Méthode d'évaluation d'option par résolution de l'équation de Dupire

Sophie Volle

INRIA - projets SYDOCO et MATHFI
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex France
Tel: 01 39 63 51 01
E-mail: sophie.volle@inria.fr

March 1, 2012

Premia 14

1 Hypothèses et données

On considère une option européenne de type call. Soient

- $t_0 \geq 0$ l'origine du temps,
- S_0 le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t_0,
- K le prix d'exercice,
- T la maturité,
- $\sigma(S,t)$ la volatilité de l'actif sous-jacent de prix S à la date t,
- $V(K,T;S_0,t_0,\sigma)$, que l'on notera $V(K,T)$, le prix de l'option de prix d'exercice K, de maturité T, à l'instant t_0 lorsque l'actif sous-jacent vaut S_0 et la volatilité vaut σ,
- r le taux d'intérêt constant sans risque,
- q le rendement continu constant de l'actif,

- le prix de l'actif sous-jacent est gouverné par l'équation différentielle suivante:
$$\frac{dS}{S} = (r-q)dt + \sigma(S,t)dW \tag{1}$$
où W est un mouvement brownien.

Remarque 1. *Contrairement à l'équation de Black-Scholes, S_0 et t_0 sont les paramètres du problèmes tandis que K et T sont les variables.*

2 Formulation de l'EDP de Dupire à partir de l'équation de Fokker-Planck

S vérifie l'équation différentielle:
$$dS = S(r-q)dt + S\sigma(S,t)dW.$$
L'équation de Fokker-Planck est donc :
$$\partial_t p(S,t) = -\partial_S((r-q)Sp(S,t)) + \partial_{SS}(\frac{\sigma(S,t)^2}{2}S^2 p(S,t)), \tag{2}$$
où $p(.,t)$ est la densité du prix du sous-jacent à la date t. Par définition, le prix de l'option de prix d'exercice K, de maturité T, à l'instant t_0 est:
$$V(K,T) = e^{-r(T-t_0)}\int_0^\infty (S-K)_+ p(S,T)dS.$$
On dérive les deux côtés par rapport à T en tenant compte de (2):
$$\begin{aligned}\partial_t V(K,T) &= -rV(K,T) + e^{-r(T-t_0)}\int_0^\infty (S-K)_+\Big[-\partial_S((r-q)Sp(S,T)) \\ &\quad +\partial_{SS}(\tfrac{1}{2}\sigma(S,T)^2 S^2 p(S,T))\Big]dS.\end{aligned}$$

Par une intégration par partie, on obtient:
$$\begin{aligned}\partial_t V(K,T) &= -rV(K,T) - e^{-r(T-t_0)}\int_K^\infty \partial_S(\tfrac{1}{2}\sigma^2(S,T)S^2 p(S,T))dS \\ &\quad +e^{-r(T-t_0)}\int_0^\infty (r-q)(S-K)_+ p(S,T)dS \\ &\quad +K(r-q)e^{-r(T-t_0)}\int_K^\infty p(S,T)dS \\ &= -rV(K,T) + e^{-r(T-t_0)}\tfrac{1}{2}\sigma^2(K,T)K^2 p(K,T) \\ &\quad +(r-q)e^{-r(T-t_0)}\int_0^\infty (S-K)_+ p(S,T)dS \\ &\quad +K(r-q)e^{-r(T-t_0)}\int_K^\infty p(S,T)dS.\end{aligned}$$

Puis, grâce aux égalités suivantes, après calculs:

$$\begin{aligned}
V(K,T) &= e^{-r(T-t_0)}\int_0^\infty (S-K)_+ p(S,T)dS \\
\partial_K V(K,T) &= -e^{-r(T-t_0)}\int_K^\infty p(S,T)dS \\
\partial_{KK} V(K,T) &= e^{-r(T-t_0)} p(K,T)
\end{aligned}$$

on déduit:

$$\begin{aligned}
\partial_t V(K,T) &= -rV(K,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(K,T)K^2\partial_{KK}V(K,T) \\
&\quad +(r-q)V(K,T) - (r-q)K\partial_K V(K,T).
\end{aligned}$$

On obtient finalement l'EDP:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -qV - (r-q)K\frac{\partial V}{\partial K} + \frac{1}{2}\sigma^2(K,T)K^2\frac{\partial^2 V}{\partial K^2}. \tag{3}$$

Changement de variable logarithmique

On choisit donc le changement de variable logarithmique car il impose une condition de stabilité moins contraignante. On cherche à discrétiser l'équation:

$$\frac{\partial U}{\partial T}(y,T) + (r-q+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(y,T))\frac{\partial U}{\partial y}(y,T) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(y,T)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y,T) = -qU(y,T),$$

avec les conditions

$$\begin{cases}
U(y,t_0) = \max(S_0 - e^y, 0) & \text{pour tout } y \text{ réel}, \\
\lim_{y\to-\infty} U(y,T) = S_0 e^{-q(T-t_0)} & \text{pour } t_0 \le T, \\
\lim_{y\to+\infty} U(y,T) = 0 & \text{pour } t_0 \le T.
\end{cases}$$

On définit l'opérateur $\tilde{A}$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
(AU)(y,T) &= -\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(y,T)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y,T) + (r-q+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(y,T))\frac{\partial U}{\partial y}(y,T), \\
(\tilde{A}U)(y,T) &= (AU)(y,T) + qU(y,T).
\end{aligned}$$

Remarque 2. *Le signe du coefficient $(r-q+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(y,T))$ de la dérivée au premier ordre peut varier. En effet, on a logiquement $r-q<0$ car le rendement q de l'actif risqué doit être supérieur au rendement de l'actif sans risque. On peut penser que $r-q$ sera de l'ordre de 10^{-2}. $\hat{\sigma}^2(y,T)$ sera lui aussi de l'ordre de 10^{-2} puisque la volatilité est de l'ordre de 10^{-1}. Cette incertitude concernant le signe nous pousse à utiliser une approximation centrée des dérivées lors de la discrétisation de l'EDP.*

3 Discrétisation uniforme

3.1 Discrétisation en espace

On se restreint à $y \in [y_{min}; y_{max}]$ et $T \in [t_0; T_{max}]$. On obtient l'équation semi-discrétisée suivante:

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial T}(y,T) + \tilde{A}U(y,T) = 0 & \text{dans }]y_{min}; y_{max}[\times[t_0; T_{max}], \\ U(y_{min}, T) = S_0 e^{-q(T-t_0)} & \text{si } T \in [t_0; T_{max}], \\ U(y_{max}, T) = 0 & \text{si } T \in [t_0; T_{max}], \\ U(y, t_0) = f(y) = \max(S_0 - e^y, 0) & \text{pour } y \in]y_{min}; y_{max}[. \end{cases}$$

Soit $h = (y_{max} - y_{min})/N$ le pas d'espace. On pose, pour i allant de 0 à N:

$$\begin{aligned} y_i &= y_{min} + ih, \\ f_i &= f(y_i). \end{aligned}$$

Soit $u(T) = (U(y_i, T))_{1 \leq i \leq N-1} \in I\!R^{N-1}$.
A chaque instant, on discrétise $\tilde{A}$ par un opérateur discret $\tilde{A}_T : u(T) \in R^{N-1} \rightarrow \tilde{A}_T u(T) \in I\!R^{N-1}$. Pour cela, on remplace

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y}(y_i, T) \quad &\text{par} \quad \frac{u_{i+1}(T) - u_{i-1}(T)}{2h}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y_i, T) \quad &\text{par} \quad \frac{u_{i+1}(T) - 2u_i(T) + u_{i-1}(T)}{h^2}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \alpha_{i,T} &= -\frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{2h^2} - \frac{1}{2h}(r - q + \frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{2}), \\ \beta_{i,T} &= \frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{h^2} + q, \\ \gamma_{i,T} &= -\frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{2h^2} + \frac{1}{2h}(r - q + \frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{2}). \end{aligned}$$

On a alors, pour $i \in \{1, ..., N-1\}$ et pour tout T:

$$(\tilde{A}_T u(T))_i \quad = \quad \alpha_{i,T} u_{i-1}(T) + \beta_{i,T} u_i(T) + \gamma_{i,T} u_{i+1}(T).$$

3.1.1 Conditions aux limites

Pour $i = 0$, on a pour tout T une condition de type Dirichlet $u_0(T) = S_0 e^{-q(T-t_0)}$. Par conséquent,

$$(\tilde{A}_T u(T))_1 \quad = \quad \alpha_{1,T} S_0 e^{-q(T-t_0)} + \beta_{1,T} u_1(T) + \gamma_{1,T} u_2(T).$$

Pour $i = N$ ($y = y_{max}$) on a pour tout T la condition de Dirichlet $u_N(T) = 0$ donc

$$(\tilde{A}_T u(T))_{N-1} \quad = \quad \alpha_{N-1,T} u_{N-2}(T) + \beta_{N-1,T} u_{N-1}(T).$$

En particulier, pour $T = t_0$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} f_0 & = & S_0 e^{-q(T-t_0)}, \\ f_N & = & 0. \end{array} \right.$$

3.1.2 Construction de l'opérateur

On définit l'opérateur intermédiaire $\hat{A}_T$ de $I\!R^{N-1}$ représenté par la matrice suivante:

$$\left((\hat{A}_T)_{ij} \right)_{1 \leq i,j \leq N} \quad = \begin{pmatrix} \beta_{1,T} & \gamma_{1,T} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,T} & \beta_{2,T} & \gamma_{2,T} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \alpha_{N-2,T} & \beta_{N-2,T} & \gamma_{N-2,T} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{N-1,T} & \beta_{N-1,T} \end{pmatrix}$$

A cause de la condition de Dirichlet en $i = 0$, a alors

$$\begin{array}{lll} (\tilde{A}_T u(T))_1 & = & \alpha_{1,T} S_0 e^{-q(T-t_0)} + (\hat{A}_T u(T))_1, \\ (\tilde{A}_T u(T))_i & = & (\hat{A}_T u(T))_i \quad \forall i \in 2, ..., N-1. \end{array}$$

3.1.3 EDP discrétisée en espace

Cette discrétisation en espace permet de ramener l'EDP (E) à l'EDO (E_h):

$$(E^h) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial T}(T) + \tilde{A}_T u(T) = 0 \quad \text{si } T \in [t_0; T_{max}] \\ u(t_0) = f \end{array} \right.$$

soit

$$(E^h) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial T}(T) + \left(\hat{A}_T u(T) + \alpha_{1,T} S_0 e^{-q(T-t_0)} e_1 \right) = 0 \quad \text{si } T \in [t_0; T_{max}] \\ u(t_0) = f \end{array} \right.$$

où $f = (f(y_i))_{1 \leq i \leq N-1}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.2 Discrétisation en temps par les θ-schémas

Soit $\theta \in [0;1]$ fixé et k un pas de temps tel que $T_{max} - t_0 = Mk$. On approxime la solution u de (E^h) aux instants $t_0 + nk$ par les u^n solutions de:

$$(E^{h,k}) \begin{cases} u^0 = f \\ n \text{ croissant, on résout pour chaque } n : \\ \dfrac{u^{n+1} - u^n}{k} + \theta \tilde{A}^n u^n + (1-\theta)\tilde{A}^{n+1} u^{n+1} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

soit

$$(E^{h,k}) \begin{cases} u^0 = f \\ n \text{ croissant, on résout pour chaque } n : \\ \dfrac{u^{n+1} - u^n}{k} + \theta(\hat{A}^n u^n + \alpha_{1,T_n} S_0 e^{-q(T_n - t_0)} e_1) \\ +(1-\theta)(\hat{A}^{n+1} u^{n+1} + \alpha_{1,T_{n+1}} S_0 e^{-q(T_{n+1} - t_0)} e_1) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

où l'opérateur $\hat{A}^n$ est en fait l'opérateur $\hat{A}_{(t_0 + nk)}$.

On obtient différents types de schémas selon la valeur de θ:

- si $\theta = 1$, le schéma est explicite,
- si $0 \leq \theta < 1$, le schéma est implicite.

3.3 Résolution

On doit résoudre à chaque étape un système linéaire

$$H^n u^{n+1} = b^n$$

où

$$\begin{aligned} b^n &= (I - \theta k \hat{A}^n) u^n - S_0 k \left(\theta \alpha_{1,T_n} e^{-q(T_n - t_0)} + (1-\theta) \alpha_{1,T_{n+1}} e^{-q(T_{n+1} - t_0)} \right) e_1, \\ H^n &= I + (1-\theta) k \hat{A}^{n+1}. \end{aligned}$$

avec H^n de taille $(N-1, N-1)$ et tridiagonale pour tout n. Il suffit alors de triangulariser ce systeme à chaque pas de temps par la méthode du pivot et de le résoudre.

4 Discrétisation non uniforme

On a vu que la résolution de l'EDP donnait des résultats moins bons autour de S_0, c'est à dire dans la région qui nous intéresse le plus à priori. Pour remédier à cela, on peut modifier la discrétisation de manière à ce que le pas d'espace soit plus petit autour de S_0, quitte à être plus grand aux extrémités. Dans le cas ù $y_{min} = -y_{max}$, une solution pour construire une telle grille de prix est la suivante :

- construire une grille uniforme sur $[-y_{max}; +y_{max}]$,
- prendre l'image de cette grille par l'inverse de la fonction

$$x \to y_{max} * \tanh(x - y_0),$$

où $y_0 = \ln(S_0)$.

En effet, on voit sur le graphe de cette fonction (cf figure **??**) que les images inverses de cette fonction sont plus denses autour de y_0 et se raréfient aux extrémités.

La fonction inverse de $x \to y_{max} * \tanh(x - y_0)$ est la fonction définie par $g(y) = \frac{1}{2}\log((y_{max} + y)/(y_{max} - y)) + y_0$.

4.1 Discrétisation et construction de l'opérateur

Comme le pas d'espace h n'est plus constant, les formules de discrétisation sont différentes.

On se restreint à $y \in [-y_{max}; y_{max}]$ et $T \in [t_0; T_{max}]$. On obtient l'équation semi-discrétisée suivante:

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial T}(y,T) + \tilde{A}U(y,T) = 0 & \text{dans }]-y_{max}; y_{max}[\times[t_0; T_{max}], \\ U(-y_{max}, T) = S_0 e^{-q(T-t_0)} & \text{si } T \in [t_0; T_{max}], \\ U(y_{max}, T) = 0 & \text{si } T \in [t_0; T_{max}], \\ U(y, t_0) = f(y) = max(S_0 - e^y, 0) & \text{pour } y \in]y_{max}; y_{max}[. \end{cases}$$

Posons $h = 2y_{max}/N$. On définit une discrétisation de l'espace des prix $[-y_{max}; +y_{max}]$ de la manière suivante:

- Soit $i_0 \in 0, ..., N$ le plus petit indice tel que $g(-y_{max} + i_0 \cdot h) > -y_{max}$. Entre $-y_{max}$ et $g(-y_{max} + i_0 \cdot h)$, l'espace est discrétisé de manière uniforme à l'aide de i_0 points $y_0, ..., y_{i_0-1}$.
- Soit $i_1 \in 0, ..., N$ le plus grand indice tel que $g(-y_{max} + i_1 \cdot h) < y_{max}$. Entre $g(y_{max} + i_1 \cdot h)$ et y_{max}, l'espace est discrétisé de manière uniforme à l'aide de $N - i_1 + 1$ points $y_{i_1+1}, ..., y_N)$.
- Pour tout $i \in i_0, ..., i_1$, on définit $y_i = g(-y_{max} + ih)$.

On définit ensuite pour $i \in 0, ..., N$:

$$\begin{aligned} f_i &= f(y_i), \\ h_i &= y_{i+1} - y_i. \end{aligned}$$

Soit $u(T) = (U(y_i,T))_{0\le i\le N} \in I\!R^N$. Pour discrétiser $\tilde{A}$ par un schéma centré, on remplace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y}(y_i,T) \quad &\text{par} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}(T)-u_i(T)}{h_i} + \frac{u_i(T)-u_{i-1}(T)}{h_{i-1}}\right),\\
\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y_i,T) \quad &\text{par} \quad \frac{2}{h_i+h_{i-1}}\left(\frac{u_{i+1}(T)-u_i(T)}{h_i} - \frac{u_i(T)-u_{i-1}(T)}{h_{i-1}}\right).
\end{aligned}$$

Posons pour $i \in \{1,...,N-1\}$

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,T} &= -\frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{(h_i+h_{i-1})h_{i-1}} - \frac{1}{2h_{i-1}}\left(r-q+\frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{2}\right),\\
\beta_{i,T} &= \frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{h_i+h_{i-1}}\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(r-q+\frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{2}\right)\left(\frac{1}{h_{i-1}}-\frac{1}{h_i}\right)+q,\\
\gamma_{i,T} &= -\frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{(h_i+h_{i-1})h_i} + \frac{1}{2h_i}\left(r-q+\frac{\hat{\sigma}^2(y_i,T)}{2}\right).
\end{aligned}$$

On a alors, pour $i \in \{1,...,N-1\}$ et pour tout T:

$$(\tilde{A}_T u(T))_i \quad = \quad \alpha_{i,T}u_{i-1}(T) + \beta_{i,T}u_i(T) + \gamma_{i,T}u_{i+1}(T).$$

Une fois ces changements effectués, la méthode de résolution de l'EDP est la même que dans le cas d'une discrétisation uniforme (cf. 3). Le choix d'une telle discrétisation peut être intéressant dans la mesure où l'on s'intéresse au prix des options dont le strike n'est pas trop éloigné du prix actuel de l'actif sous-jacent.