Réduction d'un modèle HJM de volatilité dépendante d'un taux forward à une forme Markovienne

Julien Berton, Université de Marne La Vallée

March 1, 2012

Premia 14

1 Introduction

Ce texte est un résumé de l'article[1].
Il existe plusieurs catégories de modèles d'évaluation de la structure temporelle des taux d'intéret. Le modéle d'Heath, Jarrow et Morton fixe l'équation différentielle stochastique vérifiée par le taux forward.Ainsi, dans un marché sans opportunité d'arbitrage, le taux forward $f(t,T)$ à l'instant t applicable à l'instant T vérifie l'équation intégrale stochastique suivante :

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma^*(s,T,.)ds + \int_0^t \sigma(s,T,.)dW_s, \tag{1}$$

avec $t < T$, $f(0,T)$ le taux forward initial observable à l'instant $t = 0$, $\sigma(t,T,.)$ la fonction de volatilité du taux d'intéret forward, $\sigma^*(s,T,.) = \sigma(s,T,.)\int_s^t \sigma(s,u,.)du$ et W un mouvement brownien standard. Le troisième argument dans la fonction de volatilité indique la possible dépendence de la fonction de volatilité d'autres variables telles que le taux spot et le taux forward.
La donnée importante dans le modèle HJM est la fonction de volatilité du taux d'intéret forward. Ainsi, on peut affirmer qu'il n'y a pas un modèle HJM, mais une classe de modèles HJM caractérisés par la forme de leurs fonctions de volatilité (Rebonato 1996 page 316,[2],[3],[4]).
Dans un environnement sans opportunité d'arbitrage, le terme de drift dans l'équation différentielle stochastique vérifiée par le taux spot $r(t)$ dépend de toute l'historique de la fonction de volatilité. Par conséquent une solution de cette équation différentielle stochastique ne vérifie pas la propriété de Markov. Plusieurs travaux ont été effectué pour définir des conditions sous lesquelles le taux spot est Markovien. Ils aboutissent à une fonction de volatilité de la forme :

$$\sigma(t,T,r(t)) = (a_0 + a_1(T-t) + \ldots + a_n(T-t)^n)\, h(r(t))e^{-\lambda(T-t)}, 0 \le t \le T, \tag{2}$$

avec $h(r(t))$ une fonction du taux spot, a_i et λ des coefficients constants. Sous ces conditions, on peut rendre le système Markovien en rajoutant un ensemble de variables.
Dans cet article, on généralise la forme de la fonction de volatilité en incluant le taux d'interet forward :

$$\sigma(t,T,r(t),f(t,\tau)) = g(r(t),f(t,\tau))e^{-\lambda(T-t)}, 0 \leq t \leq \tau \leq T. \tag{3}$$

et en déterminant la fonction intermédiaire nécessaire pour rendre le système Markovien. Ici, $g(r(t),f(t,\tau))$ est une fonction du taux spot $r(t)$ et d'un taux forward $f(t,\tau)$ de maturité fixé τ. En outre, nous interprettons la variable intermédiaire comme une fonction du taux spot et du taux forward. Ainsi, on se ramène à un système de dimension deux. On définit ensuite deux schémas aux différences finies et l'on dressent un tableau de valeurs numériques pour des prix de zéro coupons et d'option européenne.

2 Le modèle HJM

Dans le modèle d'Heath Jarrow Morton, le taux forward vérifie l'équation intégrale stochastique suivante :

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma(u,T,.) \int_u^T \sigma(u,s,.)dsdu + \int_0^t \sigma(u,T,.)dW_u. \tag{4}$$

Le taux spot $r(t)$ définit par $r(t) = f(t,t)$ vérifie l'équation :

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma(u,t,.) \int_u^t \sigma(u,s,.)dsdu + \int_0^t \sigma(u,t,.)dW_u. \tag{5}$$

On en déduit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr(t) = \left(f_2(0,t) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \sigma(u,t)\int_u^t \sigma(u,s)dsdu\right) + \int_0^t \sigma_2(u,t)dW_u\right)dt + \sigma(t,t)dW_t \tag{6}$$

On remarque dans cette dernière équation que la partie intégrale du terme de drift dépend de toute la trajectoire de σ jusqu'à l'instant t. Par conséquent, une solution de cette équation ne vérifie pas la propriété de Markov.

3 Formulation Markovienne

Pour rendre le système définit par les équations 4 et 5 Markovien, on considère une volatilité de la forme :

$$\sigma(t,T,r(t),f(t,\tau)) = g(r(t),f(t,\tau))e^{-\lambda(T-t)}. \tag{7}$$

On exprime les équations 4 et 5 sous la forme d'équations différentielles stochastiques :

$$df(t,T) = \left[(\sigma(t,T,r(t),f(t,\tau)))^2 \frac{e^{\lambda(T-t)}-1}{\lambda}\right]dt + \sigma(t,T,r(t),f(t,\tau))dW_t \tag{8}$$

$$dr(t) = \left[f_2(0,t) + \int_0^t \left(-\lambda\sigma(u,t,r(u),f(u,\tau))\int_u^t \sigma(u,s,r(u),f(u,\tau))ds + (\sigma(u,t,r(u),f(u,\tau)))^2\right)du\right.$$

$$-\lambda \int_0^t \sigma(u,t,r(u),f(u,\tau))dW_u\Big] dt + \sigma(t,t,r(t),f(t,\tau))dW_t. \tag{9}$$

Or, d'après l'équation 4, on a la relation :

$$\int_0^t \sigma(u,t,r(u),f(u,\tau)) \int_u^t \sigma(u,s,r(u),f(u,\tau))dsdu + \int_0^t \sigma(u,t,r(u),f(u,\tau))dW_u = r(t) - f(0,t). \tag{10}$$

On en déduit la Proposition suivante :

Proposition 1. *Le taux spot $r(t)$ vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$dr(t) = [f_2(0,t) + \lambda(f(0,t) - r(t)) + \psi(t)]\, dt + \sigma(t,t,r(t),f(t,\tau))dW_t \tag{11}$$

où ψ est une fonction intermédiaire définie par :

$$\psi(t) = \int_0^t (\sigma(u,t,r(u),f(u,\tau)))^2\, du. \tag{12}$$

La fonction ψ vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$d\psi(t) = \left[(\sigma(t,t,r(t),f(t,\tau)))^2 - 2\lambda\psi(t)\right] dt \tag{13}$$

Par conséquent, les équations 8,11 et 13 forment un système d'équations différentielles stochastiques Markovien.

4 Interpretation de la fonction ψ

On peut relier la fonction ψ aux taux r et f du marché.

Proposition 2. *La fonction ψ vérifie l'équation suivante :*

$$\psi(t) = \lambda\alpha(t,\tau)\left(r(t) - f(0,t)\right) - \lambda e^{-\lambda(t-\tau)}\alpha(t,\tau)\left(f(t,\tau) - f(0,\tau)\right). \tag{14}$$

avec $\alpha(t,\tau) = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda\tau} + e^{-\lambda t}}$.

Ainsi, les équations 8 et 11 forment un système d'équations différentielles stochastiques Markovien de dimension deux.
On obtient aussi, une expression du taux forward $f(t,T)$ en fonction du taux spot $r(t)$, du taux forward $f(t,\tau)$ et des taux forward initiaux $f(0,t), f(0,\tau)$.

Proposition 3. *Le taux forward $f(t,T)$ vérifie l'équation suivante :*

$$f(t,T) = f(0,T) + \frac{\alpha(t,\tau)}{\alpha(T,\tau)}\left(f(t,\tau) - f(0,\tau)\right) + \left(1 + \frac{\alpha(t,\tau)}{\alpha(T,\tau)}\right)\left(r(t) - f(0,t)\right). \tag{15}$$

5 Equations de Kolmogorov

On note $\Pi(r(\bar{t}), f(\bar{t},\tau)/r(t), f(t,\tau))$ la densité de la probabilité de transition entre t et $\bar{t}$ du processus $(r(t), f(t,\tau))$. Elle vérifie l'équation rétrograde de Kolmogorov :

$$K\Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0, \tag{16}$$

où K est le générateur infinitésimal du processus de diffusion $(r(t), f(t,\tau))$ donné par l'équation suivante :

$$K\Pi = \sigma_f^2 \frac{e^{\lambda(\tau-t)}-1}{\lambda}\frac{\partial \Pi}{\partial f} + \left(\underbrace{f_2(0,t) - \lambda f(0,t)}_{D(t)} + \psi(t) - \lambda r(t)\right)\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_f^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial f^2} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \sigma_f\sigma_r\frac{\partial^2 \Pi}{\partial f \partial r}, \tag{17}$$

avec f_2 la dérivée de f suivant la deuxième variable.
Le prix d'un zéro coupon $P(t,u)$ à l'instant t d'écheance u est défini par l'égalité suivante :

$$P(t,u) = exp\left(-\int_t^u f(t,s)ds\right)$$

La formule de Feynman-Kac donne l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le prix P du zéro coupon :

$$KP - rP + \frac{\partial P}{\partial t} = 0. \tag{18}$$

La condition terminale est :

$$P(T,T,r,f) = 1. \tag{19}$$

Par ailleurs, d'après la proposition 3, on a une expression analytique de P.

Proposition 4. *Le prix $P(t,T,r,f)$ du zéro coupon vérifie l'équation :*

$$P(t,T,r,f) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\beta(t,T)(r(t) - f(0,t)) - \frac{1}{2}(\beta(t,T))^2\psi(t)\right), \tag{20}$$

avec $\beta(t,T) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right)$.

Pour une option européenne de maturité $T_c \leq T$ sur zéro-coupon d'échéance T_b, son prix $C(t,T_c,r,f)$ vérifie l'EDP suivante :

$$KC - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0, 0 \leq t \leq T_c. \tag{21}$$

Pour un call de strike E, on a la condition terminale suivante :

$$C(T_c,T,r,f) = (P(T_c,T,r,f) - E)^+. \tag{22}$$

6 Résolution numérique par différences finies

Pour les applications numériques, on considère la volatilité suivante :

$$\sigma(t, T, r(t), f(t,\tau)) = [\alpha_0 + \alpha_r r(t) + \alpha_f f(t,\tau)]^\gamma e^{-\lambda(T-t)}, \tag{23}$$

avec $\alpha_0, \alpha_r, \alpha_f \geq 0$ et $0 < \gamma < 1$. On en déduit alors que :

$$\sigma_r = [\alpha_0 + \alpha_r r(t) + \alpha_f f(t,\tau)]^\gamma,$$

et

$$\sigma_f = e^{-\lambda(\tau-t)}\sigma_r.$$

Par ailleurs, on suppose que $f(0,t) = \beta_0 + \beta_1(1 - e^{-\eta t})$. On utilise des schémas de différences finis pour résoudre les équations paraboliques 18 et 21. Il est difficile de démontrer la stabilité des schémas utilisés car les coéfficients de l'opérateur K dépendent du temps. C'est la raison pour laquelle, on a d'abord vérifié la précision de nos schémas en calculant les prix des zéros coupons dont on connait les prix exactes d'après la proposition 4.Ensuite on a pricé des calls européennes.
L' équation aux dérivées partielles vérifiée par les équations 18 et21 est de la forme :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mu_f \frac{\partial V}{\partial f} + \frac{1}{2}\sigma_f^2 \frac{\partial^2 V}{\partial f^2} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \sigma_f \sigma_r \frac{\partial^2 V}{\partial f \partial r} - rV. \tag{24}$$

avec,

$$\mu_r = D(t) + \psi - \lambda r \tag{25}$$

$$\mu_f = \sigma_f^2 \frac{e^{\lambda(\tau-t)} - 1}{\lambda}. \tag{26}$$

On pose $\Delta r, \Delta f$ et Δt les pas d'espaces et de temps. Ainsi, le prix du zéro coupon au pas de temps n et au point (i,j) est noté :

$$P_{i,j}^n = P(n\Delta t, T, i\Delta T, i\Delta r, j\Delta f), i = 0, \ldots, I, j = 0, \ldots, J, n = 0, \ldots, N.$$

Sur les bords, nous avons appliqué des conditions de Neumann homogénes.

6.1 Schéma aux différences finies avec la méthode ADI

On définit un schéma de différences finies avec la méthode ADI. Le prix $P_{i,j}^n$ à l'étape n s'obtient à partir du prix $P_{i,j}^{n+1}$ à l'étape $n+1$ en deux étapes. D'abord, $P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ est calculé en fixant j et en faisant varier i. Ensuite, $P_{i,j}^{n+1}$ est calculé en fixant i et en faisant varier j. Dans ce cas, le problème initial de dimension deux est réduit en une suite de problèmes de dimension un. On obtient le schéma suivant :

$$
\begin{aligned}
P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} &+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\Delta t}{4(\Delta r)^2}(\sigma_r)^2\right)(P_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + P_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) \\
&- \frac{\Delta t}{2\Delta r}\mu_r^{n+\frac{1}{2}}(P_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - P_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) = \\
&(1 - r_i\Delta t)P_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{1}{\theta} + \frac{\Delta t}{4(\Delta r)^2}(\sigma_r)^2\right)(P_{i+1,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1}) \\
&+ \frac{\Delta t}{2(\Delta f)^2}(\sigma_f^{n+1})^2(P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}) \\
&+ \frac{\Delta t}{4\Delta r\Delta f}\sigma_f^{n+1}\sigma_r(P_{i+1,j+1}^{n+1} - P_{i+1,j-1}^{n+1} - P_{i-1,j+1}^{n+1} + P_{i-1,j-1}^{n+1}). \qquad (27)
\end{aligned}
$$

et,

$$
\begin{aligned}
P_{i,j}^{n} &+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\Delta t}{4(\Delta f)^2}(\sigma_f^n)^2\right)(P_{i,j+1}^{n} - 2P_{i,j}^{n} + P_{i,j-1}^{n}) \\
&- \frac{\Delta t}{2\Delta f}\mu_f^n(P_{i,j+1}^{n} - P_{i,j-1}^{n}) = \\
&P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\Delta t}{4(\Delta f)^2}(\sigma_f^{n+1})^2\right)(P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}). \qquad (28)
\end{aligned}
$$

On choisira θ telle que $\theta \geq 4$ ou $\theta < 0$. Les fonctions $\mu_r, \mu_f, \sigma_r, \sigma_f$ sont calculés au point $(i\Delta r, j\Delta f)$ et au temps indiqué en exposant.

6.2 Schéma aux différences finies implicites

Le schéma aux différences finies implicites est un schéma à sept points. La résolution du système linéaire utilise la méthode itérative GMRES préconditionnée par une factorisation LU incomplète sans remplissage.

$$
\begin{aligned}
&\frac{P_{i,j}^{n} - P_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} - rP_{i,j}^{n-1} + \mu_r^{n-1}\frac{P_{i+1,j}^{n-1} - P_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta r} + \mu_f^{n-1}\frac{P_{i,j+1}^{n-1} - P_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta f} + \\
&\frac{(\sigma_f^{n-1})^2}{2}\frac{P_{i,j+1}^{n-1} + P_{i,j-1}^{n-1} - 2P_{i,j}^{n-1}}{(\Delta f)^2} + \frac{(\sigma_r)^2}{2}\frac{P_{i+1,j}^{n-1} + P_{i-1,j}^{n-1} - 2P_{i,j}^{n-1}}{(\Delta r)^2} + \\
&\sigma_r\sigma_f^{n-1}\frac{2P_{i,j}^{n-1} + P_{i+1,j+1}^{n-1} + P_{i-1,j-1}^{n-1} - P_{i+1,j}^{n-1} - P_{i-1,j}^{n-1} - P_{i,j+1}^{n-1} - P_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta r\Delta f} = 0 \qquad (29)
\end{aligned}
$$

7 Résultats numériques

Les paramètres du modèle sont les suivants :

$$\alpha_0 = 0.001, \alpha_r = 0.04, \gamma = 0.5, \lambda = 0.2,$$

$$\beta_0 = 0.04, \beta_1 = 0.04, \eta = 0.05,$$

$$T_b = 1\text{an}, \tau = 1\text{an}, \theta = 12.$$

Nous présentons dans un tableau les prix obtenus au point $(r0, f0) = (0.04, 0.04)$ pour le zéro-coupon et un call européen de strike $E = 0.8$. Ces prix sont calculés pour $\alpha_f = 0$ et $\alpha_f = \alpha_r$. La maturité du zéro-coupon est fixée à $T_b = 1 = \tau$. Pour le pricing des zéro-coupons, nous avons considéré deux instants $t = 3$ mois et $t = 6$ mois . Pour les calls, nous avons fixé l'instant $t = 0$ et considéré deux maturités $T_c = 3$ mois et $T_c = 6$ mois .

	maturité	nombre de pas	adi bond	implicite bond	adi call euro.	implicite call euro.
$\alpha_f = 0$	6mois	80	0.9796	0.9795	0.1731	0.1733
		140	0.9798	0.9797	0.1739	0.1740
		200	0.9798	0.9798	0.1741	0.1743
	3mois	80	0.9900	0.9899	0.1821	0.1821
		140	0.9900	0.9900	0.1826	0.1826
		200	0.9900	0.9900	0.1827	0.1828
$\alpha_f = \alpha_r$	6mois	80	0.9789	0.9788	0.1708	0.1709
		140	0.9793	0.9792	0.1719	0.1721
		200	0.9794	0.9794	0.1724	0.1726
	3mois	80	0.9899	0.9898	0.1805	0.1805
		140	0.9899	0.9899	0.1813	0.1813
		200	0.9900	0.9900	0.1816	0.1816

8 Conclusion

Nous avons considéré le pricing d'options sur zéro-coupon dans le cadre du modèle HJM avec une fonction de volatilité dépendante du taus spot et d'un taux forward de maturité fixée. On a démontré comment, dans ce cadre, on pouvait se ramener à un système Markovien de dimension deux. Alors, le pricing de dérivés sur zéro-coupon peut se traduire par la résolution d'équations aux dérivées partielles. Nous proposons deux schémas aux différences finies, un schéma implicite utilisant la méthode ADI et un schéma implicite utilisant la méthode itérative GMRES pour résoudre les systèmes linéaires. Ces deux schémas convergent pour le prix des zéro-coupons et des options européennes. Le schéma ADI est un peu moins lent que le schéma implicite. Nous pensons qu'il serait intéressant de comparer ces schémas avec d'autres schémas, de type monte carlo,élements finis ou volumes finis par exemple. Nous pouvons aussi espérer augmenter la précision de ces deux derniers schémas en mettant en oeuvre des maillages adaptatifs.

Références

[1] Bhar R,Chiarella C,El-Hassan N,Zheng X, *The Reduction of Forward rate Dependent Volatility HJM models to markovian Form: Pricing European Bond Options.*,School of finance and Economics,University of Technology,Sydney,AUSTRALIA. 1

[2] Bhar R,Chiarella C, *Transformation of Heath-Jarrow-Morton Models to Markovian Systems.*,The European Journal of Finance,3,1-26,1997. 1

[3] Chiarella C,El-Hassan, *A Preference Free Partial Differential Equation for the Term Structure of Interest Rates*,Financial Engineering and Japanese Markets 3,217-238,1996. 1

[4] Chiarella C,Kwon O.K., *Formulation of Popular Interest rate Models under the HJM Framework*,Research Paper 12, Quantitative Finance Research Group, School of Finance and Economics, UTS,1999. 1