14. 静电场中的导体

14.1 导体的静电平衡条件

14.2 静电平衡时导体上的电荷分布

14.3 有导体存在时静电场的分析与计算

14.4 唯一性定理

14.5 静电屏蔽

14.6 电像法

导体　　**存在大量的可自由移动的电荷**

conductor

绝缘体　**无自由移动的电荷**

也称　电介质　dielectric

半导体　　**介于上述两者之间**　semiconductor

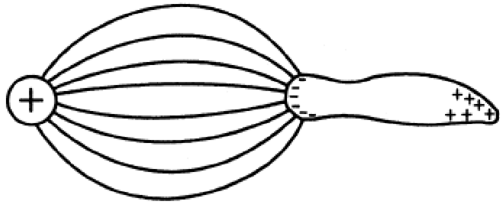
本章讨论金属导体与场的相互影响

14.1 导体的静电平衡条件
(electrostatic equilibrium of conductor）

1. 静电平衡状态

导体内部和表面无自由电荷的定向移动

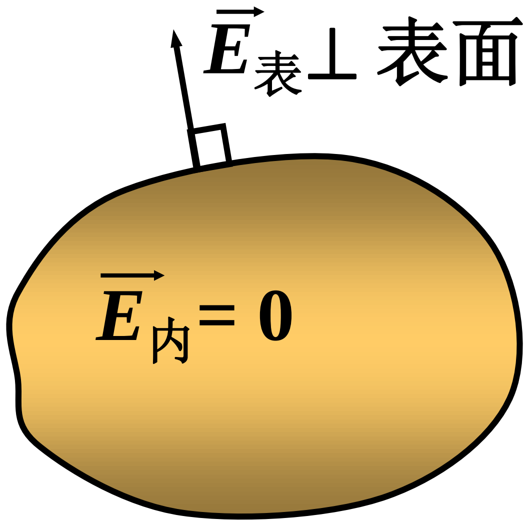
静电平衡状态



2. 导体静电平衡的条件

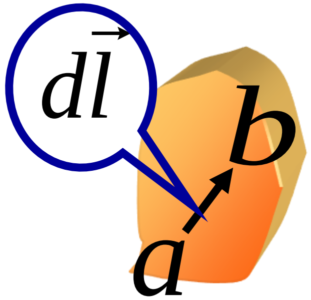
$$\boxed{E_{内} = 0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{表面} \perp 表面}$$




СОГАЗ
СТРАХОВАЯ ГРУППА
KHL.RU
KHL.RU
KHL.RU

➢ 一个推论



导体静电平衡时，导体各点电势相等，

即导体是等势体，表面是等势面。 $\boxed{\varphi = c}$

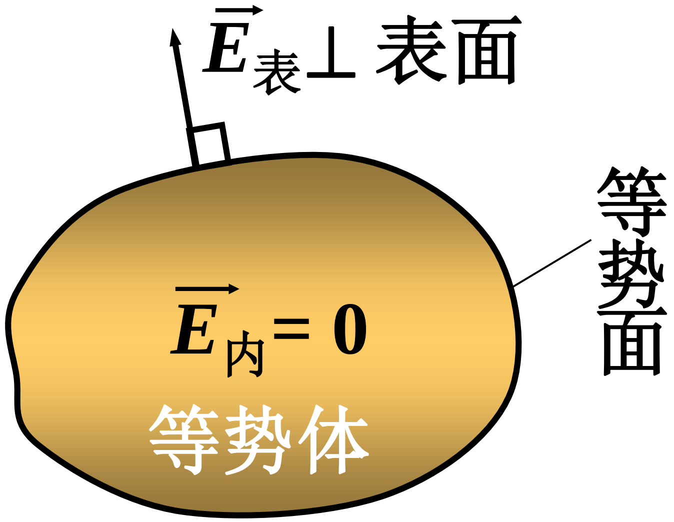
证：在导体上任取两点 a 和 b

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad = 0$$

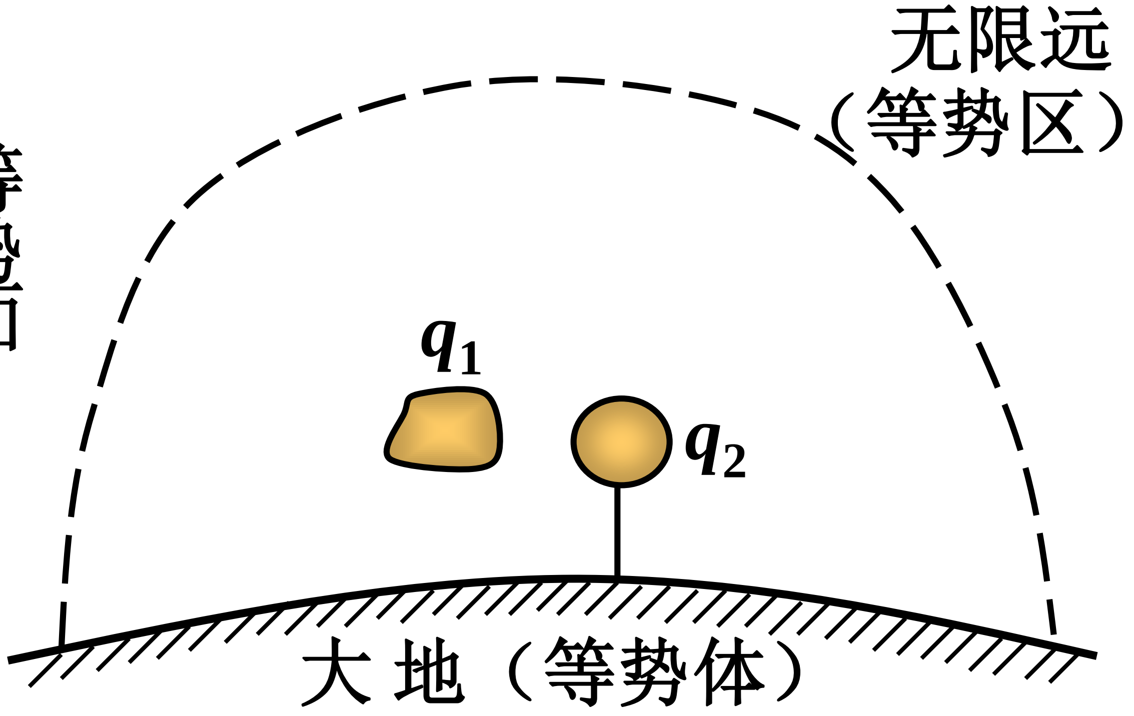
$$\boxed{\varphi_a = \varphi_b}$$

导体等势是导体场强分布特点的必然结果

静电平衡条件的另一种表述



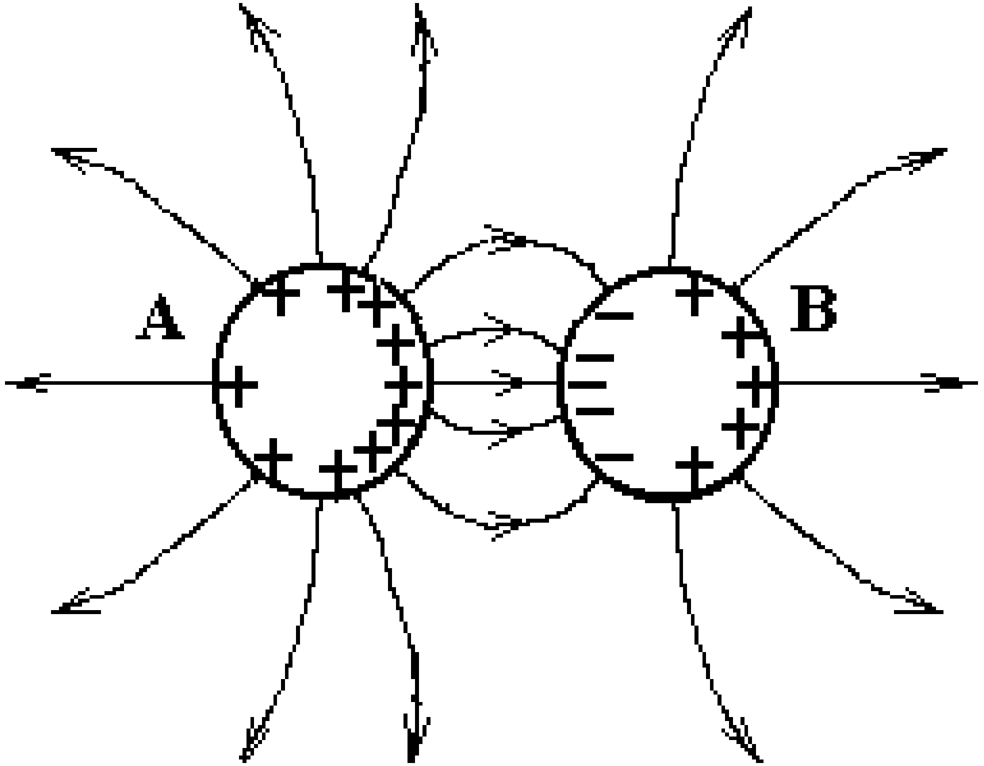
静电平衡时的导体



接地 (ground)：

- ➢ 取得与无限远相同的电势（通常取为零）。
- ➢ 提供电荷流动的通道（导体上的电量可变）

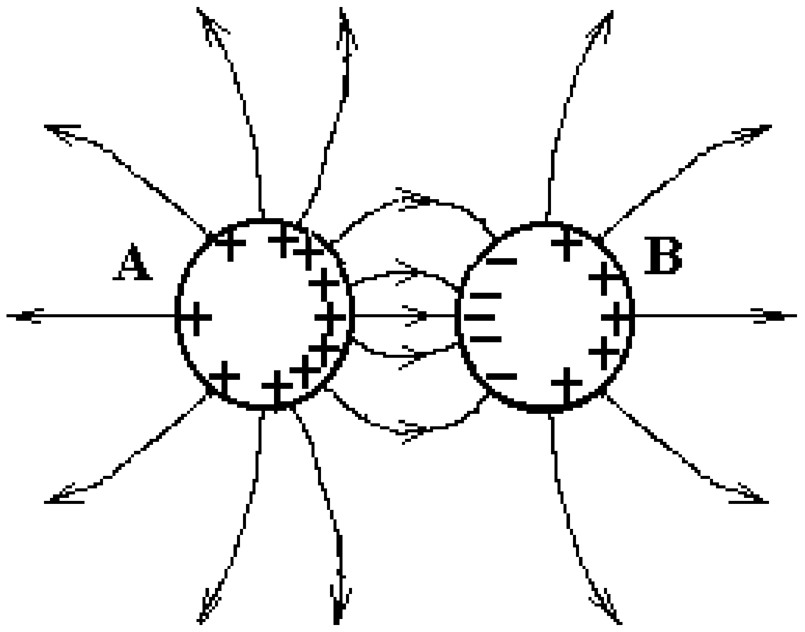
例：有两个金属球A、B。设A带正电荷，B不带电。若它们从相隔无限远到相隔有限远，在这过程中它们会相互影响，电荷分布会发生变化。



这种过程非常快，一种静电平衡状态被破坏，马上建立起新的静电平衡状态.

静电平衡状态:

导体内部和表面无自由电荷定向移动的状态.



下面这些说法对不对？

1. B球上正电荷处电势高，负电荷处电势低。

不对！

2. B球上正电荷发出的电场线可以指向它的负电荷。

不对！

3. 两球再靠近，会不会A球左侧也出现负电荷？

不会！

例14.1 两个完全相同的导体球，皆带等量的正电荷 Q，现使两球互相接近，到一定程度时，则______________.

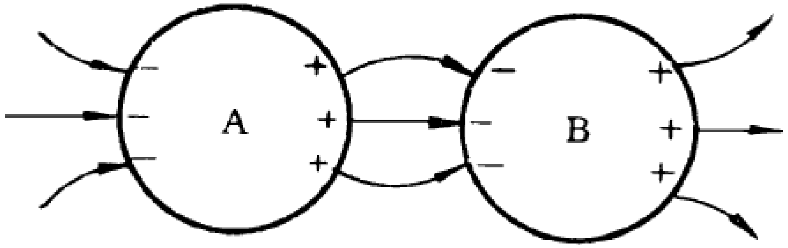
(1)二球表面都将有正、负两种电荷分布；

(2)二球中至少有一个表面上有正、负两种电荷分布；

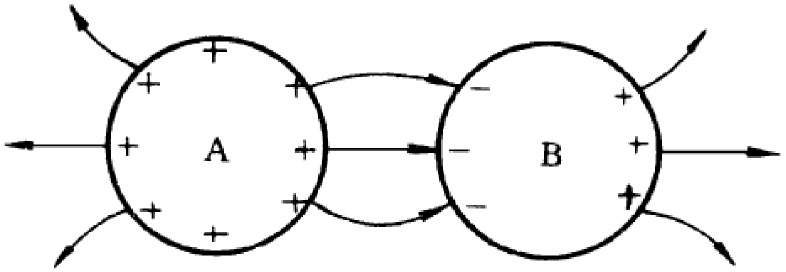
(3)无论接近到什么程度二球表面都不能有负电荷分布；

(4)结果不能判断，要视电荷 Q 的大小而定.

(3) 用反证法. 设此相互接近的两导体球为 A 和 B 在达到静电平衡时, 都带有异号电荷, 则 A 球上正电荷所发电场线就有部分终止于 B球的负电荷上 (如图 a), 因而 A 球上正电荷处的电势 U_{A+} 就高于 B球上负电荷处的电势 U_{B-}, 即 $U_{A+} > U_{B-}$. 可这样一来, 作为等势体的 B 球上的正电荷所发电场线, 不仅不可能终止于本身的负电荷上, 也不可能终止于 A 球的负电荷上, 而只能终止于无限远处. 因若有 B上发的电场线终止于 A 上, 则有 $U_{B+} > U_{A-}$, 于是会导致 $U_{A+} > U_{B-} = U_{B+} > U_{A-}$, 即出现了在静电平衡时导体球 A 不是等势体 ($U_{A+} > U_{A-}$)的荒谬结果. 这就是说不可能有电场线终止于 A 球上, 也即导体球 A 上只有正电荷不能有负电荷. 又由于 A、B 两导体球完全相同, 且皆带等量正电荷, 故同理也可用上述方法证明导体 B上也只有正电荷而无负电荷.



(a)

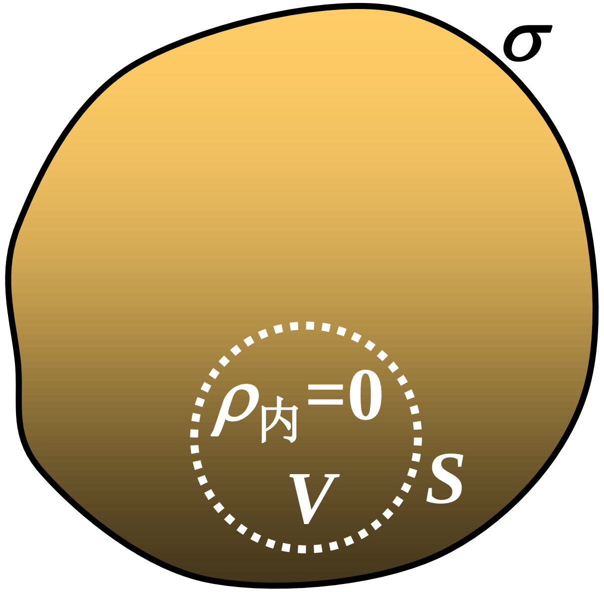


(b)

14.2 静电平衡时导体上的电荷分布

一.导体静电平衡时净电荷分布在表面

1.实心导体：σ 可不为0，但 $\rho_{内}$ 必为0。

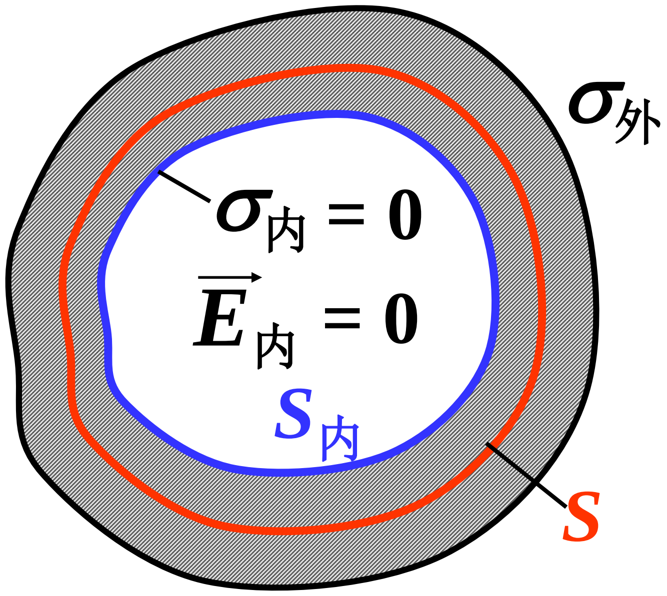


理由：

$$\rho_{内} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

2.导体壳：a)导体壳内无净电荷

$\sigma_{外}$可不为零，但$\sigma_{内}$和$\vec{E}_{内}$必为零。



理由：

在导体中包围空腔选取高斯面S，则：

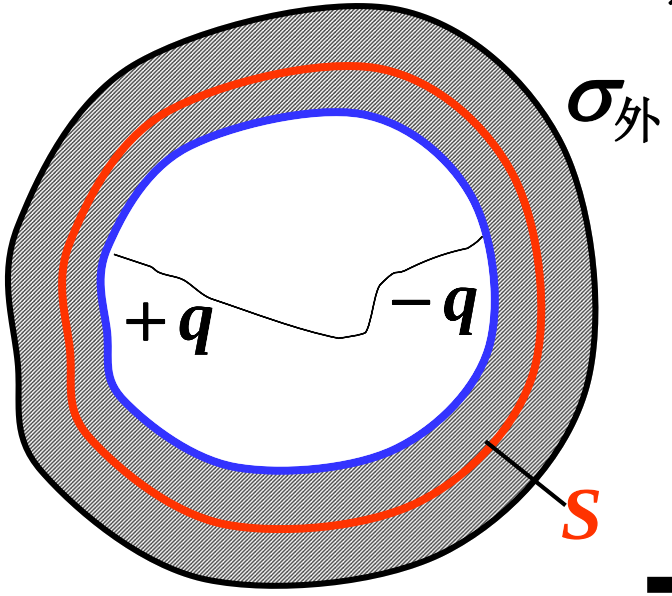
$$\oint_S \vec{E}_{导内}\cdot d\vec{s}=0 \rightarrow$$

$$\oint_{S_{内}} \sigma_{内}\cdot ds=0$$

$$\oint_{S_{内}} \sigma_{内} \cdot \mathrm{d}s = 0$$

$\sigma_{内}$ 处处 为0 ?

存在等量异号正负电荷?



不可能!

$\vec{E}$线从正电荷到负电荷

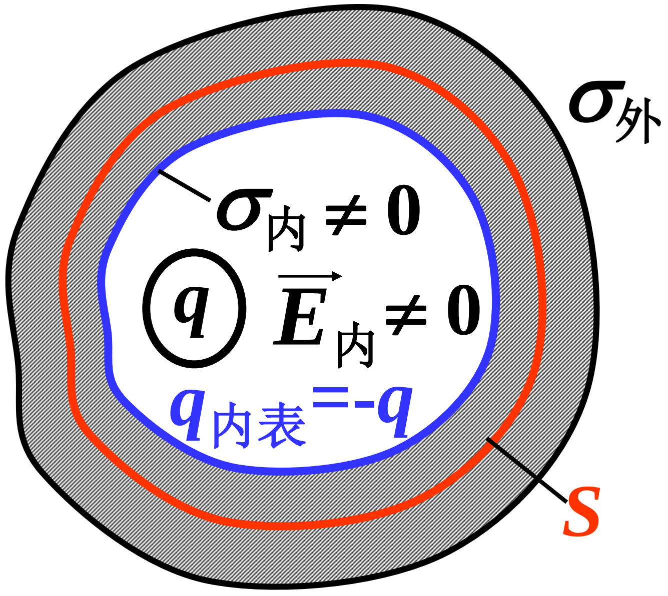
→ 与导体静电平衡矛盾

→ 只能$\sigma_{内}$ 处处为0，且腔内无$\vec{E}$线 →

只能 $\vec{E}_{内} = 0$。

腔内的场强分布与腔外电荷及其分布无关

b)导体壳内有净电荷q:



$\sigma_{外}$可不为0，但必有$\sigma_{内}\neq 0$，

且 $q_{内表}=\oint_S \sigma_{内}\,\mathrm{d}s=-q$

理由：

在导体中包围空腔做高斯面 S，则：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}(q+q_{内表})=0$$

$$\therefore \quad q_{内表}=-q$$

二. 孤立带电导体表面电荷分布

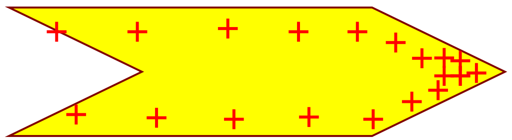
一般情况较复杂；孤立的带电导体，实验给出电荷的定性分布：

在表面凸出的尖锐部分(曲率是正值且较大)电荷面密度较大，

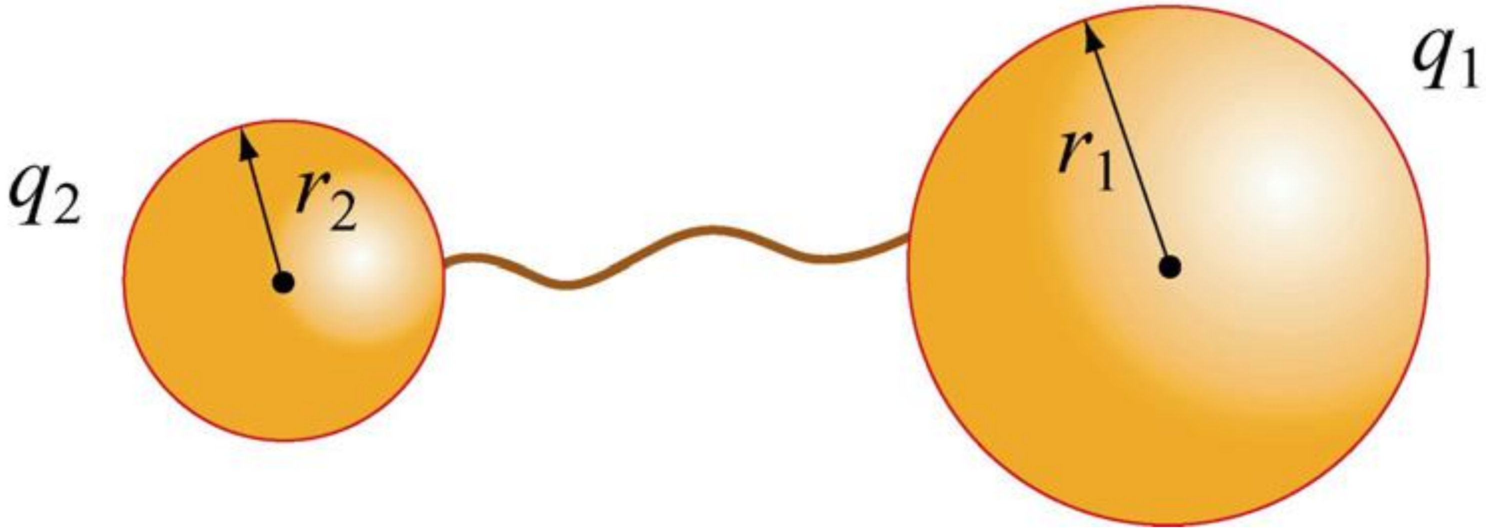
在比较平坦部分(曲率较小)电荷面密度较小，

在表面凹进部分带电面密度最小。

$E \propto \sigma$ {
- 表面尖端处，**E**较大
- 表面平坦处，**E**较小
- 表面凹进处，**E**最弱



当曲率很大的尖端$E\rightarrow$很强 ⟶ 尖端放电 {
- 避雷针
- 除尘器
- ……

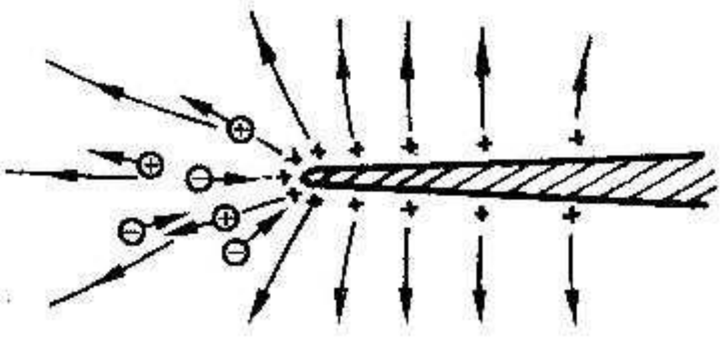


$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{4\pi r_1^2} : \frac{q_2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

尖端放电（point discharge）：

带电的尖端电场强，使附近的空气电离，因而产生放电。

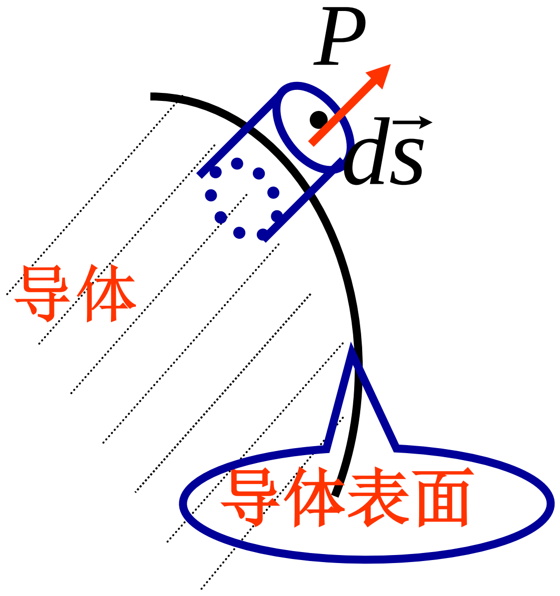


三.表面场强与面电荷密度的关系

设导体表面电荷面密度为 $\sigma(x,y,z)$

相应的电场强度为 $\vec{E}_{表}(x,y,z)$

设P是导体外紧靠导体表面的一点



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{dS} \vec{E}_{表}\cdot d\vec{S} + \int_{(S-dS)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E_{表} dS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

$$E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

$\hat{n}$ ：外法线方向

$\boxed{思考}$ $\vec{E}_{表}$是小柱体内电荷的贡献，还是空间全部电荷的贡献？ 从推导中的哪一步可看出？

14.3 有导体存在时静电场的分析与计算

原则:

1.静电平衡的条件

$$\boxed{E_{内}=0}\quad \boxed{E_{表面}\perp 表面}$$

$$\boxed{\vec{E}_{表}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}\quad \boxed{\varphi=c}$$

2.基本性质方程

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}\quad \boxed{\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0}$$

3. 电荷守恒定律

$$\boxed{\sum_i Q_i = const.}$$

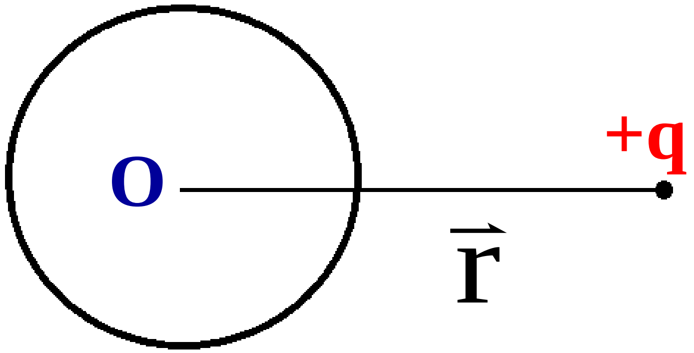
4. 格林互易定理

由 $$\int \rho\varphi' \, \mathrm{d}V = \int \rho'\varphi \, \mathrm{d}V$$ 可证：

在静电场中，有一组固定的n个导体系统，其电量分别为$q_1, q_2, \cdots, q_n$，它们的电势分别为$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$，当n个导体的电量变为$q'_1, q'_2, \cdots, q'_n$时，它们的电势变为$\varphi'_1, \varphi'_2, \cdots, \varphi'_n$，则必有

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi'_i = \sum_{i=1}^{n} q'_i\varphi_i$$

例14.2 一半径为R的金属球原来不带电，将它放在点电荷+q的电场中，球心O与点电荷的距离为r。 求金属球上感应电荷在球心处的电场强度以及金属球的电势。



解:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}' + \vec{E} = 0$$

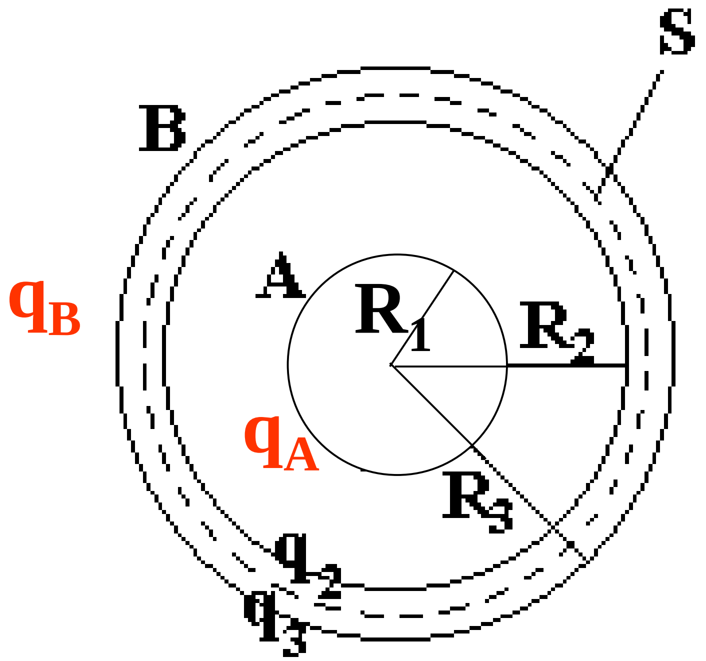
$$\vec{E}' = -\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(-\hat{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$\hat{r}$ 为从球心O到点电荷位矢的单位矢量。

$$\varphi_O = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

例14.3 一个金属球A,带电 q_A,同心金属球壳 B,带电 q_B,试分析它们的电荷分布.

解：q_A在A的表面上， q_B也在B的表面上,



设 B 的内表面带电 q_2,

B 的外表面带电 q_3,

作高斯面如图。

由静电平衡条件

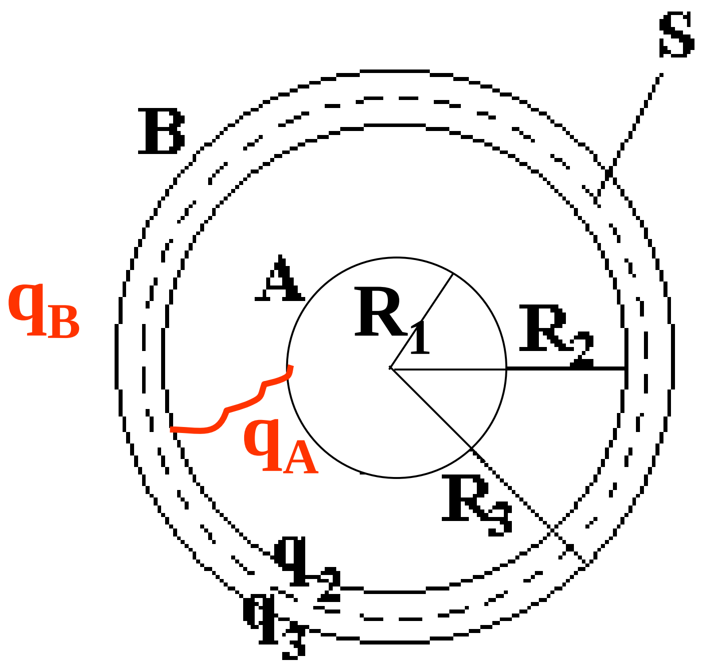
$$q_2 = -q_A$$

由电荷守恒

$$q_3 = q_B - q_2 = q_B + q_A$$

讨论1：你能否求出此电荷分布的静电场？

讨论2：如果用导线将A、B连接，它们的电荷如何分布？

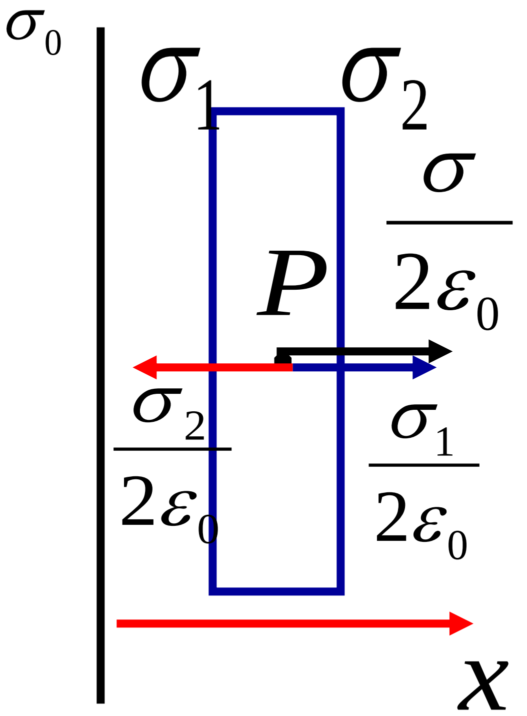


答：A球与B球内表面的电中和，
B球的外表面带电为 q_B+q_A

讨论3：你能否求出此电荷分布的静电场？

例14.4 无限大的带电平面的场中平行放置一无限大金属平板。

求：金属板两面电荷面密度。



解: 设金属板面电荷密度 σ_1， σ_2

由电量守恒

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \quad (1)$$

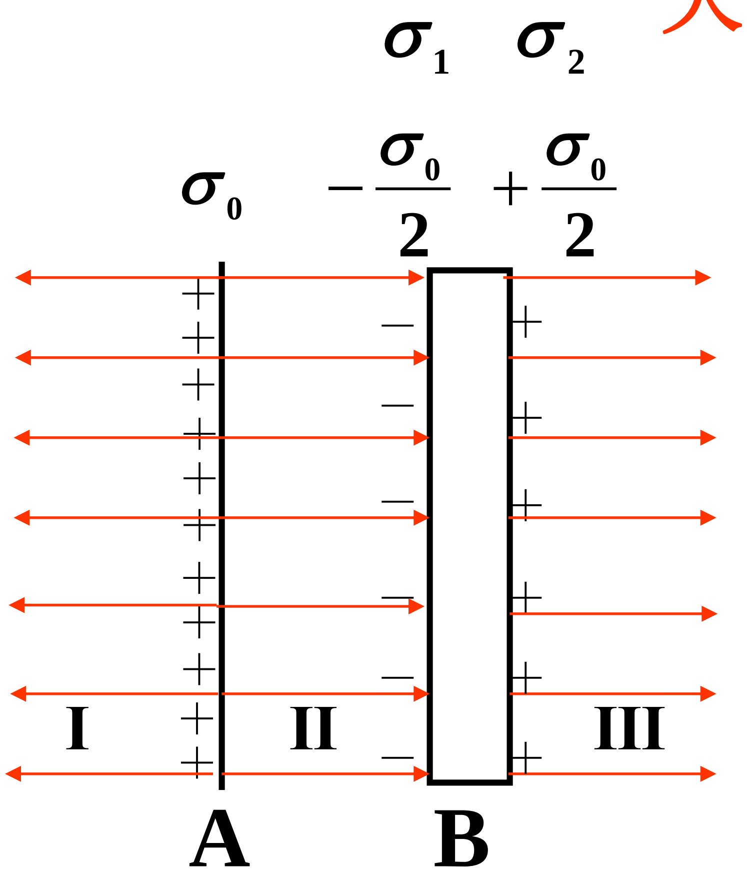
导体体内任一点P，场强为零

$$\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (2)$$

$$\boxed{\sigma_1 = -\frac{1}{2}\sigma_0}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_0}$$

讨论：空间静电场的分布如何？



大金属平板B内的场强为零。

I、II、III 区的场强为

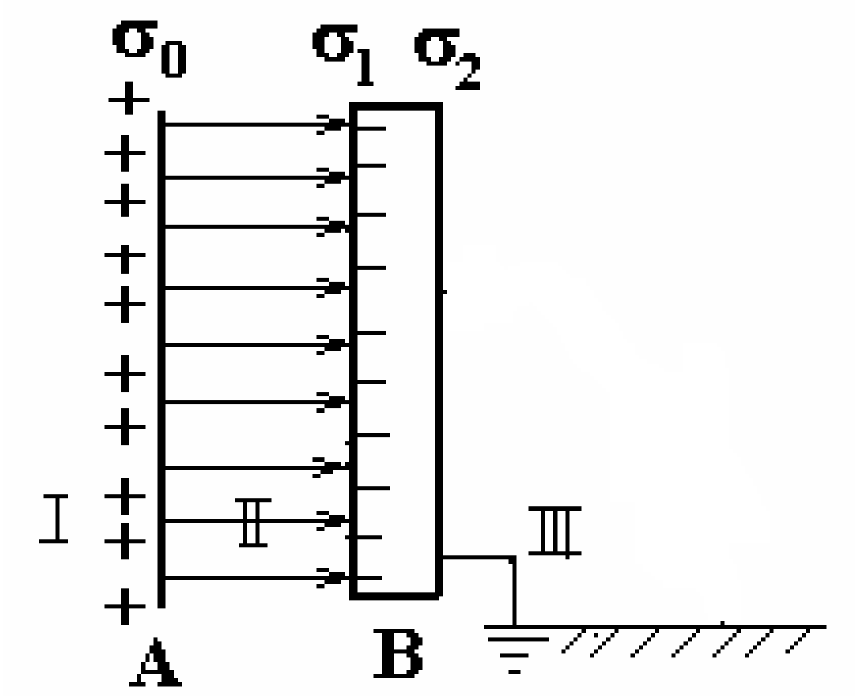
$E_{\mathrm{I}} = \sigma_0 / (2\varepsilon_0)$ （向左）

σ_1、σ_2的作用抵消。

$E_{\mathrm{II}} = E_{\mathrm{III}} = \sigma_0 / (2\varepsilon_0)$ （向右）

σ_1、σ_2的作用抵消。

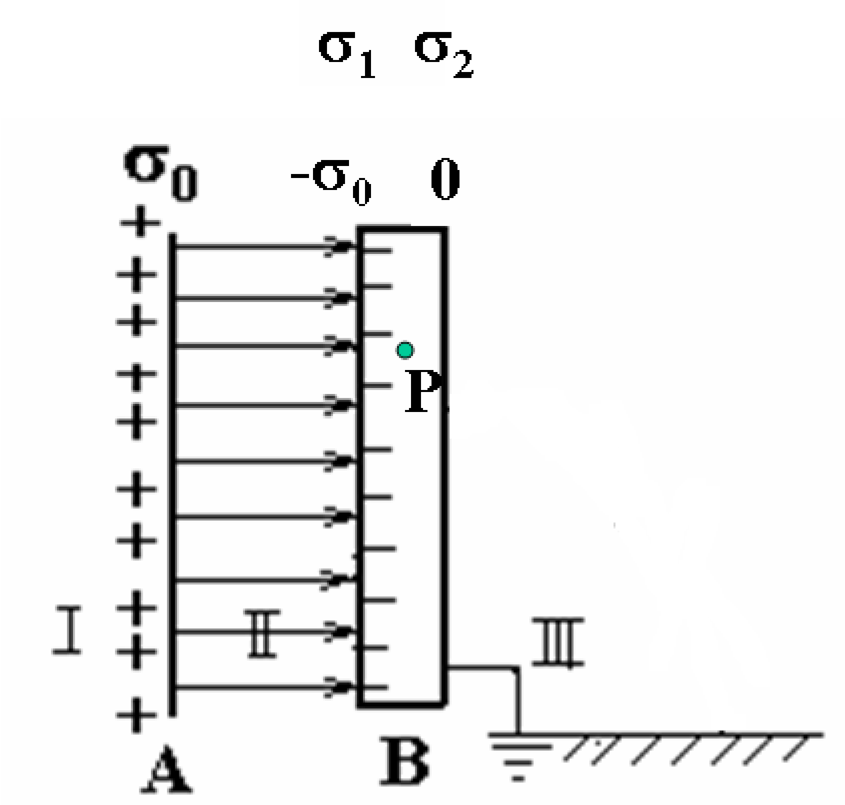
如果将金属平板B接地



$\sigma_2=0$

σ_2=0 这时 σ_1=？仍利用静电平衡条件:

对 B 内部任意一点P，有

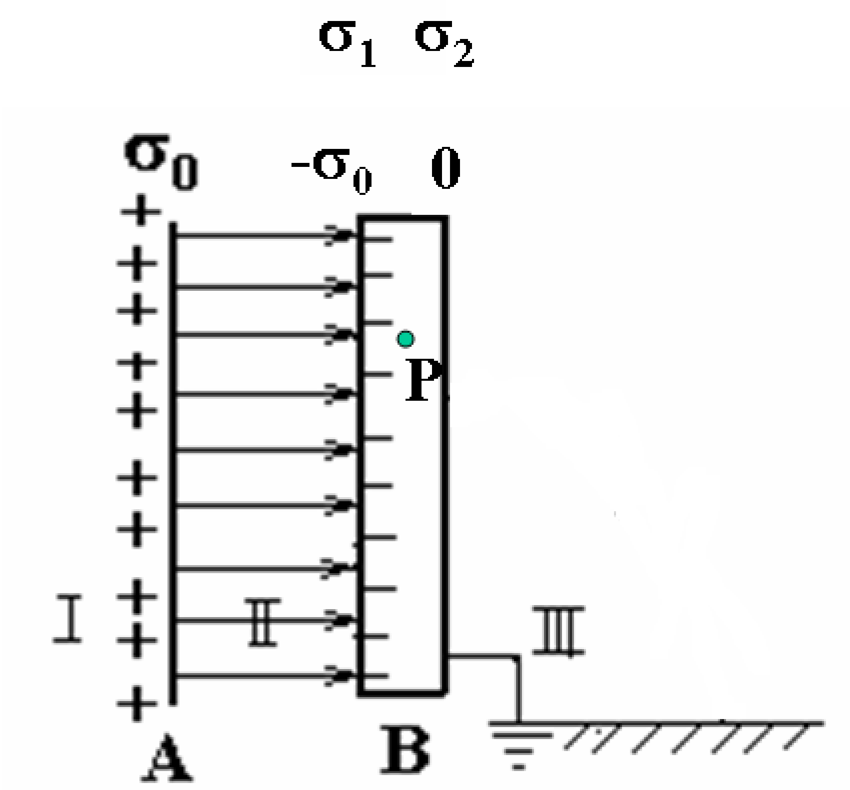


$E_P=0 \Rightarrow$

$$E_P = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = 0$$

$\Rightarrow \sigma_1 = -\sigma_0$

这时 $E_{\mathrm{I}}=E_{\mathrm{III}}=0$，$E_{\mathrm{II}}=\sigma_0/\varepsilon_0$（向右）

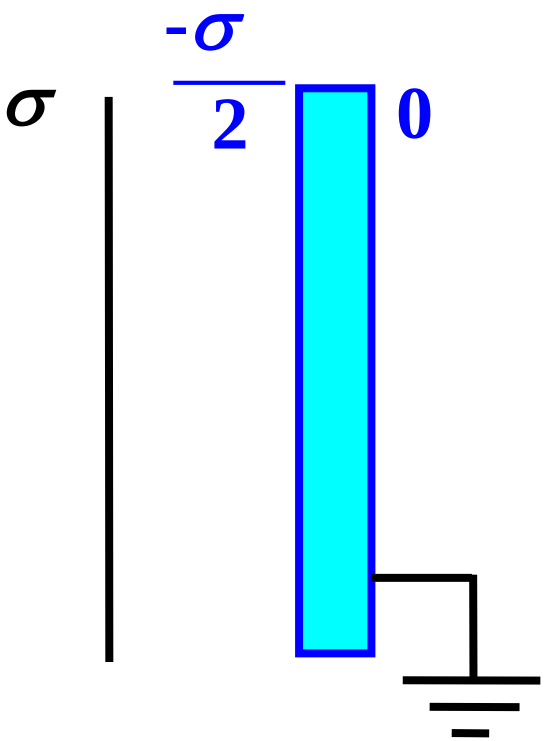


讨论

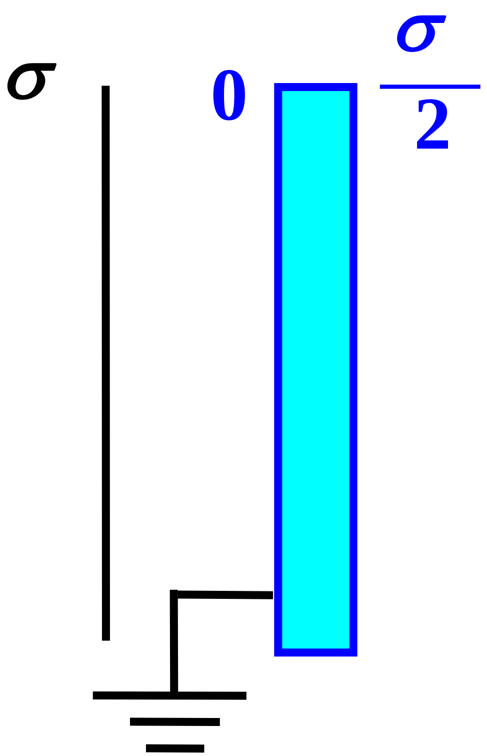
将金属平板 B的
右侧接地
或左侧接地
有区别吗？

答：没有区别。

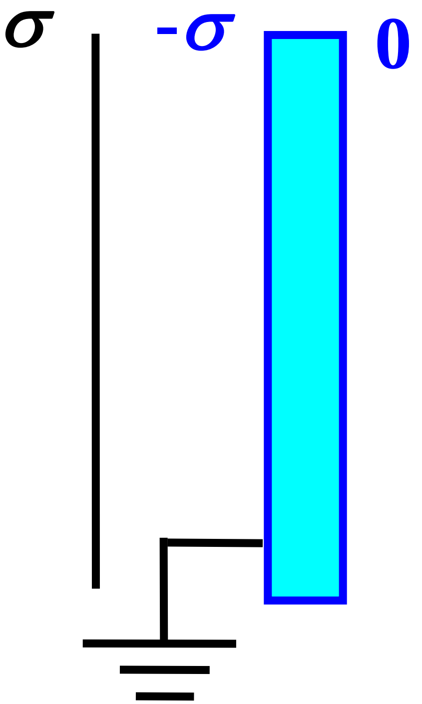
思考 如果导体板接地，下面结果哪个正确?



（A）



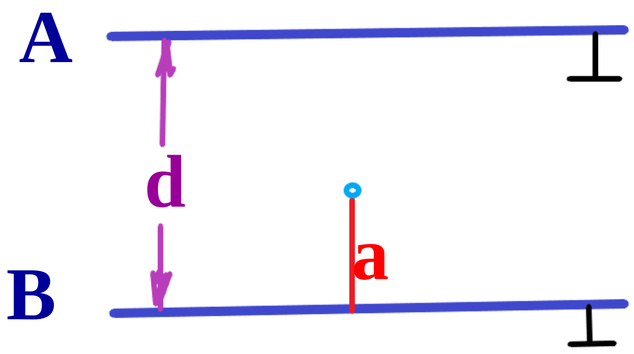
（B）

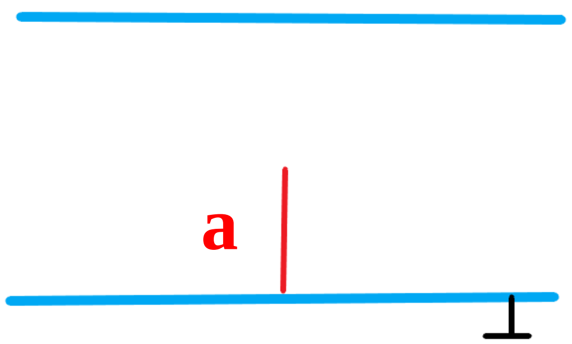


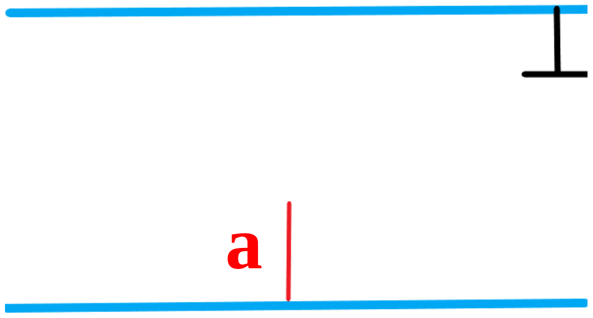
（C）

例14.5 两个接地的无限大平行导电平板A、B之间放置一个点电荷q，点电荷q与平板B的距离为a，两平板相对面之间的距离为d。求两平板上的感应电荷q_A和q_B。

解：







q_A, q_B, q

q'_A, $q'_B = -q'_A$, $q' = 0$

q''_A, $q''_B = -q''_A$, $q'' = 0$

$\varphi_A = 0$, $\varphi_B = 0$, $\varphi = C$

$\varphi'_A = V$, $\varphi'_B = 0$, $\varphi' = \frac{a}{d}V$

$\varphi''_A = 0$, $\varphi''_B = V$, $\varphi'' = \frac{d-a}{d}V$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi'_i = \sum_{i=1}^{n} q'_i \varphi_i$$

$$q_A V + q\frac{a}{d}V = 0$$

$$q_A = -\frac{a}{d}q$$

$$q_B V + q\frac{d-a}{d}V = 0$$

$$q_B = -\frac{d-a}{d}q$$