

Table des matières

Introduction	1
I Modélisation du théâtre d'Orange	3
Introduction	5
1 Présentation synthétique de l'architecture du théâtre d'Orange	7
1.1 Le <i>postscaenium</i> , les basiliques et le <i>pulpitum</i>	9
1.2 L' <i>orchestra</i> , les <i>aditi</i> et la <i>cavea</i>	11
1.3 Les couvertures et le <i>velum</i>	14
2 Modélisation	19
2.1 Méthodologie	21
2.2 La <i>cavea</i> et ses substructures	24
2.3 Les <i>maeniana</i>	28
2.4 Les <i>aditi</i> et les tribunes	30
2.5 Le mur de scène et ses basiliques	31
2.6 Le <i>pulpitum</i> et l' <i>orchestra</i>	34
2.7 Les couvertures du bâtiment de scène	34
2.8 La <i>porticus in summa cavea</i>	36
2.9 Les escaliers	37
2.10 La colline Saint-Eutrope	38
3 Applications	41
3.1 Le <i>velum</i>	42
3.2 Le rideau de scène	44
3.3 Les systèmes de particules	44
3.4 Autres projets ayant utilisé le modèle	45
Conclusion	47
Références	50
II Calculs acoustiques	51
Introduction	53
4 Acoustique de salle	55
4.1 Généralités sur l'acoustique de salle	56
4.2 Méthodes de calcul acoustique	60

5 Développement d'une méthode couplée	67
5.1 Notion d'onde sphérique discrétisée	69
5.2 Environnement géométrique	73
5.3 Calcul des rayons	74
5.4 Calcul des sources-images	79
5.5 Génération de réponse impulsionale	81
6 Optimisation algorithmique	83
6.1 Méthode d'octree	85
6.2 Analyse des résultats	90
7 Logiciel développé	93
7.1 Validation	95
7.2 Interface utilisateur	98
8 Traitement du signal	101
8.1 Convolution partitionnée	102
8.2 Signal binaural avec head-tracker	103
Conclusion	105
Références	110
III Analyse acoustique du théâtre d'Orange	107
Introduction	109
8 Configuration initiale	111
8.1 Configuration du maillage	112
8.2 Les matériaux	112
8.3 RIR du théâtre d'Orange	112
9 Test de configurations	113
9.1 position des spectateurs	114
9.2 Présence de spectateurs	114
9.3 Présence de velum	114
9.4 Forme et matériaux du toit	114
10 Comparaison avec d'autres théâtres antiques	115
Conclusion	117
Références	119
A Annexes	I
A.1 Figures annexes	I
A.2 Tableaux annexes	II
B Liste des acronymes	V
C Glossaire	VII

Liste des figures

1 Théâtre d'Orange avant restauration	6
1.1 Vue d'ensemble du théâtre d'Orange	8
1.2 Perspective d'une section de la fosse du rideau de scène au théâtre de Lyon	11
1.3 Vue de dessus - 1er niveau	13
1.4 Vue de dessus - 2ème niveau	13
1.5 Vue de dessus - 3ème niveau	14
1.6 Toitures de basiliques par A.Badie	15
2.1 Illustration de quatre exemples de modifier Blender	23
2.2 Modélisation de la <i>cavea</i>	24
2.3 Modélisation des <i>maenianum</i>	28
2.5 Modélisation de l' <i>aditus</i> occidental et de sa tribune	30
2.6 Modélisation du <i>postscaenium</i> et de ses basiliques	32
2.7 Modélisation de la scène, l' <i>orchestra</i> et le sol des <i>parodos</i>	34
2.8 Modélisation des couvertures de scène et des basiliques	35
2.9 Modélisation de la <i>porticus in summa cavea</i>	36
2.10 <i>Parodos</i> oriental et entrée menant à l' <i>ima cavea</i>	38
4.1 Les différents comportements d'une onde lorsqu'elle rencontre une paroi	56
4.2 Réponse temporelle d'une impulsion sonore dans une salle	57
4.3 Représentation de la répartition du flux énergétique dans la propagation d'une onde sphérique	58
4.4 Courbes d'absorption de l'air en fonction de l'humidité relative (%)	60
4.5 Schéma général pour l'établissement de la représentation de Green	63
4.6 Vu 2D de la propagation d'une onde sphérique dans une salle rectangulaire	64
4.7 Différentes constellations de salle : la densité de sources reste constante	66
5.1 Comparaison d'un théâtre simplifié avec gradins coniques ou gradins cubiques par méthode des éléments finis de frontière à 50Hz	69
5.2 Représentations du principe de mesure de l'angle solide	70
5.3 Schéma d'un récepteur captant au moins un rayon.	71
5.4 Représentation d'un maillages surfacique à faces triangulaires composé d'une salle et d'un obstacle et dont les normales (en bleu) sont orientées vers l'intérieur de la salle.	73
5.5 Illustration d'une boite englobant un maillage quelconque (Suzanne)	74
5.6 Diagramme d'activité résumant le processus de création des rayons	75
5.7 Sphères permettant l'émission omnidirectionnelle de rayons	76
5.8 Calcul d'un rayon réfléchi à partir d'un rayon incident et d'une normale	79
5.9 Diagramme d'activité résumant le processus de création des sources-images	80

5.11 Exemple de réponse impulsionnelle d'une salle, ou <i>Room Impulse Response</i> (RIR) pour un cube de 50m d'arrête, une source et un récepteur de 20m de diamètre situés au centre, un million de rayons et une fréquence d'échantillonnage de 44100Hz	82
6.1 Courbe de complexité donnant le temps (s) d'une itération pour N=M en échelle logarithmique	84
6.2 Courbes de complexité donnant le temps (s) d'une itération en échelle logarithmique	85
6.3 Illustration du principe d'octree. Subdivision d'un cube en "octants" (gauche) et l'arbre correspondant (droite)	86
6.4 Suzanne triée dans un octree	86
6.5 Diagramme d'activité résumant le processus de création d'un arbre d'octree	88
6.6 Illustrations de l'intersection Rayon/Boite en 2D	89
6.7 Courbe de complexité donnant le logarithme du temps (s) d'une itération pour N=M	91
6.8 Courbes de complexité donnant le temps (s) avec et sans octree d'une itération en échelle logarithmique	92
7.3 Réponse impulsionnelle en espace libre pour 3 millions de rayons (bleu) échantillonnée à 100Hz et fonction $f(x) = \frac{2}{x^2}$ (rouge)	96
7.5 Réponse impulsionnelle dans une sphère de 20m de diamètre, 100% réfléchissante, pour 30 itérations avec absorption de l'air	97
7.7 Add-on Blender et assignation des matériaux	99
8.1 Schéma du processus de convolution partitionnée	102
8.2 Filtres fréquenciers passe-bande	103
8.3 Synopsis de l'architecture logiciel développé pour le calcul d'acoustique de salle	106
A.1 Diagramme d'activité résumant le processus de création des rayons avec octree	I

Liste des tableaux

5.1 Exemples de coefficients d'absorption de la base de données Odéon	74
6.1 Temps de calcul d'une itération pour 100k rayons	91
6.2 Temps de calcul d'une itération pour 100k rayons	91
6.3 Temps de calcul d'une itération pour 50k faces	91

Deuxième partie

Calculs acoustiques

Introduction

Dans cette partie, nous allons traiter d'acoustique, d'algorithmes et de mathématiques. Chacune de ces disciplines permettra de répondre aux questions suivantes : Pourquoi ? Quoi ? Comment ? Voyons donc ces problématiques une par une.

Pourquoi ? L'objectif de notre projet, maintenant que nous disposons d'une maquette virtuelle du théâtre d'Orange, est d'en étudier l'acoustique. Nous souhaitons simuler, écouter et étudier le son qui était perçu dans ce lieu il y a deux mille ans. Outre le fait d'acquérir ces données, nous avons vu que les restitutions de certaines parties du théâtre était plus ou moins hypothétiques. Nous pourrons comparer ces différentes tentatives de restitution et en mesurer l'impact visuel mais également auditif. Les rares écrits antiques et les récentes études acoustiques sous-entendent que les Romains, et avant eux les Grecs, se basaient énormément sur la physique des matériaux et la géométrie des monuments pour optimiser la propagation sonore. Nous allons donc tenter d'apporter notre pierre à l'édifice au sujet de cette question. L'une de nos contraintes sera alors d'obtenir des résultats sur l'acoustique selon différentes géométries du bâtiment et divers matériaux. Il faudra également que le temps de calcul de chaque essai soit relativement court afin de pouvoir multiplier les configurations.

Quoi ? Cet objectif nous a amené à développer un outil de calcul numérique répondant à des problématiques précises. Il complète ainsi la première partie de notre projet en s'interfaisant directement au logiciel Blender. Nous pourrons alors facilement étudier la maquette virtuelle du théâtre d'Orange précédemment présentée. Néanmoins, il est important de noter que cet outil est générique. Il pourra donc agir sur différents types de problèmes. Dans cette partie nous verrons quelle méthode de calcul a été retenue et les raisons qui ont poussé à faire ce choix. Effectivement, le théâtre d'Orange est un problème complexe car le maillage comporte plusieurs centaines de milliers d'éléments et sa géométrie peut inclure des surfaces concaves, convexes ou toutes sortes d'obstacles. Les outils présents sur le marché ont des limites par rapport à ce cas d'utilisation. En outre, l'étude se portera aussi sur les moyens d'analyser les résultats. Comment visualiser des résultats acoustiques ? Peut-on, par une écoute d'un signal sonore, conclure des résultats de manière non-équivoque ? Peut-on trouver des méthodes ergonomiques d'analyse ? Pour pouvoir répondre à ces questions, il est primordiale de disposer d'un accès total à la technologie. C'est pourquoi un outil complet a été développé pendant ce projet.

Comment ? Tout code informatique présente une part de calcul, et qui dit calcul, sous-entend mathématiques. Ainsi, nous verrons les méthodes et astuces mathématiques qui ont permis de développer ce programme. Nous détaillerons les notions de lancer de rayons statistique, de sources images spatialisées et de réponse impulsionnelle. Aussi, nous verrons comment sont optimisées les performances par un procédé de "*divide and conquer*" utilisant des *octree*. Un chapitre est également consacré à la validation de l'algorithme en utilisant notamment des méthodes analytiques.

Pour débuter, nous ferons un tour d'horizon de la physique de l'acoustique et plus concrètement dans le cas qui nous concerne, de l'acoustique de salle. Les différentes méthodes permettant d'étudier les lois acoustiques seront présentées ainsi que leurs limites. Nous détaillerons alors les principes physiques utilisés pour notre algorithme avant de passer à la présentation de son architecture et à sa validation. Cette partie présente l'outil dans son contexte général et l'application au théâtre d'Orange sera faite dans la partie suivante.

Chapitre 4

Acoustique de salle

« *La musique, c'est 50% d'un film.* »

Georges Lucas

Sommaire

4.1 Généralités sur l'acoustique de salle	56
4.1.1 Notion de réverbération	56
4.1.2 Notion de flux d'intensité acoustique	57
4.1.3 Absorption atmosphérique	59
4.2 Méthodes de calcul acoustique	60
4.2.1 Principe statistique	60
4.2.2 Méthode de résolution exacte	61
4.2.3 Méthodes géométriques	64

4.1 Généralités sur l'acoustique de salle

4.1.1 Notion de réverbération

L'acoustique de salle est une discipline à part entière qui consiste principalement à étudier la réverbération d'une pièce soumis à une onde sonore. Le principe de cette étude est le suivant : il s'agit en général de placer une source sonore à l'intérieur d'une salle, fermée ou non, et de la faire rayonner dans toutes les directions. L'onde se propage alors jusqu'aux parois et subit un phénomène de diffusion. Il s'agit en réalité d'une combinaison de trois phénomènes : la réflexion, la réfraction et la diffraction (fig. 4.1). Par réfraction on entend la notion d'absorption suivant les lois de Descartes sur la propagation entre deux milieux¹. La diffraction quant à elle opère lorsque la longueur d'onde est proche de la taille de l'obstacle. L'interaction entre une onde sonore et une paroi ou un obstacle dépend donc de leur forme et la nature de leur matériau.

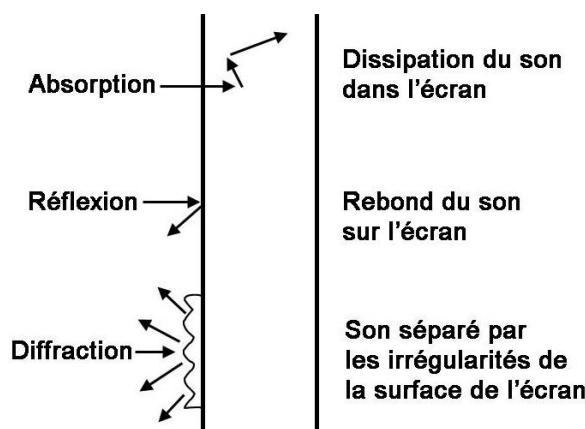


FIGURE 4.1 – Les différents comportements d'une onde lorsqu'elle rencontre une paroi²

En se plaçant en un point à l'intérieur de la salle, on pourra alors recevoir un signal sonore comme étant la somme d'un champ direct et d'un champ réverbéré. Le son direct provient directement de la source sans avoir touché aucune surface. Le son réverbéré se distingue en deux catégories : les premières réflexions dont l'ensemble forment la texture du son et le champ diffus qui peut être assimilé à une somme infinie d'ondes se propageant dans toutes les directions³. On comprend alors que les principaux facteurs qui vont influer sur l'acoustique perçue dans une salle sont : la source sonore, le milieu de propagation et la nature des parois et des obstacles.

La figure 4.2, illustrant la RIR, montre que l'information perçue est une succession d'ondes sonores arrivant décalées dans le temps. Si l'écart entre ces ondes est long, alors d'auditeur pourra les différencier et entendra le phénomène d'écho. Au contraire, si l'écart est suffisamment restreint et que les ondes sont mélangées au moment d'arriver à l'auditeur, alors celui-ci n'entendra qu'un son prolongé dont l'intensité diminue. Il s'agit de la réverbération⁴.

1. [JOUHANEAU, 1997, p. 3]

2. [AQUATERRA, Chap. 1]

3. [JOUHANEAU, 1997, p. 9]

4. [SABINE, 1900, p. 39]

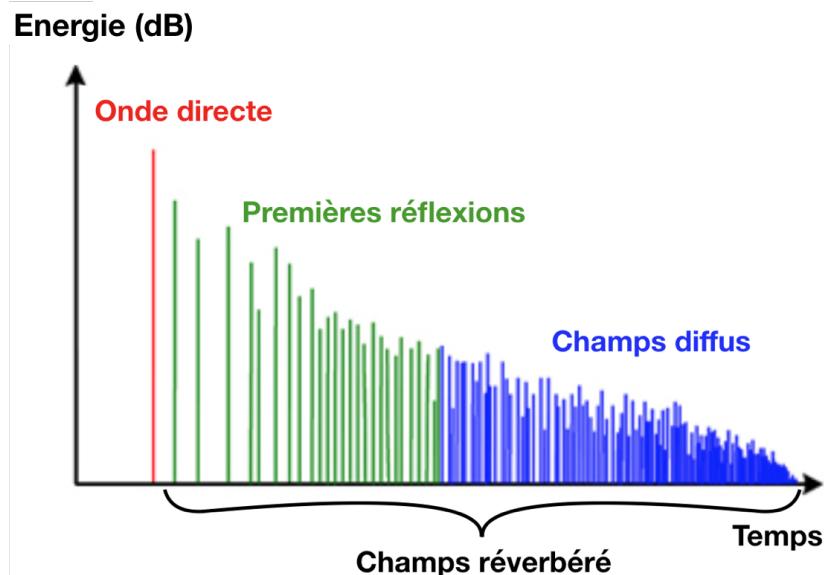


FIGURE 4.2 – Réponse temporelle d'une impulsion sonore dans une salle

4.1.2 Notion de flux d'intensité acoustique

On définit par intensité acoustique la puissance transportée par les ondes sonores, par unité de surface, mesurée perpendiculairement à la direction de ce transfert⁵. Cette notion permet d'étudier le son perçu par les humains en reliant à la pression acoustique qui va s'exercer de proche en proche dans l'air jusqu'à atteindre le tympan. Ainsi, la puissance sonore transportée par l'onde acoustique sera mesurable en un point de l'espace. Toute la puissance sonore mesurée en un point a une origine (actuelle ou passée) dans un flux d'énergie provenant d'une ou plusieurs directions identifiables. L'intensité acoustique mesure le flux résultant de ces transferts.

L'intensité acoustique est un vecteur ayant pour origine le point de mesure et de même direction que le vecteur vitesse de l'onde. On peut l'écrire comme la moyenne dans le temps de l'intensité acoustique instantannée :

$$\vec{I}(\vec{d}, t) = \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot \vec{v} dt \quad (4.1)$$

Avec :

p : la pression acoustique exprimée en $N.m^{-2}$ ou Pascal (Pa)

\vec{v} : le vecteur vitesse

Le **niveau de pression acoustique ou SPL (Sound Pressure Level)** repère la valeur efficace de la pression acoustique par rapport à une valeur de référence, $20\mu Pa$. On utilise, plutôt que le rapport brut, le décibel, qui représente dix fois son logarithme décimal. Ce repère a été choisi parce que, tout en étant simple et utilisant des nombres ronds, un décibel (une variation de 12 %) représente à peu près la plus faible variation de pression acoustique que les humains puissent distinguer. Le niveau de référence, correspond de la même manière à la pression acoustique (dont l'intensité est de $1pW/m^2$), correspond à un son au seuil de perception des humains. On obtient ainsi un repère pratique où tous les niveaux sont des nombres positifs, et se passent de décimales. On a alors :

5. [CEI, 2015, IEC 60050]

$$L_p = 10 \log_{10} \left(\frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} \right) \quad (4.2)$$

Avec :

L_p : le niveau de pression en dB

p_{eff} : la valeur efficace de pression RMS

$p_{ref} = 20 \mu\text{Pa}$: la référence de pression sonore

Le flux de l'intensité acoustique instantanée à travers une surface sphérique $S(t)$ donnée correspond à l'énergie acoustique $E(t)$ transférée à travers cette surface, à l'instant considéré :

$$E(t) = E_0 \int_{S(t)} \overrightarrow{I}(t) \cdot d\overrightarrow{S} \quad \forall t > 0 \quad (4.3)$$

L'acoustique suit le premier principe de la thermodynamique selon lequel il y a conservation d'énergie. Ainsi :

$$\int_{S(t)} \overrightarrow{I}(t) \cdot d\overrightarrow{S} = 1 \quad \forall t > 0 \quad (4.4)$$

Après intégration sur la surface sphérique, nous pouvons écrire l'intensité acoustique infinitésimale :

$$\overrightarrow{I}(t) = \frac{\overrightarrow{d}(t)}{4\pi d(t)^3} \quad \forall t > 0 \quad (4.5)$$

$$\| \overrightarrow{I}(t) \| = \frac{1}{4\pi d(t)^2} \quad \forall t > 0 \quad (4.6)$$

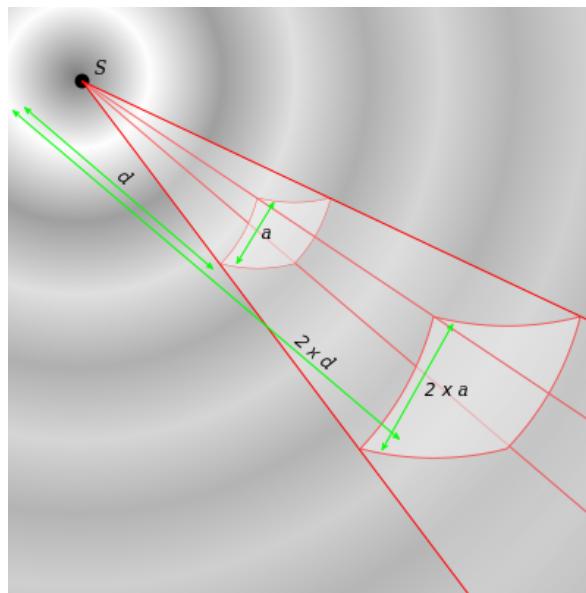


FIGURE 4.3 – Représentation de la répartition du flux énergétique dans la propagation d'une onde sphérique

On comprend que l'intensité décroît comme le carré de la distance et qu'une portion d'énergie considérée va donc être portée par un angle solide (voir fig. 4.3). Sur une portion σ l'énergie est portée par l'angle solide correspondant Ω_σ telle que :

$$E_\sigma(t) = E_0 \int_\sigma \frac{1}{4\pi d(t)^2} dS = \frac{E_0}{4\pi} \Omega_\sigma \quad (4.7)$$

4.1.3 Absorption atmosphérique

Pour se rapprocher d'un modèle réaliste de propagation d'onde, il est important de prendre en compte l'absorption atmosphérique. Ce phénomène est dû à la viscosité et la conduction thermique du milieu ainsi qu'à l'absorption des molécules. Ces effets vont provoquer une décroissance exponentielle de l'énergie d'onde⁶. Selon leur distance parcourue dans l'air, l'intensité acoustique va subir une atténuation en prenant en compte trois facteurs principaux : la température, l'humidité et la pression. La température et la pression atmosphérique de référence sont respectivement de 20°C et 101,325 kPa⁷. Le coefficient d'atténuation dépend de la fréquence du son et peut être obtenue d'après les formules analytiques de la norme ISO-9613-1.

Tout d'abord, nous calculons le facteur d'humidité h correspondant à la concentration molaire de vapeur d'eau⁸ :

$$C_h = 4,6151 - 6,8346 \times \frac{273,15^{1,261}}{T} \quad (4.8)$$

$$h = hum \times 10^{\frac{C_h}{P_r}} \quad (4.9)$$

(4.10)

Avec :

T : La température en Kelvin

P_r : La pression relative ($P_r = \frac{P_{abs}}{101,325}$)

hum : L'humidité relative

Nous exprimons ensuite les fréquences de relaxation de l'oxygène et de l'azote⁹ :

$$fr_O = P_r \times \left(24 + \frac{40400 \times h \times (0,02 + h)}{0,391 + h} \right) \quad (4.11)$$

$$fr_A = \frac{P_r}{\sqrt{T_r}} \times \left(9 + 280 \times h \times \exp^{-4,17 \times \left(\frac{1}{\sqrt{T_r}} - 1 \right)} \right) \quad (4.12)$$

Avec :

T_r : La température relative à 20°C ($\frac{T}{293,15}$)

f : La fréquence en Hz

Nous pouvons alors exprimer le coefficient d'absorption de l'air "abs" en dB/m en fonction de la fréquence¹⁰ :

$$abs(f) = 8,686 \times f^2 \times \left(\frac{1,84 \times 10^{-11}}{P_r} \times \sqrt{T_r} + T_r^{-\frac{5}{2}} \times \left(0,01275 \times \frac{\exp \frac{-2239,1}{T}}{fr_O + \frac{f^2}{fr_O}} + 0,1068 \times \frac{\exp \frac{-3352}{T}}{fr_A + \frac{f^2}{fr_A}}} \right) \right) \quad (4.13)$$

L'énergie de l'onde acoustique est ensuite déterminée par la formule :

6. [JOUHANEAU, 1997, p. 68-70]

7. International Standard Atmosphere

8. [ISO-9613-1, 1993, Annexe B, B.1]

9. [ISO-9613-1, 1993, 6.2, eq. 3 et 4]

10. [ISO-9613-1, 1993, 6.2, eq. 5]

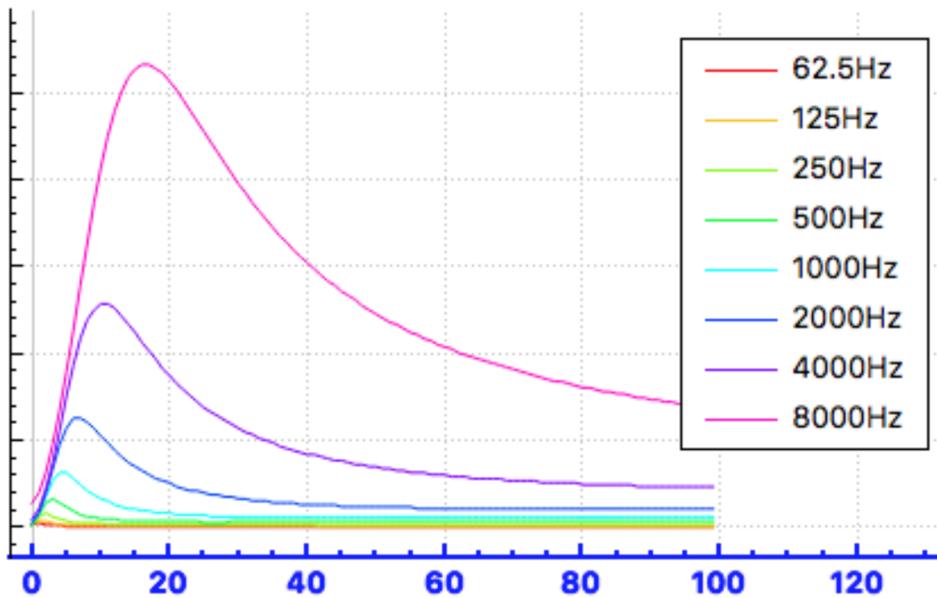


FIGURE 4.4 – Courbes d'absorption de l'air en fonction de l'humidité relative (%)

$$E(f) = E_0 e^{-abs(f).d} \quad (4.14)$$

Avec :

E_0 : l'énergie initiale

d : la distance parcourue par l'onde

4.2 Méthodes de calcul acoustique

Le calcul de l'acoustique d'une salle peut se faire selon différentes méthodes. Nous allons succinctement en présenter quelques unes afin d'en dégager les grands principes et les limites.

4.2.1 Principe statistique

P. E. Sabine écrit en 1932 "Acoustics and architecture" en reprenant les principes son homonyme W. Sabine. Ce dernier décrivait 20 ans plus tôt des protocoles de test pour mesurer des temps de réverbérations dans les salles. P.E.Sabine considère que la réverbération suit un modèle purement statistique. De son point de vue, la densité d'échos à prendre en compte est suffisamment importante pour considérer le phénomène comme pseudo-aléatoire.¹¹. Il suppose ainsi que l'énergie sonore et le temps de réverbération sont uniformes en tout point de la salle. Il exprime la notion de libre parcours moyen en ces termes : "Pour former l'image 2D des réflexions dans une salle, on peut imaginer une boule de billard lancée au hasard sur une table et noter la variation des longueurs des trajets entre deux impacts successifs. (...) La distance moyenne de ces longueurs peut être assimilée au libre parcours moyen d'une onde sonore dans la salle"¹². Ces considérations

11. [KANDELMAN, 2007, p. 19]

12. [SABINE, 1932]

permettent d'exprimer le Temps de Réverbération à 60dB (RT_{60}) en fonction du volume de salle et l'absorption des parois comme par exemple dans la formule dite "de Sabine" :

$$RT_{60} = \frac{k \cdot V}{A} \quad (4.15)$$

Avec :

$k \approx 0,163$

V : le volume de la salle

A : l'aire d'absorption équivalente telle que :

$$A = \sum_{i=1}^N S_i \alpha_i + 4mV \quad (4.16)$$

où :

α est le coefficient d'absorption de la i^e paroi

m est l'amortissement du milieu (par exemple l'air)

S_i est la surface de la i^e paroi

N est le nombre de parois total

La théorie de Sabine, est encore aujourd'hui couramment employée par les acousticiens des salles. Pourtant, cette hypothèse dite de "champ diffus" n'est plus vérifiée en pratique, dès lors que la forme du milieu de propagation n'est plus homogène et que l'absorption acoustique devient importante et non uniforme. De plus, cette théorie s'applique mal aux géométries présentant des ouvertures et, en particulier, dans le théâtre d'Orange.¹³ Par ailleurs, La formule de Sabine est valable tant que les α_i sont sensiblement inférieurs à 1. Avec le même modèle théorique, pour des valeurs de α plus grandes qu'environ 0,3, la formule de Eyring fournit de meilleurs résultats¹⁴. Celle-ci, précisée dans les années 1920 et utilisée lors la conception acoustique de bâtiments durant leur phase de construction, est valable pour n'importe quel α :

$$RT_{60} = \frac{k \cdot V}{4m \cdot V - S \ln(1 - \alpha)} \quad (4.17)$$

On constate que pour les faibles valeurs de α , $\ln(1 - \alpha) \approx -\alpha$ et on retrouve la formule de Sabine.

4.2.2 Méthode de résolution exacte

La méthode de calcul exacte d'un champs sonore consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles avec comme conditions aux limites, les parois de la pièce. Il s'agit ainsi de mailler le domaine d'étude par des petits éléments surfaciques (Boundary Element Method - BEM), volumiques (Finite Element Method - FEM) ou sur une grille régulière (Finite Difference Time Domain - FDTD). Sur chacun de ces éléments, on pourra calculer la pression acoustique $p(x, y, z, t)$ par résolution de l'équation d'onde de D'Alembert :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (4.18)$$

13. [PICAUT, 2005, p. 60]

14. [EYRING, 1930, p. 217-241]

15. [KANDELMAN, 2007, p. 10]

Avec :

Δ : l'opérateur laplacien
 c : la célérité de l'onde

Pour cela, il faudra se placer dans les conditions de l'acoustique linéaire tels que ¹⁶ :

- l'air est un fluide parfait
- la température et la pression restent constantes
- la vitesse macroscopique du fluide est faible devant la célérité du son
- les fluctuations dues aux déplacements d'air sont faibles devant ces valeurs moyennes

On pourra ensuite définir les impédances complexes des parois de la salle comme conditions aux limites ([Dirichlet](#), [Neumann](#), ...).

Les solutions de cette équation sont les p_i tels que :

$$p_i(x_i, t) = f_+(t - \frac{x_i}{c}) + f_-(t - \frac{x_i}{c}) \quad ^{17} \quad (4.19)$$

Avec :

x_i : chacune des coordonnées de l'espace
 f_+ et f_- : des fonctions ne dépendant que d'une variable et définies à partir des conditions initiales. Elles représentent respectivement une onde se propageant sans se déformer vers $+\infty$ et $-\infty$.

L'équation d'Helmholtz apparaît lorsque l'on cherche des solutions "stationnaires" de l'équation [4.18](#) de D'Alembert :

$$(\Delta + k^2)p(M) = f(M), \quad \forall M \in \Omega \quad ^{18} \quad (4.20)$$

Avec :

$f(M)$: la distribution des sources,
 k : le nombre d'onde,
 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: le domaine d'étude

La fonction de Green est une solution élémentaire pour la source S de l'équation [4.20](#) de Helmholtz qui s'écrit :

$$(\Delta + k^2)G(S, M) = \delta_s(M), \quad \forall M \in \Omega \quad ^{19} \quad (4.21)$$

Avec :

δ_s : la mesure de [Dirac](#),

16. [JOT, 1992, p. 19]

17. [D'ALEMBERT, 1747, p. 214-249]

18. [PREMAT, 2000, eq. 2.1]

19. [PREMAT, 2000, eq. 2.2]

20. [PREMAT, 2000, fig. 2.1]

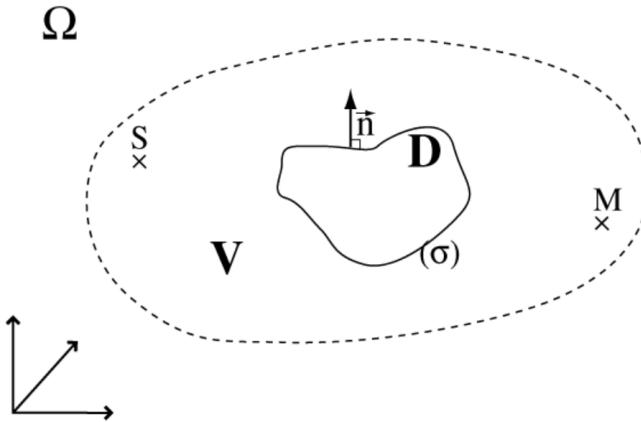


FIGURE 4.5 – Schéma général pour l'établissement de la représentation de Green²⁰

Alors en combinant les équations 4.20 et 4.21, on obtient :

$$G(S, M)f(M) - p(M)\delta_s(M) = G(S, M)\Delta p(M) - p(M)\Delta G(S, M), \quad \forall M \in \Omega^{21} \quad (4.22)$$

En intégrant alors cette équation sur un volume V englobant le volume D et la source S, il s'ensuit :

$$\int_V G(S, M)f(M)dV - \int_V p(M)\delta_s(M)dV = \int_V [G(S, M)\Delta p(M) - p(M)\Delta G(S, M)]dV, \quad \forall M \in \Omega^{22} \quad (4.23)$$

La première intégrale dans l'expression ci-dessus représente le champ incident c'est-à-dire le champ rayonné si l'ensemble de sources $f(M)$ était seul en milieu infini. La deuxième intégrale est le champ de pression en un point M de l'espace pour une source ponctuelle S (ce facteur serait nul si la source S n'était pas située dans le volume V). Le membre de droite peut être transformé en une intégrale de surface en appliquant le théorème de Green. Lorsque l'on fait tendre le volume V vers l'infini, en utilisant la condition de Sommerfeld :

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} G = O(r^{(1-n)/2}) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} (\delta_r G - ikG) = O(r^{(1-n)/2}) \end{cases}^{23} \quad (4.24)$$

on aboutit à une intégrale sur la surface σ du domaine D. On obtient alors :

$$p(M) = p_0(M) - \int_{\sigma} [G(S, M) \frac{\partial p}{\partial n_S}(M) - p(M) \frac{\partial G}{\partial n_S}(S, M)]dS, \quad \forall M \in \Omega^{24} \quad (4.25)$$

C'est à partir de cette équation que l'on pourra calculer la valeur de pression acoustique en tout point M de l'espace Ω non situé sur la frontière σ du domaine D. Cette formule peut être généralisée pour donner l'équation intégrale de Helmholtz-Kirchhoff :

$$c(M)p(M) = p_0(M) + \int_{\sigma} [p(M) \frac{\partial G}{\partial n_S}(S, M) - G(S, M) \frac{\partial p}{\partial n_S}(M)]dS, \quad \forall M \in \Omega^{25} \quad (4.26)$$

21. [PREMAT, 2000, eq. 2.4]

22. [PREMAT, 2000, eq. 2.5]

23. [PREMAT, 2000, eq. 2.3]

24. [PREMAT, 2000, eq. 2.6]

Avec :

$$c(M) = 1 - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad 26$$
(4.27)

Avec une dépendance temporelle en $\exp -i\omega t$, on peut exprimer dans \mathbb{R}^3 la fonction de Green sous la forme :

$$G(S, M) = \frac{\exp ikr(S, M)}{2ik} \quad 27$$
(4.28)

4.2.3 Méthodes géométriques

Les méthodes géométriques sont largement utilisées dans le domaine de l'acoustique de salle. Elles se basent sur le trajet que parcourt l'onde sonore entre une source et un récepteur (fig. 4.6). L'onde, percutant les parois subit un changement de direction de propagation et de sa énergie. Chaque paroi ou obstacle porte une impédance liée à la nature de son matériau qui atténuerà l'énergie de l'onde différemment selon sa fréquence.

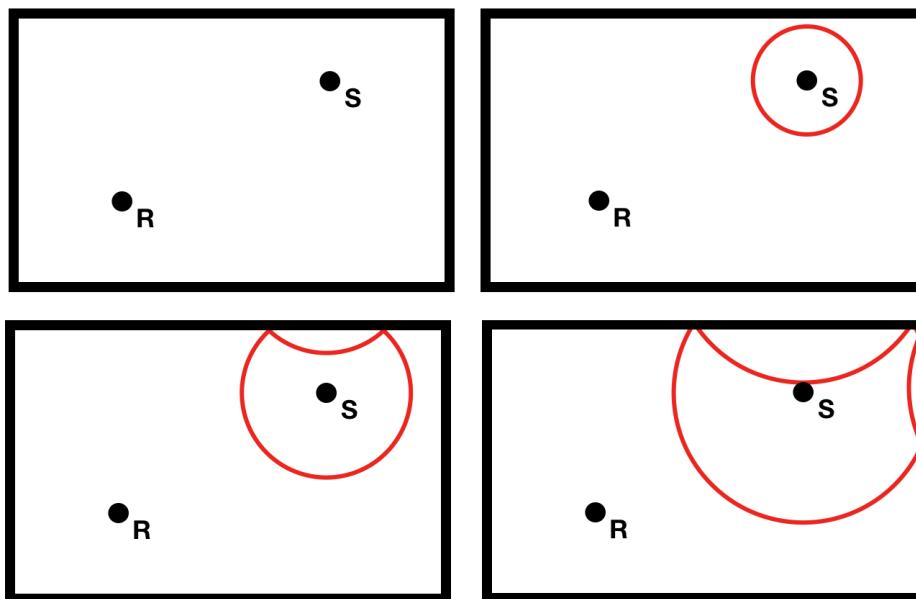


FIGURE 4.6 – Vu 2D de la propagation d'une onde sphérique dans une salle rectangulaire

En pratique certaines méthodes de calcul permettent de simuler ce comportement. Tout d'abord, la méthode dite de tracé de rayon (*ray-tracing*)²⁸ qui est très souvent utilisée dans les logiciels d'acoustique de salle. Cette approche suppose que l'énergie sonore émise depuis une source est repartie sur un certain nombre de rayons rectilignes déviés de manière spéculaire lors de leur rencontre avec les parois. La mesure d'énergie est alors réalisée par comptage du nombre de rayons qui traversent une sphère transparente. La précision de mesure sera ainsi fonction du nombre de rayons émis et de la taille de la sphère

25. [PREMAT, 2000, eq. 2.7]

26. [PREMAT, 2000, eq. 2.8]

27. [PREMAT, 2000, eq. 2.29]

28. [KULOWSKI, 1985, p.449-468]

récepteur. Il peut notamment y avoir beaucoup de perte d'information si le domaine de propagation est complexe²⁹. Il s'agit donc d'une méthode très puissante pour simuler les réflexions géométriques sur les parois mais qui devient compliquée pour simuler les effets de diffraction. Effectivement pour simuler ces effets il faudrait re-générer un panel de rayons pour chaque réflexion sur une paroi diffractante ce qui augmenterai exponentiellement le nombre de rayon et donc le temps de calcul.

Pour résoudre ce problème, une approche de type "lancer de particules" sert d'alternative au tracé de rayon. Dans ce concept, chaque particule est porteuse d'une énergie constante qui ne décroît donc pas comme la distance au carré. Lors du contact avec une paroi, la particule sera réfléchie de manière statistique. Par exemple, si α est le coefficient d'absorption de la paroi, alors, la particule aura une probabilité de $(1 - \alpha)$ d'être réfléchie et une probabilité α d'être absorbée. En ce sens, il est également possible de déterminer, selon une loi de probabilité, l'angle de réflexion et simuler ainsi une "pseudo-diffusion" des matériaux³⁰.

Pour finir, il existe aussi la méthode dite des "sources-images"³¹ très appréciée pour son approche spatialisée des réflexions sonores. Cette méthode est fondée sur la construction de sources virtuelles, images de la source réelle, construite par symétrie par rapport aux parois de l'enceinte. La contribution énergétique de chaque source-image est celle habituellement rencontrée dans le cas de la propagation en champ libre, pondérée par le coefficient d'absorption des parois considérées³². Le problème de cette méthode est que l'on génère l'ensemble des sources-images d'une salle et qu'il est ensuite difficile de discriminer celles qui sont perçues et celles qui sont bloquées par des obstacles. Cela est donc plutôt adapté aux pièces de forme concave et vide. Par ailleurs, comme pour le tracé de rayons, les effets de diffraction ne sont pas pris en compte.

29. [PICAUT, 2005, p. 60]

30. [PICAUT, 2005, p. 62]

31. [JOUHANEAU, 1997, p.6]

32. [PICAUT, 2005, p. 60]

33. [KANDELMAN, 2007, Fig. 61]

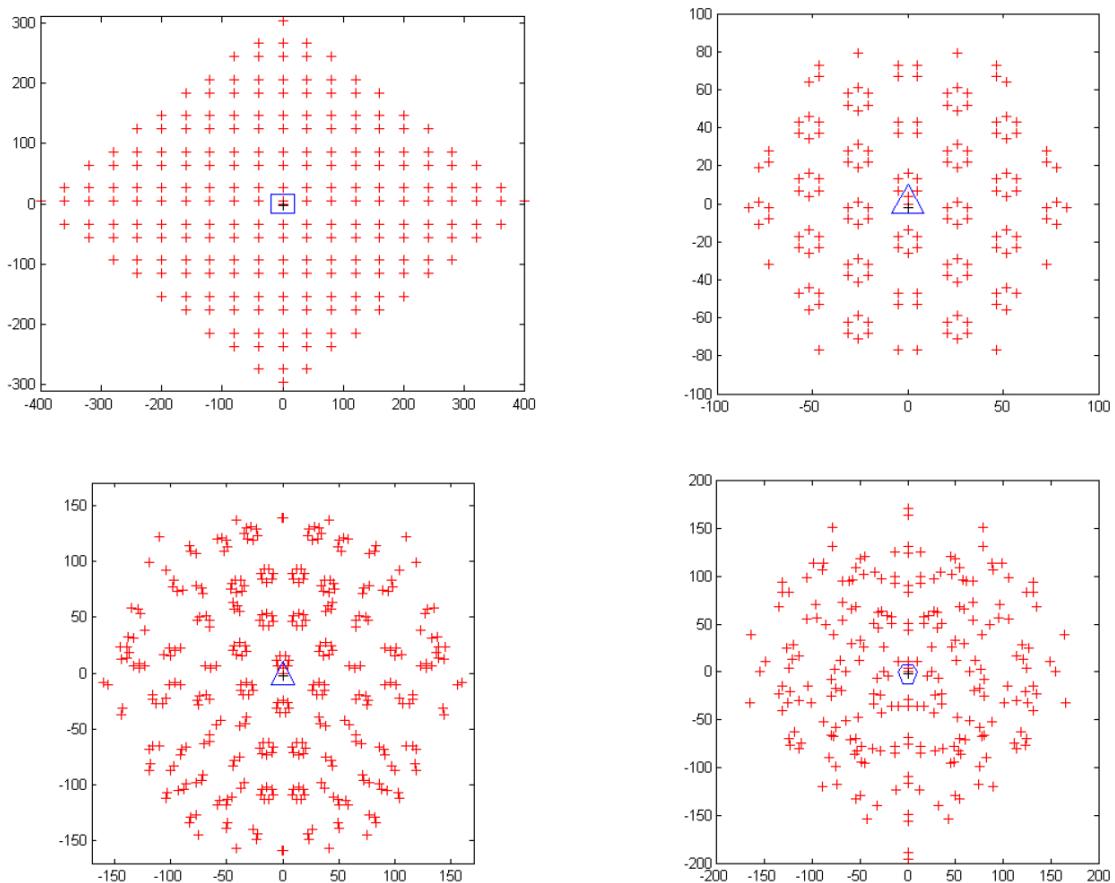


FIGURE 4.7 – Différentes constellations de salle : la densité de sources reste constante³³

Chapitre 5

Développement d'une méthode couplée

« *Quand on aime on ne compte pas...
Ça tombe bien, je suis mauvaise en calcul!* »

Sophie Lesellier

Sommaire

5.1 Notion d'onde sphérique discrétisée	69
5.2 Environnement géométrique	73
5.2.1 Maillage de salle et matériaux	73
5.2.2 Création d'une boite englobante	74
5.3 Calcul des rayons	74
5.4 Calcul des sources-images	79
5.5 Génération de réponse impulsionale	81

Introduction

Le projet a pour essence le calcul de l'acoustique du théâtre d'Orange. Cela soulève certaines problématiques qui nous ont poussé à développer une méthode de calcul hybride. Effectivement, ce cas d'application impose le cahier des charges suivant :

- Pouvoir traiter une salle de grande dimension
- Pouvoir traiter un volume ouvert
- Prendre en compte l'absorption atmosphérique
- Calculer les résultats sur une large plage de fréquences audibles par l'être humain (50-8000Hz)
- Obtenir le son réverbéré spatialisé en tout point de l'espace

Ce dernier point permet d'étudier le déplacement de l'onde sonore. Par ailleurs, il faut pouvoir s'interfacer au modèle numérique réalisé sous Blender et décrit dans la partie I. Pour cela, nous devons rajouter les caractéristiques suivantes au cahier des charges :

- Utiliser un maillage surfacique sans contrainte sur la dimension ou le raffinement des faces
- Pouvoir traiter plusieurs centaines de milliers de faces en un temps relativement court
- Pouvoir modifier facilement les coefficient d'absorption des matériaux

Ces paramètres sont nécessaires afin de rendre l'étude acoustique du théâtre d'Orange ou de tout type de monument similaire accessible à des utilisateurs quelconques de Blender. Ainsi, la géométrie où la nature des matériaux pourra être facilement modifiable et une large série de tests comparatifs peut être mener rapidement. Le but étant de pouvoir tester des hypothèse de restitution sans avoir à multiplier les manipulations entre chaque calcul.

Sachant cela, nous avons dans un premier temps tenté de réaliser des analyses par méthode de résolution exacte (voir section 4.2.2) mais nous avons vite compris que la géométrie de la salle rendrait la résolution très difficile. Effectivement, le nombre d'éléments que doit comporter le maillage est dépendant de la longueur d'onde¹. Dans un cas comme le théâtre d'Orange où les longueurs se comptent en dizaines de mètres et les fréquences en kilo-Hertz (fréquences audibles), il faudra raffiner les mailles à l'échelle du millimètre, ce qui générera des milliards d'éléments. Ce genre de problème est aujourd'hui quasi-impossible à mettre en place de part la puissance de calcul et l'espace mémoire nécessaire. Par ailleurs la création d'un maillage de type conforme, c'est à dire avec des triangles de taille régulière et dont les angles ne sont pas trop aigus, représente une difficulté à part entière. Au début du projet, nous avions tenté d'analyser une version très simplifiée du théâtre à des fréquences très faibles. Nous voulions notamment tester l'impact de la forme incurvée des gradins en comparant de manière récursive différents maillages. Le raffinement fut effectué à l'aide de l'outil "mmg" développé à l'[Institut des sciences du calcul et des données \(ISCD\)](#). Les calculs acoustiques ont été fait avec l'outil "MyBEM" développé par le [Centre de mathématiques appliquées de l'école Polytechnique \(CMAP\)](#). En conservant à peu près des dimensions du théâtre et pour de faibles fréquences, nous obtenions déjà plusieurs centaines de milliers d'éléments et des temps de calcul de quelques dizaines de minutes (sur un ordinateur standard). En augmentant la fréquence et donc le raffinement du maillage nous aurions rapidement atteint les limites

1. [FUNKHOUSER et collab., 2004, p. 740]

des machines en terme de mémoire avec des temps de calcul considérable. Or cela ne coïncidait pas du tout avec les objectifs établis. Le constat a alors été que ce type d'étude n'était pas adaptée et que par ailleurs, les résultats seraient difficiles à interpréter.

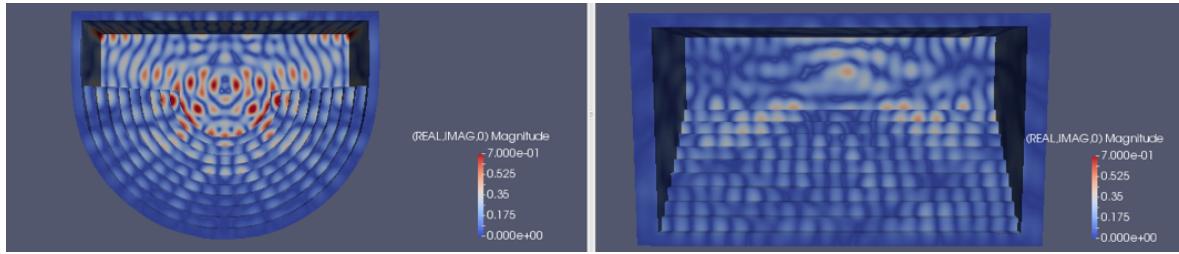


FIGURE 5.1 – Comparaison d'un théâtre simplifié avec gradins coniques ou gradins cubiques par méthode des éléments finis de frontière à 50Hz

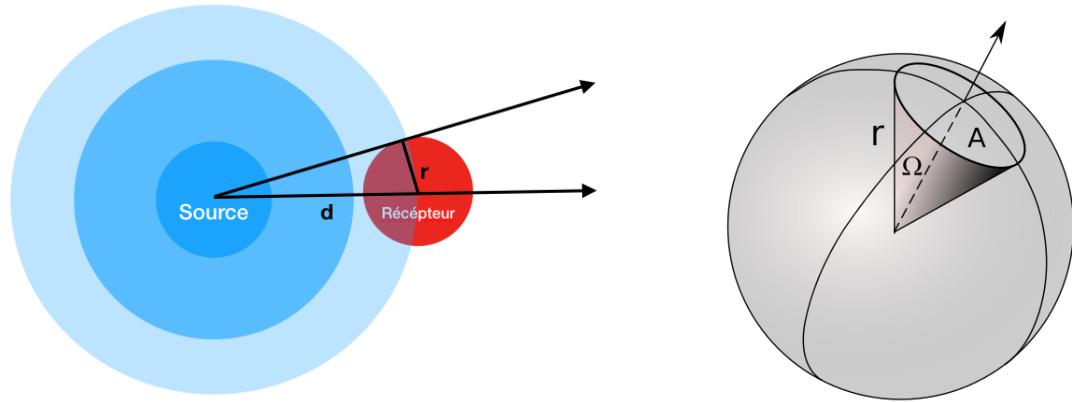
La meilleure option fut alors de se tourner vers des solutions approchées utilisant des méthodes de calcul de type géométrique. La méthode développée, dite "couplée", consiste à propager des rayons à partir d'une source et, à chaque réflexion sur les parois, d'analyser ceux qui traversent une sphère-récepteur. Grâce à leur temps de parcours et d'après les hypothèses statistiques de Sabine (voir section 4.2.1), il est alors possible de créer la RIR. Celle-ci pourra alors être convoluée à un signal audio afin de pouvoir écouter le son réverbéré (voir section 8.1). Le chemin de chacun de ces rayons permet aussi de situer dans l'espace les sources-images correspondantes, c'est à dire les images de la source suite aux divers réflexions sur les parois. Nous obtenons ainsi une constellation de sources-images portant des énergies atténuées par l'absorption des parois. Cela permettra par la suite de spatialiser le son, c'est à dire de savoir d'où proviennent les différents échos. Il sera alors possible d'écouter le son réverbéré en trois dimensions. Ce chapitre vise à détailler ce processus.

5.1 Notion d'onde sphérique discrétisée

Comme évoqué précédemment le choix de la méthode s'oriente vers une solution géométrique dans laquelle nous allons calculer la réponse impulsionale à l'aide de lancés de rayons tout en créant des sources images afin de conserver l'information du parcours de l'onde dans l'espace. Dans ce développement, nous choisissons d'utiliser des sources omnidirectionnelles, c'est à dire qui propagent le son de manière uniforme dans toutes les directions de l'espace. Notons tout de même qu'il serait possible d'utiliser d'autres types de sources en changeant la répartition des rayons émis. Par ailleurs, la diffraction ne sera pas traitée même si, comme nous l'avons évoqué précédemment, il est possible d'utiliser des lois de probabilité pour répartir les rayons réfléchis selon différentes directions². Nous choisissons néanmoins de ne fonctionner qu'avec des réflexions spéculaires car le sujet de la diffraction est extrêmement vaste et complexe. Il s'agit d'un sujet à part entière que l'on ne traitera pas durant ce projet de thèse mais qui pourra venir l'enrichir par la suite.

Par ailleurs nous travaillons à partir de sources impulsionales. Effectivement, un signal sonore continu peut-être discréteisé par une suite d'impulsions (c'est d'ailleurs le cas de tout signal numérique qui est échantillé à une certaine fréquence). Une impulsion étant un signal d'un temps infiniment court, l'énergie émise depuis la source sera

2. [VORLÄNDERA et MOMMERTZ, 2000, p.187-199]
3. [M'HENNI, 2010, image]



(a) Schéma en deux dimensions d'une onde sphérique dont une portion d'énergie est mesuré par un récepteur de rayon r .

(b) Représentation de l'angle solide d'un cône de révolution³

FIGURE 5.2 – Représentations du principe de mesure de l'angle solide

répartie sur la surface d'une sphère en expansion comme nous l'avons vu dans la section 4.1.2 (voir fig. 5.2a). Seul le flux passant la le récepteur sera capté, ainsi, l'énergie perçue est l'intersection entre la sphère d'émission et la sphère de réception. Il s'agit donc d'un angle solide Ω de type conique (voir fig. 5.2b) tel que :

$$\Omega = \frac{S}{d^2} \quad (5.1)$$

Avec :

Ω : l'angle solide en stéradian (sr)

S : l'aire de la portion de sphère interceptée en mètre carré (m^2)

d : le rayon de la sphère d'émission en mètre (m)

Par ailleurs, pour simplifier les calculs, la propagation de l'onde doit être discrétisée en N rayons émis depuis la source de manière uniforme. Chaque rayon porte l'énergie E_i tel que :

$$E(t) = \sum_{i=1}^N E_i(t) = \frac{E_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Omega_i \quad (5.2)$$

Avec :

Ω_i : l'angle solide élémentaire tel que $\sum_{i=1}^N \Omega_i = 4\pi$

Le problème de cette approximation est qu'elle apporte de l'erreur au résultat. Effectivement, l'information n'est plus portée par un cône mais par des rayons. Toute mesure prise entre deux rayons sera donc impossible. Il faut donc limiter au maximum cette erreur et réduire l'écart entre deux rayons. On pourra alors considérer qu'une grande quantité de rayons peut être assimilée à un cône plein. Pour cela, on souhaite connaître la distance au bout de laquelle les rayons sont trop séparés les uns des autres pour être considérés comme un cône. On se place alors dans le cas théorique d'une source et d'un récepteur en espace libre. Il faut alors exprimer le temps au bout duquel il est possible de capter moins d'un rayon dans la sphère de mesure.

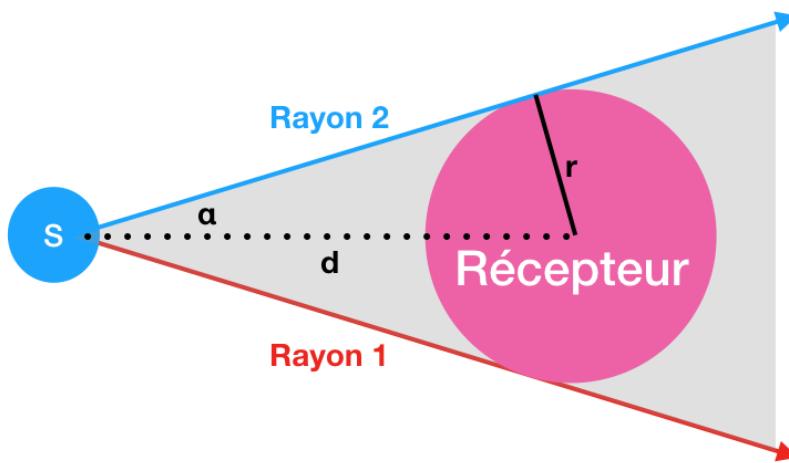


FIGURE 5.3 – Schéma d'un récepteur captant au moins un rayon.

Pour cela, nous utilisons la formule de l'angle solide d'un cône de révolution⁴ de demi-angle au sommet α (voir fig. 5.2b) :

$$\Omega_i = 2\pi(1 - \cos(\alpha)) \quad (5.3)$$

Or, cet angle solide peut aussi s'exprimer par :

$$\Omega_i = \frac{4\pi}{N} \quad (5.4)$$

Ainsi, pour :

r : le rayon du récepteur

d : la distance maximale du récepteur à la source

N : le nombre de rayons total

On a, d'après Pythagore (voir fig. 5.3) :

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{d} \quad (5.5)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}} \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

En normalisant l'énergie ($E_{tot} = 1$), on obtient alors :

4. [WIKIPÉDIA, Angle solide d'un cône de révolution]

$$2\pi(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}}) = \frac{4\pi}{N} \quad (5.8)$$

$$\sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}} = 1 - \frac{2}{N} \quad (5.9)$$

$$1 - \frac{r^2}{d^2} = 1 - \frac{2}{N} \quad (5.10)$$

$$\frac{r^2}{d^2} = \frac{4}{N^2}(N - 1) \quad (5.11)$$

$$\frac{r}{d} = \frac{2}{N}\sqrt{N - 1} \quad (5.12)$$

Nous constatons alors qu'en fixant N , le nombre de rayons d'énergie total émis depuis la source et r , le rayon de la sphère de mesure, nous pourrons connaître la distance d au bout de laquelle la probabilité de ne capter aucun rayon ne sera plus nulle. En pratique, on voudra réduire encore l'erreur et il faudra arrêter la mesure avant d'arriver à cet extrême. On pourra alors fixer un nombre n de rayons minimum à capter. Par exemple si on fixe n à 100 rayons, on s'assure que la mesure comprend au moins 100 portions de la sphère énergie et on revient statistiquement à un modèle quasi-continu.

Pour établir la nouvelle expression, il suffit de refaire les mêmes calculs en considérant que :

$$\Omega_i = n \cdot \frac{4\pi}{N} \quad (5.13)$$

$$= \frac{n}{N} \quad (5.14)$$

L'équation 5.12 s'écrit donc :

$$\frac{r}{d} = \frac{2n}{N} \sqrt{\frac{N}{n} - 1} \Rightarrow d_{max} = \frac{N \cdot r}{2n \sqrt{\frac{N}{n} - 1}} \quad (5.15)$$

Aussi, si $N \gg n$ l'expression se simplifie par :

$$d_{max} \approx \frac{r}{2} \sqrt{\frac{N}{n}} \quad (5.16)$$

Nous limitons de cette façon le calcul des premières réflexions de la réponse impulsionale. Cependant, les RIR sont en général calculées jusqu'à ce que l'énergie diminue de 60dB. Il s'agit d'un critère d'arrêt classique de car il assure de couvrir la plage d'audition humaine. Or avec notre méthode, nous ne prenons plus de mesure à partir d'un certain temps, correspondant à la distance d . Il faudra alors jouer sur les paramètres N , r ou n pour s'assurer de dépasser le RT₆₀. En pratique, le temps de calcul sera très sensible à la valeur de N tandis que la précision dépendra r et n . Ainsi une possibilité est d'arrêter la mesure avant d'atteindre cette distance maximum. Il faudra alors compléter le champs diffus de manière statistique d'après les hypothèses de Sabine. La réponse impulsionale obtenue par tracé de rayons sera prolongée par régression linéaire pour atteindre RT₆₀.

5.2 Environnement géométrique

5.2.1 Maillage de salle et matériaux

Comme nous l'avons vu précédemment, nous allons travailler à partir d'un maillage existant, qui sera dans notre cas d'application le théâtre d'Orange (voir partie I) mais qui pourrait être n'importe quel maillage de salle. La méthode se doit donc d'être générique. Cependant notons qu'il sera obligatoire d'avoir des faces triangulaires et que les normales devront être orientées vers l'intérieur de la salle (voir fig. 5.4).

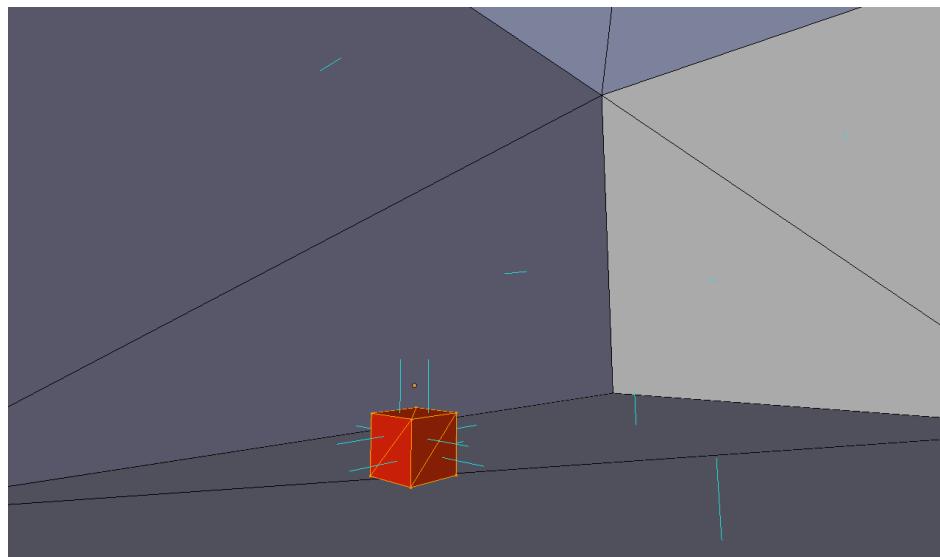


FIGURE 5.4 – Représentation d'un maillages surfacique à faces triangulaires composé d'une salle et d'un obstacle et dont les normales (en bleu) sont orientées vers l'intérieur de la salle.

Chaque face triangulaire est donc considérée comme une paroi à laquelle il faut affecter un matériau. A un matériau on associe huit coefficients d'absorption correspondant aux bandes d'octave : 62,5Hz, 125Hz, 250Hz, 500Hz, 1kHz, 2kHz, 4kHz, 8kHz. Ces huit bandes permettent de couvrir une large plage des fréquences audibles par l'être humain. L'absorption de l'onde sonore dépendra donc de la fréquence et il faudra calculer huit réponses impulsionales. Il existe de nombreuses bases de données recensant ces coefficients d'absorption pour tout type de matériaux. Elles sont en générales créées de manière expérimentale dans un local spécialement aménagé. L'erreur est de l'ordre de 15%⁵. La base que nous utilisons a l'avantage d'être très complète et en libre accès sur le site d'Odéon⁶. Les coefficients sont sans unité et correspondent à un ratio d'absorption compris entre 0 et 1.

Voici quelques exemples de coefficients d'absorption :

Notons par ailleurs que l'on définit les sources sonores par une position ponctuelle dans l'espace délimitée par la salle. De la même façon, le récepteur se définit par sa position dans l'espace ainsi que par son rayon de mesure. Il sera assimilé à une sphère.

5. [ACOUPHILE.FR]

6. [ODEON, Materials]

7. Harris, 1991

8. Dalenbäck, CATT

Référence	Nom du matériau	62,5Hz	125Hz	250Hz	500Hz	1kHz	2kHz	4kHz	8kHz
1	100% absorbent	1	1	1	1	1	1	1	1
2	100%reflecting	0	0	0	0	0	0	0	0
107	Concrete block, coarse ⁷	0.36	0.36	0.44	0.31	0.29	0.39	0.25	0.25
3000	Hollow wooden podium ⁸	0.4	0.4	0.3	0.2	0.17	0.15	0.1	0.1

TABLEAU 5.1 – Exemples de coefficients d'absorption de la base de données Odéon

5.2.2 Création d'une boite englobante

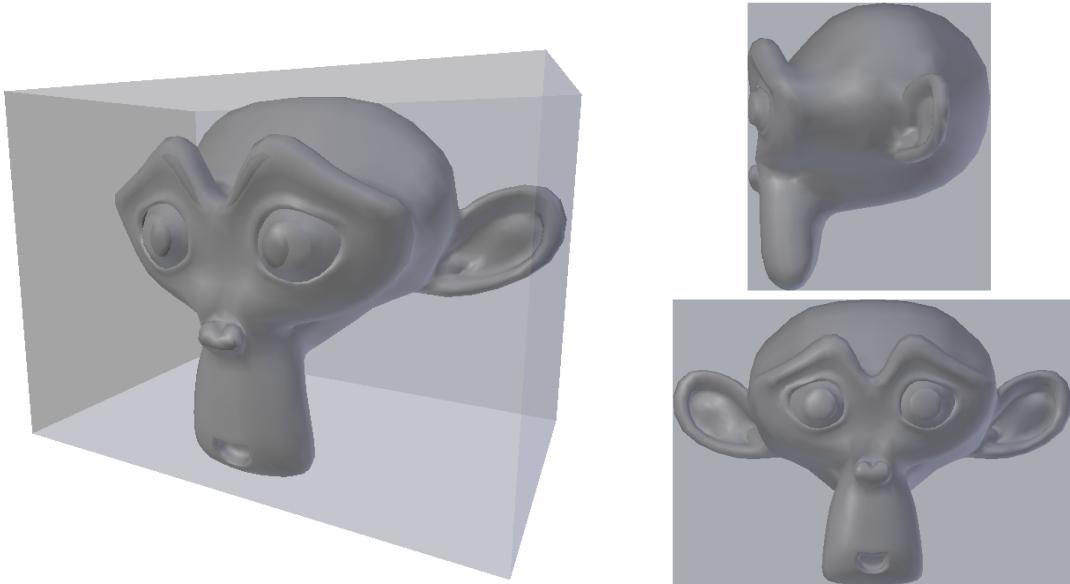


FIGURE 5.5 – Illustration d'une boite englobante un maillage quelconque (Suzanne)

La technique de lancer de rayons présente une problématique pour des maillages ouverts. Effectivement, nous verrons dans la section 5.3 que pour pouvoir itérer les rebonds des rayons sur les parois, il est nécessaire que tous les rayons rencontrent une face. Or, pour une salle ouverte, comme c'est le cas dans le théâtre d'Orange qui est à ciel ouvert, certains rayons peuvent ne rencontrer aucune face. Pour résoudre ce problème facilement et de manière transparente pour l'utilisateur, douze faces triangulaires sont ajoutées systématiquement au maillage afin de créer une boite englobante. On assigne à ces faces un matériau 100% absorbant afin de respecter la perte d'énergie provoquée par l'absence de paroi. Par ailleurs, cette boite ne sera pas en contact avec le maillage mais sera légèrement plus grande. Ceci permet d'éviter qu'une de ces faces ne soit confondues avec une paroi réelle du maillage et que les rayons soient absorbés par la boite englobante au lieu d'être réfléchis par la paroi.

5.3 Calcul des rayons

Le principe de la méthode utilisée est d'émettre depuis une source des rayons se propageant en ligne droite jusqu'à atteindre un triangle du maillage. Il est bon de noter que

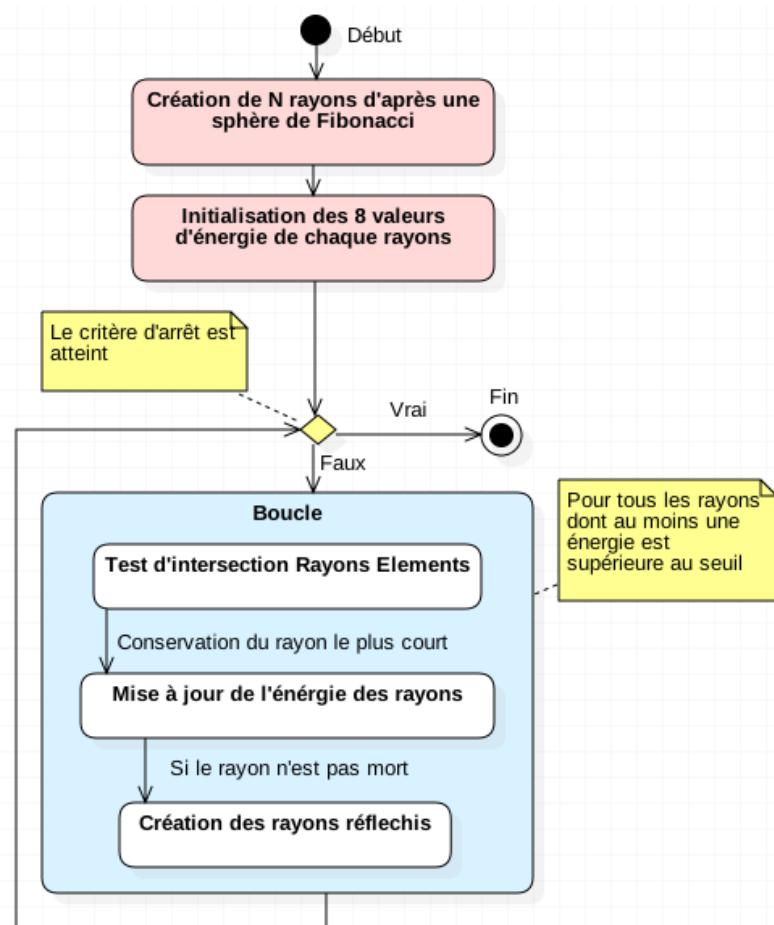
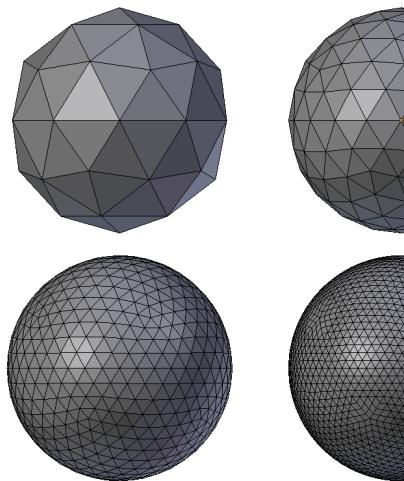


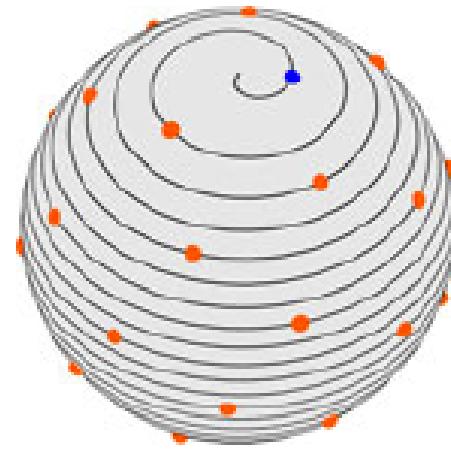
FIGURE 5.6 – Diagramme d'activité résumant le processus de création des rayons

dans la nature, les ondes sonores peuvent suivre des trajectoires courbes à cause de certains paramètres comme les gradients de température ou la présence de vent. Néanmoins nous ferons l'approximation que la propagation se fait en ligne droite. Par ailleurs, les sources sonores telles que les instruments de musique ou la voix humaine ne sont pas omnidirectionnelles mais possèdent une répartition de l'énergie qui leur est propre. Notre étude se place dans le cas général d'une source ayant une répartition uniforme de son énergie dans toutes les directions de l'espace et pourra, dans un second temps, être enrichie par d'autres types de sources.

Pour générer une émission omnidirectionnelle de rayons, nous avons dans un premier temps évalué l'utilisation d'une "*Ico Sphère*" générée par Blender. L'idée est d'utiliser le centre comme origine et chaque vertice pour calculer le vecteur directeur des rayons. Effectivement, Blender propose dans ses objets de base une sphère formée par un icosaèdre régulier. Selon le raffinement voulu, Blender découpe chaque segment en son milieu et déforme la surface pour obtenir un modèle sphérique (voir fig. 5.7a). La répartition est donc uniforme puisque l'"*Ico Sphère*" n'est composée que de triangles équilatéraux identiques. Cependant, Blender bride ces subdivisions à l'ordre 8, ce qui limite l'"*Ico Sphère*" à 163842 points. Outre le fait que cette manipulation aurait largement ralenti Blender, nous souhaitons pouvoir traiter un nombre de rayons bien plus important et de valeur quelconque. Nous utilisons donc une sphère de Fibonacci afin de générer les vecteurs directeurs des rayons. La formule utilisée est la suivante :



(a) Icosphère de Blender subdivisée 2, 3, 4 et 5 fois



(b) Sphère de Fibonacci ⁹

FIGURE 5.7 – Sphères permettant l'émission omnidirectionnelle de rayons

$$G_r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (5.17)$$

$$\theta = \frac{2\pi \times n}{G_r} \pmod{2\pi} \quad (5.18)$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{2n}{N} - 1\right) \quad (5.19)$$

Avec :

G_r : le golden ratio

9. [KEINERT et collab., 2015, fig. 1]

θ et ϕ : les coordonnées sphériques

N : le nombre total de rayons

$n \in [0, 1, 2, \dots, N - 1]$: le numéro du rayon

A partir de ces coordonnées sphériques, on en déduit les coordonnées cartésiennes des vecteurs directeurs que l'on normalisera par la suite.

$$x = \cos \phi \times \cos \theta \quad (5.20)$$

$$y = \cos \phi \times \sin \theta \quad (5.21)$$

$$z = \sin \phi \quad (5.22)$$

A l'initialisation nous émettrons donc N rayons depuis le centre de l'objet source et dirigés dans toutes les directions de manière uniforme. Une énergie normalisée à 1 leur est assignée. L'algorithme va ensuite fonctionner par itération jusqu'à ce que les huit énergies de tous les rayons soient toutes inférieures à une valeur seuil. Celle-ci sera typiquement de -60dB . Pour cela, nous utilisons l'algorithme de Möller-Trumbore¹⁰ développé à la fin des années 90 d'après les travaux de J.Arenberg¹¹ et D.Badouel¹² et reconnu pour être rapide et efficace. Il s'agit d'opérer un changement de base pour le vecteur directeur du rayon et d'exprimer le point d'intersection à l'aide de coordonnées barycentriques. Cela permet d'éviter de devoir travailler avec des équations de plans et soulage les calculs.

Nous cherchons donc l'intersection entre un rayon d'équation :

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{O} + \mathbf{D}t \quad (5.23)$$

Et une face triangulaire de sommets V_0, V_1, V_2 . Un point T appartient au triangle si :

$$\mathbf{T}(u, v) = (1 - u - v)V_0 + uV_1 + vV_2 \quad (5.24)$$

Avec :

(u, v) : les coordonnées barycentrique tels que $u \geq 0, v \geq 0$ et $(u + v) \leq 1$.

Ainsi, l'intersection entre le rayon et le triangle s'écrit :

$$\mathbf{O} + \mathbf{D}t = (1 - u - v)V_0 + uV_1 + vV_2 \quad (5.25)$$

Avec :

t : la distance entre le point d'origine du rayon et le point d'intersection.

D'après la règle de Cramer, nous pouvons réarranger cette équation sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{D}, & \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0, & \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{O} - \mathbf{V}_0 \quad (5.26)$$

10. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, p. 2-3]

11. [ARENBERG, 1988, oeuvre intégrale]

12. [BADOUEL, 1990, p. 390-393]

13. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 2]

14. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 3]

15. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 4]

Ainsi, on aura :

$$\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{| -D, E_1, E_2 |} \begin{bmatrix} |T, E_1, E_2| \\ | -D, T, E_2 | \\ | -D, E_1, T | \end{bmatrix} \quad 16 \quad (5.27)$$

Avec :

$$E_1 = V_1 - V_0$$

$$E_2 = V_2 - V_0$$

$$T = O - V_0$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{(D \times E_2) \cdot E_1} \begin{bmatrix} (T \times E_1) \cdot E_2 \\ (D \times E_2) \cdot T \\ (T \times E_1) \cdot D \end{bmatrix} \quad 17 \quad (5.28)$$

Ainsi on pourra connaitre toutes les faces que rencontre chaque rayon et on conservera le point d'intersection pour le rayon le plus court. Effectivement, on admet que les faces peuvent absorber les rayons mais pas les transmettre donc le rayon s'arrêtera à la première face rencontrée. D'un point de vu acoustique, cela ne pose pas de réel problème à partir du moment où l'auditeur est dans la même pièce que la source. Dans ce cas, les effets de réflexions de d'absorption des parois suffisent pour retranscrire le son perçu et ce qui se passe en dehors de la pièce importe peu. Par contre si la source et l'auditeur sont séparé par une paroi, ce modèle devient faux. Dans le théâtre d'Orange, les parois sont très dense, ainsi, même si les mesures sont effectuées dans les **ambulacres** ou dans les coulisses, un modèle purement basé sur les réflexions/absorptions s'approche de la réalité. Néanmoins, certains cas ne pourront pas être testés comme par exemple la simulation de portes en bois au niveau des **parascaenia** ou bien le son entendu depuis l'**hyposcaenium** situé comme son nom l'indique sous l'estrade. Il se crée alors des phénomènes de vibro-acoustique et de résonance non pris en compte. Dans notre cas, le bois ne laissera pas passer le son ce qui ne reflète pas la réalité.

Une fois que l'on sait sur quelle paroi chaque rayon va se réfléchir, on peut mettre à jour leurs énergies en les multipliant pour chaque bande de fréquence par $(1 - \alpha_i)$, les α étant les coefficients d'absorption de la face rencontrée. La longueur totale du rayon doit être stockée afin de pouvoir prendre en compte l'absorption de l'air dans une étape ultérieure. Effectivement, étant donné que cette atténuation est assez négligeable, on ne l'affectera aux énergies d'un rayon que si celui-ci génère une source-image (voir 5.4). Cela permet de réduire le temps de calcul global.

Il y a alors deux possibilités pour que le processus s'arrête :

- Les énergies des huit bandes de fréquence portées par le rayon sont toutes en dessous d'un seuil. En général, ce seuil est fixé à -60dB, ce qui assure que le son ne soit plus audible.
- La distance totale parcourue par le rayon a dépassé un seuil déterminé par l'équation 5.12. Cela assure que l'angle solide soit négligeable devant le rayon du récepteur et ainsi que la répartition discrète d'énergie puisse être considérée comme quasi-continue (voir 5).

16. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 5]

17. [MÖLLER et TRUMBORE, 1997, eq. 6]

Les rayons pour lesquels aucun de ces deux critères n'est atteint donnent alors naissance à un rayon réfléchi, les autres arrêtent de se propager. Pour calculer le vecteur directeur des rayons réfléchis, il suffit d'utiliser le vecteur normal à la face rencontrée (de norme 1) et d'utiliser la formule suivante :

$$\vec{r} - \vec{i} = 2 \times (-\vec{i} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (5.29)$$

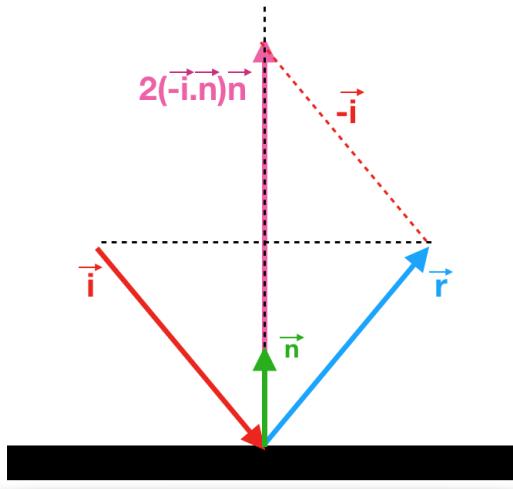


FIGURE 5.8 – Calcul d'un rayon réfléchi à partir d'un rayon incident et d'une normale

Nous pouvons ainsi mettre à jour les informations sur les rayons (origine et vecteur directeur) et boucler afin de propager ces rayons réfléchis vers de nouvelles faces.

Notons tout de même que dans l'implémentation algorithmique il peut se produire des problèmes d'arrondi qui peuvent faire fuir des rayons (c'est à dire qu'ils ne rencontrent aucune face). Pour éviter cela, on modifie la troisième condition de l'équation 5.24 en la remplaçant par $(u + v) \leq 1.00001$. De même, si un rayon tombe dans un coin, son rayon réfléchi pourra sortir du maillage. Pour éviter cela on enlèvera systématique $1\mu m$ à la longueur des rayons.

5.4 Calcul des sources-images

A chaque itération, c'est à dire à chaque fois que les N rayons sont entrés en contact avec une paroi et avant qu'ils ne soient réfléchis, on détermine ceux qui ont traversé le récepteur. Nous allons ainsi pouvoir ajouter au fur et à mesure des itérations de nouvelles sources-images. Pour savoir si un rayon (parmi les rayons qui n'ont pas atteints le critère d'arrêt) donnera naissance à une source image, on vérifie dans un premier temps si le point d'origine du rayon est à l'intérieur de la sphère réceptrice :

$$||\vec{OL}|| \leq r \quad (5.30)$$

Avec :

O : L'origine du rayon.

L : Le centre du récepteur (Listener).

r : Le rayon de la sphère réceptrice.

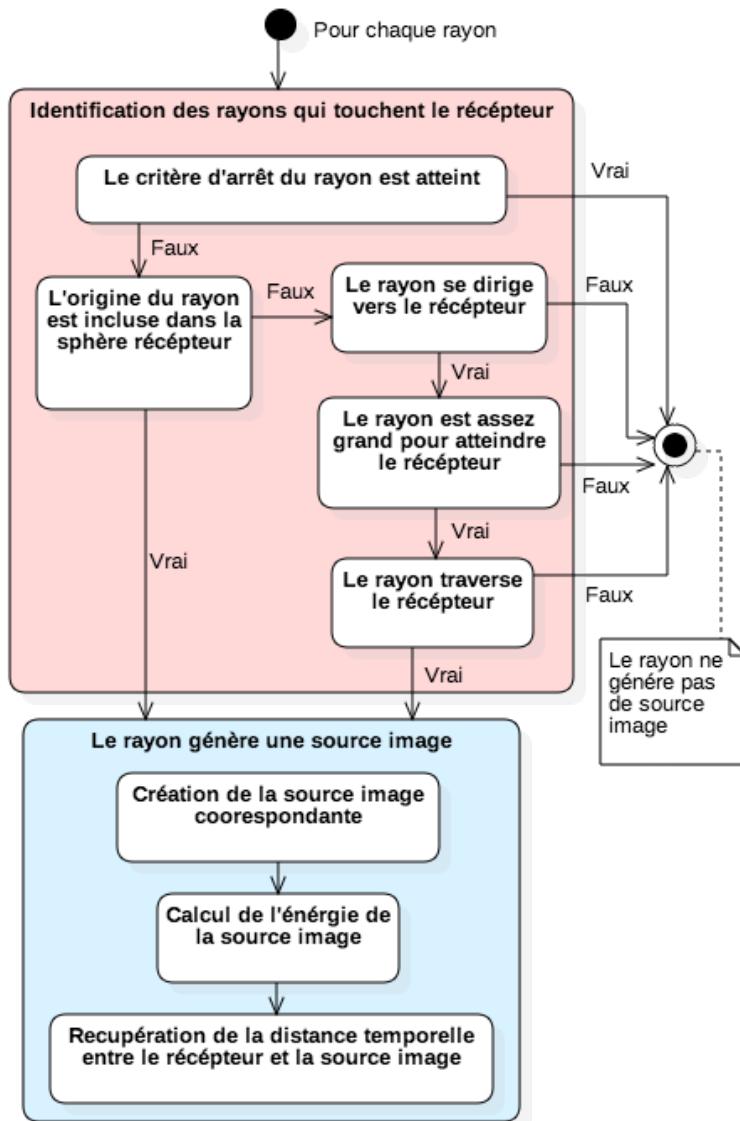
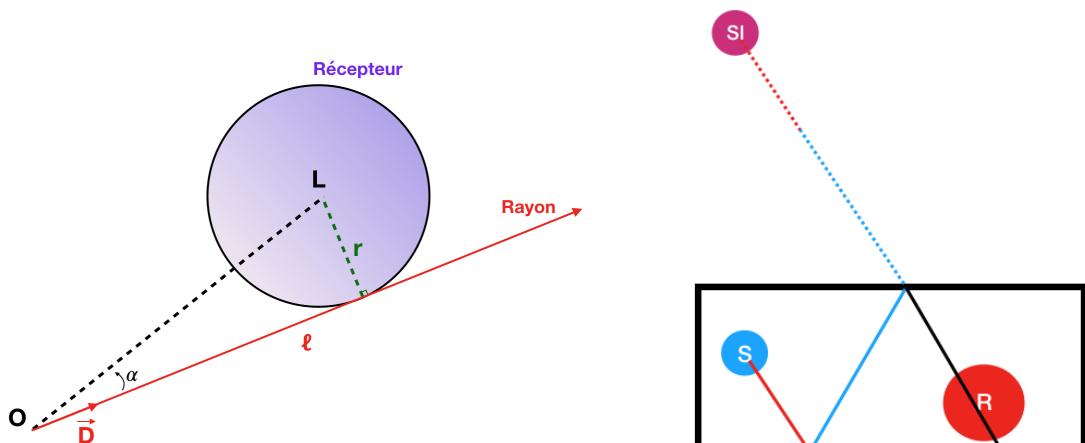


FIGURE 5.9 – Diagramme d'activité résumant le processus de création des sources-images



Si c'est le cas, alors le rayon est perçu par le récepteur et une source image va être créée. Sinon, on vérifie si le rayon se dirige bien vers le récepteur. Pour cela il suffit de vérifier que :

$$\cos \alpha \geq 0 \quad (5.31)$$

Avec :

α : L'angle entre le rayon de vecteur directeur \vec{D} et \vec{OL}

Par ailleurs, on vérifie que le rayon est assez grand pour atteindre le récepteur (donc qu'il n'est pas interrompu par une paroi avant) :

$$||\vec{OL}|| \leq l \quad (5.32)$$

Avec :

l : La longueur du rayon.

Pour finir, on s'assure que le rayon intersecte bien la sphère récepteur :

$$\sin \alpha \times ||\vec{OL}|| \leq r \Rightarrow \alpha \leq \arcsin \frac{r}{||\vec{OL}||} \quad (5.33)$$

Si ces conditions sont réunies, alors le rayon traverse bien le récepteur et une source image va être générée. Ses coordonnées seront données en traçant un vecteur de même origine mais de sens opposé au rayon courant et dont la norme sera égale à la distance totale parcourue par le rayon avant sa dernière réflexion (voir fig. 5.10b). On assigne à cette source-image huit coefficients d'énergie correspondant aux coefficients d'énergie finaux du rayon, atténus par l'absorption de l'air sur le trajet total. Celle-ci est déterminée pour chaque bande de fréquence d'après les formules analytique décrites dans la section 4.1.3. Le calcul des énergies se fait de la manière suivante :

$$E_{si,i} = E_{r,i} \times 10^{\frac{abs_i \times l_{tot}}{10}} \quad (5.34)$$

Avec :

$E_{si,i}$: L'énergie portée par la source image sur la i-ème bande de fréquence.

$E_{r,i}$: L'énergie finale portée par le rayon sur la i-ème bande de fréquence.

abs_i : Le coefficient d'absorption de l'air sur la i-ème bande de fréquence (voir 4.1.3).

l_{tot} : La distance totale parcourue par le rayon entre la source et le récepteur.

Pour finir, on converti l_{tot} en temps pour pouvoir tracer le graphe temporel.

$$t_{tot} = \frac{l_{tot}}{v} \quad (5.35)$$

Avec :

t_{tot} : le temps de parcours entre la source-image et le récepteur

v : la vitesse du son dans l'air (340m/s)

5.5 Génération de réponse impulsionale

Disposant de la distance temporelle entre les sources-images et le récepteur, il est possible d'afficher les courbes d'énergie sonore en fonction du temps. Aussi, pour chaque

bande d'octave nous sommes les énergies par tranches temporelles. Ces tranches sont déterminées par la fréquence d'échantillonnage. Celle-ci devra être identique à celle du signal audio avec lequel la réponse impulsionnelle sera convoluée (voir 8.1). Ainsi :

$$nb_{ech} = f \times t_{max} \quad (5.36)$$

Avec :

nb_{ech} : le nombre total d'échantillon

f : la fréquence d'échantillonnage

t_{max} : le temps de parcours de la source image la plus éloignée

et pour chaque bande d'octave :

$$E_i = \sum_{\substack{t_j < \frac{i+1}{f} \\ t_j \geq \frac{i}{f}}} E_j \quad (5.37)$$

Avec :

E_i : l'énergie du i^e échantillon

E_j et t_j : respectivement l'énergie et temps de parcours de la j^e source-image

Typiquement, pour une fréquence standard de 44100Hz chaque échantillon concatènera les énergies des sources-images par tranches de 22,7μs. Les énergies seront ensuite normalisées pour obtenir la RIR.

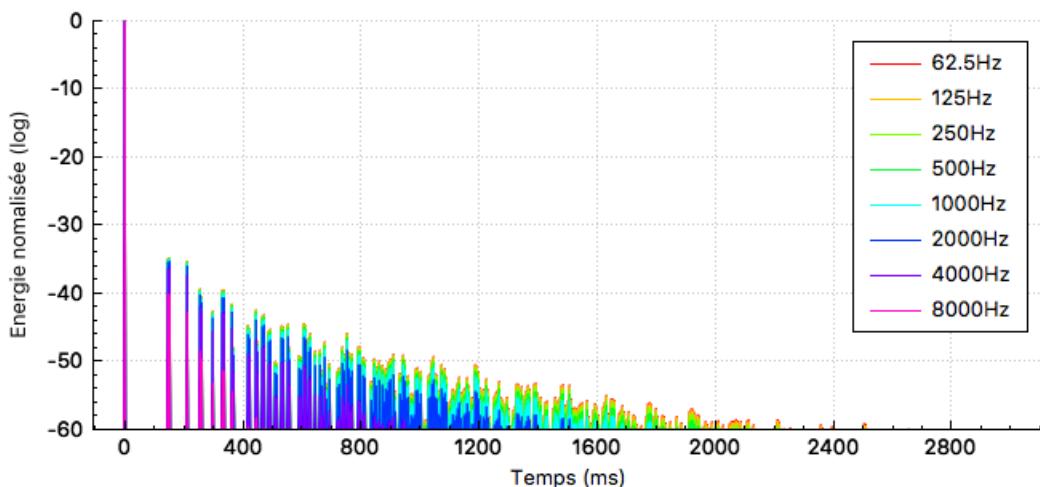


FIGURE 5.11 – Exemple de RIR pour un cube de 50m d'arrête, une source et un récepteur de 20m de diamètre situés au centre, un million de rayons et une fréquence d'échantillonnage de 44100Hz

On a vu dans les sections 5 et 5.3 que la mesure pouvait être arrêtée avant d'atteindre le seuil limite d'audition, c'est à dire -60dB. Ce cas se présente lorsque le nombre de rayons est faible, lorsque le diamètre de la sphère récepteur est petit ou bien lorsque les rayons ont une longue distance à parcourir avant d'être suffisamment atténué (dans le cas d'une pièce fermée avec des parois très réfléchissantes par exemple). Dans ce cas, la RIR doit être complétée pour pouvoir atteindre le niveau d'énergie minimum demandé (-60dB). Pour cela, chaque courbe va être prolongée par régression linéaire afin de générer de manière statistique la queue de réverbération. D'après Sabine¹⁸

A compléter ...

18. [SABINE, 1900]

Chapitre 6

Optimisation algorithmique

« *Un pessimiste voit la difficulté dans chaque opportunité, un optimiste voit l'opportunité dans chaque difficulté.* »

Winston Churchill

Sommaire

6.1 Méthode d'octree	85
6.1.1 Principe général	85
6.1.2 Implémentation	88
6.2 Analyse des résultats	90

Introduction

Afin de pouvoir qualifier les performances de l'algorithme, il est d'usage d'en mesurer la **complexité**. Ce coefficient vise à analyser et qualifier le temps de calcul d'un algorithme. Dans le cas de notre méthode couplée, nous devons analyser les différentes étapes. Pour cela, on note N le nombre de rayons et M le nombre de faces du maillage. Premièrement, la lecture du maillage ne dépend que du nombre de faces ; la complexité de cette opération est donc linéaire de type $O(M)$. De la même manière, la création des sources-images ne dépendant que du nombre de rayons sera de complexité linéaire en $O(N)$. Celle-ci se produit en boucle tant que tous les rayons n'ont pas atteint le seuil d'arrêt. Néanmoins on ne peut pas en déterminer la complexité car le temps de calcul dépend alors de la géométrie de la salle et des matériaux. Effectivement plus la salle est grande et plus les matériaux sont absorbant, plus vite s'arrêtera la boucle. L'étape la plus complexe est la boucle d'itération sur le calcul des rayons. Lors de cette étape, chaque rayon est testé avec chaque face. La complexité de cet algorithme est donc quadratique en $O(N \times M)$. Il s'agit de l'étape critique de la méthode et la plus chronophage.

Pour vérifier cela, nous mesurons le temps de calcul des intersections rayons-faces pour une itération (voir tableaux 6.2 et 6.3 et fig. 6.7). Ce test est effectué sur un MacBook de processeur 2,7GHz Intel Core i5 avec 8Go de RAM DDR3. La géométrie utilisée est un tétraèdre dont le nombre de faces est multiplié par deux chaque mesure.

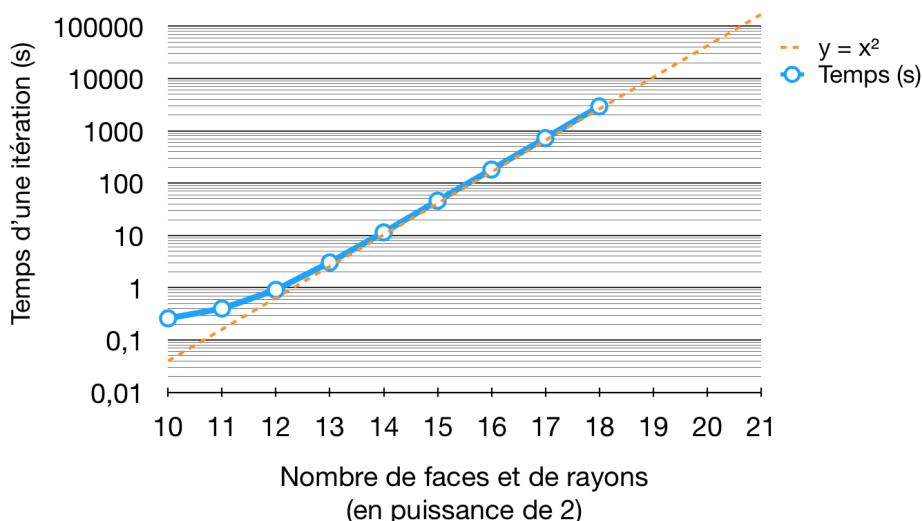


FIGURE 6.1 – Courbe de complexité donnant le temps (s) d'une itération pour $N=M$ en échelle logarithmique

On constate comme prévu que le temps de calcul évolue comme le produit du nombre de faces par le nombre de rayons ce qui donne bien une complexité quadratique. La courbe illustrant le temps de calcul en faisant varier le nombre N de rayons et le nombre M de faces tel que $N = M$ comporte bien une pente de 2 en échelle logarithmique. Effectivement :

$$T = N^2 \quad \Rightarrow \quad \ln(T) = 2 \ln(N) \quad (6.1)$$

Par ailleurs en fixant d'une part le nombre de face et d'autre part le nombre de rayons on constate que le temps augmente bien linéairement par rapport à chacun de ces paramètres (voir fig . 6.2).

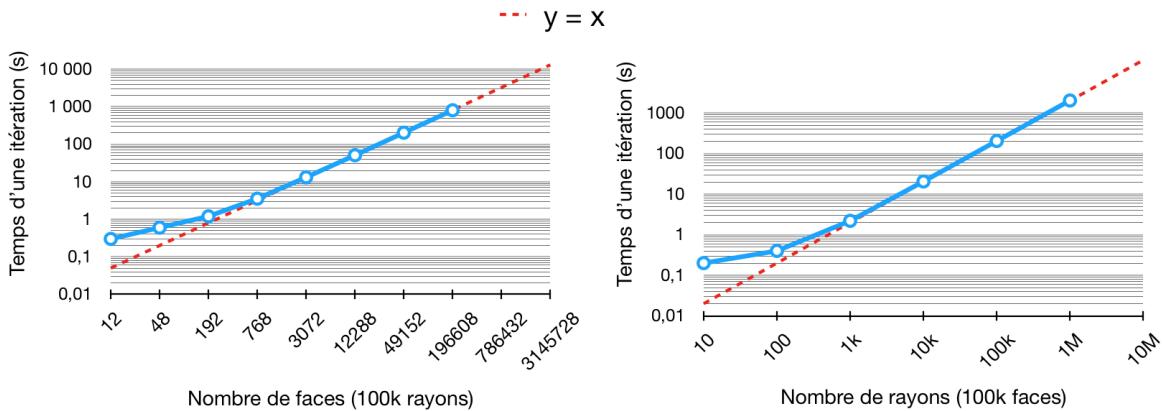


FIGURE 6.2 – Courbes de complexité donnant le temps (s) d'une itération en échelle logarithmique

Par ailleurs, dans le cas du théâtre d'Orange, le nombre de faces est supérieur à 100 000 éléments et le nombre de rayons à émettre doit être très important compte tenu de la taille du bâtiment (voir section 5.1). En testant une géométrie simplifiée du bâtiment, nous constatons que son RT₆₀ est de l'ordre de 2 secondes. Il faudra donc pouvoir réaliser des mesures pour des rayons d'environ 700m de long. D'après l'équation 5.16 :

$$N > n \left(\frac{2d}{r} \right)^2 \quad (6.2)$$

Pour une sphère de mesure de quelques mètres (celle-ci ne doit pas trop s'étendre afin que la mesure reste localisée) et n de l'ordre d'une centaine de rayons, il faudra que le nombre total de rayons N soit supérieur à 50 millions. En prolongeant la courbe de la figure 6.2 on obtient un temps de calcul d'une trentaine d'heure, ce qui n'est pas acceptable pour entrer dans le cahier des charges. Nous devons donc optimiser l'algorithme afin de résoudre ce problème.

6.1 Méthode d'octree

6.1.1 Principe général

Comme nous l'avons vu précédemment (voir section 6.7), les maillages que nous devons traiter peuvent comporter plusieurs dizaines, voire centaines de milliers d'éléments. Les algorithmes permettant de gérer ce genre de cas utilisent souvent des méthodes de "diviser pour régner (*divide and conquer*)". Cela permet, notamment dans des environnements 3D de pré-trier les données afin de ne réaliser les calculs couteux en temps que sur une quantité de données restreinte. Dans notre cas, l'utilisation d'un arbre nous permettra de ne tester les interactions qu'entre certains rayons et certains éléments : ceux qui seront situés dans la même subdivision de l'espace.

Il existe plusieurs types d'arbres permettant l'optimisation des calculs par partitionnage de données. On pourra citer par exemple les arbres binaires qui classent les données en divisant l'espace en deux de manière récursive. Nous avons choisi d'utiliser un arbre optimisé pour la 3D puisqu'il sépare l'espace en 2 sur chacune des dimensions de l'espace et crée des subdivisions de taille identiques alignées avec les axes. Chaque itération découpe la partition de l'espace précédente en 8 (soit 2³) ce qui donne le nom d'**octree** à ce procédé.

Cette méthode va permettre par la suite d'accélérer considérablement la vitesse de

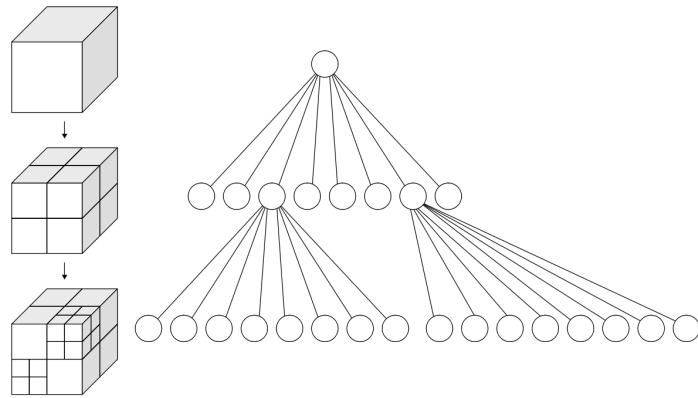


FIGURE 6.3 – Illustration du principe d'**octree**. Subdivision d'un cube en "octants" (gauche) et l'arbre correspondant (droite)

calcul¹ (voir section 6.2). Le principe consiste à créer une boîte cubique dite "boîte mère" contenant l'ensemble des éléments du maillage, c'est à dire l'ensemble des faces triangulaires. Cette "boîte mère" est alors subdivisée pour créer huit "boîtes filles" de taille identiques qui elles-mêmes vont être subdivisées en huit "boîtes filles", etc (voir fig. 6.3). De manière séquentielle et en descendant dans l'arborescence de l'arbre jusqu'à atteindre une condition d'arrêt, chaque élément contenu dans une "boîte mère" va être rangé dans la "boîte fille" qui le contient. Typiquement, l'**octree** s'arrêtera lorsque plus aucune "boîte fille" ne contient plus de n éléments. Les boîtes seront donc raffinées de la même manière que le maillage (voir fig. 6.4).

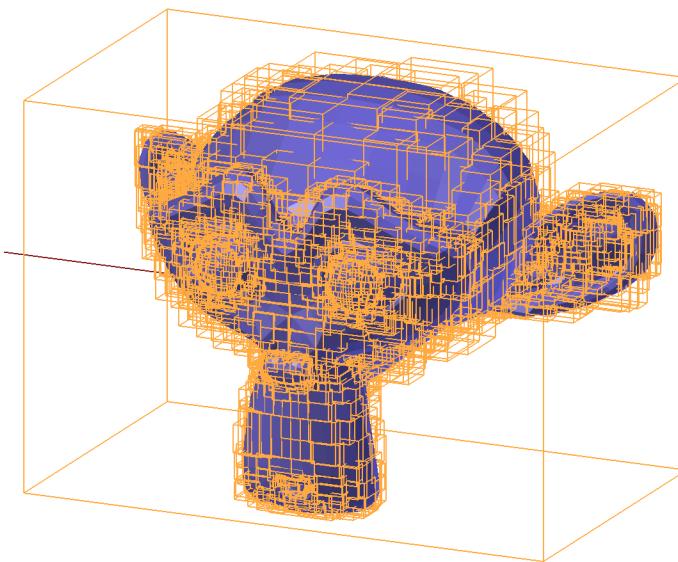


FIGURE 6.4 – Suzanne triée dans un **octree**

Vérifions comment ce système de tri permet de réduire la complexité du calcul. Nous avons vu que l'étape la plus chronophage de l'algorithme est l'interaction des rayons et des faces. Avec le partitionnement spatial de l'**octree** nous ne testons que les rayons et les faces d'une même boîte. Dans un premier temps, voyons le temps nécessaire à la répartition dans les boîtes. Nous nommons *élément* : un rayon ou une face. Nous nous plaçons dans le cas idéal où N *éléments* sont répartis de manière uniforme dans l'espace.

1. [MEAGHER, 1982, p. 5]

On nomme *opérations* le rangement des *éléments* dans les boites. On note p le nombre d'étages de l'*octree*. Pour $p = 0$, c'est à dire lorsque l'*octree* n'est composée que de sa boite racine, la boite mère contient N *éléments*. Pour $p = 1$ il faut ranger N élément dans 8 boites-filles. Il y aura donc $8N$ *opérations*. A l'étage suivant, chaque boite-fille contenant $\frac{N}{8}$ *éléments* devient alors un boite mère traitée comme précédemment. Ainsi il faut 8 *opérations* par boite-mère pour ranger leur $\frac{N}{8}$ *éléments*. Nous avons donc à cette étape :

$$8^2 \frac{N}{8} = 8N \text{ opérations.}$$

De la même manière à l'étape suivante on aura :

$$8^3 \frac{N}{8^2} = 8N \text{ opérations.}$$

Que l'on peut écrire dans le cas général :

$$8^p \frac{N}{8^{p-1}} = 8N \text{ opérations.}$$

On constate qu'à chaque étage on a un nombre constant d'*opérations* proportionnel au nombre d'*éléments* à ranger dans les boites et que le nombre total d'*opérations* est proportionnel à $p.N$.

Voyons maintenant comment déterminer p . Nous nous plaçons dans le cas où les boites du dernier étage ne contiennent qu'un unique *élément*. Nous avons donc :

$$8^p = N \quad (6.3)$$

Ainsi :

$$p \cdot \ln 8 = \ln N \quad (6.4)$$

$$p = \frac{1}{\ln 8} \ln N \quad (6.5)$$

Le nombre d'étages est donc proportionnel au logarithme du nombre d'*éléments*. Le rangement des *éléments* dans les boites est donc proportionnel à $N \cdot \ln N$. A cela il faudra ajouter les calculs des intersections rayons/faces qui ne sont fait que N fois, c'est à dire une fois par boite (puisque on n'a qu'un rayon et qu'une face par boite).

Dans le cas général où les *éléments* ne sont pas répartis de manière uniforme, la démonstration est plus complexe. Effectivement, on ne peut pas prédire quelles boites vont être vides avant les autres et donc combien il y aura de boites par étages (voir fig. 6.3). Cela est dû au fait que l'espace est divisé en 8^p à chaque étage et que selon la répartition des éléments certaines boites vont se retrouver vide et ne plus se subdiviser. La démonstration générale pourrait par contre fonctionner dans le cas d'un arbre binaire par exemple puisque que le découpage dans l'espace se fait de manière à avoir un nombre équivalent d'*éléments* dans chaque boite quelque soit leur répartition.

Par ailleurs, en pratique il pourra être plus judicieux de ne pas garder un unique *élément* par boite dans le dernier étage mais plutôt d'arrêter l'arbre lorsque les boites possèdent toutes moins de n *éléments*. L'équation 6.3 devient :

$$8^p = \frac{N}{n} \quad (6.6)$$

Ainsi :

$$p \cdot \ln 8 = \ln N - \ln n \quad (6.7)$$

$$p = \frac{1}{\ln 8} \ln N - \frac{\ln n}{\ln 8} \quad (6.8)$$

Le nombre d'étage nécessaire diminue donc d'un terme constant et le temps de calcul sera proportionnel à $(aN \ln N + bN)$ avec a et b des constantes. La complexité reste donc en $O(N \cdot \ln N)$.

6.1.2 Implémentation

L'algorithme a été développé de la manière suivante (voir fig 6.5) :

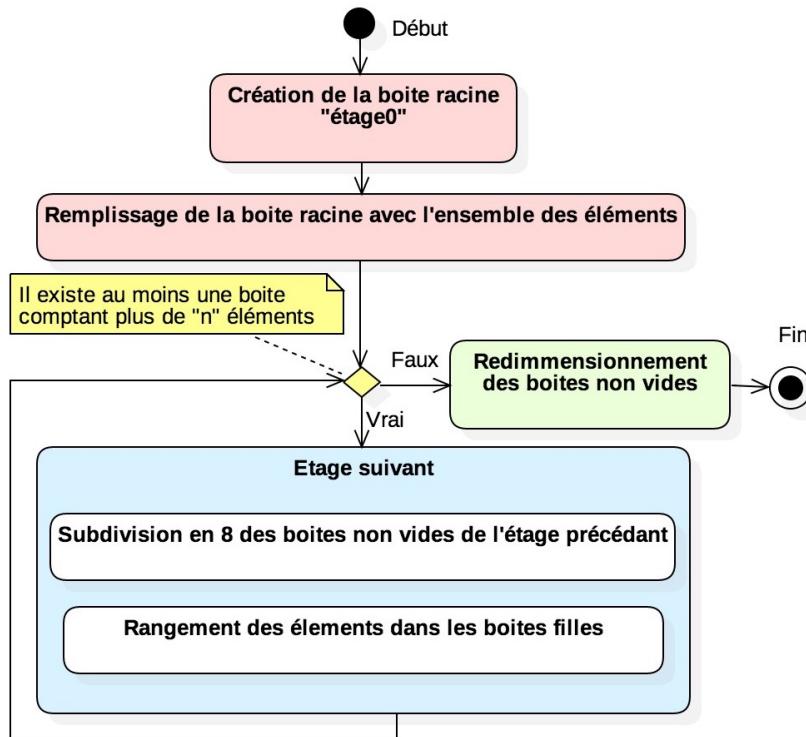


FIGURE 6.5 – Diagramme d'activité résumant le processus de création d'un arbre d'octree

Une première boite cubique englobant le maillage dans sa globalité est créée. On y associe les indices de l'ensemble des faces puisqu'elles sont toutes contenues dans cette "boite racine". On va ensuite, de manière récursive descendre dans des étages successifs. Passer de l'étage p à l'étage $p + 1$ revient à découper toutes les boites non-vides de l'étage p en huit boites-filles de tailles égales qui deviendront à leur tour les boites-mères de l'étage $p + 1$. Les indices des faces assignés à une boite-mère sont répartis dans les huit boites-filles. Pour savoir quel face appartient à quelle boite, on utilise les coordonnées du centre de la face. Effectivement, une face peut géométriquement appartenir à plusieurs boites mais il est nécessaire de les considérer comme ponctuelle afin qu'une face ne puisse se retrouver que dans une boite à la fois. La boucle récursive s'arrête lorsque les boites possèdent toutes moins d'éléments qu'une valeur seuil. Ainsi nous nous assurons que l'**octree** se raffine de la même manière que le maillage et que chaque boite ne contient qu'un faible nombre d'éléments.

Il reste néanmoins une dernière étape qui permettra de s'assurer que les rayons rencontrent les bonnes faces. Il s'agit de redimensionner les boites non-vides pour que cette fois, elles englobent bien géométriquement les faces qu'elles contiennent.

A chaque itération, on va alors pouvoir répartir les rayons dans l'**octree** (voir nouveau diagramme d'activité des rayons, fig. A.1). Pour cela, les rayons sont assignés aux boites qu'ils intersectent à partir de la "boite racine" et en descendant dans l'arborescence de chaque branche. De la même manière que pour les triangles, les rayons sont testés avec des boites-filles que s'ils ont bien intersecté la boite-mère correspondante. Pour savoir si l'indice d'un rayon doit être assigné à une boite, nous utilisons un algorithme

optimisé d'intersection Rayon/Boite². La particularité des boites d'un **octree** est qu'elles sont toutes alignées selon les axes du repère cartésien. On appelle communément ce type de boîte **Axis-Aligned Bounding Box (AABB)** en opposition aux **Oriented Bounding Box (OBB)**. Nous allons donc utiliser cette propriété pour vérifier si un rayon intersecte une boîte. Pour cela rappelons qu'un rayon peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = D \times t + O \quad (6.9)$$

Avec :

D : le vecteur directeur du rayon de coordonnées ($D_x; D_y; D_z$)

O : le point d'origine du rayon de coordonnées ($O_x; O_y; O_z$)

On peut également exprimer les plans délimitant la boîte de type **AABB** par les équations suivantes :

$$f(t) = X_{min} \quad (6.10)$$

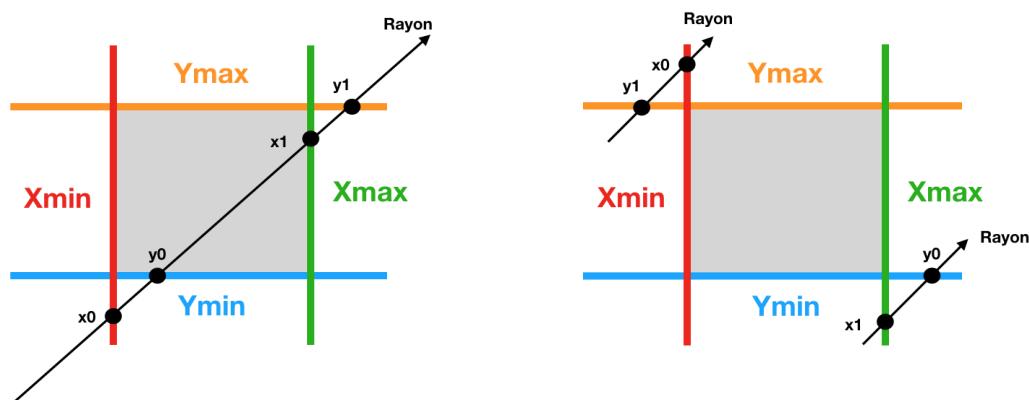
$$f(t) = X_{max} \quad (6.11)$$

$$f(t) = Y_{min} \quad (6.12)$$

$$f(t) = Y_{max} \quad (6.13)$$

$$f(t) = Z_{min} \quad (6.14)$$

$$f(t) = Z_{max} \quad (6.15)$$



(a) Vue 2D d'un rayon intersectant la boîte

(b) Vue 2D de rayons n'intersectant pas la boîte

FIGURE 6.6 – Illustrations de l'intersection Rayon/Boîte en 2D

Ainsi, on peut exprimer les points d'intersection entre le rayon et les plans délimitant la boîte avec le système d'équations suivant :

2. [WILLIAMS et collab., 2005, oeuvre intégrale]

$$X_{min} = x_0 \times D_x - O_x \Rightarrow x_0 = \frac{X_{min} - O_x}{D_x} \quad (6.16)$$

$$X_{max} = x_1 \times D_x - O_x \Rightarrow x_1 = \frac{X_{max} - O_x}{D_x} \quad (6.17)$$

$$Y_{min} = y_0 \times D_y - O_y \Rightarrow y_0 = \frac{Y_{min} - O_y}{D_y} \quad (6.18)$$

$$Y_{max} = y_1 \times D_y - O_y \Rightarrow y_1 = \frac{Y_{max} - O_y}{D_y} \quad (6.19)$$

$$Z_{min} = z_0 \times D_z - O_z \Rightarrow z_0 = \frac{Z_{min} - O_z}{D_z} \quad (6.20)$$

$$Z_{max} = z_1 \times D_z - O_z \Rightarrow z_1 = \frac{Z_{max} - O_z}{D_z} \quad (6.21)$$

On comprend d'après les figures 6.6a et 6.6b que l'on va pouvoir déterminer si un rayon intersecte une boîte en comparant les coordonnées des points d'intersection avec les plans. Notamment, si $x_0 > y_1$ ou $y_0 > x_1$ le rayon n'intersectera pas la boîte (voir fig 6.6b). Dans le cas contraire, on appliquera le même principe sur z . Il n'y aura alors pas d'intersection si $\max(x_0; y_0) > z_1$ ou $z_0 > \min(x_1; y_1)$. On notera que si le rayon est dirigé dans le sens inverse il faudra inverser les α_0 et α_1 (α correspondant aux coordonnées x, y, z).

De cette façon les feuilles de l'**octree**, c'est à dire les boîtes les plus basses dans l'arborescence, prendront comme arguments les indices des rayons les traversant. On pourra ainsi ne tester les intersections d'entre les rayons et les éléments situés dans les mêmes subdivisions de l'espace. Feuille par feuille, l'algorithme va donc déterminer pour chaque face les rayons qui l'intersecte et le cas échéant, sa longueur.

6.2 Analyse des résultats

Nous allons maintenant vérifier si l'implémentation de cette méthode permet d'accélérer le temps de calcul et sous quelles conditions.

Comme évoqué précédemment, l'étape critique de l'algorithme est le test d'intersection rayons/éléments car la complexité initiale est quadratique et que ce processus se répète à chaque itérations jusqu'à atteindre RT₆₀. La complexité théorique en utilisant un **octree** est de type O(N ln M). Pour vérifier ce comportement nous réitérons le même test que dans la section 6.7 afin de comparer les résultats (voir tab. 6.1 et fig. 6.7).

On constate dans un premier temps que le régime stationnaire commence plus tard en utilisant l'**octree**. Effectivement, le temps d'une itération reste inférieur à 1s tant que N est inférieur à 70 000 éléments contre 4 000 sans **octree**. Ensuite on voit que la pente est quasiment linéaire ce qui coïncide à la complexité théorique établie dans la section 6.1.1 puisque :

$$\ln N \Rightarrow \text{cste} \quad \text{pour } N \text{ grand.}$$

En observant le tableau 6.1, on constate par exemple que pour N = 262 144 on divise par 1000 le temps de calcul par itération ce qui est très prometteur pour le calcul dans le théâtre d'Orange.

Dans un second temps nous ne faisons varier qu'un des deux paramètres et mesurons l'impact sur le temps de calcul (voir tab. 6.2, 6.3 et fig. 6.8).

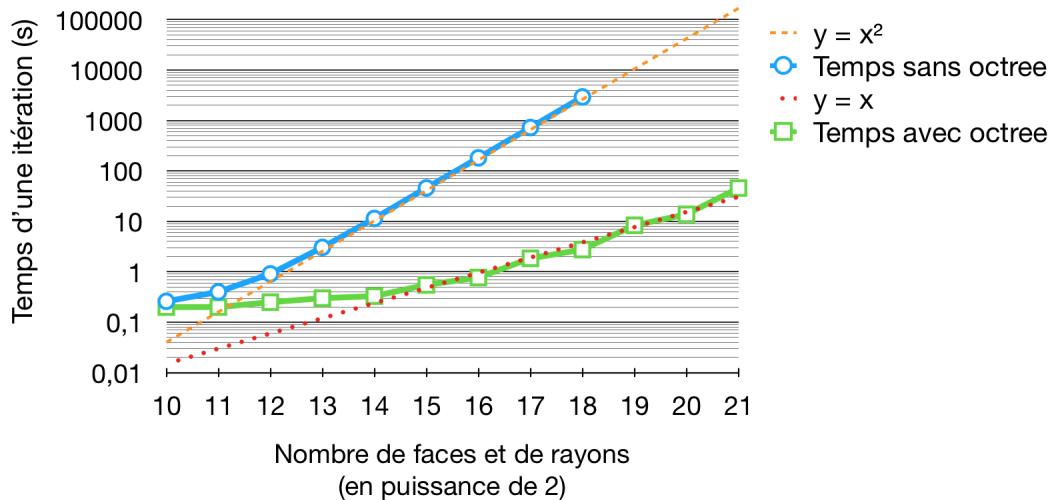


FIGURE 6.7 – Courbe de complexité donnant le logarithme du temps (s) d'une itération pour N=M

Nombre de faces et de rayons	Temps sans octree (s)	Temps avec octree (s)
2^{10} (=1 024)	0,26	0,2
2^{11} (=2 048)	0,4	0,2
2^{12} (=4 096)	0,91	0,25
2^{13} (=8 192)	3,05	0,3
2^{14} (=16 384)	11,44	0,33
2^{15} (=32 768)	46,02	0,55
2^{16} (=65 536)	181,61	0,77
2^{17} (=131 072)	725,17	1,85
2^{18} (=262 144)	2927,9	2,76
2^{19} (=524 288)	X	8,36
2^{20} (=1 048 576)	X	13,78
2^{21} (=2 097 152)	X	45,83

TABLEAU 6.1 – Temps de calcul d'une itération pour 100k rayons

Nombre de faces	Temps sans octree (s)	Temps avec octree (s)
12	0,3	0,3
48	0,6	0,4
192	1,2	0,5
768	3,55	0,5
3072	13,2	0,6
12288	51	0,7
49152	203,6	0,9
196608	808,2	1,1
786432	X	1,7
3145728	X	6,1

TABLEAU 6.2 – Temps de calcul d'une itération pour 100k rayons

Nombre de rayons	Temps sans octree (s)	Temps avec octree (s)
10	0,2	0,2
100	0,4	0,2
1k	2,2	0,2
10k	20,5	0,3
100k	203,6	0,9
1M	2026	7,1
10M	X	73,7

TABLEAU 6.3 – Temps de calcul d'une itération pour 50k faces

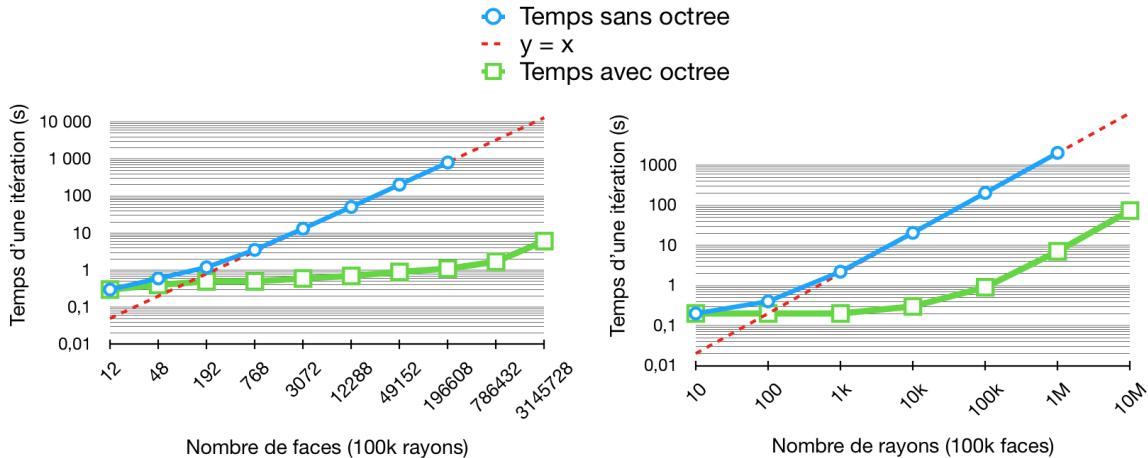


FIGURE 6.8 – Courbes de complexité donnant le temps (s) avec et sans octree d’une itération en échelle logarithmique

Sur cette dernière figure on constate que le temps de calcul redevient quadratique lorsque le nombre de faces ou le nombre de rayons devient majoritaire sur l’autre paramètre. On constate par ailleurs qu’en fixant un nombre important de rayons le temps de calcul ne dépendra pas du nombre de faces du maillage. Cela est encourageant dans le cadre du théâtre d’Orange puisque des surfaces plus détaillées pourront être implémentées sans grand impact sur le temps de calcul.

Chapitre 7

Logiciel développé

« *L'observateur modifie ce qu'il observe. Certains événements ne se produisent que parce qu'ils sont observés. Sans personne pour les voir ils n'existeraient pas.* »

Bernard Werber

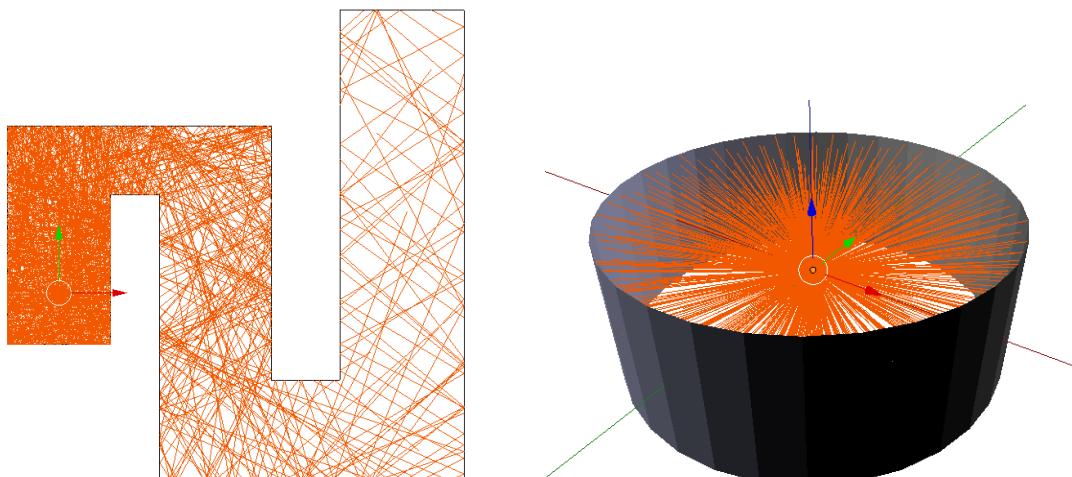
Sommaire

7.1 Validation	95
7.1.1 Décroissance quadratique	95
7.1.2 Cas de la salle sphérique	95
7.1.3 Cas de la salle cubique	97
7.2 Interface utilisateur	98

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons détaillé le fonctionnement de l'algorithme conçu pour analyser l'acoustique d'une salle. La méthode utilisée couple les principes de lancer de rayons, de sources-images et d'extrapolation stochastique. Elle vise à répondre aux problématiques de calcul acoustique en environnement complexe de manière géométrique et discrétisée. Géométrique, car seuls les effets de réflexion et absorption sont pris en compte et discrétisée car l'énergie d'onde n'est pas portée par une sphère mais par un grand nombre de rayons repartis de manière uniformes. Ainsi, il est essentiel de confirmer la justesse de ses approximations en les confrontant à des modèles théoriques. Dans ce chapitre, nous allons valider l'algorithme d'un point de vu physique et analyser ses performances. Nous présenterons ensuite son ergonomie pour l'utilisateur et constaterons que la configuration peut se faire depuis Blender ainsi que l'analyse de certains résultats (comme l'affichage des rayons ou de la position de sources images par exemple). Nous finirons par une brève présentation du traitement du signal implémenté afin de rendre le résultat de calcul audible.

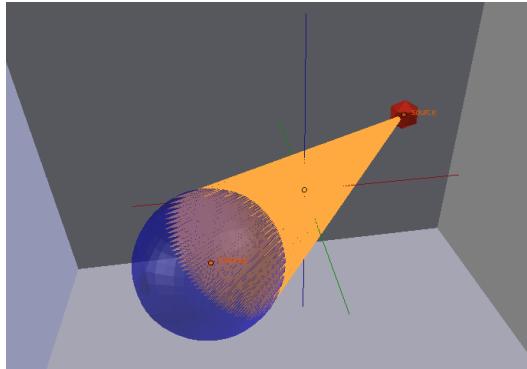
Avant de tester la justesse des résultats d'un point de vu physique, il est bon d'en vérifier la justesse géométrique. Ainsi, nous analysons si les rayons ne traversent pas les parois et que la boîte englobante assure bien son rôle. Pour cela, nous importons les rayons générés par notre logiciel dans des configurations de salles simples. En propageant les rayons dans un petit labyrinthe nous confirmons qu'ils s'arrêtent bien à la paroi la plus proche et qu'ils sont ainsi contenus à l'intérieur de la salle. Nous confirmons également le bon fonctionnement de la boîte englobante en utilisant une salle sans plafond ni plancher. Les rayons sont bien stoppés par une paroi invisible.



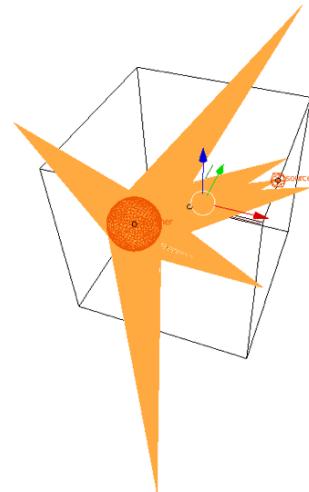
(a) Propagation des rayons dans un labyrinthe

(b) Absorption des rayons par une boîte englobante autour d'un cylindre ouvert

Nous vérifions aussi que les rayons captés par le récepteur sont bien portés par des cônes. Pour cela nous affichons sur blender uniquement les rayons générant une source image et les traçons depuis celle-ci.



(a) Propagation des rayons depuis la source vers le récepteur (100000 rayons au total)



(b) Propagation des rayons depuis les sources-images vers le récepteur à l'ordre 0 et 1 (100000 rayons au total)

7.1 Validation

7.1.1 Décroissance quadratique

Suite à ces vérifications préliminaires, le premier test à réaliser pour analyser le comportement physique de l'algorithme est celui décrit dans la section 5. Il s'agit de vérifier si l'utilisation d'un grand nombre de rayons et d'un récepteur de diamètre fixe permet de retrouver la loi de décroissance en d^2 . Pour effectuer ce test, nous plaçons une source et un récepteur de rayons 1m au centre d'un cube de 10m de côté. Afin de simuler des mesures en espace libre (c'est à dire sans aucune paroi) où le récepteur s'éloigne de la source, nous allons affecter au cube des matériaux 100% absorbants sur toutes ses parois sauf celles sur l'axe des X qui seront 100% réfléchissantes. Ainsi, cela revient à effectuer une mesure tous les 10m, soit le temps d'aller retour des rayons du centre du cube jusqu'aux parois. N'ayant des réflexions que sur un axe, on reproduit une propagation en espace libre puisque seuls les rayons contenus dans le cône autour de l'axe X conserveront leur énergie. Cependant, les rayons se réfléchissant en X et en -X de manière synchrone, on aura deux fois plus de rayons que si l'on se plaçait en espace libre. Nous pouvons comparer le résultat pour 30 itérations avec la fonction :

$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$

Pour ce test, l'absorption de l'air a été désactivée afin de ne prendre en compte que la décroissance d'énergie portée par les rayons perçus. On observe bien sur la figure 7.3 que l'énergie suit la courbe de décroissance quadratique.

7.1.2 Cas de la salle sphérique

Le deuxième test consiste à vérifier que l'énergie est bien conservée. Pour cela, nous plaçons une source et un récepteur de diamètre 1m au centre d'une sphère 100% réfléchissante de diamètre 4m. Ainsi à chaque itération, l'ensemble des 1000 rayons revient se croiser au centre de la sphère et sont donc tous captés par le récepteur. Nous obtenons une réponse impulsionnelle de la forme d'une peigne de Dirac (voir fig. 7.4a). L'écart

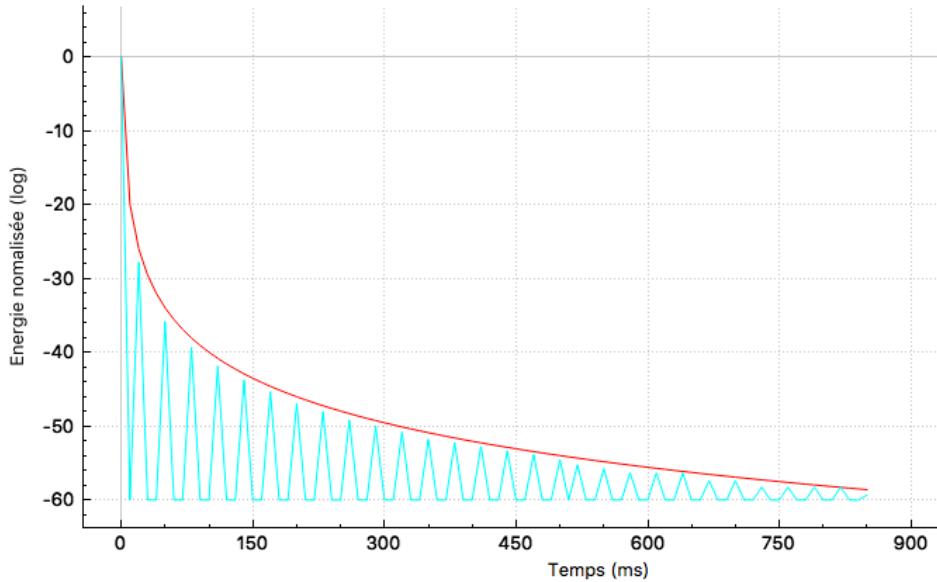
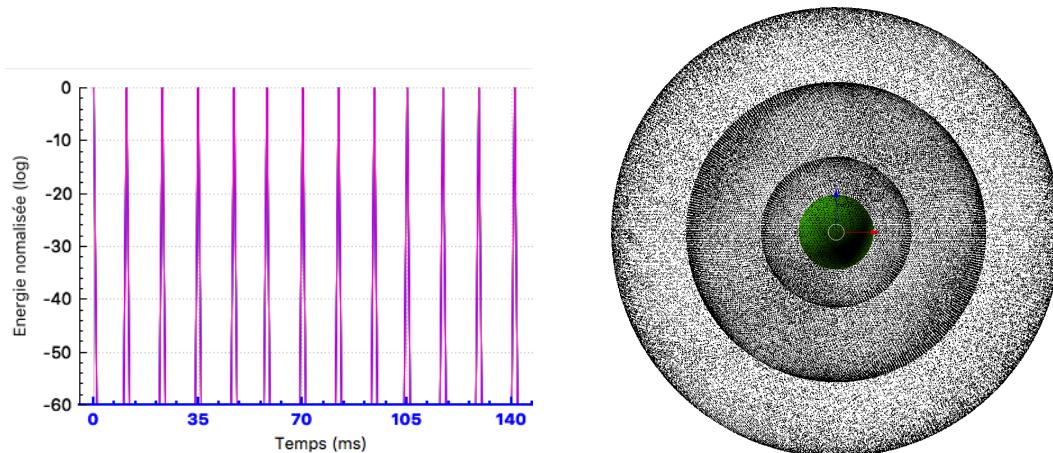


FIGURE 7.3 – Réponse impulsionnelle en espace libre pour 3 millions de rayons (bleu) échantillonnée à 100Hz et fonction $f(x) = \frac{2}{x^2}$ (rouge)

entre chaque pic est de $11,76\text{ms}$ ce qui correspond bien à une distance de 4m parcourue à la vitesse du son fixée à 340m/s . Pour éviter la dispersion des rayons il est nécessaire d'avoir une sphère très bien raffinée. Celle utilisée pour le test possède 320000 triangles. Par ailleurs, la fréquence d'échantillonnage est descendue à 1000Hz pour s'assurer que les sources-images de chaque itération soient parfaitement synchronisées dans le calcul de l'énergie. On pourra par ailleurs importer les source-images sous Blender et constater qu'elles sont bien réparties sur des sphères dont le diamètre est doublé à chaque itération (voir fig. 7.4b)



(a) Réponse impulsionnelle dans une sphère 100% réfléchissante pour 12 itérations

(b) Position des sources images dans le cas d'une sphère 100% réfléchissante pour 4 itérations

Si l'on active l'absorption de l'air, on constate bien que les hautes fréquences sont plus absorbées que les basses fréquences en fonction de la distance (voir fig. 7.5). Notamment au bout de 1700ms soit 578m , les fréquences à 8kHz ont quasiment totalement été absorbées par l'air, pour une température de 20°C et une pression relative de 50%.

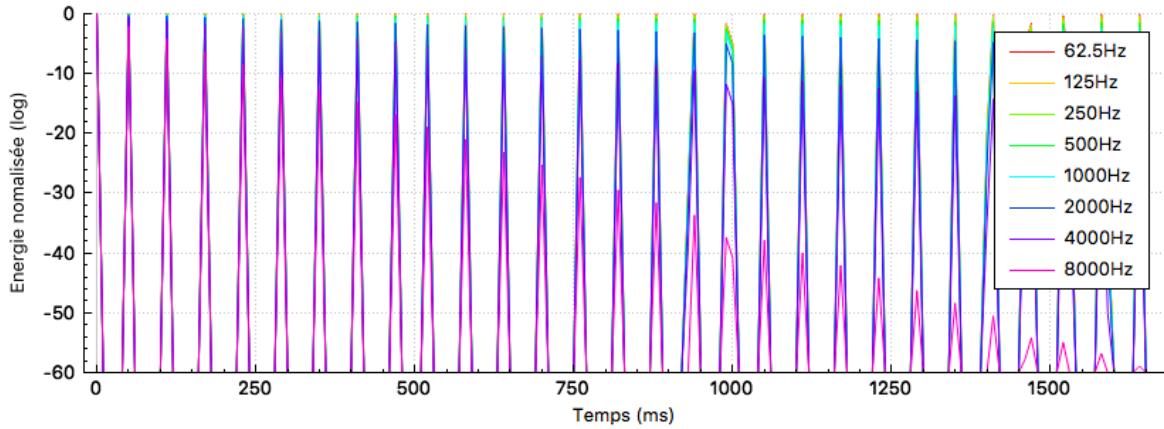


FIGURE 7.5 – Réponse impulsionnelle dans une sphère de 20m de diamètre, 100% réfléchissante, pour 30 itérations avec absorption de l'air

7.1.3 Cas de la salle cubique

Le dernier test consiste à comparer les résultats de calcul avec une formule analytique pour une pièce de type pavé droit. La formule ¹ est la suivante :

$$A = (-1)^i \quad (7.1)$$

$$B = i + 0,5 - 0,5 \times (-1)^i \quad (7.2)$$

$$P_{si} = A \times P_s + B \times D \quad (7.3)$$

Que l'on peut plus simplement écrire :

$$P_{si} = i \times D + P_s \times (-1)^i \quad (7.4)$$

Avec :

$i \in (-n, n)$ et $n \in \mathbb{N}$

P_{si} : La coordonnée de la position de la source image selon X, Y ou Z

P_s : La coordonnée de la position de la source selon X, Y ou Z

D : La dimension de la salle selon X, Y ou Z

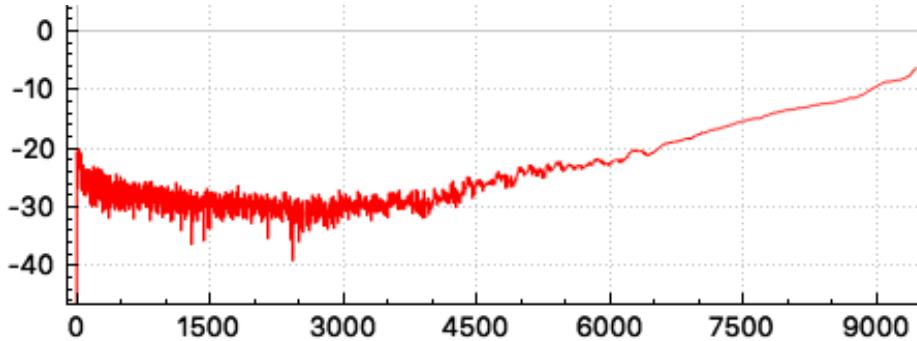
On constate alors qu'on a une superposition des sources-images dans l'espace. Cette précision se dégrade légèrement lorsque le nombre de rayons ou le nombre d'itérations augmente à cause de l'imprécision machine ; elle reste cependant acceptable. Nous calculons l'erreur relative de la distance au récepteur pour les sources-images expérimentales obtenues par lancer de rayons et les sources-images théoriques obtenues par formule analytique.

$$\epsilon_{rel} = \frac{D_{exp} - D_{theo}}{D_{theo}} \quad (7.5)$$

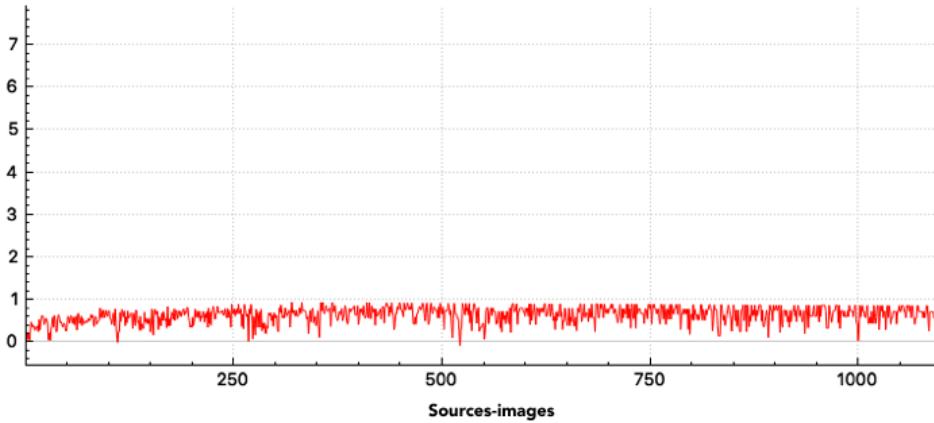
La précision est de l'ordre du centième de pour-cent et augmente légèrement lorsqu'on s'éloigne du récepteur (voir fig. 7.6a). En terme de mesure d'énergie, on assigne à chaque source-image une énergie de $\frac{1}{d^2}$ où d est sa distance par rapport au récepteur. Nous traçons de la même manière l'erreur relative sur les énergies.

On constate que celle-ci à une valeur moyenne de 0,6% est qu'elle reste toujours inférieure à 1% jusqu'à un certain seuil (voir fig. 7.6b).

1. [McGOVERN, 2009, p. 182-189]



(a) Erreur relative des distances (% en échelle log) pour une salle cubique de 10m de coté, 1000000 rayons et 20 itérations



(b) Erreur relative des énergies (%) pour une salle cubique de 10m de coté, 100000 rayons et 10 itérations

7.2 Interface utilisateur

La force de ce développement logiciel est que l'utilisateur n'a pas besoin d'effectuer de manipulations complexes pour obtenir les résultats de calcul d'acoustique de salle. Il pourra travailler directement sur son maillage dans le logiciel **CAO (conception assistée par ordinateur)** et lancer le calcul. Blender permet de développer des scripts en Python qui peuvent par la suite être installés sous forme de *add-on*. L'interface homme-machine de Blender est donc complètement modulable et personnalisable. Le add-on développé dans la cadre de ce projet possède quelques boutons. En utilisant le bouton "Run", Blender transforme les faces des objets sélectionnés en triangle et les exporte au format **OBJ** (dans le répertoire où se trouve l'exécutable créé en C++). Dans le fichier de maillage, chaque objet est différencié par un en-tête comprenant son nom. S'en suit les coordonnées de l'ensemble de ses sommets (ou vertices), de ses textures et de ses normales. Ensuite sont regroupées par matériaux, les faces par combinaison de trois vertices, d'une texture et d'une normale. Un vecteur de sommets et un vecteur de normales sont remplis face par face en conservant le même ordre. Ces deux vecteurs stockent ainsi la totalité du maillage. Les textures quant à elles ne nous sont pas utiles. Les coefficients d'absorption des matériaux sont aussi assemblés dans un vecteur en les classant face par face en respectant l'ordre établi précédemment.

Par défaut, une source et un récepteur sont positionnés au point [0, 0, 0]. Le rayon de mesure du récepteur est de 1m. Cependant, l'utilisateur pourra changer ces paramètres en créant des objets source et récepteur dans Blender. Pour être reconnus et discriminés du maillage, ces objets doivent respectivement comporter les mots "*source*" et "*listener*"

dans leur nom. L'algorithme déterminera alors le centre des objets sources et des récepteurs en calculant la moyenne des coordonnées des sommets. Le rayon de mesure du récepteur correspond au rayon de la sphère circonscrite à l'objet "*listener*". Notons qu'il est possible de placer plusieurs sources. L'ensemble des calculs se réaliseront séquentiellement pour une source après l'autre. Un seul récepteur est pris en compte. L'add-on Blender permet de mettre à jour uniquement les informations sur les sources et récepteurs sans avoir besoin de recharger tout le maillage. Par ailleurs l'utilisateur assignera aux différentes parois un type de matériau en faisant apparaître dans son nom la référence du matériau issue de la base de donnée Odéon (voir section 5.2.1).

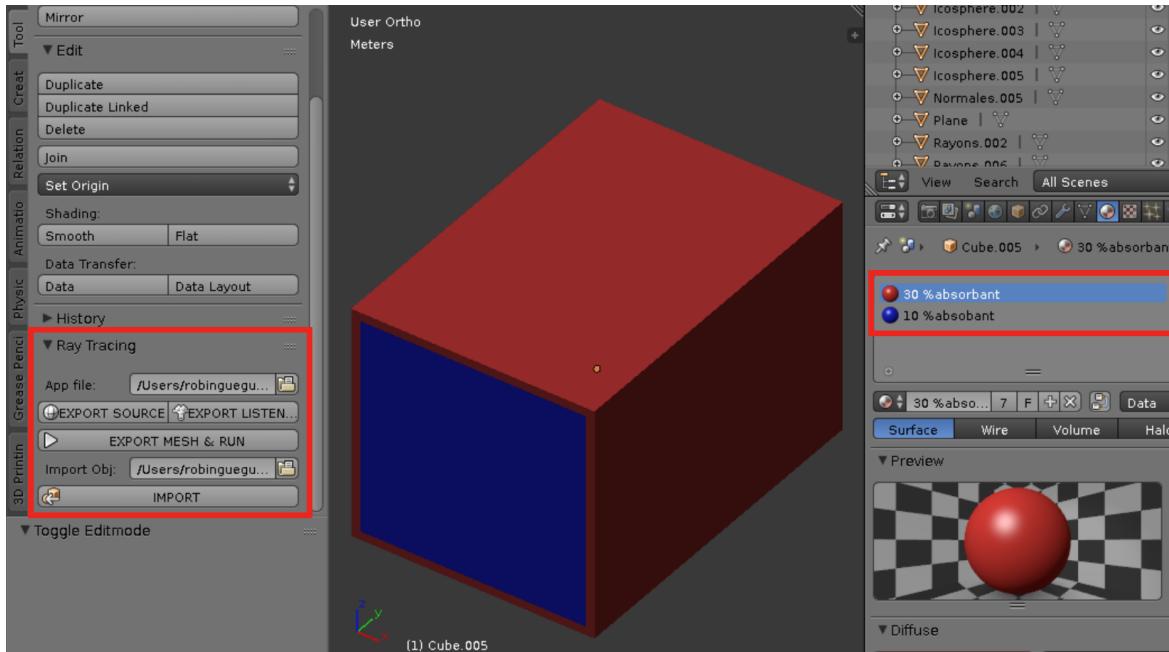


FIGURE 7.7 – Add-on Blender et assignation des matériaux

Chapitre 8

Traitement du signal

« *Il ne faut pas traiter les gens d'imbéciles, le mot incomplets serait généralement plus approprié.* »

Paul Valéry

Sommaire

8.1 Convolution partitionnée	102
8.2 Signal binaural avec head-tracker	103

8.1 Convolution partitionnée

L'analyse de résultats d'une étude acoustique peut parfois être délicate et difficile pour les personnes extérieures au milieu. Le résultat final qui pourra être analysé par le plus grand nombre est le signal audio de sortie. Même si l'analyse d'un signal audio nécessite une grande finesse auditive, elle présente pour avantage d'être accessible par une simple écoute. Pour obtenir le son réverbéré, il s'agit de convoluer le signal d'origine avec les **filtre à réponse impulsionnelle finie**, ou *Finite Impulse Response filter (FIR)*. Un FIR est une RIR exprimé en pression tel que :

$$P = \sqrt{E} \quad (8.1)$$

Avec :

P : La pression sonore normalisée

E : L'énergie normalisée

Convoluer ces signaux revient à multiplier point par point le fichier audio avec les FIR dans le domaine de Fourier (fréquentiel). On utilise pour cela des fichiers au format **WAV**. Dans le cas de longs signaux, il est judicieux d'utiliser une convolution partitionnée afin de réduire le stockage de données et accélérer les calculs¹.

L'algorithme mis en place fonctionne de la manière suivante (voir fig. 8.1) :

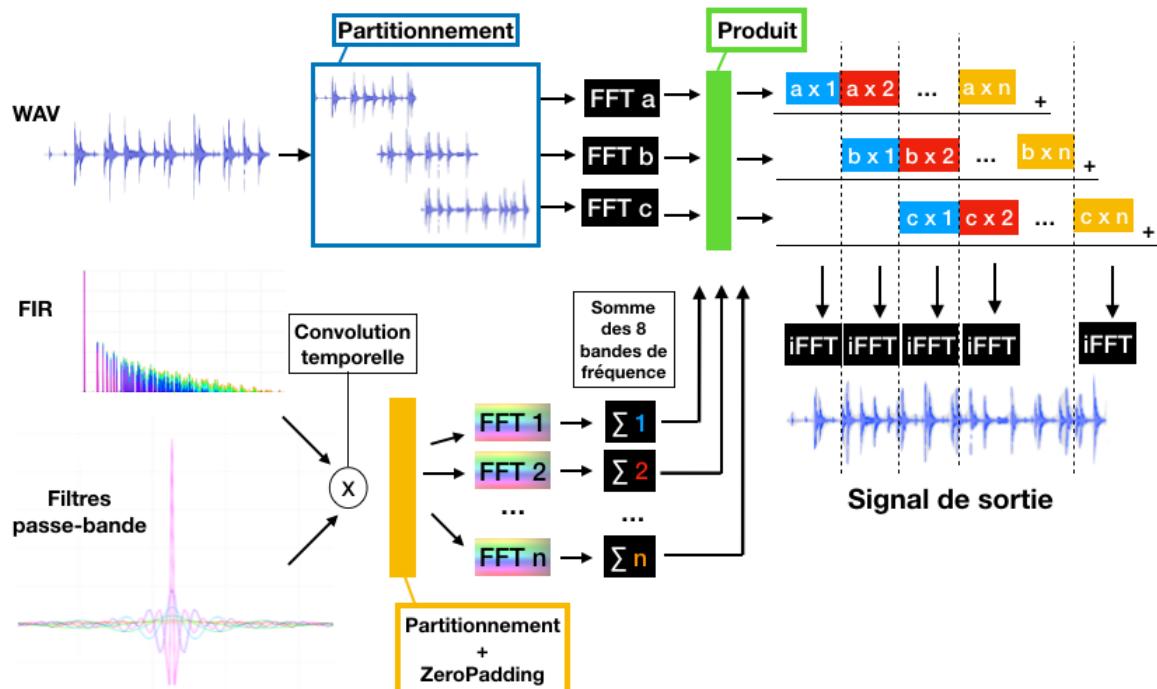


FIGURE 8.1 – Schéma du processus de convolution partitionnée

Premièrement, on fixe la longueur des partitions à n échantillons tel que n soit une puissance de 2 (typiquement 1024). Dans un premier temps, le signal audio est découpé par tranches de n échantillons et chaque tranche recouvre la précédente sur la moitié de sa taille. Chacune d'entre elles est ensuite passée dans le domaine spectral par **transformation de Fourier rapide (FFT)**. Dans un second temps les FIR sont convolus temporellement à des filtres passe-bande (voir fig. 8.2), c'est à dire que chaque pic des FIR

1. [BATTENBERG et AVIZIENIS, 2011, 2. Algorithm overview]

sera multiplié par le filtre passe-bande de la fréquence correspondante. Les huit signaux de sortie sont alors découpé par tranches de $n/2$ échantillons que l'on fait précéder de $n/2$ zéros. Ce procédé se nomme "*ZeroPadding*" et permet d'éviter les effets de crénelage (*aliasing*) lors de la convolution de deux signaux. En effet, les spectres des signaux présentent sur leur partie négative un repliement qui apporte de l'information redondante lors de la convolution. C'est pour cette même raison que les partitions du signal audio ont un recouvrement de $n/2$ échantillons. Ainsi, seuls les $n/2$ derniers échantillons du résultat de convolution sont utiles. Avant de pouvoir effectuer cette opération il faut passer les filtres dans le domaine spectral et sommer les huit bandes de fréquence. Une par une les partitions du signal audio sont convoluées aux filtres et à chaque nouvelle partition, on décale le résultat de $n/2$ échantillons. On pourra alors sommer les résultats et effectuer une transformée de Fourier inverse pour récupérer le signal de sortie. Celui-ci sera identique au signal d'entrée à la différence qu'il sera réverbéré, c'est à dire que chaque pic de la RIR répétera le signal d'entrée en écho.

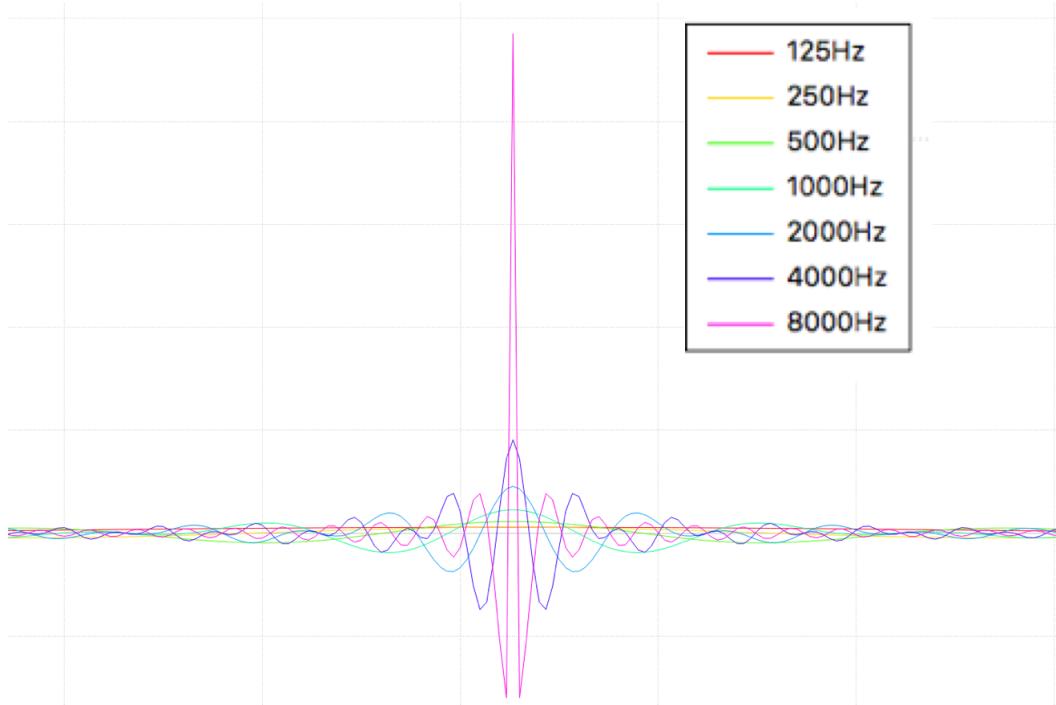


FIGURE 8.2 – Filtres fréquentiels passe-bande

8.2 Signal binaural avec head-tracker

Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté les problématiques soulevées par une étude acoustique d'un monument antique. La géométrie complexe de ce type de bâtiment et leur taille colossale impose l'utilisation de méthodes de calcul approchées. Ainsi, par simulation des réflexions et absorptions des parois, il est possible d'étudier la réverbération d'une salle. Malgré les approximations inéluctables du modèle, nous avons prouvé que les lois de la physique sont respectées. Un algorithme rapide a été mis en place pour permettre aux utilisateurs de tester facilement et rapidement leurs hypothèses architecturales. Ainsi, le temps de calcul devient peu sensible aux nombres d'éléments du maillage ce qui est souvent limitant dans ce genre d'étude. L'implémentation d'une [Interface Homme-Machine \(IHM\)](#) sous Blender s'interface dans la continuité de l'étude présentée dans la partie I de ce document.

La figure 8.3 présente de manière synthétique l'architecture logicielle développée au cours du projet.

Le fonctionnement de l'algorithme développé a été présenté en détail de même que les différents outils d'analyse qui en découlent. Il est alors possible d'étudier le graphe temporel de réverbération du bâtiment ainsi que la position dans l'espace des différentes réflexions sonores. Ces résultats pourront aussi être analysés à l'oreille en écoutant le son réverbéré émis depuis une ou plusieurs sources et entendu par un auditeur virtuel placé dans le bâtiment.

De nombreuses possibilités d'améliorations restent à l'étude comme par exemple l'écoute en temps réel. Il serait par exemple possible d'écouter les signaux réverbérés en 3D grâce à des filtres binauraux. Ceux-ci modifient le signal perçu par chacune des deux oreilles afin de donner l'illusion d'espace et de profondeur. Tout en restant en position statique, l'auditeur pourra orienter son regard selon différentes directions et écouter en temps réel le son changer. Cette option fonctionne sous Matlab avec un contrôle de la direction au clavier ou à l'aide d'un casque avec "*Head Tracker*". Ce type de casque possède un gyroscope qui actualise la direction du regard en temps réel et permet d'augmenter considérable la sensation immersive. Par ailleurs, ce code, que ce soit sous Matlab ou en C++ (avec add-on Blender), est distribué en open-source.

Il y a par ailleurs de nombreuses améliorations envisageables au niveau graphique. Comment visualiser des résultats de calculs acoustiques ? Quelles sont les informations indispensables à recueillir pour un archéologue voulant étudier l'acoustique d'un monument ? Voici des questions qui se posent à l'issue de ce développement.

De la même manière, est-il essentiel d'ajouter les effets de diffraction au modèle ? Si oui, quelle est la meilleure méthode ? Pourrait-on traiter de manière locale certains comportements acoustiques et les insérer ensuite dans le modèle par lancer de rayons ? Typiquement, pourrait-on analyser par méthode de résolution exacte (voir section 4.2.2) le comportement acoustique d'une colonne, ou de tout autre ornement avec un fort niveau de détail, puis de l'incorporer de manière analytique dans l'outil de lancer de rayons ?

Nous l'avons déjà évoqué dans la section 5.3, mais il serait également intéressant d'utili-

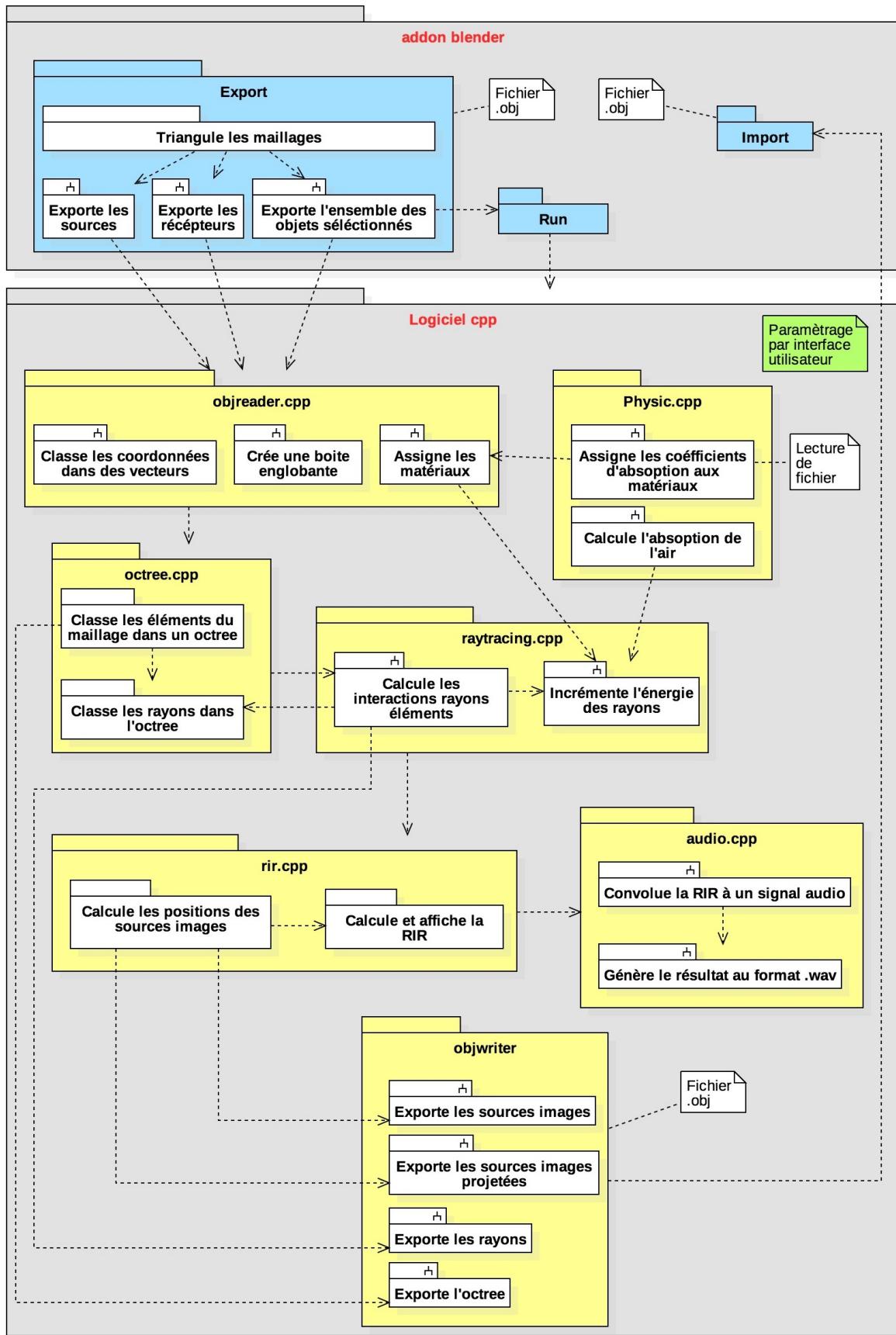


FIGURE 8.3 – Synopsis de l'architecture logiciel développée pour le calcul d'acoustique de salle

liser des sources dont la directivité n'est pas uniforme. Cela serait d'ailleurs plus représentatif des cas réels et notamment de l'usage fait à Orange à l'origine du théâtre. Les sons étaient alors émis par des instruments de musique ou par la voix humaine éventuellement amplifiée par un masque.

Ce sont des questions que nous allons pouvoir approfondir dans la partie suivante. Celle-ci se propose d'explorer toutes les possibilités de ce nouvel outil de calcul acoustique appliqué à notre objet d'étude : le théâtre d'Orange. Nous tenterons d'analyser des hypothèses archéologiques précises grâce à l'étude acoustique du bâtiment.

Références

- ACOUPHILE.FR. [73](#)
- AQUATERRA. «Encyclopédie du gabion», . [56](#)
- ARENBERG, J. 1988, «Ray/triangle intersection with barycentric coordinates», *Ray Tracing News*, vol. 1, n° 11. [77](#)
- BADOUEL, D. 1990, «An efficient ray-polygon intersection», *Graphics Gems*. [77](#)
- BATTENBERG, E. et R. AVIZIENIS. 2011, «Implementing real-time partitioned convolution algorithms on conventional operating systems», *DAFx-11*. [102](#)
- CEI. 2015, «Ec 60050», Vocabulaire électrotechnique international. [57](#)
- D'ALEMBERT, J. L. R. 1747, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettre de Berlin. [62](#)
- EYRING, C. F. 1930, «Reverberation time in “dead” rooms», *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 1, n° 2A, p. 217–241. [61](#)
- FUNKHOUSER, T., N. TSINGOS, I. CARLBOM, G. ELKO, M. SONDHI, J. E. WEST, G. PINGALI, P. MIN et A. NGAN. 2004, «A beam tracing method for interactive architectural acoustics», *Acoustical Society of America*, , n° 115, p. 739–756. [68](#)
- ISO-9613-1. 1993, «Acoustics - attenuation of sound during propagation outdoors», . [59](#)
- JOT, J. M. 1992, *Etude et Réalisation d'un Spatialisateur de Sons par Modèles Physique et Perceptifs*, thèse de doctorat, Telecom Paris. [62](#)
- JOUHANEAU, J. 1997, *Acoustique des salles et sonorisation, Acoustique appliquée*, vol. 3, Conservatoire national des arts et métiers. [56, 59, 65](#)
- KANDELMAN, M. 2007, *Simulation acoustique par la méthode des sources images*, mémoire de maîtrise, Ecole Nationale Supérieur Louis-Lumière. [60, 61, 65](#)
- KEINERT, B., M. INNMANN, M. SANGER et M. STAMMINGER. 2015, «Spherical fibonacci mapping», *ACM Transactions on Graphics*, vol. 34. [76](#)
- KULOWSKI, A. 1985, *Algorithmic representation of the ray tracing technique*, vol. 18, Applied Acoustics. [64](#)
- MCGOVERN, S. 2009, «Fast image method for impulse response calculations of box-shaped rooms», *Applied Acoustics*, vol. 70, n° 1. [97](#)
- MEAGHER, D. 1982, *Octree Generation, Analysis and Manipulation*, vol. TR, Image processing laboratory. [86](#)

- M'HENNI, H. 2010, «L'angle solide correspond à un cône de révolution d'angle au sommet inscrit dans la sphère de projection», Wikipédia. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Angle_solidé. 69
- MÖLLER, T. et B. TRUMBORE. 1997, «Fast, minimum storage ray-triangle intersection», *Journal of Graphics Tools*, vol. 2, n° 1, p. 21–28. 77, 78
- ODEON. «Odeon webpage», URL <https://odeon.dk/>. 73
- PICAUT, J. 2005, «Application numérique du concept de particules sonores à la modélisation des champs sonores en acoustique architecturale», CAHIER THÉMATIQUE : MÉTHODES NUMÉRIQUES EN GÉNIE CIVIL, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Centre de Nantes. 61, 65
- PREMAT, E. 2000, *Prise en compte d'effets météorologiques dans une méthode d'éléments finis de frontière*, thèse de doctorat, L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 62, 63, 64
- SABINE, P. 1932, «Acoustics and architecture»,. 60
- SABINE, W. C. 1900, *Architectural Acoustics*, vol. Part I. Reverberation, Reprints of the American Architect. 56, 82
- VORLÄNDERA, M. et E. MOMMERTZ. 2000, «Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients», *Applied Acoustics*, vol. 60, p. 187–199. 69
- WIKIPÉDIA. «Angle solide», URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Angle_solidé. 71
- WILLIAMS, A., S. BARRUS, R. MORLEY et P. SHIRLEY. 2005, «An efficient and robust ray–box intersection algorithm», *ACM SIGGRAPH*, , n° 9. 89

Annexe A

Annexes

A.1 Figures annexes

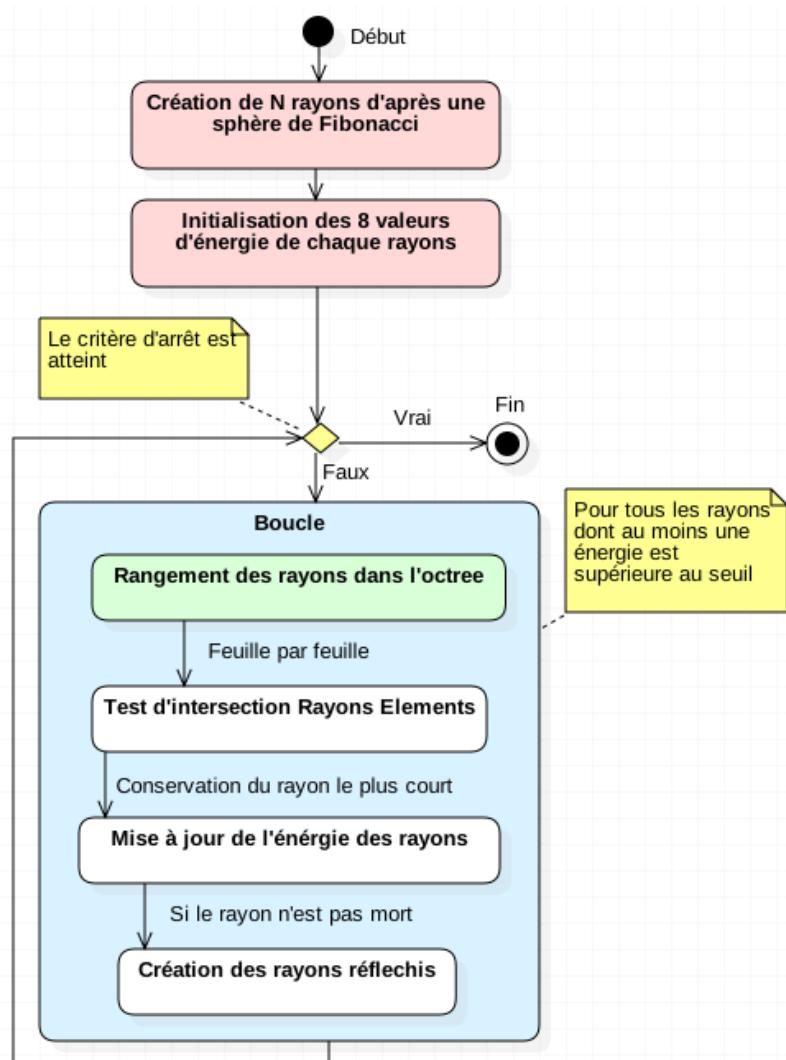


FIGURE A.1 – Diagramme d'activité résumant le processus de création des rayons avec octree

A.2 Tableaux annexes

Références

Annexe B

Liste des acronymes

AABB *Axis-Aligned Bounding Box.* [86](#), [87](#)

BEM *Boundary Element Method.* [61](#)

CAO *Conception Assistée par Ordinateur.* [96](#)

CMAP *Centre de Mathématiques Appliquées de l'école Polytechnique.* [68](#)

FDTD Méthode des différences finies (*Finite Difference Time Domain*). [61](#)

FEM *Finite Element Method.* [61](#)

FFT Transformation de Fourier rapide, ou *Fast Fourier Transform.* [98](#)

FIR Filtre à réponse impulsionnelle finie, ou *Finite Impulse Response filter.* [97](#), [98](#)

IHM *Interface Homme-Machine.* [101](#)

ISCD *Institut des Sciences du Calcul et des Données.* [68](#)

OBB *Oriented Bounding Box.* [86](#)

RIR Réponse impulsionnelle d'une salle, ou *Room Impulse Response.* [iv](#), [56](#), [69](#), [72](#), [82](#), [97](#), [98](#)

RT₆₀ Temps de réverbération pour que l'énergie diminue de 60dB : *Reverberation Time at 60dB.* [60](#), [61](#), [72](#), [84](#), [89](#)

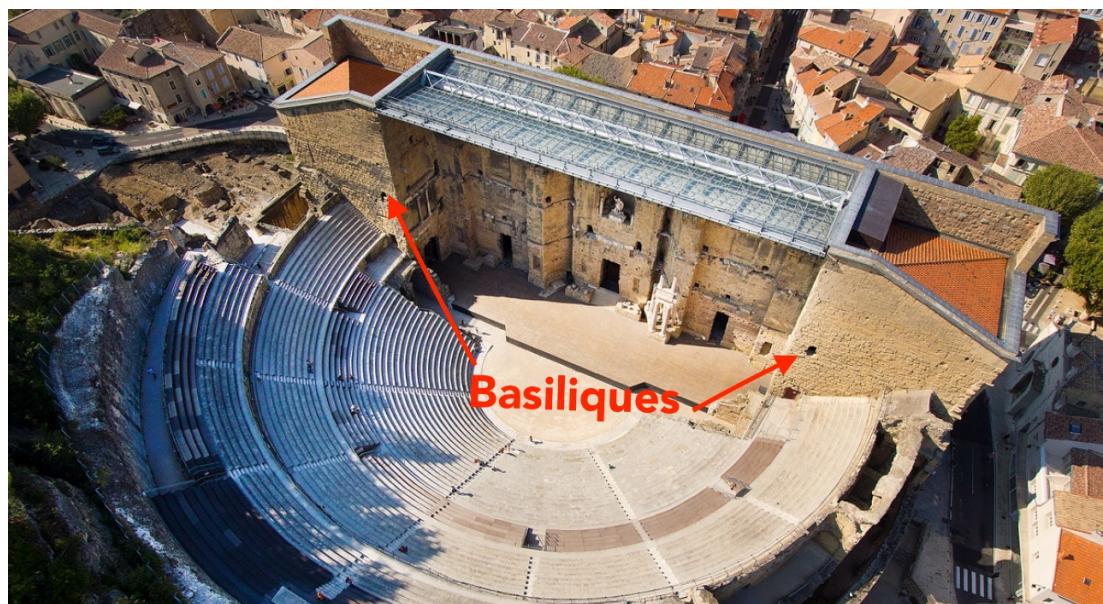
Annexe C

Glossaire

ADITUS Portes conduisant de l'extérieur à l'*orchestra*. [i, iii, VIII](#)

AMBULACRE Galerie circulaire permettant de se déplacer sur la *cavea*. [78](#)

BASILIQUE Large pièce de forme quasi-carré qui flanque le mur de scène et les *parascae-nium*



. [i, iii, VIII](#)

CAVEA Désigne l'ensemble des rangées concentriques composant les gradins. [i, iii, VII, VIII](#)

COMPLEXITÉ Domaine de l'informatique qui étudie la quantité de ressources (temps, espace mémoire, etc) dont a besoin un algorithme pour résoudre un problème. [ii, 83, 84, 88](#)

DIRAC La distribution de Dirac vérifie la propriété fondamentale que, pour toute fonction : $x \mapsto \varphi(x)$ lisse : $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. [62](#)

DIRICHLET Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple :

$$\Delta y + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$y(x) = f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction définie sur la frontière $\partial\Omega$. [62](#)

HYPOSCAENIUM Fosse situé sous la scène comportant notamment le mécanisme du rideau de scène. [78](#)

IMA CAVEA Désigne le premier niveau (niveau inférieur) de la cavea. [iii](#)

MAENIANUM Portions de la cavea séparées par un *podium* et rassemblant un ensemble de gradins. [i](#), [iii](#), [VIII](#)

MODIFIER Outil Blender permettant d'affecter automatiquement à des objets des opérations non-destructives. [iii](#)

NEUMANN Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple :

$$\Delta y + y = 0$$

la condition aux limites de Neumann sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) = f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction scalaire connue définie sur la limite $\partial\Omega$ et \vec{n} est le vecteur normal à la frontière $\partial\Omega$. [62](#)

OCTREE Structure de données de type arbre dans laquelle chaque nœud peut compter jusqu'à huit enfants. En trois dimensions, créer un octree revient à découper une cube en son milieu sur chacun de ses axes.. [iv](#), [53](#), [85](#), [86](#), [88](#), [89](#), [I](#), [II](#)

ORCHESTRA Espace semi-circulaire (chez les romains) ou circulaire (chez les Grecs) se situant entre la scène et le premier gradin. [i](#), [iii](#), [VII](#), [VIII](#)

PARASCAENIUM Espace intermédiaire entre la scène et les **basiliques** comportant des escaliers pour atteindre les niveaux supérieurs. [78](#), [VII](#)

PARODOS Entrée menant à l'*orchestra* traversant les *aditus*. [iii](#)

PARTICULE L'outil physique "Système de Particules" est utilisé lorsque l'on veut émettre quelque chose depuis un objet en quantité importante. Ces particules peuvent ensuite être soumise à des effets physiques pour simuler des cheveux, de la fumée, du feu ou autres. [i](#)

PODIUM Massif de maçonnerie élevé au-dessus du sol et servant de soubassement. [VIII](#)

PORTICUS IN SUMMA CAVEA Arcade bordée de colonnes située au dessus du troisième *maenianum*. [i](#), [iii](#)

POSTSCAENIUM Mur séparant la scène de l'extérieur comportant des salles pouvant servir de coulisses. [i](#), [iii](#)

PULPITUM Ensemble de l'estrade sur lequel jouent les acteurs orné en son front par un petit mur de marbre décoré. [i](#)

VELUM Grande pièce de tissu généralement en lin tirée au dessus de la *cavea* pour protéger les spectateurs du soleil. [i](#)

WAVEFRONT AUDIO FILE FORMAT Le format RIFF, sur lequel repose le format WAV, définit une structure de fichier qui repose sur une succession de blocs de données (chunks).

Chaque bloc est identifié par 4 octets (4 symboles ASCII) suivi de la taille du bloc codé sur 4 octets. Si un lecteur rencontre un bloc qu'il ne connaît pas, il passe au suivant. Un fichier wav doit au minimum contenir un bloc appelé <fmt> (format) et un bloc appelé <data>. Le bloc <fmt> doit être positionné en amont du bloc <data>.

- Le bloc <fmt> contient les métadonnées techniques, c'est-à-dire les informations relatives au codage du flux audio, informations indispensables pour interpréter les données.
- Le bloc <data> contient la charge (payload), c'est-à-dire les données audio utiles.

. 97

WAVEFRONT OBJ Format de fichier contenant la description d'une géométrie 3D. Les fichiers OBJ sont au format ASCII et se présente de la façon suivante :

- Le nom de l'objet est précédé d'un o
- Le nom du matériau est précédé de usemtl (un fichier .mtl accompagne en général les fichier obj)
- Les coordonnées de sommets sont précédés d'un v
- Les coordonnées de textures sont précédés d'un vt
- Les coordonnées de normales sont précédés d'un vn
- Chaque face est ensuite définie par un ensemble d'indices faisant référence aux coordonnées des points, de texture et des normales définies précédemment

. 96