

Calcul des options américaines dans un modèle exponentiel de Lévy via l'arbre multinomial

Mohammed MIKOU*

March 1, 2012

Premia 14

1 La méthode de l'arbre multinomial

1.1 Préliminaire

On considère $(X_t)_{t \in [0, T]}$ un processus de Lévy dans un espace de probabilité filtré

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}_0)$ dont $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ est la filtration continue à droite engendrée par X . On suppose que \mathcal{F}_0 contient tous les événements de probabilité nulle et que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

*Université Paris-Est, Laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées, UMR CNRS 8050, 5, Bld Descartes, F-77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France. E-mail: `mohammed.mikou@univ-mlv.fr`

Le processus de Lévy X est caractérisé par son triplet (σ^2, γ, ν) et il peut s'écrire via la décomposition de Lévy-Itô de la façon suivante

$$\begin{aligned} X_t = & \gamma t + \sigma B_t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(dt, dx) \\ & + \int_0^t \int_{|x| < 1} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)), \end{aligned} \quad (1)$$

où B est un mouvement Brownien standard et J_X , appelée la mesure de Poisson composée, est une mesure de comptage dans $[0, T] \times \mathbb{R}^*$. En particulier, pour $[0, t] \times A \subset [0, T] \times \mathbb{R}^*$

$$\int_0^t \int_A J_X(dt, dx) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{1}_{\{\Delta X \in A\}} =: N_t(A).$$

La mesure de Lévy $\nu(A)$, est l'espérance du nombre des sauts de taille ΔX dans A par unité de temps

$$\nu(A) = \mathbb{E}(N_1(A)).$$

La mesure de Lévy ν vérifie la condition $\int_{\mathbb{R}} x^2 \wedge 1 \nu(dx) < \infty$. On en déduit que pour tout $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \overline{\nu}_+(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \overline{\nu}_-(x) = 0, \quad (2)$$

où $\overline{\nu}_+(x) =: \nu([x, \infty))$ et $\overline{\nu}_-(x) =: \nu([-\infty, x))$.

Notons que le drift γ dépend de la fonction de troncature, on la suppose tout au long de cette thèse égale à $\mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}$.

Le processus de Lévy X est un processus de Markov dont le générateur infinitésimal est donné par

$$L^X f(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \mathcal{B}f(x), \quad (3)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, où

$$\mathcal{B}f(x) = \int \nu(dy) \left(f(x+y) - f(x) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x) \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}} \right). \quad (4)$$

Dans le cadre d'un modèle exponentiel de Lévy, le sous-jacent $(S_t)_{t \in [0, T]}$ est donné par

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta)t + X_t},$$

où $r > 0, \delta \geq 0$ sont le taux d'intérêt et le taux de dividende respectivement. Le processus de Lévy X est utilisé pour modéliser le log du prix d'un actif financier S . Ce qui suppose l'existence du moment exponentiel d'ordre 1. Dans ce cas, la représentation de Lévy-Khinchin donne (voir [12])

$$\mathbb{E}[e^{X_t}] = \exp[t\varphi(1)], \quad (5)$$

avec,

$$\varphi(u) = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \gamma \cdot u + \int (e^{ux} - 1 - ux \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx), \quad (6)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. On rappelle que sous la probabilité risque neutre, le sous-jacent actualisé est une martingale. D'où la condition $\varphi(1) = 0$. On se place par la suite sous une probabilité risque neutre \mathbb{P} équivalente à \mathbb{P}_0 et on suppose que la condition $\varphi(1) = 0$ est vérifiée.

1.2 Convergence du modèle à temps discret

On veut approcher le processus X par une suite de processus à temps discret $X(n)$ qui ont un nombre fini d'états en espace. Formellement, pour $n \in \mathbb{N}$, l'approximation $X(n)$, dans son espace de probabilité filtré $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathcal{F}_t^n, \mathbb{P}^n)$, s'écrit de la façon suivante

$$X_t(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor} Z_k(n) - \frac{T}{n} \lfloor \frac{nt}{T} \rfloor a(n), \quad (7)$$

pour tout $t \in [0, T]$, les $(Z_k(n))$ sont des copies iid de $Z(n)$ et $a(n)$ est une constante de centrage. $Z(n)$ est une variable aléatoire multinomiale, caractérisée par ses états $z_1(n), z_2(n), \dots, z_{m(n)}(n)$, avec leurs probabilités respectives $p_1(n), p_2(n), \dots, p_{m(n)}(n)$ et $m(n)$ le nombre des états. On suppose que $m(n)$ est impaire et on pose $q = (m(n) - 1)/2$ et $z_{q+1} = 0$ de sorte que les $m(n) - 1$ états restants soient différents de zéro.

Les conditions générales pour assurer la convergence du processus à temps discret $X(n)$ vers celui continu X est donné par le Théorème 2.29 dans le quatrième chapitre du livre de Jacod et Shiryaev (1987).

Le vrai problème est comment choisir les paramètres $z_i(n)$, $p_j(n)$ et $a(n)$ pour implémenter le schéma d'une façon simple et robuste.

Nous allons exposer dans la suite les choix de Mailler et al. de ces paramètres. Pour comprendre un peu la démarche, on va procéder par étapes. D'abord, nous allons traiter le cas simple d'un processus de Poisson composé (processus de Lévy à activité finie) avec dérive. Ensuite, nous montrons comment faire pour introduire un mouvement Brownien au schéma. Enfin, on va traiter le cas général d'un processus de Lévy à activité infinie.

. Processus de Poisson composé avec dérive

Le processus de Poisson composé X avec dérive correspond à un processus de Lévy de triplet caractéristique $(0, \gamma, \nu)$, dont la mesure de Lévy ν est finie. L'intensité λ du processus de Poisson associé et la loi ν_0 des sauts sont déduits à partir de la mesure de Lévy

$$\lambda = \nu(\mathbb{R}), \text{ et } \nu_0(dx) = \frac{1}{\lambda} \nu(dx).$$

Dans ce cas X peut s'écrire, via (1), de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 X_t &= \gamma t + \int_0^t \int_{\{|x| \geq 1\}} x J_X(dt, dx) \\
 &\quad + \int_0^t \int_{\{|x| < 1\}} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)) \\
 &= \gamma t + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\Delta X_s \geq 1} + \int_0^t \int_{\{|x| < 1\}} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)) \\
 &= \tilde{\gamma} t + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s,
 \end{aligned}$$

où $\tilde{\gamma} =: \gamma + \int_{|x| < 1} x\nu(dx)$ puisque $\int_{|x| < 1} x\nu(dx)$ est finie.

Dans le schéma discret (7), il semble naturelle d'approcher les sauts du processus de Poisson composé $(\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s)$ par la somme des $Z_k(n)$. Plus précisément, pour $n \geq 0$, soient $(z_j(n))_{1 \leq j \leq m(n)}$ une grille de \mathbb{R} , et $(I_j(n))_{1 \leq j \leq m(n)}$ une suite d'intervalles disjoints telle que $z_j(n) \in I_j(n)$. Notons $\mathcal{M}^+ = \{1, 2, \dots, m(n)\}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \setminus \{q+1\}$ avec $m(n) = 2q+1$.

Les probabilités $(p_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ sont déterminées de la manière suivante

$$\begin{cases} p_j(n) = \frac{T}{n} \nu(I_j(n)), & \forall j \in \mathcal{M} \\ p_{q+1}(n) = 1 - \sum_{j=1}^{m(n)} p_j(n) \end{cases} \quad (8)$$

Le plus simple est de choisir une grille $(z_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ uniforme et des intervalles $(I_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ centrés en $(z_j(n))$

$$\begin{aligned}
 z_j(n) &= (q+1-j)\Delta(n), & \forall j \in \mathcal{M}^+ \\
 I_j(n) &= (z_j(n) - \Delta(n)/2, z_j(n) + \Delta(n)/2], & \forall j \in \mathcal{M}^+,
 \end{aligned} \quad (9)$$

où $\Delta(n)$ est le pas en espace. La Figure 1 montre un exemple de grille $(z_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ avec ses probabilités associées $(p_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ pour $m = 5$.

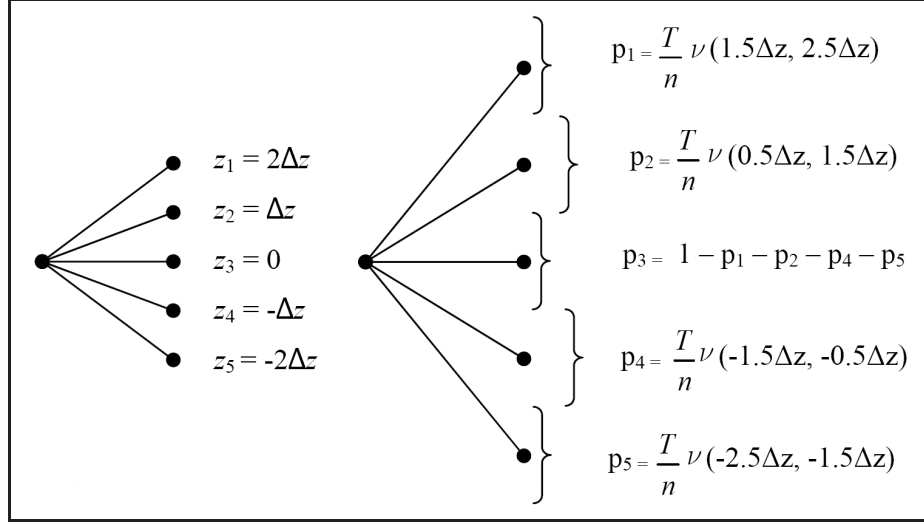


Figure 1: Exemple d'une grille uniforme et de ses probabilités associées pour $m = 5$

Notons $I(n) = \left(\bigcup_{j=-q}^q I_j(n) \right) \setminus I_{q+1}(n)$ où $I_{q+1}(n) = (-\Delta(n)/2, \Delta(n)/2]$.

Via le Théorème 2.29 dans Jacod et Shiryaev (1987), Mailler et al montrent la convergence en loi du processus $Y_t(n) =: \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor} Z_k(n)$ vers $(\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s)$ si la grille $(z_j(n))_{0 \leq j \leq m(n)}$ est telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q\Delta(n) = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} q\Delta(n) = \infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(n) = 0. \quad (10)$$

Ainsi, pour tout ensemble A Borélien de \mathbb{R} , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap I(n)) = \nu(A). \quad (11)$$

On peut montrer autrement ce résultat, on montrant que le générateur infinitésimal L^n associé au terme discret converge vers celui continu L .

Proposition 1.1. *Sous les conditions (10) et (11), L^n converge vers L .*

Proof. Rappelons que à partir (3), pour tout $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, le générateur infinitésimal associé au processus de Poisson composé est donné par

$$L^X f(x) = \int (f(x+y) - f(x)) \nu(dy),$$

Le générateur infinitésimal L^n associé à $Y(n)$ est défini par

$$L^n f(x) = \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}(f(Y_{\Delta t}(n) + x) - f(x)),$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, où $\Delta t = \frac{T}{n}$ (le pas de temps). Alors, en utilisant (8) et (10), on a

$$\begin{aligned} L^n f(x) &= \frac{n}{T} \mathbb{E}(f(Z(n) + x) - f(x)) \\ &= \frac{n}{T} \sum_{j=-q}^{j=q} (f(z_j(n) + x) - f(x)) \frac{T}{n} \nu(I_j(n)) \\ &= \sum_{j=-q}^{j=q} (f(z_j(n) + x) - f(x)) \nu(I_j(n)) \\ &= \int \sum_{j=-q}^{j=q} (f(z_j(n) + x) - f(x)) \mathbf{1}_{\{I_j(n)\}}(y) \nu(dy). \end{aligned}$$

Posons $\varphi_n =: \sum_{j=-q}^{j=q} (f(z_j(n) + x) - f(x)) \mathbf{1}_{\{I_j(n)\}}$. Via (11), Il est clair que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y) = f(y+x) - f(x)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On conclut la proposition par le théorème de convergence dominée puisque ν est finie. \square

Le rôle principal de la suite $a(n)$ dans ce cas, est de reproduire le terme de dérive $\tilde{\gamma}$. D'où la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = -\gamma + \int_{\{|x| \leq 1\}} x \nu(dx) = -\tilde{\gamma}. \quad (12)$$

Un choix tout à fait logique est celui de prendre

$$a(n) = -\gamma + \frac{n}{T} \mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}).$$

On peut vérifier facilement que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}) = \int_{\{|x| \leq 1\}} x \nu(dx)$ en argumentant de la même façon que dans la démonstration de la Proposition 1.1.

On verra plus tard dans la section suivante, que dans le cas général où il y a une infinité de petits sauts, $a(n)$ peut être utilisé pour compenser cette dernière.

• Processus de Lévy de sauts pur à activité infinie

Le processus de Lévy de sauts pur à activité infinie X est un processus de Lévy dont le coefficient de la diffusion σ est nul et la mesure de Lévy ν est infinie. X s'écrit via (1) de la façon suivante

$$X_t = \gamma t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(dt, dx) + \int_0^t \int_{|x| < 1} x (J_X(dt, dx) - dt \nu(dx)).$$

Dans ce cas, Mailler et al. choisissent d'ignorer les petits sauts, et de se retrouver à nouveau dans le cas d'un processus de Poisson composé avec dérive. Pour assurer la convergence, ils imposent la condition suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \Delta(n) > 0. \quad (13)$$

Aussi, ils ajoutent un terme $b(n)$ à $a(n)$ dans la forme du processus à temps discret $X(n)$ pour compenser les petits sauts à condition que

$$b(n) = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (14)$$

Nous utilisant la notation " \Rightarrow " pour la convergence en loi des processus stochastique càdlàg dans un intervalle fini.

Théorème 1.1. *Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique $(0, \gamma, \nu)$. Supposons que les conditions (10), (11) et (13) sont vérifiées. Alors,*

$$X_t(n) \Rightarrow X_t,$$

pour tout $t \in [0, T]$, où $X_t(n)$ est défini dans (7) avec

$$a(n) = -\gamma + \frac{n}{T} \mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}) + b(n),$$

pour une suite $b(n)$ vérifiant (14).

La démonstration de ce théorème est basée sur le Théorème 2.29 dans Jacod et Shiryaev (1987) (voir Maller et al [9]).

• Introduction du terme Brownien

Le Théorème 1.1 est vérifié pour un processus de Lévy sans le terme Brownien ($\sigma = 0$). Il y a plusieurs façons pour introduire ce dernier dans le schéma (voir Amin (1993), Këllezi et Webber (2004)) qui se basent sur le fait que la partie diffusion dans un processus de Lévy est indépendante de celle des sauts. Ainsi, une approximation binomial peut être envisagée. En fait, supposons que $\sigma > 0$, et considérons $Y(n)$ la variable aléatoire qui prend les valeurs $\pm \sigma \sqrt{\frac{T}{n}}$ avec la probabilité 1/2 chacune. Alors, pour $(Y_j(n))_j$ une suite des copies iid de $Y(n)$, il est connu que

$$B_t(n) =: \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor} Y_k(n) \Rightarrow \sigma B_t,$$

pour tout $t \in [0, T]$. Enfin, il suffit de prendre dans ce cas $X(n)$ définie par

$$X_t(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor} Y_k(n) + Z_k(n) - \frac{T}{n} \lfloor \frac{nt}{T} \rfloor a(n),$$

pour tout $t \in [0, T]$ où les $(Y_k(n))_k$ et $(Z_k(n))_k$ sont respectivement des copie iid de $Y(n)$ et $Z(n)$.

1.3 Le modèle multinomial

Comme on a déjà signalé auparavant, l'approximation à temps discret du processus de Lévy est étudiée dans la section précédente pour introduire un modèle multinomial qui approche le modèle exponentiel de Lévy dont le sous-jacent $(S_t)_{t \in [0, T]}$ est donné par

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta)t + X_t}, \quad (15)$$

où X est un processus de Lévy général de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) .

Sous les conditions du Théorème 1.1, S est approché par $S(n)$ défini par

$$S_t(n) = S_0 e^{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor} \bar{Z}_k(n) - \frac{T}{n} \lfloor \frac{nt}{T} \rfloor a(n)}, \quad (16)$$

où $(Z_k(n))_k$ est une suite de variables aléatoire iid, et $a(n)$ est donné par

$$a(n) = -(r - \delta + \gamma) + \frac{n}{T} \mathbb{E}(X(n) \mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}) + b(n).$$

Pour plus de précisions sur ses paramètres, voir la section 1.2.

Le processus à temps discret $S(n)$ présente le sous-jacent dans le modèle multinomial proposé par Maller et al.

Le modèle multinomial généralise le modèle binomial CRR. En fait, à chaque instant t_i , le sous-jacent à l'état z_j en espace, prend un parmi m états à l'instant suivant t_{i+1} . Le modèle binomial, est le cas particulier où $m = 2$. Généralement, m est choisi en fonction des paramètres du sous-jacent, en particulier la mesure de Lévy associée. La figure 2 présente des exemples d'arbres multinomiaux pour quelques valeurs de m , le nombre de pas en espace et n le nombre de pas de temps (le cas $m = 2$ illustre l'arbre binomial). Enfin, le modèle multinomial dépend de plusieurs paramètres, le nombre de pas de temps n , le nombre des états en espace (nombre des nœuds dans le

dessin), le temps de maturité T , les valeurs du sous-jacent à chaque nœud (les $z_j(n)$), et les probabilités de passage d'un nœud à un autre (les $(p_j(n))_j$). A l'image de l'arbre binomial, tout est fait pour que l'arbre multinomial soit recombinant (un arbre est dit recombinant si le nombre de nœuds dans chaque tranche croît linéairement avec temps comme sur la figure 2). Cette propriété réduit significativement le nombre de nœuds dans l'arbre, donc le nombre de calculs, comme le montre la figure 3. Pour un arbre $m(n)$ -nomial, le nombre final de nœuds est $(m(n) - 1)n + 1$.

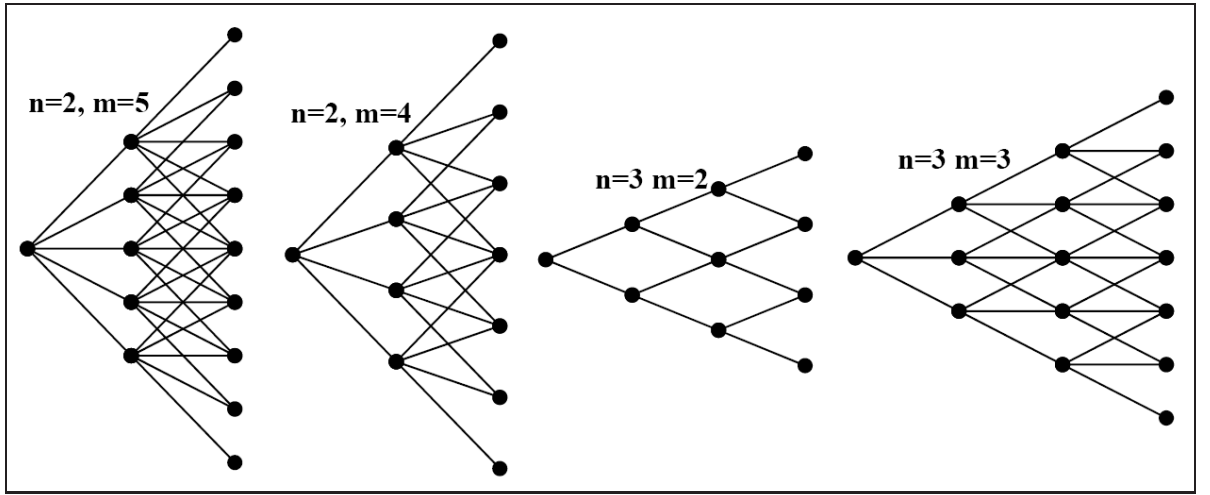


Figure 2: Exemple d'arbres multinomiaux

Une fois les paramètres du modèle multinomial déterminés, le calcul des prix des options se fait exactement de la même façon que dans le modèle binomial. A la dernière tranche de l'arbre (les $(m - 1)n + 1$ derniers nœuds), la valeur de l'option est calculée par $\max(S_T - K, 0)$ pour un call, et $\max(K - S_T, 0)$ pour un put. L'option européenne se calcule en fonction de la valeur de celle-ci $f_{i,j}$ à chaque nœud (i, j) , où $f_{i,j}$ est l'espérance actualisée des m possibles valeurs de l'option à l'instant suivante t_{i+1} . Le calcul de l'option américaine se fait par programmation dynamique (voir Algorithme 1, 14).

Dans la section suivante on va préciser les paramètres du modèle multinomial et montrer comment l'implémenter.

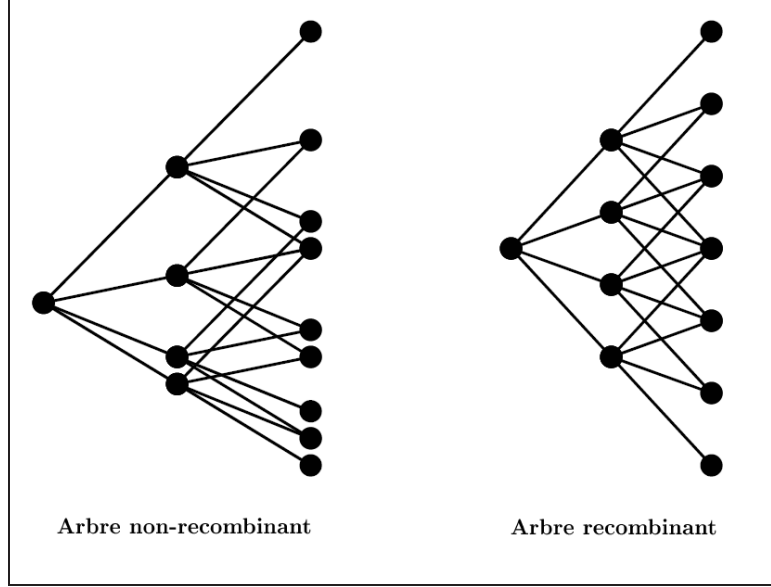


Figure 3: Arbre recombinant et non-recombinant pour $m = 4$ et $n = 2$

1.4 Le schéma de discrétisation

On se place toujours dans un modèle exponentiel de Lévy dont le sous-jacent est décrit en (15) et le processus de Lévy associé est de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν) .

Ce modèle est approché par le modèle multinomial dont le sous-jacent $S_t(n)$ à temps discret est donné par

$$S_t(n) = S_0 e^{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor} Y_k(n) + Z_k(n) - \frac{T}{n} \lfloor \frac{nt}{T} \rfloor a(n)}, \quad (17)$$

où

▪ Les suites $(Y_k(n))_k$ et $(Z_k(n))_k$ sont respectivement des copies iid de $Y(n)$ et $Z(n)$. La variable $Y(n)$ présente le terme Brownien, elle prend deux valeurs

$\pm\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$ avec la probabilité $1/2$ chacune. Et $Z(n)$ le terme de sauts purs (les petits sauts étant compensés par $a(n)$) qui prend $m(n)$ valeur $(z_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ avec $(p_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ leurs probabilités correspondantes. Les $(z_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ et les $(p_j(n))_{j \in \mathcal{M}^+}$ sont définis par (8) et (9). Pour garder une grille uniforme et engendrer un arbre multinomial recombinant par la suite, la condition suivante s'impose

$$\Delta(n) = \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad (18)$$

qui se marie bien avec la condition de convergence (13). Sous cette condition, il est clair que la nouvelle grille $(\bar{z}_j(n))_j$ est composée de $m + 2$ éléments et elle est définie par

$$\begin{cases} \bar{z}_1(n) = z_1(n) - \Delta(n) \\ \bar{z}_{j+1}(n) = z_j(n), & \forall j \in \mathcal{M}^+ \\ \bar{z}_{m+2}(n) = z_m(n) + \Delta(n) \end{cases} \quad (19)$$

Et les probabilités associées sont données par

$$\begin{cases} \bar{p}_1(n) = \frac{1}{2}p_1(n) \\ \bar{p}_{j+1}(n) = \frac{1}{2}(p_{j-1}(n) + p_{j+1}(n)), & \forall j \in \mathcal{M}^+ \\ \bar{p}_{m+2}(n) = \frac{1}{2}p_m(n). \end{cases} \quad (20)$$

• La suite $a(n)$ est donnée par

$$a(n) = -(r - \delta + \gamma) + \frac{n}{T}\mathbb{E}(X(n)\mathbf{1}_{\{|X(n)| \leq 1\}}) + b(n),$$

où

$$\mathbb{E}(X(n)\mathbf{1}_{\{|X(n)|\leq 1\}}) = \sum_{j \in \mathcal{M}^+} \bar{p}_j \bar{x}_j \mathbf{1}_{\{|\bar{x}_j| \leq 1\}},$$

et $b(n) = o(1/n)$ à préciser en fonction du modèle.

Rappelons que sous la probabilité risque neutre \mathbb{P} on a $\varphi(1) = 0$ où φ est l'exposant caractéristique du processus de Lévy donné par (6). Ce qui se traduit par la condition suivante sur la dérive γ

$$\gamma = -\frac{\sigma^2}{2} - \int (e^x - 1 - x\mathbf{1}_{|x|\leq 1})\nu(dx). \quad (21)$$

L'Algorithme 1 donne une idée sur l'implémentation de cette méthode pour une option américaine.

Algorithm 1 Option américaine via l'arbre multinomial

- Déterminer les paramètres de l'arbre en fonction du modèle
- Stocker les $(\bar{z}_j)_{j \in \mathcal{M}^+}$ et les $(\bar{p}_j)_{j \in \mathcal{M}^+}$
- Calculer les $(S_{N,j})_{1 \leq j \leq (m-1)n+1}$ et les $(f_{N,j})_{1 \leq j \leq (m-1)n+1}$ avec $f_{N,j} = \max(K - S_{N,j}, 0)$
- Calculer la valeur de l'option $f_{i,j}$ à chaque nœud par

$$f_{i,j} = \max(K - S_{i,j}, e^{-r\frac{T}{n}} \sum_{k=1}^m \bar{p}_k f_{i,j+k})$$

- $f_{0,0}$ est l'option américaine à la maturité T
-

Remarque 1.1. Pour les modèles de Lévy vérifiant $\sigma \neq 0$, Mailler et al choisissent toujours $\Delta(n) = \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$. Dans le cas contraire (le modèle est à activité infinie) ils proposent de remplacer σ par la variance des petits sauts $(\int_{-1}^1 x^2 \nu(dx))^{\frac{1}{2}}$.

2 Les améliorations apportées

2.1 La densité de la probabilité de transition est connue

Pour les modèle exponentiel de Lévy dont la densité des probabilité des transitions du sous-jacent est connue, une idée simple est de remplacer les probabilités des transitions par les vrais

$$\bar{p}_j = \mathbb{P}(X_{\frac{T}{n}} \in I_j) \quad \forall j \in \mathcal{M}^+.$$

Ce changement apportera une amélioration très significative sur la rapidité de convergence de l'algorithme. On verra plus en détail l'impact de ce changement sur les résultats numériques associés aux modèles VG et NIG dans la dernière section de ce chapitre.

2.2 Le modèle de CGMY

Le fait d'ignorer les petits sauts proposé par Maller et al. n'est pas gênant quand la singularité de la mesure de Lévy n'est pas importante. Dans le modèle CGMY, cette singularité peut être très significative en fonction du paramètre Y du modèle. Nous proposons dans ce cas de remplacer les petits sauts par un mouvement Brownien approprié.

Rappelons que le processus de Lévy X de triplet caractéristiques (σ^2, γ, ν) s'écrit de la façon suivante

$$\begin{aligned} X_t &= \gamma t + \sigma B_t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(dt, dx) \\ &\quad + \int_0^t \int_{0 < |x| < 1} x (J_X(dt, dx) - dt \nu(dx)). \end{aligned}$$

Selon Asmussen et Rosinski [1] X peut être approché par le processus X^ε défini par

$$\begin{aligned}
X_t^\varepsilon &= \gamma(\varepsilon)t + \sigma B_t + \sigma(\varepsilon)W_t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_X(dt, dx) \\
&\quad + \int_0^t \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} x (J_X(dt, dx) - dt\nu(dx)),
\end{aligned}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ près de zéro où W est un mouvement Brownien indépendant de B ,

$$\sigma^2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y^2 \nu(dy)$$

est choisi pour conserver la variance totale de X

$$\text{Var}(X^\varepsilon) = \text{Var}(X),$$

et $\gamma(\varepsilon)$ est déterminé pour que le processus e^{X^ε} reste une martingale

$$\gamma(\varepsilon) = -\frac{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}{2} - \int_{|x| \geq \varepsilon} (e^x - 1 - x\mathbf{1}_{|x| \leq 1})\nu(dx).$$

Le triplet caractéristique du processus de Lévy X^ε est donc $(\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon), \gamma(\varepsilon), \nu\mathbf{1}_{|x| \geq \varepsilon})$.

En utilisant la version approchée X^ε de X , on se place dans un modèle de diffusion avec sauts où l'application de la méthode de l'arbre multinomial ne pose aucune difficulté. Nous discutons les résultats numériques dans la dernière section de ce chapitre.

References

- [1] Asmussen, S. and Rosinski, J.: Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation. *Journal of Applied Probability*, 38, 482-493 (2001)

- [2] Barles, G., Burdeau, J., Romano, M., and Samsoen, N.: Estimation de la Frontière Libre des Options Américaine au voisinage de l'échéance. C.R.Acad.Sci., Série I 316, 171-174 (1993) 15
- [3] Bertoin, J.: Lévy Processes. Cambridge University Press, Reprint edition (1996)
- [4] Cont, R., Tankov, P.: Financial Modelling with Jump Processes. CHAPMAN and HALL/CRC (2004)
- [5] Lamberton, D. and Mikou, M., The Critical Price for the American Put in an Exponential Lévy Model, Finance and Stochastics, Springer, 73, 561-581 (2008)
- [6] Madan, D., Carr, P., Chang, E.C.: The Variance Gamma Process and Option Pricing. European Finance Review, 2, 79-105 (1998)
- [7] Madan, D., Seneta, E.: The Variance Gamma Model for Share Market Returns. Journal of Business, 63, 4, 511-524 (1990)
- [8] McKean, H.P.: A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics, appendix to a paper by R.Samuelson. Industrial Management Rev., 6, 32-39 (1965)
- [9] Maller, R.A., Solomon, D.H., Szimayer, A.: A Multinomial Approximation for American Option Prices in Lévy Process Models. Mathematical Finance, 16, 4, 613-633 (2006) 9
- [10] Merton, R.: Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous. Finance Economics, 3, 125-144 (1976)

- [11] Rydberg, T.H.: The Normal Inverse Gaussian Lévy Models : Simulation and Approximation. Comm. Statist. Stochastic Models, 13, 4, 887-910 (1997)
- [12] Sato, K.: Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press: Cambridge, UK (1999) **3**
- [13] Voltchkova, E.: Equation intégrro-différentielle d'évolution : méthodes numériques et application en finance. Thèse de Doctorat à l'Ecole Polytechnique (2005)