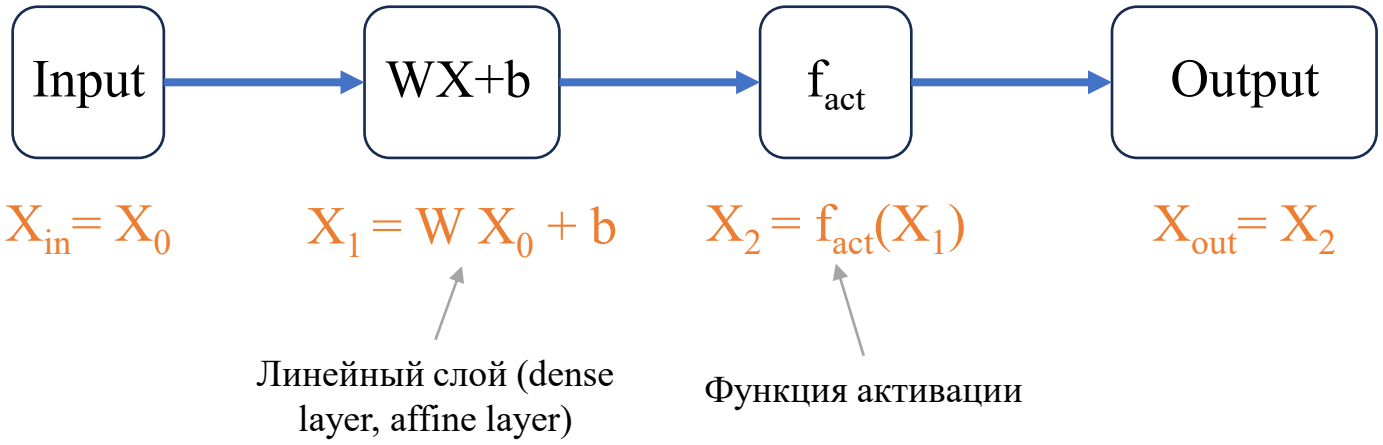
Нейронная сеть как вычислительный граф



Какой модели соответствует данный граф, если в качестве функции активации выбрать *сигмоиду*?

Нейросеть можно представить в виде соединённых вычислительных блоков – в виде **вычислительного графа (computational graph)**. Графы могут быть нелинейными, с обратной связью и т.д.

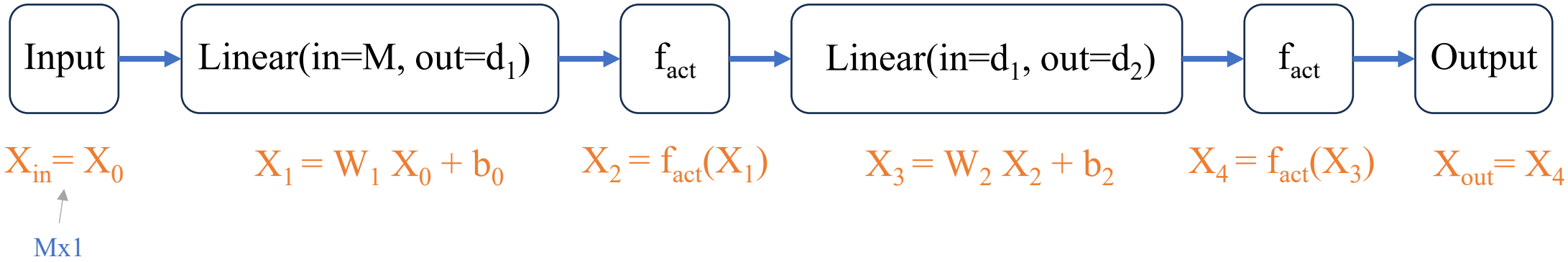
Нейронная сеть как вычислительный граф



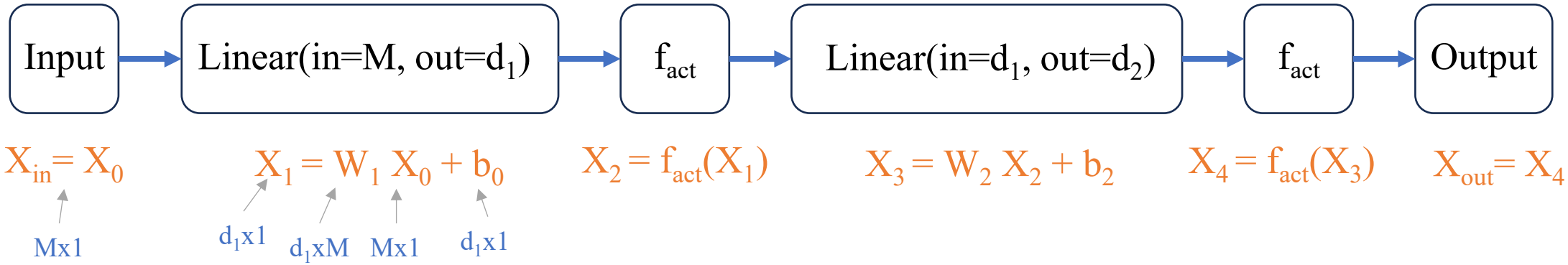
Нейросеть можно представить в виде соединённых вычислительных блоков – в виде **вычислительного графа (computational graph)**. Графы могут быть нелинейными, с обратной связью и т.д.

На этом примере можно узнать граф, соответствующий *логистической регрессии*, если функцию активации выбрать в виде *сигмоиды*

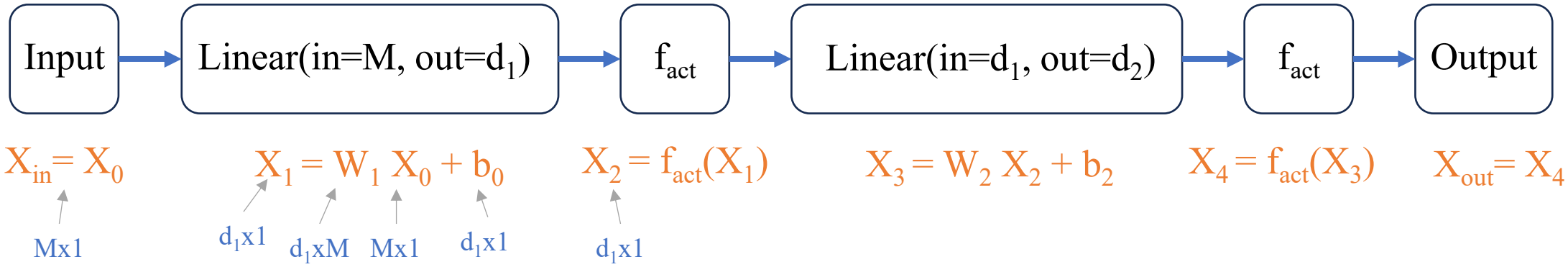
Размерности матриц



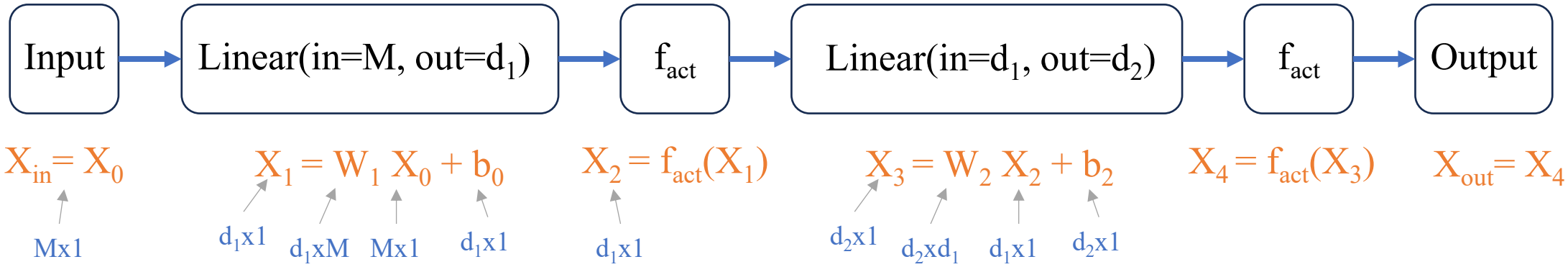
Размерности матриц



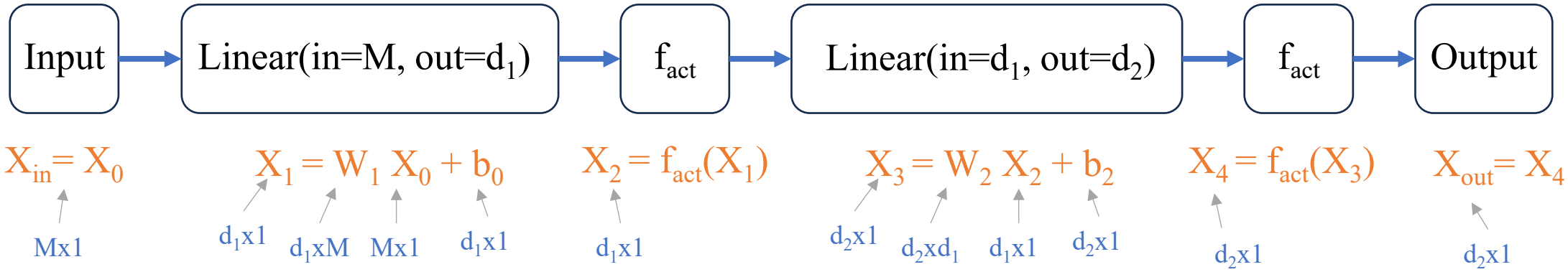
Размерности матриц



Размерности матриц

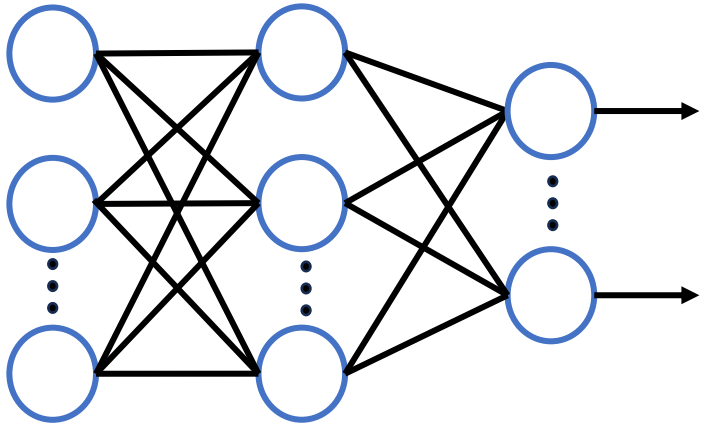


Размерности матриц



Универсальная теорема аппроксимации

Теорема Цыбенко (Hornik et al., 1989; Cybenko, 1989) утверждает, что нейронная сеть прямого распространения с одним скрытым слоем и с произвольной функцией активации может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью при условии правильного подбора количества нейронов скрытого слоя и весов.



Theorem 2. *Let σ be any continuous sigmoidal function. Then finite sums of the form*

$$G(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sigma(y_j^T x + \theta_j)$$

are dense in $C(I_n)$. In other words, given any $f \in C(I_n)$ and $\varepsilon > 0$, there is a sum, $G(x)$, of the above form, for which

$$|G(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{for all} \quad x \in I_n.$$

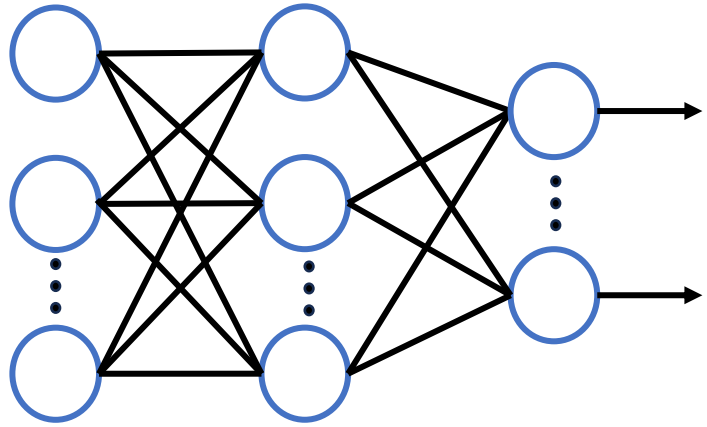
Cybenko, G. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of control, signals and systems*, *2*(4), 303-314.

Abstract—*This paper rigorously establishes that standard multilayer feedforward networks with as few as one hidden layer using arbitrary squashing functions are capable of approximating any Borel measurable function from one finite dimensional space to another to any desired degree of accuracy, provided sufficiently many hidden units are available. In this sense, multilayer feedforward networks are a class of universal approximators.*

Hornik, K., Stinchcombe, M., & White, H. (1989). Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural networks*, *2*(5), 359-366.

Универсальная теорема аппроксимации

Теорема Цыбенко (Hornik et al., 1989; Cybenko, 1989) утверждает, что нейронная сеть прямого распространения с одним скрытым слоем и с произвольной функцией активации может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью при условии правильного подбора количества нейронов скрытого слоя и весов.

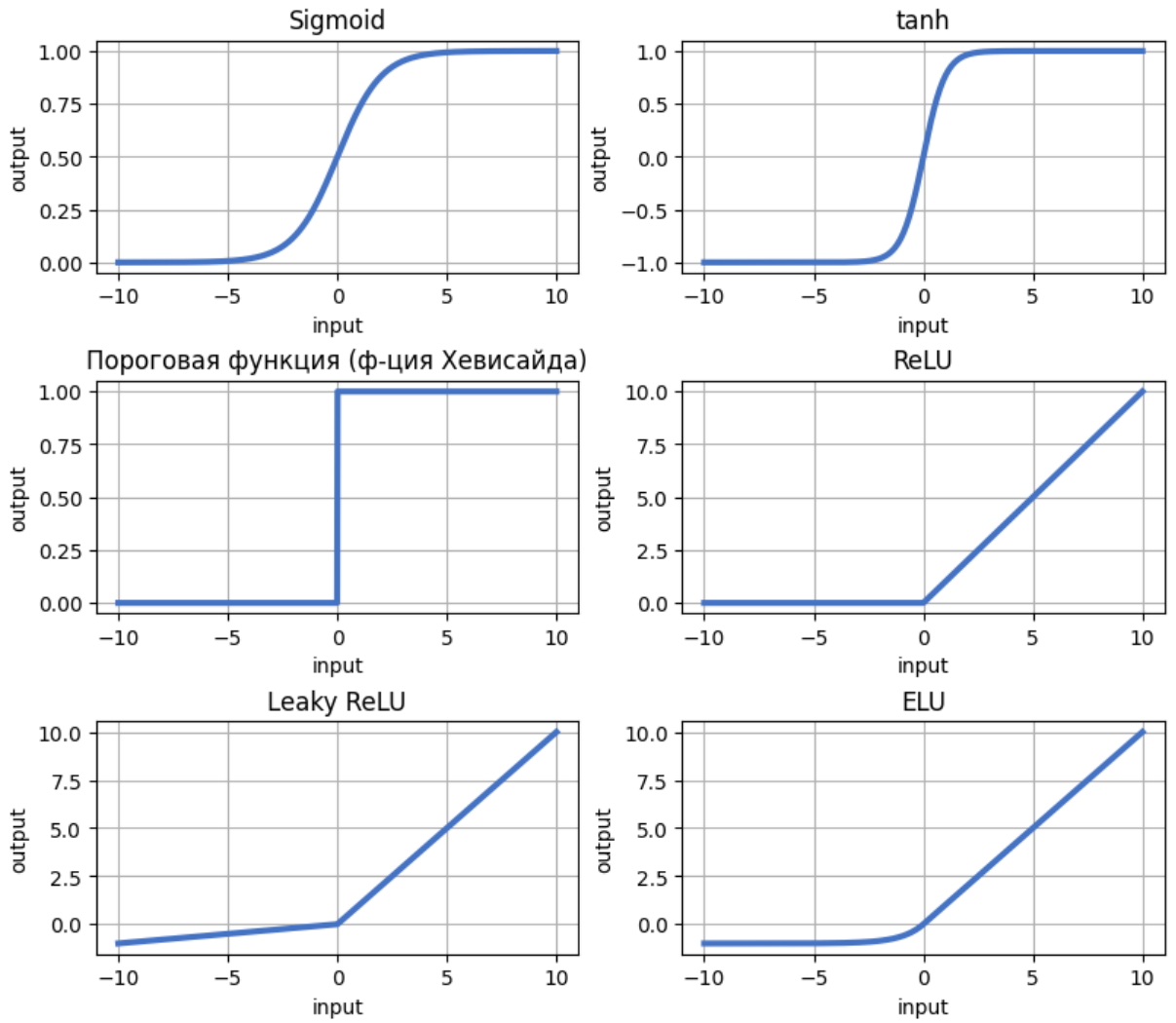


Проблемы:
- Не гарантируется, что алгоритм обучения сможет найти оптимальные параметры
- Количество необходимых нейронов может быть очень большим
- Из-за переобучения оптимизатор может выбрать не ту функцию, что приведет к росту количества ошибок на тестовом датасете

Для уменьшения количества нейронов в однослойной сети и уменьшения тестовой ошибки на практике использую **глубокие нейронные сети** с кол-вом слоем > 1 (часто десятки/сотни слоев**)**

Функции активации

- Сигмоида
- Гиперболический тангенс
- Пороговая функция
- ReLU
- Leaky ReLU
- ELU
- И другие

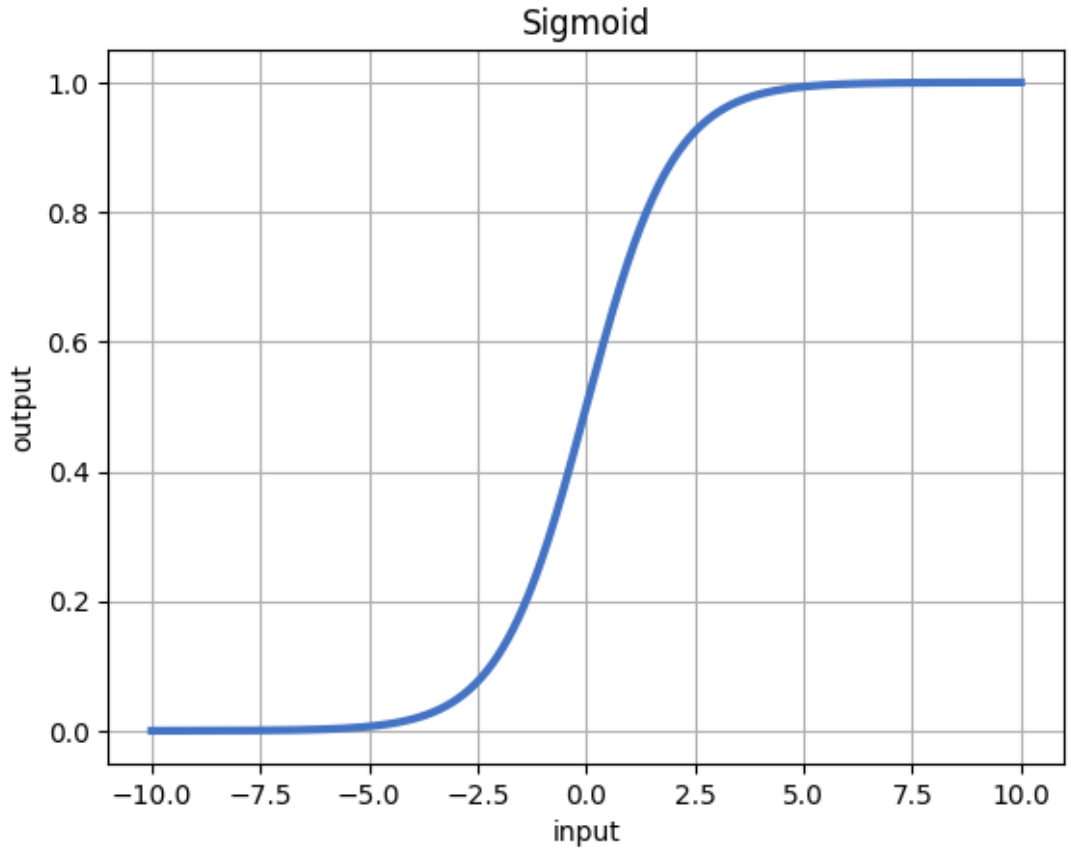


Сигмоида (sigmoid function)

Плюсы:
- Позволяет интерпретировать выход как вероятность
- Область значений ограничена

Минусы:
- Смещена относительно нуля
- При больших или малых значениях входа значения производной близко к нулю, что может привести к затуханию градиента (важно для обучения)
- Требует вычисления экспоненты

На практике внутри сети почти не используется. Чаще всего её можно встретить на последнем слое с целью получить вероятности для двух классов (для бинарной классификации)

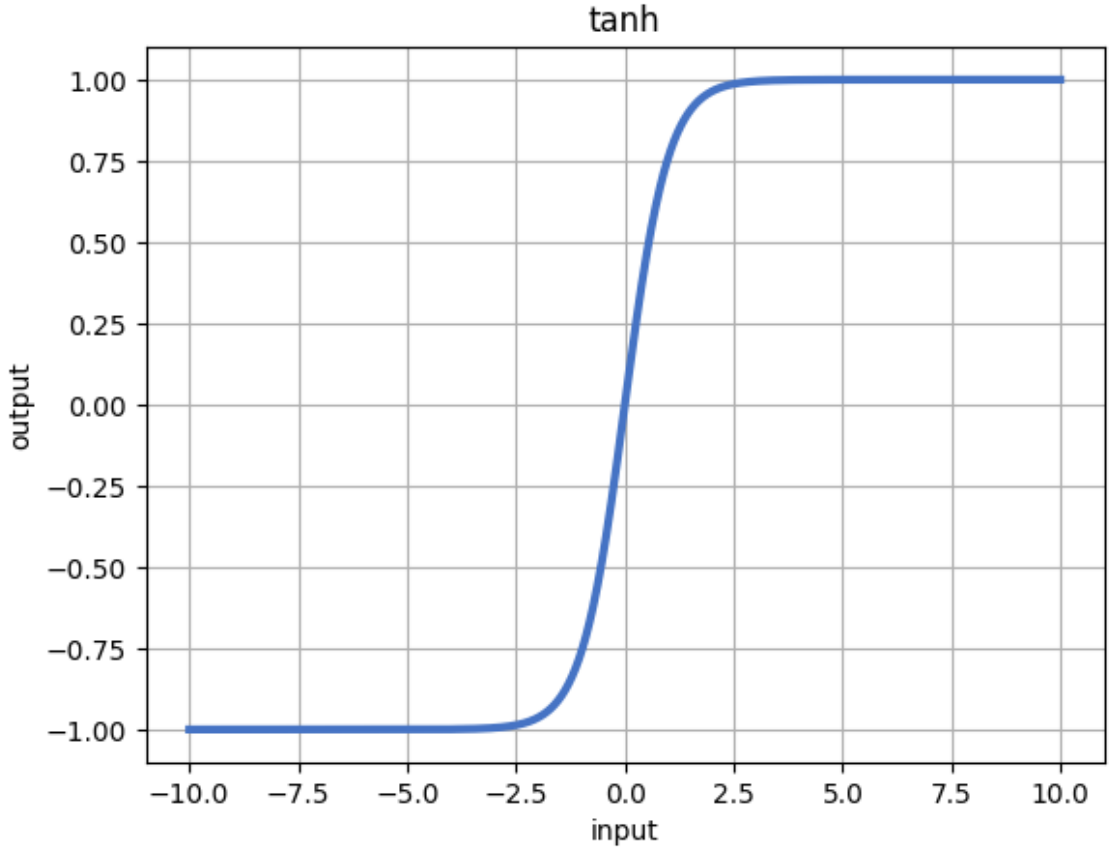


$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Гиперболический тангенс (tanh)

Плюсы:
- Симметричен относительно нуля
- Область значений ограничена

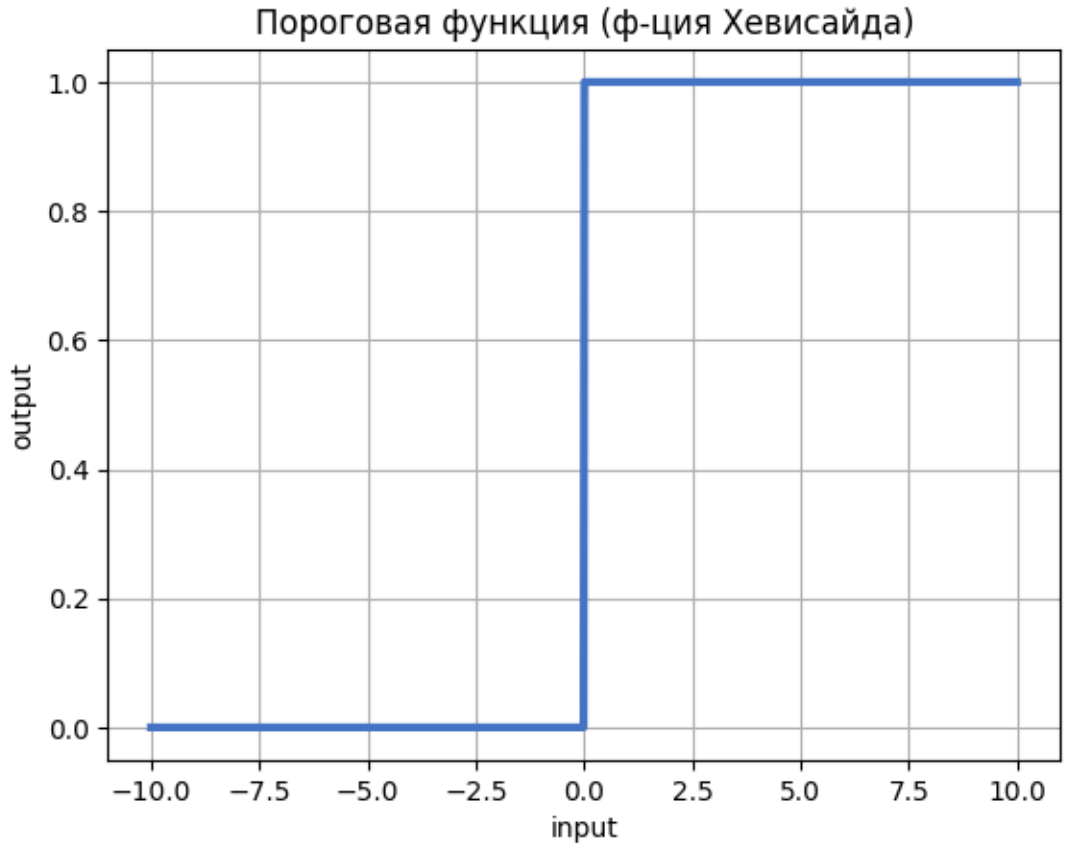
Минусы:
- При больших или малых значениях входа значения производной близко к нулю, что может привести к затуханию градиента (важно для обучения)
- Требует вычисления экспоненты



$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Пороговая функция (функция Хевисайда)

Минусы:
- Может возвращать лишь два значения
- Градиент равен нулю во всех областях



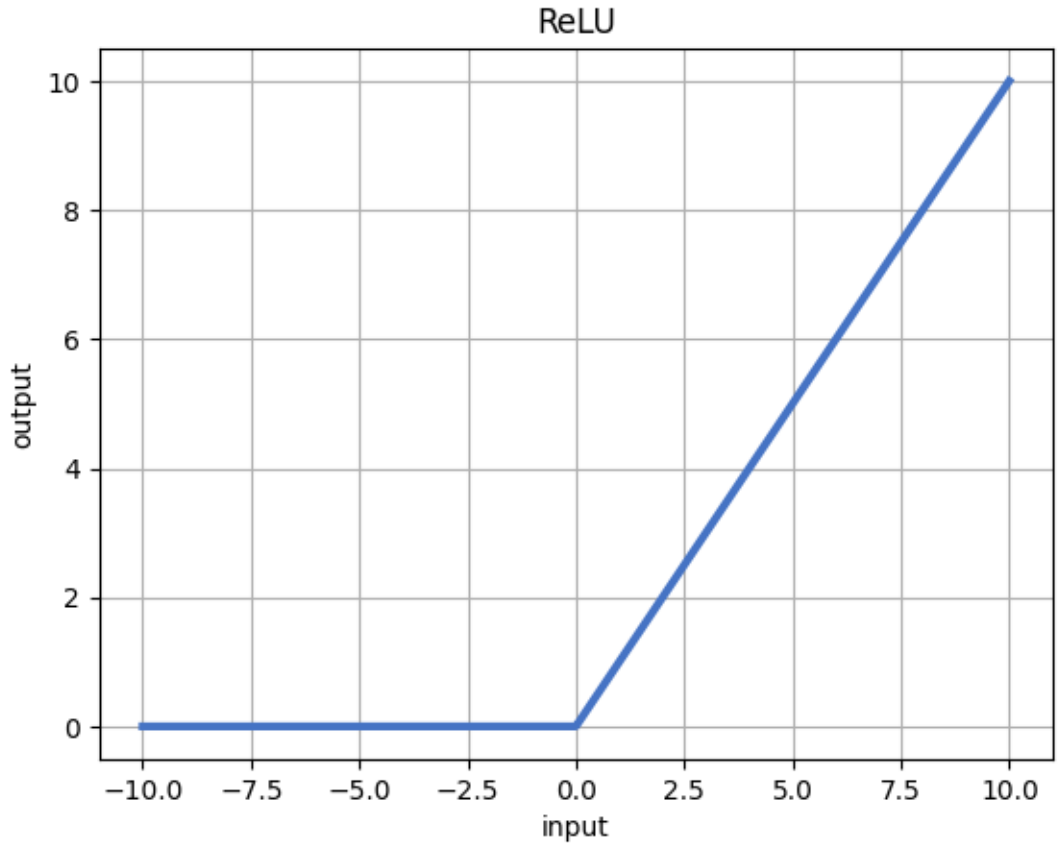
$$\theta(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ 1, x \geq 0. \end{cases}$$

ReLU (усеченное линейное преобразование, Rectified Linear Unit)

Минусы:
- Для отрицательных значений аргумента равна нулю, что может привести к затуханию градиента

Плюсы:
- Простота вычисления

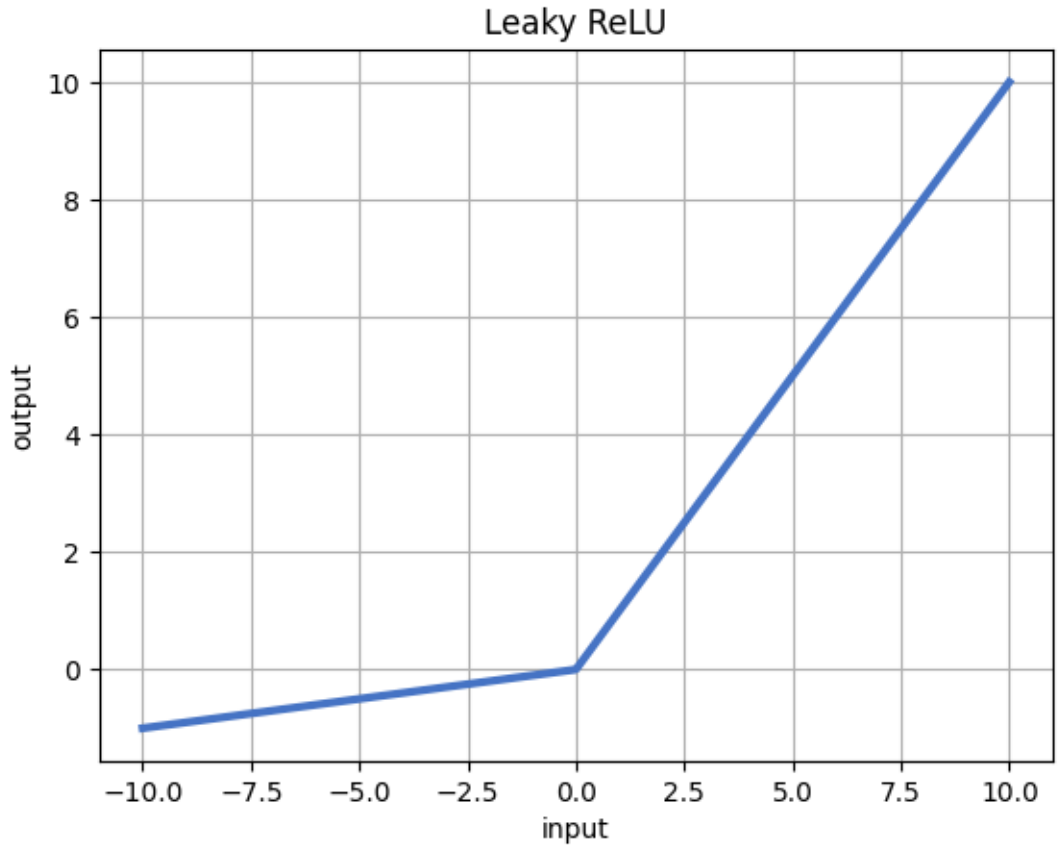
Одна из наиболее часто используемых функций активации.



$$ReLU(x) = \max(0, x)$$

Leaky ReLU

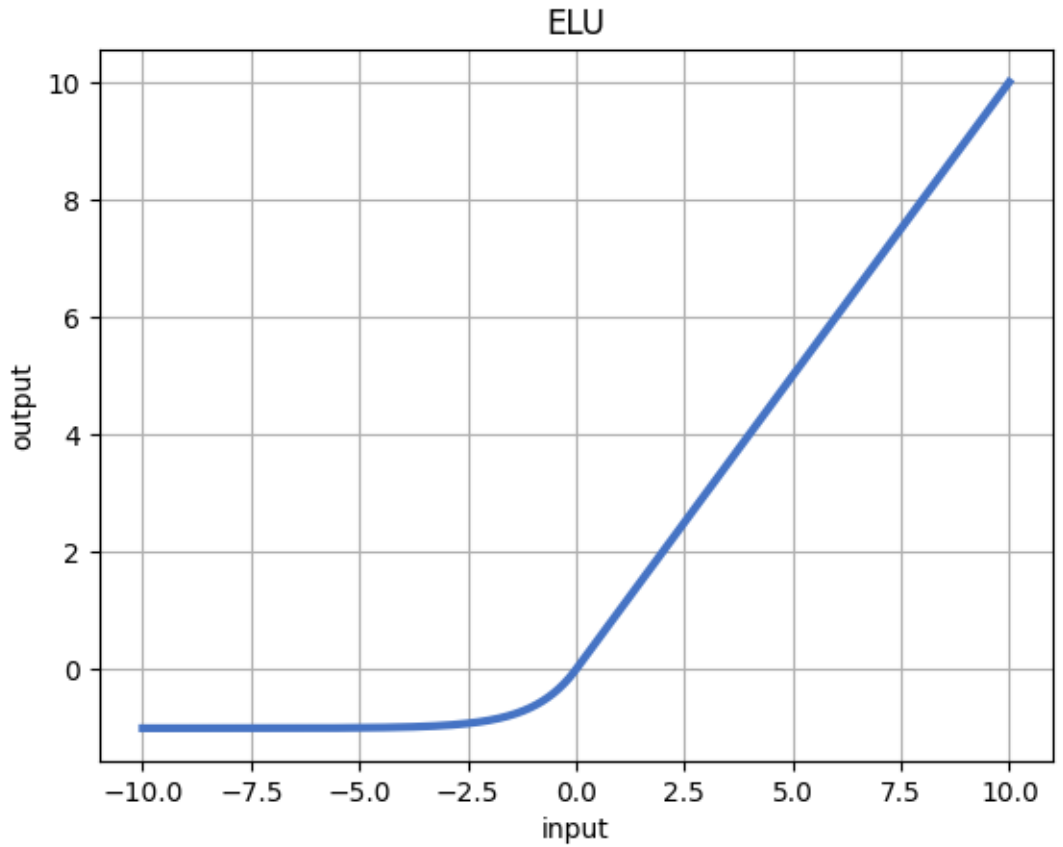
Очень похожа на ReLU; благодаря уклону в отрицательной области становится более симметричной.
Также обеспечивает ненулевой градиент в областях слева и справа от нуля



Leaky $ReLU(x) = \max(\alpha x, x)$,
где $0 < \alpha \ll 1$

ELU (Exponential Linear Unit)

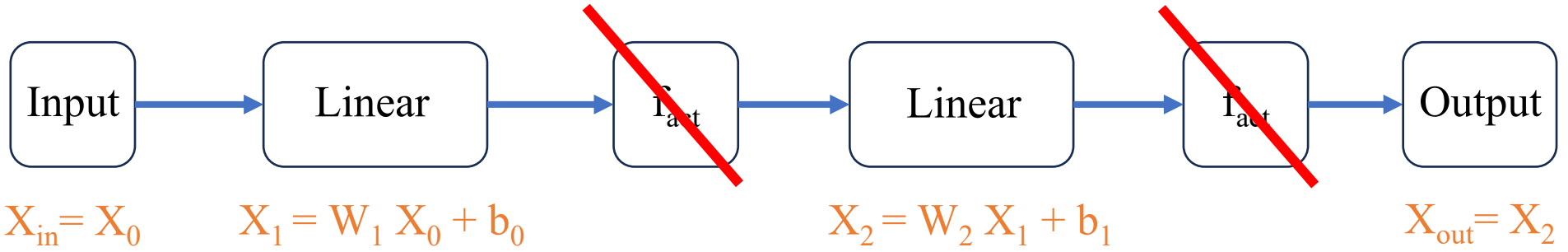
Попытка сделать более гладкую функцию в отрицательной области. Иногда может хорошо работать, но требует вычисления экспоненты



$$ELU(x) = \begin{cases} \alpha(e^x - 1), x \leq 0; \\ x, \qquad\qquad x > 0. \end{cases}$$

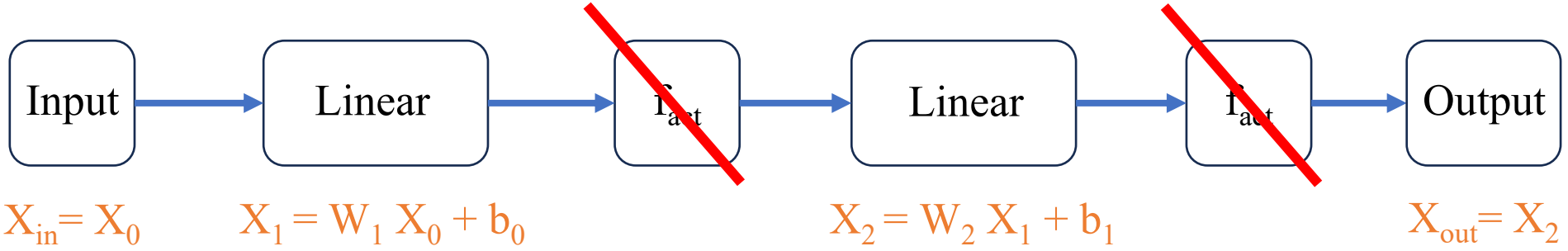
где $\alpha > 0$

Зачем нужны активации?



Найдем выход данного вычислительного графа:

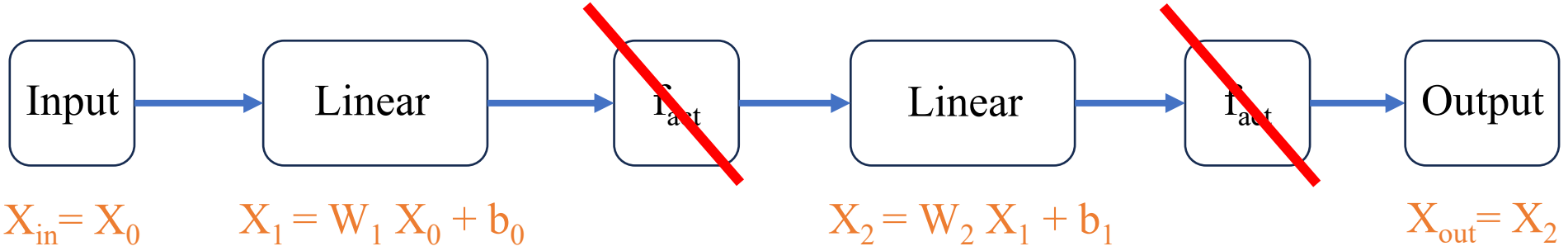
Зачем нужны активации?



Найдем выход данного вычислительного графа:

$$X_{out} = W_2 X_1 + b_1 =$$
$$= W_2(W_1 X_0 + b_0) + b_1 =$$
$$= W_2 W_1 X_0 + W_2 b_0 + b_1 =$$
$$= \tilde{W} X_0 + \tilde{b}$$

Зачем нужны активации?

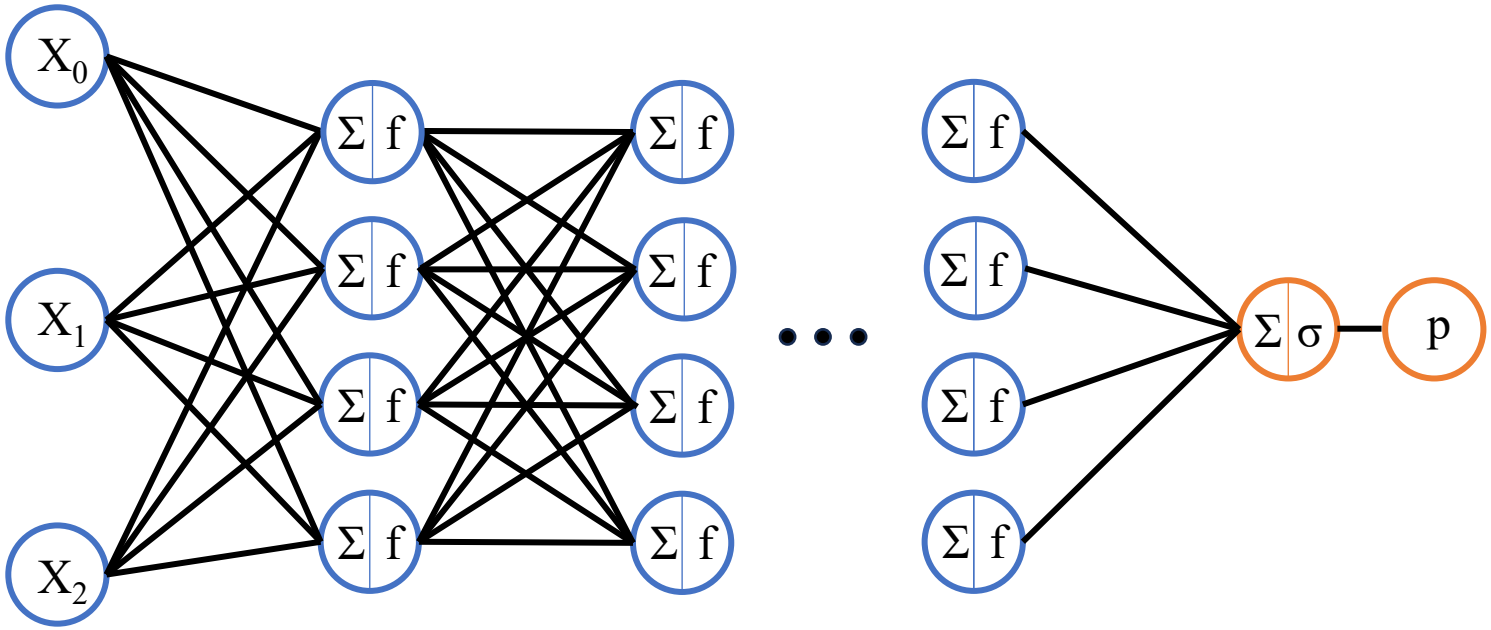


Найдем выход данного вычислительного графа:

$$X_{out} = W_2 X_1 + b_1 =$$
$$= W_2(W_1 X_0 + b_0) + b_1 =$$
$$= W_2 W_1 X_0 + W_2 b_0 + b_1 =$$
$$= \tilde{W} X_0 + \tilde{b}$$

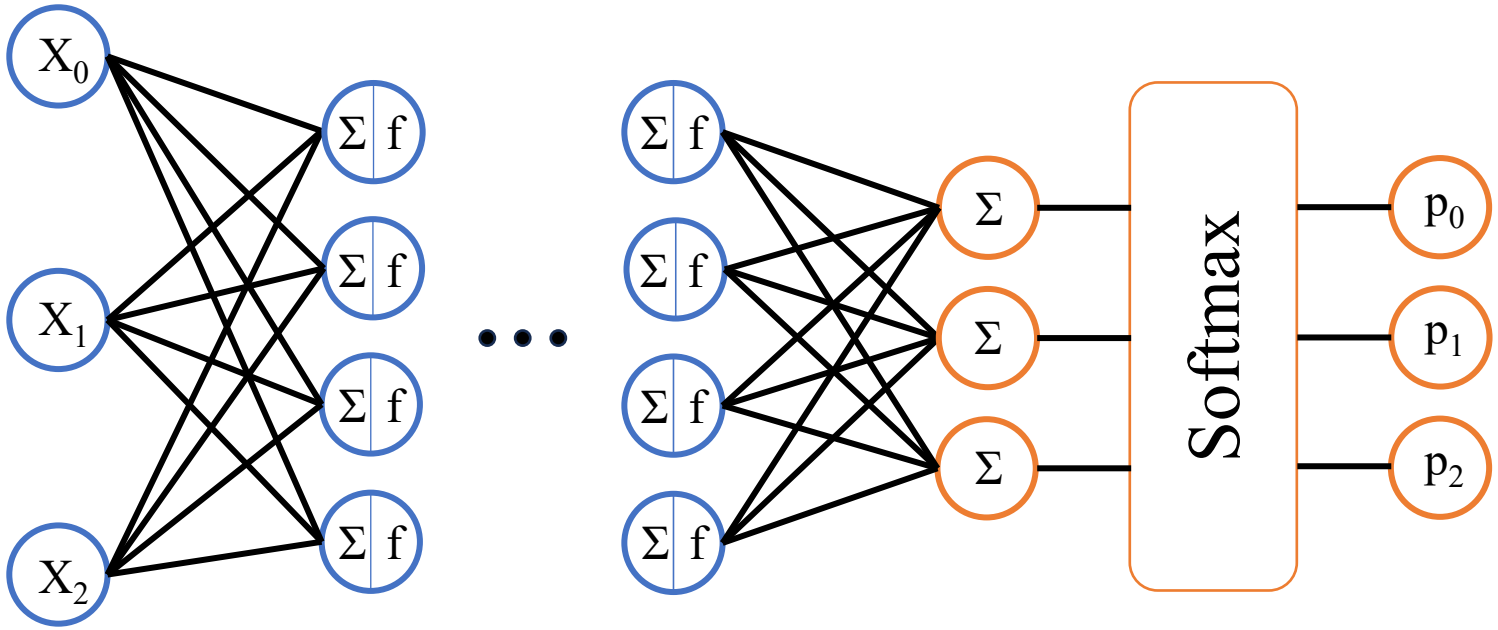
В результате двух последовательных *линейных* преобразований мы, очевидно, также получили *линейное отображение*. Добавление функций активации позволяет нам получать *нелинейные преобразование* и как следствие восстанавливать более сложные зависимости в данных.

Бинарная классификация



В случае **бинарной классификации** мы хотим получить вероятности принадлежности объекта к одному из классов. Для этого можно в качестве последней активации выбрать **сигмоиду**, которая переведет вещественный выход нейронной сети в интервал от 0 до 1.

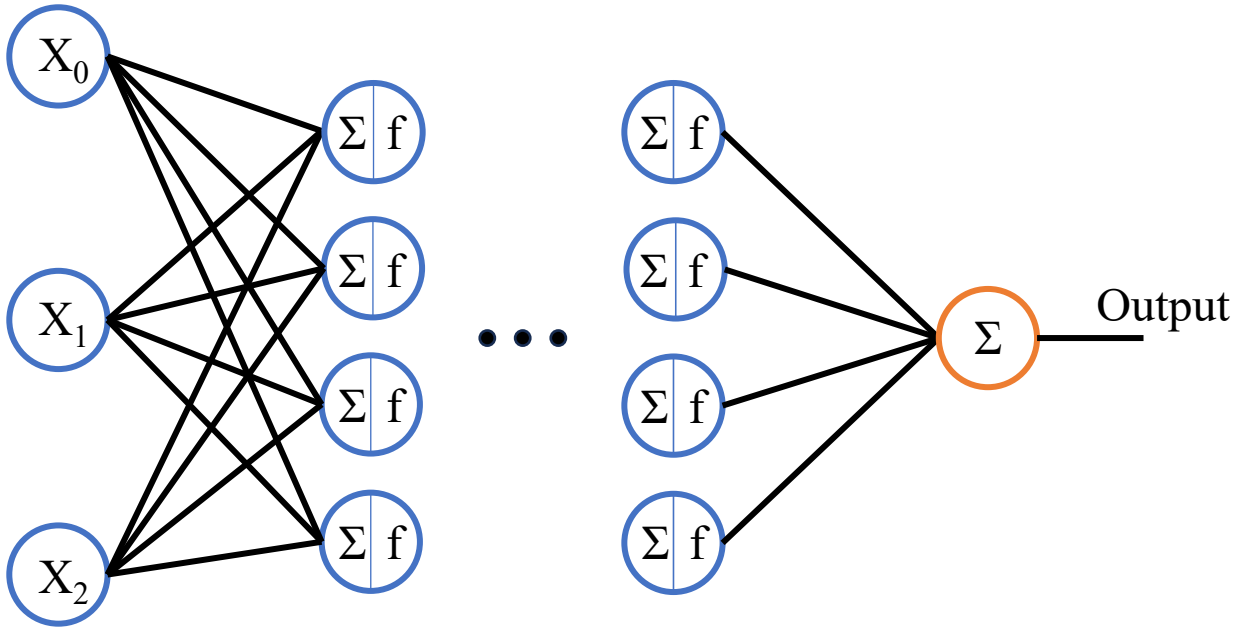
Многоклассовая классификация



Если мы решаем задачу в которой больше двух классов, то необходимо настроить архитектуру так, чтобы на выходе она выдавала K вещественных чисел, соответствующих числу классов, а затем превратить их в вероятности (с некоторыми оговорками) принадлежности к тому или иному классу. Сделать это можно с помощью функции **softmax:**

$$softmax(x_i) = \frac{e^{x_i}}{\sum_k e^{x_k}}$$

Регрессия



В задаче **регрессии** нам необходимо предсказывать вещественное число, поэтому функции активации на последнем слое обычно нет.

Если, например, предсказывается число от 0 до 100, то можно воспользоваться сигмоидой на последнем слое и умножить ответ на 100. Также можно превратить задачу регрессии в задачу классификации, если предсказываются целые числа из некоего диапазона. Естественно использование тех или иных приемов зависит от решаемой задачи.