Calcul des séquents intuitionniste (LJ)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ \mathrm{cont}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}\ \Rightarrow_{\mathrm{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \Rightarrow_{\mathrm{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash C}\ \Leftrightarrow_{\mathrm{left1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash C}\ \Leftrightarrow_{\mathrm{left2}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow_{\mathrm{right}}$$

Calcul des séquents intuitionniste (LJ)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ \wedge_{\mathrm{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge_{\mathrm{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_{\mathrm{right1}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ \vee_{\mathrm{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_{\mathrm{right2}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash B}\ \neg_{\mathrm{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_{\mathrm{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash A}\ \bot_{\mathrm{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\mathrm{right}}$$

Calcul des séquents intuitionniste (LJ)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash B}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash B}\ \forall_{\mathrm{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}\ \forall_{\mathrm{right}},\ x \notin \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash B}\ \exists_{\mathrm{left}},\ x \notin \Gamma, B \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x.A(x)}\ \exists_{\mathrm{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \mathrm{cut}$$

Calcul des séquents classique ($\mathrm{LJ}_{\mathrm{em}}$)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash B}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash B}\ \forall_{\mathrm{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}\ \forall_{\mathrm{right}},\ x \notin \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash B}\ \exists_{\mathrm{left}},\ x \notin \Gamma, B \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x.A(x)}\ \exists_{\mathrm{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \mathrm{cut} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ \mathrm{em}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\ \text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, B}\ \text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \text{cont}_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \qquad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta}\ \Leftrightarrow_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\ \forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\ \exists_{\text{left}},\ x \notin \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\ \exists_{\text{right}}$$

Tableaux et superdéduction

Règles de clôture et règles analytiques

$$\frac{\bot}{\odot}\ \odot_\bot \qquad \frac{\neg\top}{\odot}\ \odot_{\neg\top} \qquad \frac{P \quad \neg P}{\odot}\ \odot$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}\ \alpha_{\neg\neg} \qquad \frac{P \Leftrightarrow Q}{\neg P, \neg Q \mid P, Q}\ \beta_{\Leftrightarrow} \qquad \frac{\neg(P \Leftrightarrow Q)}{\neg P, Q \mid P, \neg Q}\ \beta_{\neg\Leftrightarrow}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P, Q}\ \alpha_{\wedge} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\vee} \qquad \frac{\neg(P \Rightarrow Q)}{P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\Rightarrow}$$

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}\ \beta_{\vee} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}\ \beta_{\neg\wedge} \qquad \frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \mid Q}\ \beta_{\Rightarrow}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\text{right}}$$

Procédure de DPLL

Algorithme

DPLL(S)=
- si $S = \emptyset$ alors retourner « satisfiable » ;
- sinon si $\square \in S$ alors retourner « insatisfiable » ;
- sinon si S contient une tautologie C alors retourner DPLL($S \backslash C$) ;
- sinon si S contient une clause unitaire avec A (resp. $\neg A$) alors
  - retourner DPLL($S[A := \top]$) (resp. DPLL($S[A := \bot]$)) ;
- sinon si A (resp. $\neg A$) est pur dans S alors
  - retourner DPLL($S[A := \top]$) (resp. DPLL($S[A := \bot]$)) ;
- sinon choisir une variable A de S
  - et retourner DPLL($S[A := \top]$) ou DPLL($S[A := \bot]$).

Procédure de résolution

Algorithme

$Sat := \emptyset$;
tant que $S \neq \emptyset$ faire
- choisir $C \in S$;
- $S := S \backslash \{C\}$;
- si $C = \square$ alors retourner « insatisfiable » ;
- si C est une tautologie alors ; (* passer à la clause suivante *)
- sinon, si $C \in Sat$ alors ; (* idem *)
- sinon pour tout résolvant C_1 entre C et une clause de $Sat \cup \{C\}$ faire
  - $S := S \cup \{C_1\}$;
- $Sat := Sat \cup \{C\}$;

retourner « satisfiable ».

Méthode des tableaux

Règles de clôture et règles analytiques

$$\frac{\bot}{\odot}\ \odot_{\bot} \qquad \frac{\neg\top}{\odot}\ \odot_{\neg\top} \qquad \frac{P \qquad \neg P}{\odot}\ \odot$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}\ \alpha_{\neg\neg} \qquad \frac{P \Leftrightarrow Q}{\neg P, \neg Q \mid P, Q}\ \beta_{\Leftrightarrow} \qquad \frac{\neg(P \Leftrightarrow Q)}{\neg P, Q \mid P, \neg Q}\ \beta_{\neg\Leftrightarrow}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P, Q}\ \alpha_{\wedge} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\vee} \qquad \frac{\neg(P \Rightarrow Q)}{P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\Rightarrow}$$

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}\ \beta_{\vee} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}\ \beta_{\neg\wedge} \qquad \frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \mid Q}\ \beta_{\Rightarrow}$$

Méthode des tableaux (sans variable libre)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(c)}\ \delta_{\exists},\ c \text{ frais} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(c)}\ \delta_{\neg\forall},\ c \text{ frais}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\ \gamma_{\forall\text{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\ \gamma_{\neg\exists\text{inst}}$$

Méthode des tableaux (avec variable libre, destructif)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(f(X_1, \ldots, X_n))}\ \delta_{\exists},\ \begin{array}{l} f \text{ frais,} \\ X_i \text{ var. lib.} \end{array} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(f(X_1, \ldots, X_n))}\ \delta_{\neg\forall},\ \begin{array}{l} f \text{ frais,} \\ X_i \text{ var. lib.} \end{array}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\ \gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\ \gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\ \gamma_{\forall\text{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\ \gamma_{\neg\exists\text{inst}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Appliquer } \sigma \text{ à l'arbre s'il existe dans la branche} \\ \text{deux littéraux } K \text{ et } \neg L \text{ t.q. } \sigma = mgu(K, L)\end{array}}{\odot}\ \odot$$

Méthode des tableaux (avec variable libre, non destructif)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(f(X_1, \ldots, X_n))}\ \delta_{\exists},\ \begin{array}{l} f \text{ frais,} \\ X_i \text{ var. lib.} \end{array} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(f(X_1, \ldots, X_n))}\ \delta_{\neg\forall},\ \begin{array}{l} f \text{ frais,} \\ X_i \text{ var. lib.} \end{array}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\ \gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\ \gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\ \gamma_{\forall\text{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\ \gamma_{\neg\exists\text{inst}}$$

Méthode des tableaux (non destructif, avec ϵ-termes)

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(\epsilon(x).P(x))}\,\delta_{\exists} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(\epsilon(x).\neg P(x))}\,\delta_{\neg\forall}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\,\gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\,\gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\,\gamma_{\forall\text{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\,\gamma_{\neg\exists\text{inst}}$$

Skolémisation

Fonctions de skolémisation et herbrandisation

- Si Φ est atomique, $s(\Phi) = h(\Phi) = \Phi$;
- $s(\Phi \wedge \Phi') = s(\Phi) \wedge s(\Phi')$, $h(\Phi \wedge \Phi') = h(\Phi) \wedge h(\Phi')$;
- $s(\Phi \vee \Phi') = s(\Phi) \vee s(\Phi')$, $h(\Phi \vee \Phi') = h(\Phi) \vee h(\Phi')$;
- $s(\neg\Phi) = \neg h(\Phi)$, $h(\neg\Phi) = \neg s(\Phi)$;
- $s(\Phi \Rightarrow \Phi') = h(\Phi) \Rightarrow s(\Phi')$, $h(\Phi \Rightarrow \Phi') = s(\Phi) \Rightarrow h(\Phi')$;
- $s(\forall x.\Phi) = s(\Phi)$, $h(\forall x.\Phi) = h(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $\forall x.\Phi$;
- $s(\exists x.\Phi) = s(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $\exists x.\Phi$, $h(\exists x.\Phi) = h(\Phi)$.
- Ensuite, une fois le calcul terminé :
  - Skolémisation : $\forall x_1. \ldots .\forall x_n.s(\Phi)$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $s(\Phi)$;
  - Herbrandisation : $\exists x_1. \ldots .\exists x_n.h(\Phi)$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $h(\Phi)$.

Procédure de résolution (la même qu'en propositionnel !)

Algorithme (« Given-Clause Algorithm »)

$Sat := \emptyset$;
tant que $S \neq \emptyset$ faire
  choisir $C \in S$;
  $S := S \backslash \{C\}$;
  si $C = \square$ alors retourner « insatisfiable » ;
  si C est une tautologie alors ; (* passer à la clause suivante *)
  sinon, si $C \in Sat$ alors ; (* idem *)
  sinon pour tout résolvant C_1 entre C
  et une clause de $Sat \cup \{C\}$ faire
    $S := S \cup \{C_1\}$;
  $Sat := Sat \cup \{C\}$;
retourner « satisfiable ».

Tableaux et superdéduction

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(\epsilon(x).P(x))}\,\delta_{\exists} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(\epsilon(x).\neg P(x))}\,\delta_{\neg\forall}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\,\gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\,\gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\,\gamma_{\forall\text{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\,\gamma_{\neg\exists\text{inst}}$$

Un exemple

Égalité avec symboles non interprétés

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \wedge (\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \vee \underbrace{g(a) = d}_{3}) \wedge (\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \vee \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow$ (unit prop)
$1 \parallel \mathbf{1}, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow$ (decide)
$1\ \bar{2}^{d} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow$ (decide)
$1\ \bar{2}^{d}\ \bar{4}^{d} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}} \longrightarrow$ (learn)
$1\ \bar{2}^{d}\ \bar{4}^{d} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}}, \mathit{\bar{1}} \vee \mathit{2} \vee \mathit{4} \longrightarrow$ (backjump)
$1\ \bar{2}^{d}\ 4 \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \mathbf{4} \longrightarrow$ (unit prop)
$1\ \bar{2}^{d}\ 4\ \bar{3} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \mathbf{4} \longrightarrow$ (learn)
$1\ \bar{2}^{d}\ 4\ \bar{3} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \mathbf{4}, \mathit{\bar{1}} \vee \mathit{2} \vee \mathit{\bar{4}} \vee \mathit{3} \longrightarrow$ (backjump)
$1\ 2 \parallel \mathbf{1}, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \mathbf{4}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \bar{\mathbf{4}} \vee \mathbf{3} \longrightarrow$ (unit prop)
$1\ 2\ 3 \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \mathbf{4}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \bar{\mathbf{4}} \vee \mathbf{3} \longrightarrow$ (unit prop)
$1\ 2\ 3\ \bar{4} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \mathbf{4}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \bar{\mathbf{4}} \vee \mathbf{3} \longrightarrow$ (learn)
$1\ 2\ 3\ \bar{4} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \mathbf{4}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \vee \bar{\mathbf{4}} \vee \mathbf{3}, \mathit{\bar{1}} \vee \mathit{\bar{2}} \vee \mathit{\bar{3}} \vee \mathit{4} \longrightarrow$ (unsat)
unsat

Minimiser les clauses apprises

Égalité avec symboles non interprétés

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \wedge (\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \vee \underbrace{g(a) = d}_{3}) \wedge (\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \vee \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow$ (unit prop)
$1 \parallel \mathbf{1}, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow$ (decide)
$1\ \bar{2}^{d} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow$ (decide)
$1\ \bar{2}^{d}\ \bar{4}^{d} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}} \longrightarrow$ (learn)
$1\ \bar{2}^{d}\ \bar{4}^{d} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}}, \mathit{\bar{1}} \vee \mathit{2} \longrightarrow$ (backjump)
$1\ 2 \parallel \mathbf{1}, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \longrightarrow$ (unit prop)
$1\ 2\ 3 \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \longrightarrow$ (unit prop)
$1\ 2\ 3\ \bar{4} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2} \longrightarrow$ (learn)
$1\ 2\ 3\ \bar{4} \parallel \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}, \bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{1}} \vee \mathbf{2}, \mathit{\bar{1}} \vee \mathit{\bar{3}} \vee \mathit{4} \longrightarrow$ (unsat)
unsat

Exemple (1)

Formule insatisfiable

$$f(a,b) = a \wedge f(f(a,b),b) \neq a$$

- Partition initiale :
  $\{\{a\},\ \{b\},\ \{f(a,b)\},\ \{f(f(a,b),b)\}\}$
- Imposer $f(a,b) = a$:
  $\{\{a,\ f(a,b)\},\ \{b\},\ \{f(f(a,b),b)\}\}$
- $a \sim f(a,b)$, donc $f(a,b) \sim f(f(a,b),b)$ (congruence) :
  $\{\{a,\ f(a,b),\ f(f(a,b),b)\},\ \{b\}\}$

La partition donne $f(f(a,b),b) \sim a$ mais la formule initiale contient l'inégalité $f(f(a,b),b) \neq a$.
La formule est donc insatisfiable.

Exemple (2)

Formule satisfiable

$$a = b \wedge b = c \wedge g(f(a),b) = g(f(c),a) \wedge f(a) \neq b$$

- Partition initiale :
  $\{\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{f(a)\},\ \{f(c)\},\ \{g(f(a),b)\},\ \{g(f(c),a\}\}$
- Imposer $a = b$:
  $\{\{a,\ b\},\ \{c\},\ \{f(a)\},\ \{f(c)\},\ \{g(f(a),b)\},\ \{g(f(c),a\}\}$
- Imposer $b = c$:
  $\{\{a,\ b,\ c\},\ \{f(a)\},\ \{f(c)\},\ \{g(f(a),b)\},\ \{g(f(c),a\}\}$
- $b \sim c$, donc $f(a) \sim f(c)$ (congruence) :
  $\{\{a,\ b,\ c\},\ \{f(a),\ f(c)\},\ \{g(f(a),b)\},\ \{g(f(c),a\}\}$
- $f(a) \sim f(c)$ et $b \sim a$, donc $g(f(a),b) \sim g(f(c),a)$ (congruence) :
  $\{\{a,\ b,\ c\},\ \{f(a),\ f(c)\},\ \{g(f(a),b),\ g(f(c),a\}\}$

Il n'y a aucune inégalité qui contredit la relation $\sim$.
La formule est donc satisfiable.