6.6

2. 已知 0.95置信区间为

$$\left[\bar{x}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

∴需 $n \geq \left(\frac{2}{k}\right)^2 \sigma^2 u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$

∵ $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∴ $n \geq \left(\frac{3.92\sigma}{k}\right)^2$

3. (1)

0.95置信区间为

$$\left[\bar{y}-\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \bar{y}+\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right] = [-0.98, 0.98]$$

(2) 0.95置信区间为

$$\left[e^{-0.98+.5}, e^{0.98+.5}\right] = [0.62, 4.39]$$

5. (1) ∵ 0.95置信区间为

$$\left[\bar{x}-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)s}{\sqrt{n}}\right]$$

查表得结果为 $[432.31, 482.70]$

(2) 置信区间为

$$\left[\bar{x}-\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

查表得 $[438.91, 476.09]$

(3) 查表得 σ 的0.95置信区间为 $[24.22, 64.14]$

7. 由中心极限定理

$$u = \frac{\bar{x}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \sim N(0,1)$$

而 $\lambda^2 - \left(2\bar{x}+\frac{1}{n}u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\right)\lambda + \bar{x}^2 \leq 0$

此为二次曲线，与λ轴有两个交点λ_1, λ_2
借由求根公式可证题中结论

9. (1) $\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{x}-\bar{y}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

$$= [0.093, 12.093]$$

(2) $\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信区间为

$$= \left[\bar{x}-\bar{y}-\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}S_w t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2), \bar{x}-\bar{y}+\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}S_w t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right] = [-0.206, 12.206]$$

(3) 两个样本量不大

$\therefore \mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 近似置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-S_0 t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l),\ \bar{x}-\bar{y}+S_0 t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l)\right]=[-0.328, 2.328]$$

(4) $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 0.95 置信区间为

$$\left[\frac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right]$$

$=[0.336, 4.097]$

12. 根据课上所讲结论

λ 的 0.9 置信区间为 $[36.76, 113.64]$，单侧置信上下限分别为 98.04, 40.82

18. 由于 $T=\frac{x}{y}=\frac{x/\theta_1}{y/\theta_2}\Big/\frac{\theta_1}{\theta_2}$ 分布已知：

$$F(t)=\begin{cases}\frac{n}{m+n}t^m, & 0<t\le 1,\\ 1-\frac{m}{m+n}t^{-n}, & t>1\end{cases}$$

可作为枢轴量

$\therefore$ 可取 $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{x_{(m)}}{y_{(n)}}\left(\frac{m+n}{m}\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}},\ \frac{x_{(m)}}{y_{(n)}}\left(\frac{m+n}{n}\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{m}}\right]$$

19. (1) 令 $y_i=x_i-\theta$

可解 $y_{(1)}$ 的密度函数为 $ne^{-ny}, y>0$

$\therefore x_{(1)}-\theta$ 的分布与 θ 无关，且为 $g(y)=ne^{-ny}, y>0$

(2) 取 c, d 使得

$$P(c\le x_{(1)}-\theta\le d)=\int_c^d ne^{-ny}dy=1-\alpha$$

应取 $c=0$，

$\therefore d=\frac{-\ln\alpha}{n}$

$\therefore \left[x_{(1)}+\frac{\ln\alpha}{n},\ x_{(1)}\right]$

7.1 (1)

第一类

$\alpha = P(\bar{x} \geq 2.6 | H_0) = 0.0037$

而

$\beta = P(\bar{x} < 2.6 | H_1) = 0.0367$

(2) 若使 $\beta \leq 0.01$

则 $P\left(\frac{\bar{x}-3}{1/\sqrt{n}}, \frac{-0.4}{1/\sqrt{n}}\right) \leq 0.01$

$\therefore n \geq 33.9$

$\therefore n$ 最小取 34

(3) $n \to \infty$ 时 $\alpha \to 0$

$\beta \to 0$

2. $\alpha = P(\bar{x} \geq 0.5 | H_0) = 0.0328$

$\beta = P(\bar{x} < 0.5 | H_1) = 0.6331$