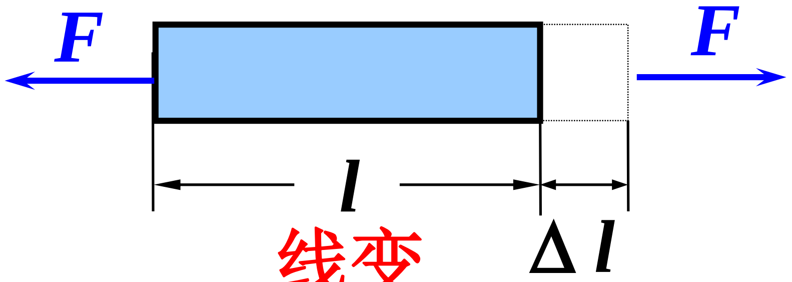
7.3 物体的弹性变形

着重搞清线变、切变和体变的概念，

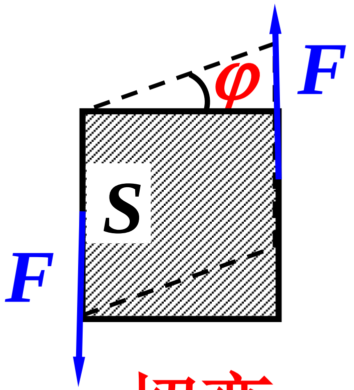
以及与三种变化相应的材料的弹性模量。

$$\frac{F}{S}=E\frac{\Delta l}{l}$$

杨氏模量



线变



切变

$$\frac{F}{S}=G\varphi=G\frac{\Delta d}{D}$$

切变模量

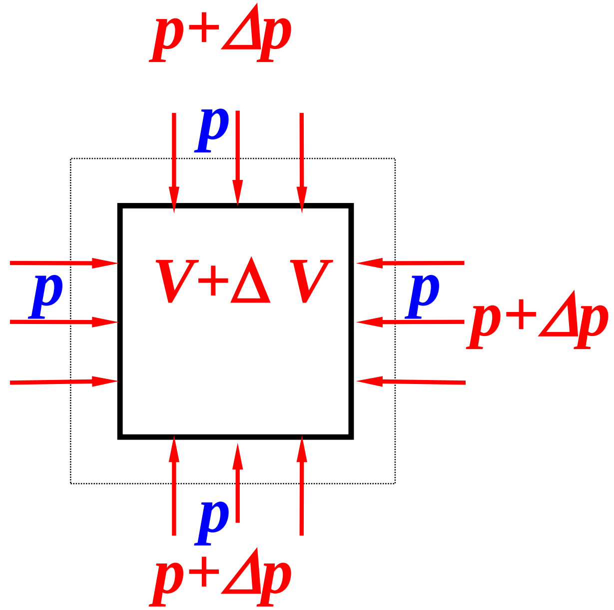
体积模量

$$\Delta P=-K\frac{\Delta V}{V}$$

$$\kappa=\frac{1}{K}=-\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P}$$

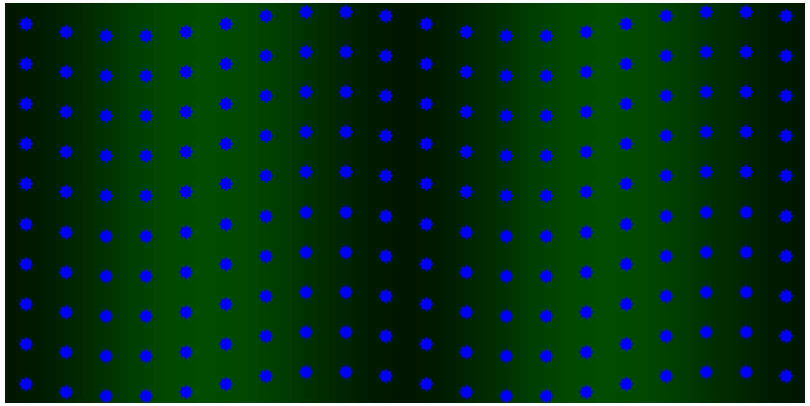
压缩系数

p+Δp

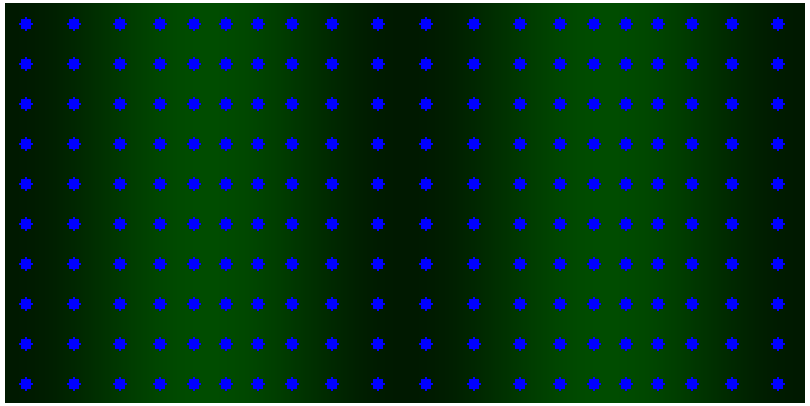


体变

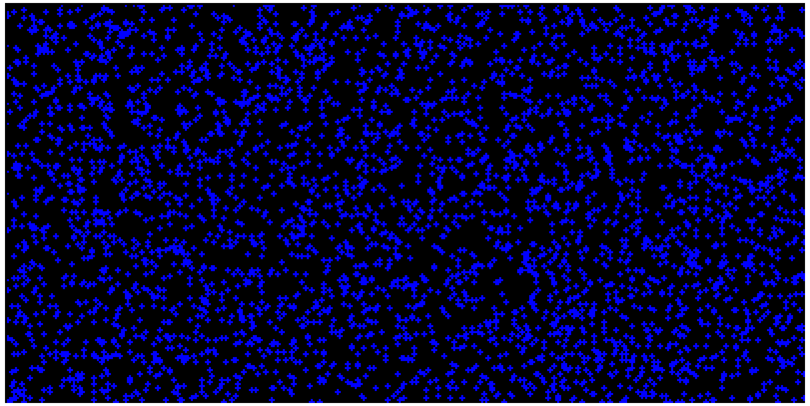
固体能承载纵波和横波



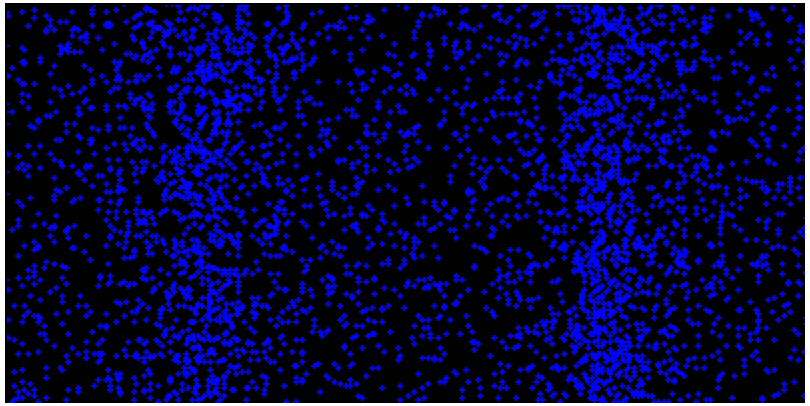
固体剪切形变产生横波

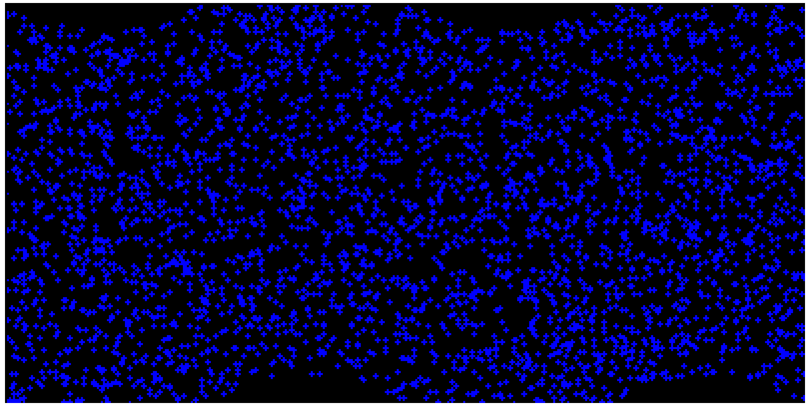


固体压缩形变产生纵波



在液体里，粒子是随机分布的。液体只能承载纵波，不能承载横波：



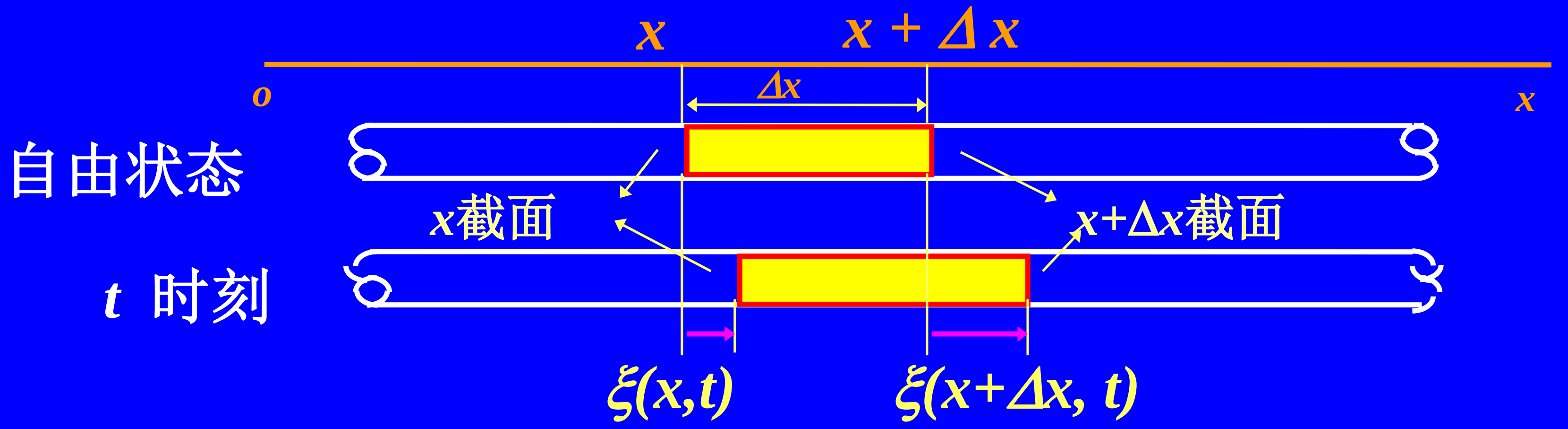


液体压缩形变产生纵波　　液体剪切形变无法产生横波

7.4 波动方程与波速

固体棒中纵波的波动方程

1. 某截面处的应力、应变关系

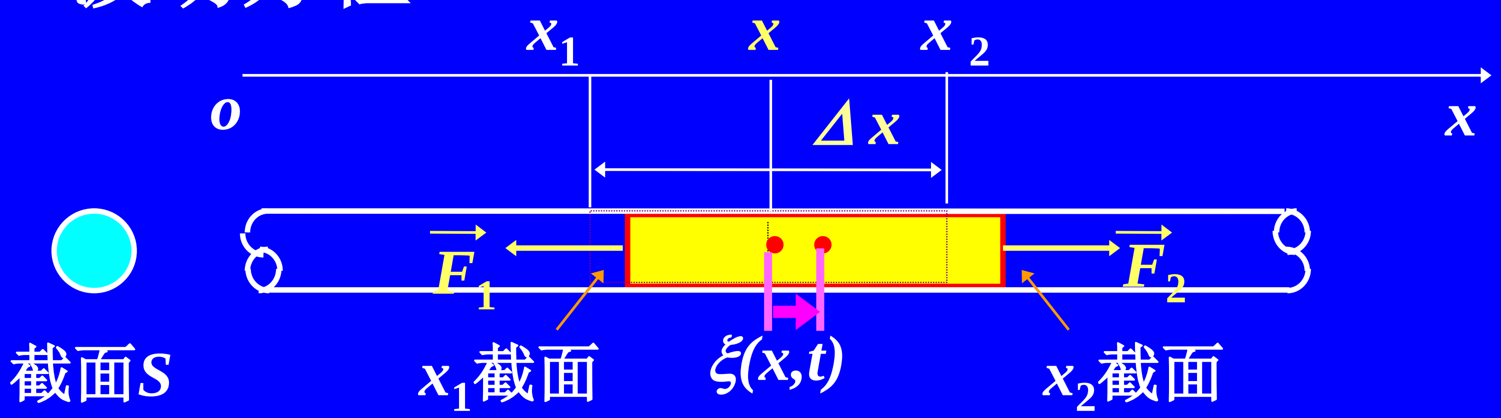


Δx段的平均应变: $[\xi(x+\Delta x,t) - \xi(x,t)] / \Delta x$

x处截面 t 时刻：应变为 $\partial\xi/\partial x$　应力为 $F(x,t)/S$

应力、应变关系 $$\frac{F}{S} = E\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

2. 波动方程



$$(\rho S\Delta x)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=F_2-F_1\quad,\qquad \rho\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\left(\frac{F_2}{S}-\frac{F_1}{S}\right)$$

将应力、应变关系代入

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=E\frac{(\partial\xi/\partial x)_2-(\partial\xi/\partial x)_1}{\Delta x}$$

$$\Delta x\to 0\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

$$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

一维波动方程： $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{1}{u^2}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$ （u 是波速）

将 $y=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$ 代入可以验证。

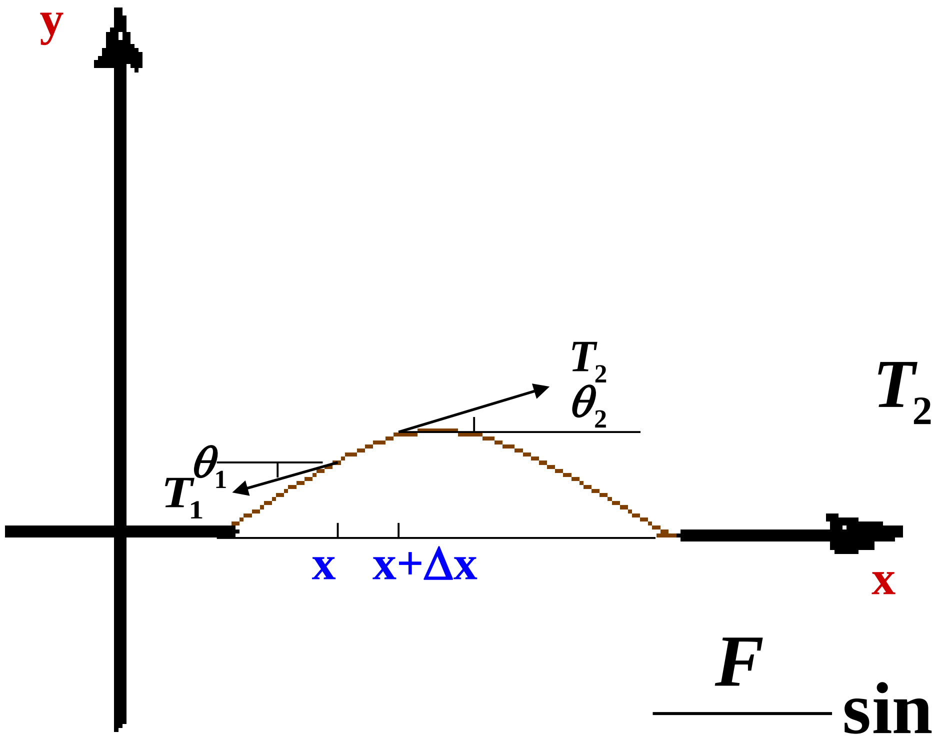
实际上，不光是简谐波函数是波动方程的解，

任意一个以（$t\mp\frac{x}{u}$）为变量的波函数 $y=f(t\mp\frac{x}{u})$

都是波动方程的解。

例7.2 试导出弦的波动方程和波速。

解： 设未受扰动时弦中张力为F。



$$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2 = F$$

$$T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 = \Delta m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_x$$

$$\frac{F}{\cos\theta_2}\sin\theta_2 - \frac{F}{\cos\theta_1}\sin\theta_1 = \Delta m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_x$$

$$F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = \Delta m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_x$$

$$F\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_x \Delta x = \Delta m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_x$$

$$\rho_l = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

$$\frac{F}{\rho_l}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

书p. 221

波速 u 与媒质性质的关系：

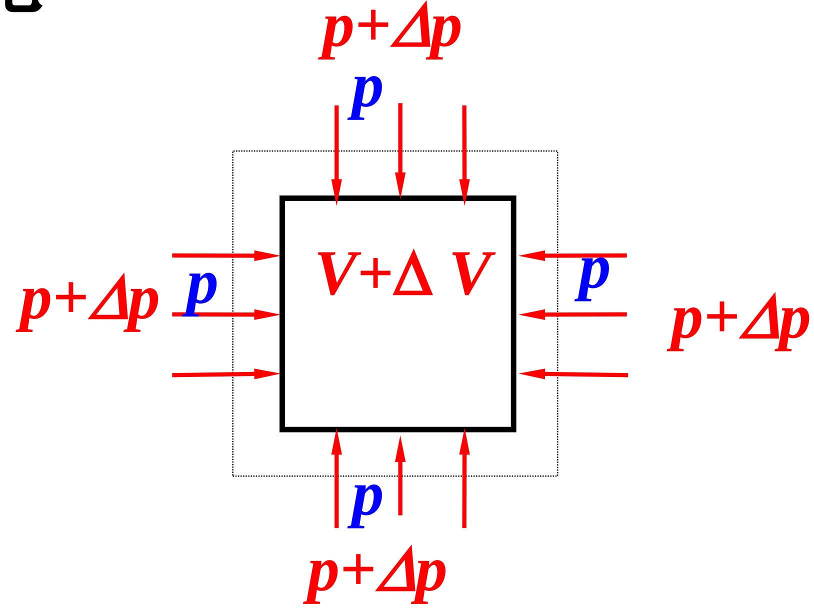
气体中 $u=\sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$，

γ —— 比热比

液体中 $u=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$，

$$K=-\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

（体积模量）



体变

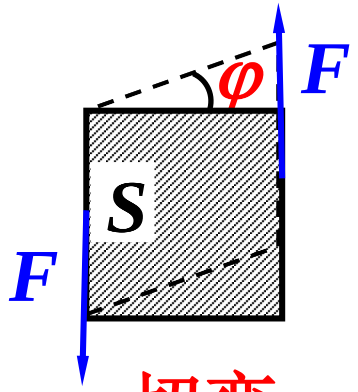
弹性绳上的横波 $u=\sqrt{\dfrac{F}{\rho_l}}$

F —— 绳的初始张力，ρ_l —— 绳的线密度

固体中

横波 $u_t=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$，$G=\dfrac{F/S}{\varphi}$

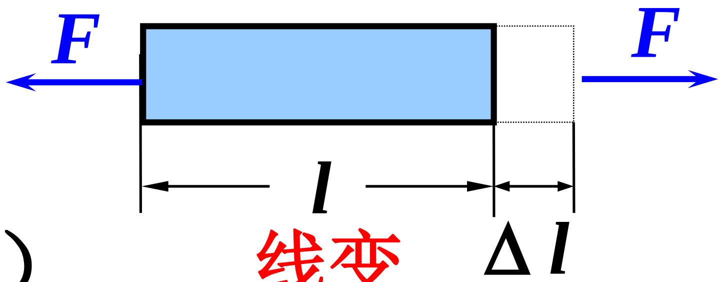
（切变模量）



切变

纵波 $u_l=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$，$E=\dfrac{F/S}{\Delta l/l}$

（杨氏模量）



线变

书p.207，表7.2：$u_l > u_t$ （地震波传播）

7.5 波的能量 （energy of wave）

一. 波的能量

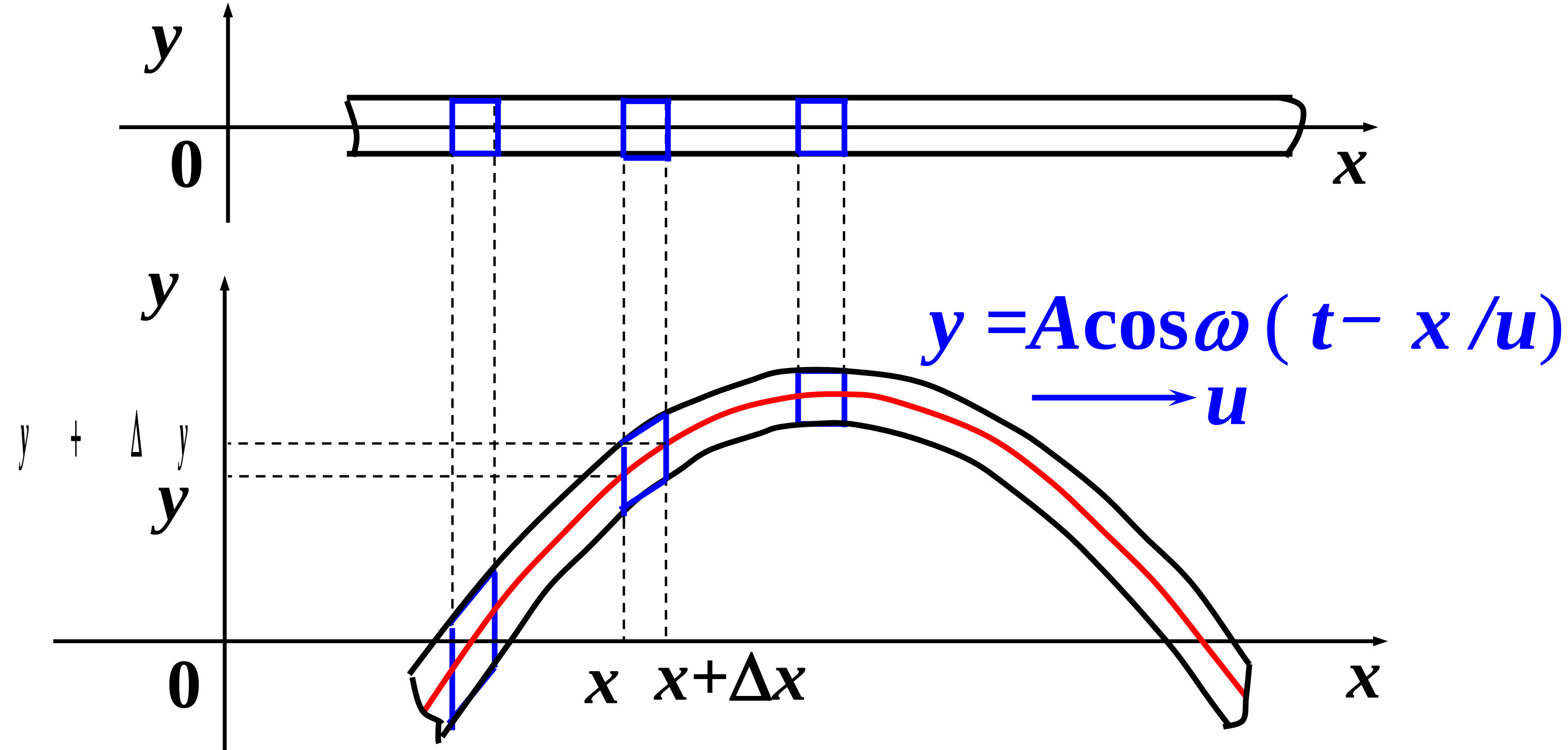
振动有能量，振动的传播将导致能量的传播。

这里要搞清：

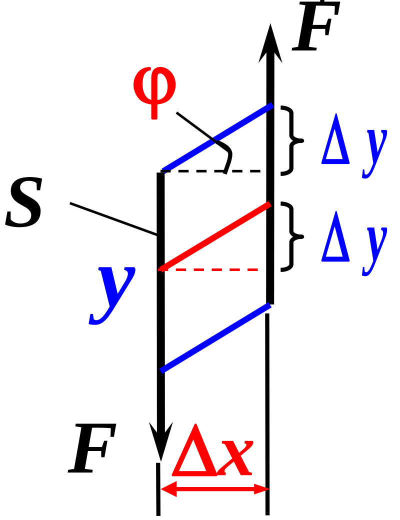
①媒质质元能量是如何变化的？

②能量传播的规律如何？

以弹性棒中的简谐横波为例来分析：



“质元”形变势能ΔW_p，振动动能ΔW_k



$$\Delta W_p = \int_0^{\Delta y} F\,\mathrm{d}y = \int_0^{\varphi} GS\varphi\,\Delta x\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}G\varphi^2\Delta V$$

切变模量 $G = \dfrac{F/S}{\varphi} \longrightarrow F = GS\varphi$ $\qquad \varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} G \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \Delta V = \frac{1}{2} u^2 \rho \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \Delta V$$

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \rightarrow G = u^2 \rho \qquad y = A\cos\omega\,(t - x/u)$$

又 $$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\partial y}{\partial x} = -\omega A \sin\omega(t - \frac{x}{u}) \cdot \frac{1}{u}$$

$$\therefore \quad \Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} (\rho \Delta V) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u}) = \Delta W_p$$

$\therefore$ 质元总能量 $\Delta W = \Delta W_p + \Delta W_k = 2\Delta W_p = 2\Delta W_k$

$$= \rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})\Delta V$$

振动系统：$E_k \neq E_p$，$E_k + E_p = \text{const.}$

系统与外界无能量交换。

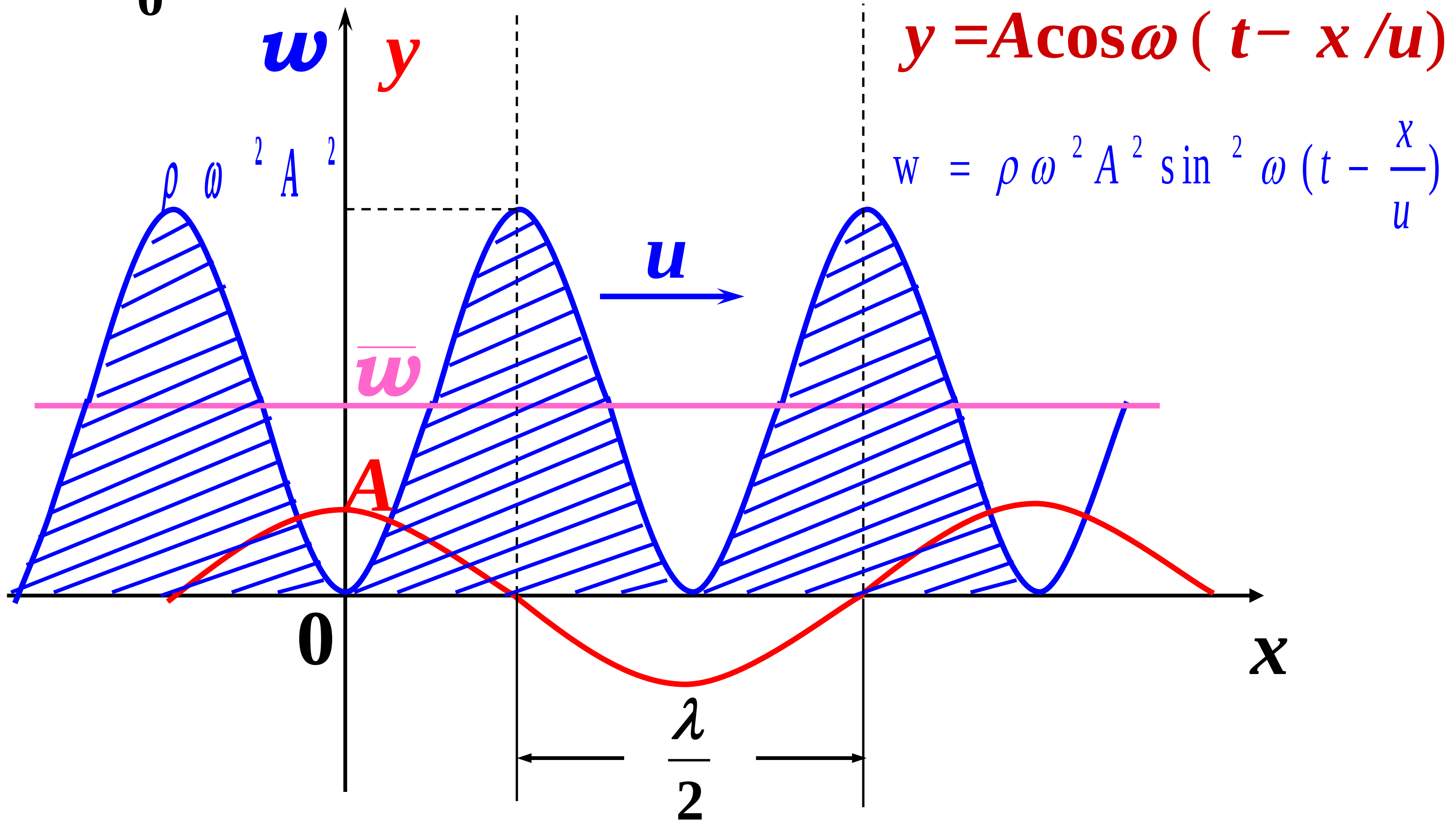
波动质元：$\Delta W_k = \Delta W_p$，$\Delta W_k + \Delta W_p \neq \text{const.}$

每个质元都与周围介质交换能量。

能量密度（energy density）：

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u}) \propto \omega^2 A^2 \text{（特征）}$$

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$ 适用于各种弹性波



$y = 0$ 处，$w = w_{max}$， $y = A$ 处，$w = 0$ ，

能量“一堆堆”地传播。

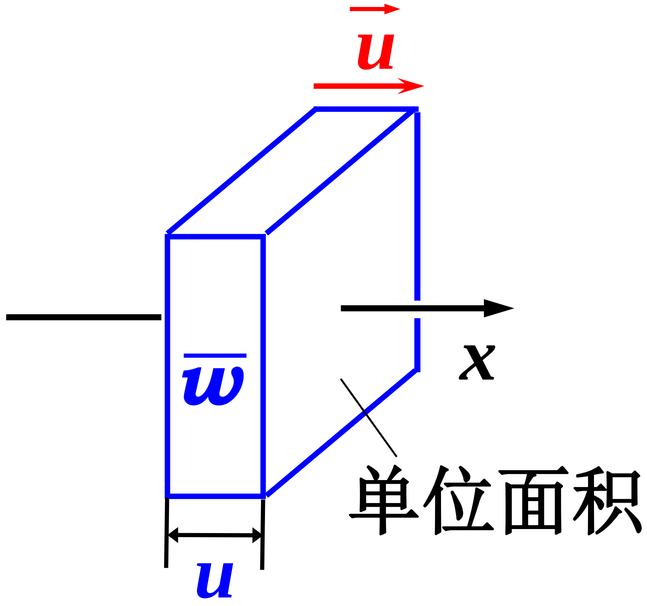
二. 能流密度 （energy flux density）

波的传播 →能量传播 →能流

能流密度S ——单位时间内通过垂直于波线方向单位面积的波的能量。

波的强度 $I = \overline{S}$

由图示有



$$I = \overline{w}u = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u$$

$$= \frac{1}{2}Z\omega^2A^2$$

$Z = \rho u$ ——介质的“特性阻抗”

利用 $\mathbf{I}=\frac{1}{2}\mathbf{Z}\omega^2\mathbf{A}^2$ 和能量守恒，可以证明，

对无吸收介质：

平面波 $A=\text{const}.$

球面波 $Ar=\text{const}.$，$A\propto\frac{1}{r}$

柱面波 $A\sqrt{r}=\text{const}.$，$A\propto\frac{1}{\sqrt{r}}$

r —— 场点到波源的距离