3. 动量与角动量

3.1 冲量与动量定理

3.2 动量守恒定律

3.3 变质量系统、火箭飞行原理

3.4 质心

3.5 质心运动定理

3.6 质点的角动量和角动量定理

3.7 角动量守恒定律

3.8 质点系的角动量定理

3.9 质心系中的角动量定理

牛顿定律是瞬时的规律。

在有些问题中， 如：碰撞（宏观）、 散射（微观）… 我们往往只关心过程中力的效果

——力对时间和空间的积累效应。

力在时间上的积累效应：

平动 → 冲量 → 动量的改变

转动 → 冲量矩 → 角动量的改变

力在空间上的积累效应

→ 功 → 能量改变

3.1 冲量，动量定理

一. 冲量，动量，质点动量定理

定义：力的冲量（impulse）—— $\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t}$

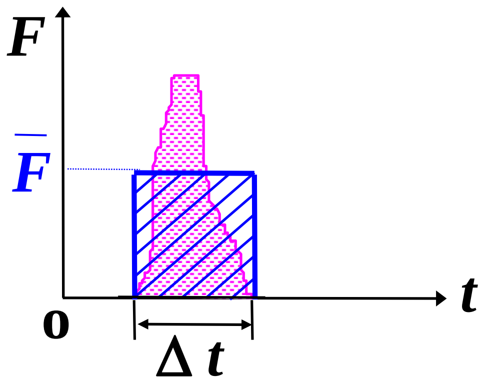
质点的动量（momentum）—— $\boxed{\vec{p}=m\vec{v}}$

质点动量定理：
（theorem of momentum of a particle）

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \boxed{\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}} & \text{（微分形式）} \\ \boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1} & \text{（积分形式）} \end{cases}$$

平均冲力： $$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$



例3.1 已知：一篮球质量m = 0.58kg，

从h=2.0m的高度下落，到达地面后，以同样速率反弹， 接触地面时间Δ t = 0.019s。

求：篮球对地的平均冲力 $\overline{F}$

解： 篮球到达地面的速率

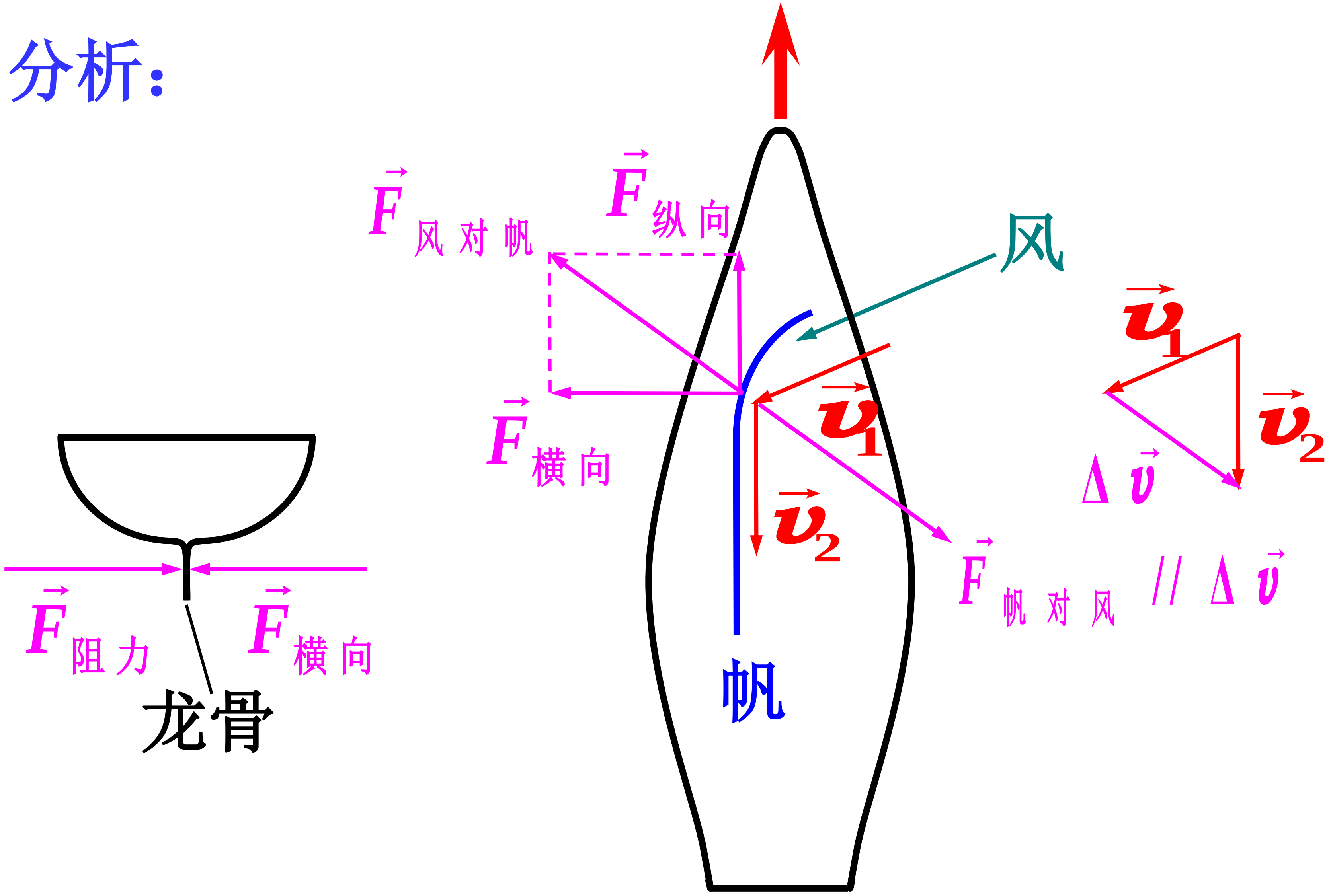
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.80 \times 2} = 6.26\,\mathrm{m/s}$$

$$\overline{F} = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2 \times 0.58 \times 6.26}{0.019} = 3.82 \times 10^2\ \mathrm{N}$$

船行“八面风”

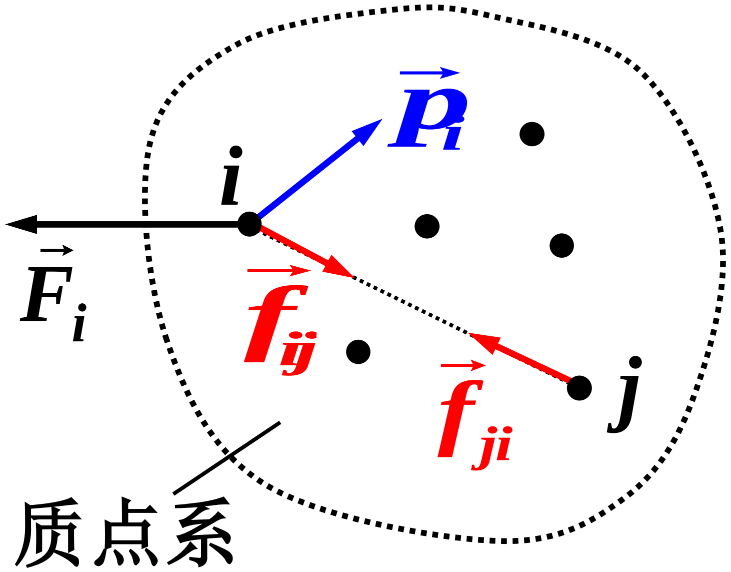
演示 逆风行舟

分析：



$\vec{F}_{阻力}$
$\vec{F}_{横向}$
龙骨
$\vec{F}_{风对帆}$
$\vec{F}_{纵向}$
$\vec{F}_{横向}$
风
$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
帆
$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
$\Delta\vec{v}$
$\vec{F}_{帆对风} // \Delta\vec{v}$

二. 质点系动量定理（theorem of momentum of particle system）



$\vec{F}_i$ ：质点 i 受的合外力

$\vec{f}_{ij}$ ：质点 j 对 i 的内力

$\vec{p}_i$ ：质点 i 的动量

对质点 i ： $(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i$

对质点系： $\sum_i (\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i$

由牛顿第三定律有： $\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = 0$

所以有： $(\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\,\vec{p}_i$

令 $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{外}$， $\sum_i \vec{p}_i = \vec{P}$

则有： $\boxed{\vec{F}_{外}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,\vec{P}}$

或 $\boxed{\vec{F}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{P}}{\mathrm{d}t}}$

} 质点系动量定理（微分形式）

$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外} \cdot \mathrm{d}t = \vec{P}_2 - \vec{P}_1}$ —质点系动量定理（积分形式）

系统总动量由外力的冲量决定，与内力无关。

用质点系动量定理处理问题可避开内力。

3.2 动量守恒定律

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量不随时间改变。这就是质点系的动量守恒定律。

即 $$\boxed{\vec{F}_{外}=0\text{ 时，}\vec{P}=\text{常矢量}}$$

几点说明：

1.动量守恒定律是牛顿第三定律的必然推论。

2.动量定理及动量守恒定律只适用于惯性系。

3. 动量若在某一惯性系中守恒，则在其它一切惯性系中均守恒。

4.若某个方向上合外力为零， 则该方向上动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。

5.当外力<<内力且作用时间极短时（如碰撞），可认为动量近似守恒。

6.动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律，它在宏观和微观领域均适用。

7.用守恒定律作题，应注意分析 过程、系统和条件。

3.3变质量系统、火箭飞行原理

低速（$v << c$）情况下的两类变质量问题：

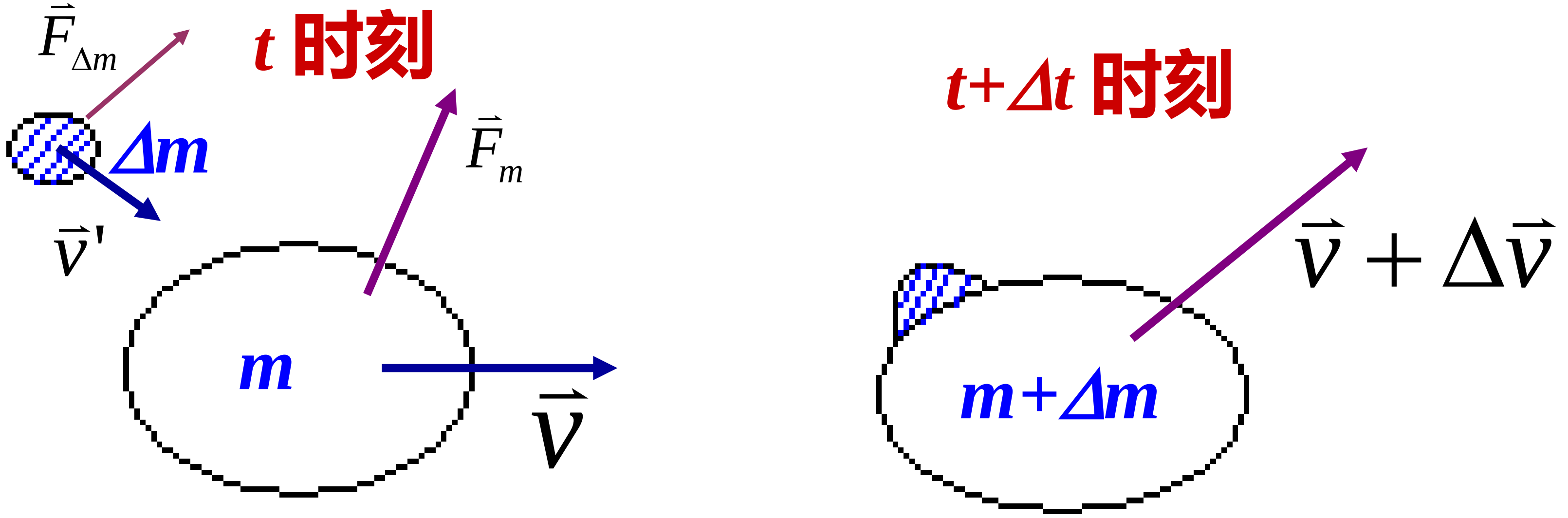
▲ 粘附 — 主体的质量增加

（如过饱和蒸汽不断凝聚成雨滴）

▲ 抛射 — 主体的质量减少（如火箭发射）

还有另一类变质量问题是在高速（$v \sim c$）情况下，这时即使没有粘附和抛射，质量也可以随速度改变 — $m = m(v)$，这是相对论情形，不在本节讨论之列。

一. 运动方程



时刻		质量	速度	外力
t	主体	m	$\vec{v}$	$\vec{F}_m$
	附体	Δm	$\vec{v}'$	$\vec{F}_{\Delta m}$
$t+\Delta t$	主体	$m+\Delta m$	$\vec{v}+\Delta\vec{v}$	$\vec{F}=\vec{F}_m+\vec{F}_{\Delta m}$

$$(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-(m\vec{v}+\Delta m\vec{v}')=\vec{F}\Delta t$$

$$m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=(\vec{v}'-\vec{v})\frac{\Delta m}{\Delta t}+\vec{F}-\Delta\vec{v}\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$,则 $\Delta\vec{v}\to 0$

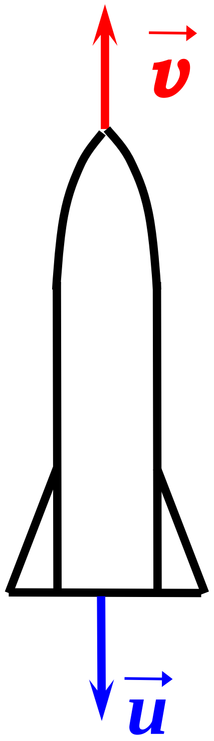
$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=(\vec{v}'-\vec{v})\frac{dm}{dt}+\vec{F}$$

密歇尔斯基方程

(1859 - 1935)

二. 火箭

1. 不受外力情形（在自由空间飞行）



(1) 火箭的速度

系统：火箭壳体 + 尚存燃料

条件：燃料相对箭体以恒速$\vec{u}$喷出

参考系：地面

先分析一微过程： $t \rightarrow t + \mathrm{d}t$

t 时刻： 系统质量 M，速度v，动量 Mv

$t + \mathrm{d}t$ 时刻： 喷出燃料质量 $\mathrm{d}m = -\mathrm{d}M$

喷出燃料速度： $\vec{v}_{燃S} = \vec{v}_{燃M} + \vec{v}_{MS} = (v - u)\vec{j}$

$t+\mathrm{d}t$ 时刻：剩余系统质量 $M-\mathrm{d}m=M+\mathrm{d}M$

剩余系统速度 $\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$

由动量守恒有：

$$M\boldsymbol{v}=(M+\mathrm{d}M)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})-\mathrm{d}M(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$$

略去2阶小量得：$M\mathrm{d}\boldsymbol{v}=-u\mathrm{d}M$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=-u\frac{\mathrm{d}M}{M}\xrightarrow[i\,(\text{点火})\to f\,(\text{燃料烧尽})]{\text{全过程}}\int_i^f\mathrm{d}\boldsymbol{v}=-u\int_{M_i}^{M_f}\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

速度公式

$$\boxed{\boldsymbol{v}_f=\boldsymbol{v}_i+u\ln\frac{M_i}{M_f}}$$

引入火箭质量比： $N=\dfrac{M_i}{M_f}$

得 $$\boxed{v_f=v_i+u\ln N}$$

提高 v_f 的途径：

(1)提高 u（现可达 u = 4.1 km/s）

(2)增大 N（单级火箭N 提得很高不合算）

为有效提高N，采用多级火箭（如2级、3级）

资料：长征三号（3级大型运载火箭）

全长：43.25m，　最大直径：3.35m，

起飞质量：202吨，起飞推力：280吨力。

(2) 火箭所受的反推力

研究对象：喷出气体 $\mathrm{d}m$

t 时刻：速度 $\boldsymbol{v}$ (和主体速度相同)，动量 $\boldsymbol{v}\mathrm{d}m$

$t+\mathrm{d}t$ 时刻：速度 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$， 动量 $\mathrm{d}m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$

由动量定理，$\mathrm{d}t$ 内喷出气体所受冲量

$$\boldsymbol{F}_{箭对气}\mathrm{d}t=\mathrm{d}m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})-\boldsymbol{v}\mathrm{d}m=-\boldsymbol{F}_{气对箭}\mathrm{d}t$$

由此得火箭所受燃气的反推力为

$$\boxed{F=F_{气对箭}=u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$$

2. 重力场中的火箭发射

忽略地面附近重力加速度 g 的变化，

可得 t 时刻火箭的速度（自己推导）：

$$\boxed{v(t) = v_i - gt + u\ln\frac{M_i}{M_t}}$$

M_t：　t 时刻火箭壳和尚余燃料的质量

例3.2　一架喷气式飞机以210m/s的速度飞行，它的发动机每秒吸入75kg空气，在体内与3.0kg燃料燃烧后以相对于飞机490m/s的速度向后喷出。求发动机对飞机的推力。

解：设飞机飞行方向为正方向。以吸入空气和燃料为研究对象，即以混合气体为研究对象。

喷出后　$V_{混对地} = V_{混对机} + V_{机对地}$

$= (-490 + 210)\ \text{m/s} = -280\ \text{m/s}$

dt时间混合气体增加动量

$$dp = (75 + 3)dt\,V_{混对地} - 3\times 210dt$$

$$= 78\times(-280)dt - 3\times 210dt$$

从而飞机对混合气体的作用力为

$$F = dp/dt = [78\times(-280) - 3\times 210]\ \mathrm{N} = -2.25\times 10^{4}\ \mathrm{N}$$

对飞机推力则为 $F' = -F = 2.25\times 10^{4}\ \mathrm{N}$

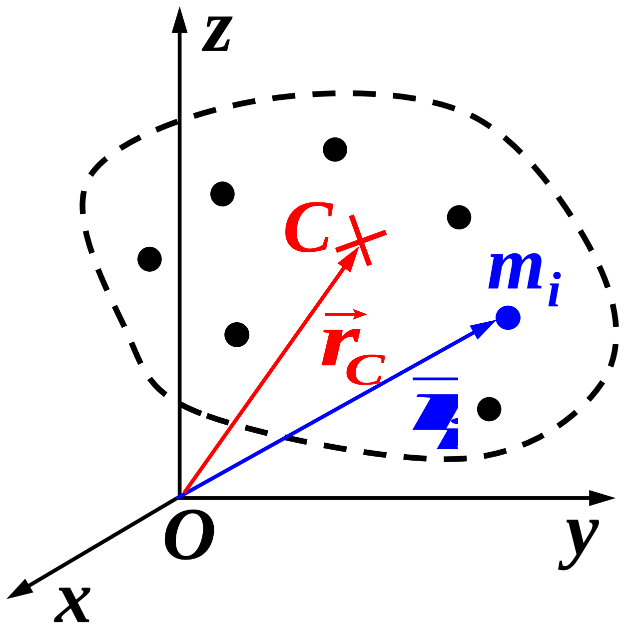
3.4质心（center of mass）

一. 质心的概念和质心位置的确定

为便于研究质点系总体运动，引入质心概念。

定义质心 C 的位矢为：

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}} \quad (m = \sum m_i)$$

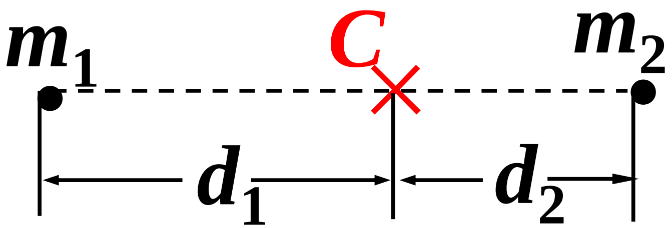


$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_C = \dfrac{\sum m_i z_i}{m} \end{cases}$$

质心位置是质点位置以质量为权重的平均值。

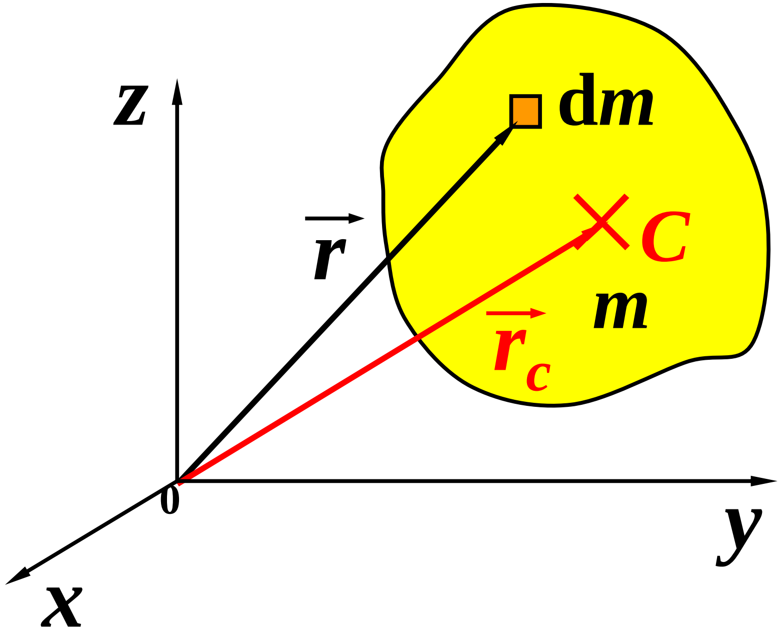
二.几种系统的质心

▲ 两质点系统



$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

▲ 连续体



$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$

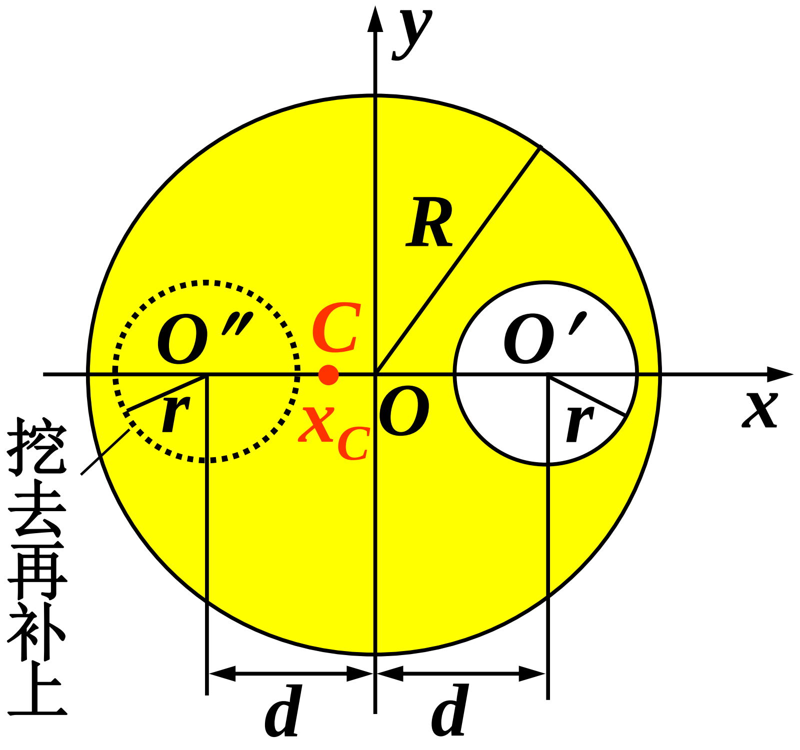
$$x_C = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{m}$$

……

▲均匀杆、圆盘、圆环、球，质心为其几何中心

例3.3 如图，求挖掉小圆盘后系统质心坐标。

解： 由对称性分析，质心 C 应在 x 轴上。



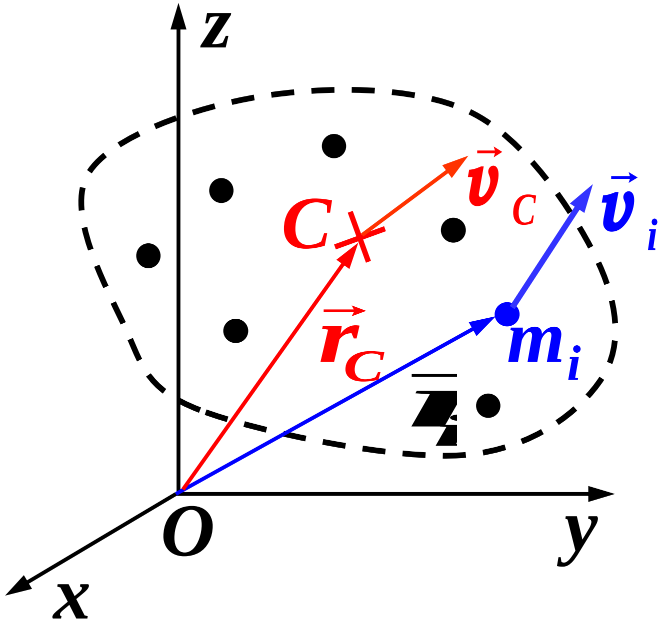
令 σ 为质量面密度，

$$x_C = \frac{0 + (-d \cdot \sigma \cdot \pi r^2)}{\sigma \cdot \pi R^2 - \sigma \cdot \pi r^2}$$

$$= -\frac{d}{(R/r)^2 - 1}$$

3.5 质心运动定理

一. 质心运动定理



$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\sum m_i \vec{r}_i / m)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

$\vec{v}_C$ 是质点系“平均”速度

质心动量 $m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i$ = 系统总动量 $\vec{P}$

质点系的总动量 $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}_C}$

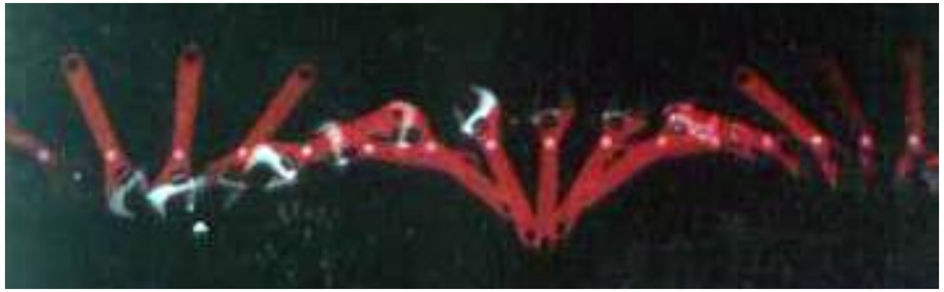
由
$$\vec{F}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}_C)=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}$$

有
$$\boxed{\vec{F}_{外}=m\vec{a}_C}$$
— 质心运动定理

质心的运动如同一个在质心位置处的质点的运动，该质点集中了整个质点系的质量和所受的外力。在质点力学中所谓“物体”的运动，实际上是物体质心的运动。

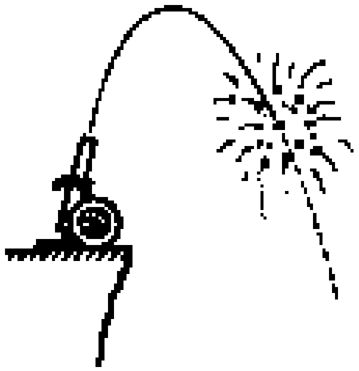
系统内力不会影响质心的运动，例如：

▲在光滑水平面上滑动的扳手，其质心做匀速直线运动



▲做跳马落地动作的运动员尽管在翻转，但其质心仍做抛物线运动。

▲爆炸的焰火弹虽然碎片四散，但其质心仍在做抛物线运动



二. 动量守恒与质心的运动

若合外力为零，则 $\begin{cases} \text{质点系动量守恒} \\ \vec{a}_C = 0 \rightarrow \vec{v}_C = \text{常矢量} \end{cases}$

若合外力分量为0，则 $\begin{cases} \text{质点系分动量守恒} \\ \text{相应的质心分速度不变} \end{cases}$

如：$\sum_i F_{ix} = 0 \longrightarrow v_{Cx} = \text{常量}$

质点系动量守恒和质心匀速运动等价！

三. 质心（参考）系（frame of center of mass）

1. 质心系

讨论天体运动及碰撞等问题时常用到质心系。

质心系是固结在质心上的平动参考系。

质心系不一定是惯性系。

质点系的复杂运动通常可分解为：

质点系整体随质心的运动

各质点相对于质心的运动 ——

在质心系中考察质点系的运动

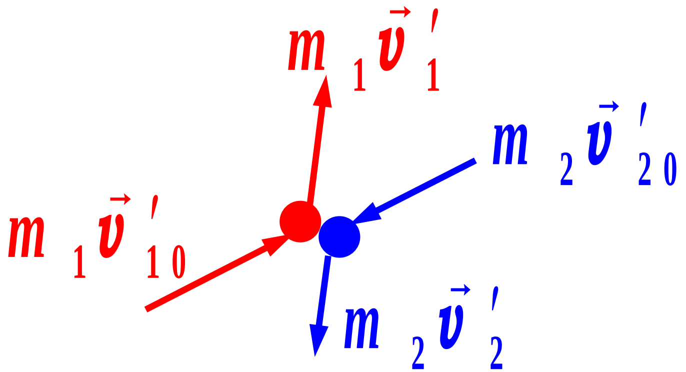
2.质心系的基本特征

质心系中的动量 $\sum m_i \vec{v}_i'$

$$= \sum m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_C)$$

$$= \sum m_i \vec{v}_i - \sum m_i \vec{v}_C = 0$$

质心系是零动量参考系。



质心系中看两粒子碰撞

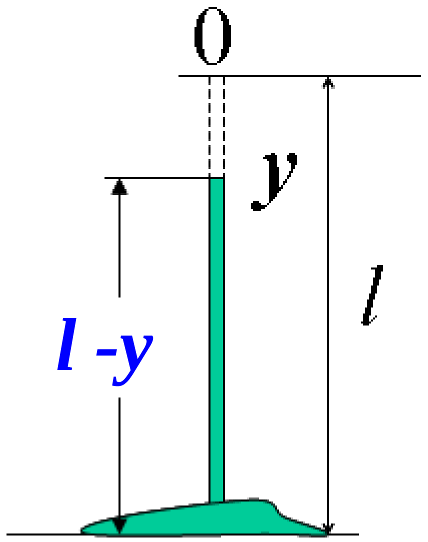
两质点系统在其质心系中，总是具有**等值、反向**的动量。

例3.4 **将一根柔软均匀，质量线密度为ρ的绳子悬吊起来，下端刚好触及地面。求绳子自静止释放，自由下落的长度为y时，给地面的压力是多少？** **（书p. 101, 3.8）**

解：　方法一:微元分析法

在竖直向下方向建坐标（如图）。

以落地部分为对象



受力：$G = \rho g y$

地面支持力N

下落绳的冲力T

$$N - T - \rho g y = 0$$

$$N = T + \rho g y$$

关键是求出T

设在 $t \sim t+\Delta t$ 绳下落dy，dy小段受重力 $\rho g dy$

落地段对它的反作用力T’， $T' >> \rho g dy$ 略去重力

动量定理 $T' dt = 0 - \rho dy v$

$T' = -\rho v^2$ $\qquad T = \rho v^2$

$N = \rho v^2 + \rho g y \qquad v^2 = 2gy \qquad N = 3\rho g y$

根据牛顿第三定律，已落地的绳子对地面的压力

N’=3ρyg，向下。

方法二:用密歇尔斯基方程

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=(\vec{v}\,'-\vec{v})\frac{dm}{dt}+\vec{F}$$

$$m\frac{dv}{dt}=(v'-v)\frac{dm}{dt}+\rho yg-N$$

取落地的绳子为主体，其质量为m(t) = ρy，这段绳子的速度 v(t) = 0，故加速度 dv/dt = 0。

在dt时间内有质量为dm的绳子加入主体，添加物的速度 v’为

$$v'=\sqrt{2gh}$$

将以上各量代入密歇尔斯基方程，可得

$$0=v'\frac{dm}{dt}+\rho yg-N$$

故地面支持力为

$$N = v'\frac{dm}{dt} + \rho y g = v'\rho\frac{dy}{dt} + \rho y g$$

$$= \rho v'^2 + \rho y g = 3\rho y g$$

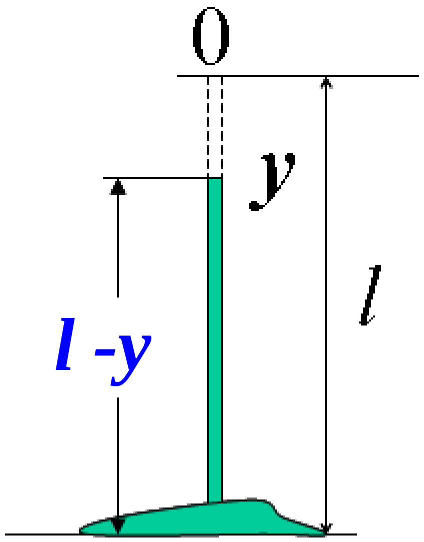
根据牛顿第三定律，已落地的绳子对地面的压力 N’=3ρyg，向下。

方法三:将整条绳子视为质点系（质点组）

在竖直向下方向建坐标（如图）。

设绳长为 l,　　地面支持力为N。

根据质心运动定理，则有



$$l\rho g - N = l\rho a_C \qquad (1)$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_C = \frac{dy_C}{dt}$$

根据质心定义，则有

$$y_C = \frac{\rho y l + \int_y^l \rho y' dy'}{\rho l} = \frac{l^2 - y^2 + 2ly}{2l}$$

$$v_C = \frac{dy_C}{dt} = \frac{l-y}{l} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{l-y}{l}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{l}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

$$a_C = \frac{l-y}{l}g - \frac{2gy}{l} = \frac{\lg - 3yg}{l} \qquad \textbf{(2)}$$

$$l\rho g - N = l\rho a_C \qquad \textbf{(1)}$$

将(2)代入(1)，得 $N = 3\rho y g$

根据牛顿第三定律，已落地的绳子对地面的压力N’=3ρyg，向下。

方法四：对软绳整体

$$\rho lg - N = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(l-y)\rho v\right]$$

$$= \rho \frac{d}{dt}\left[(l-y)\sqrt{2gy}\right]$$

$$= \rho \frac{d}{dy}\left[(l-y)\sqrt{2gy}\right] \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = v = \sqrt{2gy}}$$

$$\rho l g - N = \rho\left[-\sqrt{2gy} + (l - y)\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{y}}\right]\cdot\sqrt{2gy}$$

$$= \rho l g - 3\rho y g$$

$$\Rightarrow \quad N = 3\rho y g$$

根据牛顿第三定律，已落地的绳子对地面的压力
N’=3ρyg，向下。

例3.5 有一条单位长度质量为η的均质细绳，开始时盘绕在光滑的水平桌面上，现以一恒定的加速度**a** 竖直向上提绳。当提起的高度为**y**时，作用在绳端的力为多少？若以一恒定速度**v**竖直向上提绳时，仍提到**y**高度，此时作用在绳端的力又是多少？

解： **方法一：微元法**

(1) 以桌面为坐标原点，竖直向上为y轴正向。

当在dt时间内提起的绳长由y 变为y+dy时，绳子动量的增量为

$$dp = \eta(y+dy)(v+dv) - \eta yv \approx \eta v dy + \eta y dv$$

$$F - \eta y g = \dot{p} = \eta v\dot{y} + \eta y\dot{v} = \eta v^2 + \eta y a = 2\eta y a + \eta y a = 3\eta y a$$

$$F = (g+3a)\eta y$$

(2) 以桌面为坐标原点，竖直向上为y轴正向。
当在dt时间内提起的绳长由y 变为y+dy时，绳子动量的增量为

$$dp = \eta(y+dy)v - \eta yv = \eta vdy$$

$$F - \eta yg = \dot{p} = \eta v\dot{y}$$

$$F = \eta\left(gy + v^2\right)$$

方法二：运用质心运动定理

以桌面为坐标原点，竖直向上为y轴正向。设绳长为*l*。

$$y_C = \frac{\int_0^y y'\eta dy'}{\eta l} \qquad \dot{y}_C = \frac{y}{l}\dot{y} \qquad a_C = \ddot{y}_C = \frac{\dot{y}^2}{l} + \frac{y}{l}\ddot{y}$$

$$N = (l - y)\eta g$$

(1) $$F + N - \eta \lg = \eta l a_C = \eta l\left(\frac{2ay}{l} + \frac{y}{l}a\right) = 3a\eta y$$

$$F = (g + 3a)\eta y$$

(2) $$F + N - \eta \lg = \eta l a_C = \eta l \frac{v^2}{l} = \eta v^2$$

$$F = \eta\left(gy + v^2\right)$$

方法三：用密歇尔斯基方程

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=(\vec{v}'-\vec{v})\frac{dm}{dt}+\vec{F}_{外}$$

$$m\frac{dv}{dt}=(v'-v)\frac{dm}{dt}+F-\eta yg$$

(1) **取离开桌面的绳子为主体**，其质量为m(t) = ηy，这段绳子的加速度 dv/dt = a。

在dt时间内有质量为dm的绳子加入主体，添加物的速度 v’为0。将以上各量代入密歇尔斯基方程，可得

$$\eta ya=-v\eta\frac{dy}{dt}+F-\eta yg$$

$$F=(g+3a)\eta y$$

(2) dv/dt = 0，dy/dt=v。

$$m\frac{dv}{dt} = (v'-v)\frac{dm}{dt} + F - \eta yg$$

$$0 = -v\eta\frac{dy}{dt} + F - \eta yg$$

$$\boldsymbol{F = \eta\left(gy + v^2\right)}$$

方法四：对细绳整体

$$\boxed{\frac{dy}{dt}=\sqrt{2ay}}$$

$$F-\eta yg=\frac{dP}{dt}=\frac{d}{dt}(\eta yv)$$

(1) $$F-\eta yg=\eta\frac{d}{dt}\left(y\sqrt{2ay}\right)=\eta\frac{d}{dy}\left(y\sqrt{2ay}\right)\frac{dy}{dt}$$

$$=\eta\left(\sqrt{2ay}+\sqrt{a}\,y/\sqrt{2y}\right)\sqrt{2ay}=3\eta ay$$

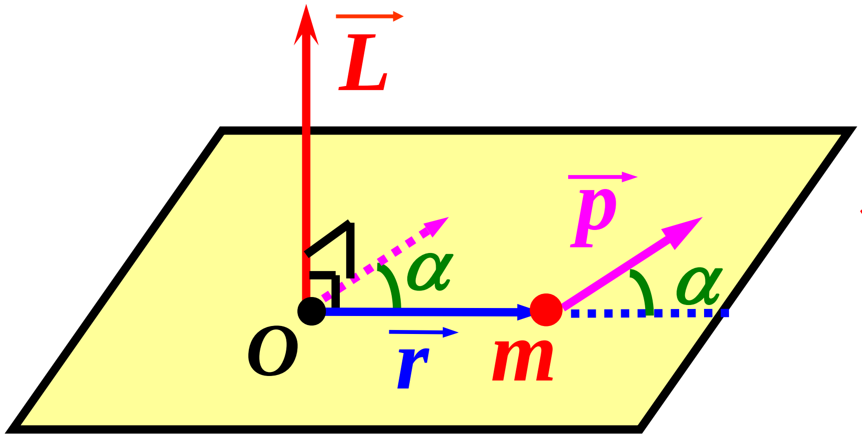
$$\boldsymbol{F=(g+3a)\eta y}$$

(2) $$F=\eta yg+\frac{d}{dt}(\eta yv)=\eta yg+\eta v\dot{y}=\eta\left(gy+v^2\right)$$

3.7 质点的角动量

一. 质点的角动量

角动量是质点运动中的一个重要的物理量，在物理学的许多领域都有着十分重要的应用。

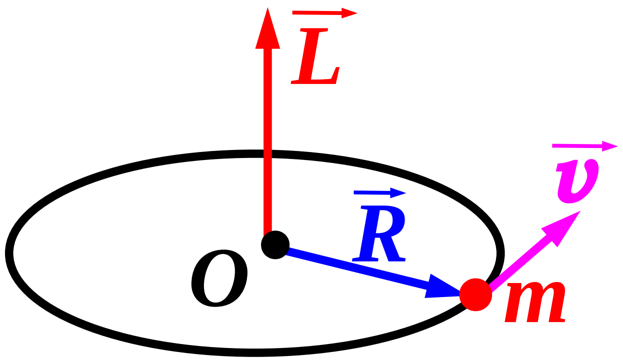


质点m对惯性系中的固定点O的角动量定义为:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})}$$

大小: $L = rp\sin\alpha = rmv\sin\alpha$, 单位：$\mathrm{kg \cdot m^2/s}$

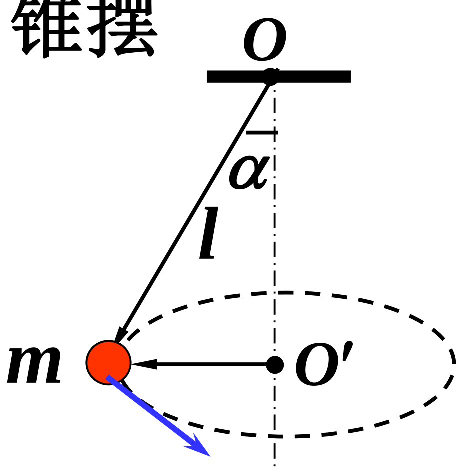
方向: $\perp$于$\vec{r}$，$\vec{p}$（$\vec{v}$）决定的平面（右螺旋）



质点作匀速率圆周运动时，对圆心的角动量的大小为 $L = mvR$，方向⊥圆面不变。

同一质点的同一运动，其角动量却可以随固定点的不同而改变。例如：

锥摆



$$\vec{L}_O = \vec{r}_{om} \times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_O = lmv \\ \text{方向变化} \end{cases}$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{o'm} \times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_{O'} = lmv\sin\alpha \\ \text{方向竖直向上不变} \end{cases}$$

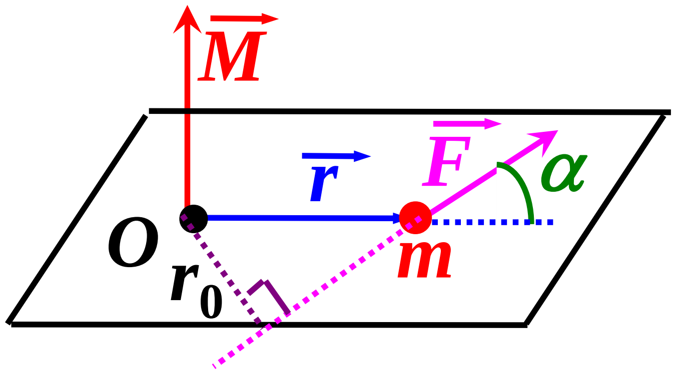
二. 质点的角动量定理，力矩

由 $$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

有： $$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}$$

定义力对定点 O 的力矩 (moment of force) 为：



$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

$$M=rF\sin\alpha=r_0F$$

$r_0=r\sin\alpha$ 称力臂

于是有 $\boxed{\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$

或 $\boxed{\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\,\mathrm{d}t}$

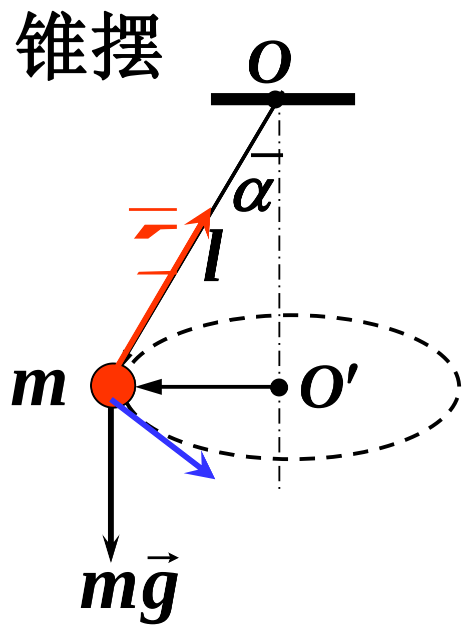
—— 质点角动量定理（微分形式）

积分 $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot \mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$ ——质点角动量定理（积分形式）

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t$ 称冲量矩

——力矩对时间的积累作用

[例] 锥摆的角动量



对O点：$\vec{r}_{om} \times \vec{T} = 0$

$$\left|\vec{r}_{om} \times m\vec{g}\right| = l\sin\alpha\ (mg)$$

合力矩不为零，角动量变化。

对O′点：$\vec{r}_{o'm} \times \vec{T} = \vec{r}_{o'm} \times (-m\vec{g}) \neq 0$

$$\vec{r}_{o'm} \times m\vec{g} = -\vec{r}_{o'm} \times \vec{T}$$

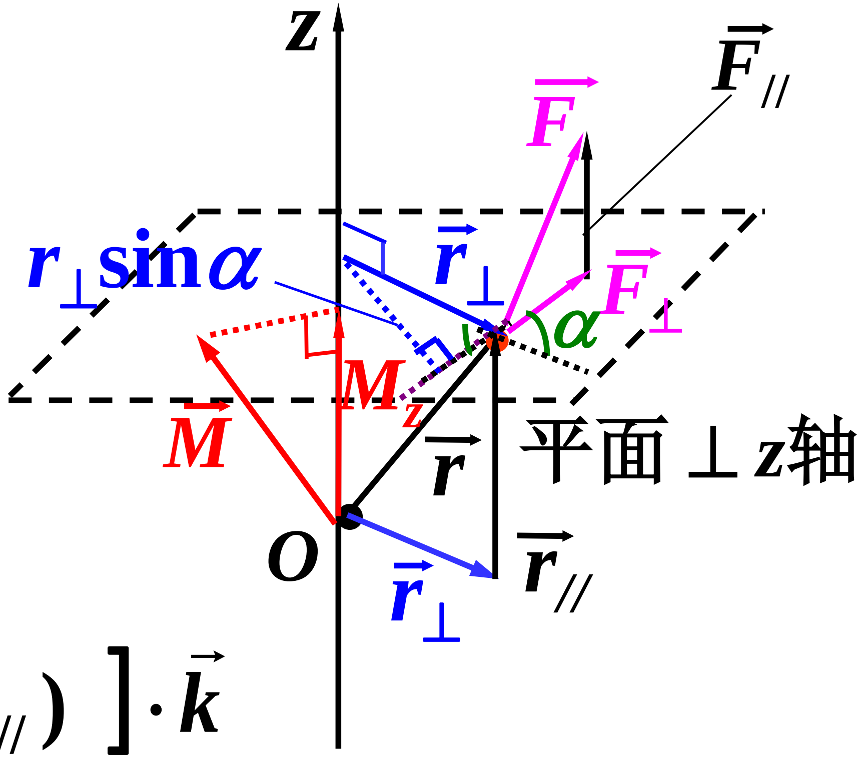
合力矩为零，角动量大小、方向都不变。

（合力不为零，动量改变！）

三. 质点对轴的角动量

1. 力对轴的力矩

把对O点的力矩向过O点的轴（如 z 轴）投影：



$$M_z = \vec{M}\cdot\vec{k} = (\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{k}$$

$$= \left[\ (\vec{r}_\perp + \vec{r}_{//})\times(\vec{F}_\perp + \vec{F}_{//})\ \right]\cdot\vec{k}$$

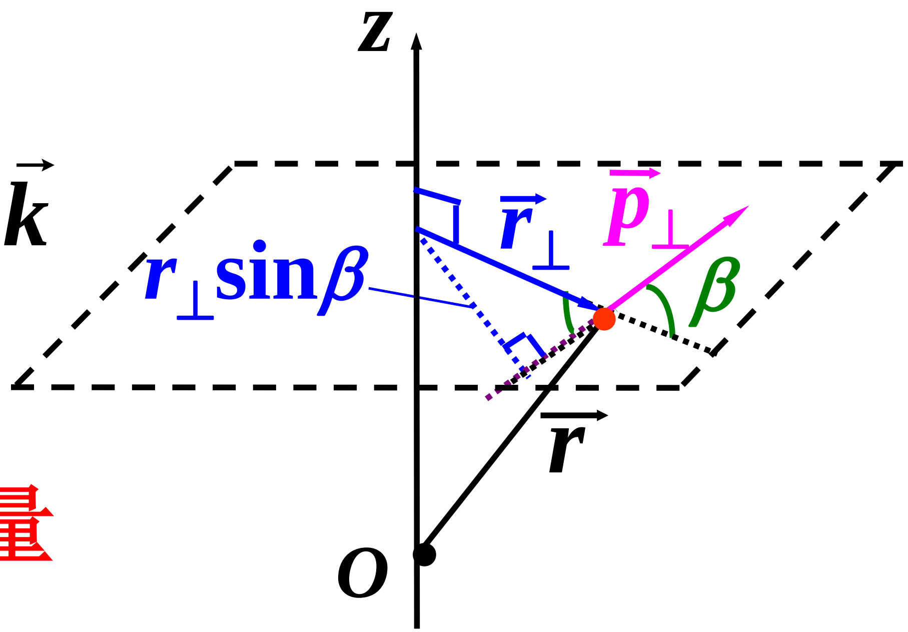
$$= (\vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp)\cdot\vec{k}$$

$$= F_\perp r_\perp \sin\alpha$$ ——力对轴的力矩。

2.质点对轴的角动量

$$L_z = \vec{L}\cdot\vec{k} = (\vec{r}_\perp \times \vec{p}_\perp)\cdot\vec{k}$$

$$= p_\perp r_\perp \sin\beta$$



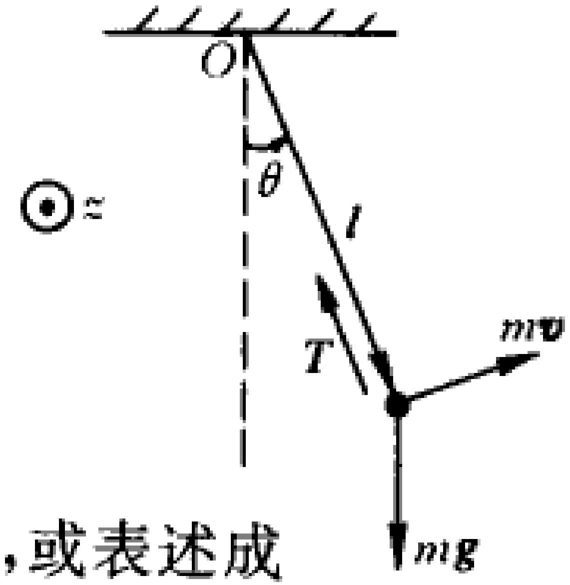
—— 质点对轴的角动量

3.对轴的角动量定理

$$\vec{M}\cdot\vec{k} = \frac{d\vec{L}}{dt}\cdot\vec{k} = \frac{d}{dt}(\vec{L}\cdot\vec{k})$$

即 $$\boxed{M_z = \frac{dL_z}{dt}}$$ —— 质点对轴的角动量定理

例3.6　导出单摆的摆动方程。



解：

$$M_z = -mgl\sin\theta$$

$$L_z = mlv = ml^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

据 $M_z = \mathrm{d}L_z/\mathrm{d}t$，有 $-mgl\sin\theta = ml^2\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$，或表述成

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

这就是单摆的摆动方程.

摆角 θ 的最大绝对值 θ_0 称为辐角. 若 θ_0 为小角度，$\sin\theta$ 可近似取为 θ，单摆摆动方程简化成

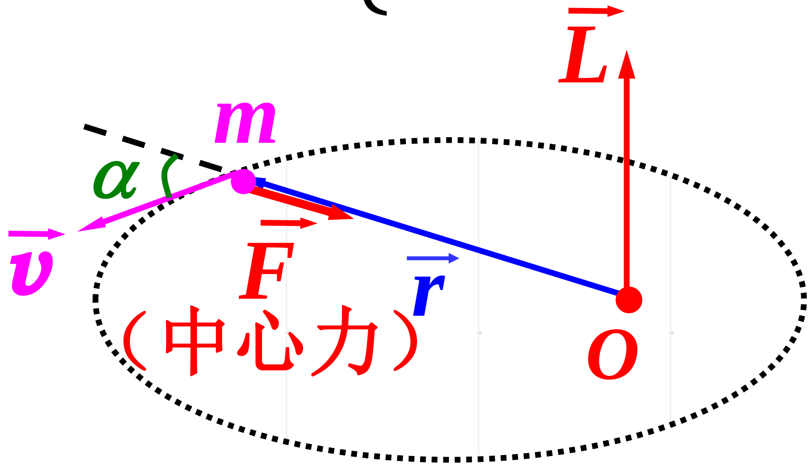
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

与水平弹簧振子振动方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = a_x = -\frac{k}{m}x$ 一致.

3.8 角动量守恒定律

$\boxed{\text{若 } \vec{M}=0\text{，则 } \vec{L}=\text{常矢量}}$ —— 质点角动量守恒定律

$$\vec{M}=0\begin{cases}\vec{F}=0\,, \\ \vec{F}\text{过}O\text{点：中心力（如行星受中心恒星的万有引力）}\end{cases}$$



$$\vec{L}=\vec{r}\times(m\vec{v})=\text{常矢量}$$

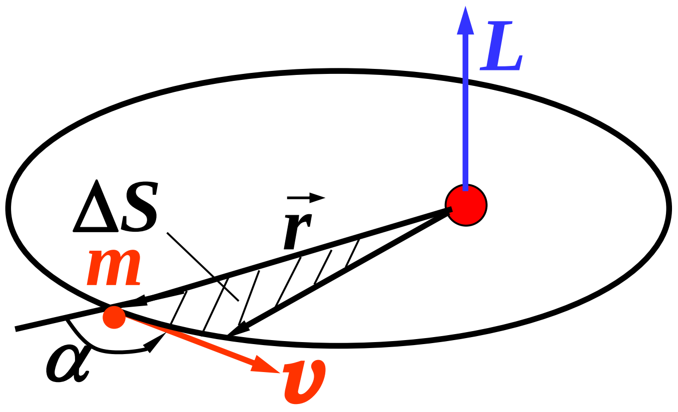
（1） $m v r \sin\alpha = \text{const.}$，

（2）轨道在同一平面内。

$\boxed{\text{若 } M_z = 0\text{，则 } L_z = \text{常量}}$ —— 质点对轴的角动量守恒定律

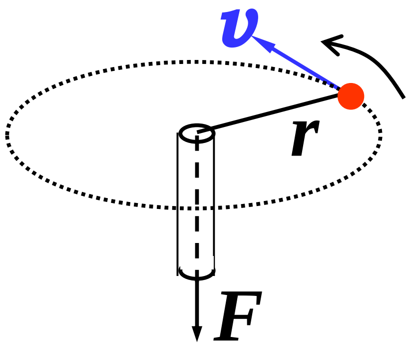
角动量守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，而且在高速低速范围均适用。

角动量守恒定律可导出行星运动的开普勒第二定律：



$$L = m\upsilon \cdot r\sin\alpha = \text{常量} \longrightarrow$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \text{常量}$$



3.9 质点系的角动量

质点系的角动量 $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\vec{M}_{i外} + \vec{M}_{i内}\right) = \vec{M}_{外} + \vec{M}_{内}$$

$$\vec{M}_{外} = \sum_i \vec{M}_{i外} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{内} = \sum_i \vec{M}_{i内} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) = 0$$ （自己证）

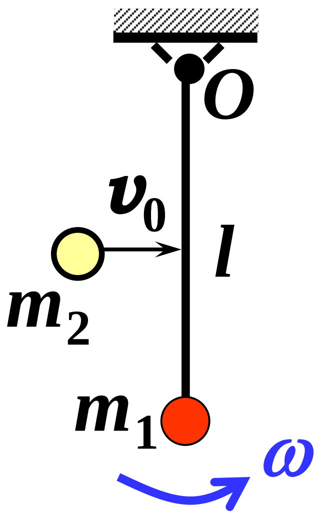
于是有： $$\boxed{\vec{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$ — 质点系角动量定理

$$\boxed{\text{若 } \vec{M}_{外} = 0\text{，则 } \vec{L} = \text{常矢量}}$$

——质点系角动量守恒定律

例3.7 一长为l的轻质杆端部固结一小球m_1，另一小球m_2以水平速度v_0碰杆中部并与杆粘合。

求： 碰撞后杆的角速度ω



解： 选m_1（含杆）$+ m_2$为系统

碰撞时重力和轴力都通过O，对O力矩为零，故角动量守恒。

有
$$\frac{l}{2}m_2 v_0 = l m_1 \omega l + \frac{l}{2} m_2 \omega \frac{l}{2}$$

解得：
$$\omega = \frac{2m_2}{4m_1 + m_2} \cdot \frac{v_0}{l}$$

$\boxed{\text{思考}}$ （$m_1 + m_2$）的水平动量是否守恒？

3.10 质心系中的角动量定理

一. 质心系中的角动量

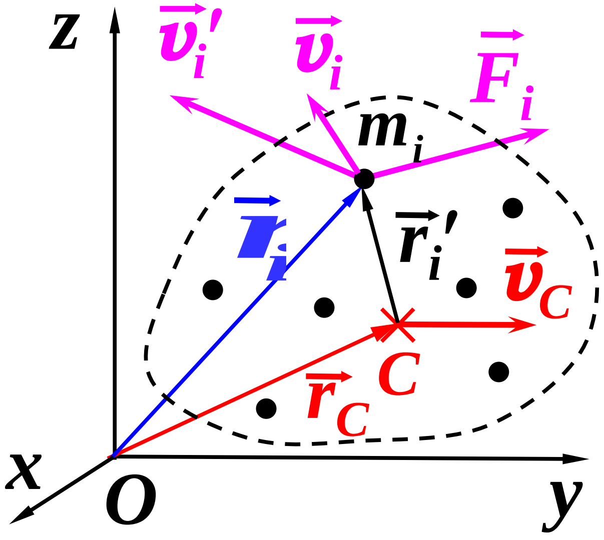
O 是惯性系中的一个定点

C 是质心兼质心坐标系原点

对质心 $\vec{L}' = \sum \vec{r}_i{}' \times (m_i \vec{v}_i{}')$

对O点 $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$

C 对O $\vec{L}_C = \vec{r}_C \times (\sum m_i) \vec{v}_C$



O系为惯性系

利用关系：$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_C$， $\sum m_i \vec{r}_i' = 0$（$\because \vec{r}_C' = 0$），

$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_C$， $\sum m_i \vec{v}_i' = 0$（$\because \vec{v}_C' = 0$）。

可以证明（自己推导）： $\boxed{\vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_C}$

二. 质点系对质心的角动量定理：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}-\vec{L}_C)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}-\vec{r}_C\times\vec{P})$$

$$=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}-(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}\times\vec{P}+\vec{r}_C\times\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t})$$

$$=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i-(0+\vec{r}_C\times\sum\vec{F}_i)$$

$$=\sum(\vec{r}_i-\vec{r}_C)\times\vec{F}_i=\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i=\vec{M}'_{外}$$

即有 $$\boxed{\vec{M}'_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}}$$

—— 质心系中质点对质心的角动量定理

尽管质心系可能不是惯性系，但对质心来说，角动量定理仍然成立。这再次显示了质心的特殊之处和选择质心系来讨论问题的优点。

若质心系是非惯性系，则外力矩中应包括惯性力对质心的力矩：$\vec{M}' + \vec{M}_{惯C} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}$

设质心加速度为 $\vec{a}_C$，则有

$$\vec{M}_{惯C} = \sum_i \vec{r}_i' \times (-m_i \vec{a}_C) = -(\sum_i m_i \vec{r}_i') \times \vec{a}_C = 0$$

这正是即使质心系为非惯性系，但质点系对质心的角动量仍能满足角动量定理的原因。

小结：质点系动量与角动量的比较

动量 $\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_c$

矢量

与固定点无关

与内力无关

$$\vec{F}_{外}=\sum_i\vec{F}_i$$

$$\boxed{\vec{F}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}}$$

守恒条件： $\sum_i\vec{F}_i=0$

角动量 $\vec{L}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i$

矢量

与固定点有关

与内力矩无关

$$\vec{M}_{外}=\sum_i\vec{M}_{i外}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

$$\boxed{\vec{M}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

守恒条件： $\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i=0$

质心系：

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}}$$

$$\sum m_i \vec{r}_i{}' = 0 \quad (\because \vec{r}_C{}' = 0)$$

$$\sum m_i \vec{v}_i{}' = 0 \quad (\because \vec{v}_C{}' = 0)$$

$$\vec{P}\,' = \sum_i m_i \vec{v}_i{}' = 0$$

质心系：

$$\vec{M}_{外} = \sum_i \vec{M}_{i外} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{r}_C$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i{}' + \vec{v}_C$$

$$\vec{L}\,' = \sum \vec{r}_i{}' \times (m_i \vec{v}_i{}')$$

$$\boxed{\vec{M}'_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}}$$

第三章结束