Algorithmique de graphes, HLIN501 Année 2018-2019
Contrôle continu
L3 Info, L3 Math-Info

- Contrôle continu -

- Durée : 1 heure - Aucun document n'est autorisé -
Novembre 2018

Le barème est indicatif, la note totale sera sur 15 points. Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées. Vous apporterez une attention particulière à l'orthographe et à la grammaire.

Nous ne considérerons que des graphes simples (sans boucles, ni arêtes multiples).

- Exercice 1 - ACPM et voyageur de commerce *(4 points)*

Soit $V = \{v_1, \ldots, v_6\}$ les sommets d'un graphe G complet à 6 éléments. Le poids w d'une arête entre deux sommets est donné par la matrice (symétrique) suivante :

$$(w(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 13 & 5 & 6 & 10 \\ . & 0 & 5 & 10 & 11 & 8 \\ . & . & 0 & 12 & 8 & 8 \\ . & . & . & 0 & 2 & 2 \\ . & . & . & . & 0 & 4 \\ . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

Le *poids* d'un ensemble F d'arêtes de G est défini comme la somme des poids des arêtes de F.

a. Construire un arbre couvrant $T = (V, F)$ de poids minimum en utilisant l'algorithme de Kruskal. Justifier particulièrement les étapes de rejet d'arêtes qui ont lieu avant l'obtention de la totalité de l'arbre. Dessiner l'arbre obtenu et donner son poids total.

b. Donner la complexité de l'algorithme de Kruskal vu en cours en version optimisée.

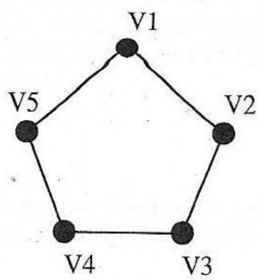
c. Proposer une tournée pour le voyageur de commerce qui suit le principe de l'algorithme d'approximation de la meilleure tournée proposé en cours. Quel est le poids de cette tournée ?

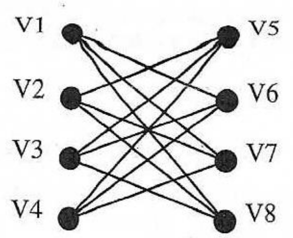
d. Si cela est possible, proposez une meilleure tournée.

- Exercice 2 - Coloration de graphes *(6 points)*

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une coloration des sommets de G est une application $c : V \to \mathbb{N}^*$ qui associe à chaque sommet un entier (appelé couleur). Une coloration c de $G = (V, E)$ est dite *propre* si pour toute arête $uv \in E$, $c(u) \neq c(v)$ (en d'autres termes, deux sommets adjacents recoivent des couleurs différentes). Le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour obtenir une coloration propre de G est appelé le *nombre chromatique* de G et est noté $\chi(G)$. On peut observer que chercher une coloration propre revient à partitionner les sommets du graphe en stables et le plus petit nombre de stables garantissant l'existence de cette partition est $\chi(G)$.

a. Donner une coloration propre des deux graphes suivants utilisant le plus petit nombre de couleurs possibles (justifier ; vous montrerez qu'il n'existe pas de coloration avec strictement moins de couleurs).





/2 b. L'algorithme COLORATIONPROPRE permet de calculer une coloration propre des sommets d'un graphe.

Algorithme : COLORATIONPROPRE

Données : $G = (V, E)$ un graphe donné par listes de voisins.
Une énumération $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ des sommets de G.

Résultat : $c : V \to \mathbb{N}^*$ un tableau d'entiers tel que $\forall uv \in E, c(u) \neq c(v)$.

```
début
    pour tous les v_i avec i allant de 1 à n faire
        Parmi les couleurs disponibles pour v_i (i.e. toutes celles qui n'ont pas été assignées à un
        voisin de v_i), assigner pour c(v_i) la plus petite possible.
```

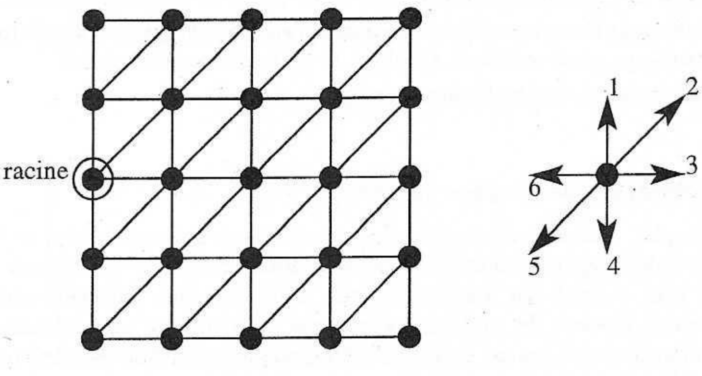
On rappelle que les couleurs sont des entiers, choisir la plus petite couleur disponible revient à choisir le plus petit entier disponible. Appliquer l'algorithme COLORATIONPROPRE sur les deux graphes précédents en prenant en compte les énumérations proposées.

/1 c. Justifiez que l'algorithme COLORATIONPROPRE termine. Quelle est sa complexité ?

/2 d. L'énumération donnée en entrée a un impact sur le nombre total de couleurs utilisées. Donner un graphe G et une énumération de ses sommets pour lesquels le nombre de couleurs utilisées par COLORATIONPROPRE correspond à $\chi(G)$.

/1 e. Donner maintenant un graphe G et une énumération de ses sommets pour lesquels le nombre de couleurs utilisées par COLORATIONPROPRE est strictement supérieur à $\chi(G)$.

- Exercice 3 - Algorithmes du cours *(3 points)*



a. Donner (dessiner) un parcours en profondeur de la grille ci-dessus en partant du sommet racine entouré (l'ordre de visite des voisins est donné par la rosace de droite ci-dessus ; sous réserve de l'existence du voisin, on commence par visiter celui du haut, puis celui de haut-droite, puis celui de droite,...). Quelle est la complexité de ce parcours ?

b. Donner (dessiner) un parcours en largeur de la grille ci-dessus en partant du sommet racine entouré (sous les mêmes contraintes de visistes). Quelle est la complexité de ce parcours ?

- Exercice 4 - Composantes connexes *(2 points)*

Soit G un graphe à n sommets dans lequel tous les sommets ont un degré supérieur ou égal à $n/3$ (i.e. $\forall x \in V(G), deg_G(v) \geq n/3$). Montrer que G possède au plus 2 composantes connexes.