5. 刚体

5.1 刚体的运动

一. 刚体（rigid body）的概念

刚体是特殊的质点系，

其上各质元间的距离保持不变。

质点系的规律都可用于刚体，

而且考虑到刚体的特点，规律的表示还可较一般的质点系有所简化。

二. 刚体的运动形式

1.平动（translation）：连接刚体内任意两点的直线在运动各个时刻的位置都彼此平行。

刚体做平动时，可用质心或其上任何一点的运动来代表整体的运动。

平动是刚体的基本运动形式之一。

2.转动（rotation）：

转动也是刚体的基本运动形式之一，它又可分为定轴转动和定点转动。

▲ 定轴转动： 运动中各质元均做圆周运动，且各圆心都在同一条固定的直线（转轴）上。

▲ 定点转动：运动中刚体上只有一点固定不动，整个刚体绕过该定点的某一瞬时轴线转动。

3.平面运动：刚体上各点的运动都平行于某一固定平面的运动。

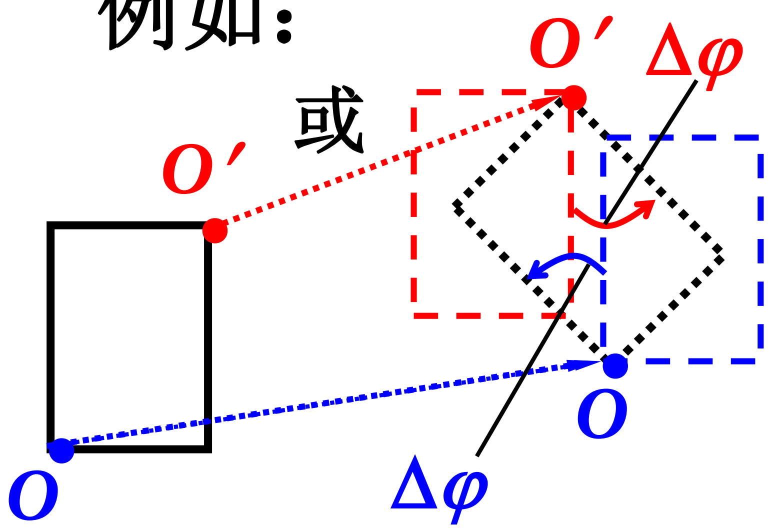
4.一般运动：刚体不受任何限制的的任意运动。

它可分解为以下两种刚体的基本运动：

▲ 随基点O（可任选）的平动

▲ 绕通过基点O的瞬时轴的定点转动

例如：



两种分解，基点选取不同，

平动可以不同，转动却相同，

转动与基点的选取无关。

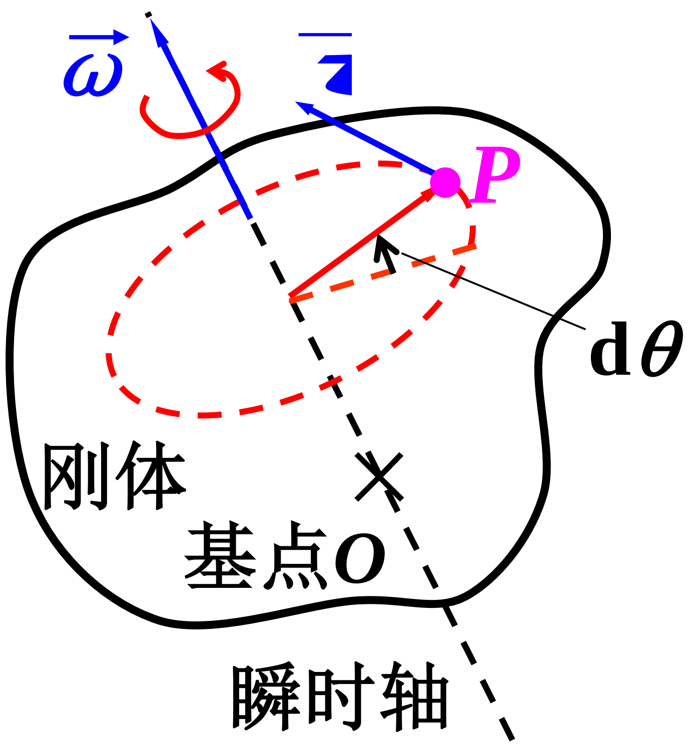
动力学中，常选质心为基点。

三. 刚体转动的描述（运动学问题）

1.定点转动（rotation about a fixed point）

（1）角量的描述

为反映瞬时轴的方向及刚体转动的快慢和转向，引入角速度矢量 $\vec{\omega}$ 。



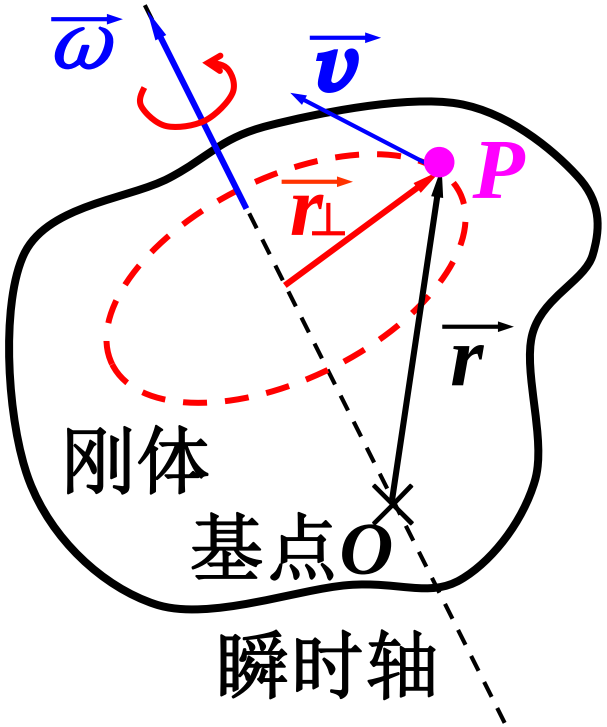
$$\boxed{|\vec{\omega}| = \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}$$

$\vec{\omega}$的方向沿瞬时轴，与转向成右螺旋关系。为反映刚体角速度的变化情况，引入角加速度矢量 $\vec{\alpha}$。

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}}$$

（不一定沿着瞬时轴）

（2）线量和角量的关系



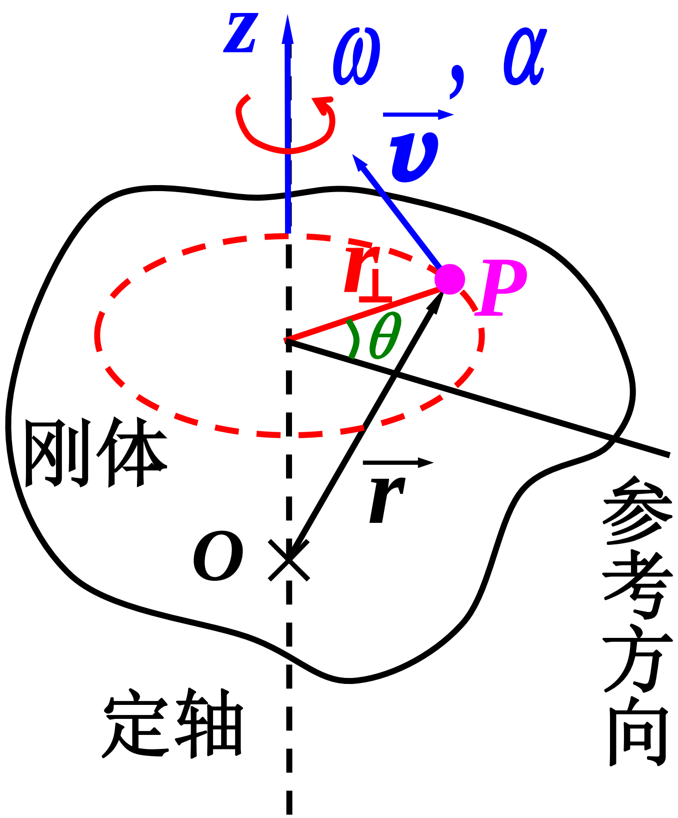
$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}_\perp=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\text{旋转加速度}}+\underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\text{向轴加速度}}$$

2.定轴转动（rotation about a fixed axis）

转轴固定，$\vec{\omega}$和 $\vec{\alpha}$退化为代数量 ω 和 α 。



$$v = r_{\perp}\omega$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r_{\perp}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r_{\perp}\alpha$$

$$a_n = r_{\perp}\omega^2$$

若 $\alpha = \text{const}.$ $\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ (\theta - \theta_0) = \omega t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$

三. 刚体的平衡

刚体平衡条件指刚体能够保持静止不动时的受力条件。

(1)不平动(C不动)

$$\vec{F}_{外} = \sum \vec{F}_{外i} = 0 \quad (外力的矢量和为零)$$

(2)不转动(对任意点O)

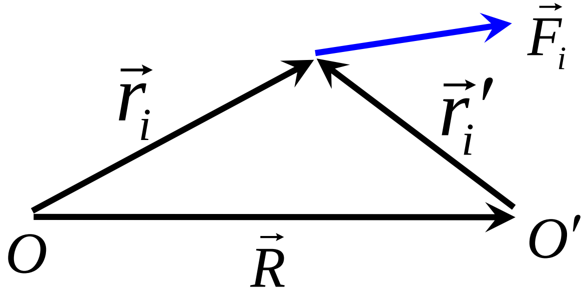
$$\vec{M}_{外} = \sum \vec{M}_{外i} = 0 \quad (外力对任意点力矩的和为零)$$

若 $\vec{F}_{外} = 0$, 如对某点O’力矩为零,则对任意点O力矩为零

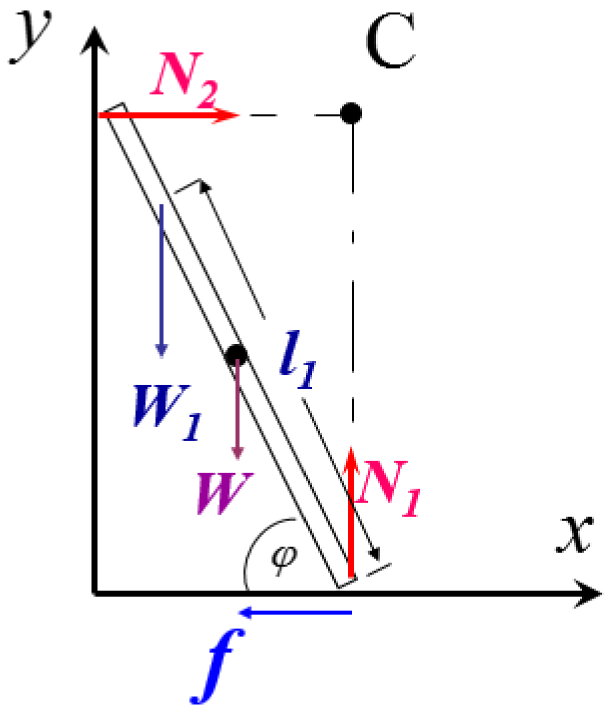
证： $\vec{M}_{(O)} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \left(\vec{r}_i' + \vec{R}\right) \times \vec{F}_i$

$$= \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum \vec{F}_i$$

$$= \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \vec{M}_{(O')}$$



例5.1 一架均匀的梯子，重为W，长为$2l$，上端置于光滑的墙上，下端置于粗糙的地面上，梯与地面的摩擦系数为μ。有一体重W_1的人攀登到距梯下端l_1的地方。求梯子不滑动的条件。



解：

$$N_2 - f = 0$$

$$N_1 - W - W_1 = 0$$

$$2fl\sin\varphi - Wl\cos\varphi - W_1 l_1 \cos\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = W + W_1 \\ N_2 = f = \dfrac{Wl + W_1 l_1}{2l}\cot\varphi \end{cases}$$

梯子不滑动的条件是：

$$f < \mu N_1$$

$$\Rightarrow \frac{Wl + W_1 l_1}{2l}\cot\varphi < \mu\left(W + W_1\right)$$

对于一定的倾角φ，人所能攀登的高度为

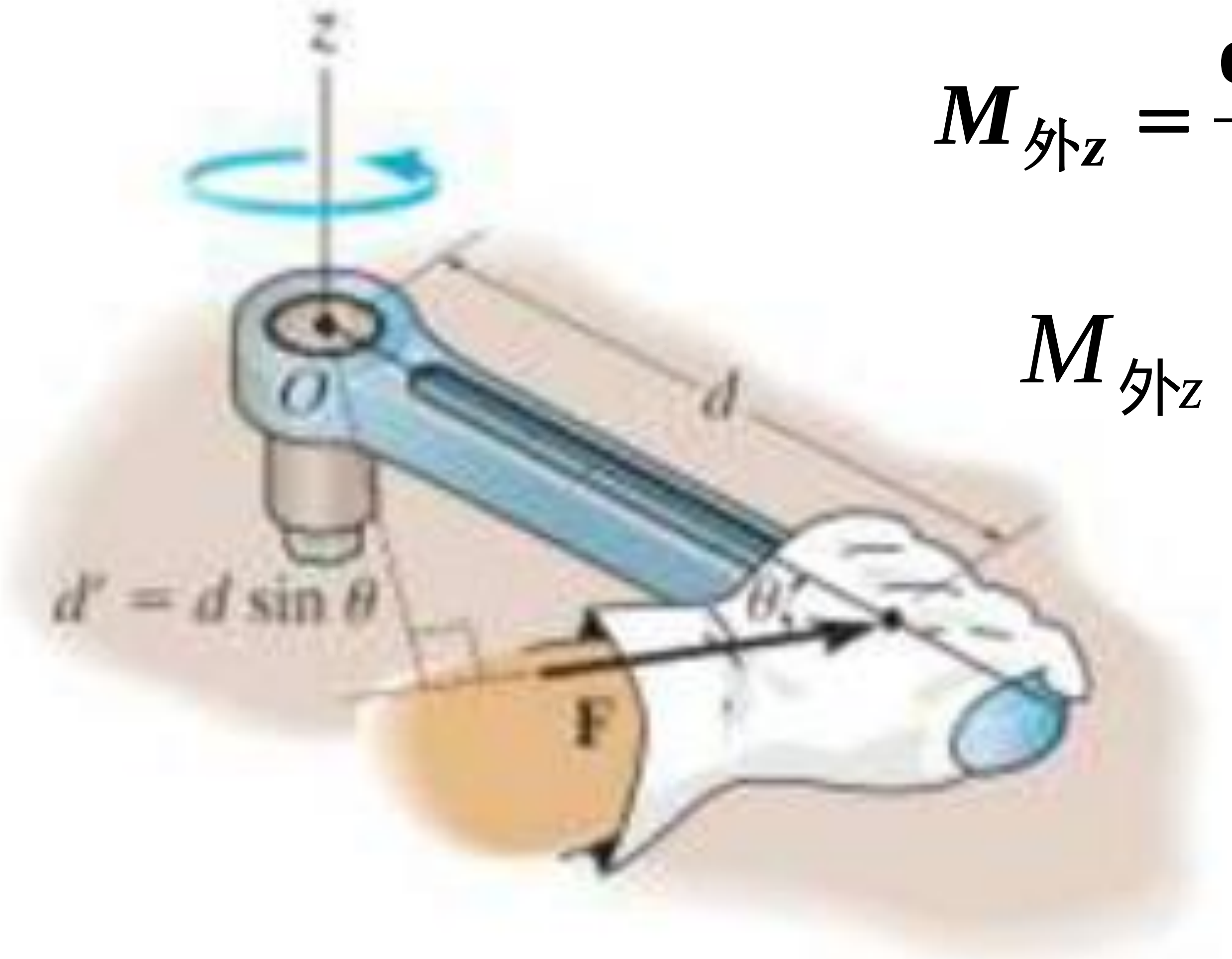
$$l_1 < \frac{2l\mu(W+W_1)}{W_1}\tan\varphi - \frac{Wl}{W_1}$$

如果要求攀登到一定的高度l_1，则要求梯子的倾角

$$\varphi > \arctan\left[\frac{Wl+W_1 l_1}{2l\mu(W+W_1)}\right]$$

如果本例中墙与梯之间的摩擦也不可忽略，则多出一个未知数。但独立的平衡方程数目并没有再多，从而无法求出确定的解答。这类问题叫做**静不定问题**。静不定问题的实质在于静摩擦力的大小与运动的趋势有关，有两个以上的静摩擦力参与物体的平衡时，它们各自承担多少与达到平衡的过程有关，结论是不唯一的。所谓“运动的趋势”在物理上指的是物体在相互接触的地方彼此造成微小形变的情况，这已**超出了刚体概念的范围**，故刚体模型在此已无能为力。

5.2 刚体的定轴转动定律

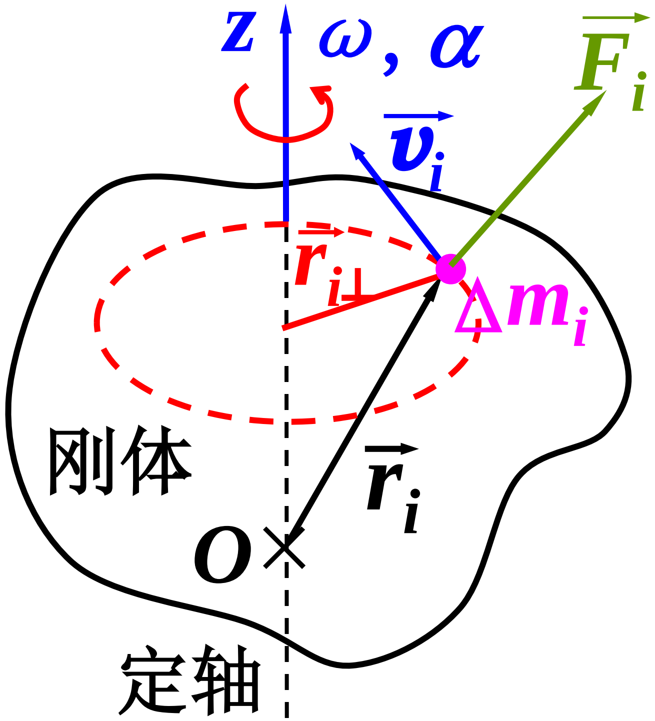


$$\vec{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \quad (对\ O\ 点)$$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} \quad (对\ z\ 轴)$$

$$M_{外z} = F_{\perp} d \sin\theta$$

把刚体看作无限多质元构成的质点系。



$$\vec{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \quad (对\ O\ 点)$$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} \quad (对\ z\ 轴)$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta m_i v_i r_{i\perp}$$

$$= \left(\sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2\right) \cdot \omega$$

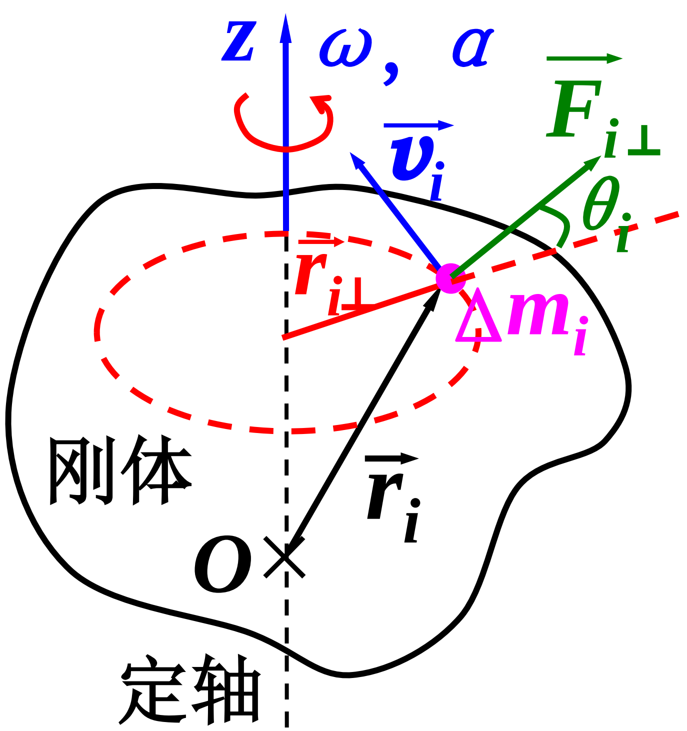
令 $\boxed{J_z = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2}$ —转动惯量（对z轴）

（rotational inertia）

则 $\boxed{L_z = J_z \cdot \omega}$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

即 $\boxed{M_{外z} = J_z \alpha}$ ——转动定律



其中 $M_{外z} = \sum_i F_{i\perp} r_{i\perp} \cdot \sin\theta_i$

定轴情况下，可不写下标 z，记作：

$$\boxed{M = J\alpha}$$

与牛顿第二定律相比，有：

M 相应 F， J 相应 m， α 相应 a 。

牛顿第二定律 刚体定轴转动定律

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad M = J\alpha$$

$$m \Leftrightarrow J$$

$$a \Leftrightarrow \alpha$$

$$F \Leftrightarrow M$$

5.3 转动惯量的计算

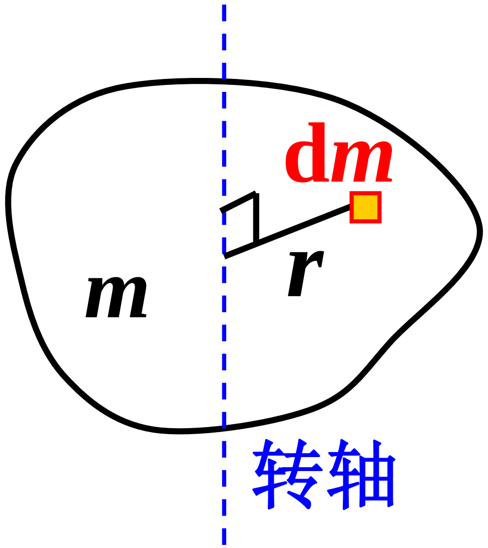
J 由质量对轴的分布决定。

$$J=\sum_i m_i R_i^2$$

R_i**为质元** m_i **到转轴的垂直距离**

若质量连续分布 $$J=\int r^2 dm$$

在（SI）中，*J*的单位：kgm²　量纲：ML²



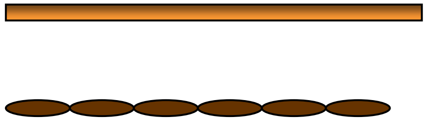
$$\lambda=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta l}=\frac{dm}{dl}$$ 质量的线密度

$$\sigma=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta S}=\frac{dm}{dS}$$ 质量的面密度

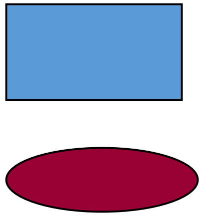
$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}=\frac{dm}{dV}$$ 质量的体密度

dm为质量元，简称质元。其计算方法如下：

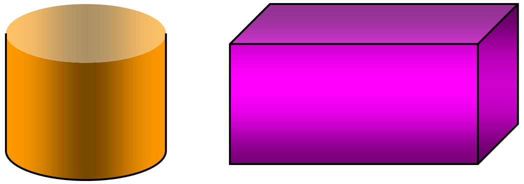
质量为线分布 $dm=\lambda dl$



质量为面分布 $dm=\sigma ds$



质量为体分布 $dm=\rho dV$

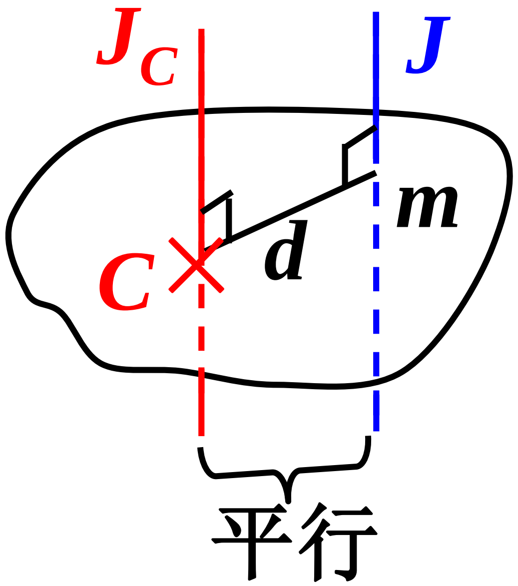


计算转动惯量的几条规律

1.对同一轴J具有可叠加性

$$\boxed{J=\sum J_i}$$

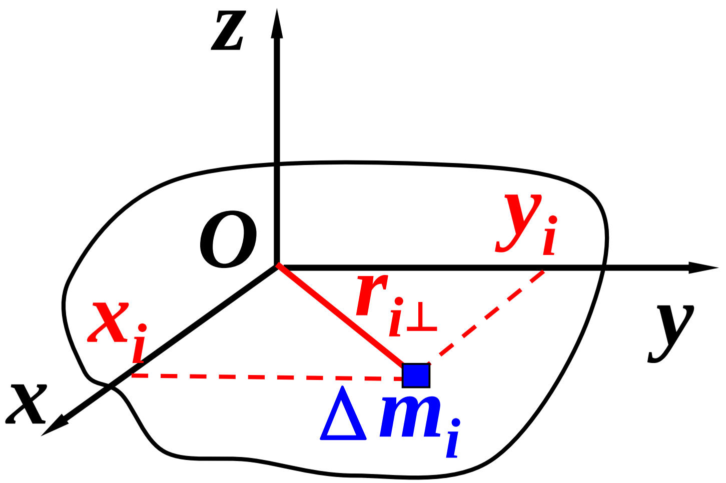
2.平行轴定理



$$\boxed{J = J_C + md^2}$$

$$\therefore \quad J_C = J_{\min}$$

3.对薄平板刚体的正交轴定理



即

$$\boxed{J_z = J_x + J_y}$$

平行轴定理

若有任一轴与过质心的轴平行，相距为d，刚体对其转动惯量为J，则有：

$J = J_C + md^2$。

这个结论称为平行轴定理。

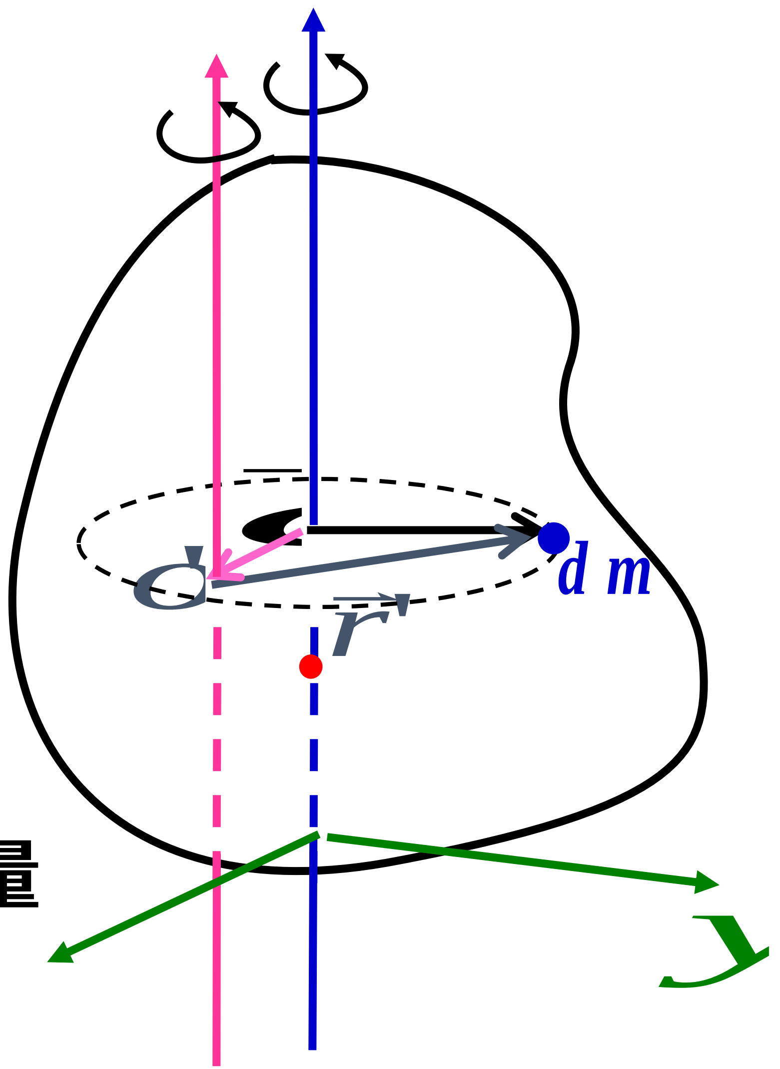
证明： $|\vec{r}|$、$|\vec{r}\,'|$ 均为质元dm到转轴的垂直距离。

$$\because \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{d}$$

对于平行于OZ过O'的轴的转动惯量

$$J = \int_m r'^2 dm = \int_m (\vec{r} - \vec{d})^2 dm$$

$$J = \int_m r^2 dm + \int_m d^2 dm - 2\int_m \vec{r} \cdot \vec{d}\, dm = 0$$



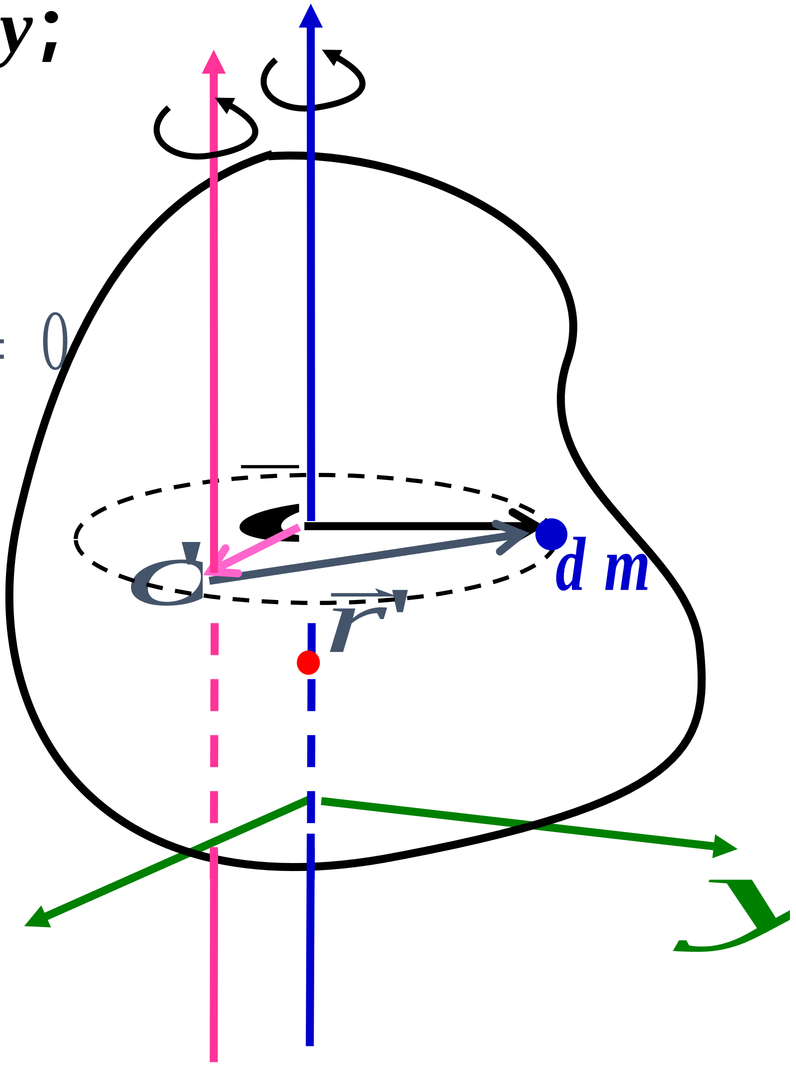
因为　是质元 dm在垂直转轴的XY平面内的位矢，其坐标分量是x、y；而质心在Z轴上，所以

$$x_C = \frac{\int_m x\,dm}{\int dm} = 0 \quad , \quad y_C = \frac{\int_m y\,dm}{\int dm} = 0$$

$$\therefore \; 2\int_m \vec{r}\cdot\vec{d}\,dm =$$

$$= 2d_x\int_m x\,dm + 2d_y\int_m y\,dm = 0$$

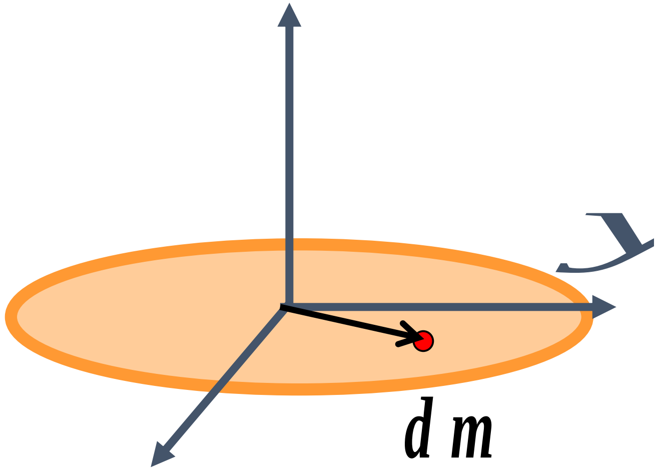
$$J = J_C + md^2$$



d是两平行轴间的距离

垂直轴定理　　仅适用于薄板

对于薄板刚体，若建立坐标系 *o-xyz*，*z*轴与薄板垂直，*oxy*坐标面在薄板内，则薄板刚体对于*z*轴的转动惯量J_z等于对*x*轴和*y*轴的转动惯量J_x与J_y之和。



$$J_Z = \int_m r^2 dm = \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm$$

$$\Rightarrow \quad J_Z = J_x + J_y$$

为了描述简便，常把刚体绕某轴的转动惯量等价于一个相同质量的质点绕同一个轴的转动惯量：

$$J = mR^2$$

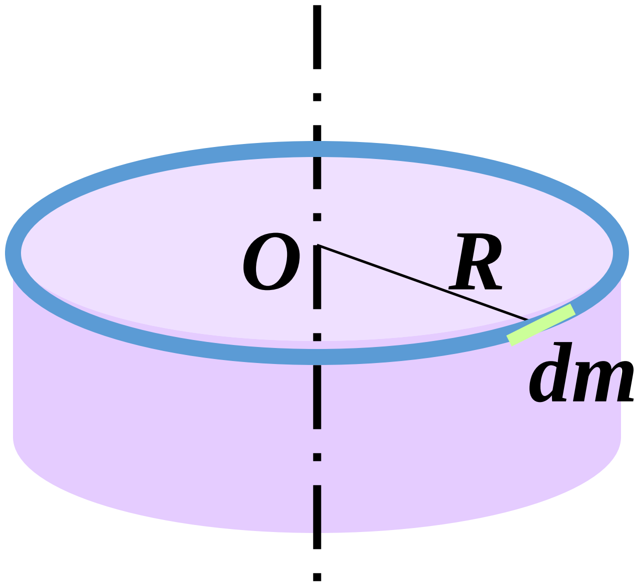
*R*称为刚体的**回转半径**。

例5.2 求质量为m、半径为R 的均匀圆环的转动惯量。轴与圆环平面垂直并通过圆心。

解： $$J=\int R^2 dm = R^2\int dm = mR^2$$

R与积分无关。

具有可加性，所以若求质量为m、半径为R 的薄圆筒的转动惯量，轴与圆筒平面垂直并通过轴心。（不计薄圆筒厚度）



它的转动惯量仍为 mR^2

例5.3　求质量为m、半径为R、厚为l 的均匀圆盘的转动惯量。轴与盘平面垂直并通过盘心。

解：取半径为 r 处面元

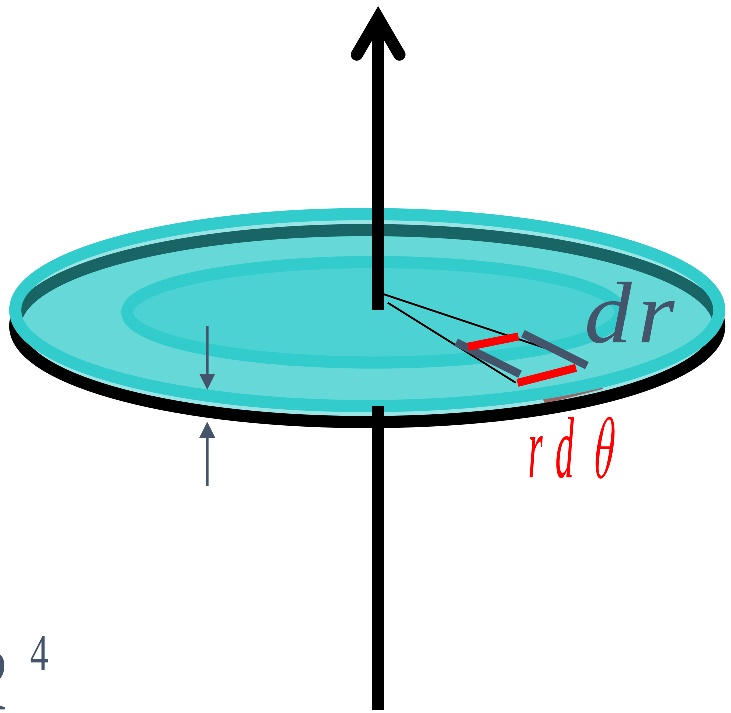
$$dS = r d\theta \cdot dr$$

$$dJ = r^2 dm = r^2 \rho \cdot l dS$$

$$J = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho\, l \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$J = 2\pi \int_0^R r^3 \rho\, l \cdot dr = \frac{\pi}{2} \rho \cdot l R^4$$

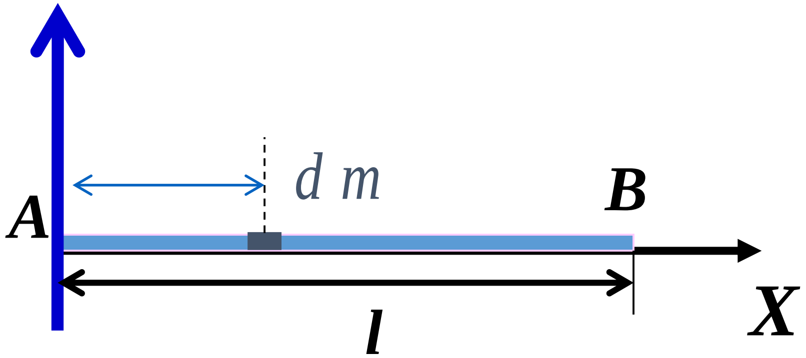
$$\because \rho = \frac{m}{l\pi R^2} \qquad \therefore J = \frac{1}{2} m R^2$$



实心圆柱对其轴的转动惯量也是$mR^2/2$。。

例5.4 **求长为l、质量为m的均匀细棒对图中不同轴的转动惯量。**

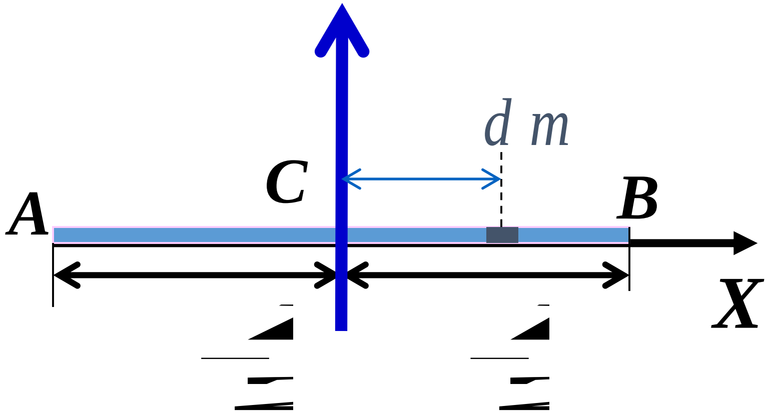
解：取如图坐标，$dm=\lambda\, dx$



$$\lambda = \frac{m}{l}$$

$$J_A = \int_0^l x^2 \lambda\, dx = \frac{ml^2}{3}$$

绕通过质心且垂直于杆的轴



$$J_C = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \lambda\, dx = \frac{ml^2}{12}$$

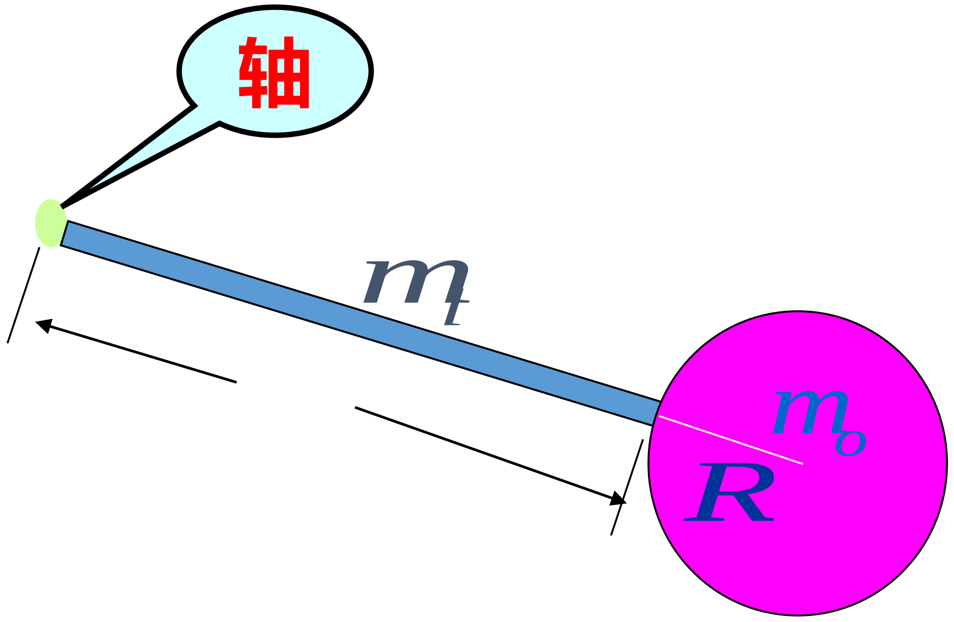
J_C表示相对通过质心的轴的转动惯量，

J_A表示相对通过棒端的轴的转动惯量。

两轴平行，相距 $l/2$。由平行轴定理：

$$J_A = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

例5.5 **右图所示刚体对经过棒端且与棒垂直的轴的转动惯量如何计算？(棒长为*l*、圆半径为*R*)**



解：

$$J_{杆对端} = \frac{1}{3} m_l l^2$$

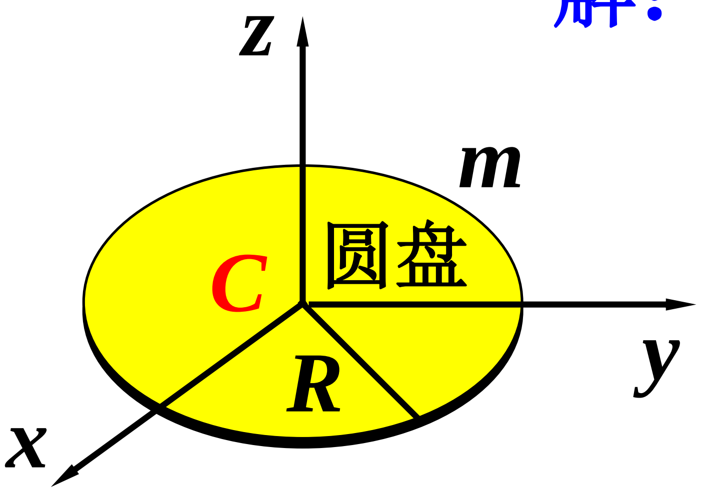
$$J_{圆盘C} = \frac{1}{2} m_o R^2$$

$$J_{圆盘对端} = J_{圆盘C} + m_0 d^2$$

$$d = l + R$$

$$J_{杆和盘对端} = \frac{1}{3} m_l l^2 + \frac{1}{2} m_o R^2 + m_o (l + R)^2$$

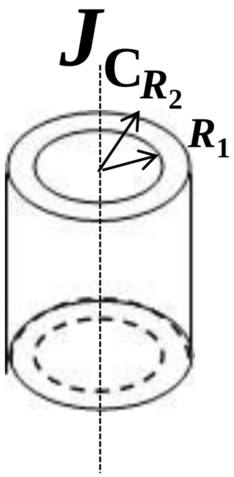
例5.6 求质量为m、半径为R的薄圆盘对其一条直径的转动惯量。



解： 已知圆盘 $J_z = \dfrac{1}{2}mR^2$ 。

$$J_x + J_y = J_z = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\therefore \quad J_x = J_y = \frac{1}{4}mR^2$$



例5.7 空心圆柱，内半径R_1，外半径R_2，质量m，转动轴为中心对称轴，求转动惯量。

解： 把圆柱看成无穷多薄圆柱壳组成，半径R，厚度$\mathrm{d}R$，设高为h，质量$\mathrm{d}m$的薄圆柱壳的转动惯量$\mathrm{d}J$：

$$\mathrm{d}J = \mathrm{d}mR^2 \qquad \mathrm{d}m = \rho \cdot 2\pi Rh \cdot \mathrm{d}R$$

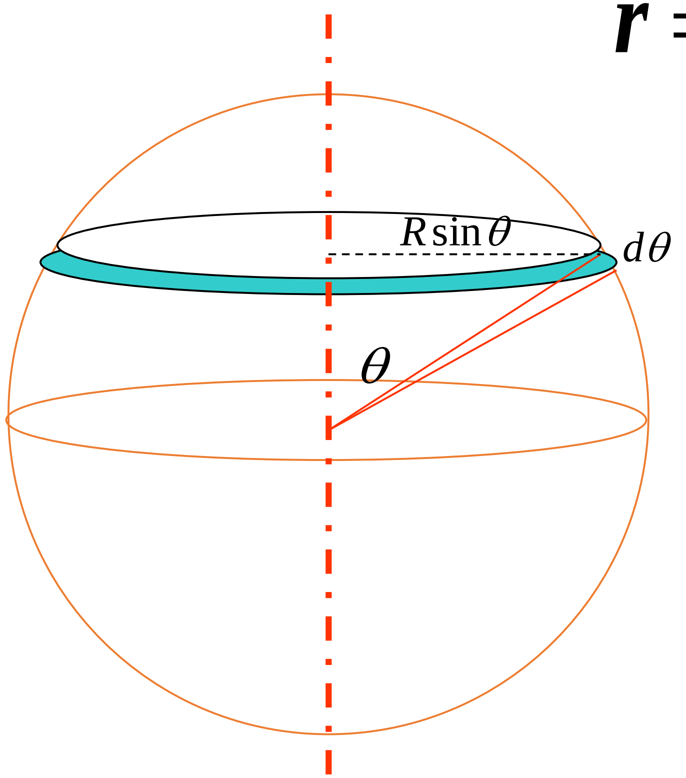
密度： $$\rho = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)h}$$

$$J_C = \int \mathrm{d}J = \int_{R1}^{R2} R^2 \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)h} 2\pi Rh \cdot \mathrm{d}R$$

$$= \frac{2m}{R_2^2 - R_1^2}\int_{R1}^{R2} R^3 \mathrm{d}R \quad \boxed{= \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)}$$

例5.8 求质量为m 半径为R 的匀质薄球壳绕过中心轴的转动惯量。

解：方法一：在球面取一圆环带，半径 r



$$r = R\sin\theta, \quad \text{面密度}\rho_S = \frac{m}{4\pi R^2}$$

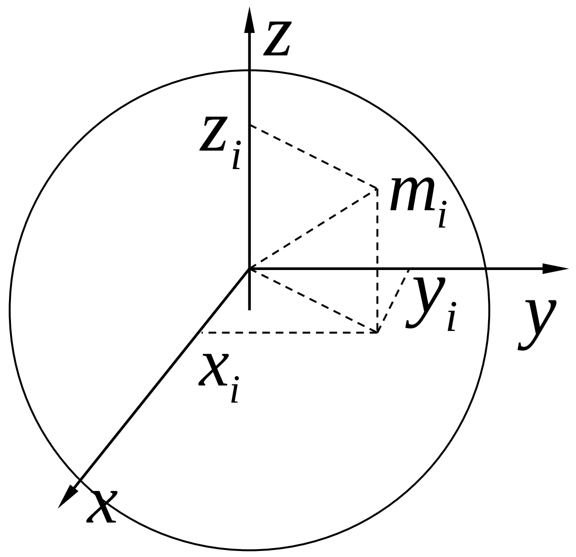
$$\mathrm{d}m = \rho_S 2\pi\, rR\mathrm{d}\theta$$

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} mR^2 \sin^3\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{= \frac{2}{3}mR^2}$$

方法二：用对称性：



$$J_x = \sum_i \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$J_y = \sum_i \Delta m_i (z_i^2 + x_i^2)$$

$$J_z = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

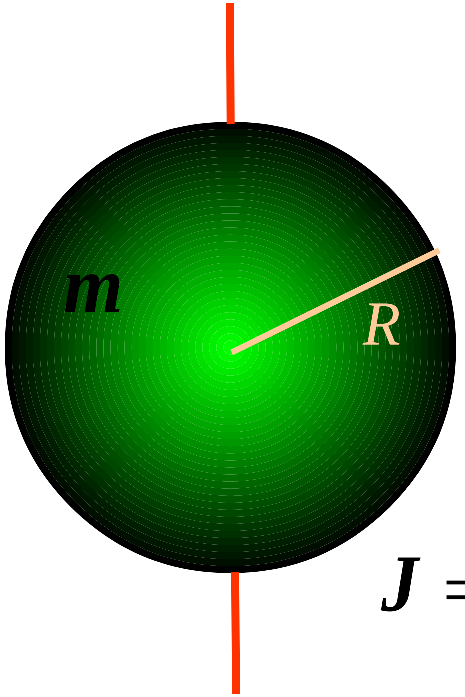
$$J_x + J_y + J_z = 2\sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2mR^2$$

$$J_x = J_y = J_z = J$$

$$\Rightarrow J = \frac{2}{3} mR^2$$

例5.9 求质量为m 半径为R 的匀质球体绕过球心轴的转动惯量。

解：把球体看作无数个厚度为dr 的同心薄球壳的组合，　质量$\mathrm{d}m$, 半径r的薄球壳转动惯量$\mathrm{d}J$



$$\mathrm{d}J = \frac{2}{3}\mathrm{d}m \cdot r^2$$

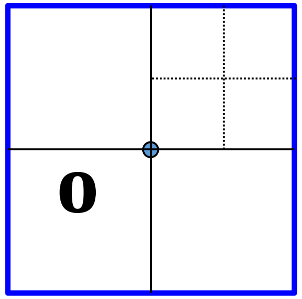
密度 $\rho = m / (\frac{4}{3}\pi R^3)$

$$\therefore \mathrm{d}m = \rho \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{3m}{R^3} r^2 \mathrm{d}r$$

$$J = \int \mathrm{d}J = \int \frac{2}{3} \cdot \mathrm{d}m \cdot r^2 = \frac{2m}{R^3}\int_0^R r^4 \mathrm{d}r \boxed{= \frac{2}{5}mR^2}$$

例5.10 匀质正方形薄板质量为m，各边长为a，转动轴过中心O垂直板面，求板相对该轴的转动惯量。

解：方法一　设转动惯量　$J_C = kma^2$



k为一无量纲比例系数。把正方形等分为四个正方形，每个小正方形中心到O的距离为$d = \sqrt{2}a/4$，由平行轴定理

$$J_C = kma^2 = 4 \cdot k\frac{m}{4}(a/2)^2 + 4 \cdot \frac{m}{4}(\sqrt{2}a/4)^2$$

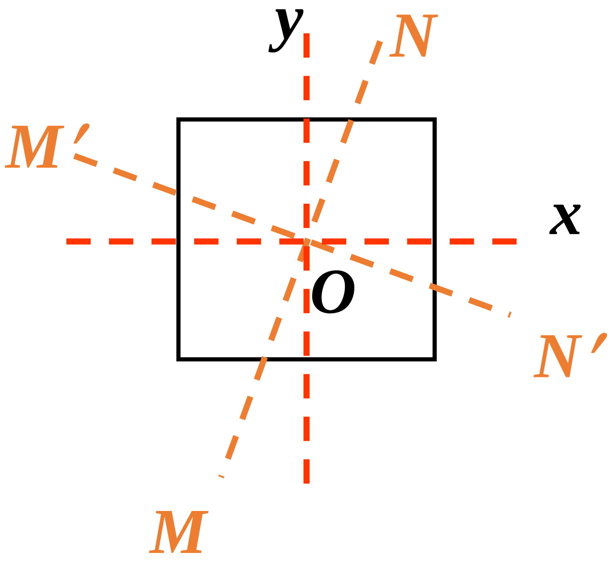
$$k = \frac{1}{8} + \frac{k}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\therefore J_C = \frac{1}{6}ma^2}$$

方法二　用垂直轴定理：$\frac{1}{12}ma^2 + \frac{1}{12}ma^2$

例5.11 匀质正方形薄板质量为*m*，各边长为*a*，在板平面设置过中心O的转轴MN，求板相对该轴的转动惯量。

解：过*O*点作$M'N'\perp MN$，则有$J'=J$



坐标系*Oxy*，相对*x*、*y*轴有

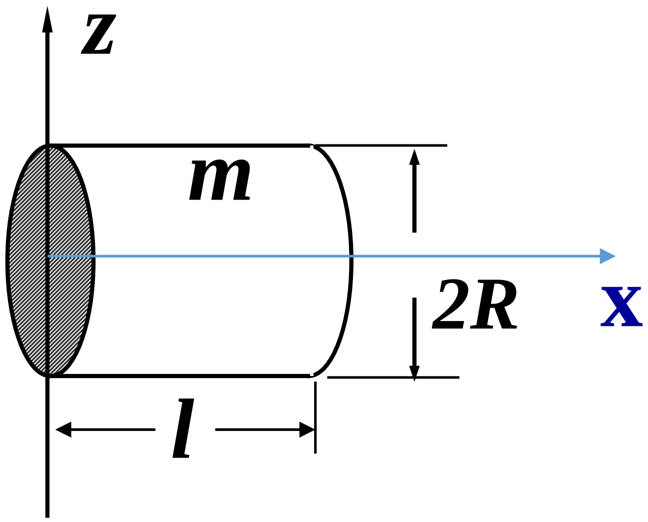
$$J_x = J_y$$

垂直轴定理有 $$J + J' = J_z$$

$$J_x + J_y = J_z$$

$$\therefore J = J_x = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{12} m a^2$$

例5.12 求下图中的 J_z。

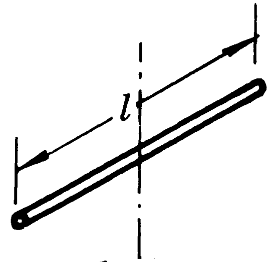


解：

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 L}$$

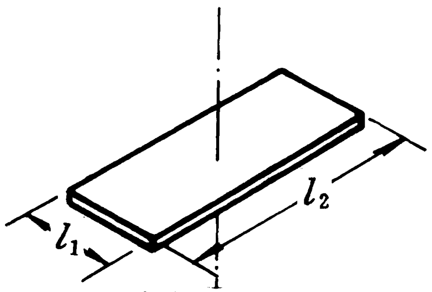
$$dJ = \frac{1}{4} R^2 \rho \pi R^2 dx + x^2 \rho \pi R^2 dx$$

$$J = \int dJ = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{3} ml^2$$



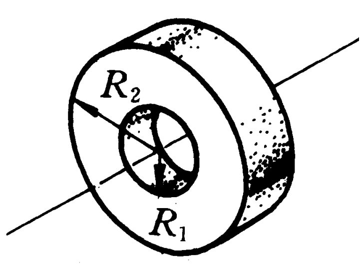
$\frac{1}{12}ml^2$

(a)细圆棒，
轴通过中心



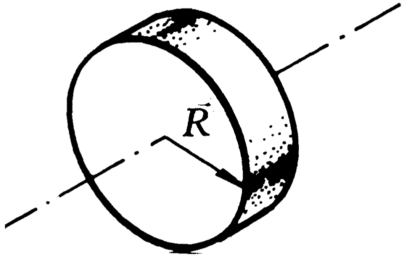
$\frac{1}{12}m(l_1^2+l_2^2)$

(b)矩形平板，
轴通过中心



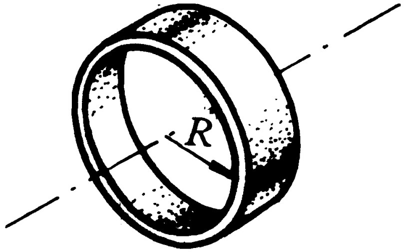
$\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$

(c)空心圆柱体



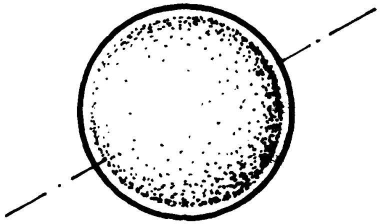
$\frac{1}{2}mR^2$

(d)实心圆柱体



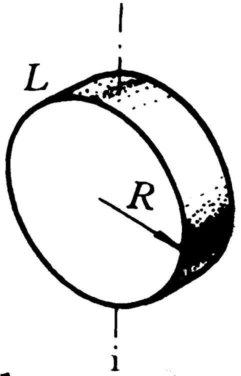
mR^2

(e)薄壁圆筒



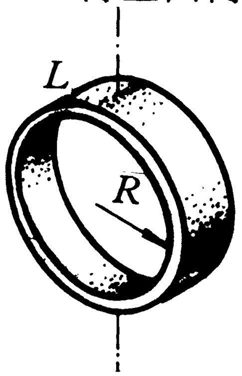
$\frac{2}{5}mR^2$

(f)实心球体



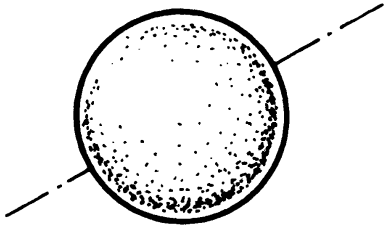
$\frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{12}mL^2$

(g)实心圆柱体



$\frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{12}mL^2$

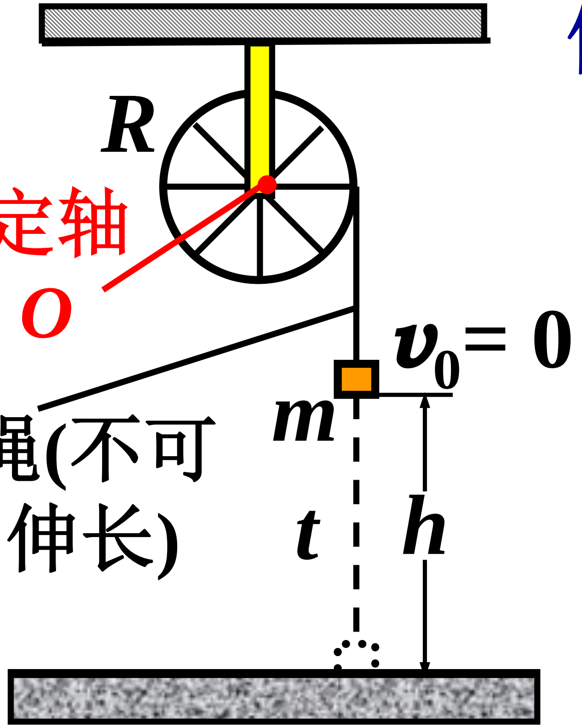
(h)薄壁圆筒



$\frac{2}{3}mR^2$

(i)空心球壳

5.4 转动定律应用举例



例5.13　已知：$R=0.2\text{m}$，$m=1\text{kg}$，

$v_0=0$，$h=1.5\text{m}$，

绳轮间无相对滑动，

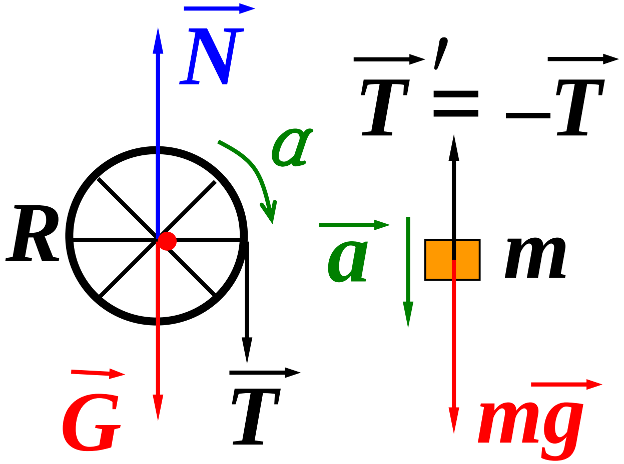
下落时间$t=3\text{s}$。

求：轮对 O 轴 $J=?$

解：动力学关系：

对轮+与轮接触的绳子：$T\cdot R=J\cdot\alpha$　(1)

对m：　$mg-T=ma$　(2)



运动学关系：

$a=\alpha\cdot R$　(3)

$h=\frac{1}{2}at^2$　(4)

(1)~(4)联立解得： $J=(\frac{gt^2}{2h}-1)mR^2$

分析结果：

- 单位对；
- h、m 一定，$J\uparrow \to t\uparrow$， 合理；
- 若$J=0$， 得 $h=\frac{1}{2}gt^2$， 正确。

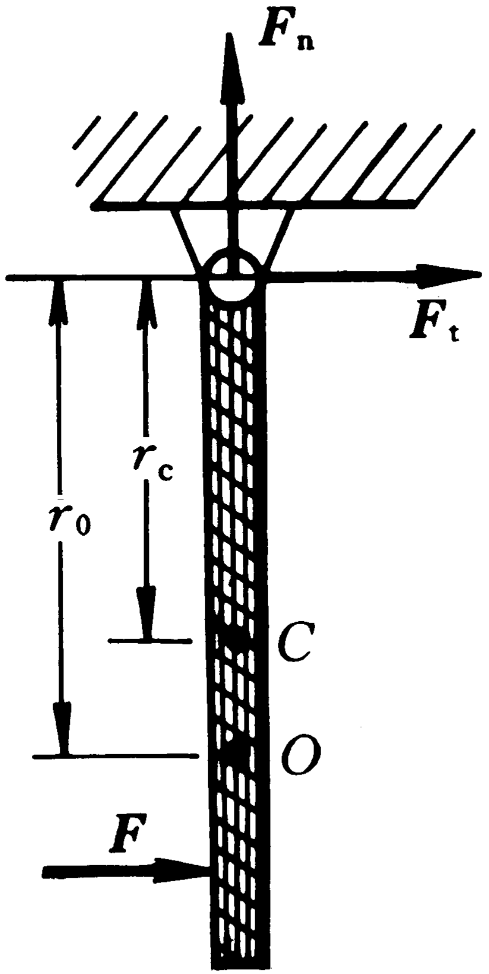
代入数据：

$$J=(\frac{9.8\times 3^2}{2\times 1.5}-1)\times 1\times 0.2^2$$

$$=1.14\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

此为一种用实验测转动惯量的方法。

例5.14 以水平力打击悬挂着的质量为m、长度为l的刚体。若打击点O选择合适，则在打击过程中，支承轴对刚体的切向力F_t为零，该点称为打击中心。试求打击中心O与支承轴之间的距离r_0。



解：刚体在水平力F的力矩作用下作定轴转动，其转动惯量可以普遍地表示为

$$J = mR^2$$

其中R为刚体对转轴的回转半径。由刚体定轴转动的转动定理可得

$$r_0 F = J\alpha = mR^2\alpha \qquad (1)$$

根据质心运动定理，可写出其切向分量方程为

$$F_t + F = mr_c\alpha \qquad (2)$$

联立式(1)和(2)，可得 $$F_t - \left(\frac{r_c r_0}{R^2} - 1\right) F = 0 \quad (3)$$

为使 $F_t = 0$，则要求 $$r_0 = \frac{R^2}{r_c} \quad (4)$$

对于以端点为悬挂点的细棒，$R^2 = l^2/3$，$r_c = l/2$，因此有 $r_0 = 2l/3$。

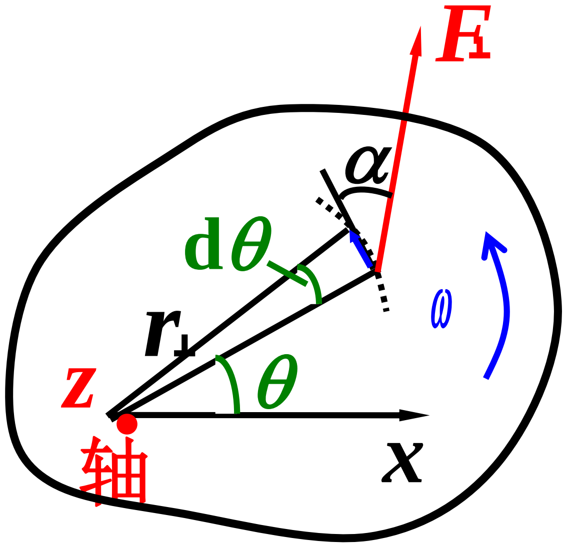
在用棒击球时，为使手所受到的作用力最小，就应该让击球点落在打击中心附近。

若击球点距轴的距离 $r > r_0$，则手对棒的作用力F_t与球对棒的作用力F方向相同，这时握棒的手指受力；

若 $r < r_0$，则F_t与F方向相反，这时握棒的虎口受力。

5.5 定轴转动中的功能关系

一.力矩的功



力矩的空间积累效应：

$$dW = F_{\perp}\cos\alpha(r_{\perp}\,d\theta)$$

$$= (F_{\perp}\cos\alpha\cdot r_{\perp})\,d\theta$$

$$= M\,d\theta$$

力矩的功：

$$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\cdot d\theta}$$

二. 定轴转动动能定理

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

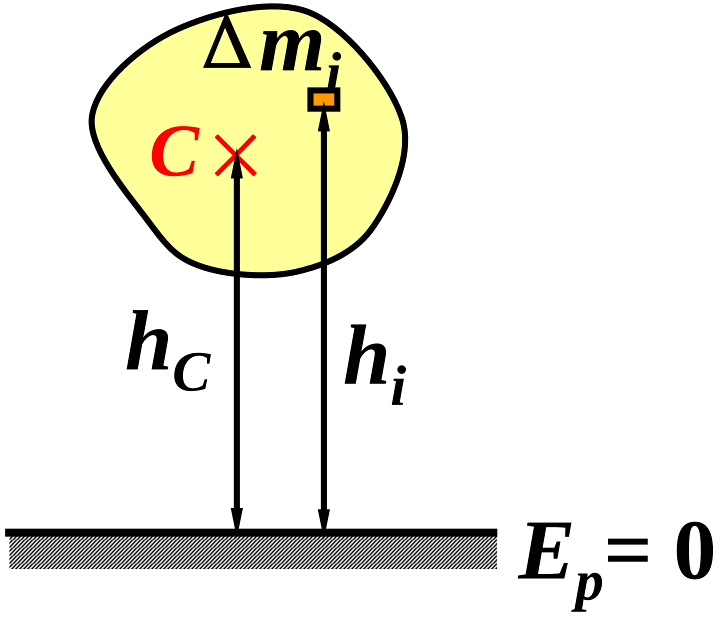
令转动动能： $\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$ （$\omega\uparrow\rightarrow E_k\uparrow\uparrow$）

（飞轮储能）

（可证：$\frac{1}{2}J\omega^2=\sum\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$）

刚体定轴转动动能定理： $\boxed{W=E_{k2}-E_{k1}}$

三. 刚体的重力势能



$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i$$

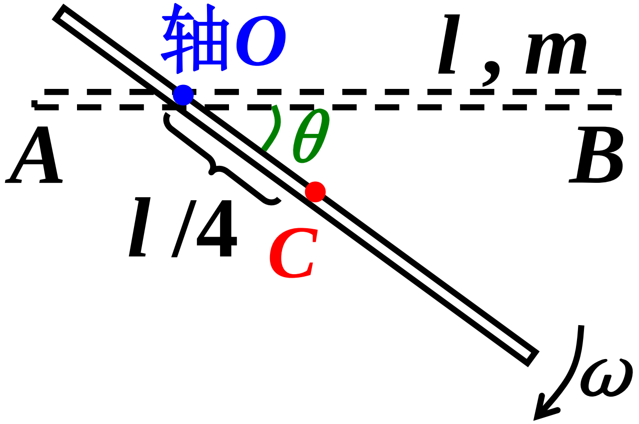
$$= mg \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

$$= mgh_C$$

四. 应用举例

对于包括刚体的系统，功能原理和机械能守恒定律仍成立。

例5.15 已知：如图示均匀直杆质量为m，长为l，初始水平静止。轴光滑，$\overline{AO} = l/4$。



求：杆下摆到θ角时，

角速度 $\omega = ?$

轴对杆作用力 $\vec{N} = ?$

解:（杆+地球）系统，只有重力作功，E守恒。

$$\frac{1}{2}J_O\omega^2 - mg\frac{l}{4}\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$J_O = \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{4})^2 = \frac{7}{48}ml^2 \qquad (2)$$

(1)、(2)解得：$\omega = 2\sqrt{\dfrac{6g\sin\theta}{7l}}$

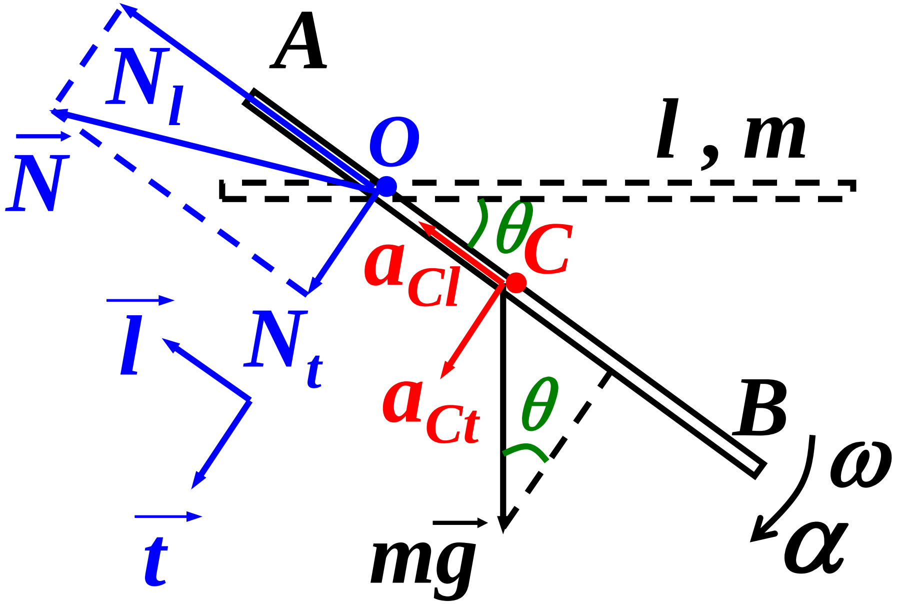
应用质心运动定理求轴力：

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_C$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

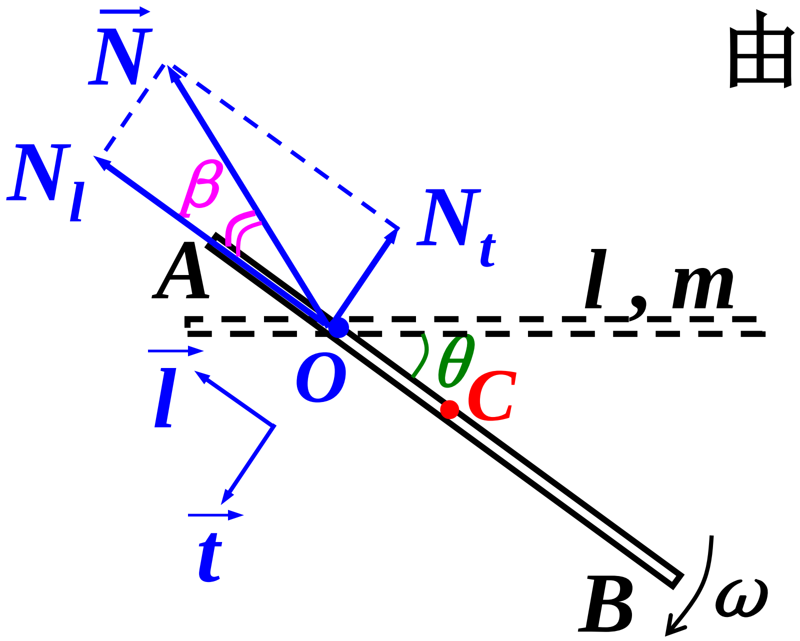


$$\vec{l}\text{：} \quad -mg\sin\theta + N_l = ma_{Cl} \qquad (3)$$

$$\vec{t}\text{：} \quad mg\cos\theta + N_t = ma_{Ct} \qquad (4)$$

$$a_{Cl} = \frac{l}{4}\omega^2 = \frac{6}{7}g\sin\theta \qquad (5)$$

$$a_{Ct} = \frac{l}{4}\alpha = \frac{l}{4} \cdot \frac{\frac{l}{4}mg\cos\theta}{J_O} = \frac{3g\cos\theta}{7} \qquad (6)$$



由(3)、(4)、(5)、(6)解得:

$$N_l = \frac{13}{7} mg \sin\theta,$$

$$N_t = -\frac{4}{7} mg \cos\theta$$

$$\vec{N} = \frac{13}{7} mg \sin\theta \cdot \vec{e}_l - \frac{4}{7} mg \cos\theta \cdot \vec{e}_t$$

$$N = \frac{mg}{7} \cdot \sqrt{153\sin^2\theta + 16}$$

$$\beta = \arctan\frac{|N_t|}{N_l} = \arctan(\frac{4}{13}\operatorname{ctg}\theta)$$

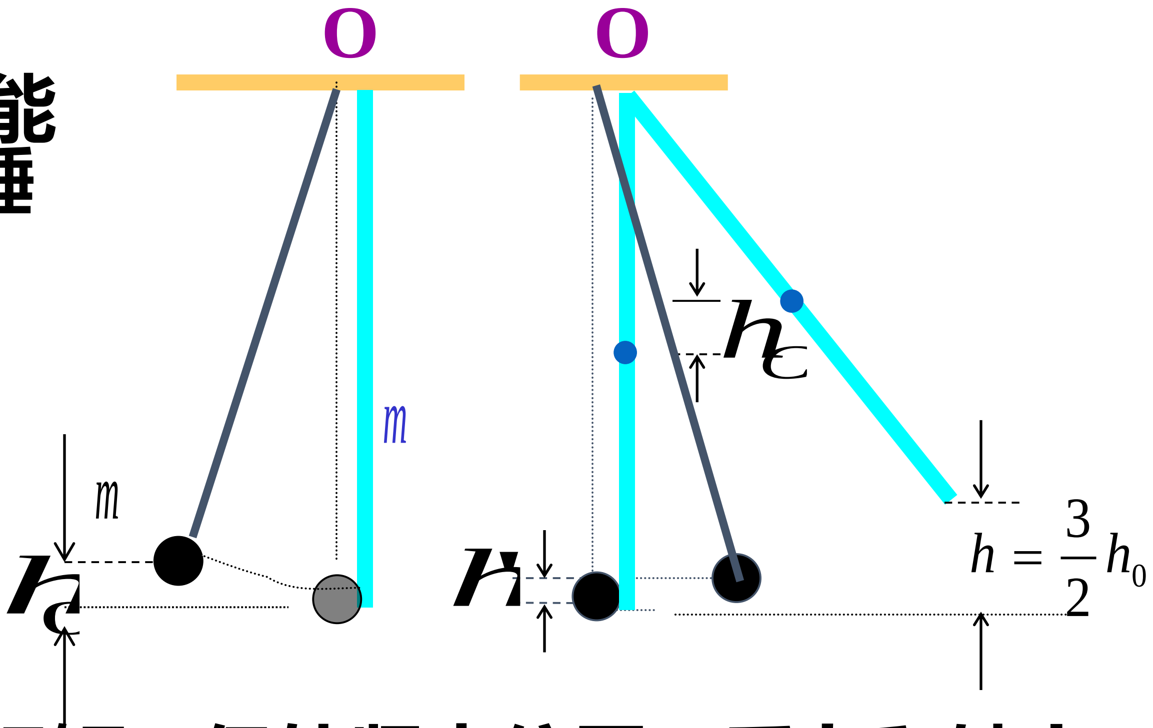
例5.16 如图所示，将单摆和一等长的匀质直杆悬挂在同一点，杆的质量m与单摆的摆锤相等。开始时直杆自然下垂，将单摆的摆锤拉到某一高度，令它从静止状态下摆,于铅垂位置和直杆作弹性碰撞。

求：碰撞后直杆下端达到的高度h。

解: 碰撞前单摆机械能守恒。与杆碰前摆锤的速度为：

$$\because\ mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\therefore\ v_0 = \sqrt{2gh_0}$$



摆锤与杆碰撞时间极短，仍处竖直位置，重力和轴上力对O的力矩为零，系统角动量守恒(动量不守恒）。

设碰后直杆的角速度为ω，摆锤的速度为v'

$$m l v_0 = m l v' + J\omega \quad \text{式中 } J = \frac{1}{3} m l^2$$

杆的转动惯量

弹性碰撞，机械能守恒

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$v_0^2 = v'^2 + \frac{1}{3} l^2 \omega^2$$

$$v_0 = v' + \frac{1}{3} l \omega \Rightarrow v_0^2 = v'^2 + \frac{1}{9} l^2 \omega^2 + \frac{2}{3} v' l \omega$$

二式联立解得：

$$\frac{2}{9} l^2 \omega^2 = \frac{2}{3} v' l \omega$$

$$\therefore v' = \frac{1}{3} l \omega \qquad \therefore v_0 = 2v'$$

$$\omega = \frac{3 v_0}{2l}$$

前面解得碰撞后摆锤、直杆的状态

$$v' = \frac{v_0}{2}, \quad \omega = \frac{3v_0}{2l}$$

碰撞后摆锤、直杆各自独立运动，其过程机械能守恒

$$\because\ mgh' = \frac{1}{2}mv'^2 \qquad \because\ v_0 = \sqrt{2gh_0}$$

碰撞后摆锤达到的高度为 $h' = \dfrac{v'^2}{2g}$ $\qquad \therefore\ h' = \dfrac{h_0}{4}$

而直杆的质心升高的高度满足：$\dfrac{1}{2}J\omega^2 = mgh_C$

由此得**杆下端升高的高度**：$\qquad \therefore\ \dfrac{1}{6}l^2\omega^2 = gh_C$

$$h = 2h_C = \frac{3}{2}h_0 \qquad \therefore\ h_C = \frac{3}{4}h_0$$

5.6 刚体定轴转动的角动量定理
和角动量守恒定律

讨论力矩对时间的积累效应。

质点系：

对点：$\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ ，$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外} \,\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

对轴：$\int_{t_1}^{t_2} M_{外z} \,\mathrm{d}t = L_{2z} - L_{1z}$

刚体：$L_z = J_z \omega$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z} \,\mathrm{d}t = J_z \omega_2 - J_z \omega_1}$$

——刚体定轴转动的角动量定理

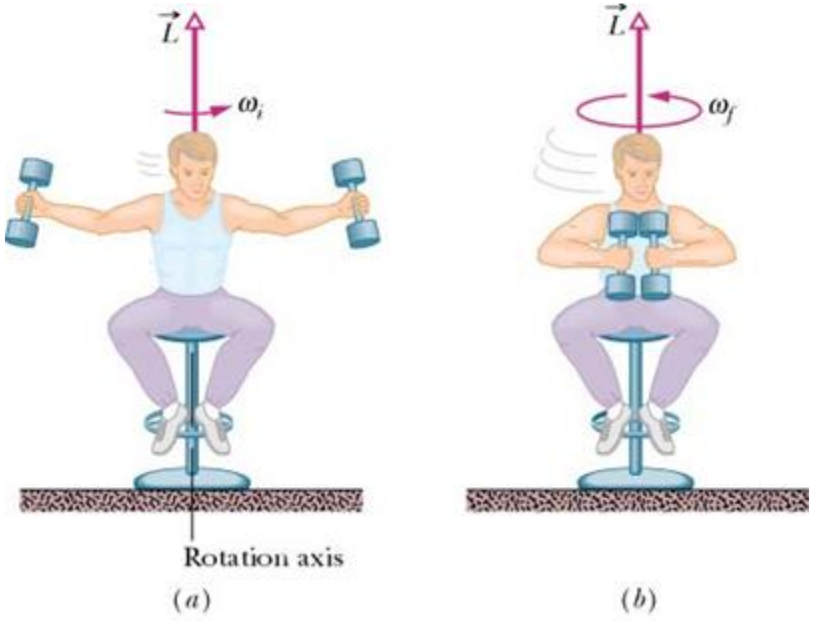
刚体定轴转动的角动量守恒定律：

$$\boxed{M_{外z}=0\text{，则 }J_z\omega=\text{const.}}\quad\begin{cases}\text{大小不变}\\\text{正、负不变}\end{cases}$$

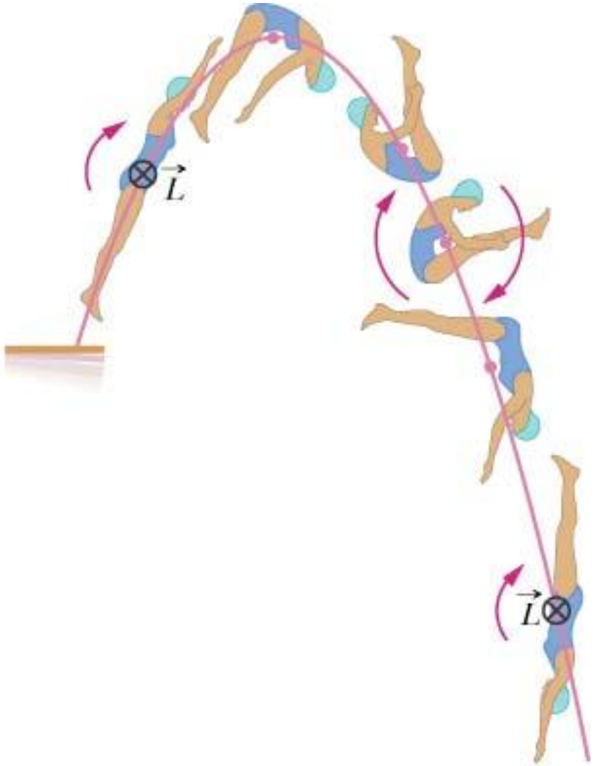
对刚体系， $M_{外z}=0$ 时，$\sum J_{iz}\omega_i=\text{const.}$，

此时角动量可在系统内部各刚体间传递，

而却保持刚体系对转轴的总角动量不变。



转椅演示角动量守恒



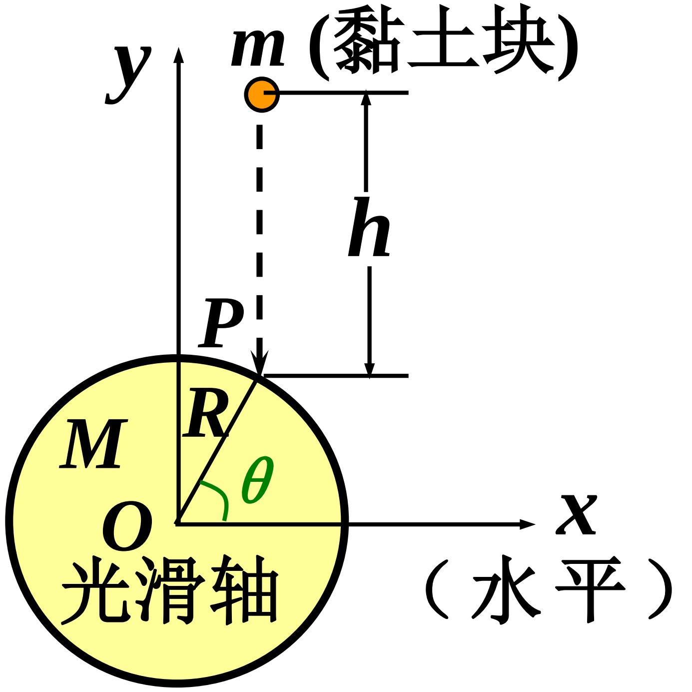
跳水运动员角动量守恒

花样滑冰中角动量守恒

例5.17 如图示，已知：h，R，$M=2m$， $\theta=60°$

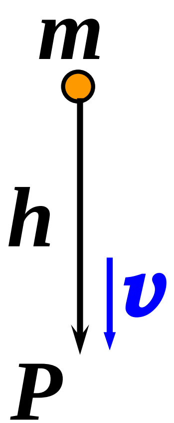
求：碰撞后的瞬刻盘 $\omega_0=?$

P转到 x 轴时盘 $\omega=?, \alpha=?$



均质圆盘

解： m下落：



θ

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

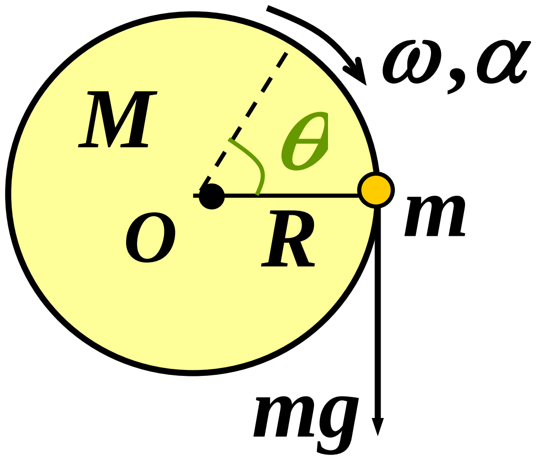
$$v=\sqrt{2gh} \qquad (1)$$

对（m +盘）系统，碰撞中重力对O 轴力矩可忽略，系统角动量守恒：

$$mvR\cos\theta=J\omega_0 \qquad (2)$$

$$J=\frac{1}{2}MR^2+mR^2=2mR^2 \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)得： $$\omega_0=\frac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta \qquad (4)$$



对（$m+M$+地球）系统，

只有重力作功，E守恒。

令P、x 重合时 $E_P=0$，则：

$$mgR\sin\theta+\frac{1}{2}J\omega_0^2=\frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (5)$$

由(3)、(4)、(5)得：

$$\omega=\sqrt{\frac{gh}{2R^2}\cos^2\theta+\frac{g}{R}\sin\theta}\underset{(\theta=60^\circ)}{\uparrow}=\frac{1}{2R}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}(h+4\sqrt{3}R)}$$

$$\alpha=\frac{M}{J}=\frac{mgR}{2mR^2}=\frac{g}{2R}$$