Logique 2

Canta Thomas

TD résolution

Exercice 8

On veut montrer que $B \models A$ ou $B, \neg A \models \bot$ par la méthode de résolution.

* Forme skolémisé

- $B = (\forall x\ (\exists y\ R(x,y))) \wedge (\forall y\ (\exists z\ S(y,z)))$

Cette formule n'est pas polie, on doit donc la modifier tel que :

$= (\forall x\ (\exists y\ R(x,y))) \wedge (\forall w\ (\exists z\ S(w,z)))$

On peut maintenant déterminer la formule skolémisé de B

$= \forall x\ \exists y\ (R(x,y) \wedge (\forall w\ (\exists z\ S(w,z))))$

$= \forall x\ \exists y\ \forall w\ \exists z\ (R(x,y) \wedge S(w,z))$ | forme prénexe

$$\boxed{= \forall x\ \forall w\ (R(x, f(x)) \wedge S(w, g(x,w)))\ [y/f(x)][z/g(x,w)]}$$

- $\neg A = \neg(\forall x\ \exists y\ \exists z\ (R(x,y) \wedge S(y,z)))$

$= \exists x\ \forall y\ \forall z\ (\neg R(x,y) \vee \neg S(y,z))$ | forme prénexe

$$\boxed{= \forall y\ \forall z\ (\neg R(a,y) \vee \neg S(y,z))\ [x/a]}$$

* Unification

Prenons la substitution suivante :

$\sigma :\ a \mapsto x$

$y \mapsto f(x)$

$w \mapsto f(x)$

$z \mapsto g(x,w)$

① suite

Soient l'ensemble des clauses des hypothèses suivantes :

C_1 : $R(x, f(x))$

C_2 : $S(w, g(x,w))$

C_3 : $\neg R(a,y) \vee \neg S(y,z)$

Par substitution on a donc :

C_1 : $R(x, f(x))$

C_2 : $S(f(x), g(x,w))$

C_3 : $\neg R(x, f(x)) \vee \neg S(f(x), g(x,w))$

* Résolution

☑ Par résolution entre C_1 et C_3 on obtient

C_4 : $\neg S(f(x), g(x,w))$

☑ Par résolution entre C_2 et C_4 on obtient

C_5 : $\perp$

* Conclusion

L'hypothèse (B) et la négation du but ($\neg A$) sont contradictoire ($\perp$).

Ceci montre donc que A est bien conséquence logique de B ($B \models A$)

Logique 2

Cantu Thomas Gr. B

TD résolution

* Vérifions par le calcul des séquents :

$$\dfrac{}{R(a,b),\ S(b,c) \vdash R(a,b)}\ \text{ax} \qquad \dfrac{}{R(a,b),\ S(b,c) \vdash S(b,c)}\ \text{ax}$$

$$\dfrac{}{R(a,b),\ S(b,c) \vdash R(a,b) \wedge S(b,c)}\ \wedge\text{right}$$

$$\dfrac{}{R(a,b) \wedge S(b,c) \vdash R(a,b) \wedge S(b,c)}\ \wedge\text{left}$$

$$\dfrac{}{\forall x\ \forall w\ R(x,b) \wedge S(w,c) \vdash R(a,b) \wedge S(b,c)}\ \forall\text{right}$$

$$\dfrac{}{\forall x\ \forall w\ R(x,b) \wedge S(w,c) \vdash \exists y\ \exists z\ R(a,y) \wedge S(y,z)}\ \exists\text{right}$$

$$\dfrac{}{\forall x\ \exists y\ \forall w\ \exists z\ R(a,y) \wedge S(w,z) \vdash \exists y\ \exists z\ R(a,y) \wedge S(y,z)}\ \exists\text{left}$$

$$\dfrac{}{\forall x\ \exists y\ \forall w\ \exists z\ R(x,y) \wedge S(w,z) \vdash \forall x\ \exists y\ \exists z\ R(x,y) \wedge S(y,z)}\ \forall\text{right}$$

Exercice D

* Modélisation

(i) $\exists j \; \forall c \quad E(c) \wedge A(j,c)$

(ii) $\forall j \; \forall c \quad I(c) \wedge \neg A(j,c)$

Le but se traduit par :

(iii) $\forall c \quad E(c) \Rightarrow \neg I(c)$

$\neg$(iii) $\exists c \quad E(c) \wedge I(c)$

~~Les énoncés sont déjà sous forme skolémisé, on peut passer directement à l'unification.~~

~~* Unification et clausification~~

~~Prenons la substitution suivante~~

* forme skolémisé

(i) $\forall c \quad E(c) \wedge A(a,c)$

(ii) $\forall j \; \forall c \quad I(c) \wedge \neg A(j,c)$

$\neg$(iii) $E(b) \wedge I(b)$

* Unification et clausification

Prenons la substitution suivante :

$$\sigma : \begin{array}{l} a \longmapsto j \\ b \longmapsto c \end{array}$$

Logique 2 ③

Canta Thomas Gr. B

TD resolution

Soient l'ensemble des clauses des hypothèses suivantes :

C_1 : $E(b)$

C_2 : $A(a,b)$

C_3 : $I(b)$

C_4 : $\neg A(a,b)$

* Resolution

Par resolution entre C_2 et C_4 on obtien

C_5 : $\perp$

* Conclusion

Les hypothèses (i, ii) et la négation du but ($\neg$ iii) sont contradictoires ($\perp$). Ceci montre donc que (iii) est bien conséquence logique de i et ii

(i, ii $\models$ iii)

* Verifions par le calcul des séquents

③ suite

$$\dfrac{}{E(a), A(b,c), I(a) \vdash \neg I(a), A(b,c)}\ ax$$

$$E(a), A(b,c), I(a), \neg \underline{A(b,c)}, E(a) \vdash \neg I(a) \quad \neg left$$

$$E(a) \underline{\wedge} A(b,c), I(a) \underline{\wedge} \neg A(b,c), E(a) \vdash \neg I(a) \quad \wedge left$$

$$E(a) \wedge A(b,a), I(a) \wedge \neg A(b,a) \vdash E(a) \underline{\Rightarrow} \neg I(a) \quad \Rightarrow right$$

$$\underline{\forall c}\ E(c) \wedge A(b,c), \underline{\forall j \forall c}\ I(c) \wedge \neg A(j,c) \vdash E(a) \Rightarrow \neg I(a) \quad \forall left$$

$$\underline{\exists j}\ \forall c\ E(c) \wedge A(j,c), \forall j \forall c\ I(c) \wedge \neg A(j,c) \vdash E(a) \Rightarrow \neg I(a) \quad \exists left$$

$$\exists j \forall c\ E(c) \wedge A(j,c), \forall j \forall c\ I(c) \wedge \neg A(j,c) \vdash \underline{\forall c}\ E(c) \Rightarrow \neg I(c) \quad \forall right$$