

Table des matières

Introduction	1
I Modélisation du théâtre d'Orange	3
Introduction	5
1 Présentation synthétique de l'architecture du théâtre d'Orange	7
1.1 Le <i>postscaenium</i> , les basiliques et le <i>pulpitum</i>	9
1.2 L' <i>orchestra</i> , les <i>aditi</i> et la <i>cavea</i>	11
1.3 Les couvertures et le <i>velum</i>	14
2 Modélisation	19
2.1 Méthodologie	21
2.2 La <i>cavea</i> et ses substructures	24
2.3 Les <i>maeniana</i>	28
2.4 Les <i>aditi</i> et les tribunes	30
2.5 Le mur de scène et ses basiliques	31
2.6 Le <i>pulpitum</i> et l' <i>orchestra</i>	34
2.7 Les couvertures du bâtiment de scène	34
2.8 La <i>porticus in summa cavea</i>	36
2.9 Les escaliers	37
2.10 La colline Saint-Eutrope	38
3 Applications	41
3.1 Le <i>velum</i>	42
3.2 Le rideau de scène	44
3.3 Les systèmes de particules	44
3.4 Autres projets ayant utilisé le modèle	45
Conclusion	47
Références	50
II Calculs acoustiques	51
Introduction	53
4 Acoustique de salle	55
4.1 Généralités sur l'acoustique de salle	56
4.2 Méthodes de calcul acoustique	62

5 Développement d'une méthode couplée	69
5.1 Notion d'onde sphérique discrétisée	71
5.2 Environnement géométrique	74
5.3 Calcul de rayons	76
5.4 Calcul de sources-images	80
5.5 Génération de réponse impulsionnelle	83
5.6 Auralisation	84
6 Optimisation algorithmique	87
6.1 Méthode d'octree	89
6.2 Analyse des résultats	95
7 Validation	99
7.1 Analyse visuelle	100
7.2 Décroissance quadratique	102
7.3 Cas de la salle sphérique	103
7.4 Cas de la salle cubique	104
Conclusion	109
Références	114
 III Analyse acoustique du théâtre d'Orange	107
Introduction	109
8 Configuration initiale	111
8.1 Configuration du maillage	112
8.2 Les matériaux	112
8.3 RIR du théâtre d'Orange	112
9 Test de configurations	113
9.1 position des spectateurs	114
9.2 Présence de spectateurs	114
9.3 Présence de velum	114
9.4 Forme et matériaux du toit	114
10 Comparaison avec d'autres théâtres antiques	115
Conclusion	117
Références	119
 A Annexes	I
A.1 Figures annexes	I
A.2 Tableaux annexes	II
 B Liste des acronymes	V
 C Glossaire	VII

Liste des figures

1	Théâtre d'Orange avant restauration	6
1.1	Vue d'ensemble du théâtre d'Orange	8
1.2	Perspective d'une section de la fosse du rideau de scène au théâtre de Lyon	11
1.3	Vue de dessus - 1er niveau	13
1.4	Vue de dessus - 2ème niveau	13
1.5	Vue de dessus - 3ème niveau	14
1.6	Toitures de basiliques par A.Badie	15
2.1	Illustration de quatre exemples de modifier Blender	23
2.2	Modélisation de la <i>cavea</i>	24
2.3	Modélisation des <i>maenianum</i>	28
2.5	Modélisation de l' <i>aditus</i> occidental et de sa tribune	30
2.6	Modélisation du <i>postscaenium</i> et de ses basiliques	32
2.7	Modélisation de la scène, l' <i>orchestra</i> et le sol des <i>parodos</i>	34
2.8	Modélisation des couvertures de scène et des basiliques	35
2.9	Modélisation de la <i>porticus in summa cavea</i>	36
2.10	<i>Parodos</i> oriental et entrée menant à l' <i>ima cavea</i>	38
4.1	Les différents comportements d'une onde lorsqu'elle rencontre une paroi	56
4.2	Réponse temporelle d'une impulsion sonore dans une salle	57
4.3	Représentation de la répartition du flux énergétique dans la propagation d'une onde sphérique	59
4.4	Courbes d'absorption de l'air en fonction de l'humidité relative (%) (ISO-9613)	61
4.5	m(h) - Courbes d'absorption de l'air en fonction de l'humidité relative (%) pour différentes fréquences d'après l'équation 4.8	61
4.6	Schéma général pour l'établissement de la représentation de Green	64
4.7	Vu 2D de la propagation d'une onde sphérique dans une salle rectangulaire	65
4.8	Différentes constellations de salle : la densité de sources reste constante	67
5.1	Comparaison d'un théâtre simplifié avec gradins coniques ou gradins cubiques par méthode des éléments finis de frontière à 50Hz	71
5.2	Représentations du principe de mesure de l'angle solide	72
5.3	Schéma d'un récepteur captant au moins un rayon.	73
5.4	Représentation d'un maillages surfacique à faces triangulaires composé d'une salle et d'un obstacle et dont les normales (en bleu) sont orientées vers l'intérieur de la salle.	75
5.5	Illustration d'une boite englobant un maillage quelconque (Suzanne)	76
5.6	Sphères permettant l'émission omnidirectionnelle de rayons	77
5.7	Diagramme d'activité résumant le processus de création des rayons	79

5.8 Calcul d'un rayon réfléchi à partir d'un rayon incident et d'une normale	80
5.10 Diagramme d'activité résumant le processus de création des sources-images	82
5.11 Réponse impulsionnelle d'un cube	83
5.12 Schéma du processus de convolution partitionnée	85
5.13 Filtres fréquenciers passe-bande	86
6.1 Courbe de complexité donnant le temps (s) d'une itération pour N=M en échelle logarithmique	88
6.2 Courbes de complexité donnant le temps (s) d'une itération en échelle logarithmique	89
6.3 Illustration du principe d' <i>octree</i> . Subdivision d'un cube en "octants" (gauche) et l'arbre correspondant (droite)	90
6.4 Suzanne triée dans un <i>octree</i>	90
6.5 Diagramme d'activité résumant le processus de création d'un arbre d' <i>octree</i>	93
6.6 Illustrations de l'intersection Rayon/Boîte en 2D	94
6.7 Temps de calcul (s) d'une itération en fonction du nombre de rayons et de faces avec N=M (échelle log)	96
6.8 Temps de calcul (s) d'une itération en fonction du nombre de faces pour 100k rayons (échelle log)	97
6.9 Temps de calcul (s) d'une itération en fonction du nombre de rayons pour 50k faces (échelle log)	98
7.1 Propagation des rayons dans un labyrinthe	100
7.2 Absorption des rayons par une boîte englobante	101
7.3 Visualisation des rayons captés par le récepteur à l'ordre 0 et 1 récepteur (100000 rayons au total)	101
7.4 Réponse impulsionnelle en espace libre pour 3 millions de rayons (bleu) échantillonnée à 100Hz et fonction $f(x) = \frac{2}{x^2}$ (rouge)	102
7.6 Réponse impulsionnelle dans une sphère de 20m de diamètre, 100% réfléchissante, pour 30 itérations avec absorption de l'air	104
7.7 Position des sources-images pour une salle cubique, 10 itérations	105
7.8 Erreur relative des énergies des sources-images dans une salle parallélépipédique	107
7.9 Erreur relative des énergies des sources-images dans une salle parallélépipédique avec absorption des parois pour 4 000 000 rayons	108
7.10 Erreur relative des énergies des sources-images dans une salle parallélépipédique avec absorption de l'air pour 1 000 000 rayons	108
7.11 Représentation des réflexions des rayons sonores par projection des sources-images dans le théâtre d'Orange	109
7.12 Synopsis de l'architecture logiciel développé pour le calcul d'acoustique de salle	111
A.1 Diagramme d'activité résumant le processus de création des rayons avec <i>octree</i>	I

Liste des tableaux

5.1 Exemples de coefficients d'absorption de la base de données Odéon	75
6.1 Temps de calcul (s) d'une itération pour $N = M$	96
6.2 Temps de calcul (s) d'une itération pour 100k rayons	97
6.3 Temps de calcul (s) d'une itération pour 50k faces	98

Deuxième partie

Calculs acoustiques

Introduction

Dans cette partie, nous allons traiter d'acoustique, d'algorithme et de mathématiques. Chacune de ces disciplines permettra de répondre aux questions suivantes : Pourquoi ? Quoi ? Comment ? Voyons donc ces problématiques une par une.

Pourquoi ? L'objectif de notre projet, maintenant que nous disposons d'une maquette virtuelle du théâtre d'Orange, est d'en étudier l'acoustique. Nous souhaitons simuler, étudier et écouter le son qui était perçu dans ce lieu il y a deux mille ans. En outre, nous avons vu que les restitutions de certaines parties du théâtre étaient plus ou moins hypothétiques. Nous pourrons comparer différentes tentatives de restitution et en mesurer l'impact visuel mais également auditif. Les rares écrits antiques et les récentes études acoustiques sous-entendent que les Romains, et avant eux les Grecs, se basaient sur la physique des matériaux et la géométrie des monuments pour optimiser la propagation sonore. En outre, les moyens d'analyse de résultats deviennent également une problématique. Comment visualiser des résultats acoustiques ? Peut-on, par une écoute d'un signal sonore, conclure des résultats de manière non-équivoque ? Peut-on trouver des méthodes ergonomiques d'analyse ? Nous allons donc tenter d'apporter notre pierre à l'édifice au sujet de ces questions.

Quoi ? Cet objectif nous a amené à développer un outil de calcul numérique répondant à des problématiques précises. Il complète ainsi la première partie de notre projet en s'interfaisant directement au logiciel Blender. Nous pourrons alors facilement étudier la maquette virtuelle du théâtre d'Orange précédemment présentée. Néanmoins, il est important de noter que cet outil est générique. Il pourra donc agir sur différents types de problèmes. Dans cette partie nous verrons quelle méthode de calcul a été retenue et les raisons qui ont poussé à faire ce choix. Effectivement, le théâtre d'Orange est un problème complexe car le maillage comporte plusieurs centaines de milliers d'éléments et sa géométrie peut inclure des surfaces concaves, convexes ou toutes sortes d'obstacles. Les outils présents sur le marché ont des limites par rapport à ce cas d'utilisation. Par ailleurs, l'une de nos contraintes est d'obtenir des résultats sur l'acoustique selon différentes géométries du bâtiment et divers matériaux. Il faut donc pouvoir effectuer les calculs dans un temps relativement court afin de pouvoir multiplier les configurations. C'est pourquoi un outil adapté à ce cahier des charges a été développé pendant ce projet.

Comment ? Tout code informatique présente une part de calcul, et qui dit calcul, sous-entend mathématiques. Ainsi, nous verrons les méthodes et astuces mathématiques qui ont permis de développer ce programme. Nous détaillerons les notions de lancer de rayons statistique, de sources images spatialisées et de réponse impulsionnelle. Aussi, nous verrons comment sont optimisées les performances par un procédé de "*divide and conquer*" utilisant des *octree*. Un chapitre est également consacré à la validation de l'algorithme en utilisant notamment des méthodes analytiques.

Pour débuter, nous ferons un tour d'horizon de la physique de l'acoustique et plus

concrètement dans le cas qui nous concerne, de l'acoustique de salle. Différentes méthodes permettant d'étudier les lois acoustiques seront présentées ainsi que leurs limites. Nous détaillerons alors les principes physiques utilisés pour notre algorithme avant de passer à la présentation de son architecture et à sa validation. Cette partie présente l'outil dans son contexte général et l'application au théâtre d'Orange sera faite dans la partie suivante.

Chapitre 4

Acoustique de salle

« *La musique, c'est 50% d'un film.* »

Georges Lucas

Sommaire

4.1 Généralités sur l'acoustique de salle	56
4.1.1 Notion de réverbération	56
4.1.2 Notion de flux d'intensité acoustique	57
4.1.3 Absorption atmosphérique	59
4.2 Méthodes de calcul acoustique	62
4.2.1 Principe statistique	62
4.2.2 Méthode de résolution exacte	63
4.2.3 Méthodes géométriques	65

4.1 Généralités sur l'acoustique de salle

4.1.1 Notion de réverbération

L'acoustique de salle est une discipline à part entière qui consiste principalement à étudier la réverbération d'une pièce excitée par des ondes sonores. Le principe de cette étude est le suivant : il s'agit en général de placer une source sonore ponctuelle à l'intérieur d'une salle, fermée ou non, et de la faire rayonner. L'onde se propage alors jusqu'aux parois et subit un phénomène de diffusion. Il s'agit en réalité d'une combinaison de trois phénomènes : la réflexion, la réfraction et la diffraction (fig. 4.1). Par réfraction on entend la notion d'absorption suivant les lois de Descartes sur la propagation entre deux milieux¹. La diffraction quant à elle opère lorsque la longueur d'onde est proche de la taille de l'obstacle. L'interaction entre une onde sonore et une paroi ou un obstacle dépend donc de leur forme et la nature de leur matériau.

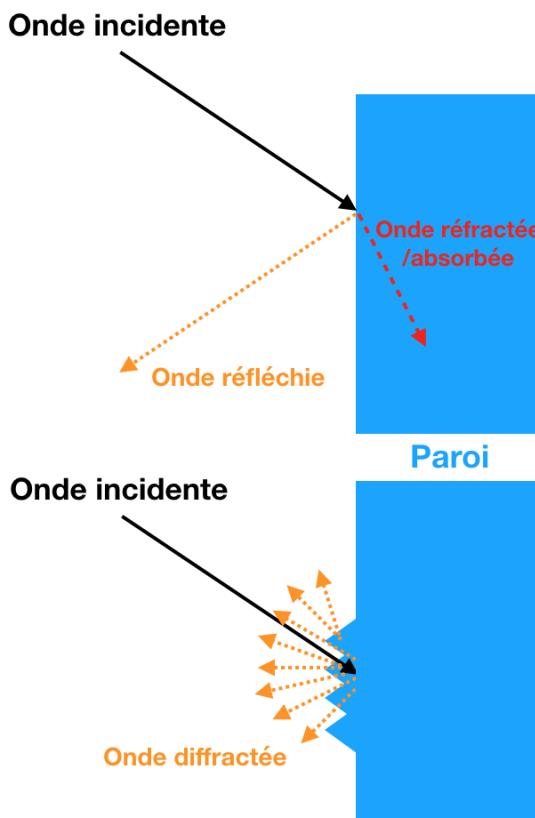


FIGURE 4.1 – Les différents comportements d'une onde lorsqu'elle rencontre une paroi

En se plaçant en un point à l'intérieur de la salle, on pourra alors recevoir un signal sonore comme étant la somme d'un champ direct et d'un champ réverbéré. Le son direct provient directement de la source sans avoir touché aucune surface. Le son réverbéré se distingue en deux catégories : les premières réflexions dont l'ensemble forment la texture du son et le champ diffus qui peut être assimilé à une somme infinie d'ondes se propageant dans toutes les directions². On comprend alors que les principaux facteurs qui vont influer sur l'acoustique perçue dans une salle sont : la source sonore, le milieu de propagation et la nature des parois et des obstacles.

1. [JOUHANEAU, 1997, p. 3]
 2. [JOUHANEAU, 1997, p. 9]

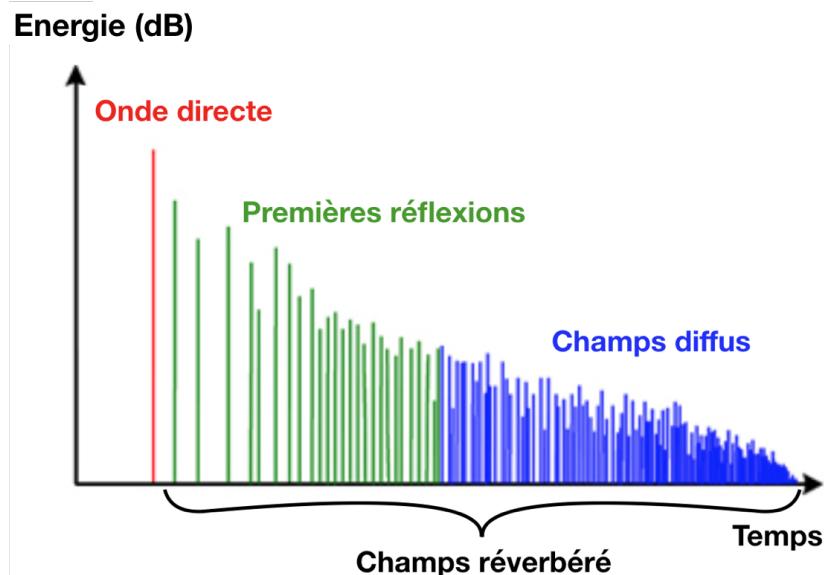


FIGURE 4.2 – Réponse temporelle d'une impulsion sonore dans une salle

La figure 4.2, illustrant la **réponse impulsionnelle d'une salle, ou Room Impulse Response (RIR)**, montre que l'information perçue est une succession d'ondes sonores arrivant décalées dans le temps. Si l'écart entre ces ondes est long, alors d'auditeur pourra les différencier et entendra le phénomène d'écho. Au contraire, si l'écart est suffisamment restreint et que les ondes sont mélangées au moment d'arriver à l'auditeur, alors celui-ci n'entendra qu'un son prolongé dont l'intensité diminue. Il s'agit de la réverbération³.

4.1.2 Notion de flux d'intensité acoustique

On définit par intensité acoustique la puissance transportée par les ondes sonores, par unité de surface, mesurée perpendiculairement à la direction de ce transfert⁴. Cette notion permet d'étudier le son perçu par les humains en la reliant à la pression acoustique qui va s'exercer de proche en proche dans l'air jusqu'à atteindre le tympan. Ainsi, la puissance sonore transportée par l'onde acoustique sera mesurable en un point de l'espace. Toute la puissance sonore mesurée en un point a une origine (actuelle ou passée) dans un flux d'énergie provenant d'une ou plusieurs directions identifiables. L'intensité acoustique mesure le flux résultant de ces transferts.

L'intensité acoustique est un vecteur ayant pour origine le point de mesure et de même direction que le vecteur vitesse de l'onde. On peut l'écrire comme la moyenne dans le temps de l'intensité acoustique instantannée :

$$\vec{I}(\vec{d}, t) = \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot \vec{v} dt, \quad (4.1)$$

avec :

- p : la pression acoustique exprimée en $N.m^{-2}$ ou Pascal (Pa),
- \vec{v} : le vecteur vitesse.

Le **niveau de pression acoustique ou SPL (Sound Pressure Level)** repère la valeur efficace de la pression acoustique par rapport à une valeur de référence, $20\mu Pa$. On utilise,

3. [SABINE, 1900, p. 39]

4. [CEI, 2015, IEC 60050]

plutôt que le rapport brut, le décibel, qui représente dix fois son logarithme décimal. Ce repère a été choisi parce que, tout en étant simple et utilisant des nombres ronds, un décibel (une variation de 12 %) représente à peu près la plus faible variation de pression acoustique que les humains puissent distinguer. Le niveau de référence, correspond de la même manière à la pression acoustique (dont l'intensité est de 1 pW/m^2) au seuil de la perception humaine. On obtient ainsi un repère pratique où tous les niveaux sont des nombres positifs, et se passent de décimales. On a alors :

$$L_p = 10 \log_{10} \left(\frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} \right), \quad (4.2)$$

avec :

- L_p : le niveau de pression en dB,
- p_{eff} : la valeur efficace de pression RMS,
- $p_{ref} = 20 \mu\text{Pa}$: la référence de pression sonore.

Le flux de l'intensité acoustique instantanée à travers une surface $\gamma(t)$ donnée correspond à l'énergie acoustique $E(t)$ transférée à travers cette surface, à l'instant considéré :

$$E(t) = E_0 \int_{\gamma(t)} \vec{I}(t) \cdot \vec{dS} \quad \forall t > 0. \quad (4.3)$$

L'acoustique suit le premier principe de la thermodynamique selon lequel il y a conservation d'énergie au cours du temps. Ainsi, pour une source sonore ponctuelle, si l'on néglige les effets de pertes liés à l'absorption du milieu de propagation, on a :

$$\int_{S(t)} \vec{I}(t) \cdot \vec{dS} = 1 \quad \forall t > 0. \quad (4.4)$$

Après intégration sur la surface sphérique $S(t)$, nous pouvons écrire l'intensité acoustique infinitésimale telle que :

$$\begin{aligned} \vec{I}(t) &= \frac{\vec{d}(t)}{4\pi d(t)^3} \quad \forall t > 0, \\ ||\vec{I}(t)|| &= \frac{1}{4\pi d(t)^2} \quad \forall t > 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

On comprend que l'intensité décroît comme le carré de la distance et qu'une portion d'énergie considérée va donc être portée par un angle solide (voir fig. 4.3). Ainsi, à une distance d la même quantité d'énergie est répartie sur une surface de a^2 que à une distance de $2d$ sur une surface de $(2a)^2$. L'énergie se répartie donc sur une surface proportionnelle au carré de la distance. Sur une portion de $S(t)$ l'énergie est portée par un angle solide Ω_S tel que :

$$E_S(t) = E_0 \int_{\sigma} \frac{1}{4\pi d(t)^2} dS = \frac{E_0}{4\pi} \Omega_S. \quad (4.6)$$

Cela traduit le fait que l'énergie d'un angle solide est constante au cours du temps et correspond à une portion de l'énergie initiale E_0 .

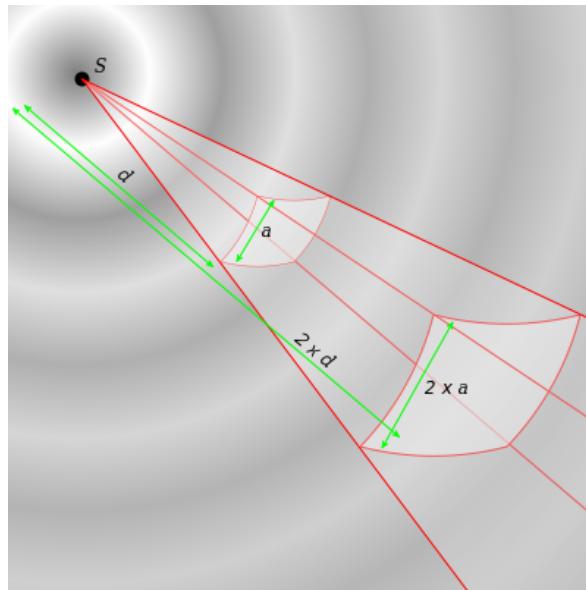


FIGURE 4.3 – Représentation de la répartition du flux énergétique dans la propagation d'une onde sphérique

4.1.3 Absorption atmosphérique

Pour se rapprocher d'un modèle réaliste de propagation d'onde, il est important de prendre en compte l'absorption atmosphérique. Ce phénomène est dû à la viscosité et la conduction thermique du milieu ainsi qu'à l'absorption des molécules. Ces effets vont provoquer une décroissance exponentielle de l'énergie d'onde⁵. Selon leur distance parcourue dans l'air, l'intensité acoustique va subir une atténuation en prenant en compte trois facteurs principaux : la température, l'humidité et la pression. La température et la pression atmosphérique de référence sont respectivement de 20°C et 101,325 kPa⁶. Le coefficient d'atténuation dépend de la fréquence du son et peut être obtenue d'après les formules analytiques de la norme ISO-9613-1. Ces formules assez complexe ont été obtenue à l'aide de tables de mesures expérimentales.

Tout d'abord, nous calculons le facteur d'humidité h correspondant à la concentration molaire de vapeur d'eau⁷ :

$$C_h = 4,6151 - 6,8346 \times \frac{273,15^{1,261}}{T},$$

$$h = h_r \times 10^{\frac{C_h}{P_r}},$$

avec :

- T : La température en Kelvin,
- P_r : La pression relative telle que $P_r = \frac{P_a}{101,325}$, avec P_a la pression absolue,
- h_r : L'humidité relative mesurée en %.

Nous exprimons ensuite les fréquences de relaxation de l'oxygène et de l'azote⁸ :

5. [JOUHANEAU, 1997], p. 68-70]

6. International Standard Atmosphere

7. [ISO-9613-1, 1993], Annexe B, B.1]

8. [ISO-9613-1, 1993], 6.2, eq. 3 et 4]

$$fr_O = P_r \times \left(24 + \frac{40400 \times h \times (0,02 + h)}{0,391 + h} \right),$$

$$fr_A = \frac{P_r}{\sqrt{T_r}} \times \left(9 + 280 \times h \times \exp^{-4,17 \times \left(\frac{1}{\sqrt{T_r}} - 1 \right)} \right),$$

avec :

- T_r : La température relative à 20°C ($\frac{T}{293,15}$),
- f : La fréquence en Hz.

Nous pouvons alors exprimer le coefficient d'absorption de l'air "m" (en dB/m) en fonction de la fréquence ⁹ :

$$m_{(dB/m)} = 8,686 \times f^2 \times \left(\frac{1,84 \times 10^{-11}}{P_r} \times \sqrt{T_r} + T_r^{\frac{-5}{2}} \times \left(0,01275 \times \frac{\exp \frac{-2239,1}{T}}{fr_O + \frac{f^2}{fr_O}} + 0,1068 \times \frac{\exp \frac{-3352}{T}}{fr_A + \frac{f^2}{fr_A}} \right) \right).$$

On obtient le facteur final (en m^{-1}) par la formule :

$$m = 10 \log_{10} \frac{m_{(dB/m)}}{10} - 1. \quad (4.7)$$

Notons tout de même que l'on aurait pu utiliser une formule simplifiée issue de la norme AFNOR S.30 009 qui donne des résultats similaires entre 20 et 80% d'humidité relative ¹⁰ :

$$m = \frac{0,0275}{h} \times \left(\frac{f}{1000} \right)^{1,7}. \quad (4.8)$$

Néanmoins cette norme étant obsolète depuis 2016 et les résultats étant légèrement différents (voir fig. 4.5), nous optons pour la norme ISO-9613.

L'énergie de l'onde acoustique est ensuite déterminée par la formule suivante :

$$E = E_0 e^{-m.d}, \quad (4.9)$$

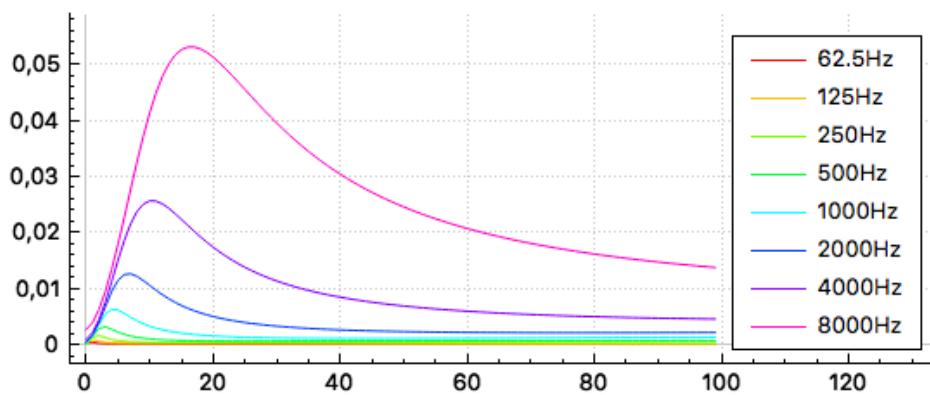
avec :

- E_0 : l'énergie initiale,
- d : la distance parcourue par l'onde.

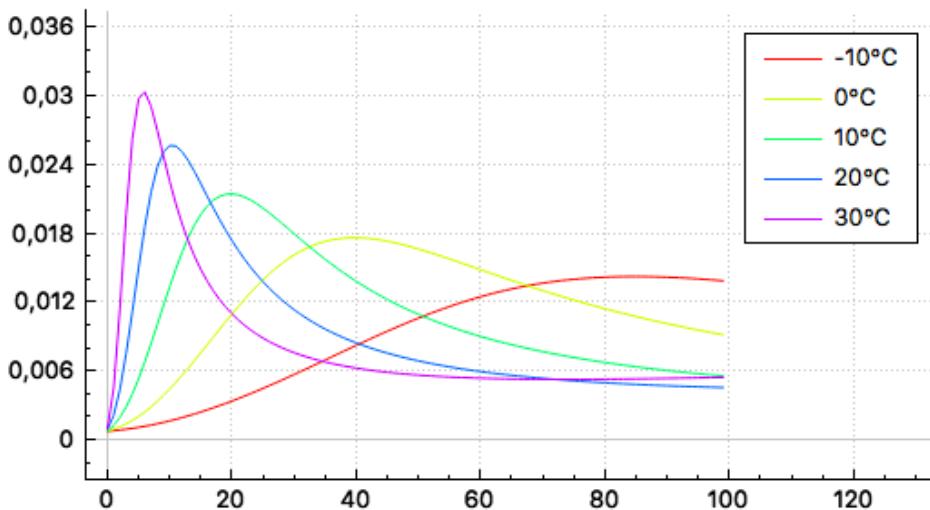
Cela permet donc de représenter l'absorption atmosphérique en fonction de la température et l'humidité pour différentes fréquences. On constate notamment que les basses fréquences sont très peu absorbées par l'atmosphère tandis qu'à partir de 2kHz l'absorption devient significative.

9. [ISO-9613-1, 1993, 6.2, eq. 5]

10. [JOUHANEAU, 1997, p. 68-70]



(a) $m(h)$ - Absorption de l'air en fonction de l'humidité relative (%) pour différentes fréquences



(b) $m(h)$ - Absorption de l'air en fonction de l'humidité relative (%) pour différentes températures

FIGURE 4.4 – Courbes d'absorption de l'air en fonction de l'humidité relative (%) (ISO-9613)

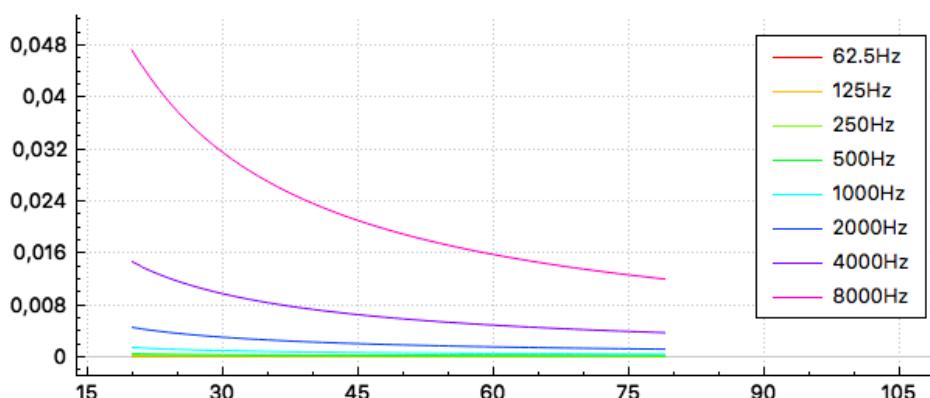


FIGURE 4.5 – $m(h)$ - Courbes d'absorption de l'air en fonction de l'humidité relative (%) pour différentes fréquences d'après l'équation 4.8

4.2 Méthodes de calcul acoustique

Le calcul de l'acoustique d'une salle peut se faire selon différentes méthodes. Nous allons succinctement en présenter quelques unes afin d'en dégager les grands principes et les limites.

4.2.1 Principe statistique

P. E. Sabine écrit en 1932 "Acoustics and architecture" en reprenant les principes de son homonyme W. Sabine. Ce dernier décrivait 20 ans plus tôt des protocoles de test pour mesurer des temps de réverbérations dans les salles. P. E. Sabine considère que la réverbération suit un modèle purement statistique. De son point de vue, la densité d'échos à prendre en compte est suffisamment importante pour considérer le phénomène comme pseudo-aléatoire¹¹. Il suppose ainsi que l'énergie sonore et le temps de réverbération sont uniformes en tout point de la salle. Il exprime la notion de libre parcours moyen en ces termes : "Pour former l'image 2D des réflexions dans une salle, on peut imaginer une boule de billard lancée au hasard sur une table et noter la variation des longueurs des trajets entre deux impacts successifs. (...) La distance moyenne de ces longueurs peut être assimilée au libre parcours moyen d'une onde sonore dans la salle"¹². Ces considérations permettent d'exprimer le Temps de Réverbération à 60dB (RT₆₀) en fonction du volume de salle et de l'absorption des parois comme par exemple dans la formule dite "de Sabine"¹³ :

$$RT_{60} = \frac{k \cdot V}{A}, \quad (4.10)$$

avec :

- $k \approx 0,163$,
- V : le volume de la salle,
- A : l'aire d'absorption équivalente telle que :

$$A = \sum_{i=1}^N S_i \alpha_i + 4mV, \quad (4.11)$$

où :

- α est le coefficient d'absorption de la i^{e} paroi,
- m est l'amortissement du milieu (par exemple l'air),
- S_i est la surface de la i^{e} paroi,
- N est le nombre de parois total.

Diminuer le volume sonore de 60dB garanti de passer en dessous au seuil audible (voir section 4.1.2) c'est pourquoi cette limite est classiquement utilisée. La théorie de Sabine, est encore aujourd'hui couramment employée par les acousticiens des salles. Pourtant, cette hypothèse dite de "champ diffus" n'est plus vérifiée en pratique dès lors :

- la forme du milieu de propagation n'est plus homogène,
- l'absorption acoustique devient importante,

11. [KANDELMAN, 2007, p. 19]

12. [SABINE, 1932]

13. [JOUHANEAU, 1997, p. 71-81]

- l'absorption acoustique devient non uniforme,
- la géométrie présente des ouvertures.

Pour remédier à cela, et notamment au critère sur l'absorption, Eyring propose avec le même modèle théorique une formule qui fournit de meilleurs résultats¹⁴. Celle-ci, précisée dans les années 1920 et utilisée lors la conception acoustique de bâtiments durant leur phase de construction, est valable pour n'importe quel α :

$$RT_{60} = \frac{k \cdot V}{4m \cdot V - S \ln(1 - \alpha)}. \quad (4.12)$$

On constate que pour les faibles valeurs de α , $\ln(1 - \alpha) \approx -\alpha$ et on retrouve la formule de Sabine.

4.2.2 Méthode de résolution exacte

La méthode de calcul exacte d'un champs sonore consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles avec comme conditions aux limites, les parois de la pièce. Il s'agit ainsi de mailler le domaine d'étude par des petits éléments surfaciques (**Boundary Element Method - BEM**), volumiques (**Finite Element Method - FEM**) ou sur une grille régulière (**Finite Difference Time Domain - FDTD**). Sur chacun de ces éléments, on pourra calculer la pression acoustique $p(x, y, z, t)$ par résolution de l'équation d'onde de D'Alembert :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad 15 \quad (4.13)$$

avec

- Δ : l'opérateur laplacien,
- c : la célérité de l'onde.

Pour cela, il faudra se placer dans les conditions de l'acoustique linéaire telles que¹⁶ :

- l'air est un fluide parfait,
- la température et la pression restent constantes,
- la vitesse macroscopique du fluide est faible devant la célérité du son,
- les fluctuations dues aux déplacements d'air sont faibles devant ces valeurs moyennes.

On pourra ensuite définir les impédances complexes des parois de la salle comme conditions aux limites (**Dirichlet**, **Neumann**, ...).

Les solutions de cette équation sur chacun des axes de l'espace (x, y, z) sont les p_i tels que :

$$p_i(x_i, t) = f_+(t - \frac{x_i}{c}) + f_-(t + \frac{x_i}{c}), \quad 17 \quad (4.14)$$

avec :

- x_i : chacun des axes de l'espace (x, y, z),
- f_+ et f_- : des fonctions ne dépendant que d'une variable et définies à partir des conditions initiales. Elles représentent respectivement une onde se propageant sans se déformer vers $+\infty$ et $-\infty$.

14. [EYRING, 1930, p. 217-241]

15. [KANDELMAN, 2007, p. 10]

16. [JOT, 1992, p. 19]

17. [D'ALEMBERT, 1747, p. 214-249]

Si l'on cherche à résoudre cette équation en tout point de l'espace et non seulement sur les axes cela devient beaucoup plus complexe. L'équation d'Helmholtz apparaît lorsque l'on cherche des solutions "stationnaires" de l'équation 4.13 de D'Alembert telles que :

$$p(M) = u(M)e^{i\omega t}, \quad (4.15)$$

avec $\omega = 2\pi f$: la pulsation (rad/s). On a alors :

$$(\Delta + k^2)u(M) = g(M) \quad \forall M \in \Omega, \quad 18 \quad (4.16)$$

avec :

- $g(M)$: la distribution des sources,
- k : le nombre d'onde tel que $k = \frac{\omega}{c}$ avec c la célérité du son,
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: le domaine d'étude (voir fig 4.6).

La fonction de Green qui s'écrit :

$$G(S, M) = -\frac{\exp^{ikr(S, M)}}{4\pi r(S, M)} \quad 19 \quad (4.17)$$

est une solution élémentaire pour la source ponctuelle S de l'équation 4.16 de Helmholtz telle que :

$$(\Delta + k^2)G(S, M) = \delta_s(M) \quad \forall M \in \Omega, \quad 20 \quad (4.18)$$

avec : δ_s : la mesure de Dirac centrée en S .

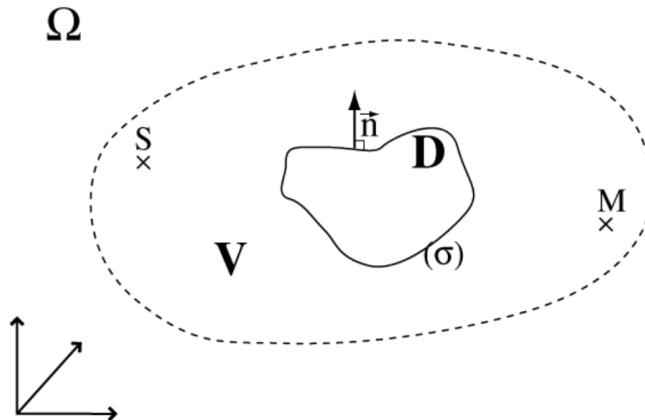


FIGURE 4.6 – Schéma général pour l'établissement de la représentation de Green²¹

Pour que le problème soit bien posé, il faut ajouter des conditions aux limites pour fixer le sens du temps et fermer le système²². On introduit alors la condition de radiation de Sommerfeld telle que :

$$r(\partial_r u' + iku') \rightarrow 0 \quad r \rightarrow +\infty, \quad (4.19)$$

18. [PREMAT, 2000, eq. 2.1]

19. [PREMAT, 2000, eq. 2.29]

20. [PREMAT, 2000, eq. 2.2]

21. [PREMAT, 2000, fig. 2.1]

22. [AUSSAL, 2014, p. 92]

avec $u' = u - \frac{u_i}{f}$, u_i étant la pression incidente. On aboutit à une représentation intégrale sur la surface σ du domaine D telle que :

$$u'(M) = p_0(M) - \int_{\sigma} G(S, M) \frac{\partial u'}{\partial n}(M) dS - \int_{\sigma} u'(M) \frac{\partial G}{\partial n}(S, M) dS \quad \forall M \in \Omega. \quad 23 \quad (4.20)$$

Ainsi, si on connaît u et $\partial_n u$ la dérivée normale de u sur la surface σ , on peut calculer $u(M)$ en tout point M de Ω . En acoustique des salles, il est cependant très difficile de calculer u et $\partial_n u$.

4.2.3 Méthodes géométriques

Les méthodes géométriques sont largement utilisées dans le domaine de l'acoustique de salle. Elles se basent sur le trajet que parcourt l'onde sonore entre une source et un récepteur (fig. 4.7). L'onde, percutant les parois, subit un changement de direction de propagation. Par ailleurs, chaque paroi ou obstacle porte une **impédance** lié à la nature de son matériau qui atténuerà l'énergie de l'onde réfléchie en fonction de sa fréquence.

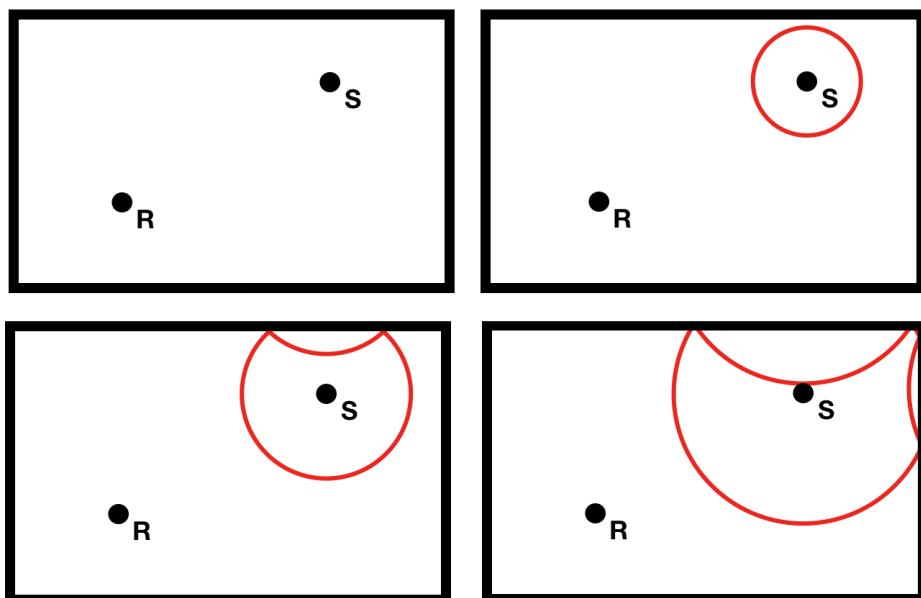


FIGURE 4.7 – Vu 2D de la propagation d'une onde sphérique dans une salle rectangulaire

En pratique certaines méthodes de calcul permettent de simuler ce comportement. Tout d'abord, la méthode dite de lancé de rayon (*ray-tracing*)²⁴ qui est très souvent utilisée dans les logiciels d'acoustique de salle (Odéon²⁵, CATT-acoustic²⁶, ...). Cette approche suppose que l'énergie sonore émise depuis une source est repartie sur un certain nombre de rayons rectilignes déviés de manière **spéculaire** lors de leur rencontre avec les parois. La mesure d'énergie est alors réalisée par comptage du nombre de rayons qui traversent une sphère transparente. La précision de mesure sera ainsi fonction du nombre de rayons émis et de la taille de la sphère-récepteur. Il peut notamment y avoir beaucoup de perte d'information si le domaine de propagation est complexe²⁷. Il s'agit donc d'une

23. [PREMAT, 2000, eq. 2.6]

24. [KULOWSKI, 1985, p.449-468]

25. [ODEON, page web]

26. [CATT-ACOUSTIC, page web]

27. [PICAUT, 2005, p. 60]

méthode très puissante pour simuler les réflexions géométriques sur les parois mais inadaptée pour simuler les effets de diffraction. Effectivement, pour simuler ces effets il faudrait re-générer un panel de rayons pour chaque réflexion sur une paroi diffractante, ce qui augmenterait exponentiellement le nombre de rayons et donc le temps de calcul. Pour résoudre ce problème, une approche de type "lancer de particules" sert d'alternative au lancer de rayon. Dans ce concept très similaire, lors du contact avec une paroi, la particule sera réfléchie de manière statistique. Par exemple, si α est le coefficient d'absorption de la paroi, alors, la particule aura une probabilité de $(1 - \alpha)$ d'être réfléchie et une probabilité α d'être absorbée. En ce sens, il est également possible de déterminer, selon une loi de probabilité, l'angle de réflexion et simuler ainsi une "pseudo-diffusion" des matériaux²⁸. Néanmoins, dans certains contextes il est possible de négliger les effets de diffraction.

Il existe aussi la méthode dite des "sources-images"²⁹ très appréciée pour son approche spatialisée des réflexions sonores. Cette méthode est fondée sur la construction de sources virtuelles, images de la source réelle, construite par symétrie par rapport aux parois de l'enceinte. La contribution énergétique de chaque source-image est celle habituellement rencontrée dans le cas de la propagation en champ libre, pondérée par le coefficient d'absorption des parois considérées³⁰. Le problème de cette méthode est que l'on génère l'ensemble des sources-images d'une salle et qu'il est ensuite difficile de discriminer celles qui sont perçues et celles qui sont bloquées par des obstacles. Cela est donc plutôt adapté aux pièces de forme concave et vide. Par ailleurs, comme pour le tracé de rayons, les effets de diffraction ne sont pas pris en compte.

28. [PICAUT, 2005, p. 62]

29. [JOUHANEAU, 1997, p.6]

30. [PICAUT, 2005, p. 60]

31. [KANDELMAN, 2007, Fig. 61]

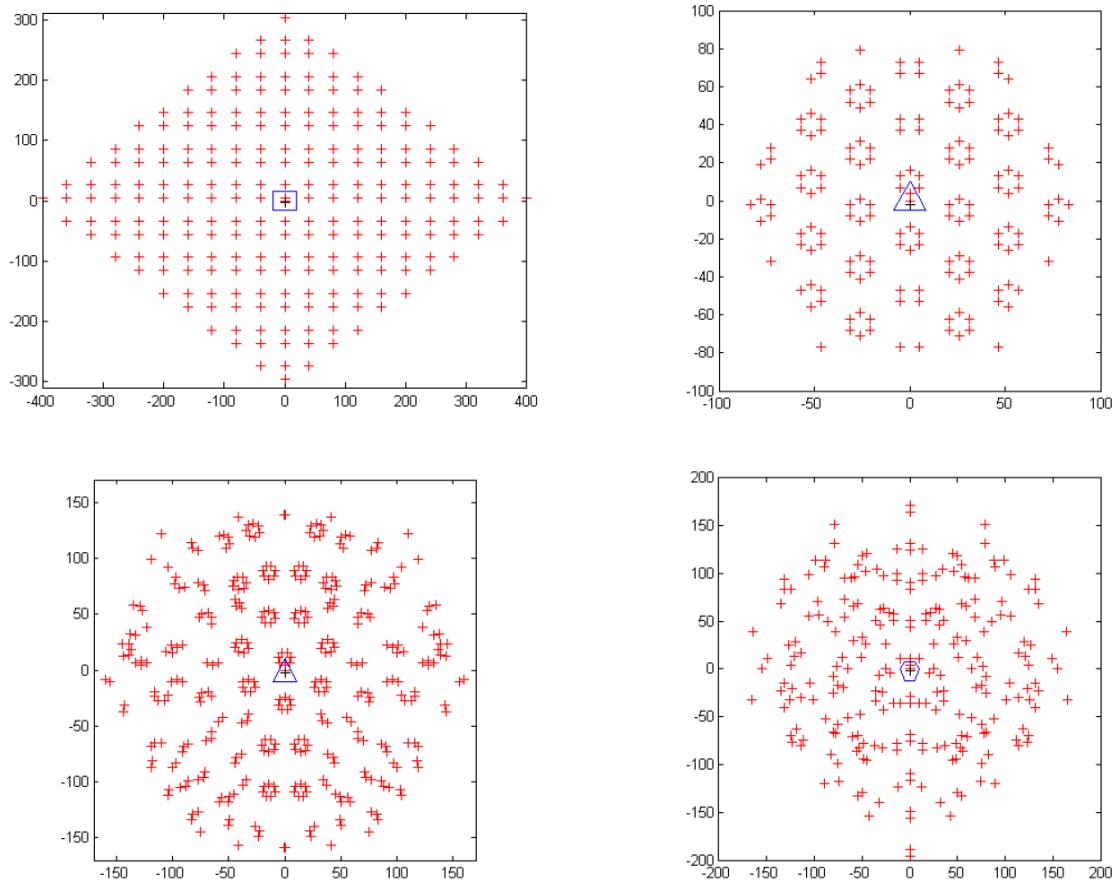


FIGURE 4.8 – Différentes constellations de salle : la densité de sources reste constante³¹

Chapitre 5

Développement d'une méthode couplée

« *Quand on aime on ne compte pas...
Ça tombe bien, je suis mauvaise en calcul!* »

Sophie Lesellier

Sommaire

5.1 Notion d'onde sphérique discrétisée	71
5.2 Environnement géométrique	74
5.2.1 Maillage de salle et matériaux	74
5.2.2 Création d'une boite englobante	76
5.3 Calcul de rayons	76
5.4 Calcul de sources-images	80
5.5 Génération de réponse impulsionale	83
5.6 Auralisation	84

Introduction

Le projet a pour essence le calcul de l'acoustique du théâtre d'Orange. Cela soulève certaines problématiques qui nous ont poussé à développer une méthode de calcul hybride. Effectivement, ce cas d'application impose le cahier des charges suivant :

- Pouvoir traiter une salle de grande dimension,
- Pouvoir traiter un volume ouvert,
- Prendre en compte l'absorption atmosphérique,
- Calculer les résultats sur une large plage de fréquences audibles par l'être humain (50-15000Hz),
- Permettre l'étude du déplacement de l'onde sonore dans l'espace.

Par ailleurs, il faut pouvoir s'interfacer au modèle numérique réalisé sous Blender et décrit dans la partie I. Pour cela, nous devons rajouter les caractéristiques suivantes au cahier des charges :

- Utiliser un maillage surfacique sans contrainte sur la dimension ou le raffinement des faces.
- Pouvoir traiter plusieurs centaines de milliers de faces en un temps relativement court.
- Pouvoir modifier facilement les coefficients d'absorption des matériaux.

Ces contraintes sont nécessaires afin de rendre l'étude acoustique du théâtre d'Orange (ou de tout type de monument similaire) accessible à des utilisateurs de Blender. Ainsi, la géométrie où la nature des matériaux pourra être facilement modifiable et une large série de tests comparatifs peut être menée rapidement. Le but étant de pouvoir tester des hypothèses de restitution sans avoir à multiplier les manipulations entre chaque calcul.

Sachant cela, nous avons dans un premier temps tenté de réaliser des analyses par méthode de résolution exacte (voir section 4.2.2) mais nous avons vite compris que la géométrie de la salle rendrait la résolution très difficile. Effectivement, le nombre d'éléments que doit comporter le maillage est dépendant de la longueur d'onde¹. Dans un cas comme le théâtre d'Orange où les longueurs se comptent en dizaines de mètres et les fréquences en kilo-Hertz (fréquences audibles), il faut raffiner les mailles à l'échelle du millimètre, ce qui génère des milliards d'éléments. Ce genre de problème est aujourd'hui particulièrement complexe à mettre en place de part la puissance de calcul et l'espace mémoire nécessaire. Par ailleurs la création d'un maillage de type conforme, c'est à dire avec des triangles de taille régulière et dont les angles ne sont pas trop aigües, représente une difficulté à part entière. Au début du projet, nous avions tenté d'analyser une version très simplifiée du théâtre à des fréquences très faibles. Nous voulions notamment tester l'impact de la forme incurvée des gradins en comparant de manière relative différents maillages. Le raffinement fut effectué à l'aide de l'outil "mmg"² développé en partie à l'[Institut des sciences du calcul et des données \(ISCD\)](#). Les calculs acoustiques ont été fait avec l'outil "Gypsilab"³ développé par le [Centre de mathématiques appliquées de l'école Polytechnique \(CMAP\)](#). En conservant à peu près des dimensions du théâtre et pour de faibles fréquences, nous obtenions déjà plusieurs centaines de milliers d'éléments et des

1. [FUNKHOUSER et collab., 2004, p. 740]

2. [DAPOGNY et collab., 2004, github]

3. [AUSSAL, github]

temps de calcul de quelques dizaines de minutes (sur un ordinateur standard). En augmentant la fréquence et donc le raffinement du maillage nous aurions rapidement atteint les limites des machines en terme de mémoire avec des temps de calcul considérables. Or cela ne coïncidait pas du tout avec les objectifs établis. Le constat a alors été que ce type d'étude n'était pas adaptée au cahier des charges.

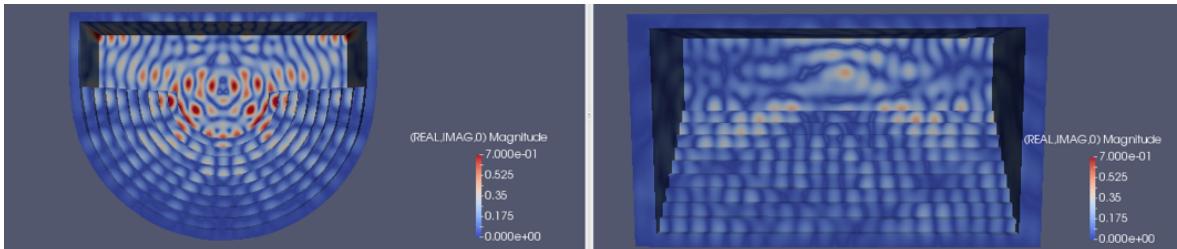


FIGURE 5.1 – Comparaison d'un théâtre simplifié avec gradins coniques ou gradins cubiques par méthode des éléments finis de frontière à 50Hz

La meilleure option fut alors de se tourner vers des solutions approchées utilisant des méthodes de calcul de type géométrique. Cela est acceptable en se plaçant dans l'approximation dite "hautes fréquences" soit typiquement lorsque $k\nu \gg 1$ (k étant le nombre d'onde et ν le volume de la salle). La méthode développée, dite "couplée", consiste à propager des rayons à partir d'une source et, à chaque réflexion sur les parois, d'analyser ceux qui traversent une sphère-récepteur pour créer des sources-images. Grâce au temps de parcours des rayons et d'après les hypothèses statistiques de Sabine (voir section 4.2.1), il est alors possible de créer la [RIR](#). Celle-ci pourra alors être convoluée à un signal audio afin de pouvoir écouter le son réverbéré (voir section 5.6).

Le chemin de chacun des rayons permet de situer dans l'espace les sources-images correspondantes, c'est à dire les images de la source suite aux divers réflexions sur les parois. Nous obtenons ainsi une constellation de sources-images portant des énergies atténuées par l'absorption des parois. Cela permettra par la suite de spatialiser le son, c'est à dire de savoir d'où proviennent les différents échos. Il est alors possible d'écouter le son réverbéré en trois dimensions.

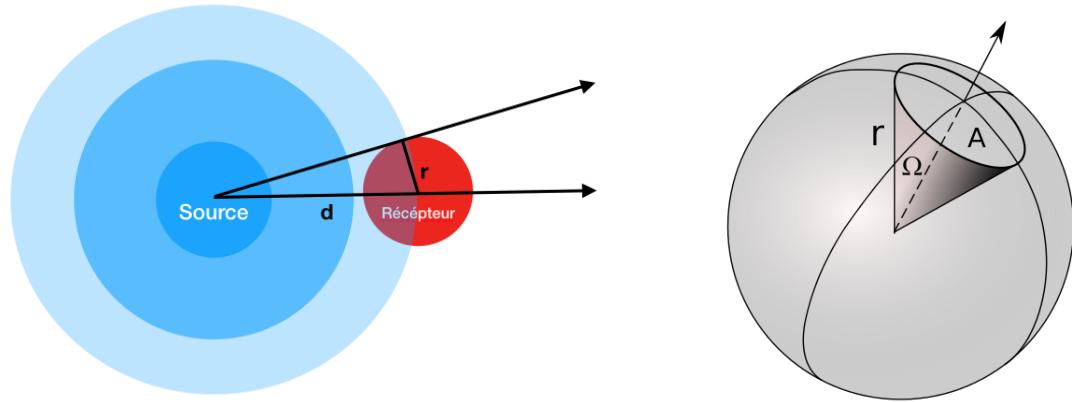
Ce chapitre vise à détailler ce processus. Notons néanmoins que les effets de diffraction ne seront pas traités même si, comme nous l'avons évoqué précédemment au sujet du lancer de particules, il est possible d'utiliser des lois de probabilité pour répartir les rayons réfléchis selon différentes directions⁴. Nous choisissons néanmoins de ne fonctionner qu'avec des réflexions spéculaires car le sujet de la diffraction est extrêmement vaste et complexe. Il s'agit d'un sujet à part entière que l'on ne traitera pas durant ce projet de thèse mais qui pourra venir l'enrichir par la suite. Les grandes dimensions du théâtre d'Orange et la gamme de fréquence utilisée permettent de se placer dans l'approximation "hautes fréquences".

5.1 Notion d'onde sphérique discrétisée

Dans ce développement, nous choisissons d'utiliser des sources omnidirectionnelles, c'est à dire qui propagent le son de manière uniforme dans toutes les directions de l'espace. Néanmoins, notons qu'il serait possible d'utiliser d'autres types de source en chan-

4. [VORLÄNDERA et MOMMERTZ, 2000, p.187-199]

5. [M'HENNI, 2010, image]



(a) Schéma en deux dimensions d'une onde sphérique dont une portion d'énergie est mesuré par un récepteur de rayon r .

(b) Représentation de l'angle solide d'un cône de révolution⁵

FIGURE 5.2 – Représentations du principe de mesure de l'angle solide

geant la répartition des rayons émis. Ces sources sont de type impulsionales. Effectivement, un signal sonore continu peut-être discretisé par une suite d'impulsions (c'est d'ailleurs le cas de tout signal numérique qui est échantillonné à une certaine fréquence). Une impulsion étant un signal d'un temps infiniment court, l'énergie émise depuis la source sera répartie sur la surface d'une sphère en expansion comme nous l'avons vu dans la section 4.1.2 (voir fig. 5.2a). Seul le flux passant par le récepteur sera capté. Ainsi, l'énergie perçue est l'intersection entre la sphère d'émission et la sphère de réception. Il s'agit donc d'un angle solide Ω de type conique (voir fig. 5.2b) tel que :

$$\Omega = \frac{S}{d^2}, \quad (5.1)$$

avec :

- Ω : l'angle solide en stéradian (sr),
- S : l'aire de la portion de sphère d'émission interceptée en mètre carré (m^2),
- d : le rayon de la sphère d'émission en mètre (m).

Par ailleurs, pour simplifier les calculs, la propagation de l'onde peut être discrétisée en N rayons émis depuis la source de manière uniforme. Chaque rayon porte l'énergie E_i tel que :

$$E(t) = \sum_{i=1}^N E_i(t) = \frac{E_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Omega_i \quad \forall t > 0, \quad (5.2)$$

avec Ω_i : l'angle solide élémentaire tel que $\sum_{i=1}^N \Omega_i = 4\pi$.

Le problème de cette approximation est qu'elle apporte de l'erreur au résultat. Effectivement, l'information n'est plus portée par un cône mais par des rayons. Toute mesure prise entre deux rayons sera donc impossible. Il faut alors limiter au maximum cette erreur et réduire l'écart entre deux rayons. On pourra ainsi considérer qu'une grande quantité de rayons peut être assimilée à un cône plein. Pour cela, on souhaite connaître la distance au bout de laquelle les rayons sont suffisamment séparés les uns des autres pour être distingués. En se plaçant dans le cas théorique d'une source et d'un récepteur en espace libre, il faut alors exprimer le temps au bout duquel il est possible de capter moins

d'un rayon dans la sphère de mesure. Pour se faire, nous utilisons la formule de l'angle

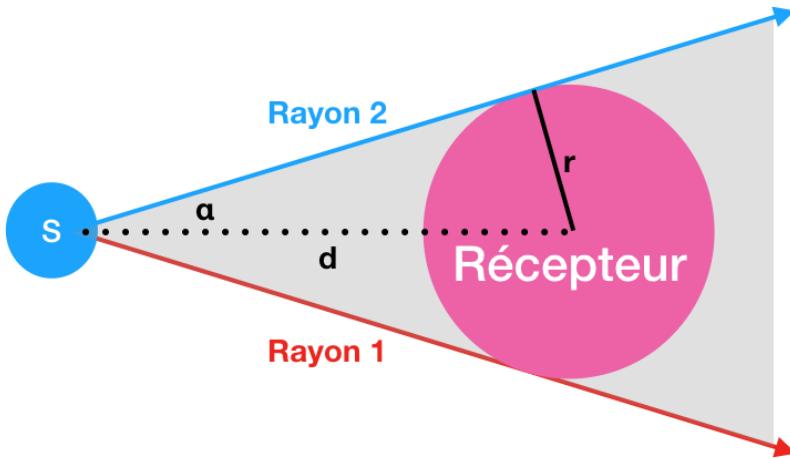


FIGURE 5.3 – Schéma d'un récepteur captant au moins un rayon.

solide d'un cône de révolution⁶ de demi-angle au sommet α (voir fig. 5.2b) :

$$\Omega_i = 2\pi(1 - \cos(\alpha)). \quad (5.3)$$

Or, cet angle solide peut aussi s'exprimer par :

$$\Omega_i = \frac{4\pi}{N}. \quad (5.4)$$

Ainsi, on obtient d'après Pythagore (voir fig. 5.3) :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{d}, \\ &= \sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

avec :

- r : le rayon du récepteur,
- d : la distance maximale du récepteur à la source,
- N : le nombre de rayons total.

En normalisant l'énergie ($E_0 = 1$), on obtient alors :

$$\begin{aligned} 2\pi\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}}\right) &= \frac{4\pi}{N}, \\ \sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}} &= 1 - \frac{2}{N}, \\ 1 - \frac{r^2}{d^2} &= \left(1 - \frac{2}{N}\right)^2, \\ \frac{r^2}{d^2} &= \frac{4}{N^2}(N - 1), \\ \frac{r}{d} &= \frac{2}{N}\sqrt{N - 1}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

6. [WIKIPÉDIA, Angle solide d'un cône de révolution]

Nous constatons qu'en fixant N (le nombre de rayons total émis depuis la source) et r (le rayon de la sphère de mesure), nous pouvons connaître la distance d au bout de laquelle la probabilité de ne capter aucun rayon ne sera plus nulle. En pratique, on voudra réduire encore l'erreur et il faudra arrêter la mesure avant d'arriver à cet extrême. On pourra alors fixer un nombre n de rayons minimum à capter. Par exemple si on fixe n à 100 rayons, on s'assure que la mesure comprend au moins 100 portions de la sphère énergie et on revient statistiquement à un modèle quasi-continu.

Pour établir la nouvelle expression, il suffit de refaire les mêmes calculs en considérant que :

$$\Omega_i = n \cdot \frac{4\pi}{N}. \quad (5.7)$$

L'équation 5.6 s'écrit donc :

$$\frac{r}{d} = \frac{2n}{N} \sqrt{\frac{N}{n} - 1} \Rightarrow d_{max} = \frac{N \cdot r}{2n \sqrt{\frac{N}{n} - 1}}. \quad (5.8)$$

Aussi, si $N \gg n$ l'expression se simplifie par :

$$d_{max} \approx \frac{r}{2} \sqrt{\frac{N}{n}}. \quad (5.9)$$

Nous limitons de cette façon le calcul aux premières réflexions de la réponse impulsionnelle. Cependant, les RIR sont en général calculées jusqu'à ce que l'énergie diminue de 60dB. Il s'agit d'un critère d'arrêt classique car, comme expliqué dans la section 4.2.1 il assure de couvrir la plage d'audition humaine. Or avec notre méthode, nous ne prenons plus de mesure à partir d'un certain temps, correspondant à la distance d_{max} . Il faudra alors jouer sur les paramètres N , r ou n pour s'assurer de dépasser le RT₆₀. En pratique, le temps de calcul sera très sensible à la valeur de N tandis que la précision dépendra de r et n . Ainsi, une possibilité est d'arrêter la mesure lorsque d_{max} est atteinte et de compléter le champs diffus de manière statistique. Cela est envisageable d'après les hypothèses de Sabine qui supposent que le champs diffus devient pseudo-aléatoire. La réponse impulsionnelle obtenue par tracé de rayons peut ainsi être prolongée par régression linéaire pour atteindre RT₆₀.

5.2 Environnement géométrique

5.2.1 Maillage de salle et matériaux

Comme nous l'avons vu précédemment, nous allons travailler à partir d'un maillage existant, qui sera dans notre cas d'application le théâtre d'Orange (voir partie I) mais qui pourrait être n'importe quel maillage de salle. La méthode se doit donc d'être générique. Cependant notons qu'il sera obligatoire d'avoir des faces triangulaires et que les normales devront être orientées vers l'intérieur de la salle (voir fig. 5.4).

Chaque face triangulaire est donc considérée comme une paroi à laquelle il faut affecter un matériau. A un matériau on associe huit coefficients d'absorption correspondant aux bandes d'octave : 62,5Hz, 125Hz, 250Hz, 500Hz, 1kHz, 2kHz, 4kHz, 8kHz. Ces huit bandes permettent de couvrir une large plage des fréquences audibles par l'être humain. L'absorption de l'onde sonore dépendra donc de la fréquence et il faudra calculer

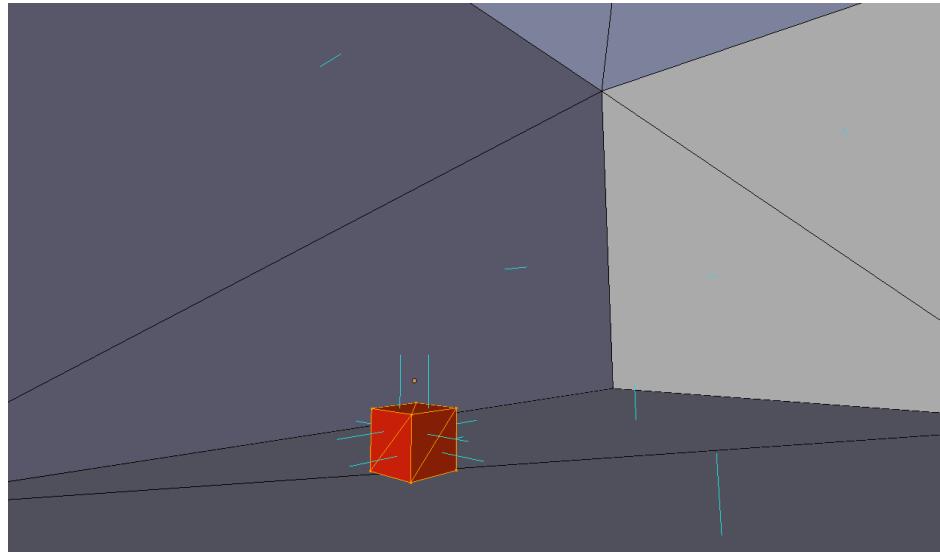


FIGURE 5.4 – Représentation d'un maillages surfacique à faces triangulaires composé d'une salle et d'un obstacle et dont les normales (en bleu) sont orientées vers l'intérieur de la salle.

huit réponses impulsionnelles. Il existe de nombreuses bases de données recensant ces coefficients d'absorption pour tout type de matériaux. Elles sont en général créées de manière expérimentale dans un local spécialement aménagé. L'erreur est de l'ordre de 15%⁷. La base que nous utilisons a l'avantage d'être très complète et en libre accès sur le site d'Odéon⁸. Les coefficients sont sans unité et correspondent à un ratio d'absorption compris entre 0 et 1. Le tableau ?? présente quelques exemples de coefficients d'absorption. L'énergie d'un rayon ayant été réfléchi par plusieurs parois sera proportionnelle à :

$$E = \prod_{i=0}^n (1 - \alpha_i), \quad (5.10)$$

avec :

- n : le nombre de parois rencontrées,
- α_i : le coefficient d'absorption de la i -ème paroi.

Référence	Nom du matériau	62,5Hz	125Hz	250Hz	500Hz	1kHz	2kHz	4kHz	8kHz
1	100% absorbent	1	1	1	1	1	1	1	1
2	100%reflecting	0	0	0	0	0	0	0	0
107	Concrete block, coarse ⁹	0.36	0.36	0.44	0.31	0.29	0.39	0.25	0.25
3000	Hollow wooden podium ¹⁰	0.4	0.4	0.3	0.2	0.17	0.15	0.1	0.1

TABLEAU 5.1 – Exemples de coefficients d'absorption de la base de données Odéon

Notons par ailleurs que l'on définit la ou les sources sonores par une position ponctuelle dans l'espace délimitée par la salle. De la même façon, le récepteur se définit par sa position dans l'espace ainsi que par son rayon de mesure. Il sera assimilé à une sphère.

7. [ACOUPHILE.FR]

8. [ODEON, Materials]

9. Harris, 1991

10. Dalenbäck, CATT

5.2.2 Crédit d'une boîte englobante

La technique de lancer de rayons présente une problématique pour des maillages ouverts. Effectivement, nous verrons dans la section 5.3 qu'il est préférable que chaque rayon puisse rencontrer une paroi afin d'assurer le bon comptage des rayons et éviter ainsi les erreurs algorithmiques. Or, pour une salle ouverte, comme c'est le cas dans le théâtre d'Orange qui est à ciel ouvert, certains rayons peuvent ne rencontrer aucune face. Pour résoudre ce problème facilement et de manière transparente pour l'utilisateur, douze faces triangulaires sont ajoutées systématiquement au maillage afin de créer une boîte englobante. On assigne à ces faces un matériau 100% absorbant afin de respecter la perte d'énergie provoquée par l'absence de paroi. Par ailleurs, cette boîte ne sera pas en contact avec le maillage mais sera légèrement plus grande. Ceci permet d'éviter qu'une de ces faces ne soit confondues avec une paroi réelle du maillage et que les rayons soient absorbés par la boîte englobante au lieu d'être réfléchis par la paroi.

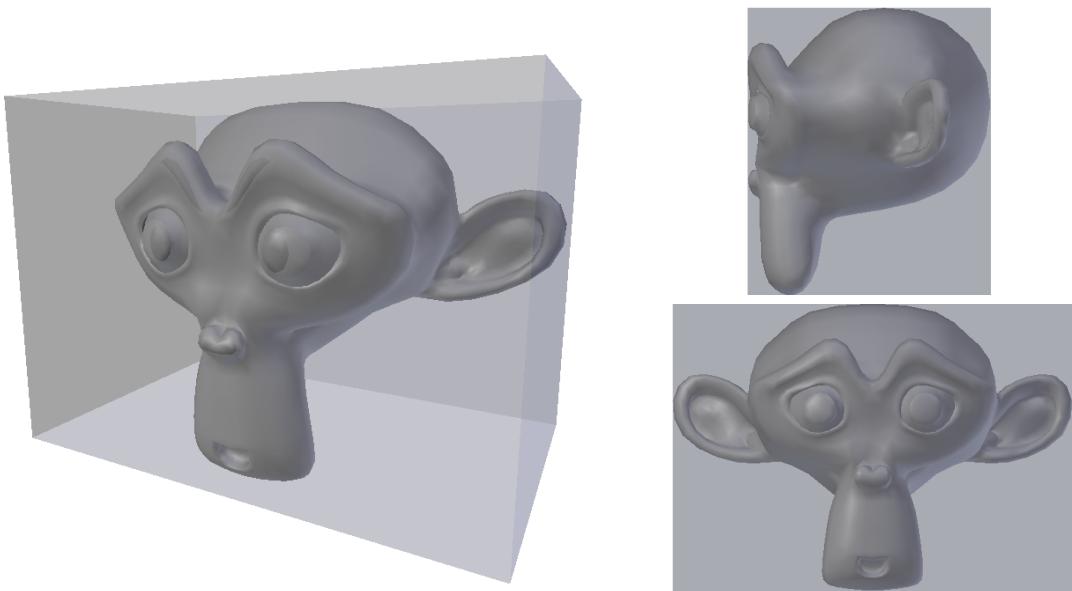


FIGURE 5.5 – Illustration d'une boîte englobant un maillage quelconque (Suzanne)

5.3 Calcul de rayons

Le principe de la méthode utilisée est d'émettre depuis une source des rayons se propageant en ligne droite jusqu'à atteindre un triangle du maillage. Il est bon de noter que dans la nature, les ondes sonores peuvent suivre des trajectoires courbes à cause de certains paramètres comme les gradients de température ou la présence de vent. Néanmoins nous ferons l'approximation que la propagation se fait en ligne droite. Par ailleurs, les sources sonores telles que les instruments de musique ou la voix humaine ne sont pas omnidirectionnelles mais possèdent une répartition de l'énergie qui leur est propre. Comme précisé précédemment, notre étude se place dans le cas général d'une source ayant une répartition uniforme de son énergie dans toutes les directions de l'espace et pourra, dans un second temps, être enrichie par d'autres types de sources.

Pour générer une émission omnidirectionnelle de rayons, nous avons dans un premier temps évalué l'utilisation d'une "*Ico Sphère*" générée par Blender. L'idée est d'utiliser

le centre comme origine et chaque vertice pour calculer le vecteur directeur des rayons. Effectivement, Blender propose dans ses objets de base une sphère formée par un icosaèdre régulier. Selon le raffinement voulu, Blender découpe chaque segment en son milieu et déforme la surface pour obtenir un modèle sphérique (voir fig. 5.6a). La répartition est donc uniforme puisque l'"*Ico Sphère*" n'est composée que de triangles équilatéraux identiques. Cependant, Blender bride ces subdivisions à l'ordre 8, ce qui limite l'"*Ico Sphère*" à 163842 points. Outre le fait que cette manipulation aurait largement ralenti Blender, nous souhaitons pouvoir traiter un nombre de rayons bien plus important et de valeur quelconque. Nous utilisons donc une sphère de Fibonacci afin de générer les vecteurs directeurs des rayons.

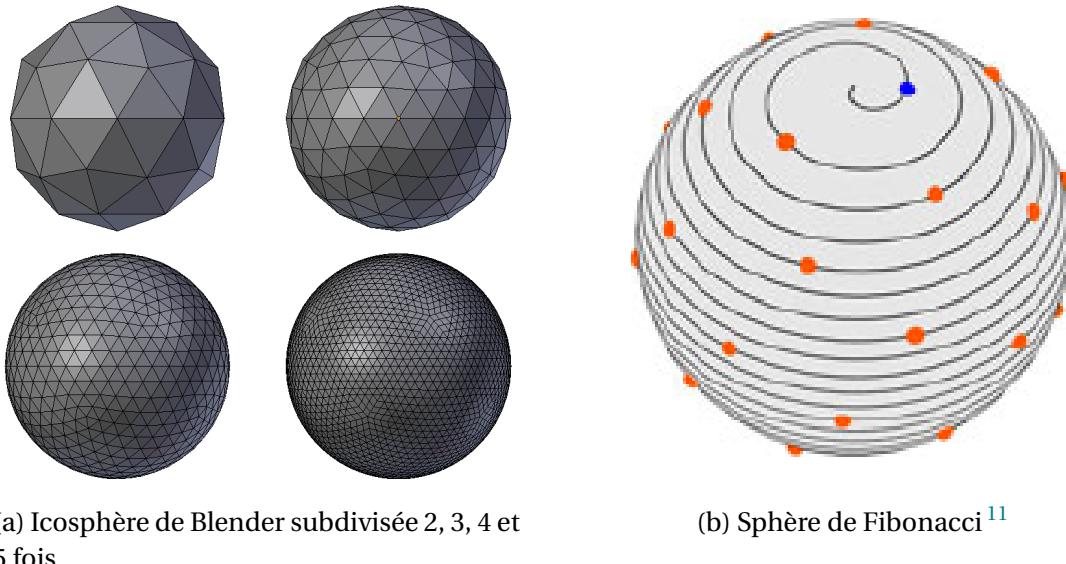


FIGURE 5.6 – Sphères permettant l'émission omnidirectionnelle de rayons

On note Γ le nombre d'or tel que :

$$\Gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (5.11)$$

Les coordonnées sphériques sont données par :

$$\begin{cases} \theta &= \frac{2\pi \times n}{\Gamma} \pmod{2\pi}, \\ \phi &= \arcsin\left(\frac{2n}{N-1} - 1\right), \end{cases} \quad (5.12)$$

avec :

- N : le nombre total de rayons,
- $n \in [0, 1, 2, \dots, N-1]$: le numéro du rayon.

A partir de ces coordonnées sphériques, on en déduit les coordonnées cartésiennes des vecteurs directeurs que l'on normalisera par la suite :

$$\begin{cases} x &= \cos \phi \times \cos \theta, \\ y &= \cos \phi \times \sin \theta, \\ z &= \sin \phi. \end{cases} \quad (5.13)$$

11. [KEINERT et collab., 2015, fig. 1]

À l'initialisation nous émettrons donc N rayons depuis le centre de l'objet source et dirigés dans toutes les directions de manière uniforme. Une énergie normalisée à 1 leur est assignée de sorte que l'énergie totale vaille N et ceux pour chaque bande de fréquence. L'algorithme va ensuite propager les rayons sur les parois et à chaque intersection les énergie vont être atténées par l'absorption des parois (voir eq. 5.10). Tant que les huit énergies de d'un rayons ne sont pas toutes inférieures à une valeur seuil alors celui-ci continu de se propager.

Pour tester les intersections entre les rayons et les parois nous utilisons l'algorithme de Möller-Trumbore¹² développé à la fin des années 90 d'après les travaux de J.Arenberg¹³ et D.Badouel¹⁴ et reconnu pour être rapide et efficace. Il s'agit d'opérer un changement de base pour le vecteur directeur du rayon et d'exprimer le point d'intersection à l'aide de coordonnées barycentriques. Cela permet d'éviter de devoir travailler avec des équations de plans et soulage les calculs.

Nous cherchons donc l'intersection entre un rayons d'équation :

$$R(t) = O + Dt, \quad (5.14)$$

et une face triangulaire de sommets V_0, V_1, V_2 .

Un point T appartient au triangle si :

$$T(u, v) = (1 - u - v)V_0 + uV_1 + vV_2, \quad (5.15)$$

avec (u, v) les coordonnées barycentriques tels que :

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0, \\ (u + v) \leq 1. \end{cases} \quad (5.16)$$

Ainsi, l'intersection entre le rayon et le triangle s'écrit :

$$O + Dt = (1 - u - v)V_0 + uV_1 + vV_2, \quad (5.17)$$

avec t la distance entre le point d'origine du rayon et le point d'intersection. D'après la règle de Cramer, nous pouvons réarranger cette équation sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -D, & V_1 - V_0, & V_2 - V_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = O - V_0. \quad (5.17)$$

Ainsi, on aura :

$$\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -D, & E_1, & E_2 \\ -D, & E_1, & E_2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} |T, E_1, E_2| \\ | -D, T, E_2 | \\ | -D, E_1, T | \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

avec :

$$\begin{cases} E_1 = V_1 - V_0, \\ E_2 = V_2 - V_0, \\ T = O - V_0. \end{cases} \quad (5.20)$$

12. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, p. 2-3]

13. [ARENBERG, 1988, oeuvre intégrale]

14. [BADOUEL, 1990, p. 390-393]

15. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 2]

16. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 3]

17. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 4]

18. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 5]

Ce qui équivaut à :

$$\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{(D \times E_2) \cdot E_1} \begin{bmatrix} (T \times E_1) \cdot E_2 \\ (D \times E_2) \cdot T \\ (T \times E_1) \cdot D \end{bmatrix}.^{19} \quad (5.21)$$

On peut alors connaître toutes les faces que rencontre chaque rayon en conservant le point d'intersection pour le rayon le plus court. Effectivement, on admet que les faces peuvent absorber les rayons mais pas les transmettre donc le rayon s'arrêtera à la première face rencontrée. En pratique il peut y avoir des phénomènes de vibro-acoustique et de résonance qui peuvent transmettre le son à travers des parois. Nous pouvons négliger ces phénomènes notamment dans un cas comme le théâtre d'Orange dont l'épaisseur et la densité des murs est importante. Il est tout de même bon de noter que, pour cette raison, certains cas d'utilisation ne pourront pas être testés comme par exemple l'écoute dernière une porte ou sous l'estrade de bois.

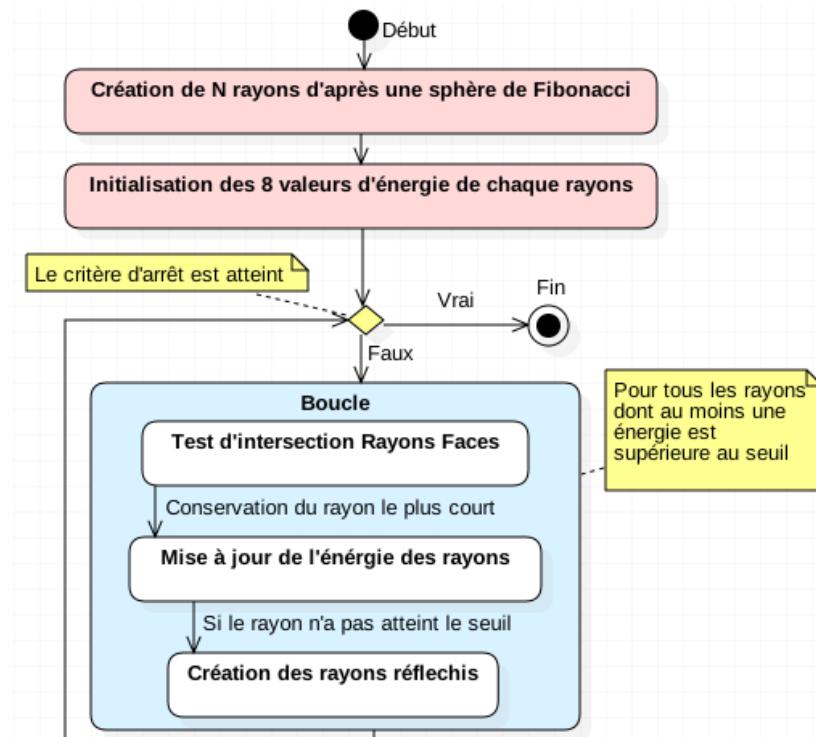


FIGURE 5.7 – Diagramme d'activité résumant le processus de création des rayons

Une fois que l'on sait sur quelle paroi chaque rayon va se réfléchir, on peut mettre à jour leurs énergies en les multipliant pour chaque bande de fréquence par $(1 - \alpha_i)$, les α_i étant les coefficients d'absorption de la face rencontrée (voir section 5.2.1). La longueur totale du rayon doit être stockée afin de pouvoir prendre en compte l'absorption de l'air, de créer les sources-images (voir section 5.4) et de calculer la RIR (voir section 5.5). Il y a alors deux possibilités pour que le processus s'arrête :

- Les énergies des huit bandes de fréquence portées par le rayon sont toutes en dessous d'un seuil. En général, ce seuil est fixé à -60dB pour une source-image, ce qui assure que le son ne soit plus audible. Il faut donc résonner en terme de faisceau de "n" rayons pour déterminer le seuil limite d'un rayon.

19. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 6]

- La distance totale parcourue par le rayon a dépassé le seuil déterminé par l'équation 5.6. Cela assure que l'angle solide soit négligeable devant le rayon du récepteur et ainsi que la répartition discrète d'énergie puisse être considérée comme quasi-continue (voir section 5.1).

Les rayons pour lesquels aucun de ces deux critères n'est atteint donnent alors naissance à un rayon réfléchi, les autres arrêtent de se propager.

Pour calculer le vecteur directeur des rayons réfléchis, il suffit d'utiliser le vecteur normal à la face rencontrée (de norme 1) et d'utiliser la formule suivante :

$$\vec{r} - \vec{i} = 2 \times (-\vec{i} \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (5.22)$$

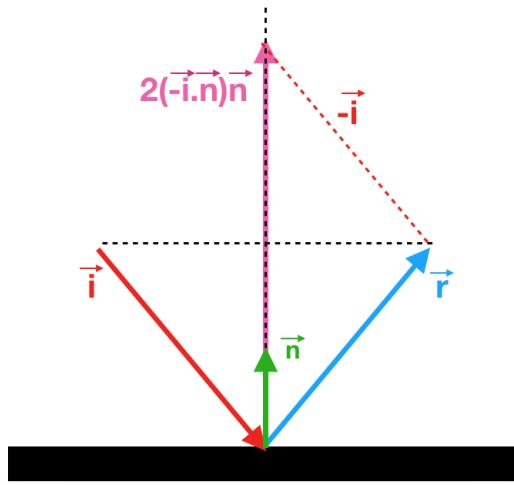


FIGURE 5.8 – Calcul d'un rayon réfléchi à partir d'un rayon incident et d'une normale

Nous pouvons ainsi mettre à jour les informations sur les rayons (origine et vecteur directeur) et boucler afin de propager ces rayons réfléchis vers de nouvelles faces. Notons tout de même que dans l'implémentation algorithmique il peut se produire des problèmes d'arrondis qui peuvent faire fuir des rayons (c'est à dire qu'ils ne rencontrent aucune face). Pour éviter cela, on modifie les conditions de l'équation 5.15 tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \geq -\epsilon, \\ v \geq -\epsilon, \\ (u + v) \leq 1 + \epsilon, \end{array} \right. \quad (5.23)$$

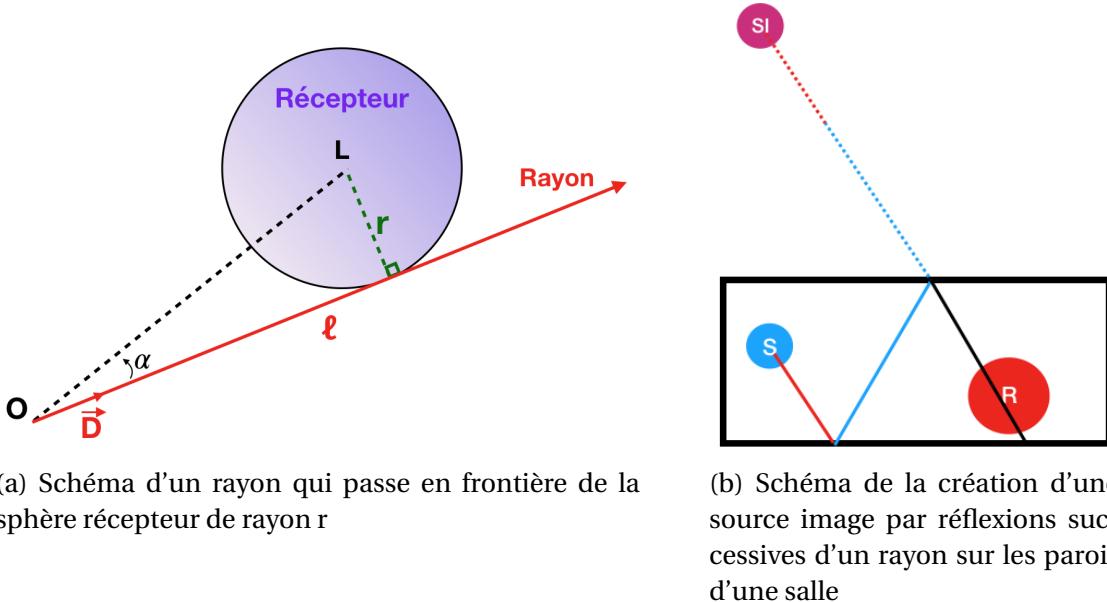
avec $\epsilon = 10^{-5}$ (la précision machine étant de 10^{-6} pour une variable de type *float*). De même, si un rayon tombe dans un coin, son rayon réfléchi pourra sortir du maillage. Pour éviter cela on aura :

$$l = l - \epsilon,$$

avec l la longueur du rayon.

5.4 Calcul de sources-images

A chaque itération, c'est à dire à chaque fois que les N rayons sont entrés en contact avec une paroi et avant qu'ils ne soient réfléchis, on détermine ceux qui ont traversé le



récepteur. Nous allons ainsi pouvoir ajouter au fur et à mesure des itérations de nouvelles sources-images. Pour savoir si un rayon (parmi les rayons qui n'ont pas atteint le critère d'arrêt) donne naissance à une source image, on vérifie dans un premier temps si le point d'origine du rayon est à l'intérieur de la sphère-récepteur :

$$||\vec{OL}|| \leq r, \quad (5.24)$$

avec :

- O : L'origine du rayon,
- L : Le centre du récepteur (Listener),
- r : Le rayon de la sphère récepteur.

Si c'est le cas, alors le rayon est perçu par le récepteur et une source image va être créée. Sinon, on vérifie si le rayon se dirige bien vers le récepteur. Pour cela il suffit de vérifier que :

$$\cos \alpha \geq 0, \quad (5.25)$$

avec α l'angle entre le rayon de vecteur directeur \vec{D} et \vec{OL} . Par ailleurs, on vérifie que le rayon est assez grand pour atteindre le récepteur (donc qu'il n'est pas interrompu par une paroi avant) :

$$||\vec{OL}|| \leq l, \quad (5.26)$$

avec l la longueur du rayon. Pour finir, on s'assure que le rayon intersecte bien la sphère-récepteur :

$$\sin \alpha \times ||\vec{OL}|| \leq r \Rightarrow \alpha \leq \arcsin \frac{r}{||\vec{OL}||} \quad (5.27)$$

Si ces conditions sont réunies, alors le rayon traverse bien le récepteur et une source-image est générée. Ses coordonnées sont obtenues en traçant un vecteur de même origine mais de sens opposé au rayon courant et dont la norme sera égale à la distance totale parcourue par le rayon avant sa dernière réflexion (voir fig. 5.9b). On rétro-propage donc

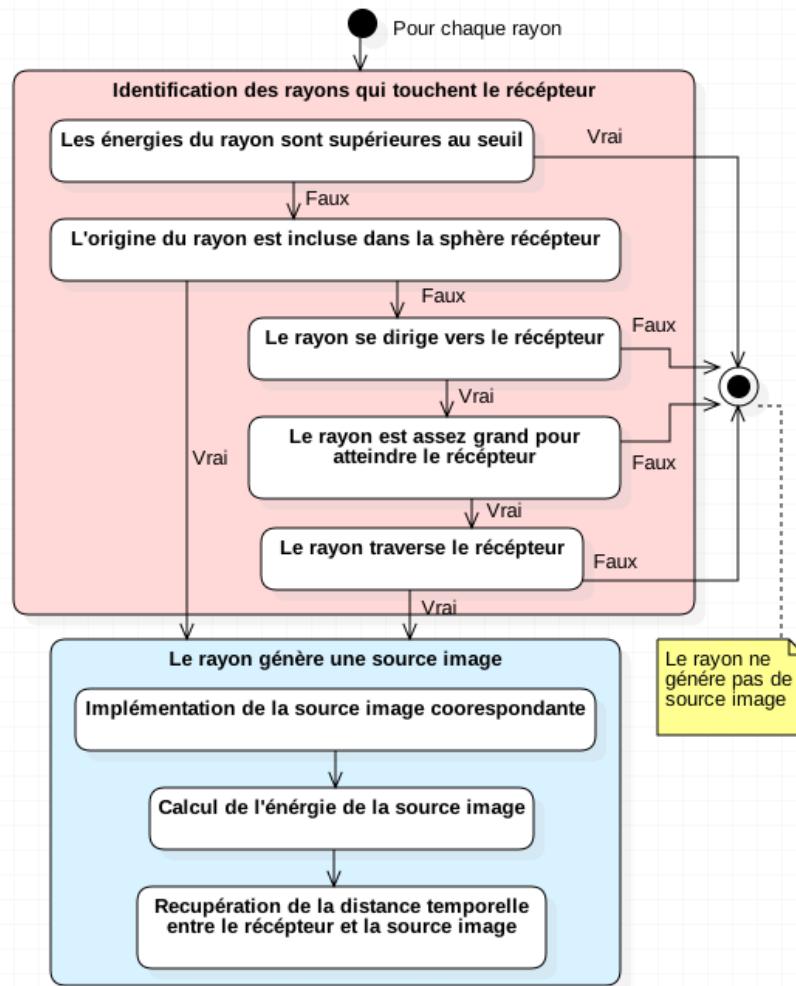


FIGURE 5.10 – Diagramme d'activité résumant le processus de création des sources-images

le rayon jusqu'à arriver à la source-image dont la position est le symétrique de la source par rapport à tous les plans rencontrés par le rayon. On assigne à cette source-image huit coefficients d'énergie correspondant aux coefficients d'énergie finaux du rayon, atténués par l'absorption de l'air sur le trajet total. Celle-ci est déterminée pour chaque bande de fréquence d'après les formules analytiques décrites dans la section 4.1.3. Le calcul des énergies se fait de la manière suivante :

$$E_{si,i} = E_{r,i} \times e^{\frac{-m_i \times l_{tot}}{10}}, \quad (5.28)$$

avec :

- $E_{si,i}$: L'énergie portée par la source image sur la i-ème bande de fréquence,
- $E_{r,i}$: L'énergie finale portée par le rayon sur la i-ème bande de fréquence,
- m_i : Le coefficient d'absorption de l'air sur la i-ème bande de fréquence (voir 4.1.3),
- l_{tot} : La distance totale parcourue par le rayon entre la source et le récepteur.

Étant donné que tous les rayons qui se seront réfléchis sur une même paroi vont générer des sources-images en un même point, on peut sommer leur énergie. Il n'y aura donc qu'une seule source-image portant l'énergie de plusieurs rayons.

Pour finir, on assigne à chaque source-image une distance temporelle afin pouvoir

tracer la réponse impulsionale :

$$t_{tot} = \frac{l_{tot}}{v}, \quad (5.29)$$

avec :

- t_{tot} : le temps de parcours entre la source-image et le récepteur,
- v : la vitesse du son dans le milieu (air : 340m/s).

5.5 Génération de réponse impulsionale

Disposant de la distance temporelle entre les sources-images et le récepteur, il est possible d'afficher les courbes d'énergie sonore en fonction du temps. Aussi, pour chaque bande d'octave nous sommes les énergies par tranches temporelles. Ces tranches sont déterminées par la fréquence d'échantillonnage f_s . Celle-ci devra être identique à celle du signal audio avec lequel la réponse impulsionale sera convolée (voir section 5.6). Ainsi :

$$nb_{ech} = f_s \times t_{max}, \quad (5.30)$$

avec :

- nb_{ech} : le nombre total d'échantillon,
- f_s : la fréquence d'échantillonnage,
- t_{max} : le temps de parcours de la source image la plus éloignée,

et pour chaque bande d'octave on somme les énergies par échantillon. On a alors :

$$E_i = \sum E_j, \quad (5.31)$$

tel que la partie entière du produit $(t_j \times f_s) = i$ et avec :

- E_i : l'énergie du i^e échantillon,
- E_j et t_j : respectivement l'énergie et temps de parcours de la j^e source-image.

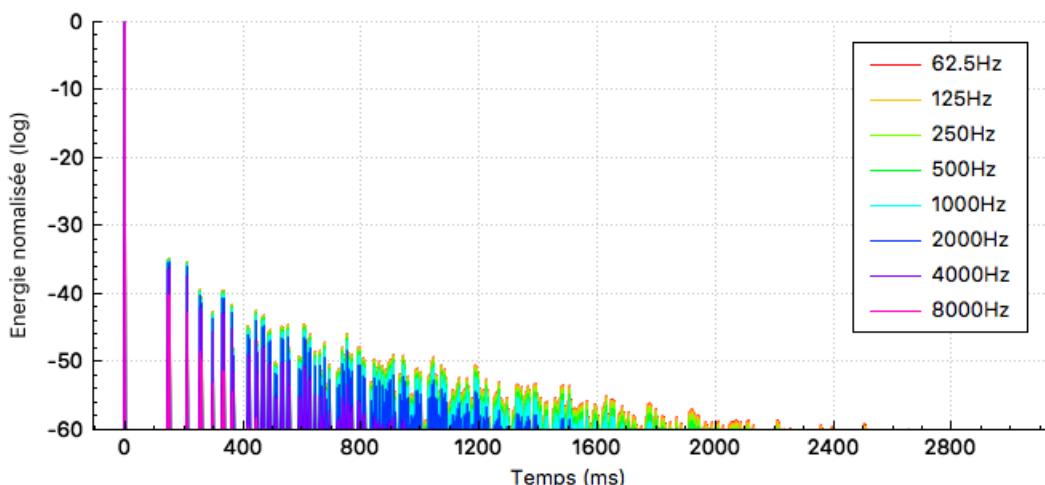


FIGURE 5.11 – Exemple de RIR pour un cube de 50m d'arrête, une source et un récepteur de 20m de diamètre situés au centre, un million de rayons et une fréquence d'échantillonnage de 44100Hz

Typiquement, pour une fréquence standard de 44100Hz chaque échantillon sommera les énergies des sources-images par tranches de $22,7\mu s$. Les énergies seront ensuite normalisées pour obtenir la **RIR** (voir fig. 5.11).

On a vu dans les sections 5.1 et 5.3 que la mesure pouvait être arrêtée avant d'atteindre le seuil limite d'audition, c'est à dire -60dB. Ce cas se présente lorsque le nombre de rayons est faible, lorsque le diamètre de la sphère récepteur est petit ou bien lorsque les rayons ont une longue distance à parcourir avant d'être suffisamment atténué (dans le cas d'une pièce fermée avec des parois très réfléchissantes par exemple). Dans ce cas, la **RIR** doit être complétée pour pouvoir atteindre le niveau d'énergie minimum demandé (-60dB). Pour cela, chaque courbe va être prolongée par régression linéaire afin de générer de manière statistique la queue de réverbération. D'après Sabine²⁰
A completer ...

5.6 Auralisation

L'analyse de résultats d'une étude acoustique peut parfois être délicate et difficile pour les personnes extérieures au milieu. Le résultat final qui pourra être analysé par le plus grand nombre est le signal audio de sortie. Même si l'analyse d'un signal audio nécessite une grande finesse auditive, elle présente pour avantage d'être accessible par une simple écoute. Pour obtenir le son réverbéré, il s'agit de convoluer le signal d'origine avec les **filtre à réponse impulsionnelle finie, ou Finite Impulse Response filter (FIR)**. Un **FIR** est une **RIR** exprimé en pression telle que :

$$P = \sqrt{E}, \quad (5.32)$$

avec :

- P : La pression sonore normalisée,
- E : L'énergie normalisée.

Convoluer ces signaux revient à multiplier point par point le fichier audio avec les **FIR** dans le domaine de Fourier (fréquentiel). On utilise pour cela des fichiers au format **WAV**. Dans le cas de longs signaux, il est judicieux d'utiliser une convolution partitionnée afin de réduire le stockage de données et accélérer les calculs²¹.

L'algorithme mis en place fonctionne de la manière suivante (voir fig. 5.12) :

Premièrement, on fixe la longueur des partitions à n échantillons tel que n soit une puissance de 2 (typiquement 1024). Dans un premier temps, le signal audio est découpé par tranches de n échantillons et chaque tranche recouvre la précédente sur la moitié de sa taille. Chacune d'entre elles est ensuite passées dans le domaine spectral par **transformation de Fourier rapide (FFT)**. Dans un second temps, les **FIR** sont convolus temporellement à des filtres passe-bande (voir fig. 5.13), c'est à dire que chaque pic des **FIR** sera multiplié par le filtre passe-bande de la fréquence correspondante. Les huit signaux de sortie sont alors découpés par tranches de $n/2$ échantillons que l'on fait précéder de $n/2$ zéros. Ce procédé se nomme "*ZeroPadding*" et permet d'éviter les effets de crénage (*aliasing*) lors de la convolution de deux signaux. En effet, les spectres des signaux présentent sur leur partie négative un repliement qui apporte de l'information redondante lors de la convolution. C'est pour cette même raison que les partitions du signal audio ont

20. [SABINE, 1900]

21. [BATTENBERG et AVIZIENIS, 2011, 2. Algorithm overview]

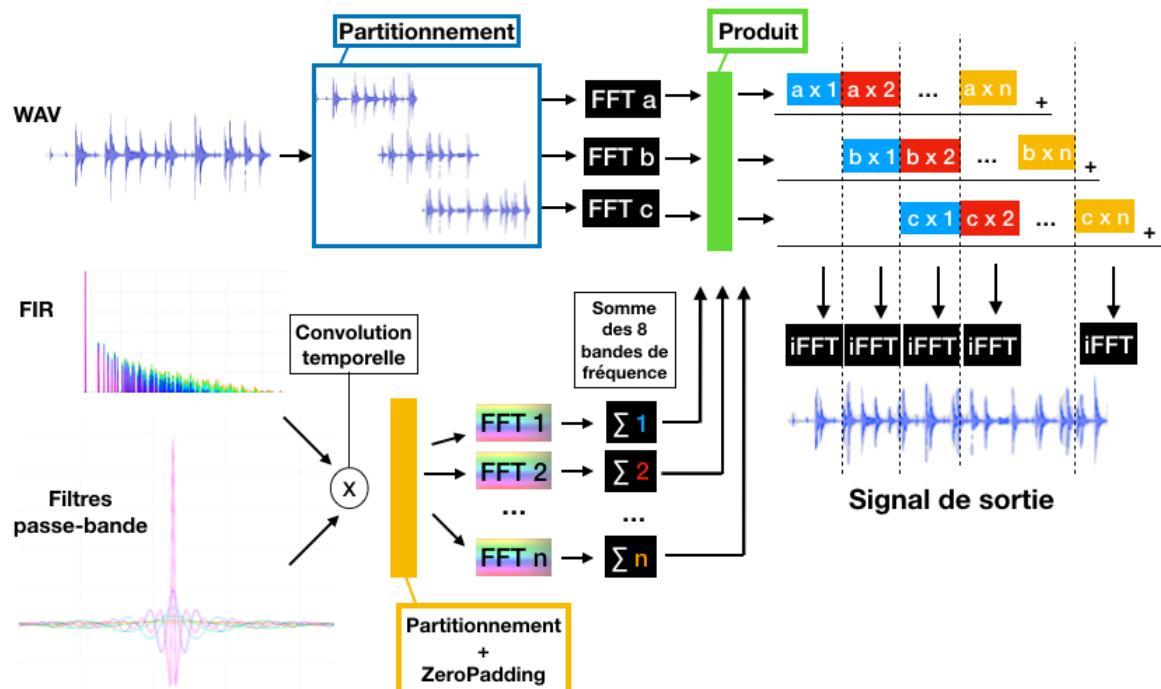


FIGURE 5.12 – Schéma du processus de convolution partitionnée

un recouvrement de $n/2$ échantillons. Ainsi, seuls les $n/2$ derniers échantillons du résultat de convolution sont utiles. Avant de pouvoir effectuer cette opération il faut passer les filtres dans le domaine spectral et sommer les huit bandes de fréquence. Une par une les partitions du signal audio sont convoluées aux filtres et à chaque nouvelle partition, on décale le résultat de $n/2$ échantillons. On pourra alors sommer les résultats et effectuer une transformée de Fourier inverse pour récupérer le signal de sortie. Celui-ci sera identique au signal d'entrée à la différence qu'il sera réverbéré, c'est à dire que chaque pic de la RIR répétera le signal d'entrée en écho.

Dans un futur développement il sera possible de générer une RIR pour l'oreille gauche et une autre pour l'oreille droite afin d'avoir une signal binauralisé. L'écoute pourra alors dépendre des angles d'azimut et d'élévation orientant le regard de l'auditeur. Ainsi, le son sera spatialisé et l'étude acoustique pourra prendre une nature immersive. Celle-ci pourra être renforcée par l'utilisation d'un casque muni d'un *Head-Tracker* afin de corriger les angles d'observation en temps réel²². Ce type de casque possède un gyroscope qui actualise la direction du regard en temps réel et permet d'augmenter considérable la sensation immersive.

22. [SALMON et collab., 2017, oeuvre intégrale]

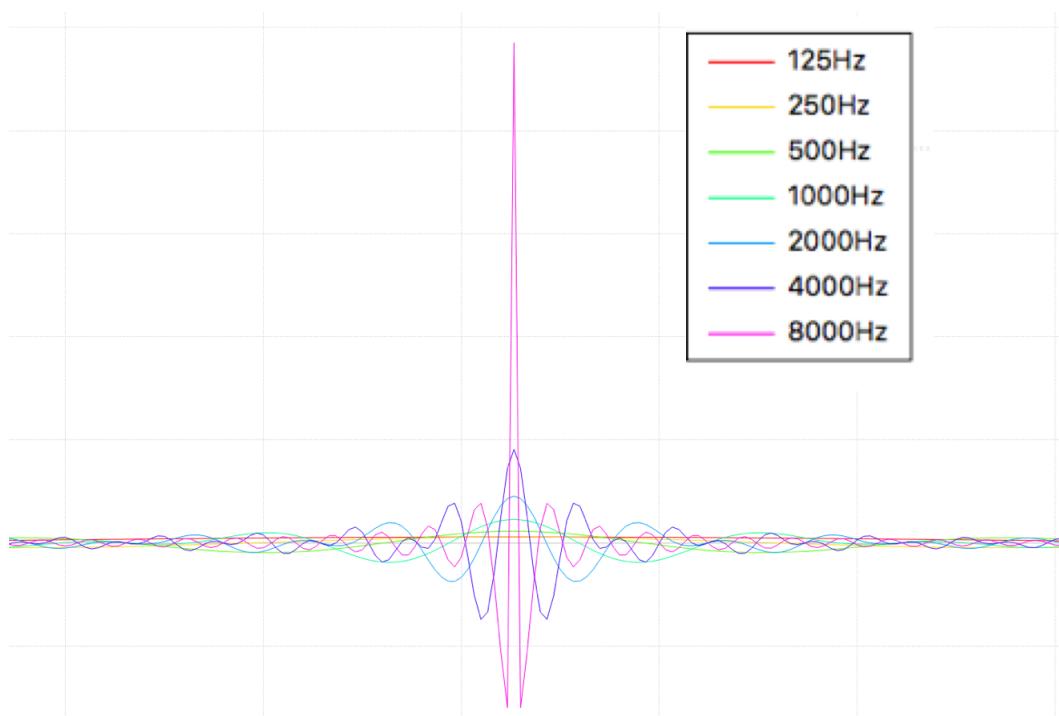


FIGURE 5.13 – Filtres fréquentiels passe-bande

Chapitre 6

Optimisation algorithmique

« *Un pessimiste voit la difficulté dans chaque opportunité, un optimiste voit l'opportunité dans chaque difficulté.* »

Winston Churchill

Sommaire

6.1 Méthode d'octree	89
6.1.1 Principe général	89
6.1.2 Implémentation	92
6.2 Analyse des résultats	95

Introduction

Afin de pouvoir qualifier les performances de l'algorithme, il est d'usage d'en mesurer la **complexité**. Ce coefficient vise à analyser et qualifier le temps de calcul d'un algorithme. Pour rappel les grandes étapes de l'algorithme qui font appel à des boucle d'itérations importantes sont les suivantes :

- lecture du maillage,
- intersection des rayons et des faces,
- création des sources-images.

On note N le nombre de rayons et M le nombre de faces du maillage. Nous allons donc pouvoir analyser la complexité de ces différentes étapes. La lecture du maillage ne dépend que du nombre de faces ; la complexité de cette opération est donc linéaire de type $O(M)$. Par ailleurs cette étape n'est réalisée qu'une fois à l'initialisation. La création des sources-images ne dépend que du nombre de rayons sera elle aussi de complexité linéaire en $O(N)$. Celle-ci se produit en boucle tant que tous les rayons n'ont pas atteint le seuil d'arrêt. Néanmoins on ne peut pas en déterminer le nombre de boucles car celui-ci dépend de la géométrie de la salle et des matériaux. Effectivement plus la salle est grande et plus les matériaux sont absorbants, plus vite s'arrêtera la boucle.

L'étape la plus complexe est la boucle d'itération sur le calcul des intersection entre les rayons et les faces. Lors de cette étape, chaque rayon est testé avec chaque face. La complexité de cet algorithme est donc quadratique en $O(N \times M)$. Il s'agit de l'étape critique de la méthode et la plus chronophage. Pour vérifier cela, nous mesurons le temps de calcul des intersections rayons-faces pour une itération (voir fig. 6.1 et tab. 6.1). Ce test est effectué sur un MacBook de processeur 2,7GHz Intel Core i5 avec 8Go de RAM DDR3. La géométrie utilisée est un tétraèdre dont le nombre de faces est multiplié par deux à chaque mesure.

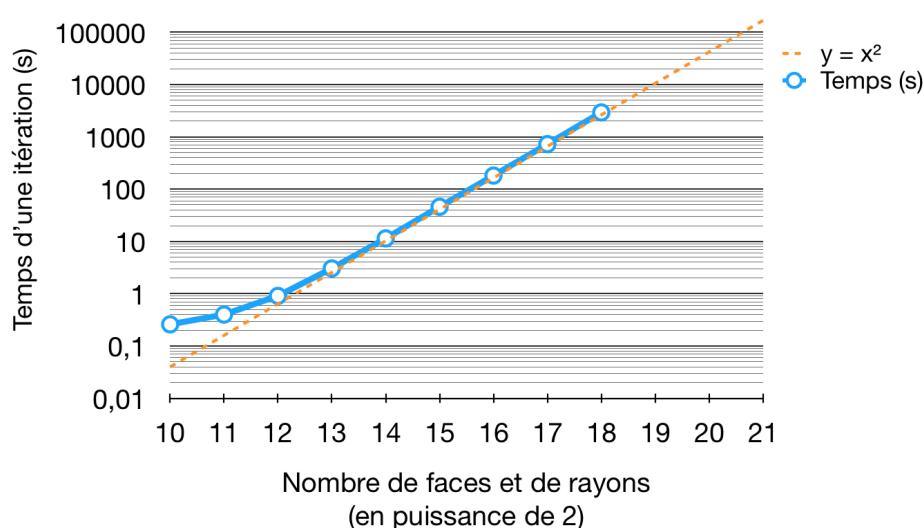


FIGURE 6.1 – Courbe de complexité donnant le temps (s) d'une itération pour $N=M$ en échelle logarithmique

La courbe 6.1 illustrant le temps de calcul en faisant varier le nombre N de rayons et le nombre M de faces tel que $N = M$ comporte bien une pente de 2 en échelle logarithmique. Effectivement :

$$T \propto N^2 \quad \Rightarrow \quad \ln(T) \propto 2\ln(N). \quad (6.1)$$

On constate comme prévu que le temps de calcul évolue comme le produit du nombre de faces par le nombre de rayons ce qui donne bien une complexité quadratique.

Par ailleurs en fixant d'une part le nombre de face et d'autre part le nombre de rayons on constate que le temps augmente bien linéairement par rapport à chacun de ces paramètres (voir fig . 6.2).

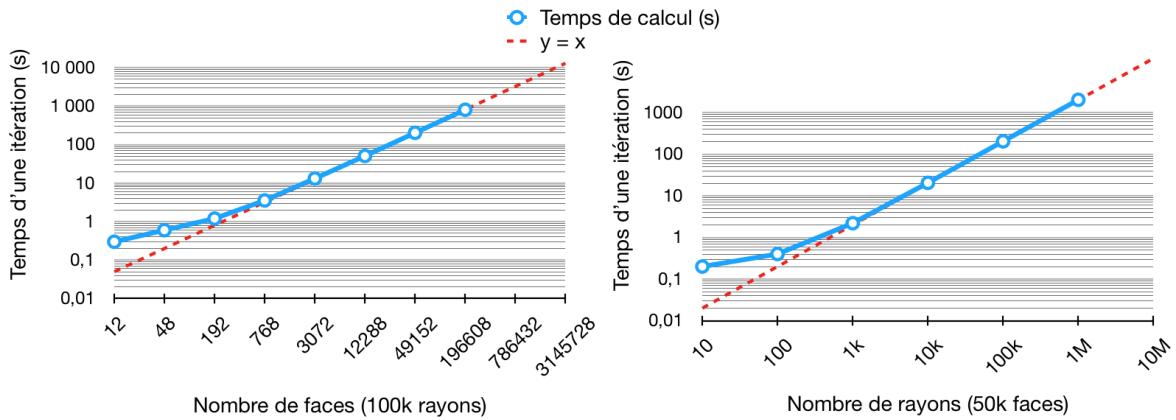


FIGURE 6.2 – Courbes de complexité donnant le temps (s) d'une itération en échelle logarithmique

Dans le cas du théâtre d'Orange, le nombre de faces est supérieur à 100 000 éléments et le nombre de rayons à émettre doit être très important compte tenu de la taille du bâtiment (voir section 5.1). En testant une géométrie simplifiée du bâtiment, nous constatons que son RT₆₀ est de l'ordre de 2 secondes. Il faudra donc pouvoir réaliser des mesures pour des rayons d'environ 700m de long. Or d'après l'équation 5.9 :

$$N > n \left(\frac{2d}{r} \right)^2. \quad (6.2)$$

Pour une sphère de mesure de quelques mètres (celle-ci ne doit pas trop s'étendre afin que la mesure reste localisée) et n de l'ordre d'une centaine de rayons, il faudra que le nombre total de rayons N soit supérieur à 50 millions. En prolongeant la courbe de la figure 6.2 on obtient un temps de calcul d'une trentaine d'heure, ce qui n'est pas acceptable pour entrer dans le cahier des charges. Nous devons donc optimiser l'algorithme afin de résoudre ce problème.

6.1 Méthode d'octree

6.1.1 Principe général

Comme nous l'avons vu précédemment, les maillages que nous devons traiter peuvent comporter plusieurs dizaines, voire centaines de milliers d'éléments. Les algorithmes permettant de gérer ce genre de cas utilisent souvent des méthodes dites de "diviser pour régner" (*divide and conquer*). Cela permet, notamment dans des environnements 3D de pré-trier les données afin de ne réaliser les calculs couteux en temps que sur une quantité de données restreinte.

Il existe plusieurs types d'arbres permettant l'optimisation des calculs par partitionnage de données. On pourra citer l'exemple bien connu des arbres binaires qui subdivisent les données en deux de manière récursive¹. Nous avons choisi d'utiliser un arbre

1. [?], p. 318–348]

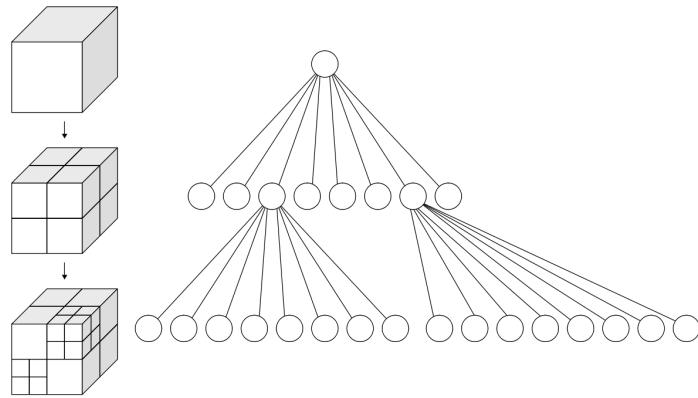


FIGURE 6.3 – Illustration du principe d'*octree*. Subdivision d'un cube en "octants" (gauche) et l'arbre correspondant (droite)

assez similaire à la différence près qu'il sépare l'espace en 2 sur chacune des dimensions de l'espace et crée des subdivisions de taille identiques alignées avec les axes. Chaque itération découpe la partition de l'espace précédente en 8 (soit 2^3) ce qui donne le nom d'*octree* à ce procédé².

Le principe général consiste à créer une boîte cubique dite "boîte-mère" contenant l'ensemble des éléments du maillage, c'est à dire l'ensemble des faces triangulaires. Cette boîte-mère est alors subdivisée pour créer huit "boîtes-filles" de taille identique qui elles-mêmes vont être subdivisées en huit boîtes-filles, etc (voir fig. 6.3). De manière récursive, chaque élément contenu dans une boîte-mère va être rangé dans la boîte-fille qui le contient. On descend de cette façon dans l'arborescence de l'arbre jusqu'à atteindre une condition d'arrêt. Typiquement, l'*octree* s'arrête lorsque plus aucune boîte-fille ne contient plus de n éléments. Les boîtes sont donc raffinées de la même manière que le maillage (voir fig. 6.4) puisque que les boîtes vides ne génèrent pas de boîtes-filles.

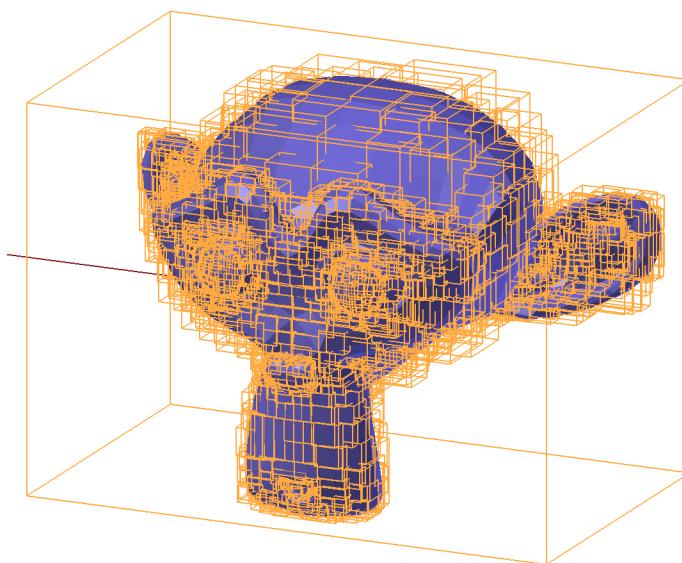


FIGURE 6.4 – Suzanne triée dans un *octree*

Vérifions si ce système de tri permet de réduire la complexité du calcul. Nous avons vu que l'étape la plus chronophage de l'algorithme est l'interaction des rayons et des faces.

2. [MEAGHER, 1982, p. 5]

Avec le partitionnage spatial de l'*octree* nous ne testons que les rayons et les faces d'une même boite. Nous nommons *objet* : un rayon ou une face. Dans un premier temps, voyons la complexité de la répartition des *objets* dans les boites. Nous nous plaçons dans le cas idéal où N *objets* sont repartis de manière uniforme dans l'espace. On nomme *opérations* le rangement des *objets* dans les boites. On note p le nombre d'étages de l'*octree*. Pour $p = 0$, c'est à dire lorsque l'*octree* n'est composée que de sa boite-racine, la boite-mère contient N *objets*. Pour $p = 1$ il faut ranger N élément dans 8 boites-filles. Il y aura donc $8N$ *opérations*. A l'étage suivant, chaque boite-fille contenant $\frac{N}{8}$ *objets* devient alors un boite mère traitée comme précédemment. Ainsi il faut 8 *opérations* par boite-mère pour ranger leurs $\frac{N}{8}$ *objets*. Nous avons donc à cette étape :

$$8 \times 8 \times \frac{N}{8} = 8N \text{ opérations.}$$

De la même manière à l'étape suivante on aura :

$$8^3 \frac{N}{8^2} = 8N \text{ opérations.}$$

Que l'on peut écrire dans le cas général :

$$8^p \frac{N}{8^{p-1}} = 8N \text{ opérations.} \quad (6.3)$$

On constate qu'il faut faire p fois $8N$ *opérations* pour arriver à l'étage p . Il y aura donc $p \times 8N$ *opérations* au total.

Voyons maintenant comment déterminer p . Nous nous plaçons dans le cas où les boites du dernier étage ne contiennent qu'un unique *objet*. Nous avons donc autant de boites que d'*objets*. Ainsi :

$$\begin{aligned} 8^p &= N, \\ p \cdot \ln 8 &= \ln N, \\ p &= \frac{1}{\ln 8} \ln N. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Le nombre total d'*opérations* C est donc :

$$C = p \cdot 8N = \frac{8N}{\ln 8} \ln N. \quad (6.5)$$

Le rangement des *objets* dans les boites est donc proportionnel à $N \cdot \ln N$. À cela il faudra ajouter les calculs des intersections rayons/faces qui ne sont fait que N fois, c'est à dire une fois par boite (puisque on n'a qu'un rayon et qu'une face par boite). La complexité totale devient :

$$C_{tot} = p \cdot 8N = \frac{8N}{\ln 8} \ln N + N. \quad (6.6)$$

Dans le cas général où les *objets* ne sont pas répartis de manière uniforme, la démonstration est plus complexe. Effectivement, on ne peut pas prédire quelles boites vont être vides avant les autres et donc combien il y aura de boites par étages (voir fig. 6.3). Cela est dû au fait que l'espace est divisé en 8^p à chaque étage et que selon la répartition des éléments certaines boites vont se retrouver vides et ne plus se subdiviser. La démonstration générale pourrait par contre fonctionner dans le cas d'un arbre binaire par exemple puisque le découpage dans l'espace se fait de manière à avoir un nombre équivalent d'éléments dans chaque boite quelque soit leur répartition. L'équation 6.3 donne :

$$2^p \frac{N}{2^{p-1}} = 2N \text{ opérations.}$$

On obtient alors :

$$C = p \cdot 2N = \frac{2N}{\ln 2} \ln N. \quad (6.7)$$

Or, comme $\frac{2}{\ln 2} > \frac{2}{\ln 2}$ il faudra descendre plus loin dans les étages de l'arbre ce qui en pratique peut s'avérer être plus coûteux en temps.

De la même manière, en revenant au cas de l'*octree* il pourra être plus judicieux de ne pas garder un unique *objet* par boite dans le dernier étage mais plutôt d'arrêter l'arbre lorsque les boites possèdent toutes moins de n *objets*. L'équation 6.4 devient :

$$8^p = \frac{N}{n}. \quad (6.8)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p \cdot \ln 8 &= \ln N - \ln n, \\ p &= \frac{1}{\ln 8} \ln N - \frac{\ln n}{\ln 8}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

et

$$C = p \cdot 8N = \frac{8N}{\ln 8} \ln N - \frac{\ln n}{\ln 8} 8N. \quad (6.10)$$

Pour obtenir la complexité totale il faut ajouter le nombre d'opérations qu'il faut pour calculer les intersections rayons/faces par boite, c'est à dire n^2 . On obtient :

$$C_{tot} = \frac{8N}{\ln 8} \ln N - \frac{\ln n}{\ln 8} 8N + n^2. \quad (6.11)$$

Le nombre d'étage nécessaire diminue donc d'un terme constant lié à n et pour $n \ll N$ le temps de calcul sera proportionnel à $(aN \ln N + bN + c)$ avec a , b et c des constantes non significatives. La complexité est donc en $O(N \ln N)$.

6.1.2 Implémentation

L'algorithme a été développé comme décrit sur la figure 6.5). Une première boite cubique englobant le maillage dans sa globalité est créée. On y associe les indices de l'ensemble des faces puisqu'elles sont toutes contenues dans cette boite-racine. On va ensuite, de manière récursive descendre dans des étages successifs. Passer de l'étage p à l'étage $p + 1$ revient à découper toutes les boites non-vides de l'étage p en huit boites-filles de tailles égales qui deviendront à leur tour les boites-mères de l'étage $p + 1$. Les indices des faces assignés à une boite-mère sont répartis dans les huit boites-filles. Pour savoir quel face appartient à quelle boite, on utilise les coordonnées du centre de la face. Effectivement, une face peut géométriquement rencontrer plusieurs boites mais il est nécessaire de les considérer comme ponctuelle afin qu'une face ne puisse se retrouver que dans une boite à la fois. La boucle récursive s'arrête lorsque les boites possèdent toutes moins d'éléments qu'une valeur seuil. Ainsi nous nous assurons que l'*octree* se raffine de la même manière que le maillage et que chaque boite ne contient qu'un faible nombre d'éléments.

Il reste néanmoins une dernière étape qui permettra de s'assurer que les rayons rencontrent les bonnes faces. Il s'agit de redimensionner les boites non-vides pour que cette fois, elles englobent bien géométriquement les faces qu'elles contiennent.

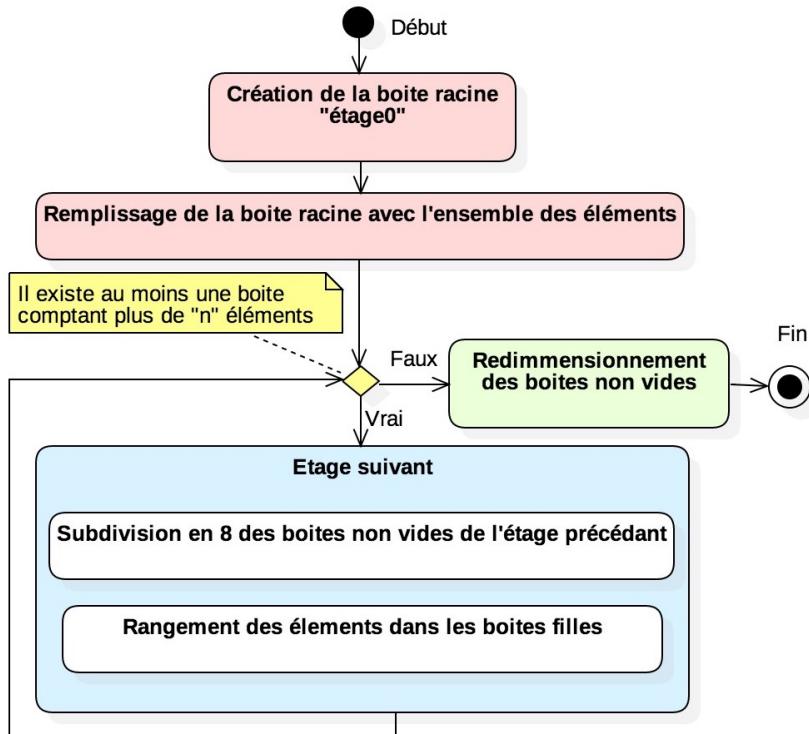


FIGURE 6.5 – Diagramme d'activité résumant le processus de création d'un arbre d'octree

À chaque itération, on va alors pouvoir répartir les rayons dans l'*octree* (voir nouveau diagramme d'activité des rayons, fig. A.1). Pour cela, les rayons sont assignés aux boîtes qu'ils intersectent à partir de la boîte-racine et en descendant dans l'arborescence de chaque branche. De la même manière que pour les triangles, les rayons sont testés avec des boîtes-filles que s'ils ont bien intersecté la boîte-mère correspondante. Pour savoir si l'indice d'un rayon doit être assigné à une boîte, nous utilisons un algorithme optimisé d'intersection Rayon/Boîte³. La particularité des boîtes d'un *octree* est qu'elles sont toutes alignées selon les axes du repère cartésien. On appelle communément ce type de boîte **Axis-Aligned Bounding Box (AABB)** en opposition aux **Oriented Bounding Box (OBB)**. Nous allons donc utiliser cette propriété pour vérifier si un rayon intersecte une boîte. Pour cela rappelons qu'un rayon peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = D \times t + O \quad (6.12)$$

avec :

- D : le vecteur directeur du rayon de coordonnées ($D_x; D_y; D_z$),
- O : le point d'origine du rayon de coordonnées ($O_x; O_y; O_z$).

On peut également exprimer les plans délimitant la boîte de type **AABB** par les équa-

3. [WILLIAMS et collab., 2005, oeuvre intégrale]

tions suivantes :

$$f(t) = X_{min}$$

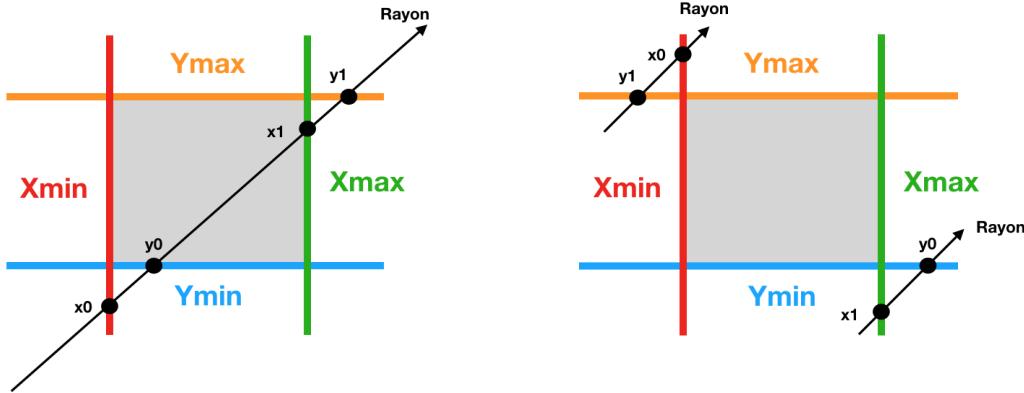
$$f(t) = X_{max}$$

$$f(t) = Y_{min}$$

$$f(t) = Y_{max}$$

$$f(t) = Z_{min}$$

$$f(t) = Z_{max}$$



(a) Vue 2D d'un rayon intersectant la boite

(b) Vue 2D de rayons n'intersectant pas la boite

FIGURE 6.6 – Illustrations de l'intersection Rayon/Boite en 2D

Ainsi, on peut exprimer les points d'intersection entre le rayon et les plans délimitant la boîte avec le système d'équations suivant :

$$X_{min} = x_0 \times D_x - O_x \Rightarrow x_0 = \frac{X_{min} - O_x}{D_x}, \quad (6.13)$$

$$X_{max} = x_1 \times D_x - O_x \Rightarrow x_1 = \frac{X_{max} - O_x}{D_x}, \quad (6.14)$$

$$Y_{min} = y_0 \times D_y - O_y \Rightarrow y_0 = \frac{Y_{min} - O_y}{D_y}, \quad (6.15)$$

$$Y_{max} = y_1 \times D_y - O_y \Rightarrow y_1 = \frac{Y_{max} - O_y}{D_y}, \quad (6.16)$$

$$Z_{min} = z_0 \times D_z - O_z \Rightarrow z_0 = \frac{Z_{min} - O_z}{D_z}, \quad (6.17)$$

$$Z_{max} = z_1 \times D_z - O_z \Rightarrow z_1 = \frac{Z_{max} - O_z}{D_z}. \quad (6.18)$$

On comprend d'après les figures 6.6a et 6.6b que l'on va pouvoir déterminer si un rayon intersecte une boîte en comparant les coordonnées des points d'intersection avec les plans. Notamment, si $x_0 > y_1$ ou $y_0 > x_1$ le rayon n'intersectera pas la boîte (voir fig 6.6b). Dans le cas contraire, on appliquera le même principe sur z . Il n'y aura alors pas d'intersection si $\max(x_0; y_0) > z_1$ ou $z_0 > \min(x_1; y_1)$. On notera que si le rayon est dirigé dans le sens inverse il faudra inverser les α_0 et α_1 (α correspondant aux coordonnées x, y, z) .

De cette façon on saura quelles sont les boites traversées par chaque rayons. Pour chaque feuille de l'*octree*, c'est à dire les boites non-vides les plus basses dans l'arborescence, on testera les intersections entre les rayons et les faces situés dans la subdivision de l'espace correspondante uniquement. Ainsi, le calcul d'intersection ne se fait qu'entre peu de rayons et peu de faces.

6.2 Analyse des résultats

Nous allons maintenant vérifier si l'implémentation de cette méthode permet d'accélérer le temps de calcul et sous quelles conditions. Comme évoqué précédemment, l'étape critique de l'algorithme est le test d'intersection rayons/éléments car la complexité initiale est quadratique et que ce processus se répète à chaque itérations jusqu'à atteindre RT₆₀. La complexité théorique en utilisant un *octree* est de type O(N ln M). Pour vérifier ce comportement nous réitérons le même test qu'en introduction du chapitre 6 afin de comparer les résultats (voir tab. 6.1 et fig. 6.7). Ainsi, nous faisons varier le nombre N de rayons et le nombre M de triangles du maillage tels que N = M. À chaque mesure N et M sont multipliés par 2.

On constate dans un premier temps que le régime stationnaire commence plus tard en utilisant l'*octree*. Effectivement, le temps d'une itération reste inférieur à 1s tant que N est inférieur à 70 000 éléments contre 4 000 sans *octree*. Ensuite on voit que la pente est quasiment linéaire ce qui coïncide à la complexité théorique établie dans la section 6.1.1 puisque en échelle logarithmique :

$$y = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x + \ln(\ln x) \approx \ln x.$$

En observant le tableau 6.1, on constate par exemple que pour N = 262 144 on divise par 1000 le temps de calcul par itération ce qui est très prometteur pour le calcul dans le théâtre d'Orange.

Dans un second temps nous ne faisons varier qu'un des deux paramètres et mesurons l'impact sur le temps de calcul (voir tab. 6.2, 6.3 et fig. 6.8 et 6.9). Sur ces figures on constate que le temps de calcul redevient quadratique lorsque le nombre de faces ou le nombre de rayons devient majoritaire sur l'autre paramètre. On constate par ailleurs qu'en fixant un nombre important de rayons le temps de calcul ne dépendra pas du nombre de faces du maillage. Cela est encourageant dans le cadre du théâtre d'Orange puisque des surfaces plus détaillées pourront être implementées sans grand impact sur le temps de calcul.

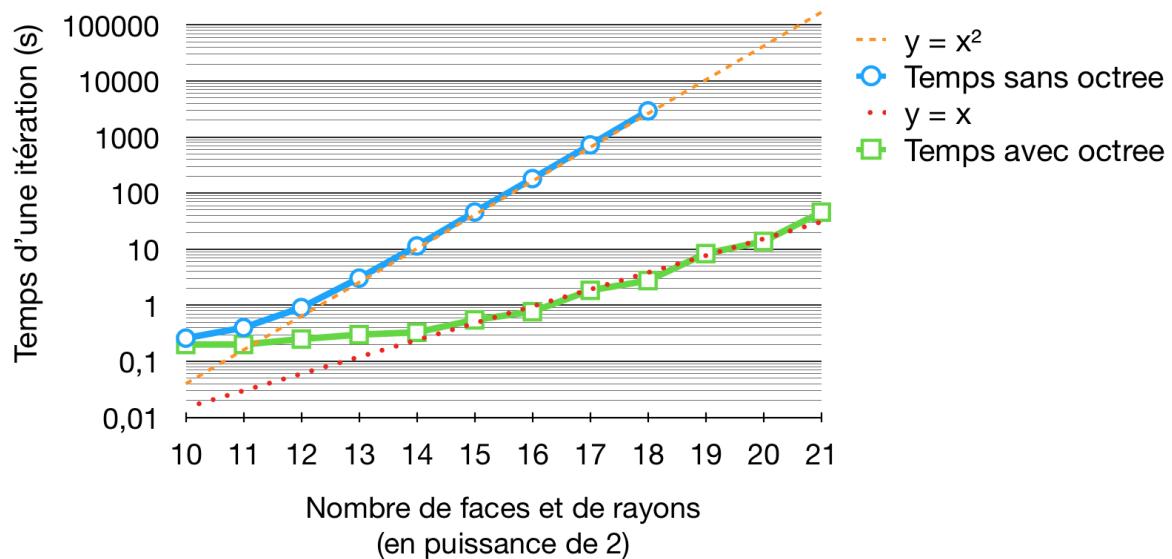


FIGURE 6.7 – Temps de calcul (s) d'une itération en fonction du nombre de rayons et de faces avec $N=M$ (échelle log)

Nombre de faces et de rayons	Temps sans <i>octree</i> (s)	Temps avec <i>octree</i> (s)
2^{10} (=1 024)	0,26	0,2
2^{11} (=2 048)	0,4	0,2
2^{12} (=4 096)	0,91	0,25
2^{13} (=8 192)	3,05	0,3
2^{14} (=16 384)	11,44	0,33
2^{15} (=32 768)	46,02	0,55
2^{16} (=65 536)	181,61	0,77
2^{17} (=131 072)	725,17	1,85
2^{18} (=262 144)	2927,9	2,76
2^{19} (=524 288)	X	8,36
2^{20} (=1 048 576)	X	13,78

TABLEAU 6.1 – Temps de calcul (s) d'une itération pour $N=M$

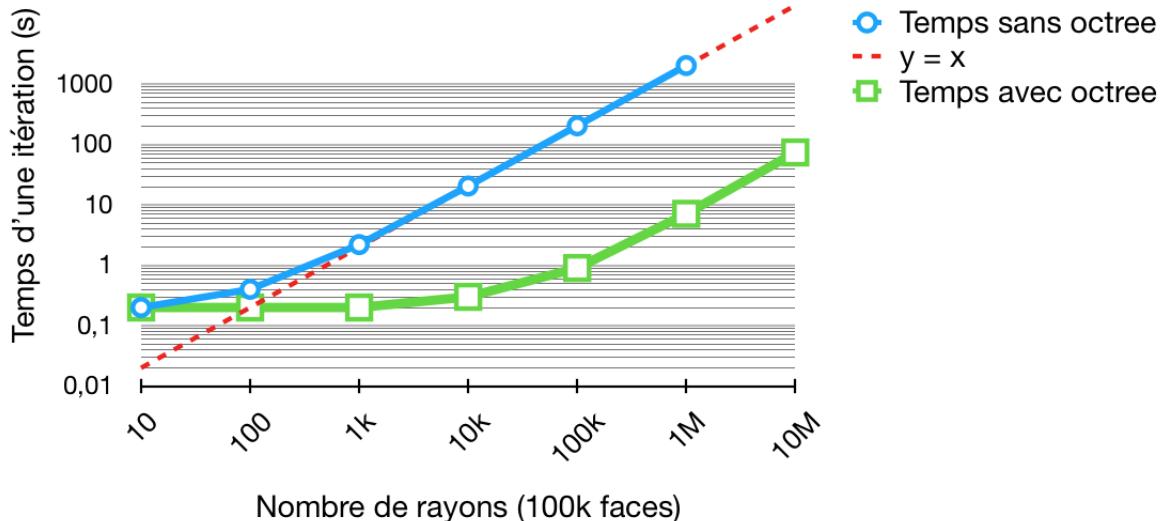


FIGURE 6.8 – Temps de calcul (s) d'une itération en fonction du nombre de faces pour 100k rayons (échelle log)

Nombre de faces	Temps sans octree (s)	Temps avec octree (s)
12	0,3	0,3
48	0,6	0,4
192	1,2	0,5
768	3,55	0,5
3072	13,2	0,6
12288	51	0,7
49152	203,6	0,9
196608	808,2	1,1
786432	X	1,7
3145728	X	6,1

TABLEAU 6.2 – Temps de calcul (s) d'une itération pour 100k rayons

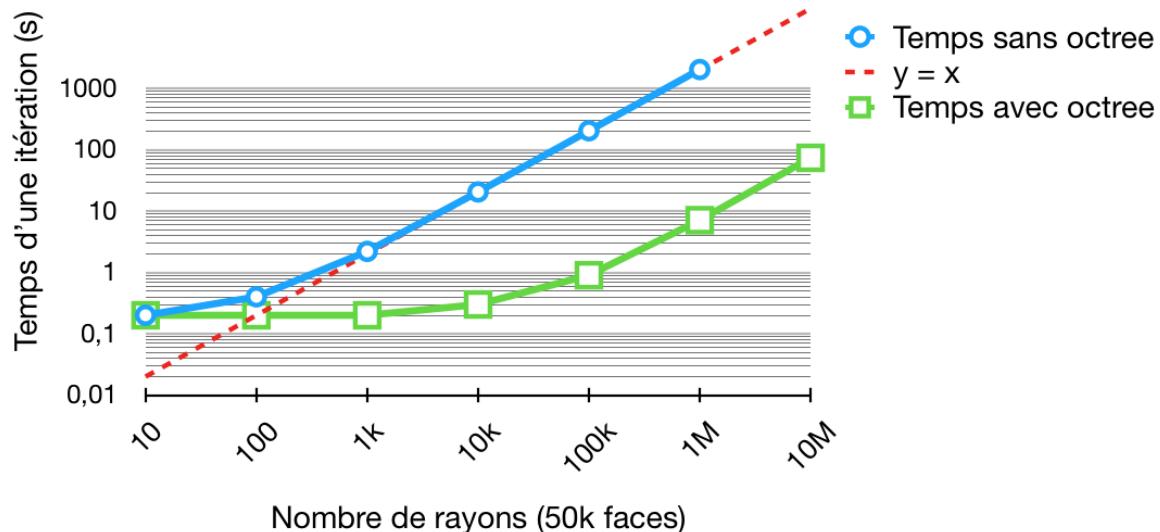


FIGURE 6.9 – Temps de calcul (s) d'une itération en fonction du nombre de rayons pour 50k faces (échelle log)

Nombre de rayons	Temps sans octree (s)	Temps avec octree (s)
10	0,2	0,2
100	0,4	0,2
1k	2,2	0,2
10k	20,5	0,3
100k	203,6	0,9
1M	2026	7,1
10M	X	73,7

TABLEAU 6.3 – Temps de calcul (s) d'une itération pour 50k faces

Chapitre 7

Validation

« *L'observateur modifie ce qu'il observe. Certains événements ne se produisent que parce qu'ils sont observés. Sans personne pour les voir ils n'existeraient pas.* »

Bernard Werber

Sommaire

7.1 Analyse visuelle	100
7.1.1 Propagation de rayons	100
7.1.2 Boite englobante	101
7.1.3 Rayons captés	101
7.2 Décroissance quadratique	102
7.3 Cas de la salle sphérique	103
7.4 Cas de la salle cubique	104

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons détaillé le fonctionnement de l'algorithme conçu pour analyser l'acoustique d'une salle. La méthode utilisée couple les principes de lancer de rayons, de sources-images et d'extrapolation stochastique. Elle vise à répondre aux problématiques de calcul acoustique en environnement complexe de manière géométrique et discrétisée. Géométrique, car seuls les effets de réflexion et absorption sont pris en compte et discrétisée car l'énergie d'onde n'est pas portée par une sphère mais par un grand nombre de rayons repartis de manière uniformes. Ainsi, il est essentiel de confirmer la justesse de ses approximations en les confrontant à des modèles théoriques. Dans ce chapitre, nous allons valider l'algorithme d'un point de vu physique et analyser ses performances. Nous allons donc choisir salles bien particulières afin d'effectuer cette validation de manière expérimentale. Tout d'abord nous vérifierons le bon comportement des rayons grâce à une analyse visuelle. Ensuite nous validerons la mesure d'un point de vu physique en comparant des réponses impulsionales obtenue avec des résultats théoriques.

7.1 Analyse visuelle

7.1.1 Propagation de rayons

Avant de tester la justesse des résultats d'un point de vu physique, il est bon d'en vérifier la justesse géométrique. Ainsi, nous analysons si les rayons ne traversent pas les parois et que la boîte englobante assure bien son rôle. Pour cela, nous importons les rayons générés par notre logiciel dans des configurations de salles simples. En propagant les rayons dans un petit labyrinthe nous confirmons qu'ils s'arrêtent bien à la paroi la plus proche et qu'ils sont ainsi contenus à l'intérieur de la salle.

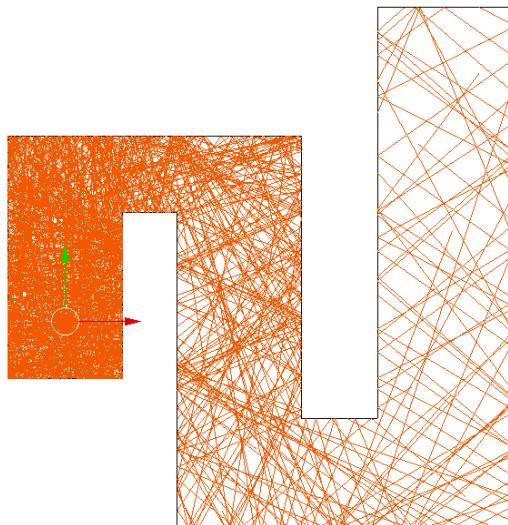


FIGURE 7.1 – Propagation des rayons dans un labyrinthe

7.1.2 Boite englobante

De la même manière nous confirmons le bon fonctionnement de la boîte englobante en utilisant une salle cubique dont on n'a gardé que les coins. On voit sur la figure 7.2 que les rayons sont bien stoppés par une paroi invisible. Par ailleurs en effectuant une rotation de 45° sur chacun des axes on constate bien que la boîte invisible englobe la salle.

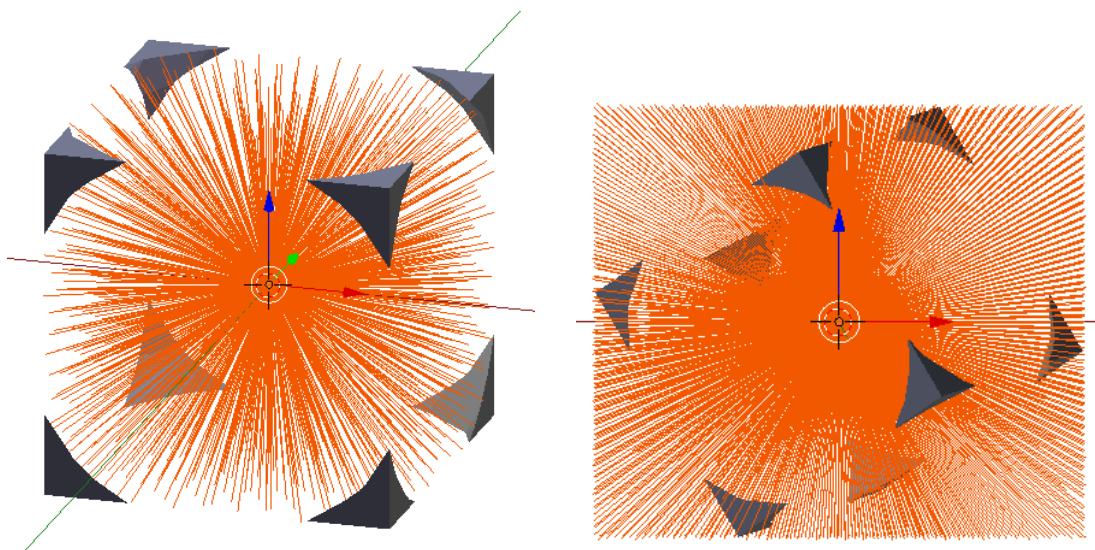
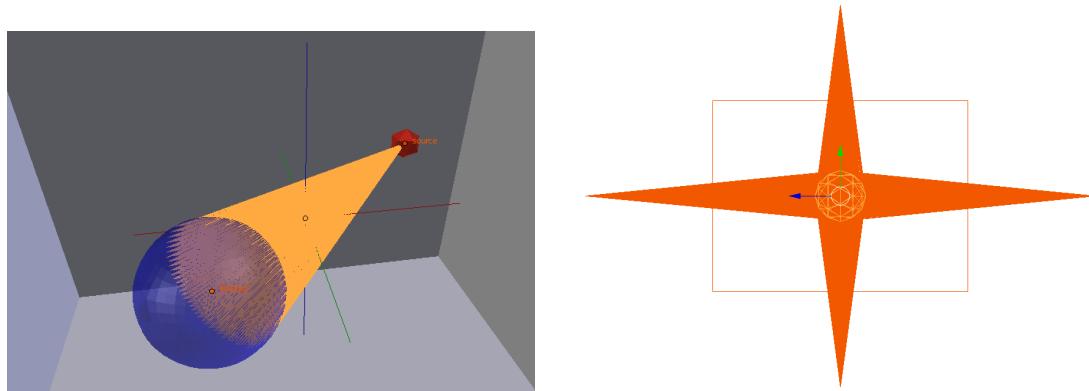


FIGURE 7.2 – Absorption des rayons par une boîte englobante

7.1.3 Rayons captés

Nous vérifions finalement que les rayons captés par le récepteur sont bien portés par des cônes. Pour cela nous affichons sur blender uniquement les rayons générant une source image et les traçons depuis celle-ci.



(a) Propagation des rayons depuis la source vers le récepteur.

(b) Propagation des rayons depuis les sources-images vers le récepteur à l'ordre 1.

FIGURE 7.3 – Visualisation des rayons captés par le récepteur à l'ordre 0 et 1 récepteur (100000 rayons au total)

7.2 Décroissance quadratique

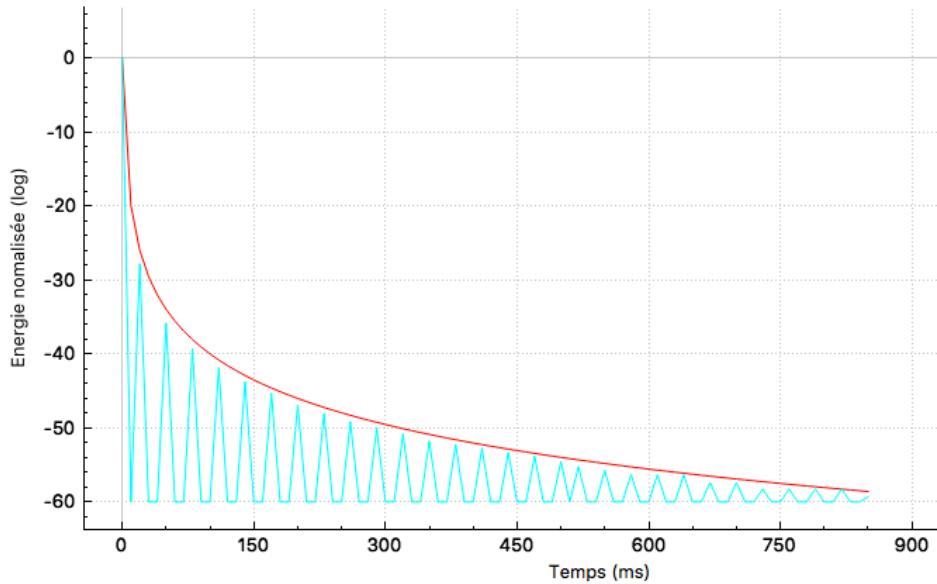


FIGURE 7.4 – Réponse impulsionnelle en espace libre pour 3 millions de rayons (bleu) échantillonnée à 100Hz et fonction $f(x) = \frac{2}{x^2}$ (rouge)

Suite à ces vérifications préliminaires, le premier test à réaliser pour analyser le comportement physique de l'algorithme est celui décrit dans la section 5.1. Il s'agit de vérifier si l'utilisation d'un grand nombre de rayons et d'un récepteur de diamètre fixe permet de retrouver la loi de décroissance en d^2 . Effectivement :

$$\frac{n}{N} = \frac{\int_s dS}{\int_\sigma dS} = \frac{\pi r^2}{4\pi d^2}, \quad (7.1)$$

avec :

- n : le nombre de rayons captés,
- N : le nombre de rayons total,
- s : la surface (disque) constante du récepteur captant des rayons,
- σ : la surface de la sphère d'émission,
- r : le rayon constant du récepteur,
- d : le rayon de la sphère d'émission, autrement dit la distance entre le source-image et le récepteur.

Pour effectuer ce test, nous plaçons une source et un récepteur de rayons 1m au centre d'un cube de 10m de côté. Afin de simuler des mesures en espace libre (c'est à dire sans aucune paroi) où le récepteur s'éloigne de la source, nous allons affecter au cube des matériaux 100% absorbants sur toutes ses parois sauf celles sur l'axe des X qui seront 100% réfléchissantes. Ainsi, cela revient à effectuer une mesure tous les 10m, soit le temps d'aller retour des rayons du centre du cube jusqu'aux parois. N'ayant des réflexions que sur un axe, on reproduit une propagation en espace libre puisque seuls les rayons contenus dans le cône autour de l'axe X conserveront leur énergie. Cependant, les rayons se réfléchissant en X et en -X de manière synchrone, on aura deux fois plus de rayons que si l'on se plaçait en espace libre. Nous pouvons comparer le résultat pour 30 itérations avec la fonction :

$$f(x) = \frac{2}{x^2}.$$

Pour ce test, l'absorption de l'air a été désactivée afin de ne prendre en compte que la décroissance d'énergie portée par les rayons perçus. On observe bien sur la figure 7.4 que l'énergie suit la courbe de décroissance quadratique.

7.3 Cas de la salle sphérique

Le deuxième test consiste à vérifier que l'énergie est bien conservée. Pour cela, nous plaçons une source et un récepteur de diamètre 1m au centre d'une sphère 100% réfléchissante de diamètre 4m. Ainsi à chaque itération, l'ensemble des 1000 rayons revient se croiser au centre de la sphère et sont donc tous captés par le récepteur. Nous obtenons une réponse impulsionnelle de la forme d'une peigne de Dirac (voir fig. 7.5a). L'écart entre chaque pic est de 11,76ms ce qui correspond bien à une distance de 4m parcourue à la vitesse du son fixée à 340m/s. Pour éviter la dispersion des rayons il est nécessaire d'avoir une sphère très bien raffinée. Celle utilisée pour le test possède 320000 triangles. Notons que nous pouvons traiter rapidement ce nombre conséquent de triangles grâce à l'utilisation de l'*octree*. Par ailleurs, la fréquence d'échantillonnage est descendue à 1000Hz pour s'assurer que les sources-images de chaque itération soient parfaitement synchronisées dans le calcul de l'énergie. On pourra par ailleurs importer les sources-images sous Blender et constater qu'elles sont bien réparties sur des sphères dont le diamètre augmente de 4m à chaque itération (voir fig. 7.5b)

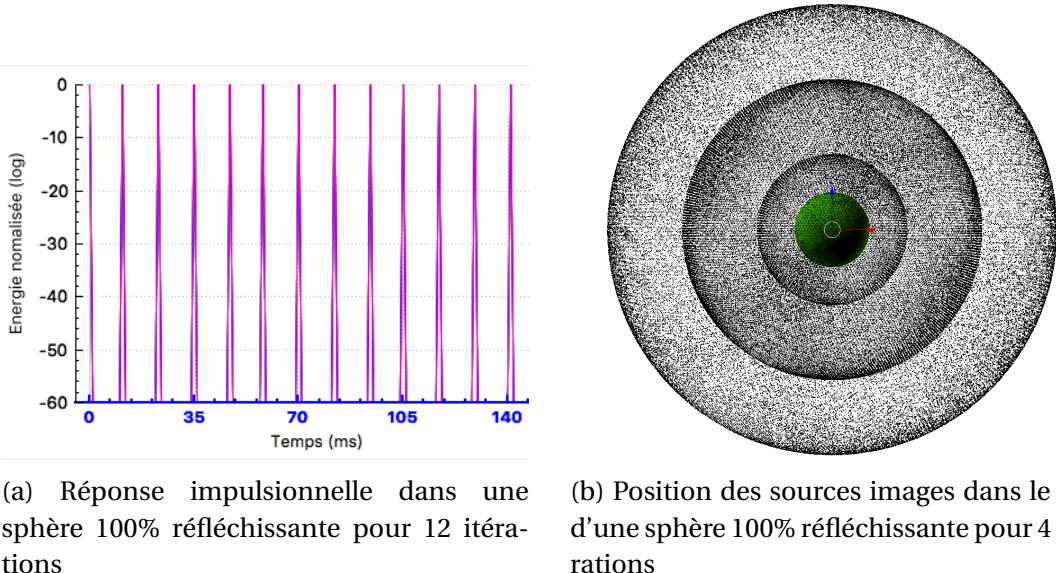


FIGURE 7.5 – Cas d'une sphère 100% réfléchissante

Si l'on active l'absorption de l'air, on constate bien que les hautes fréquences sont plus absorbées que les basses fréquences en fonction de la distance (voir fig. 7.6). Notamment au bout de 1700ms soit 578m, les fréquences à 8kHz ont quasiment totalement été absorbées par l'air, pour une température de 20°C et une pression relative de 50%.

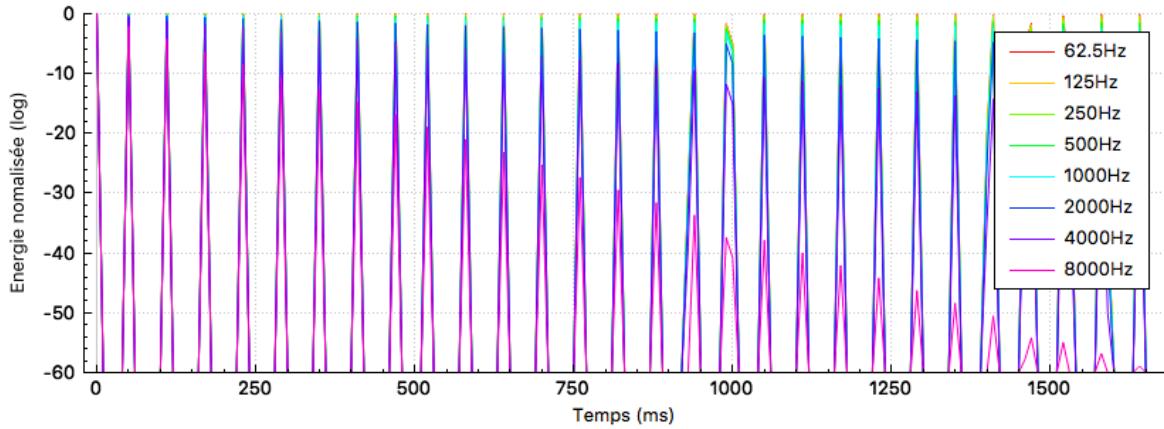


FIGURE 7.6 – Réponse impulsionnelle dans une sphère de 20m de diamètre, 100% réfléchissante, pour 30 itérations avec absorption de l'air

7.4 Cas de la salle cubique

Le dernier test consiste à comparer les résultats de calcul avec une formule analytique pour une pièce de type pavé droit. La formule ¹ est la suivante :

$$P_{si} = i \times D + P_s \times (-1)^i, \quad (7.2)$$

avec :

- $i \in (-n, n)$ et $n \in \mathbb{N}$,
- P_{si} : La coordonnée de la position de la source image selon X, Y ou Z,
- P_s : La coordonnée de la position de la source selon X, Y ou Z,
- D : La dimension de la salle selon X, Y ou Z.

On constate alors qu'on a une superposition parfaite des sources-images dans l'espace (voir fig. 7.7) puisque l'écart des positions des sources-images expérimentales obtenues par lancer de rayons et les sources-images théoriques obtenues par formule analytique est inférieur à la précision machine (soit 10^{-6} m pour des float). On mesure également l'erreur relative des énergies source-image par source-image en prenant comme valeur théorique $\frac{1}{d^2}$ où d est la distance de la source-image au récepteur. On a alors :

$$\epsilon_{rel} = \frac{|D_{exp} - D_{theo}|}{D_{theo}} \quad (7.3)$$

On note que la salle est un pavé dont les dimensions sont respectivement 2m, 3m et 4m sur les axes X, Y, Z. d'arrête, que le récepteur a un diamètre de 40cm et qu'il n'est pas superposé à la source. On peut observer que l'erreur moyenne est inférieure à 1% avec des pics pouvant aller jusqu'à 3%. Par ailleurs étant donné que plus les sources-images sont éloignées moins leur énergie sera importante, autrement dit elles seront moins entendues par l'auditeur, on peut résonner avec la norme infinie telle que :

$$\epsilon_{\infty} = \frac{|D_{exp} - D_{theo}|}{\max(D_{theo})} \quad (7.4)$$

1. [McGOVERN, 2009, p. 182-189]

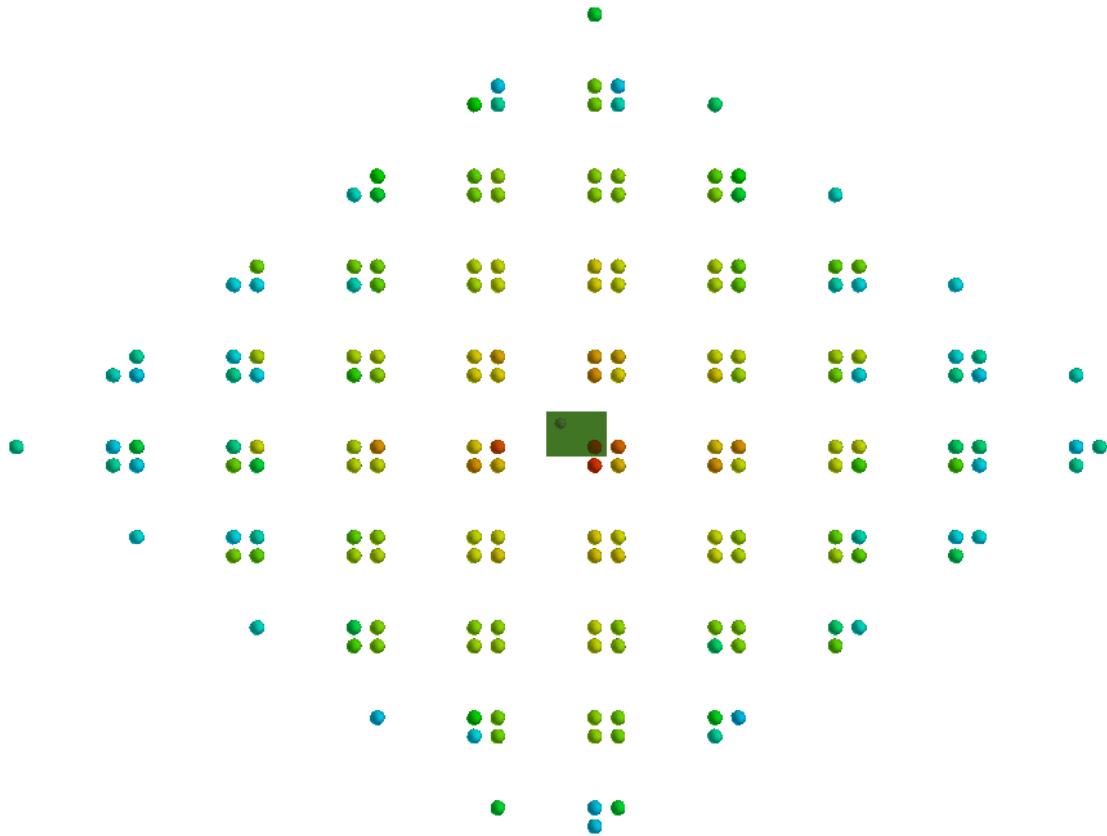


FIGURE 7.7 – Position des sources-images pour une salle cubique, 10 itérations

On constate alors une erreur relative inférieure à 0,5% pour 1 000 000 de rayons (voir fig. 7.8b). On voit également qu'en augmentant le nombre de rayons on améliore la précision des 150 premières sources-images et les 1300 sources-images suivantes reste bien dans une plage d'erreur inférieures à 5% (voir fig. 7.8c) et 0,2% en norme infinie (voir fig. 7.8d).

Dans un second temps, on assigne à chacune des six faces de la salle parallélépipédique des coefficients d'absorption différents. On met à jour les énergies des sources-images théoriques par la formule suivante :

$$E_{si} = \frac{1}{d} \times \prod_{j=0}^6 (1 - a_j^{\alpha_j}), \quad (7.5)$$

avec :

- a_j : les coefficient d'absorption de la j-ème paroi,
- $\alpha_j = 0,5i - 0,25b + 0,25b(-1)^i$,
- $i \in (-n, n), n \in \mathbb{N}$,
- $\begin{cases} b = 1 & \text{si } X_j \geq 0, \\ b = -1 & \text{si } X_j < 0, \end{cases}$
- X_j : les coordonnées selon [x, -x, y, -y, z, -z].

On constate que l'erreur relative source-image par source-image ainsi que l'erreur en norme infinie restent bien inférieures aux valeurs indiquées précédemment (voir fig. 7.9a et 7.9b). De la même manière, on implemente l'absorption atmosphérique dans le calcul

de l'énergie théorique telle que :

$$E_{si} = \frac{1}{d} \times \prod_{j=0}^6 (1 - a_j^{\alpha_j}) \times e^{-m.d}, \quad (7.6)$$

avec m le coefficient d'absorption décrit dans la section 4.1.3. La température est fixée à 20°C et l'humidité relative à 30%. On obtient encore une fois pour un million de rayons des erreurs relatives sur l'énergie inférieures à 5% (voir fig. 7.10a) et à 0,2% en norme infinie (voir fig. 7.10b).

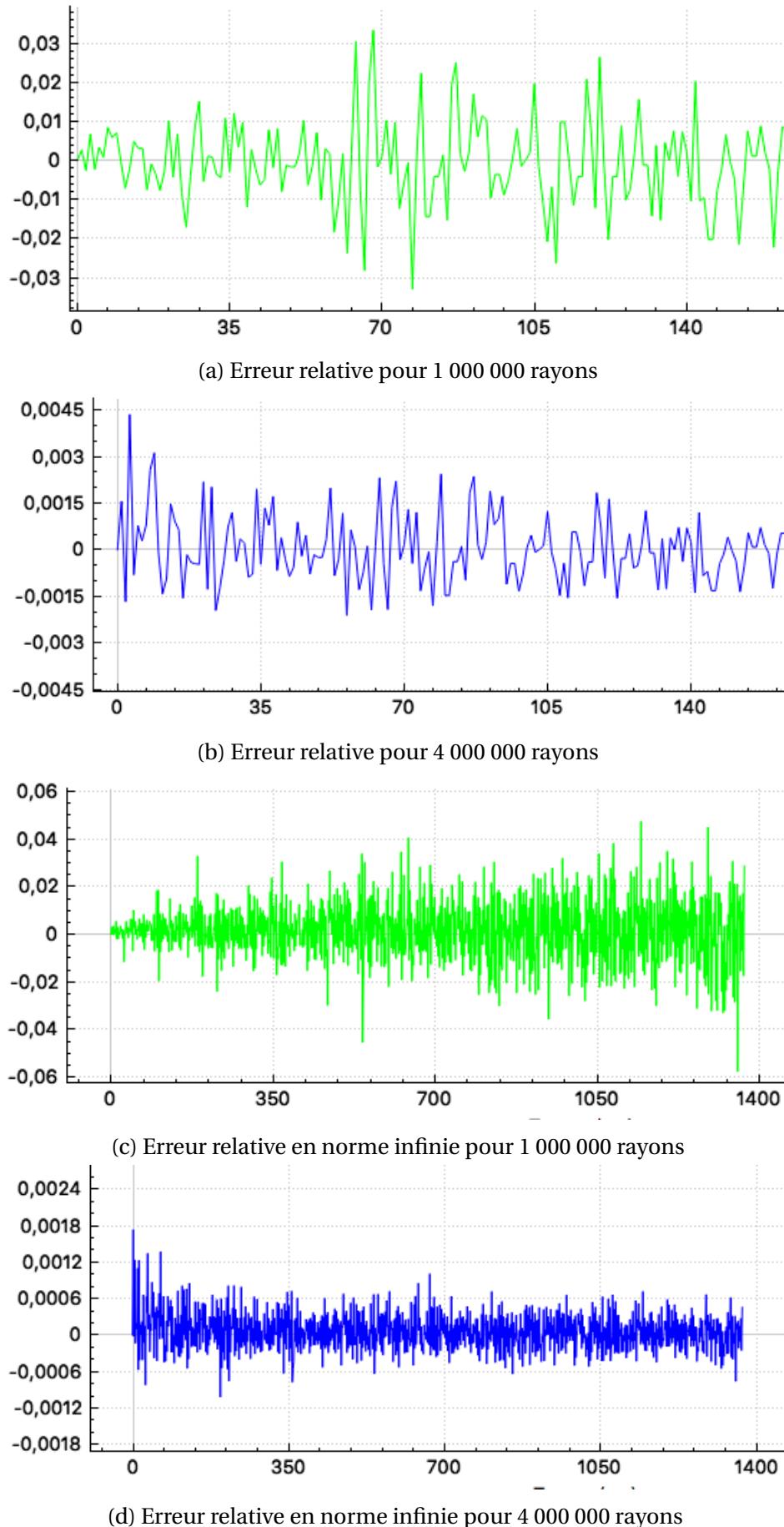
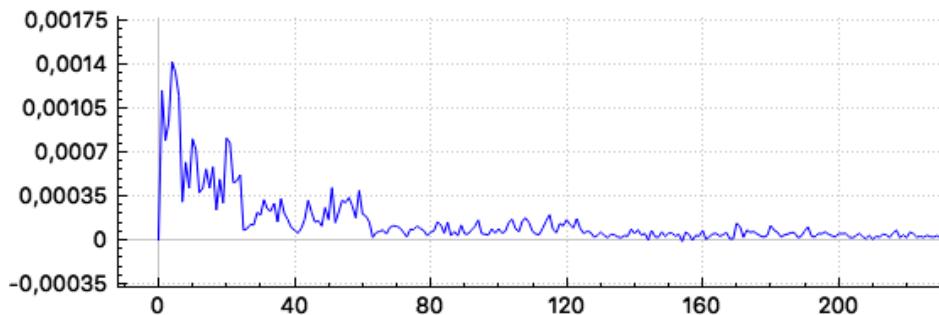


FIGURE 7.8 – Erreur relative des énergies des sources-images dans une salle parallélépipédique

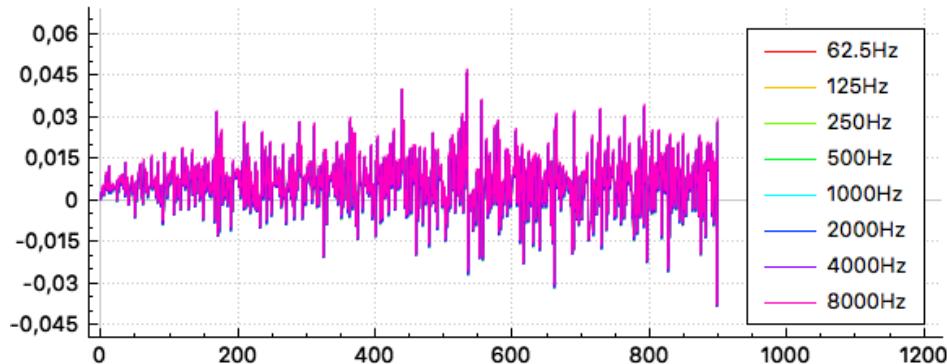


(a) Erreur relative

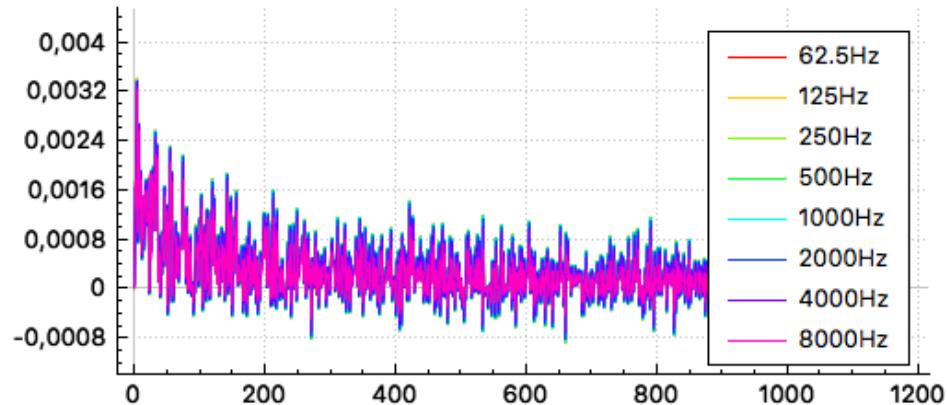


(b) Erreur relative en norme infinie

FIGURE 7.9 – Erreur relative des énergies des sources-images dans une salle parallélépipédique avec absorption des parois pour 4 000 000 rayons



(a) Erreur relative avec absorption de l'air



(b) Erreur relative en norme infinie

FIGURE 7.10 – Erreur relative des énergies des sources-images dans une salle parallélépipédique avec absorption de l'air pour 1 000 000 rayons

Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté les problématiques soulevées par une étude acoustique d'un monument antique. La géométrie complexe de ce type de bâtiment et leur taille colossale impose l'utilisation de méthodes de calcul approchées. Ainsi, par simulation des réflexions et absorptions des parois, il est possible d'étudier la réverbération d'une salle. Malgré les approximations inéluctables du modèle, nous avons prouvé que les lois de la physique sont respectées. Un algorithme rapide a été mis en place pour permettre aux utilisateurs de tester facilement et rapidement leurs hypothèses architecturales. Ainsi, le temps de calcul devient peu sensible aux nombres d'éléments du maillage ce qui est souvent limitant dans ce genre d'étude. Le fonctionnement de l'algorithme développé a été présenté en détail de même que les différents outils d'analyse qui en découlent. Celui-ci permet l'étude du graphe temporel de réverbération du bâtiment ainsi que la position dans l'espace des différentes réflexions sonores (voir fig 7.11). Ces ré-

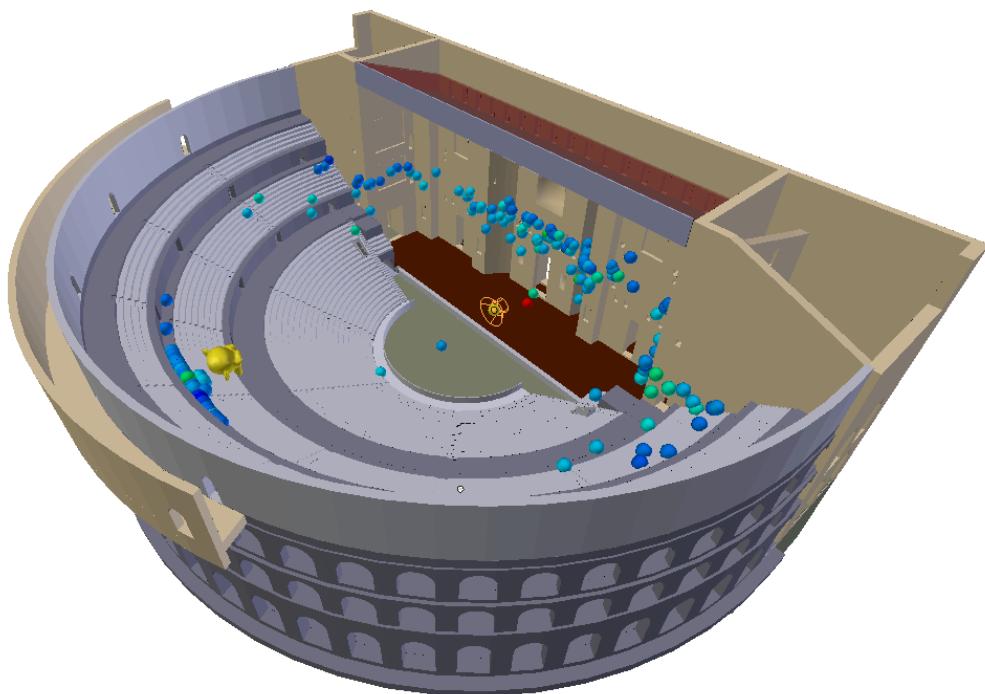


FIGURE 7.11 – Représentation des réflexions des rayons sonores par projection des sources-images dans le théâtre d'Orange

sultats pourront aussi être analysés à l'oreille en écoutant le son réverbéré émis depuis une ou plusieurs sources et entendu par un auditeur virtuel placé dans le bâtiment. La figure 7.12 présente de manière synthétique l'architecture logicielle développée au cours du projet.

Cet outil de calcul acoustique s'interface au logiciel Blender dans la continuité de l'étude présentée dans la partie I de ce document. La prochaine partie vise à présenter concrètement comment s'utilise cet outil. Cela sera fait autour de notre projet d'étude du théâtre antique d'Orange. Ainsi, nous tenterons d'analyser des hypothèses archéologiques précises grâce à l'étude acoustique du bâtiment.

Il y a cependant de nombreuses possibilités d'améliorations qui restent à l'étude pour ce type d'outil logiciel. Premièrement, l'écoute du signal sonore pourrait être rendue en trois dimensions grâce à des filtres binauraux. Ceux-ci permettent par l'intermédiaire d'un casque audio de transmettre un signal différent à chacune des deux oreilles afin de donner l'illusion d'espace et de profondeur. Cela est réalisable grâce au calcul de positionnement des sources-images dans l'espace. Tout en restant en position statique, l'auditeur pourra donc orienter son regard selon différentes directions et écouter en temps réel le son changer. Le contrôle de la direction pourrait alors être effectué au clavier ou à l'aide d'un casque avec "*Head Tracker*". En se plaçant en vu subjective dans le modèle 3D de Blender, on peut faire un premier pas vers l'analyse audiovisuelle immersive. Dans un second temps, dans un contexte où la réalité virtuelle prend de plus en plus d'importance dans les applications d'aujourd'hui, on pourrait envisager de déplacer l'auditeur en temps réel et permettre ainsi une visite virtuelle complète du bâtiment.

Du point de vu des résultats d'analyse, il y a de nombreuses améliorations envisageables au niveau graphique. Cela pose certaines questions. Comment visualiser des résultats de calculs acoustiques ? Quelles sont les informations indispensables à recueillir pour un archéologue voulant étudier l'acoustique d'un monument ?

De la même manière, est-il essentiel d'ajouter les effets de diffraction au modèle ? Si oui, quelle est la meilleure méthode ? Pourrait-on traiter de manière locale certains comportements acoustiques et les insérer ensuite dans le modèle par lancer de rayons ? Typiquement, pourrait-on analyser par méthode de résolution exacte (voir section 4.2.2) le comportement acoustique d'une colonne, ou de tout autre ornement avec un fort niveau de détail, puis de l'incorporer de manière analytique dans l'outil de lancer de rayons ? Ou bien, peut-on résonner avec des résolutions exactes pour les faibles fréquences et conserver notre approche par méthode couplées pour les hautes fréquences ?

Pour finir, nous l'avons déjà évoqué dans la section 5.3, mais il serait également intéressant d'utiliser des sources dont la directivité n'est pas uniforme. Cela serait d'ailleurs plus représentatif des cas réels et notamment de l'usage fait à Orange à l'origine du théâtre. Les sons étaient alors émis par des instruments de musique ou par la voix humaine éventuellement amplifiée par un masque.

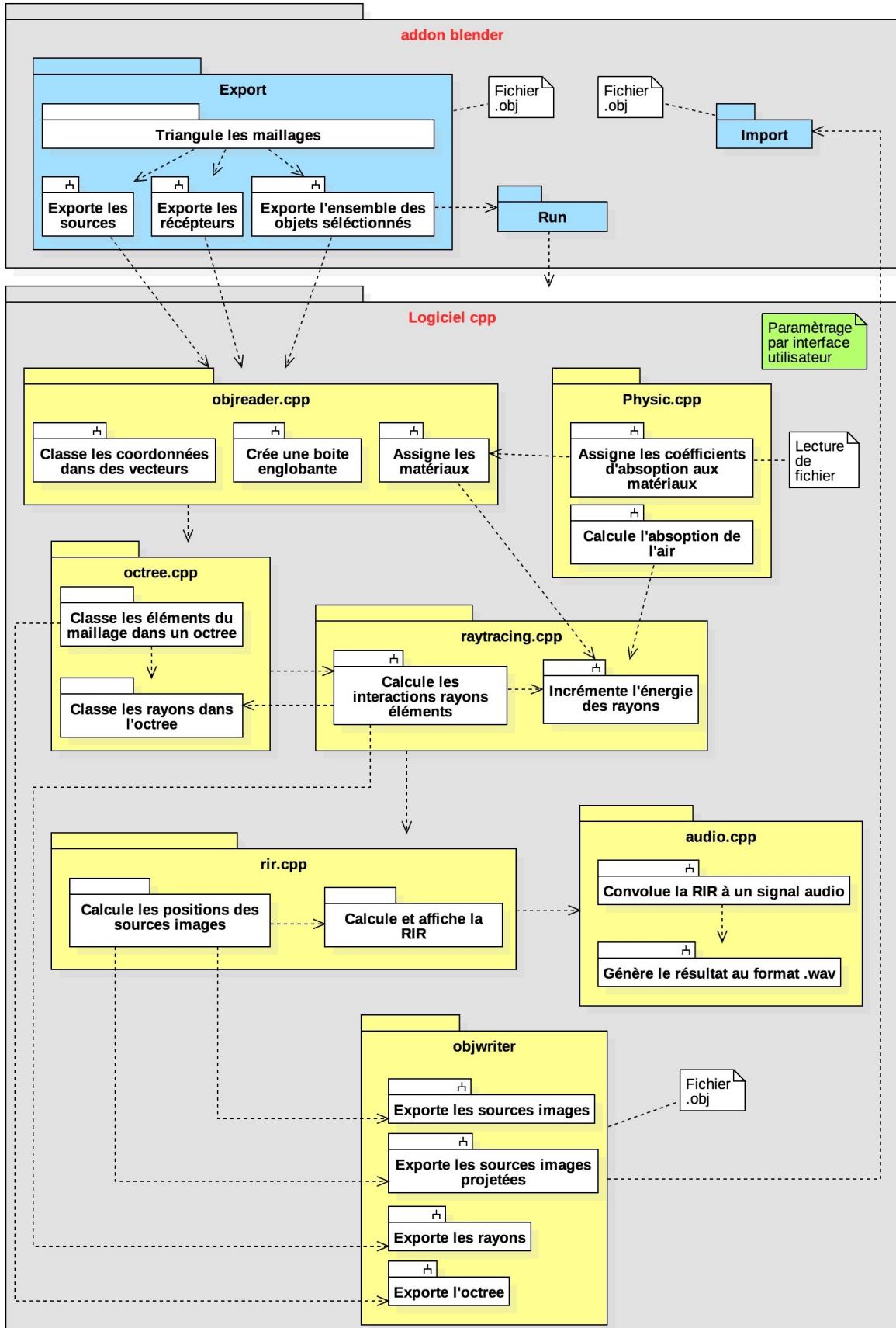


FIGURE 7.12 – Synopsis de l'architecture logiciel développé pour le calcul d'acoustique de salle

Références

ACOUPHILE.FR. 75

ARENBERG, J. 1988, «Ray/triangle intersection with barycentric coordinates», *Ray Tracing News*, vol. 1, n° 11. 78

AUSSAL, M. «Gypsilab github», URL <https://github.com/matthieuaussal/gypsilab>. 70

AUSSAL, M. 2014, *Méthodes numériques pour la spatialisation sonore, de la simulation à la synthèse binaurale*, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique. 64

BADOUEL, D. 1990, «An efficient ray-polygon intersection», *Graphics Gems*. 78

BATTENBERG, E. et R. AVIZIENIS. 2011, «Implementing real-time partitioned convolution algorithms on conventional operating systems», *DAFx-11*. 84

CATT-ACOUSTIC. «Catt-acoustic webpage», URL <http://www.catt.se/>. 65

CEI. 2015, «Ec 60050», Vocabulaire électrotechnique international. 57

D'ALEMBERT, J. L. R. 1747, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettre de Berlin. 63

DAPOGNY, C., C. DOBRZYNISKI, P. FREY et A. FROEHLY. 2004, «mmg github», URL <https://github.com/MmgTools/mmg>. 70

EYRING, C. F. 1930, «Reverberation time in "dead" rooms», *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 1, n° 2A, p. 217–241. 63

FUNKHOUSER, T., N. TSINGOS, I. CARLBOM, G. ELKO, M. SONDHI, J. E. WEST, G. PINGALI, P. MIN et A. NGAN. 2004, «A beam tracing method for interactive architectural acoustics», *Acoustical Society of America*, , n° 115, p. 739–756. 70

ISO-9613-1. 1993, «Acoustics - attenuation of sound during propagation outdoors»,. 59, 60

JOT, J. M. 1992, *Etude et Réalisation d'un Spatialisateur de Sons par Modèles Physique et Perceptifs*, thèse de doctorat, Telecom Paris. 63

JOUHANEAU, J. 1997, *Acoustique des salles et sonorisation, Acoustique appliquée*, vol. 3, Conservatoire national des arts et métiers. 56, 59, 60, 62, 66

KANDELMAN, M. 2007, *Simulation acoustique par la méthode des sources images*, mémoire de maîtrise, Ecole Nationale Supérieur Louis-Lumière. 62, 63, 66

- KEINERT, B., M. INNMANN, M. SANGER et M. STAMMINGER. 2015, «Spherical fibonacci mapping», *ACM Transactions on Graphics*, vol. 34. 77
- KULOWSKI, A. 1985, *Algorithmic representation of the ray tracing technique*, vol. 18, Applied Acoustics. 65
- MCGOVERN, S. 2009, «Fast image method for impulse response calculations of box-shaped rooms», *Applied Acoustics*, vol. 70, n° 1. 104
- MEAGHER, D. 1982, *Octree Generation, Analysis and Manipulation*, vol. TR, Image processing laboratory. 90
- M'HENNI, H. 2010, «L'angle solide correspond à un cône de révolution d'angle au sommet inscrit dans la sphère de projection», Wikipédia. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Angle_solide. 71
- MÖLLER, T. et B. TRUMBORE. 1997, «Fast, minimum storage ray-triangle intersection», *Journal of Graphics Tools*, vol. 2, n° 1, p. 21–28. 78, 79
- ODEON. «Odeon webpage», URL <https://odeon.dk/>. 65, 75
- PICAUT, J. 2005, «Application numérique du concept de particules sonores à la modélisation des champs sonores en acoustique architecturale», CAHIER THÉMATIQUE : MÉTHODES NUMÉRIQUES EN GÉNIE CIVIL, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Centre de Nantes. 65, 66
- PREMAT, E. 2000, *Prise en compte d'effets météorologiques dans une méthode d'éléments finis de frontière*, thèse de doctorat, L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 64, 65
- SABINE, P. 1932, «Acoustics and architecture»,. 62
- SABINE, W. C. 1900, *Architectural Acoustics*, vol. Part I. Reverberation, Reprints of the American Architect. 57, 84
- SALMON, F., M. AUSSAL, É. HENDRICKX, J.-C. MESSONNIER et L. MILLOT. 2017, «Optimization of interactive binaural processing», Audio Engineering Society. 85
- VORLÄNDERA, M. et E. MOMMERTZ. 2000, «Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients», *Applied Acoustics*, vol. 60, p. 187–199. 71
- WIKIPÉDIA. «Angle solide», URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Angle_solide. 73
- WILLIAMS, A., S. BARRUS, R. MORLEY et P. SHIRLEY. 2005, «An efficient and robust ray–box intersection algorithm», *ACM SIGGRAPH*, , n° 9. 93

Annexe A

Annexes

A.1 Figures annexes

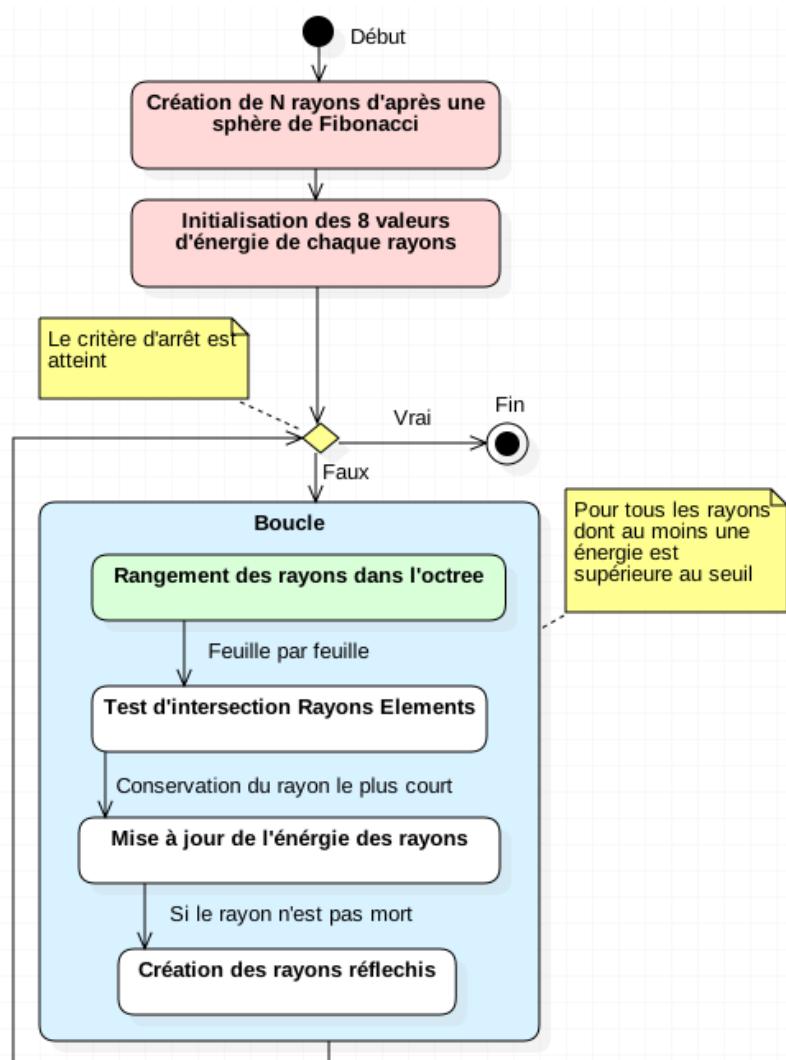


FIGURE A.1 – Diagramme d'activité résumant le processus de création des rayons avec *octree*

A.2 Tableaux annexes

Références

Annexe B

Liste des acronymes

AABB *Axis-Aligned Bounding Box.* [86](#), [87](#)

BEM *Boundary Element Method.* [61](#)

CAO *Conception Assistée par Ordinateur.* [96](#)

CMAP *Centre de Mathématiques Appliquées de l'école Polytechnique.* [68](#)

FDTD Méthode des différences finies (*Finite Difference Time Domain*). [61](#)

FEM *Finite Element Method.* [61](#)

FFT Transformation de Fourier rapide, ou *Fast Fourier Transform.* [98](#)

FIR Filtre à réponse impulsionnelle finie, ou *Finite Impulse Response filter.* [97](#), [98](#)

IHM *Interface Homme-Machine.* [101](#)

ISCD *Institut des Sciences du Calcul et des Données.* [68](#)

OBB *Oriented Bounding Box.* [86](#)

RIR Réponse impulsionnelle d'une salle, ou *Room Impulse Response.* [iv](#), [56](#), [69](#), [72](#), [82](#), [97](#), [98](#)

RT₆₀ Temps de réverbération pour que l'énergie diminue de 60dB : *Reverberation Time at 60dB.* [60](#), [61](#), [72](#), [84](#), [89](#)

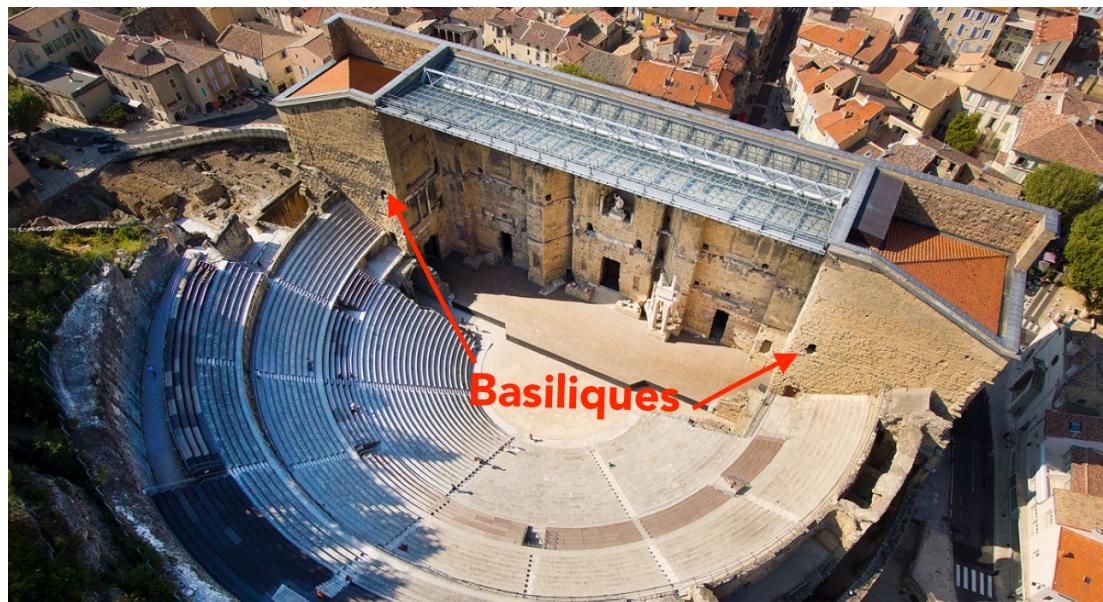
Annexe C

Glossaire

ADITUS Portes conduisant de l'extérieur à l'*orchestra*. [i, iii, VIII](#)

AMBULACRE Galerie circulaire permettant de se déplacer sur la *cavea*. [78](#)

BASILIQUE Large pièce de forme quasi-carré qui flanque le mur de scène et les *parascae-nium*



. [i, iii, VIII](#)

CAVEA Désigne l'ensemble des rangées concentriques composant les gradins. [i, iii, VII, VIII](#)

COMPLEXITÉ Domaine de l'informatique qui étudie la quantité de ressources (temps, espace mémoire, etc) dont a besoin un algorithme pour résoudre un problème. [ii, 83, 84, 88](#)

DIRAC La distribution de Dirac vérifie la propriété fondamentale que, pour toute fonction : $x \mapsto \varphi(x)$ lisse : $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. [62](#)

DIRICHLET Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple :

$$\Delta y + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$y(x) = f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction définie sur la frontière $\partial\Omega$. [62](#)

HYPOSCAENIUM Fosse situé sous la scène comportant notamment le mécanisme du rideau de scène. [78](#)

IMA CAVEA Désigne le premier niveau (niveau inférieur) de la cavea. [iii](#)

MAENIANUM Portions de la cavea séparées par un *podium* et rassemblant un ensemble de gradins. [i](#), [iii](#), [VIII](#)

MODIFIER Outil Blender permettant d'affecter automatiquement à des objets des opérations non-destructives. [iii](#)

NEUMANN Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple :

$$\Delta y + y = 0$$

la condition aux limites de Neumann sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) = f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction scalaire connue définie sur la limite $\partial\Omega$ et \vec{n} est le vecteur normal à la frontière $\partial\Omega$. [62](#)

OCTREE Structure de données de type arbre dans laquelle chaque nœud peut compter jusqu'à huit enfants. En trois dimensions, créer un octree revient à découper une cube en son milieu sur chacun de ses axes.. [iv](#), [53](#), [85](#), [86](#), [88](#), [89](#), [I](#), [II](#)

ORCHESTRA Espace semi-circulaire (chez les romains) ou circulaire (chez les Grecs) se situant entre la scène et le premier gradin. [i](#), [iii](#), [VII](#), [VIII](#)

PARASCAENIUM Espace intermédiaire entre la scène et les **basiliques** comportant des escaliers pour atteindre les niveaux supérieurs. [78](#), [VII](#)

PARODOS Entrée menant à l'*orchestra* traversant les *aditus*. [iii](#)

PARTICULE L'outil physique "Système de Particules" est utilisé lorsque l'on veut émettre quelque chose depuis un objet en quantité importante. Ces particules peuvent ensuite être soumise à des effets physiques pour simuler des cheveux, de la fumée, du feu ou autres. [i](#)

PODIUM Massif de maçonnerie élevé au-dessus du sol et servant de soubassement. [VIII](#)

PORTICUS IN SUMMA CAVEA Arcade bordée de colonnes située au dessus du troisième *maenianum*. [i](#), [iii](#)

POSTSCAENIUM Mur séparant la scène de l'extérieur comportant des salles pouvant servir de coulisses. [i](#), [iii](#)

PULPITUM Ensemble de l'estrade sur lequel jouent les acteurs orné en son front par un petit mur de marbre décoré. [i](#)

VELUM Grande pièce de tissu généralement en lin tirée au dessus de la *cavea* pour protéger les spectateurs du soleil. [i](#)

WAVEFRONT AUDIO FILE FORMAT Le format RIFF, sur lequel repose le format WAV, définit une structure de fichier qui repose sur une succession de blocs de données (chunks).

Chaque bloc est identifié par 4 octets (4 symboles ASCII) suivi de la taille du bloc codé sur 4 octets. Si un lecteur rencontre un bloc qu'il ne connaît pas, il passe au suivant. Un fichier wav doit au minimum contenir un bloc appelé <fmt> (format) et un bloc appelé <data>. Le bloc <fmt> doit être positionné en amont du bloc <data>.

- Le bloc <fmt> contient les métadonnées techniques, c'est-à-dire les informations relatives au codage du flux audio, informations indispensables pour interpréter les données.
- Le bloc <data> contient la charge (payload), c'est-à-dire les données audio utiles.

. 97

WAVEFRONT OBJ Format de fichier contenant la description d'une géométrie 3D. Les fichiers OBJ sont au format ASCII et se présente de la façon suivante :

- Le nom de l'objet est précédé d'un o
- Le nom du matériau est précédé de usemtl (un fichier .mtl accompagne en général les fichier obj)
- Les coordonnées de sommets sont précédés d'un v
- Les coordonnées de textures sont précédés d'un vt
- Les coordonnées de normales sont précédés d'un vn
- Chaque face est ensuite définie par un ensemble d'indices faisant référence aux coordonnées des points, de texture et des normales définies précédemment

. 96