17. 磁场和它的源

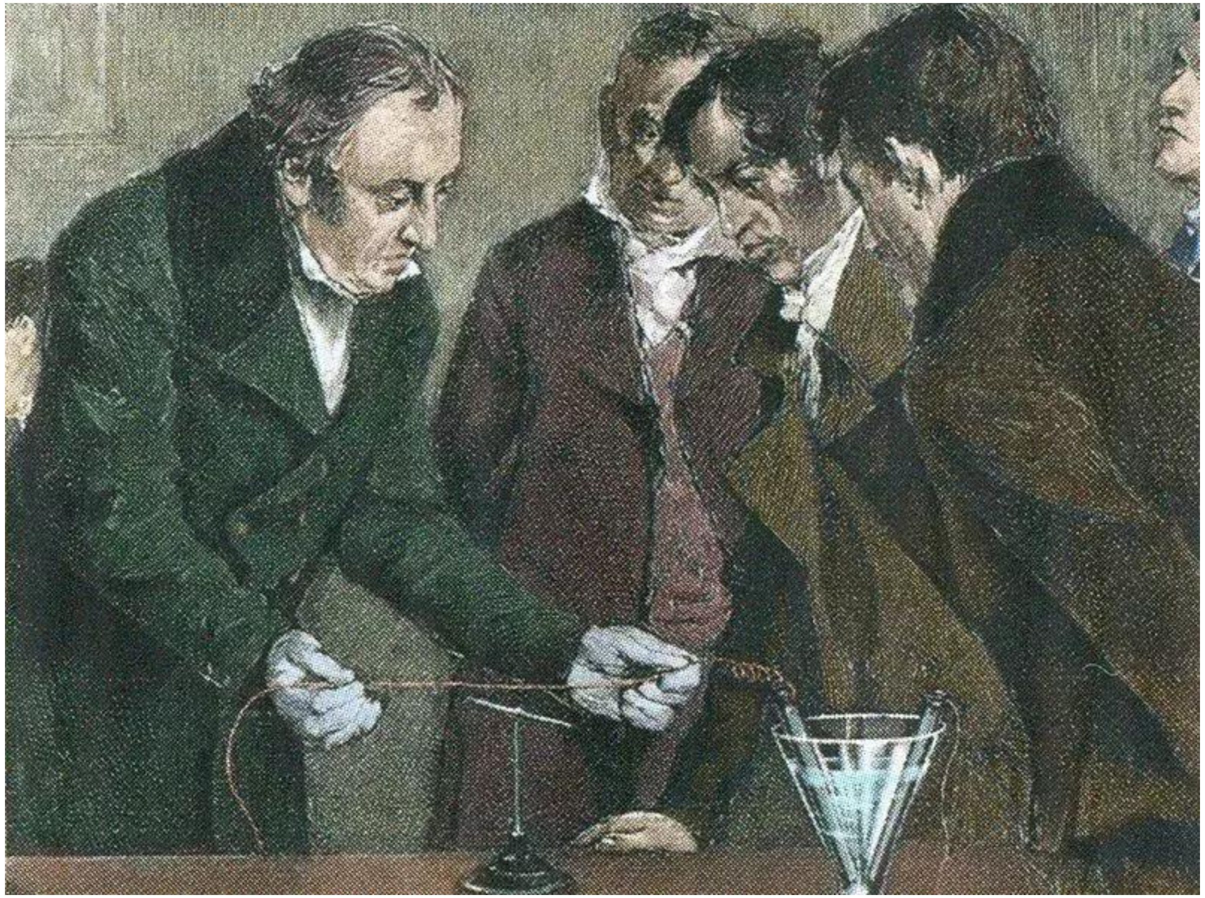
17.1 磁力与电荷的运动

由于存在天然磁石，人们很早就观察到了磁现象，在我国春秋时期的一些著作中已有关于磁石的描述。东汉王充在《论衡》一书中描述了世界上最早的指南器 —— 司南勺。北宋沈括在《梦溪笔谈》中明确地记载了指南针。

英文中“磁性”（magnetism）一词来源于盛产磁石的小亚西亚的Magnesia州的州名。我国河北省的磁县古称磁州，因盛产磁石而得名。

早期对磁现象的研究主要是用天然磁铁进行的。

19世纪初有关电流磁效应的一系列重要发现，揭示出磁现象与电现象的联系，使人们认识到磁现象起源于电流或电荷的运动。



奥斯特

Hans Christian Oersted

1777～1851

丹麦物理学家

17.2 磁场与磁感应强度

运动电荷 ⇄ 磁场 ⇄ 运动电荷

恒定电流周围 ➡ 恒定磁场（静磁场）

磁场的描述
- 定量：磁感应强度 $\vec{B}$
- 定性：磁感线（磁通量）

计算B的两种方法
- 毕奥-萨伐尔定律
- 安培环路定理

1.磁场的特征：

（1）在磁场中的运动电荷、载流导体、磁性介质等受磁场力作用。

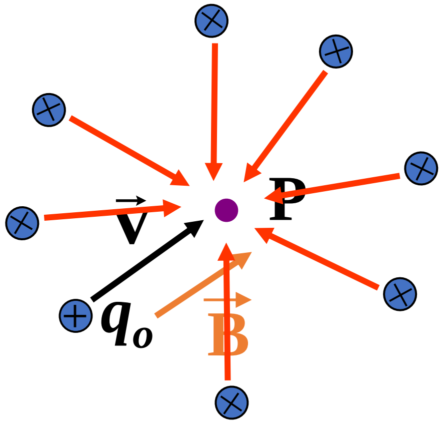
（2）运动电荷、载流导体在磁场中运动时，磁力作功。—— 磁场具有能量

2. 磁感应强度 $\vec{B}$ 的定义

$\vec{B}$ ——描述磁场强弱及方向的物理量。

用运动电荷q_o来检验：

设电荷q_o以速度 $\vec{v}$ 进入磁场$\vec{B}$中的P点。



(1) 对 $\vec{v}$ 的某一特定方向上，q_o受力F=0，

定义该方向为该点处$\vec{B}$ 的方向。

(2) 改变 $\vec{v}$ 的方向通过P点，总是有 $\vec{F}\perp\vec{v}$，并且有 $\vec{F}\perp\vec{B}$，

$\therefore$ F是侧向力。且F/(qvsinα)为恒量，α为v与B的夹角。

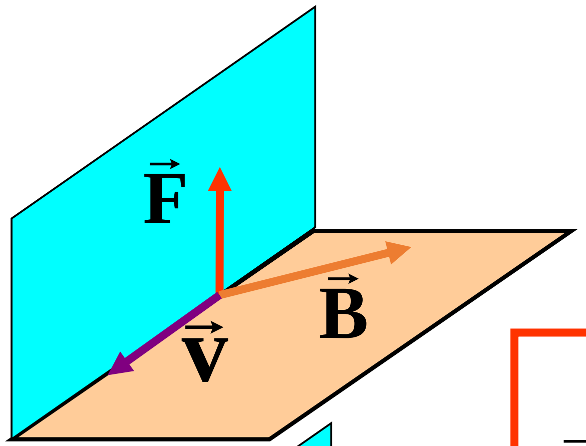
(3)使q_o沿 $\vec{v}\perp\vec{B}$ 的方向运动时，$F=F_{Max}$

定义：$$B=\frac{F_{Max}}{q_o v}$$

或：$\vec{F}=q_o\vec{v}\times\vec{B}$　即: $F=q_o vB\,\mathrm{Sin}\,\theta$

$\boxed{\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B}}$ 即: $F=q_o vB\ \mathrm{Sin}\theta$

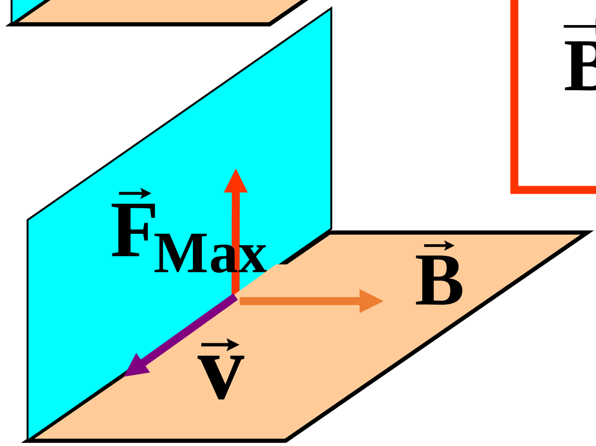
$\vec{F}$、$\vec{v}$、$\vec{B}$ 三者之间的关系如下:



1) $\vec{F} \perp (\vec{v}、\vec{B})$ 决定的平面

2) $\vec{v} \perp \vec{B}$ 时，$F=F_{Max}$

3) $\vec{v} \parallel \vec{B}$ 或 $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{B}$ 及 $v=0$时，$F=0$



$\vec{B}\begin{cases} 大小\ B = \dfrac{F_{Max}}{q_o v} \\ 方向\ \vec{F}_{Max} \times \vec{v} \end{cases}$ 显然比 $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_o}$ 复杂

B如何计算？

单位:

SI制 T (特斯拉)

高斯制 G（高斯）

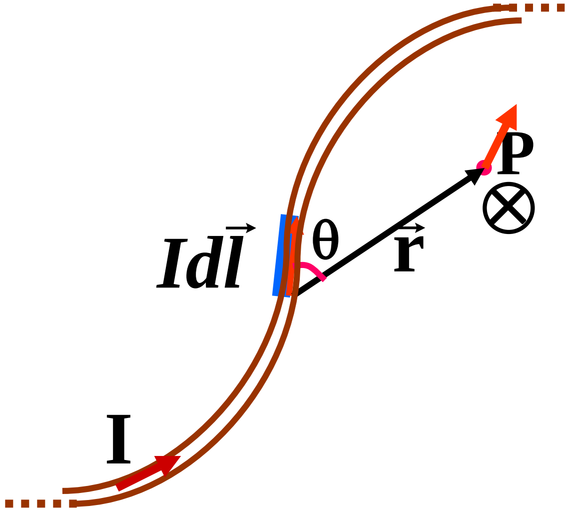
1T= 10^4G

17.3 毕奥—萨伐尔定律

——电流激发磁场的规律

一、 毕奥—萨伐尔定律

实验表明：任一电流激发的磁场= 各小段电流产生的磁场的叠加



电流元$Id\vec{l}$在P点产生的磁场：

(1) $dB \propto Idl \quad \frac{1}{r^2} \quad \sin\theta$

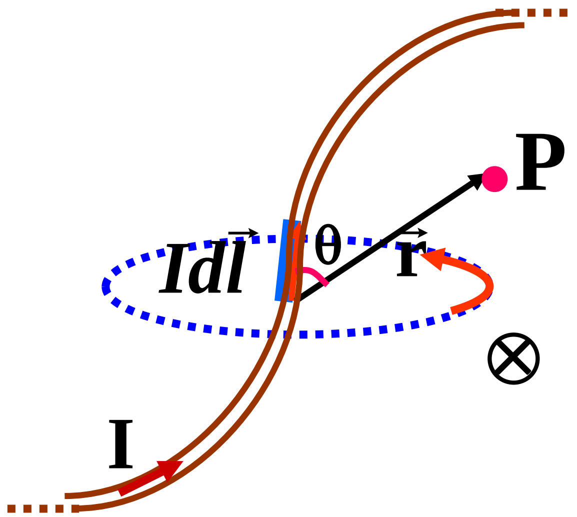
即： $dB = K\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$

K—比例系数

SI制中：$K = \frac{\mu_o}{4\pi}$ $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}Tm/A$

真空中的磁导率

(2) $d\vec{B}$ 的方向垂直 $d\vec{l}$ 、$\vec{r}$ 所决定的平面

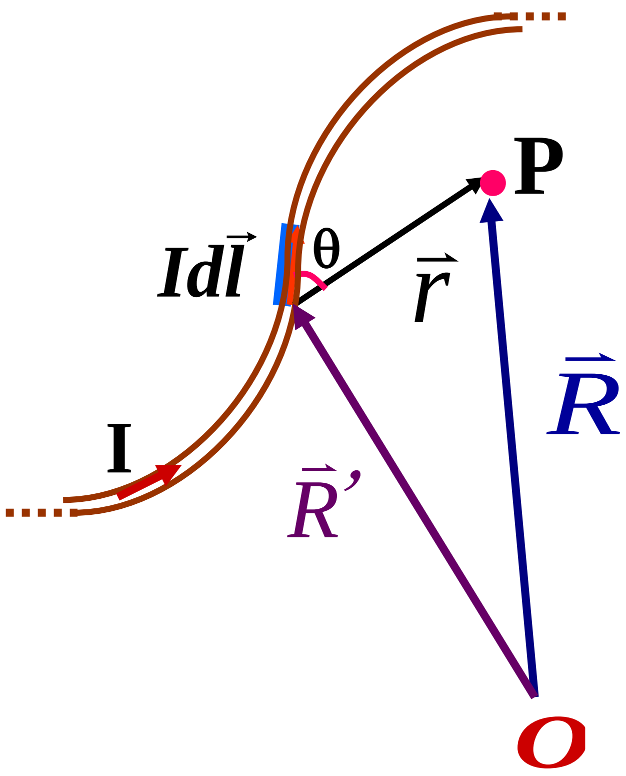


即：$d\vec{l}\times\vec{r}$ 的方向。

$$\boxed{d\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

毕奥 — 萨伐尔定律

$d\vec{B}$ $\begin{cases} \text{大小为：} dB=\dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\theta}{r^2} \\ \text{方向为：} Id\vec{l}\times\vec{r} \quad \text{右手螺旋方向。} \end{cases}$



$$Id\vec{l} = \vec{J}dSdl = \vec{J}dV'$$

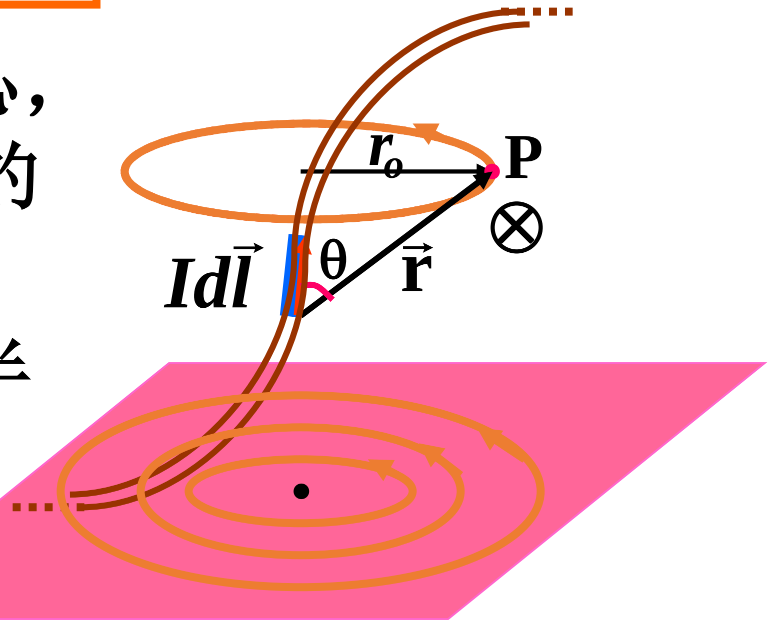
$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\vec{J}\left(\vec{R}'\right) \times \vec{r}}{r^3} dV'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}\left(\vec{R}'\right) \times \vec{r}}{r^3} dV'$$

讨论

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}\qquad dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$



1) $Id\vec{l}$产生的磁场，在以其为轴心，$r_o=r\sin\theta$为半径的圆周上dB 的大小相等，方向沿切线。

2) 若 r 或 θ不同，则在不同r_o为半径的圆周上dB大小不等。

在垂直 $Id\vec{l}$ 的平面上，磁感线是一系列的同心圆

3) 当$\theta=0$、π 时，$dB=0$，即沿电流方向上的磁场为0

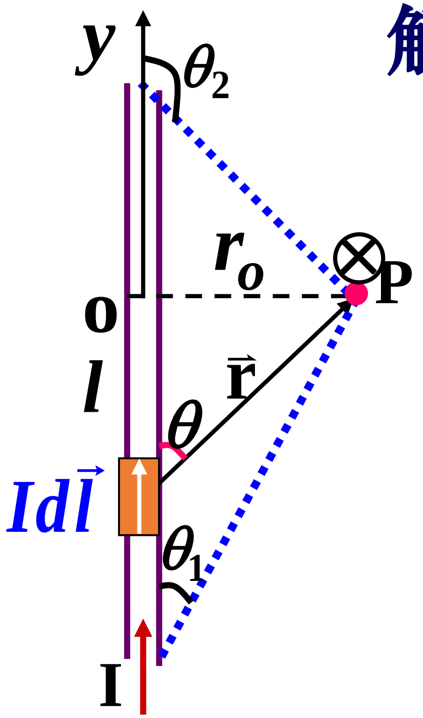
$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $dB=dB_{MaX}$ 即r一定，在垂直$Id\vec{l}$ 的方向上各点的dB最大。

4) 所有电流元 $Id\vec{l}$ ，对P点磁感应强度B的贡献为：

$$\vec{B}=\int d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

例17.1 载流长直导线，其电流强度为I，试计算导线旁任意一点P的磁感应强度 $\vec{B}=?$

$d\vec{B}$方向为$Id\vec{l}\times\vec{r}$



解：根据毕奥 — 萨伐尔定律

取任意电流元 $Id\vec{l}$

其在P点产生的磁场为：

$$dB=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

各电流元产生的 $d\vec{B}$方向垂直纸面向里。

$$\therefore B=\int dB$$

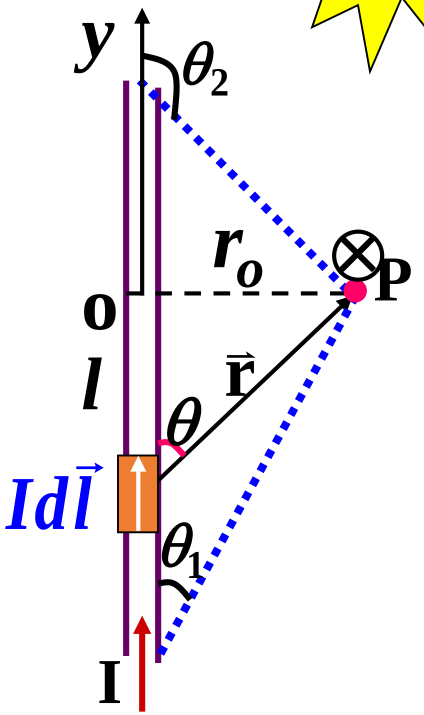
$$=\frac{\mu_o}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

$$=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

$$\begin{cases} l=-r_o ctg\theta \\ dl=\dfrac{r_o}{\sin^2\theta}d\theta \\ r=r_o/\sin\theta \end{cases}$$

讨论

$$B=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$



若导线无限长：

则：$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$

$$B=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}(\cos 0-\cos\pi)=\frac{\mu_o I}{2\pi r_o}$$

不一定要 $L\rightarrow\infty$ ，

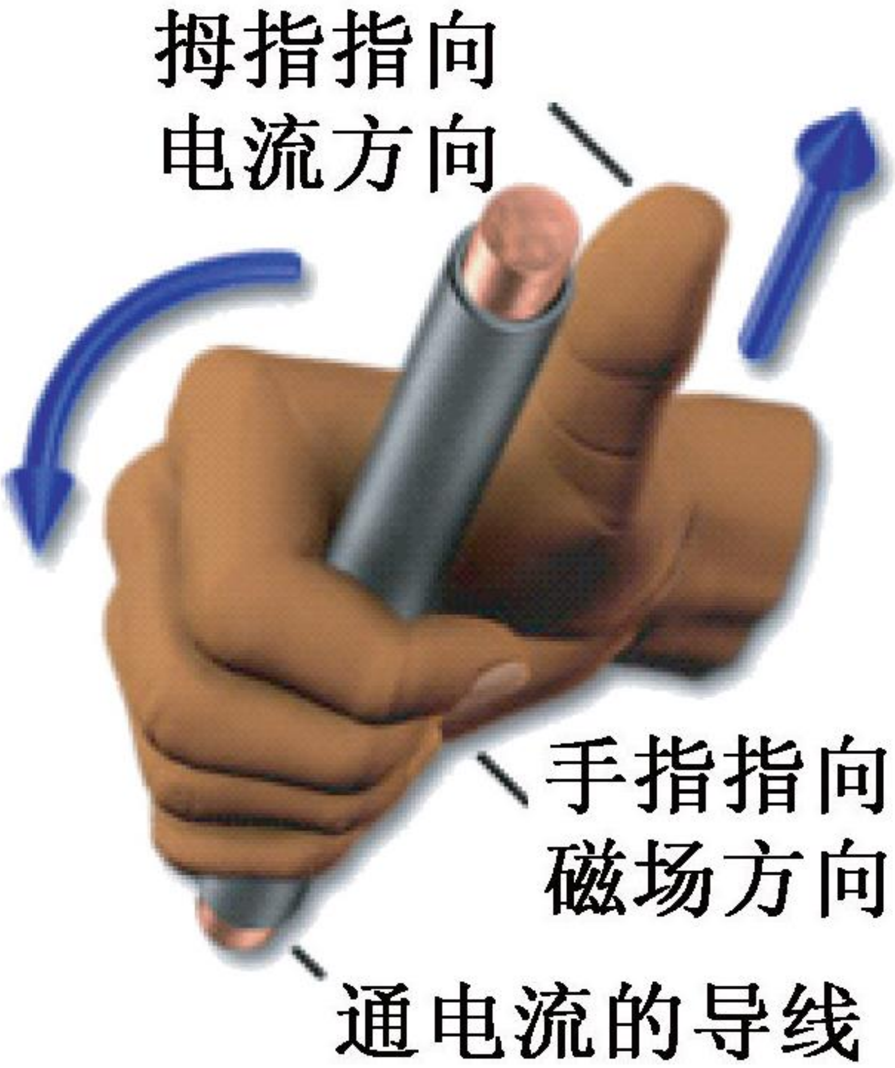
只要 $r_o << L$ 。

结论：

(1) 载流长直导线周围B与r_o成反比。类比 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$

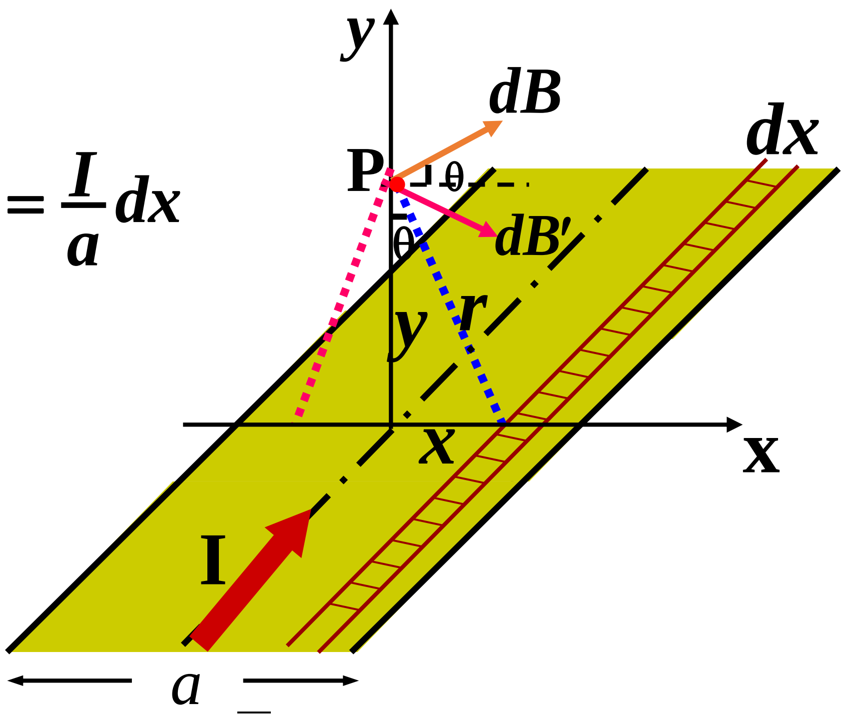
(2)磁力线是沿着垂直导线平面内的同心圆，其方向与电流方向成右手螺旋关系。

右手定则



例17.2 一条宽为a的无限长扁平铜片，厚度忽略，电流为I，求离铜片中心线正上方y处P点的 $\vec{B}=?$

解： 把铜片划分成无限个宽为dx的细长条，每条有电流：$dI=\dfrac{I}{a}dx$



该电流在P点产生的磁场为：

$$dB=\frac{\mu_o}{2\pi r}dI=\frac{\mu_o I}{2\pi ay/\cos\theta}dx$$

由对称性知： $\sum dB_y=0$

$$dB_x=dB\cos\theta=\frac{\mu_o I\cos^2\theta}{2\pi ay}dx$$

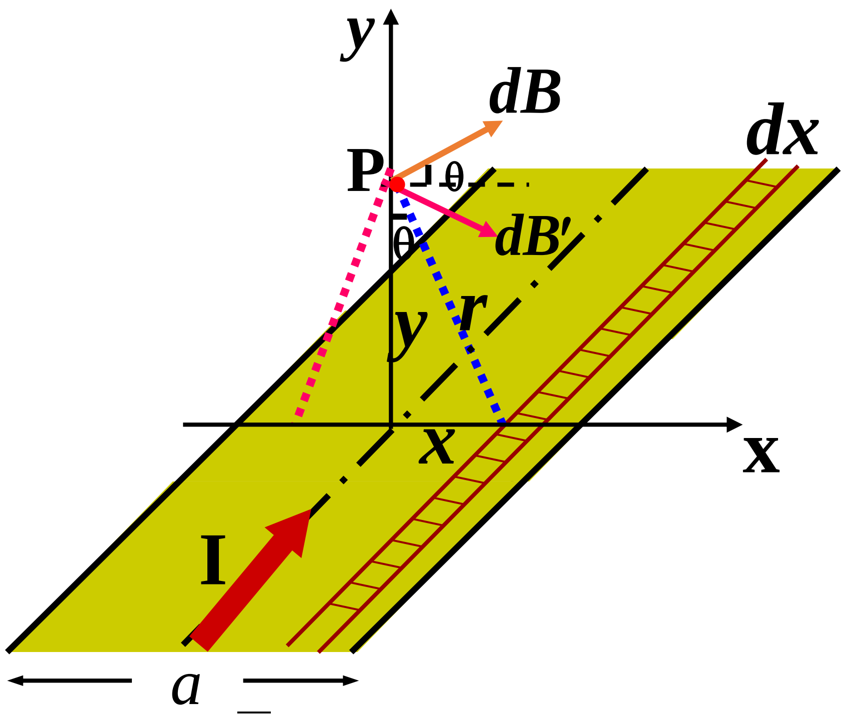
其中： $x=y\tan\theta$ $\qquad dx=y\sec^2\theta d\theta$

$$B=\int dB_x \quad =\int \frac{\mu_o I\cos^2\theta}{2\pi ay} y\sec^2\theta d\theta$$

$$=\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mu_o I}{2\pi a} d\theta \quad = \frac{\mu_o I}{\pi a}\theta_0$$

$$=\frac{\mu_o I}{\pi a}\arctan\frac{a}{2y}$$

方向平行X轴

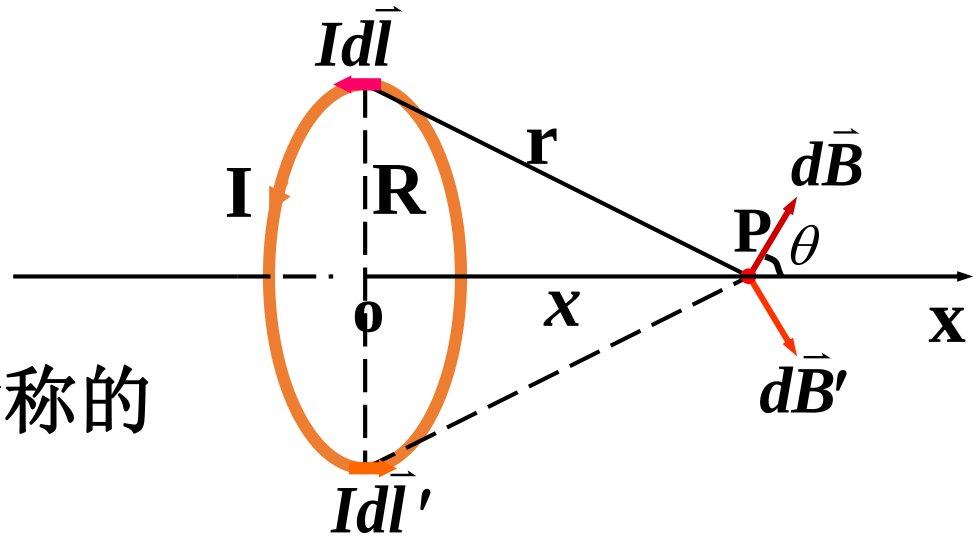


当$y >> a$ 时 $\quad B=\dfrac{\mu_o I}{2\pi y}$

当$y << a$ 时 $\quad B = \dfrac{\mu_o I}{2a} = \dfrac{\mu_o j}{2}$

无限大载流平面

例17.3 求载流圆线圈轴线上的磁场$\vec{B}$，已知其半径为R，通电电流为I。



解：先讨论$\vec{B}$的方向

$$\boxed{d\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

$d\vec{B}$与$d\vec{B}'$是对X轴对称的

$$\sum dB_{\perp x}=0$$

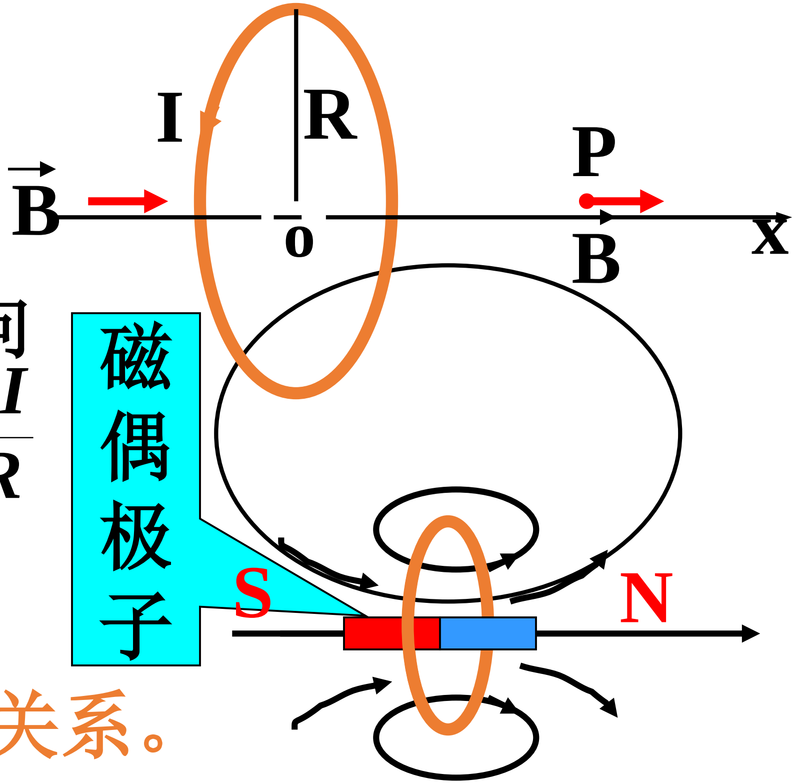
$$\therefore B=\int dB_x=\int dB\cos\theta$$

又$\because d\vec{l}\perp\vec{r}$ $\quad \left|Id\vec{l}\times\vec{r}\right|=Idl\cdot r \qquad \cos\theta=\frac{R}{r}$

$$\therefore B=\frac{\mu_o}{4\pi}\int\frac{I\cos\theta dl}{r^2}=\int_0^{2\pi R}\frac{\mu_o IR}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}dl$$

$$B=\frac{\mu_o IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$ 方向沿 x 轴正向！

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}}$$



讨论

1) 无论 $x>0$ 或 $x<0$，$\vec{B}$与X轴同向

2）当 $x=0$时，圆心处：$B=\dfrac{\mu_o I}{2R}$

3）轴线以外的磁场较复杂，

可定性给出磁感线，

电流与B线仍服从右手螺旋关系。

定义：磁偶极矩　$\vec{m}=IS\vec{n}$

n与I的方向
成右手关系

若有N匝线圈，总磁矩为：

$$\vec{M}=NIS\vec{n}=N\vec{m}$$

4) $x \gg R$时：

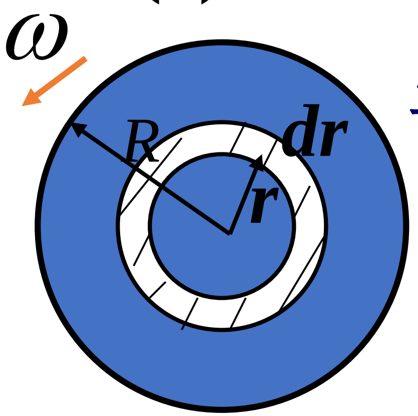
$$B=\frac{\mu_o I R^2}{2x^3}=\frac{\mu_o I S}{2\pi x^3}$$

即：$\vec{B}=\dfrac{\mu_o \vec{m}}{2\pi x^3}$

比较：$\vec{E}=\dfrac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_o x^3}$ (延长线上)

例17.4 一个塑性圆盘，半径为R，圆盘表面均匀分布电荷q，如果使该盘以角速度ω绕其轴旋转，试证：

(1)盘心处 $B=\dfrac{\mu_o \omega q}{2\pi R}$ (2)圆盘的磁偶极矩 $m=\dfrac{\omega qR^2}{4}$



$$\boxed{B=\frac{\mu_o I}{2R}}$$

证： (1)将盘看成一系列的宽为dr的圆环构成

每一环在中心产生的磁场：$dB=\dfrac{\mu_o dI}{2r}$

$$dI=\frac{dQ}{dt}=dq\frac{\omega}{2\pi}=\sigma ds\frac{\omega}{2\pi}=\sigma\omega r dr$$

$$B=\int dB=\int_0^R\frac{\mu_o\sigma\omega r dr}{2r}=\frac{1}{2}\mu_o\sigma\omega R=\frac{\mu_o\omega q}{2\pi R}$$

$$\therefore \vec{B}=\frac{\mu_o q}{2\pi R}\vec{\omega}$$

$$\sigma=\frac{q}{\pi R^2}$$

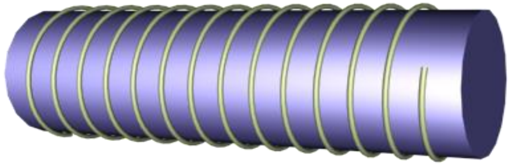
(2) $m=\int dm=\int SdI=\int_0^R\pi r^2\sigma\omega r dr=\dfrac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4$

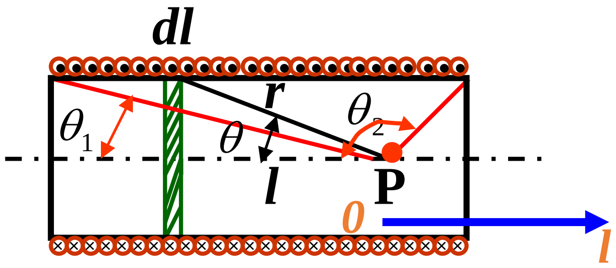
$$\therefore m=\frac{qR^2}{4}\vec{\omega}$$

例17.5 一长螺线管轴线上的磁场 $\vec{B}=?$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}}$$

已知：导线通有电流*I*，单位长度上匝数为*n*。





解： 在管上取一小段*dl*，

电流为*dI=nIdl*，

该电流在P点的磁场为：

$$dB=\frac{\mu_0 R^2 nIdl}{2\left(l^2+R^2\right)^{3/2}} \qquad r^2=l^2+R^2 \qquad r=\frac{R}{\sin\theta}$$

$$l=-Rctg\theta \rightarrow dl=\frac{Rd\theta}{\sin^2\theta}$$

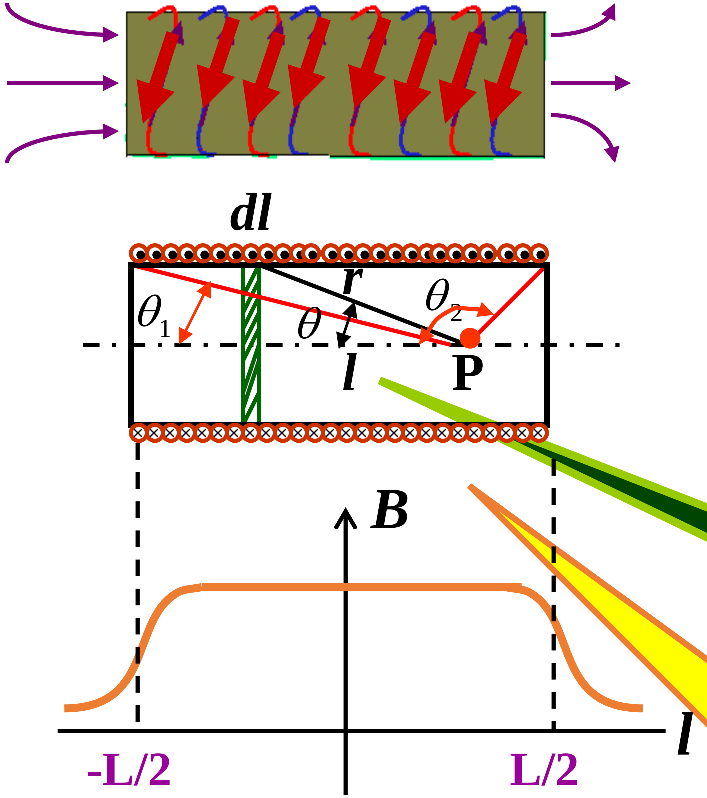
则：$dB=\dfrac{\mu_0 nI}{2}\sin\theta d\theta$

$$B=\int dB=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0 nI}{2}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

$$B=\frac{\mu_o nI}{2}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

讨论： P点不同，B不同。



1) 若管长L>>R，管内有很大一部分场是均匀的。

2) $L\to\infty$，$\theta_1=0$ $\theta_2=\pi$，$B=\mu_o nI$

3) 对半无限长螺线管 $B=\frac{1}{2}\mu_o nI$

2)、3)在整个管内空间成立！

管内为均匀场

管外空间B≈0

$\Rightarrow$ 例17.10

例17.6 证明:镜面对称的载流系统在镜面处产生的磁感应强度必与该面垂直。

证:

在两线圈上对称位置取两电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$(记作电流元 1)和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_s$(记作电流元 2),在中间平面 α(简称面 α)上任取一点 P,则该点相对这对电流元的位矢分别记作 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_s$,将电流元 2 和电流元 1 连接起来,则连线与面 α 相交于 O 点,引入两个辅助矢量 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{r}_M$:$\boldsymbol{d}$ 的模等于这对电流元之间的距离,$\boldsymbol{r}_M$ 是 P 点相对于 O 点的位置矢量,具体参见图 1. 由毕奥-萨伐尔定律可得该两电流元在中间平面某点 P 点所产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_s\times\boldsymbol{r}_s}{r_s^3}\qquad(1)$$

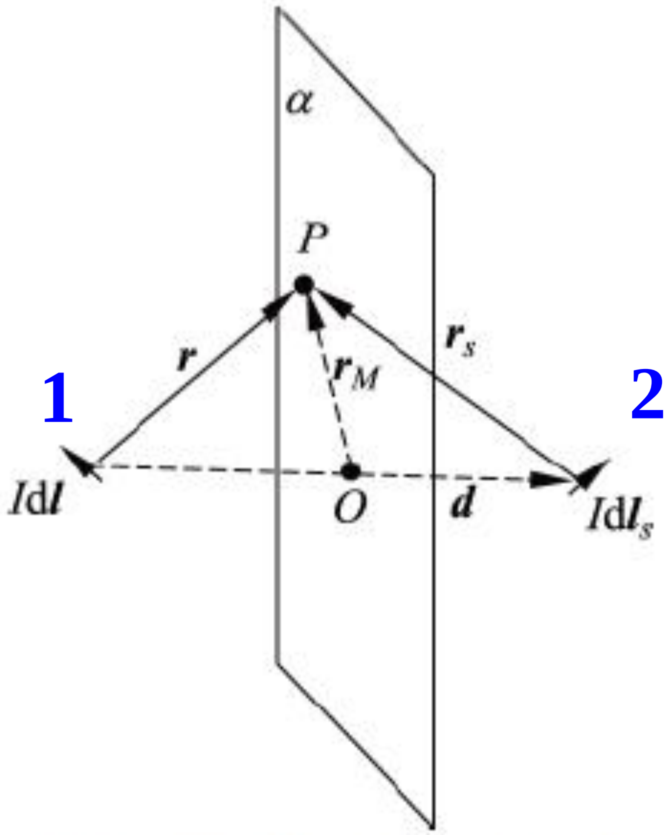


图 1　对称电流元的辅助矢量分析示意图

将矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_s$,$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_s$ 分别作平行于和垂直于面 α 两个方向分解,并利用两电流元的对称性可得:$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{/\!/}+\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\perp}$,$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_s=\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{/\!/}-\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\perp}$,$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_M+\frac{\boldsymbol{d}}{2}$ 和 $\boldsymbol{r}_s=\boldsymbol{r}_M-\frac{\boldsymbol{d}}{2}$,且有 $|\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_s|$,然后把它们代入式(1)可得

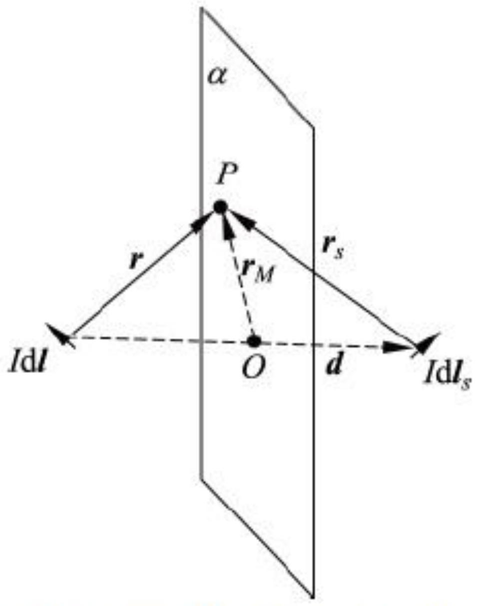


图 1　对称电流元的辅助矢量分析示意图

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{/\!/}+\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\perp})\times\left(\boldsymbol{r}_M+\frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)}{r^3}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{/\!/}-\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\perp})\times\left(\boldsymbol{r}_M-\frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)}{r^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}(2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{/\!/}\times\boldsymbol{r}_M)\qquad(2)$$

其中，$\boldsymbol{r}_M$ 为位矢 $\boldsymbol{r}$ 在平行于面 α 方向上的分量；$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{/\!/}$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在平行于中间平面方向上的分量，因此这两者的矢积必定垂直中间面；而 $\dfrac{\boldsymbol{d}}{2}$ 为位矢 $\boldsymbol{r}$ 在垂直于中间平面方向上的分量，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{\perp}$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在垂直于中间平面方向上的分量，因此这两者之间的夹角为零或 180°，它们的矢积为零. 由式(2)可知：镜像对称电流元在其中间面上所激发的磁场必定平行该面的法线. 则由此容易导出一个结论：关于某一平面（记作面 α）镜像对称的载流导线在面 α 任意位置上所激发的磁场方向一定垂直于该平面.

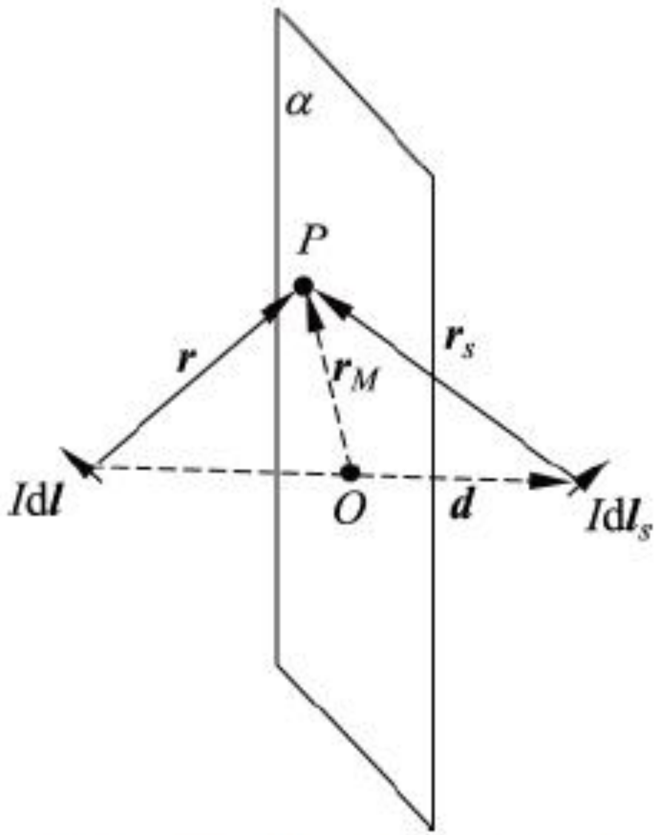
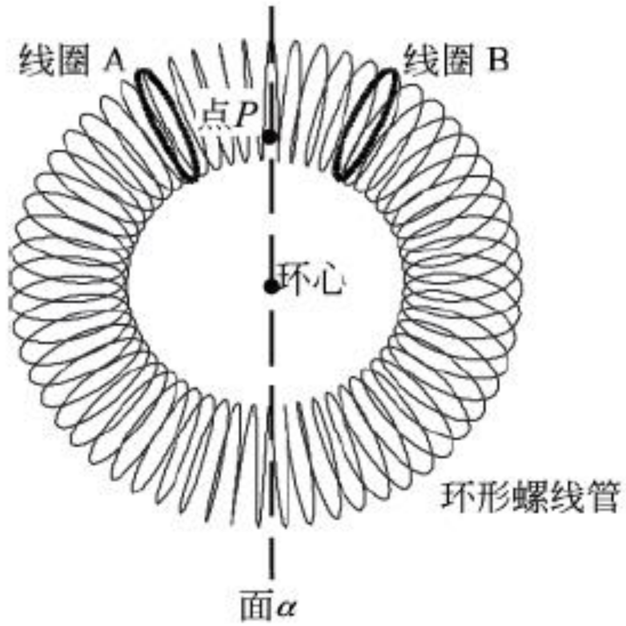
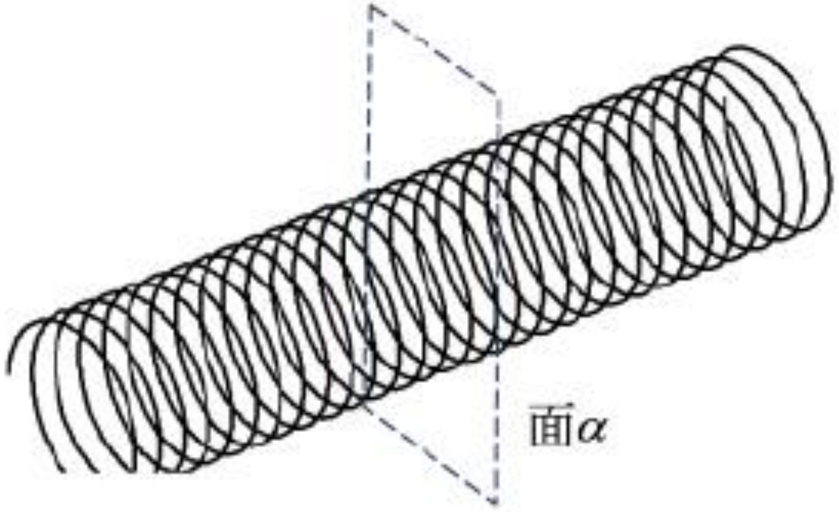
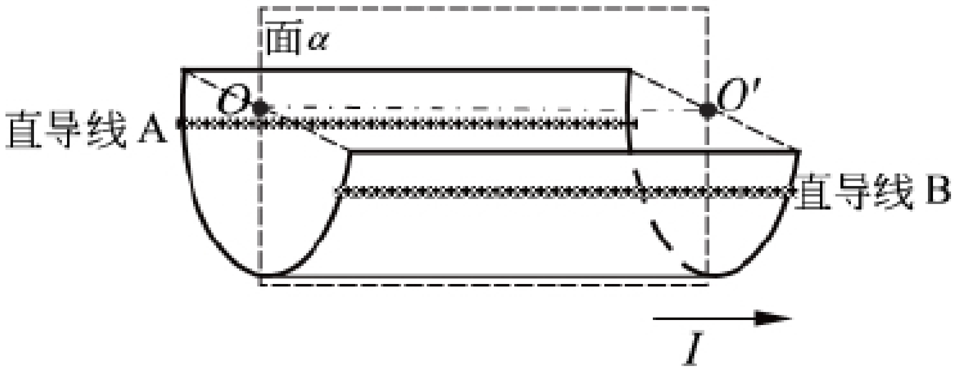
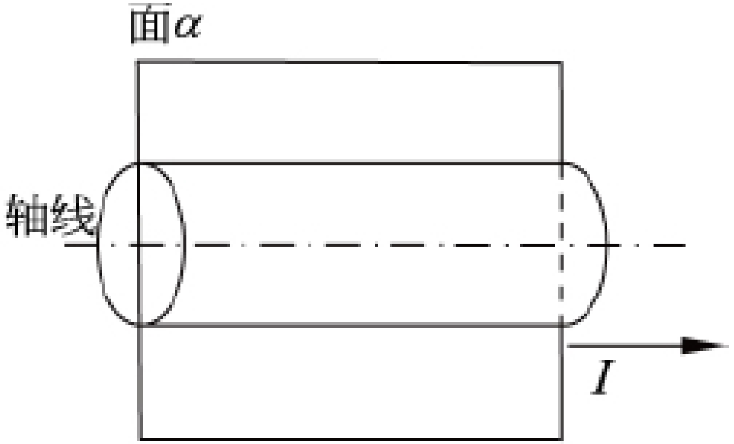


图 1　对称电流元的辅助矢量分析示意图


线圈 A
线圈 B
点P
环心
环形螺线管
面α

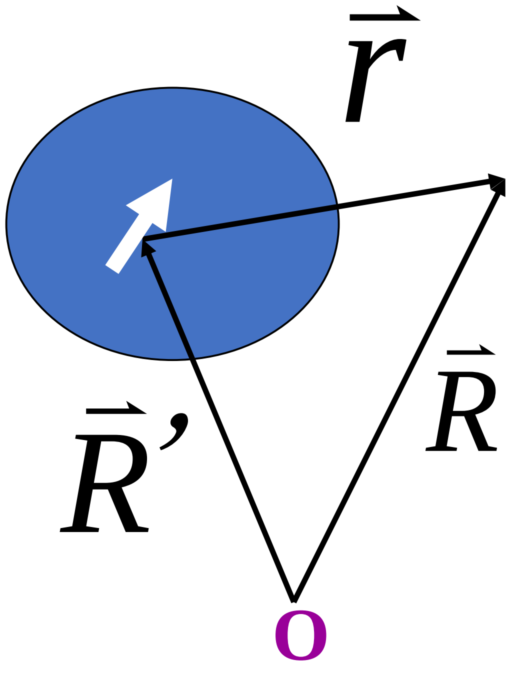

面α


面α
O
O'
直导线 A
直导线 B
I


面α
轴线
I

二、磁场的散度和旋度

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{R}') \times \vec{r}}{r^3} dV'$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

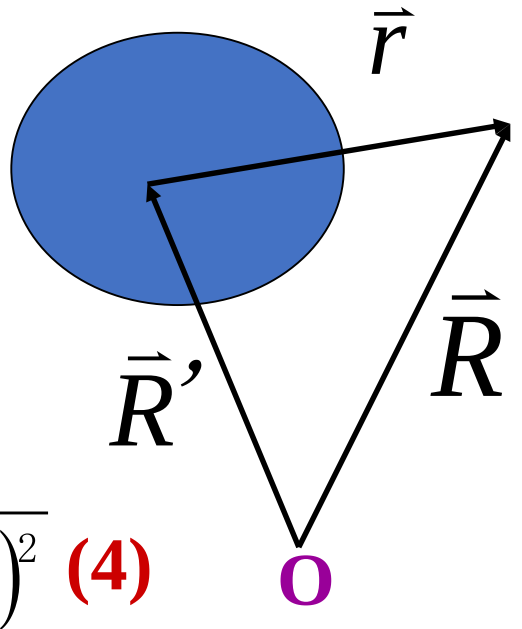
下面给出证明。

1. 数学准备

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1)$$

$$\vec{R}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \qquad (2)$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}' \qquad (3)$$



$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \qquad (4)$$

场点劈形算符 $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ (5)

源点劈形算符 $\nabla' = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y'} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z'}$ (6)

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \textbf{(7)}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \textbf{(8)}$$

$$\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla' \times \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad \textbf{(9)}$$

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\vec{r}) \quad \textbf{(10)}$$

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0 \\ \infty, & \vec{r} = 0 \end{cases} \quad \textbf{(11)}$$

$$\int \delta(\vec{r}) dV = 1 \quad \textbf{(12)}$$

$$\int f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = f(\vec{r}_0) \quad \textbf{(13)}$$

$$\nabla\cdot\left(\varphi\ \vec{f}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\cdot\vec{f}+\varphi\nabla\cdot\vec{f} \qquad (14)$$

$$\nabla\times\left(\varphi\ \vec{f}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\times\vec{f}+\varphi\nabla\times\vec{f} \qquad (15)$$

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0 \qquad (16)$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A} \qquad (17)$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{F}\right)=\left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot\vec{F}-\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\vec{E} \qquad (18)$$

$$\nabla\times\left(\vec{E}\times\vec{F}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)\vec{E}-\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{F}+\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{E}-\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{F} \qquad (19)$$

$$\nabla\left(\vec{E}\cdot\vec{F}\right)=\left(F\cdot\nabla\right)\vec{E}+\left(E\cdot\nabla\right)\vec{F}+\vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)+\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right) \qquad (20)$$

2. 磁场的散度

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{R}') \times \vec{r}}{r^3} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{R}') \times \nabla \frac{1}{r} dV'$$

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{R}') = \nabla \times \vec{J}(\vec{R}') = 0$$

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{r}\right] = \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \times \vec{J}(\vec{R}') + \frac{1}{r}\nabla \times \vec{J}(\vec{R}') = \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \times \vec{J}(\vec{R}')$$

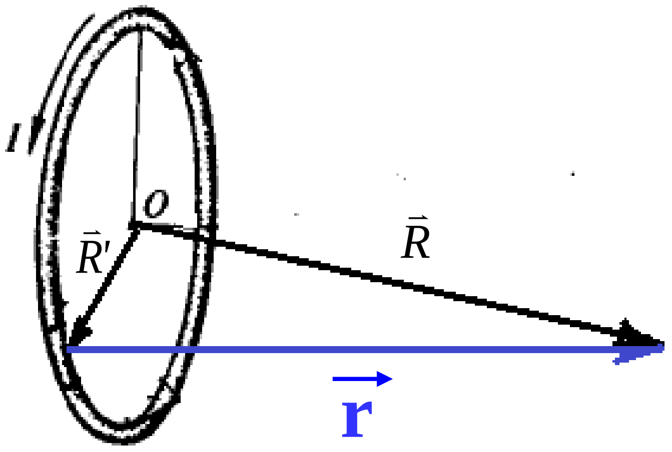
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{r}\right] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{\vec{J}(\vec{R}')}{r} dV' = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{R}')}{r} dV'$$ 稳恒电流所产生磁场的矢势

由于矢量旋度的散度恒为零，$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0$，故 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

例17.7 证明：圆电流环在远场点的矢势

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{R}'\right)}{r}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$



证:

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{R}'\right)}{r}dV'=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{d\vec{R}'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$$

(R' << R) $$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{1}{R}\left(1+\frac{\vec{R}\cdot\vec{R}'}{R^2}+\cdots\right)d\vec{R}'$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\oint d\vec{R}'+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^3}\oint\left(\vec{R}\cdot\vec{R}'\right)d\vec{R}'$$

由 $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}$

得 $\left(\vec{R}'\times d\vec{R}'\right)\times\vec{R}=-\vec{R}'\left(\vec{R}\cdot d\vec{R}'\right)+d\vec{R}'\left(\vec{R}\cdot\vec{R}'\right)$

$$d\left[\vec{R}'\left(\vec{R}\cdot\vec{R}'\right)\right]=\vec{R}'\left(\vec{R}\cdot d\vec{R}'\right)+d\vec{R}'\left(\vec{R}\cdot\vec{R}'\right)$$

两式相加，得

$$d\vec{R}'\left(\vec{R}\cdot\vec{R}'\right)=\frac{\left(\vec{R}'\times d\vec{R}'\right)\times\vec{R}+d\left[\vec{R}'\left(\vec{R}\cdot\vec{R}'\right)\right]}{2}$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^3}\oint\left(\vec{R}\cdot\vec{R}'\right)d\vec{R}'=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^3}\oint\frac{1}{2}\left[\left(\vec{R}'\times d\vec{R}'\right)\times\vec{R}\right]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$

证毕。

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} \right)$$

由(19)、(20)式，并结合(9)、(10)式，得

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} \right) = -\nabla \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{R^3} \right) = -\frac{1}{R^3} \nabla\left(\vec{m} \cdot \vec{R}\right) - \left(\vec{m} \cdot \vec{R}\right) \nabla \left(\frac{1}{R^3} \right)$$

$$= -\frac{\vec{m}}{R^3} + \frac{3\left(\vec{m} \cdot \vec{R}\right)\vec{R}}{R^5}$$

书p. 115 $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3\left(\vec{m} \cdot \hat{r}\right)\hat{r} - m \right]$$

对比： $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left[3\left(\vec{p} \cdot \hat{r}\right)\hat{r} - \vec{p} \right]$$

3. 磁场的旋度

由(17) 式，

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}\left(\vec{R}'\right)}{r} dV'$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}\left(\vec{R}'\right)}{r}\right] dV'$$

$$\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{r}\right]=\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{J}(\vec{R}')+\frac{1}{r}\nabla\cdot\vec{J}(\vec{R}')=\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{J}(\vec{R}')$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{r}\right]dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{R}')\cdot\nabla\frac{1}{r}dV'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{R}')\cdot\nabla'\frac{1}{r}dV'$$

稳恒电流条件 $\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{R}')=0$

$$\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{r}\right]=\left(\nabla'\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{J}(\vec{R}')+\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{R}')=\left(\nabla'\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{J}(\vec{r}')$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{r}\right]dV'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{R}')\cdot d\vec{S}'}{r}=0$$

再来看 $\nabla^2\vec{A}$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{r}dV'$$

$$\nabla^2\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{R}')\nabla^2\frac{1}{r}dV'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{R}')\left(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right)dV'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{R}')4\pi\delta(\vec{R}'-\vec{R})dV'=-\mu_0 J(\vec{R})$$

即 $\nabla^2\vec{A}=-\mu_0 J(\vec{R})$

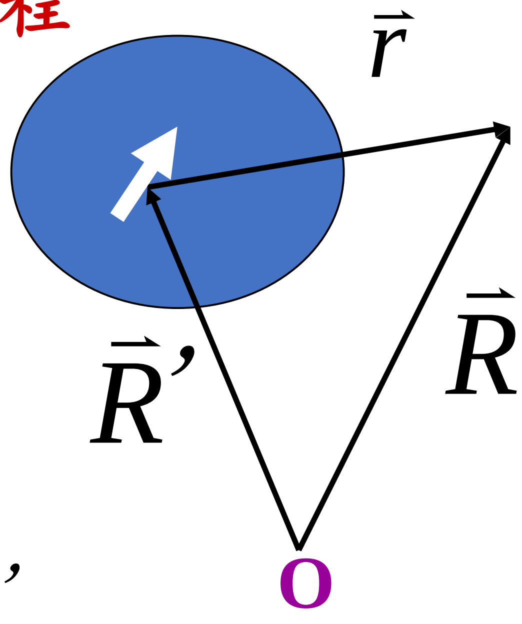
$$\nabla\times\vec{B}=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow\quad\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}(\vec{R})$$

矢势满足 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

很相似于磁感应强度满足的微分方程

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

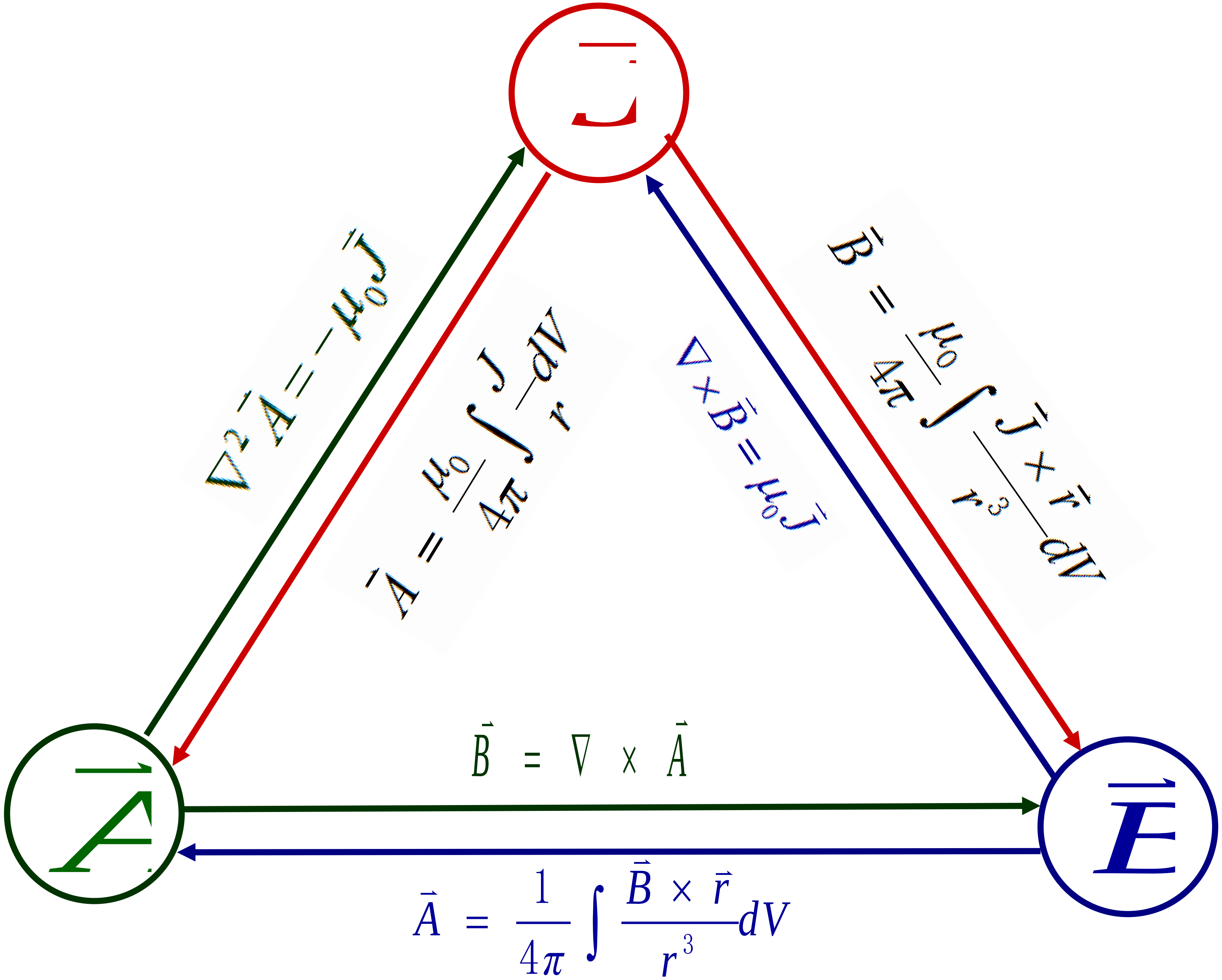


因此$\vec{A}$依赖于$\vec{B}$的关系就是$\vec{B}$依赖于$\mu_0\vec{J}$的关系。因为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV'$$

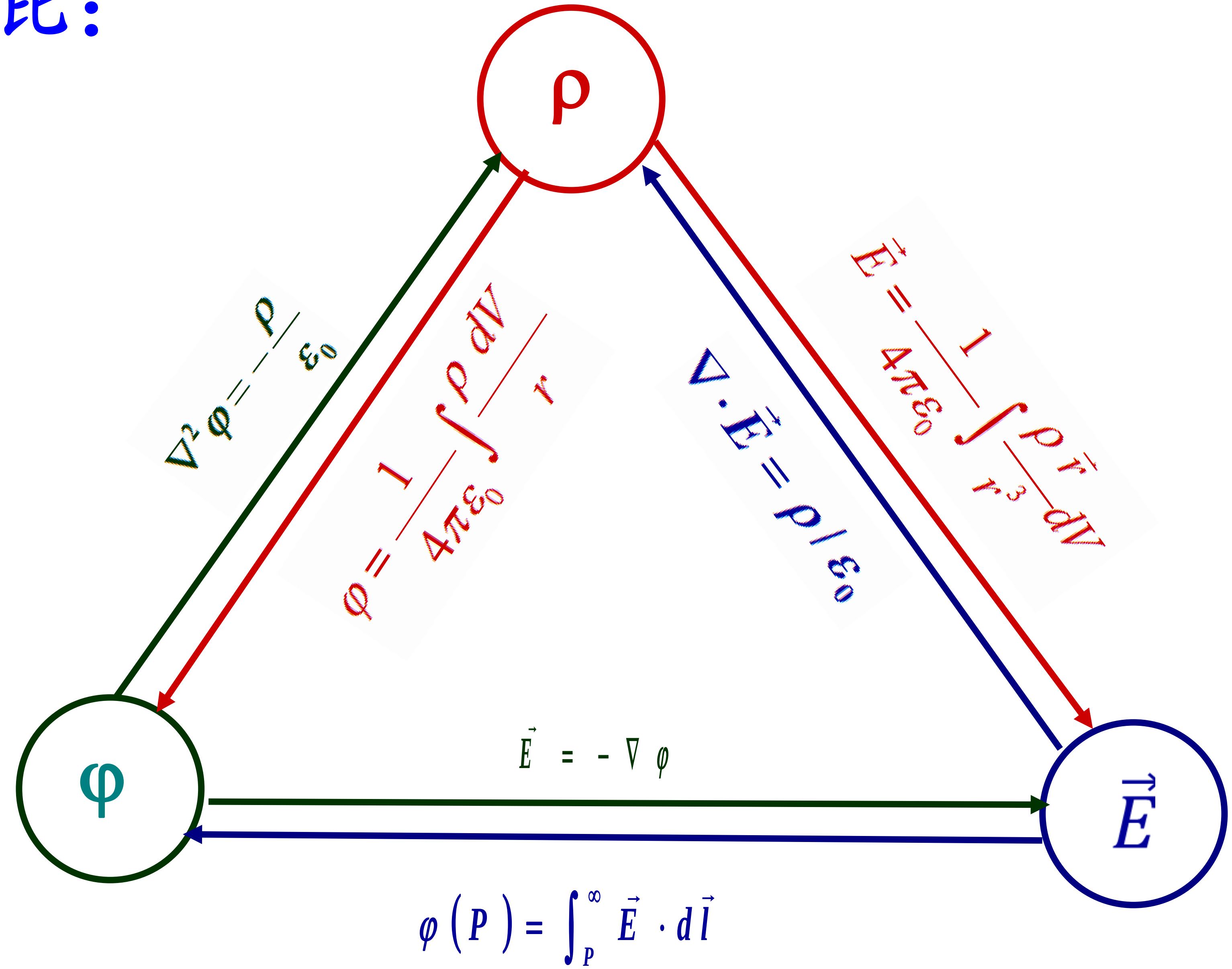
所以

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{r^3} dV'$$



$\vec{J}$
$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$
$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} dV$
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV$
$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
$\vec{A}$
$\vec{E}$
$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{r^3} dV$

对比：

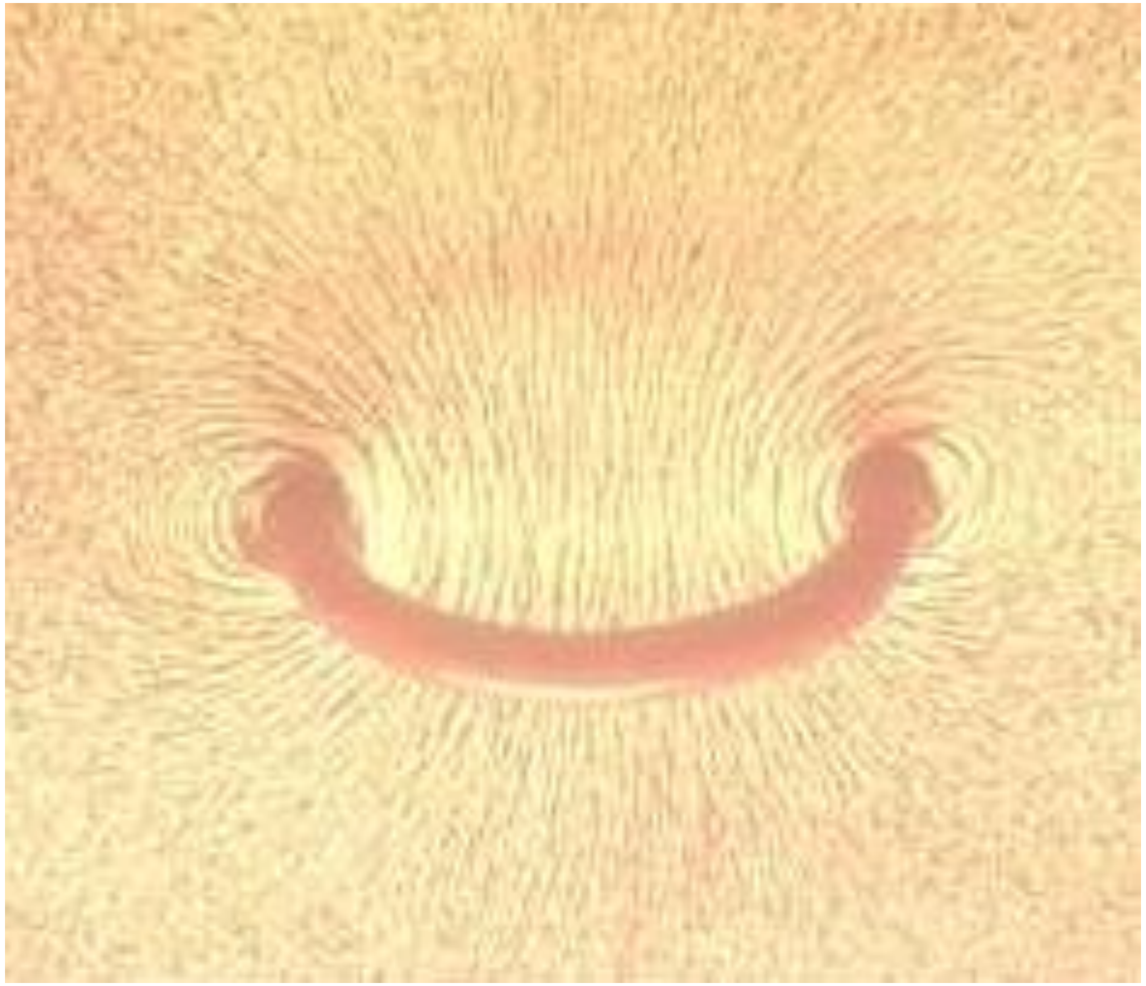


ρ
φ
$\vec{E}$
$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\, dV}{r}$
$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\vec{r}}{r^3}dV$
$\vec{E} = -\nabla\varphi$
$\varphi(P) = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$

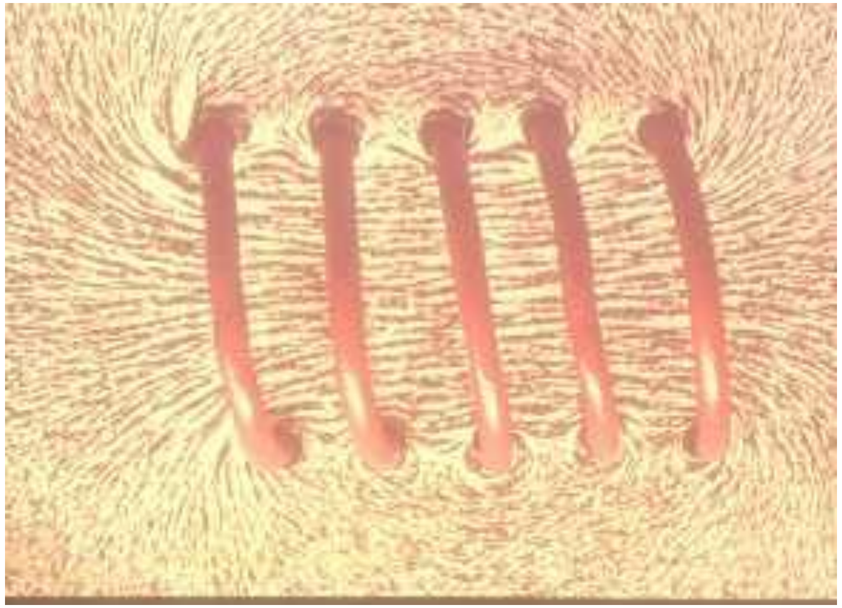
三、高斯定理

各种典型的磁感线的分布

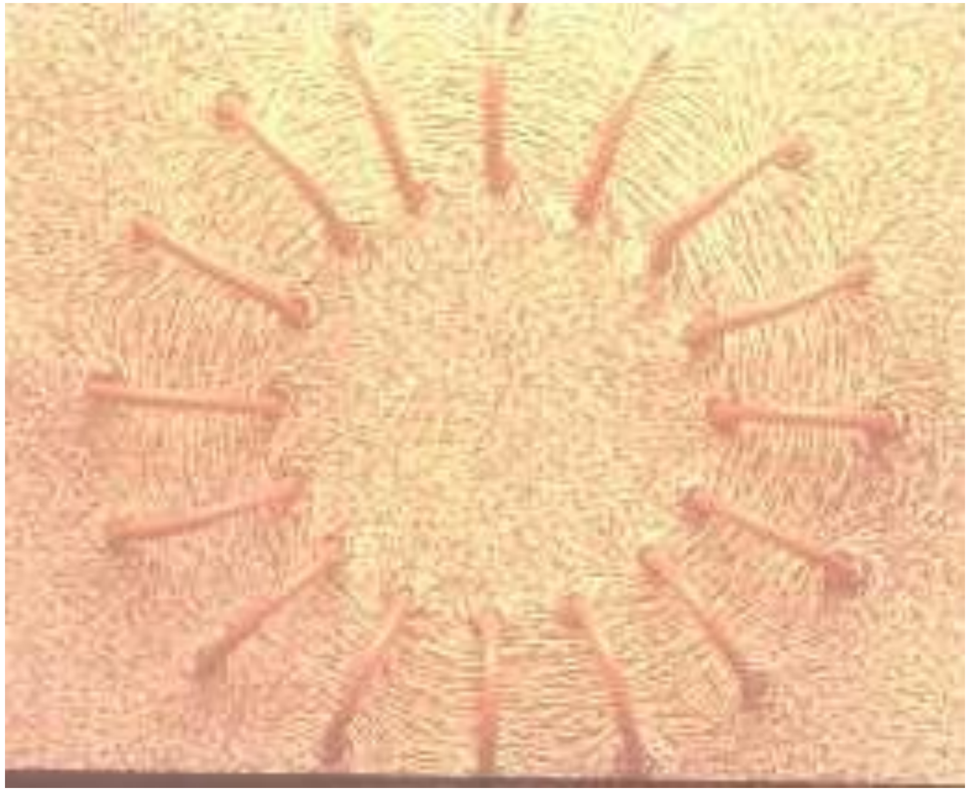
直线电流的磁感线



圆形电流的磁感线



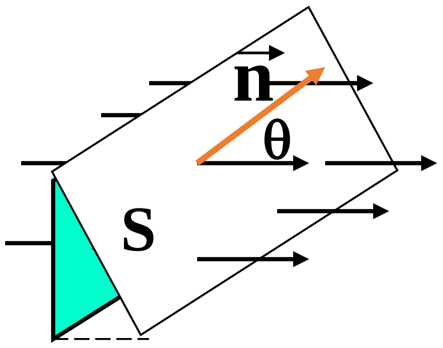
直螺线管电流的磁感线



环形螺线管电流的磁感线

1.磁通量

定义：通过磁场中任一给定面的磁感线的总根数，就是该面的磁通量Φ_B。



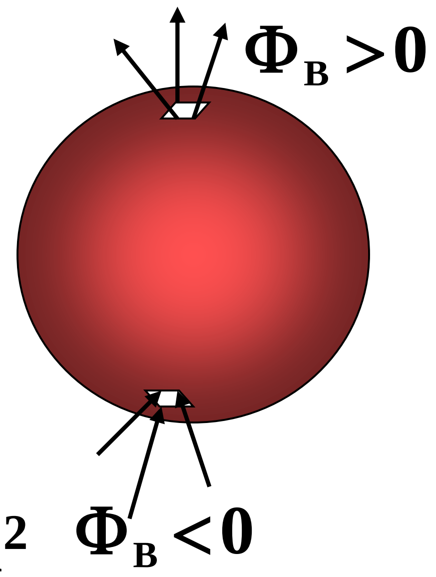
规定： $B=\dfrac{\Delta N}{S_\perp}$ （磁通密度）

(1) $\vec{B}$为均匀场 S面的磁通量：$\Phi_B=\vec{B}\cdot\vec{S}$

(2) $\vec{B}$为非均匀场 $d\Phi_B=\vec{B}\cdot d\vec{S}$

S面上的总通量：$\Phi_B=\int d\Phi_B=\int_s\vec{B}\cdot d\vec{S}$

当S为闭合曲面时： $\Phi_B=\oint\vec{B}\cdot d\vec{S}$



对闭合面的法线方向规定：

自内向外为法线的正方向。

$\therefore$B线从曲面内向外穿出： $\Phi_B>0$

而从曲面外向内穿进： $\Phi_B<0$

Φ_B的单位：韦伯 Wb =Tm^2 1T=1Wb/m^2

韦伯（Wilhelm Edeard Weber，1804～1891）

德国物理学家

2.真空中恒定磁场的高斯定理

(1) 高斯定理： **由毕奥 — 萨伐尔定律已证** $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

由此可知通过任意闭合曲面S的磁通量恒等于零。

数学表示： $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

高斯定理的意义：定理给出了恒定磁场的重要性质

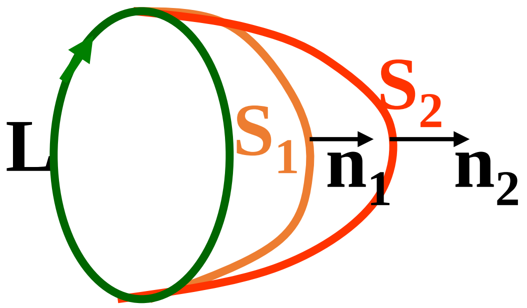
——恒定磁场是无源场

(2) 推论：

1^o 恒定磁场的磁感线是连续的闭合曲线。

即：在磁场的任何一点上磁感线既不是起点也不是终点。

2^o 磁场中以任一闭合曲线L为边界的所有曲面的磁通量相等。 曲面S_1、S_2均以L为边界，



对S_1、 S_2构成的闭合曲面有：

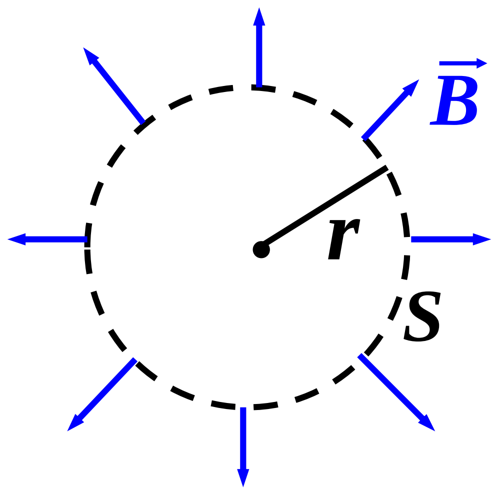
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

例17.8 证明不存在球对称辐射状磁场：$\vec{B} = f(r)\vec{e}_r$

证： 用反证法。选半径为 r 的球面为高斯面 S，

若存在这样的辐射状磁场，则



$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = f(r)\cdot 4\pi r^2 \neq 0$$

这与 $\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ 矛盾。

$\therefore$ 不存在 $\vec{B} = f(r)\vec{e}_r$ 形式的磁场。

17a结束