1. 解：(1) 由题意易知：$x_2(k+1)=(1+1\%)x_2(k)-2\%\cdot\cancel{(1+1\%)}x_2(k)+4\%\cdot\cancel{(1+0.8\%)}x_1(k)$.

$x_1(k+1)=(1+0.8\%)x_1(k)-4\%\cdot\cancel{(1+0.8\%)}x_1(k)+2\%\cdot\cancel{(1+1\%)}x_2(k)$.

整理得人口变化的状态方程为：

$$\begin{cases} x_1(k+1)=0.968\,x_1(k)+0.02\,x_2(k) \\ x_2(k+1)=0.99\,x_2(k)+0.04\,x_1(k)\end{cases}$$

其中 $x_1(0)=1$，$x_2(0)=9$（单位为千万）

(2) 代码及曲线见附件，计算结果在 result.txt 中。曲线在 png 文件中，代码在 hw3.m 文件中。

(3). $A=\begin{pmatrix}0.968 & 0.02\\ 0.04 & 0.99\end{pmatrix}$　$\lambda_1=1.009$　$\lambda_2=0.949$

$\because |\lambda_1|>1$

~~$\lambda_1,\lambda_2$ 均位于单位圆……~~ $\therefore$ 该人口系统不稳定

2. 解：离散化有：$x(k+1)=e^{AT}x(k)+\left(\int_0^T e^{A\tau}B\,d\tau\right)u(k)$.

其中：$e^{AT}=I+AT+\frac{1}{2!}A^2T^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kT^k+\cdots$

$\because A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$　$\therefore A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$　$\therefore A^k=0\quad k\geq 2$

$\therefore e^{AT}=I+AT=\begin{pmatrix}1&T\\0&1\end{pmatrix}$

$\int_0^T e^{A\tau}B\,d\tau=\int_0^T\begin{pmatrix}1&\tau\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}d\tau=\int_0^T\begin{pmatrix}\tau\\1\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}\frac{T^2}{2}\\T\end{pmatrix}$

$\therefore$ 离散时间状态方程即为：$\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&T\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{T^2}{2}\\T\end{pmatrix}u(k)$

当 $u(k)\equiv1$ 时，$x_2(k+1)=x_2(k)+T$　$\therefore x_2(1)=x_2(0)+T$.

累加有 $x_2(k+1)=x_2(0)+(k+1)T$

$x_1(k+1)=x_1(k)+Tx_2(k)+\frac{T^2}{2}=(x_2(0)+kT)T+\frac{T^2}{2}+x_1(k)$.

$\therefore x_1(1)=(x_2(0)+kT)T+\frac{T^2}{2}+x_1(0)$

累加可得，$x_1(k+1)=x_1(0)+\frac{k+1}{2}T^2+x_2(0)(k+1)T+T^2\sum_{i=0}^{k}i$

$=x_1(0)+x_2(0)(k+1)T+\frac{(k+1)^2}{2}T^2$

综上，$x(k)$ 解为
$$\begin{cases}x_1(k)=x_1(0)+x_2(0)kT+\frac{k^2}{2}T^2\\ x_2(k)=x_2(0)+kT\end{cases}$$ △

3. 解：

根据迭代法求出的离散系统状态方程的解：

$$x(k)=A^k x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}A^{k-j+1}Bu(j).$$

$$=A^k x(0)+(B\ AB\ \cdots\ A^{k-1}B)\begin{pmatrix}u(k-1)\\u(k-2)\\\vdots\\u(0)\end{pmatrix}$$

~~若需~~ ∵ $k\geq n$时，$A^kB$中不会出现新线性无关向量.

∴ 若实现状态任意转移，$(B\ AB)$必须满秩，$(B\ AB)$

$k=2$时 $(B\ AB\ \cdots\ A^{k-1}B)\begin{pmatrix}u(k-1)\\u(k-2)\\\vdots\\u(0)\end{pmatrix}=(B\ AB)\begin{pmatrix}u(1)\\u(0)\end{pmatrix}$

∴ 当$T\neq 2k\pi$时，

最少两步控制可以实现状态的任意转移.

系统离散化得：

$$A^*=\begin{pmatrix}\cos\omega T & \sin\omega T\\ -\sin\omega T & \cos\omega T\end{pmatrix}$$

$$B^*=\begin{pmatrix}1-\cos\omega T\\ \sin\omega T\end{pmatrix}$$

$$(B\ AB)=\begin{pmatrix}1-\cos\omega T & \cos\omega T-\cos 2\omega T\\ \sin\omega T & -\sin\omega T+\sin 2\omega T\end{pmatrix}$$

解得 $T\neq 2k\pi$时，$(B, AB)$满秩.

4. 解：(1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $F=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $Q=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $R=1$ $P(2)=F=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$$P(k)=Q(k)+A^T\tilde P(k)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\tilde P(k)$$

$$\tilde P(k)=\left[P^{-1}(k+1)+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$P(2)$不可逆∴ $P(1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12\end{pmatrix}$

$P(1)$不可逆：$P(0)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac23&\frac13\\\frac13&\frac16\end{pmatrix}$

其中 $\tilde P(1)=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\0&0\end{pmatrix}$ $\tilde P(0)=\begin{pmatrix}\frac13&\frac16\\\frac13&\frac16\end{pmatrix}$

∴ $u^*(0)=-(1\ \ 1)\begin{pmatrix}\frac13&\frac16\\\frac13&\frac16\end{pmatrix}x(0)=-1$ $x(1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot(-1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$u^*(1)=-(1\ \ 1)\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\0&0\end{pmatrix}x(1)=-\frac12$

$J^*=\frac12 x^T(0)P(0)x(0)=\frac34$

(2) $R(N)=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$ $H(N)=\begin{pmatrix}B&0\\AB&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\2&1\\1&1\end{pmatrix}$ $Q_F(N)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$G(k)=\begin{pmatrix}A\\A^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\2&1\\1&1\end{pmatrix}$

∴ $U(N)=\begin{pmatrix}u(0)\\u(1)\end{pmatrix}=-[R(N)+H^T(N)Q_F(N)H(N)]^{-1}H^T(N)Q_F(N)G(k)x_0=\begin{pmatrix}-1\\-\frac12\end{pmatrix}$

对比 所得$u(0)$、$u(1)$与(1)中相同，故$J^*=\frac34$ 与(1)相同