Calibration d'un modèle à volatilité stochastique et sauts dans Premia7

A. BEN HAJ YEDDER adel@freesurf.fr

J. DA FONSECA jose.da_fonseca@devinci.fr

Sauts : Modèle de Merton

- Volatilité constante σ

Sauts : Modèle de Merton

- Volatilité constante σ
- Modèle de poisson pour le saut d'intensité constante λ

Sauts : Modèle de Merton

- Volatilité constante σ
- Modèle de poisson pour le saut d’intensité constante λ
- Loi log-normale pour l’amplitude des sauts

Sauts : Modèle de Merton

- Volatilité constante σ
- Modèle de poisson pour le saut d'intensité constante λ
- Loi log-normale pour l'amplitude des sauts

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dS_t}{S_t} & = & (r-d)dt + \sigma dW_t + (e^J - 1)dN_t \\ S(t=0) & = & S_0 \end{array} \right.$$

avec $J \sim \mathcal{N}(m, v)$.

- Dynamique de la volatilité en *"racine carrée"*

Volatilité stochastique : Modèle de Heston

- Dynamique de la volatilité en *"racine carrée"*
- Paramètres : κ (force de rappel), θ (valeur moyenne) et σ_v (volatilité de la volatilité)

Volatilité stochastique : Modèle de Heston

- Dynamique de la volatilité en *"racine carrée"*
- Paramètres : κ (force de rappel), θ (valeur moyenne) et σ_v (volatilité de la volatilité)

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} & = & (r-d)dt + \sqrt{V_t}dW_t^1 \\ dV_t & = & \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_t^2 \\ S(t=0) & = & S_0 \\ V(t=0) & = & V_0 \end{cases}$$

avec $d < W^1, W^2 >_t = \rho dt$.

Combinaison des modèles de Merton et Heston :

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} & = & (r-d)dt + \sqrt{V_t}dW_t^1 + (e^J - 1)dN_t \\ dV_t & = & \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_t^2 \\ S(t=0) & = & S_0 \\ V(t=0) & = & V_0 \end{cases}$$

avec $d < W^1, W^2 >_t = \rho dt$ et $J \sim \mathcal{N}(m, v)$.

Calibration

- Paramètres à calibrer :

Calibration

- Paramètres à calibrer :
  - Merton (4) : σ, λ, m, v

Calibration

- Paramètres à calibrer :
  - Merton (4) : σ, λ, m, v
  - Heston (5) : $V_0, \kappa, \theta, \sigma_v, \rho$

Calibration

- Paramètres à calibrer :
  - Merton (4) : σ, λ, m, v
  - Heston (5) : $V_0, \kappa, \theta, \sigma_v, \rho$
  - Merton + Heston (8) : $V_0, \kappa, \theta, \sigma_v, \rho, \lambda, m, v$

Calibration

- Paramètres à calibrer :
  - Merton (4) : σ, λ, m, v
  - Heston (5) : $V_0, \kappa, \theta, \sigma_v, \rho$
  - Merton + Heston (8) : $V_0, \kappa, \theta, \sigma_v, \rho, \lambda, m, v$
- Algorithme d'optimisation : algorithme de BFGS avec contraintes de types bornes ($a_i \leq x_i \leq b_i$)

Pricing (1)

- Formules quasi-fermées pour les calls/puts européens [1] obtenues en appliquant une transformée de Fourier à l'EDP par Feynman-Kac.

[1] Artur Sepp, *Pricing European-Style Options under Jump Diffusion Processes with Stochastic Volatility: Applications of Fourier Transform,* Proceedings of the 7th Tartu Conference on Multivariate Statistics, (2004).

Pricing (1)

- Formules quasi-fermées pour les calls/puts européens [1] obtenues en appliquant une transformée de Fourier à l'EDP par Feynman-Kac.
- Avec la convention $\varphi = 1$ (resp. -1) pour un call (resp. put) le prix est donné par :

$$F(S,t) = \varphi \left(e^{-d(T-t)} S_t P_1(\varphi) - e^{-r(T-t)} K P_2(\varphi) \right)$$

où $P_j(\varphi) = \frac{1-\varphi}{2} + \varphi \Pi_j$ pour $j \in \{1,2\}$ avec

$$\Pi_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{\phi_j(k)}{ik} \right] dk.$$

[1] Artur Sepp, *Pricing European-Style Options under Jump Diffusion Processes with Stochastic Volatility: Applications of Fourier Transform,* Proceedings of the 7th Tartu Conference on Multivariate Statistics, (2004).

Pricing (2) : fonctions caractéristiques

Notations : $\begin{cases} X = ln(S_t/K) + (r-d)\tau & avec \quad \tau = T - t, \\ u = +1, \;\; I = 1, \;\; b = \kappa - \rho\sigma_v & si \quad j = 1 \\ u = -1, \;\; I = 0, \;\; b = \kappa & si \quad j = 2 \end{cases}$

Pour $j \in \{1, 2\}$ l'expression des fonctions ϕ_j est :

Pricing (2) : fonctions caractéristiques

Notations : $\begin{cases} X = ln(S_t/K) + (r-d)\tau & avec \quad \tau = T - t, \\ u = +1, \;\; I = 1, \;\; b = \kappa - \rho\sigma_v & si \quad j = 1 \\ u = -1, \;\; I = 0, \;\; b = \kappa & si \quad j = 2 \end{cases}$

Pour $j \in \{1, 2\}$ l'expression des fonctions ϕ_j est :

Merton : $$\phi_j(k) = e^{ikX + A(k,\tau) + B(k,\tau)V_0 + D(k,\tau)\lambda}$$

Avec :

- $A(k, \tau) = 0$
- $B(k, \tau) = -1/2(k^2 - uik)\tau$
- $D(k, \tau) = \tau\Lambda(k)$ où
  $\Lambda(k) = e^{(m+v^2/2)ik - v^2k^2/2 + I(m+v^2/2)} - 1 + (ik + I)(e^{m+v^2/2} - 1)$.

Pricing (2) : fonctions caractéristiques

Notations : $\begin{cases} X = ln(S_t/K) + (r-d)\tau & avec \quad \tau = T - t, \\ u = +1, \;\; I = 1, \;\; b = \kappa - \rho\sigma_v & si \quad j = 1 \\ u = -1, \;\; I = 0, \;\; b = \kappa & si \quad j = 2 \end{cases}$

Pour $j \in \{1, 2\}$ l'expression des fonctions ϕ_j est :

Heston : $$\phi_j(k) = e^{ikX + A(k,\tau) + B(k,\tau)V_0 + D(k,\tau)\lambda}$$

Avec :

- $A(k,\tau) = -\frac{\kappa\theta}{\sigma_v^2}\left[\psi_+\tau + 2ln\left(\frac{\psi_- + \psi_+ e^{-\tau\zeta}}{2\zeta}\right)\right]$
- $B(k,\tau) = -(k^2 - uik)\frac{1 - e^{-\tau\zeta}}{\psi_- + \psi_+ e^{-\tau\zeta}}$
- $D(k,\tau) = 0$

où $\psi_\pm = \mp(b - \rho\sigma_v ik) + \zeta$ et $\zeta = \sqrt{(b - \rho\sigma_v ik)^2 + \sigma_v^2(k^2 - iuk)}$.

Fonction objective

- Soit un ensemble d'options, de prix observées $prix_i^{obs}$, on définit 3 types de fonctions à minimiser :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1 & = & \sum_i ||prix_i - prix_i^{obs}||^2 \\ f_2 & = & \sum_i ||\frac{prix_i - prix_i^{obs}}{prix_i^{obs}}||^2 \\ f_3 & = & \sum_i ||\sigma_{imp,i} - \sigma_{imp,i}^{obs}||^2 \end{array} \right.$$

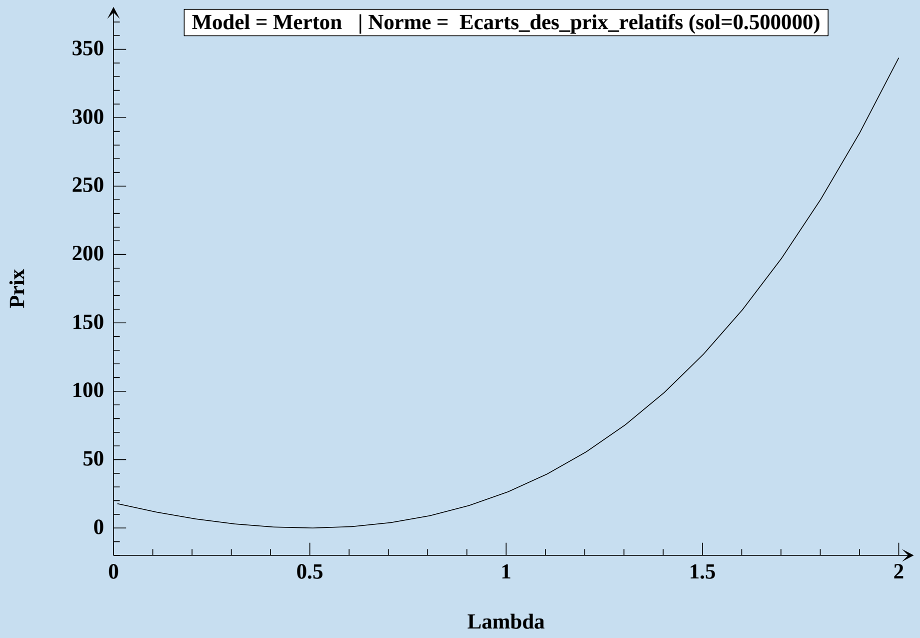
Fonction objective

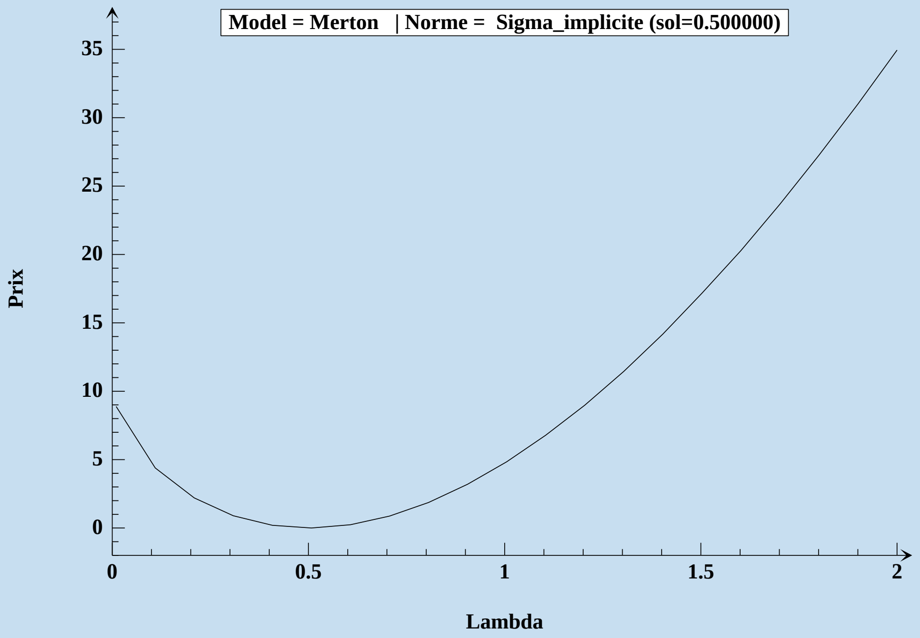
- Soit un ensemble d'options, de prix observées $prix_i^{obs}$, on définit 3 types de fonctions à minimiser :

$$\begin{cases} f_1 & = & \sum_i ||prix_i - prix_i^{obs}||^2 \\ f_2 & = & \sum_i ||\frac{prix_i - prix_i^{obs}}{prix_i^{obs}}||^2 \\ f_3 & = & \sum_i ||\sigma_{imp,i} - \sigma_{imp,i}^{obs}||^2 \end{cases}$$

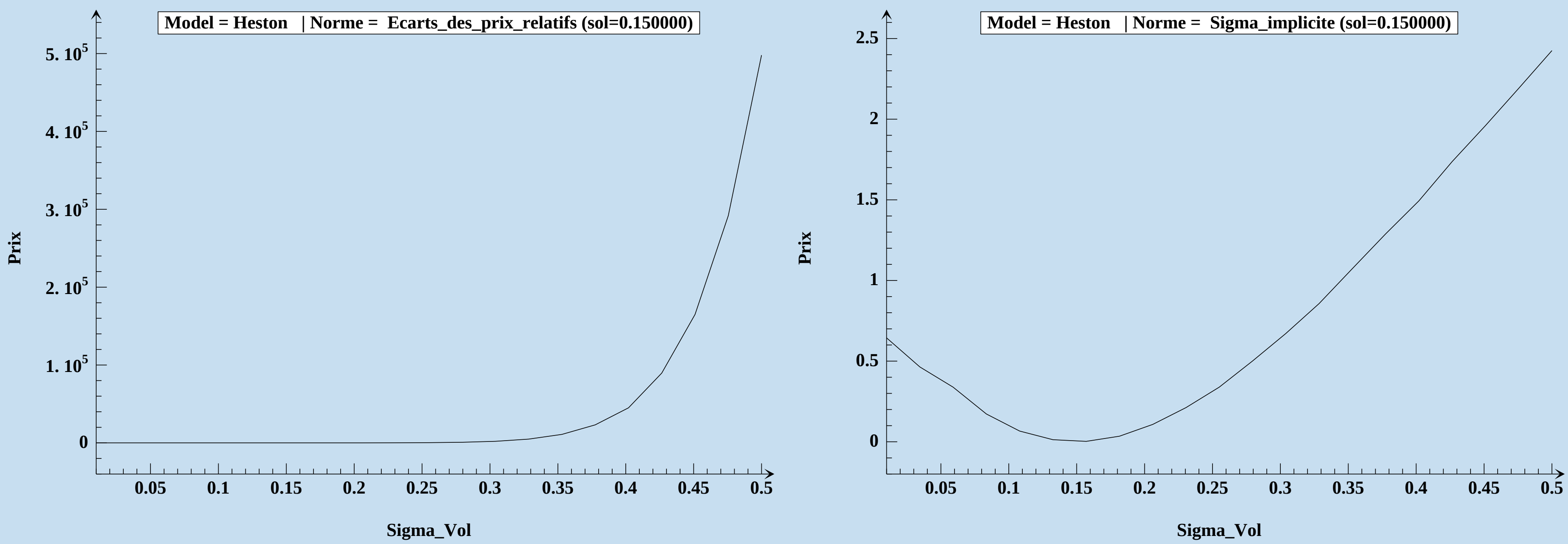
- Pour chacun des 3 cas et pour les 3 modèles on calcule les gradients $\nabla_\alpha f_j$ par des formules quasi-fermées semblables aux formules de pricing.
  L'indice α représente un paramètre du modèle à calibrer (Merton ou Heston ou Merton+Heston).

Allures des fonctions objectives (1)



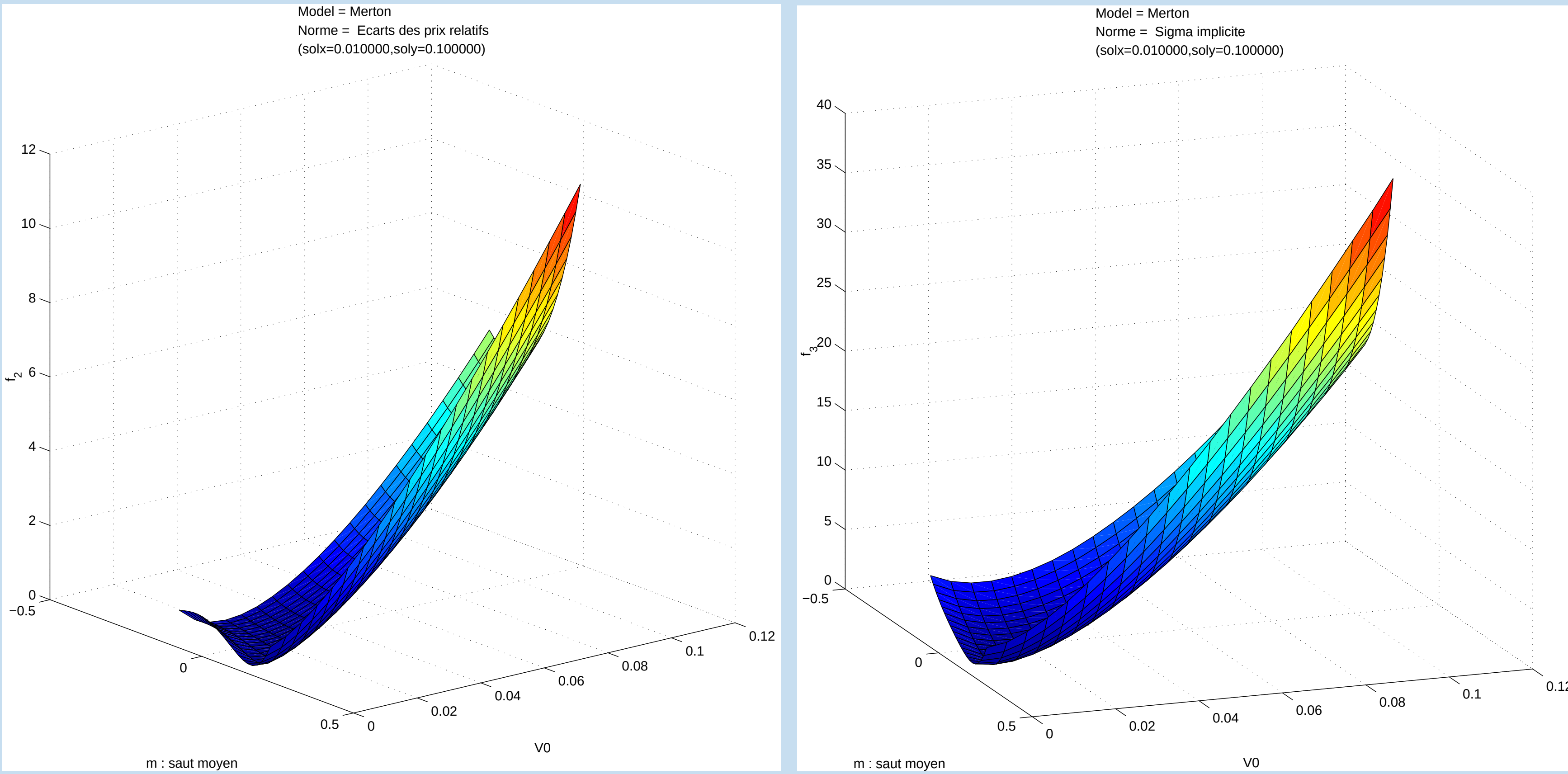


Allures des fonctions objectives (2)

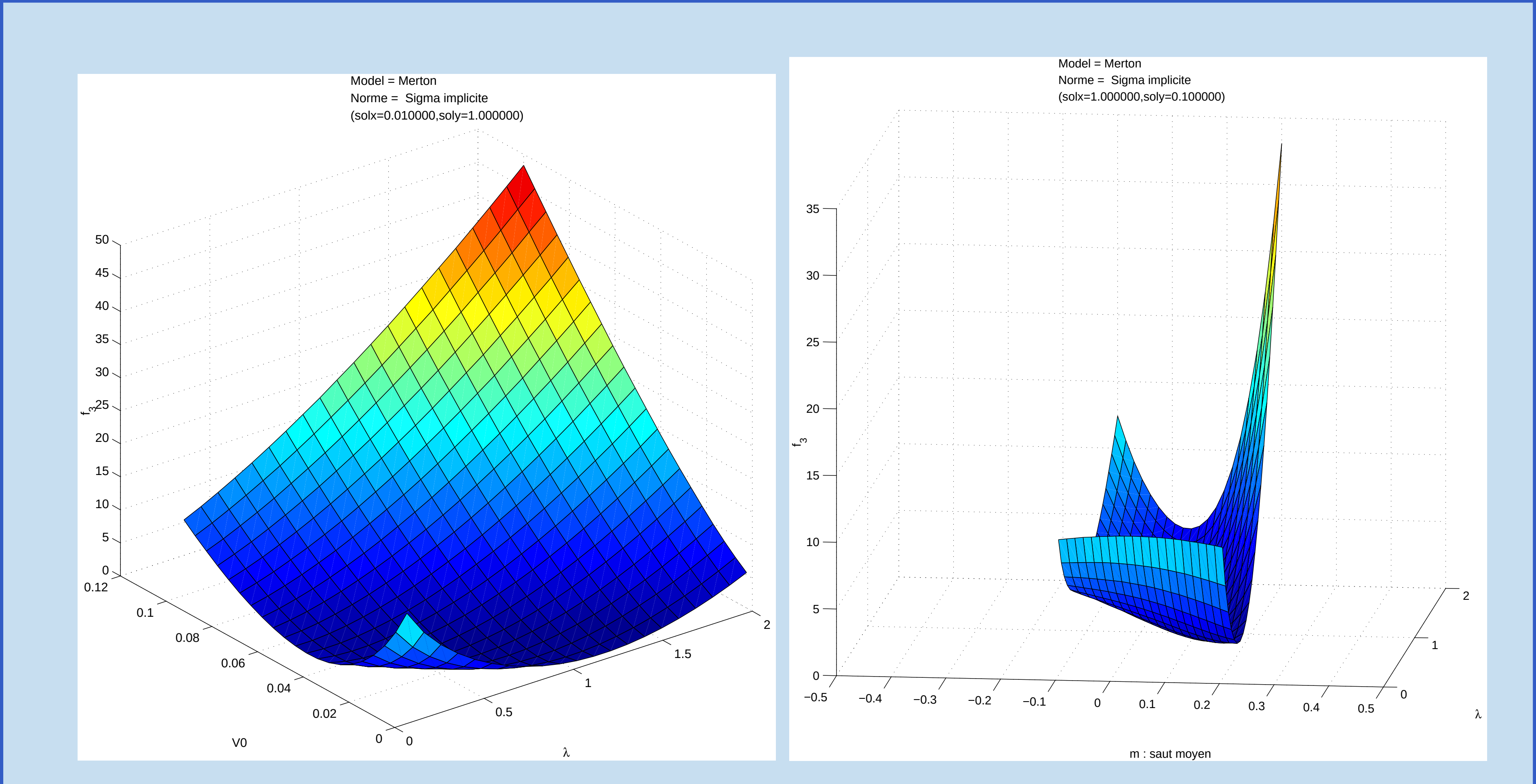


Allures des fonctions objectives (3)

Merton

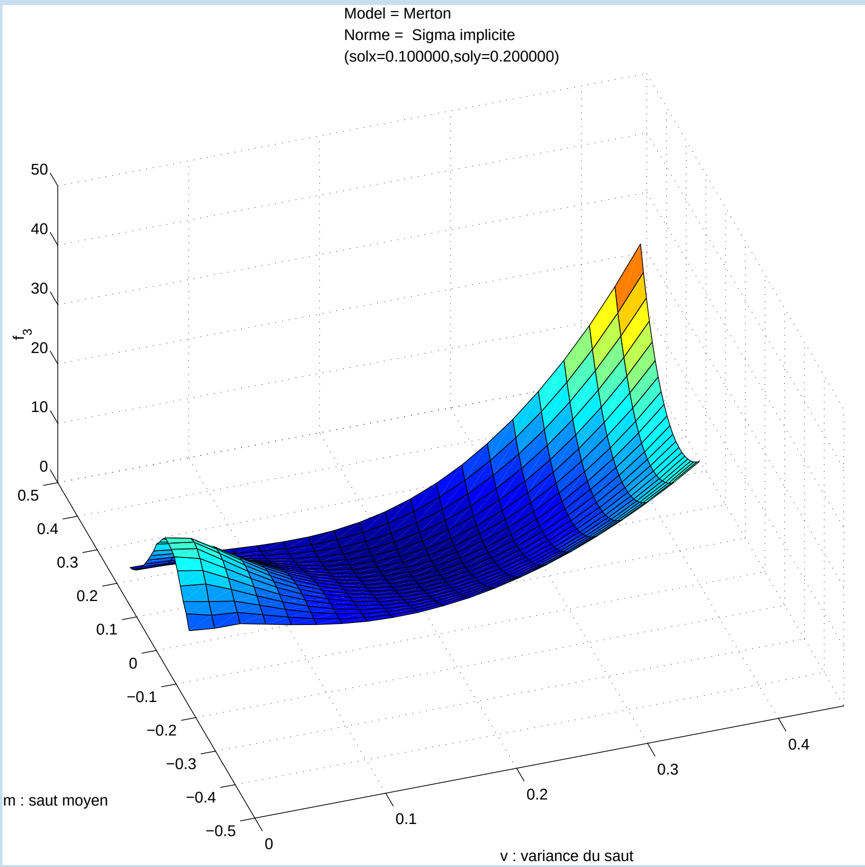


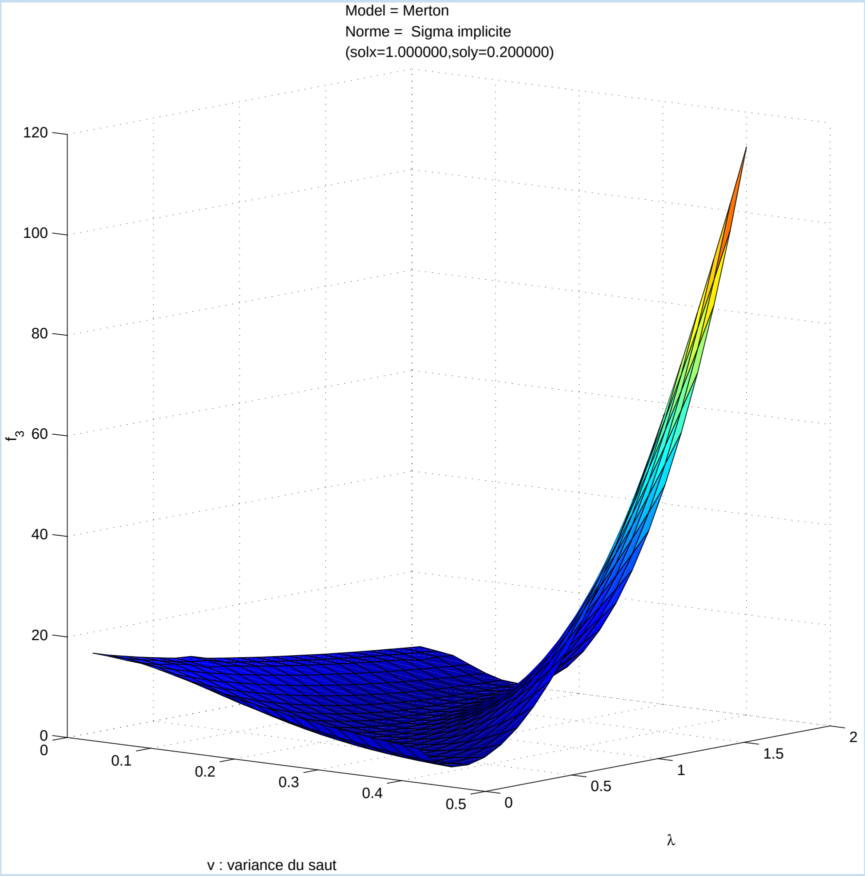
Merton



Model = Merton
Norme = Sigma implicite
(solx=0.010000,soly=1.000000)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
f_3
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
V0
0
0.5
1
1.5
2
λ
Model = Merton
Norme = Sigma implicite
(solx=1.000000,soly=0.100000)
0
5
10
15
20
25
30
35
f_3
−0.5
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
m : saut moyen
0
1
2
λ

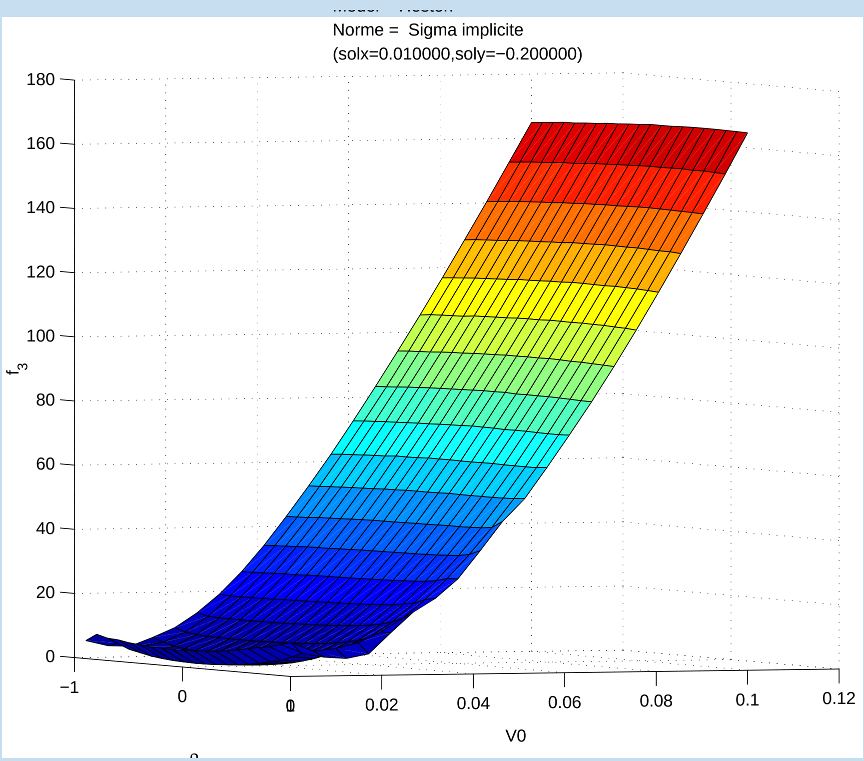
Merton

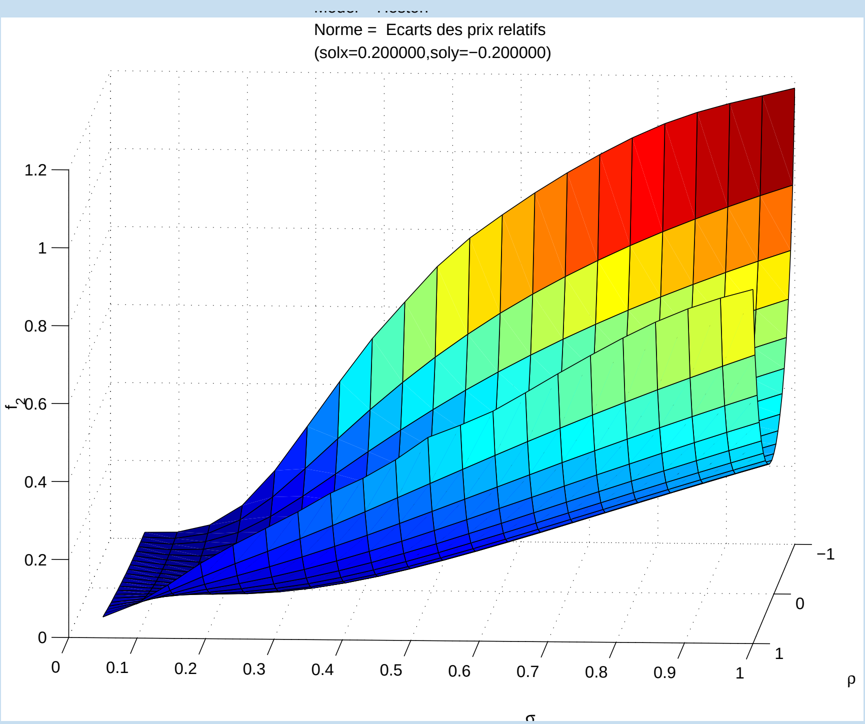

Model = Merton
Norme = Sigma implicite
(solx=0.100000,soly=0.200000)
f_3
m : saut moyen
v : variance du saut
0
10
20
30
40
50
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
0.1
0.2
0.3
0.4


Model = Merton
Norme = Sigma implicite
(solx=1.000000,soly=0.200000)
f_3
v : variance du saut
λ
0
20
40
60
80
100
120
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.5
1
1.5
2

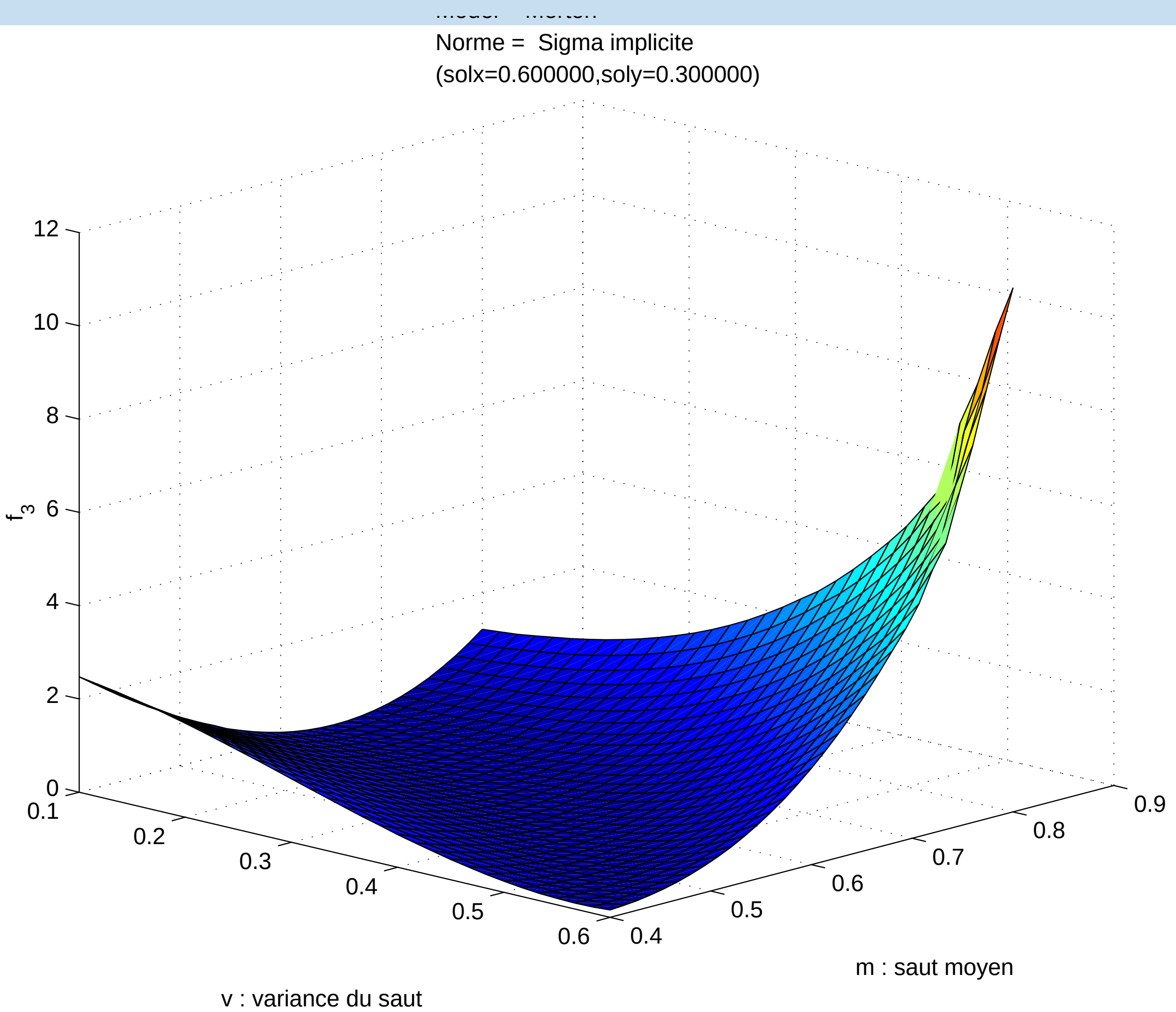
Allures des fonctions objectives (6)

Heston



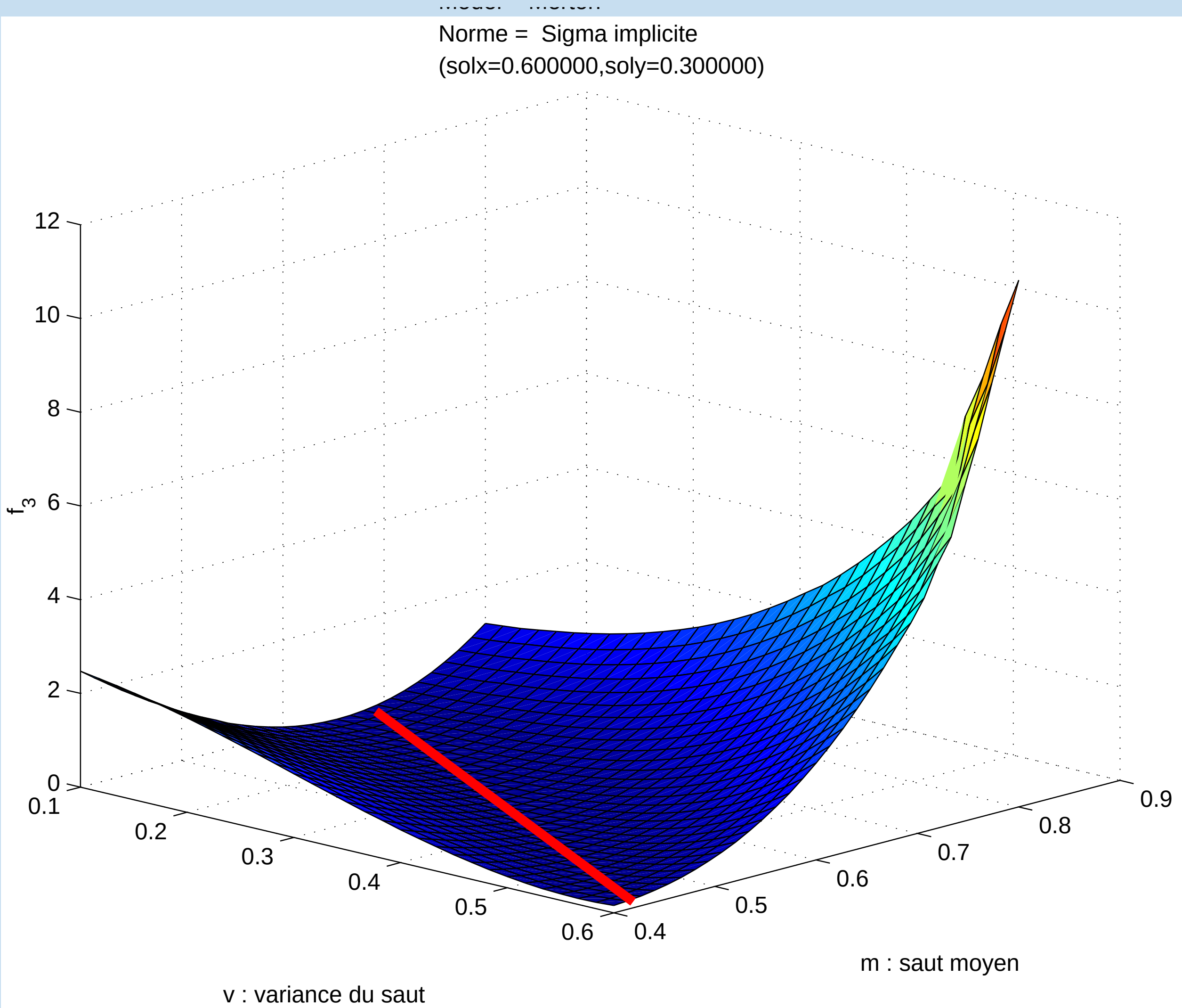


La vallée

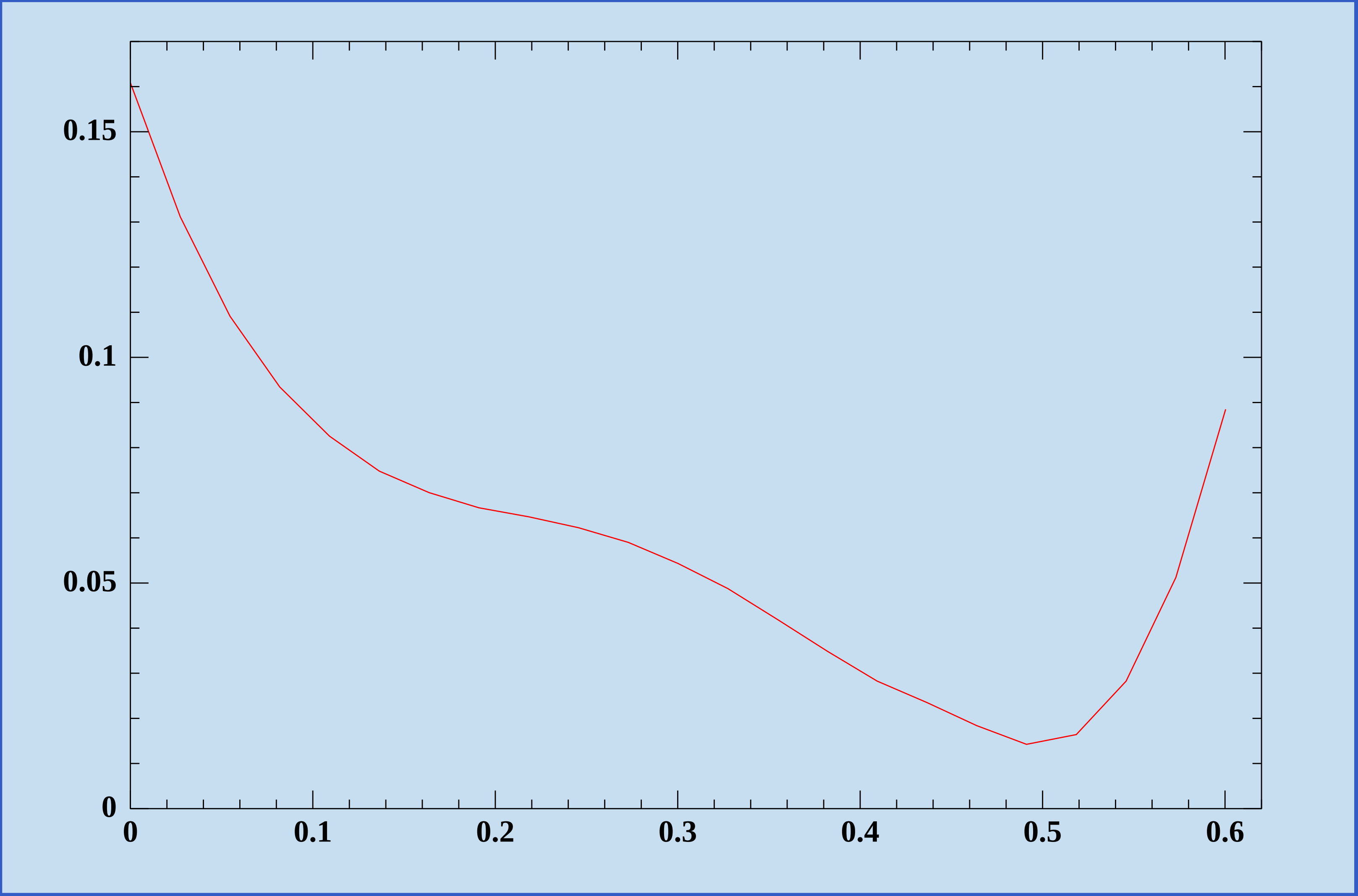

Norme = Sigma implicite
(solx=0.600000,soly=0.300000)
f_3
v : variance du saut
m : saut moyen

Allures des fonctions objectives (7)

La vallée



La vallée



Etude des modèles et stratégies de calibration (1)

- On choisit un jeu de paramètres x_0 $(= (\sigma_0, \lambda_0, m_0, v_0)$ pour Merton par exemple).

Etude des modèles et stratégies de calibration (1)

- On choisit un jeu de paramètres x_0 ($= (\sigma_0, \lambda_0, m_0, v_0)$ pour Merton par exemple).

- On se donne un ensemble de maturités T_i et de strike K_i pour lesquels on calcules les prix des call ou put européens avec les paramètres x_0. Ces prix représentent les observés $prix_i^{obs}$.

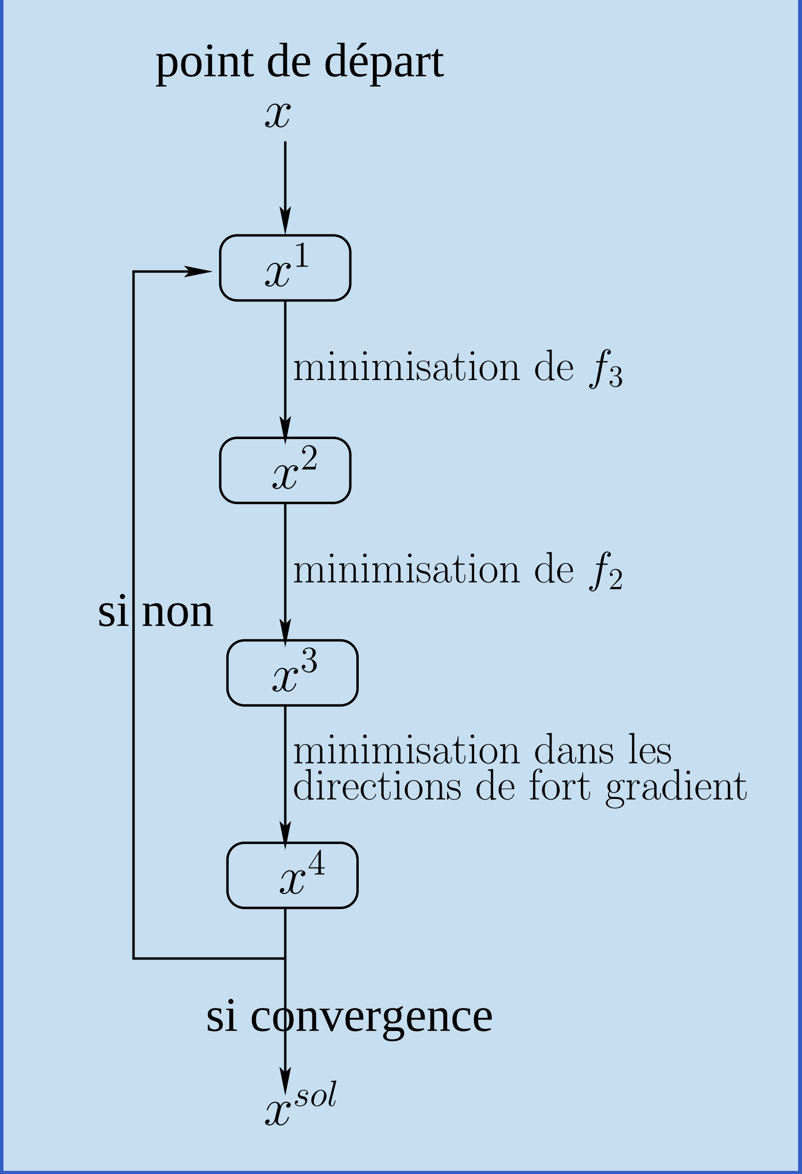
Etude des modèles et stratégies de calibration (1)

- On choisit un jeu de paramètres x_0 ($= (\sigma_0, \lambda_0, m_0, v_0)$ pour Merton par exemple).

- On se donne un ensemble de maturités T_i et de strike K_i pour lesquels on calcules les prix des call ou put européens avec les paramètres x_0. Ces prix représentent les observés $prix_i^{obs}$.

- On part avec des paramètres x ($= (\sigma, \lambda, m, v)$) choisis aléatoirement, et on cherche à retrouver x_0 en minimisant la fonction objective f_j.

Algorithme de calibration



Premiers résultats

- Calcul avec 1000 points de départ choisis aléatoirement.

Premiers résultats

- Calcul avec 1000 points de départ choisis aléatoirement.
- Pour les modèles de Merton ou de Heston la solution est retrouvée dans 99% des cas.

Premiers résultats

- Calcul avec 1000 points de départ choisis aléatoirement.
- Pour les modèles de Merton ou de Heston la solution est retrouvée dans 99% des cas.
- Pour le Modèle Heston+Merton, le taux de convergence n'est que de l'odre de 50% : problème de minimas locaux.