振动

第六章　振动

§6.1 简谐振动
§6.2 简谐振动方程
§6.3 简谐振动能量
§6.4 阻尼振动
§6.5 受迫振动
§6.6 同振动方向同频率简谐振动合成
§6.7 同振动方向不同频率简谐振动合成
§6.8 振动方向互相垂直的简谐振动合成
§6.9 *频谱分析
§6.10 相图
§6.11 *非线性振动及混沌

§ 6.1 简谐振动

一. 简谐振动定义

物理量随时间按正弦或余弦变化的过程：

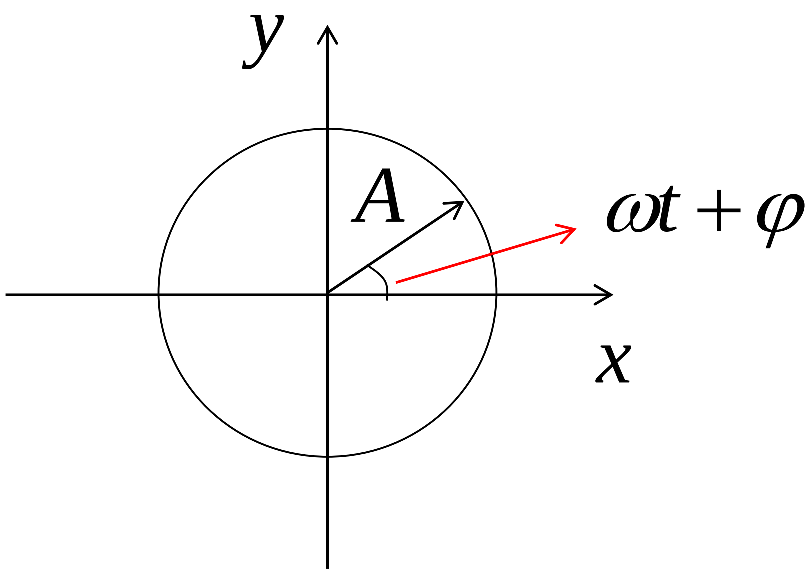
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$ — 简谐振动

x 可以是位移、电流、场强、温度…

▲ 简谐振动是最简单、最基本的振动，可用来研究复杂振动。

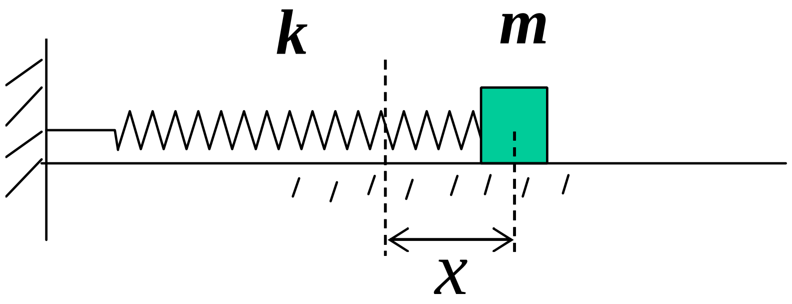
▲ 简谐振动是理想化模型，许多实际的小幅振动都可以看成简谐振动。

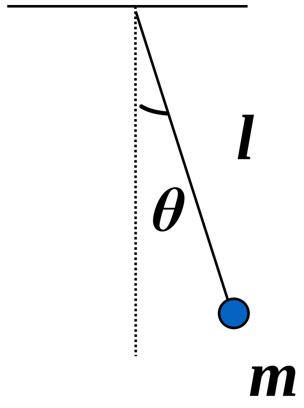
简谐振动



匀速圆周运动

$$x = A\cos(\underbrace{\omega t + \overset{\text{初相}}{\varphi}}_{\text{相}})$$





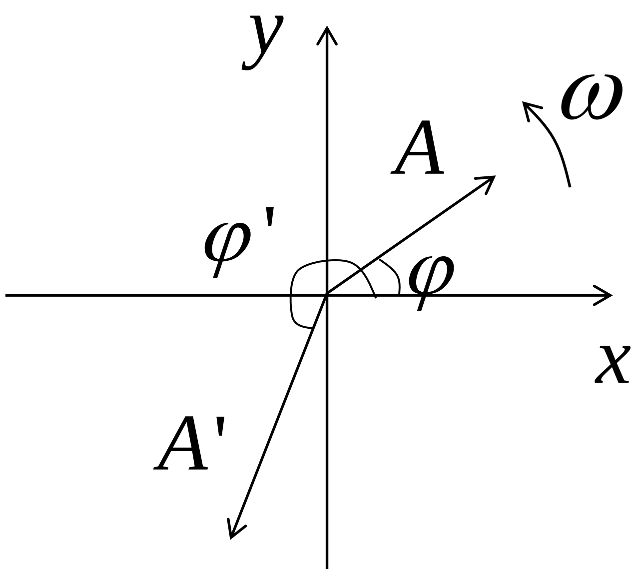
$\theta \longrightarrow x/l$

速度 $\upsilon = \dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$

加速度 $a = \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

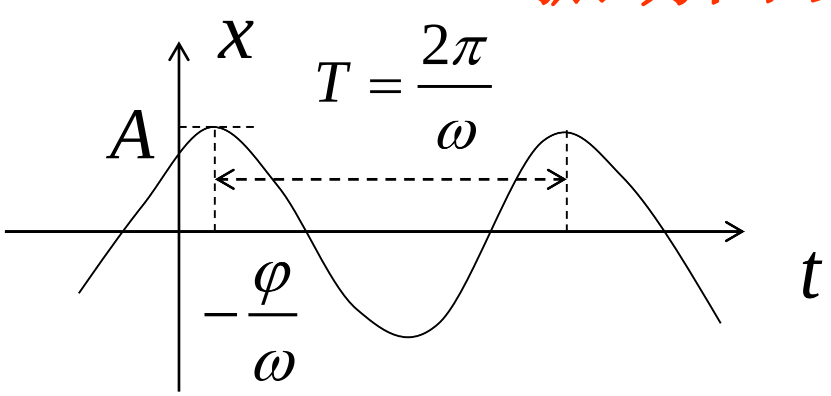
$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$ $\quad x = A\cos(\omega t + \varphi)$

A, ω, φ 确定则简谐运动确定



相量图法

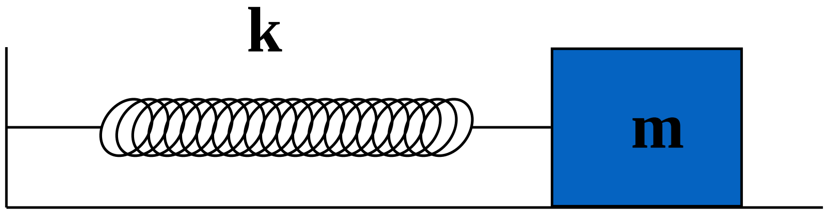
振动曲线



频率相同的简谐运动都可以在这里用几何图表示

§6.2 简谐振动方程

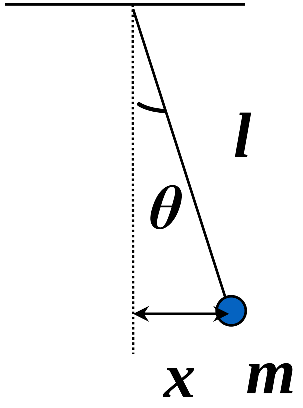
(i)



$$F=-kx=m\ddot{x}$$

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(ii)



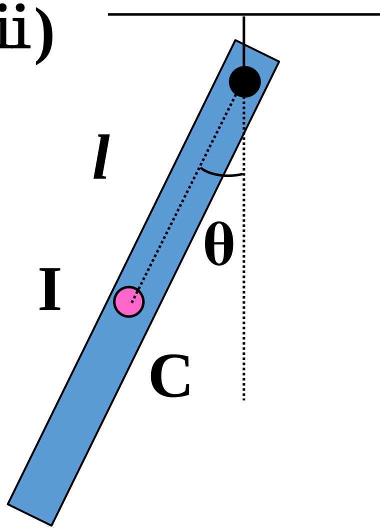
$$F=-mg\sin\theta$$

$$=-mg\frac{x}{l}\approx m\ddot{x}$$

$$\frac{x}{l}<<1$$

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

(iii)



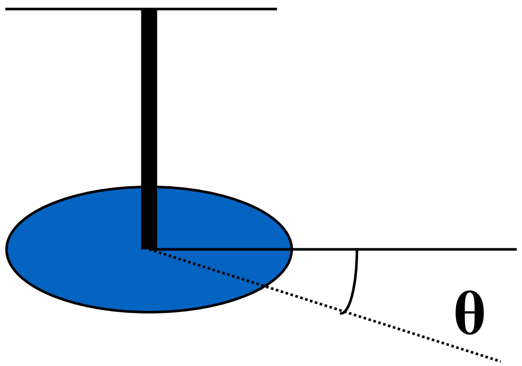
$$\tau=-mgl\sin\theta$$

$$\approx -mgl\theta=I\ddot{\theta}$$

$$\theta<<1$$

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

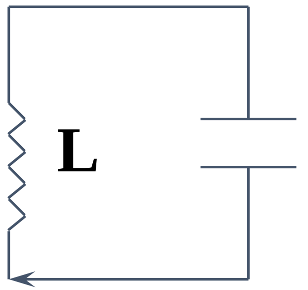
(iv)



$$\tau = -\kappa\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

(v)



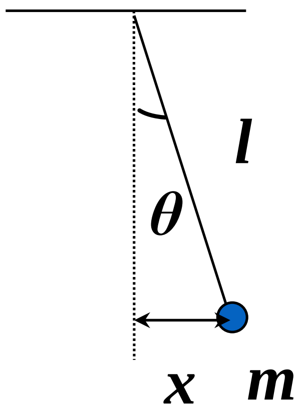
$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C}$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

物理量 S $\quad \ddot{S} + \omega^2 S = 0$ 简谐振动

通解: $\quad S = A\cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\text{相位}})$ 一般 A 大于零

例



1. 初始条件： $x|_{t=0}=x_m \qquad \dot{x}|_{t=0}=0$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \longrightarrow \varphi=0$$

$$x=x_m\cos\omega t$$

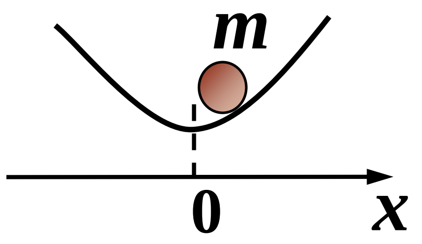
2. 初始条件： $x|_{t=0}=0 \qquad \dot{x}|_{t=0}=\upsilon_0$

$$A\cos\varphi=0 \qquad \upsilon_0=-\omega A\sin\varphi$$

$$\dot{x}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi) \qquad \varphi=-\frac{\pi}{2},\ \upsilon_0=\omega A$$

$$x=\frac{\upsilon_0}{\omega}\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})=\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t$$

例 证明稳定平衡位置附近的微振动是简谐振动。



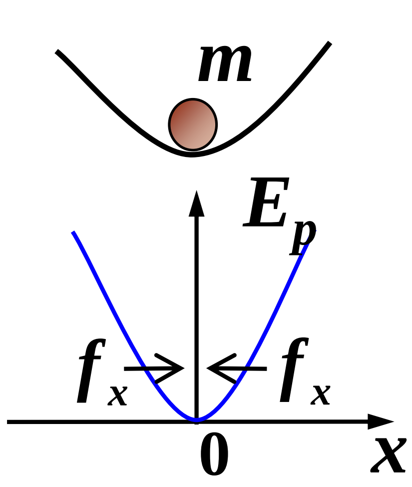
证明： 在 $x = 0$ 附近将势能展开：

$$E_p(x)=E_p(0)+\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_0 x+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 x^2+\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0>0$$

对微振动，可取到 x^2 项，且令 $E_p(0) = 0$

$$\therefore \quad E_p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 x^2 \overset{令}{=} \frac{1}{2}kx^2$$



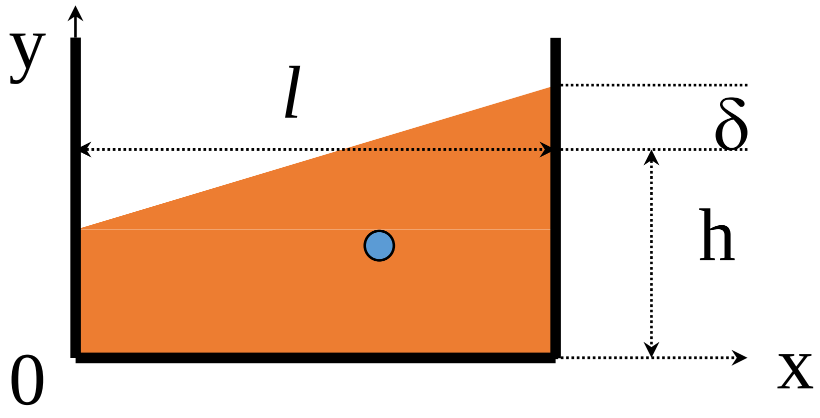
$$k = \left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 > 0$$

$$f_x = -\left(\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}\right) = -\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 x = -kx$$

∴ 稳定平衡位置附近的微振动是简谐振动。

例子：原子和分子的振动、固体晶格振动等。

例. 水盆中的晃动模式. 谁能够端一盆水而没有晃动呢?



晃动频率?

解：假设是微小振动

简谐振动?

势能表达式 $$E_P = mg(y_c - \frac{h}{2})$$

$$x_c = \frac{\delta \frac{2}{3} l + (h-\delta)\frac{1}{2} l}{h} = \frac{1}{2} l + \frac{1}{6} l \frac{\delta}{h}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y_c} = -mg$$

$$y_c = \frac{[\frac{2}{3}\delta + (h-\delta)]\delta + \frac{1}{2}(h-\delta)^2}{h} = \frac{1}{2} h + \frac{1}{6}\frac{\delta^2}{h}$$

$$E_P = mg\frac{1}{6}\frac{\delta^2}{h} = 6mg\frac{h}{l^2}(x_c - \frac{1}{2}l)^2$$

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x_c} = -12mg\frac{h}{l^2}(x_c - \frac{l}{2})$$

简谐振动 频率 $\omega^2 = \frac{k}{m} = 12g\frac{h}{l^2}$

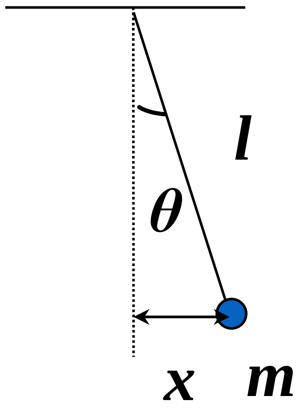
日内瓦湖的平均深度约150m，长度约60km，晃动周期？

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi l}{\sqrt{3gh}} \approx 47\,\mathrm{min}.$$

实际观察到的周期约1小时

观察到的振幅大于5 feet~1.5m

§6.3 简谐振动能量



动能 $$E_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

势能 $$E_P = mgl(1-\cos\theta) = 2mgl\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$E_P = \frac{1}{2}m\frac{g}{l}x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

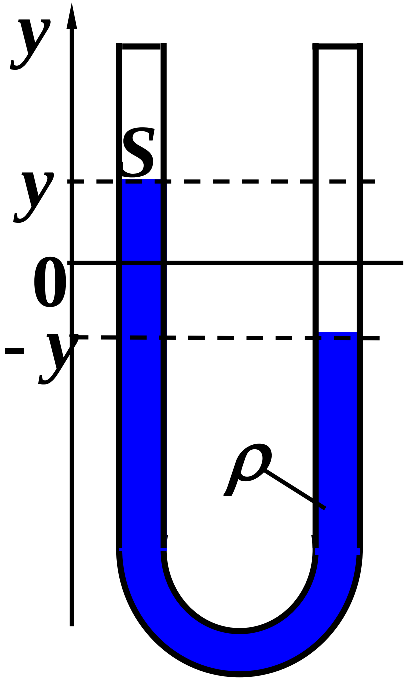
$$l^2 \sin^2\frac{\theta}{2} \approx \frac{x^2}{4}$$

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = const.$$

时间平均 $$\left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle E_P \right\rangle = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 = \left\langle E_K \right\rangle = \frac{1}{2}E$$

【例】已知：U 形管内液体质量为 m，密度为ρ，管的截面积为 S。开始时，造成管两边液面有一定高度差，忽略管壁和液体间的摩擦。试判断液体柱振动的性质。



解：方法一，分析受力（压强差）

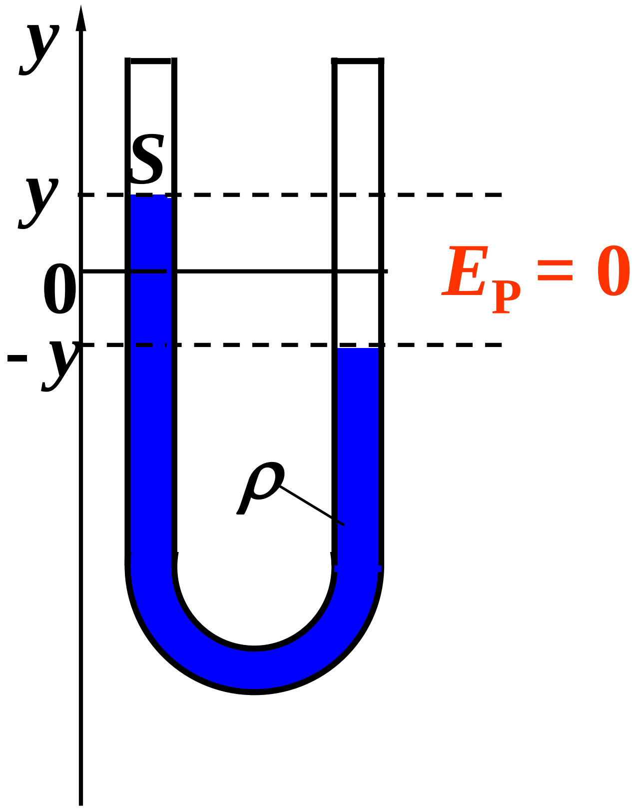
恢复力 $F = -2\rho g S y \overset{令}{=} -ky$

$$k = 2\rho g S = \text{const.}$$

$\therefore$ 是简谐振动

角频率$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{2g\rho S/m}$

方法二，分析能量



$$E_p = (\rho g S y)\cdot y = \frac{1}{2}ky^2$$

$$k = 2\rho g S$$

无损耗　$E = \mathrm{const.}$

$\therefore$ 是简谐振动

角频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

简谐振动小结（针对机械振动）

1. 受力特征 $\boxed{F=-kx}$

F — 恢复力（弹性力或准弹性力）

k — 劲度系数或刚度系数

2. 微分方程 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0}$

ω — 角频率或圆频率

3. 能量特征（弹性力是保守力）

$$\begin{cases} \text{总能量 } E = \text{const.} \\ \text{势能 } E_p = \dfrac{1}{2}kx^2 \text{（平衡位置为} E_p \text{的零点）} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} E = \text{const.} \\ \overline{E}_p = \overline{E}_k = \dfrac{1}{4}kA^2 \propto A^2 \end{cases}$$

上面1、2、3中任何一条成立即可判定为简谐振动。

简谐振动的特征量

1. 角频率 $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

只由系统本身决定，也称为固有频率

频率 $\boxed{\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}}$

周期 $\boxed{T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{2\pi}{\omega}}$

2. 振幅

$$\boxed{A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{\frac{2E}{k}}}$$

由初始条件和系统本身情况决定

3. 初相（位）

$$\boxed{\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega\, x_0}\right)}$$

（一般取主值）

由初始条件及系统本身情况决定

简谐振动的表示法

给定振幅 A、角频率 ω 和初相位 φ，就给定了一个简谐振动。

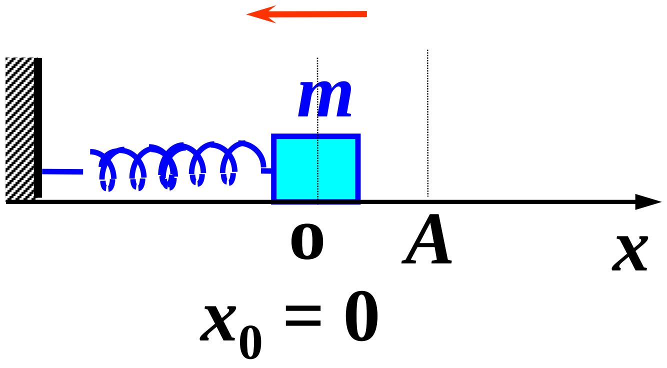
1. 振动函数

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

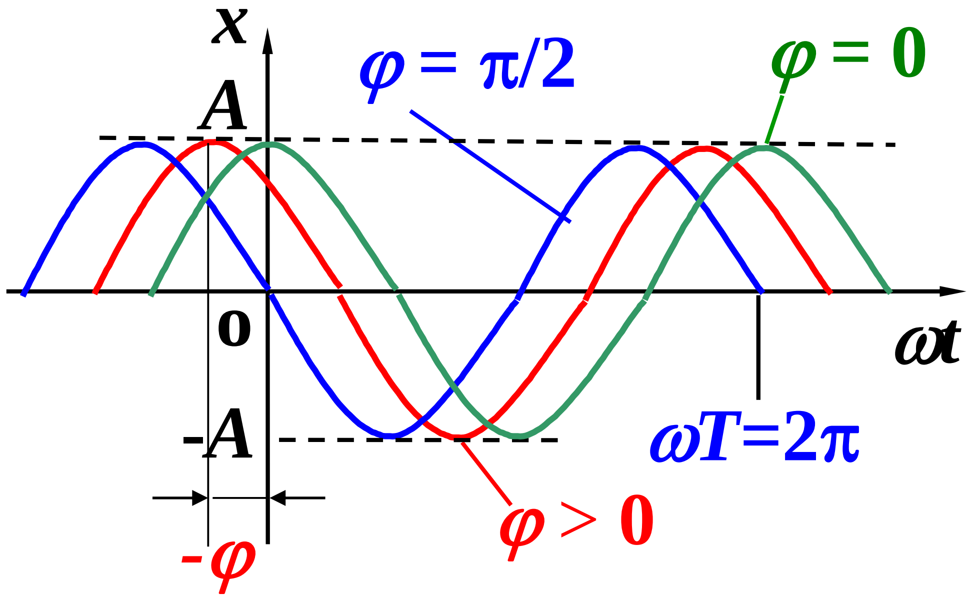
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

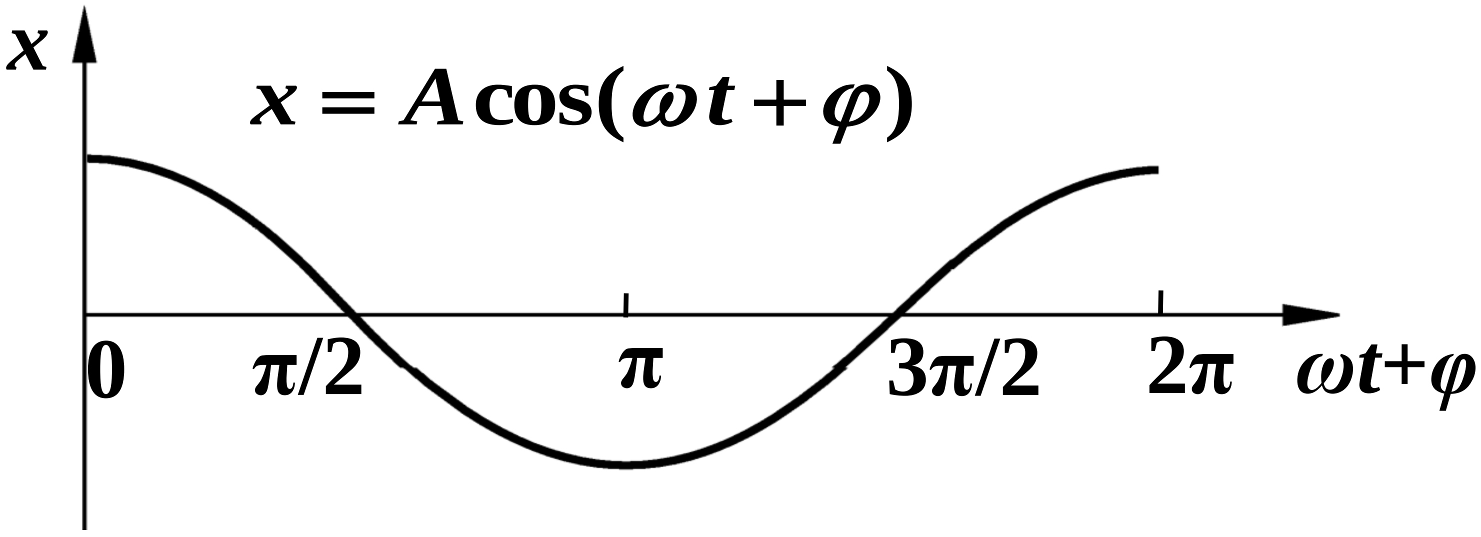
2. 振动曲线



m
o
A
x
$x_0 = 0$



x
A
$\varphi = \pi/2$
$\varphi = 0$
o
ωt
-A
$\omega T=2\pi$
$-\varphi$
$\varphi > 0$



•$\omega t + \varphi = 0$：物体静止于 x 轴正向最远点

•$\omega t + \varphi = \pi/2$：经平衡位置沿反向运动

•$\omega t + \varphi = \pi$：静止于反向最远点

•$\omega t + \varphi = 3\pi/2$：经平衡位置沿正向运动

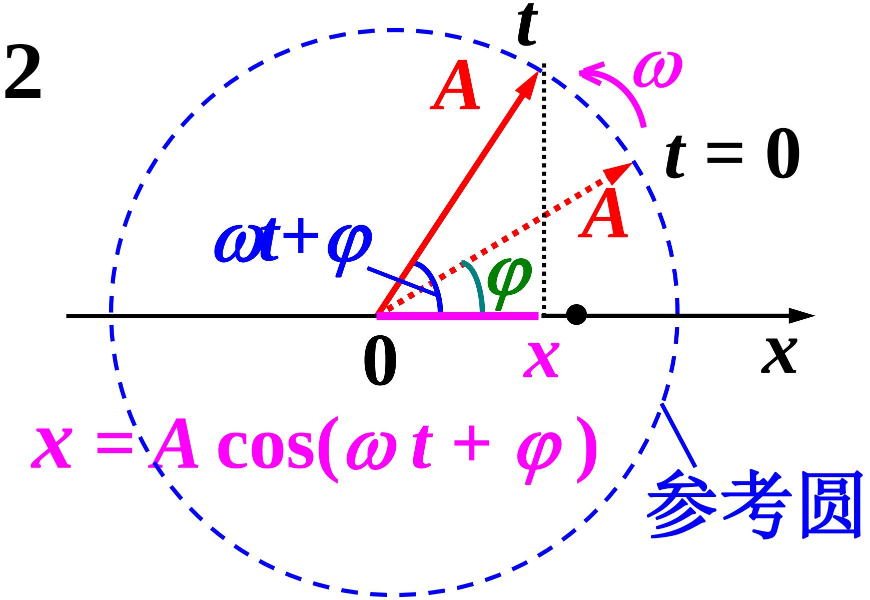
•$\omega t + \varphi = 2\pi$：返回到正向最远点

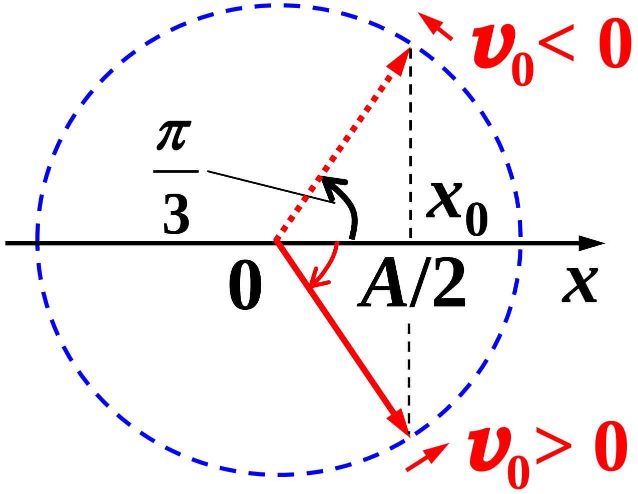
——相位代表简谐振动的运动状态

3. 旋转矢量法

用旋转矢量法定初相 φ 很方便。

例：已知 $\begin{cases} x_0 = A/2 \\ v_0 > 0 \end{cases}$





答：$\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

用旋转矢量法研究振动的合成也很方便。

同相与反相

设有两个同频率简谐振动：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

任意时刻相位差：

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$

等于初相差

两个简谐振动在步调上的关系，可以用它们的相位差来反映。

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

（1）两振动同相

$$\Delta\varphi = 2k\pi,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

x_1、x_2振动步调完全一致

（2）两个振动反相

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

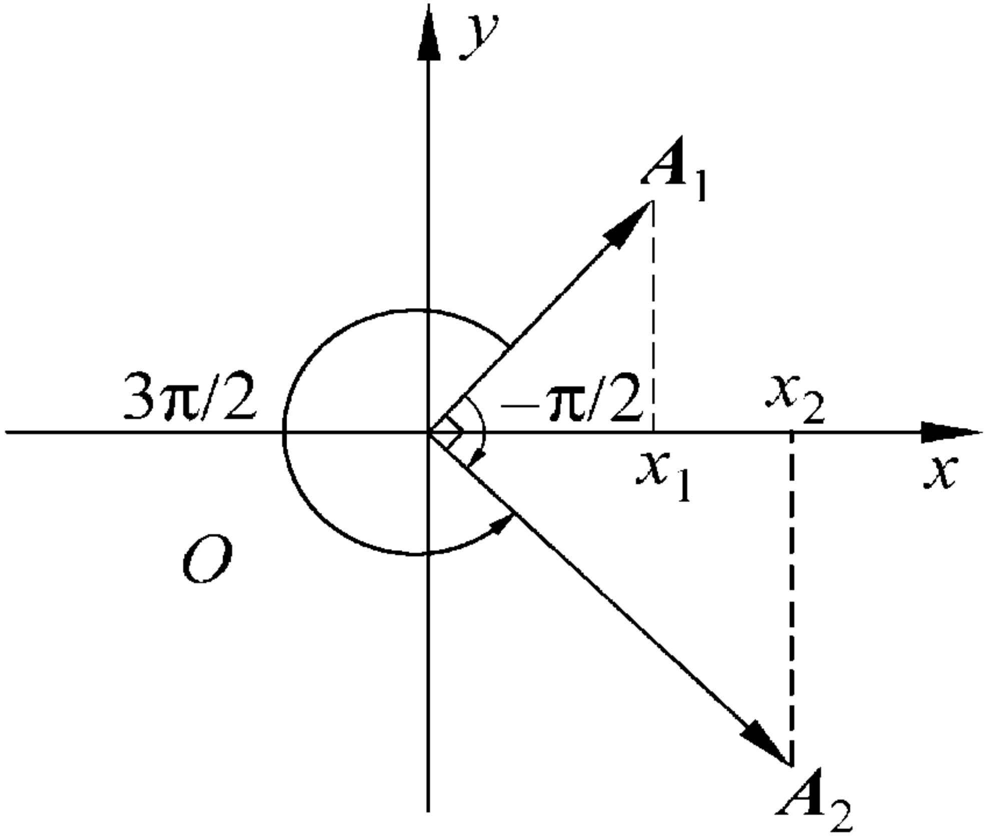
x_1、x_2振动步调完全相反

（3）$\Delta\varphi$取其他值：称不同相

【例】 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{3\pi}{2}$

一般不说 x_2 比 x_1 的相位超前 $3\pi/2$，

而是说 x_2 比 x_1 的相位落后 $\pi/2$。



4 复数表示

$$\boxed{\tilde{x} = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}}$$

$$x = \mathrm{Re}\,\tilde{x} = A\cos(\omega t+\varphi)$$

指数取负号：　照顾量子力学的习惯

用旋转矢量图和复数形式来描述简谐振动，为振动问题的分析和计算带来方便。

§ 6.4 阻尼振动

振幅不断减小的振动，称为阻尼振动。

当物体的运动速度不太大时，粘性力与速度成正比：

$$f_{\mathrm{r}} = -\gamma v = -\gamma \dot{x}$$

系数 γ 决定于物体的形状、大小、表面状况和介质的性质。

在线性恢复力、粘性力的作用下，牛顿方程为

$$-kx - \gamma \dot{x} = m\ddot{x}$$

$$-kx-\gamma\dot{x}=m\ddot{x}$$

设 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ （无阻尼本征角频率）

$\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$（阻尼系数）

阻尼振动动力学方程：

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

按照 β 的大小，可分成三种阻尼情况：

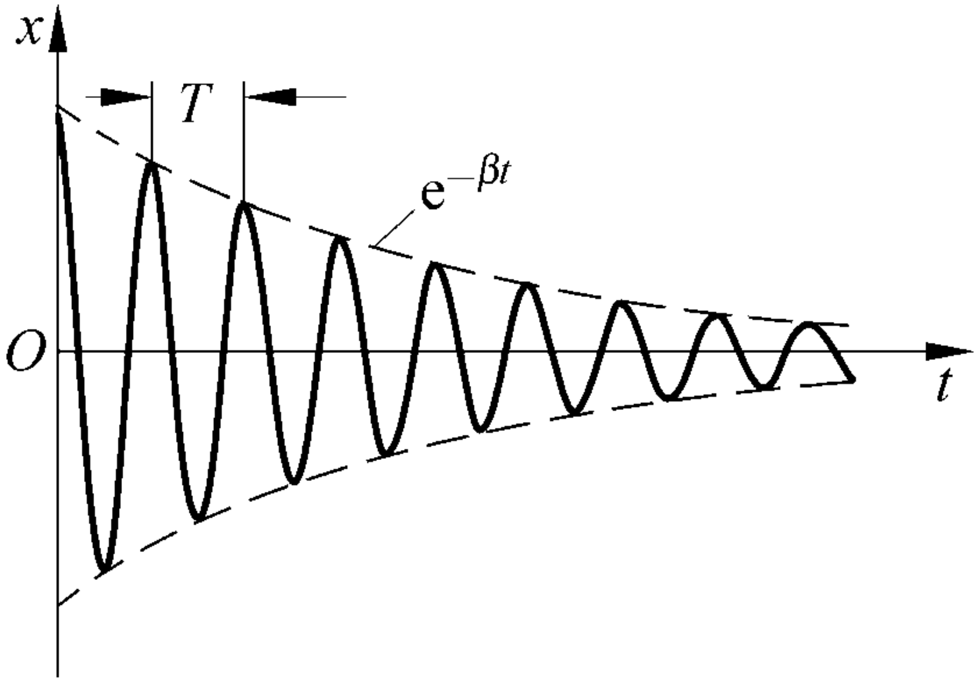
$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

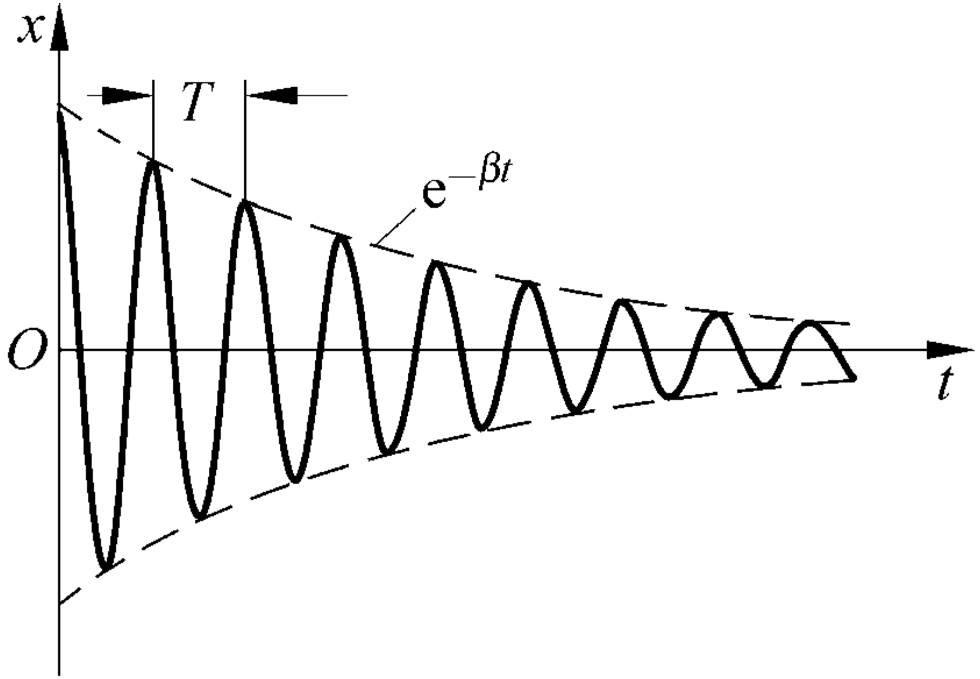
（1）欠阻尼（$\beta^2<\omega_0^2$）

解：$x=A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

——振幅随时间不断衰减，β 越大，衰减得越快。





“周期”:$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$

$T>2\pi/\omega_0$ ：阻尼使振动变慢

通常阻尼都很小，阻尼振动一般指欠阻尼振动。

品质因素概念

鸣响时间τ： 能量减到起始能量的 1/e 所用时

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad E = E_0 e^{-2\beta t} \qquad \tau = \frac{1}{2\beta}$$

在τ时间内，振动次数越多，振动质量越好。

品质因素： $Q = 2\pi \dfrac{\tau}{T} = \omega\tau$

（T、ω可用系统固有周期和角频率代）

无线电震荡回路：　$Q \sim 10^2$

音叉、钢琴弦：　$Q \sim 10^3$

激光器光学谐振腔：　$Q \sim 10^7$

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

（2）过阻尼（$\beta^2>\omega_0^2$）

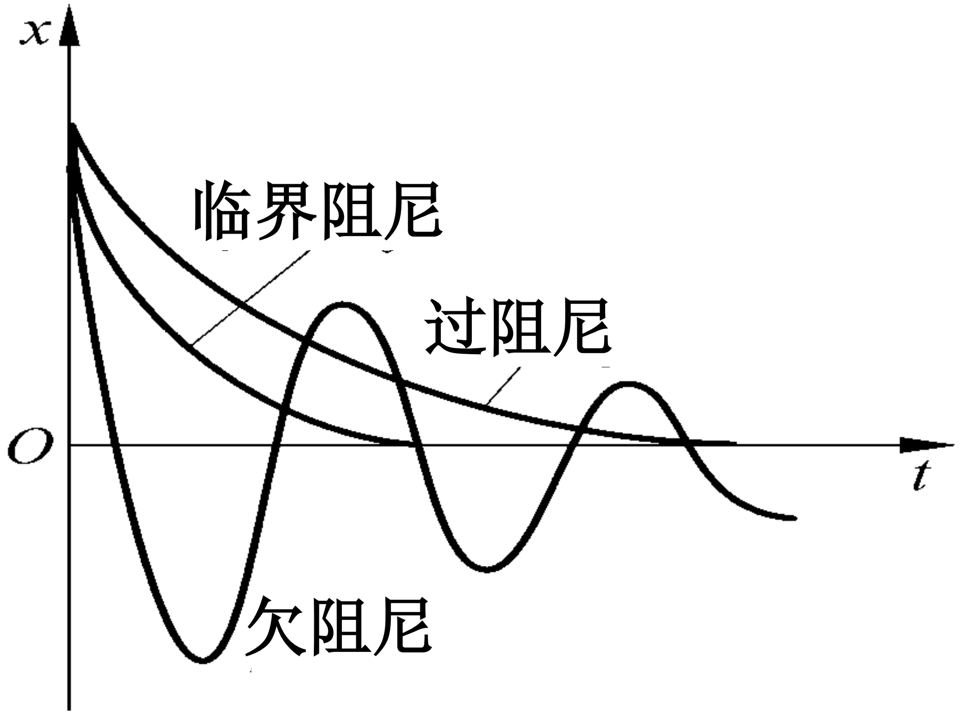
解：$x=C_1\mathrm{e}^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_2\mathrm{e}^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$

不能作往复运动，经相当长时间才能回到平衡位置。

（3）临界阻尼（$\beta^2=\omega_0^2$）

解：$x=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-\beta t}$

刚开始不能作往复运动，但能很快回到平衡位置。



希望物体在一段时间内近似作简谐振动，应减小阻尼；希望物体不发生往复运动，尽快回到平衡位置（如电磁仪表的表针），应对系统施加临界阻尼。

§6.5 受迫振动

$$-m\omega_0^2 x - \gamma\dot{x} + H\cos\omega t = m\ddot{x}$$

固有频率

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = h\cos\omega t$$

非齐次方程　时间长了以后，随驱动频率振动

$$x = A_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi_0) + A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A\cos(\omega t + \varphi) - 2\beta A\omega\sin(\omega t + \varphi) = h\cos\omega t$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A\cos\varphi - 2\beta A\omega\sin\varphi = h$$

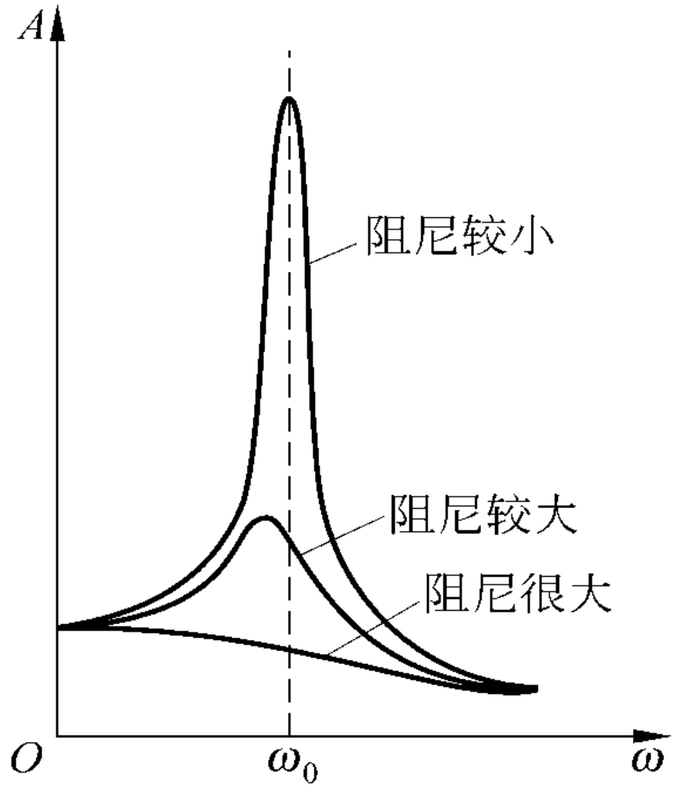
$$-(\omega_0^2 - \omega^2)A\sin\varphi - 2\beta A\omega\cos\varphi = 0$$

$$A=\frac{h}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi-2\beta\omega\sin\varphi}$$

$$\tan\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$$

$$=\frac{h}{\sqrt{(\omega^2+2\beta^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}}$$

$\omega_\gamma=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ **振幅最大**



位移共振

$$A_r=\frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

【演示实验】耦合摆球演示共振


小号发出的声波足
以使酒杯破碎

发生共振时由于振幅过大可能损坏机器、设备或建筑。

1940年华盛顿的塔科曼大桥在大风中产生振动

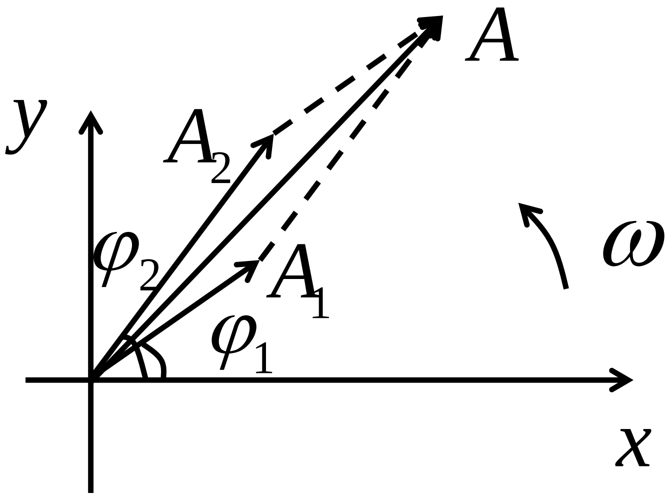
随后在大风中因产生共振而断塌

§6.6 同振动方向同频率简谐振动合成

代数或几何法

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad x = x_1 + x_2$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \qquad = A\cos(\omega t+\varphi)$$



$$A=\sqrt{A_1^2+A_1^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

同振动方向同频率简谐振动合成简谐振动

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\underline{\varphi_2-\varphi_1})}$$

（1）两分振动同相

$$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}$$

$$=A_1+A_2$$

同方向、同频率：两分振动同相时，振动相长，合振幅极大，合成后振动加强。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\underline{\varphi_2-\varphi_1})}$$

（2）两分振动反相

$$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-1$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2}=\left|A_1-A_2\right|$$

同方向、同频率：两分振动反相时，振动相消，合振幅极小，合成后振动减弱。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2}=|A_1-A_2|$$

特别是当 $A_1=A_2$ 时，$A=0$

同方向、同频率：两个等幅反相的振动互相抵消

（3）当 $\varphi_2-\varphi_1$ 取其他值时

$$|A_1-A_2| < A < A_1+A_2$$

§6.7 同振动方向, 不同频率简谐振动合成

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$= 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}) \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})$$

变化慢　　　　变化快

不再是简谐振动

同方向、不同频率的一种重要的特殊情况：

ω_2、ω_1 较大，$\omega_2 - \omega_1 << \omega_1 + \omega_2$

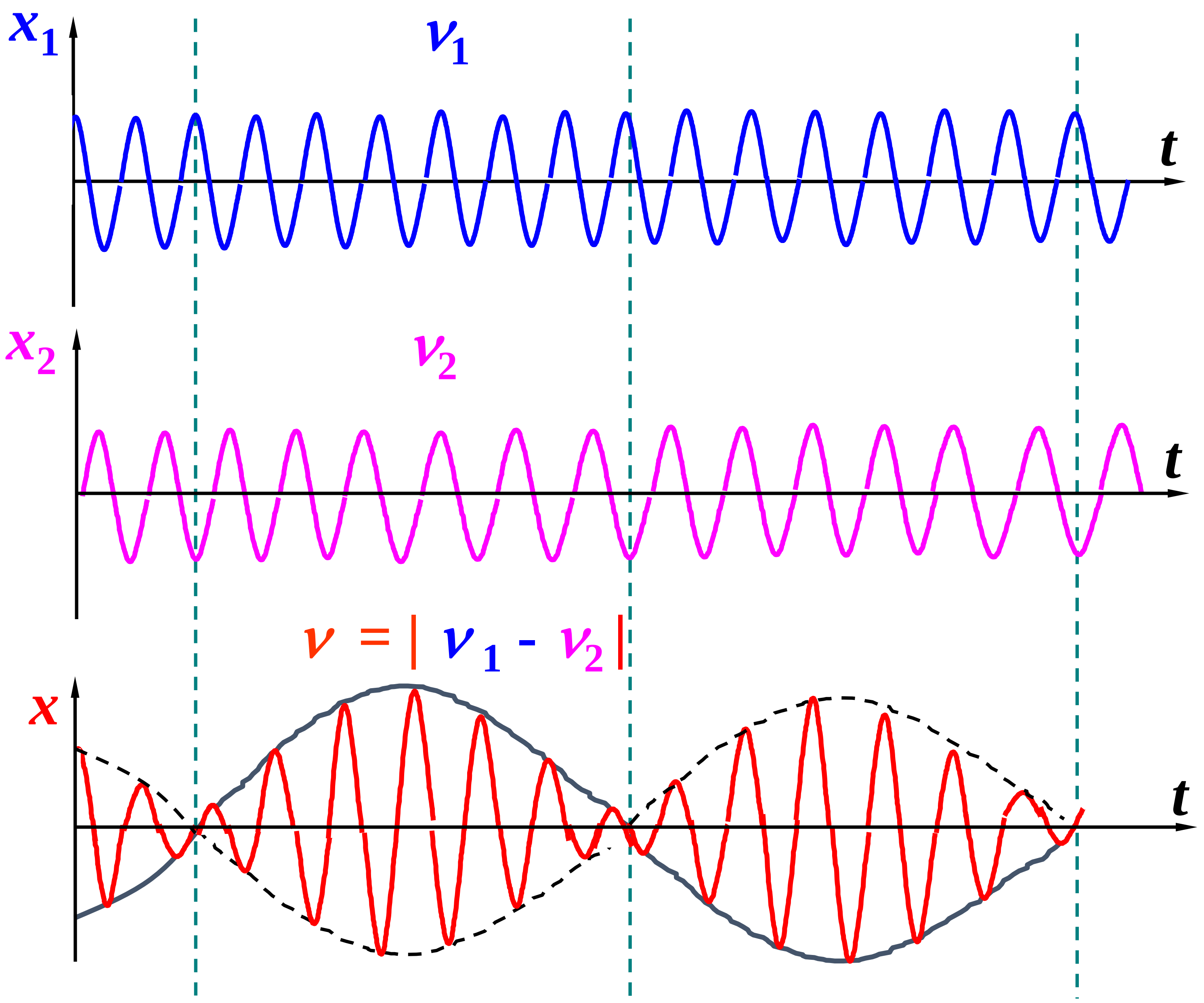
可近似看成是一种振动：

“振幅”：$\left| 2A\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right|$

角频率：$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

拍：频率都较大且频率差很小的两个同方向简谐振动，合成时产生合振幅时大、时小的现象。

【演示实验】
音叉演示拍



拍频：单位时间内振动加强或减弱的次数

——振幅 $\left|2A\cos\dfrac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right|$ 的频率

由于是绝对值，所以拍频：

$$\Delta\nu=\frac{\nu_2-\nu_1}{2}\times 2=\nu_2-\nu_1$$

$$\boxed{\Delta\nu=\nu_2-\nu_1}$$

——拍频等于两个分振动频率之差

§6.8 振动方向相互垂直的简谐振动合成

1. 同频率 $\omega_x = \omega_y$

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \quad y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y}\cos(\varphi_y - \varphi_x) = \sin^2(\varphi_y - \varphi_x)$$

▲ $\varphi_y - \varphi_x = 0, \pi$，合振动为线振动。

▲ $\varphi_y - \varphi_x = \pm\dfrac{\pi}{2}$，合振动为正椭圆。

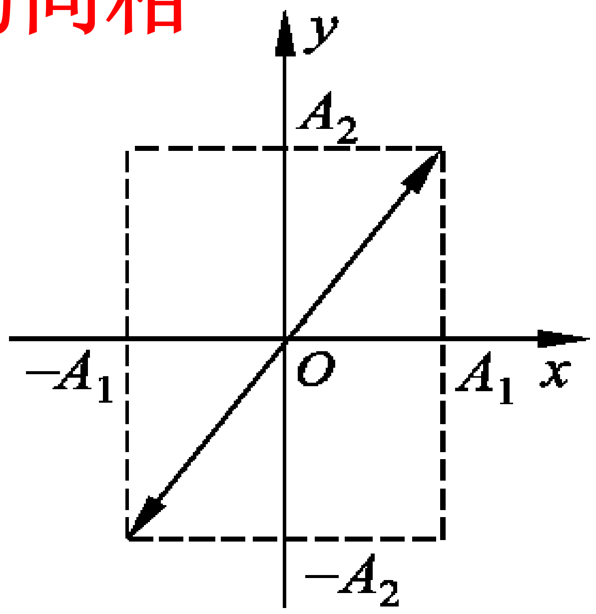
且当 $A_x = A_y$ 时，为圆。

▲ 一般情况下，合振动为斜椭圆。

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

（1） $\varphi_2-\varphi_1=0$， 两分振动同相

$$\frac{x}{y}=\frac{A_1}{A_2}$$



$\varphi_2-\varphi_1=0$

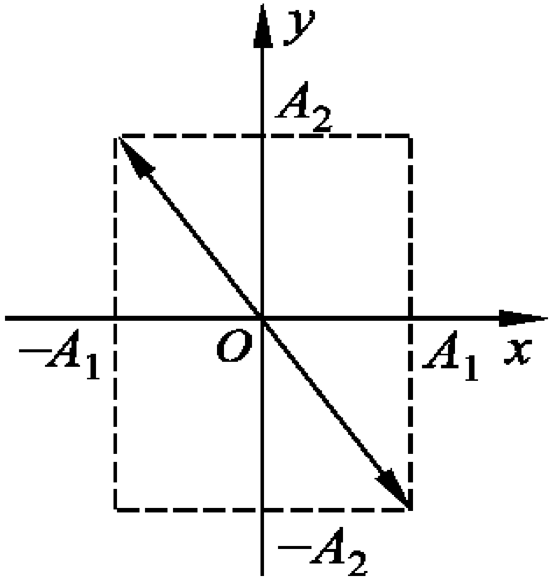
t 时刻质点离开原点的位移：

$$s=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动： Ⅰ、Ⅲ象限，过原点的简谐振动，频率与分振动相同。

（2）$\varphi_2-\varphi_1=\pi$， 两分振动反相

$$\frac{x}{y}=-\frac{A_1}{A_2}$$



$\varphi_2-\varphi_1=\pi$

合振动： Ⅱ、Ⅳ象限，过原点的简谐振动，频率与分振动相同。

（3）$\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$，$y$ 比 x 超前 $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

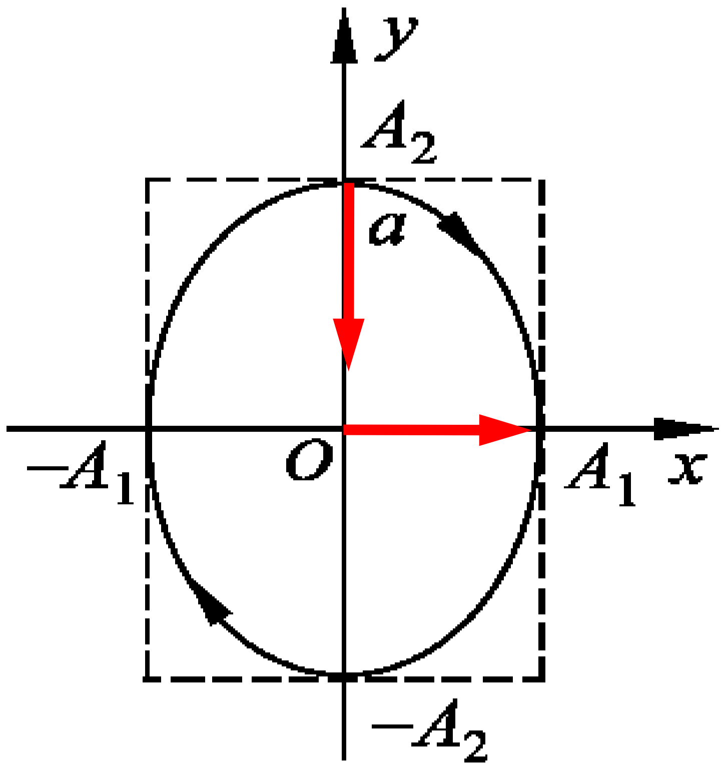
质点的轨迹是以坐标轴为主轴的正椭圆（或圆）

——不再是简谐振动！

合运动的轨迹：右旋正椭圆，

周期等于分振动周期。

$A_1=A_2$时：右旋圆



$\varphi_2-\varphi_1=\pi/2$

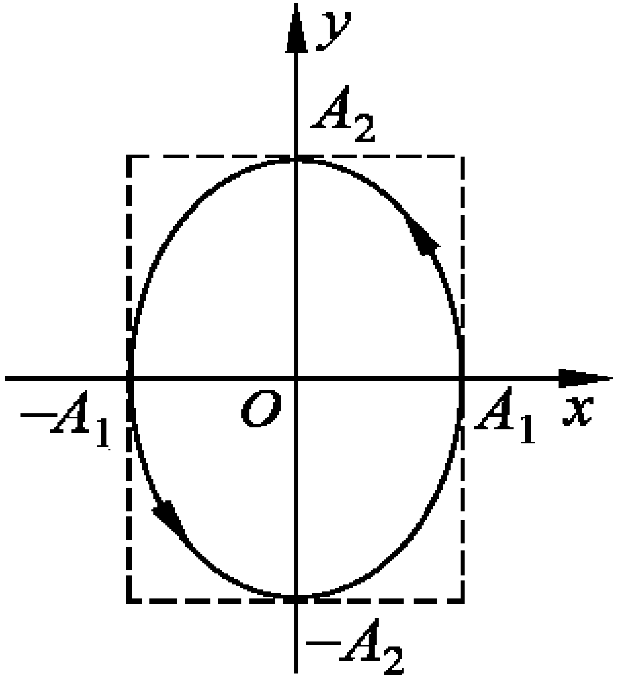
（4）$\varphi_2-\varphi_1=-\dfrac{\pi}{2}$， y 比 x 落后 $\dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

合运动的轨迹：左旋正椭圆

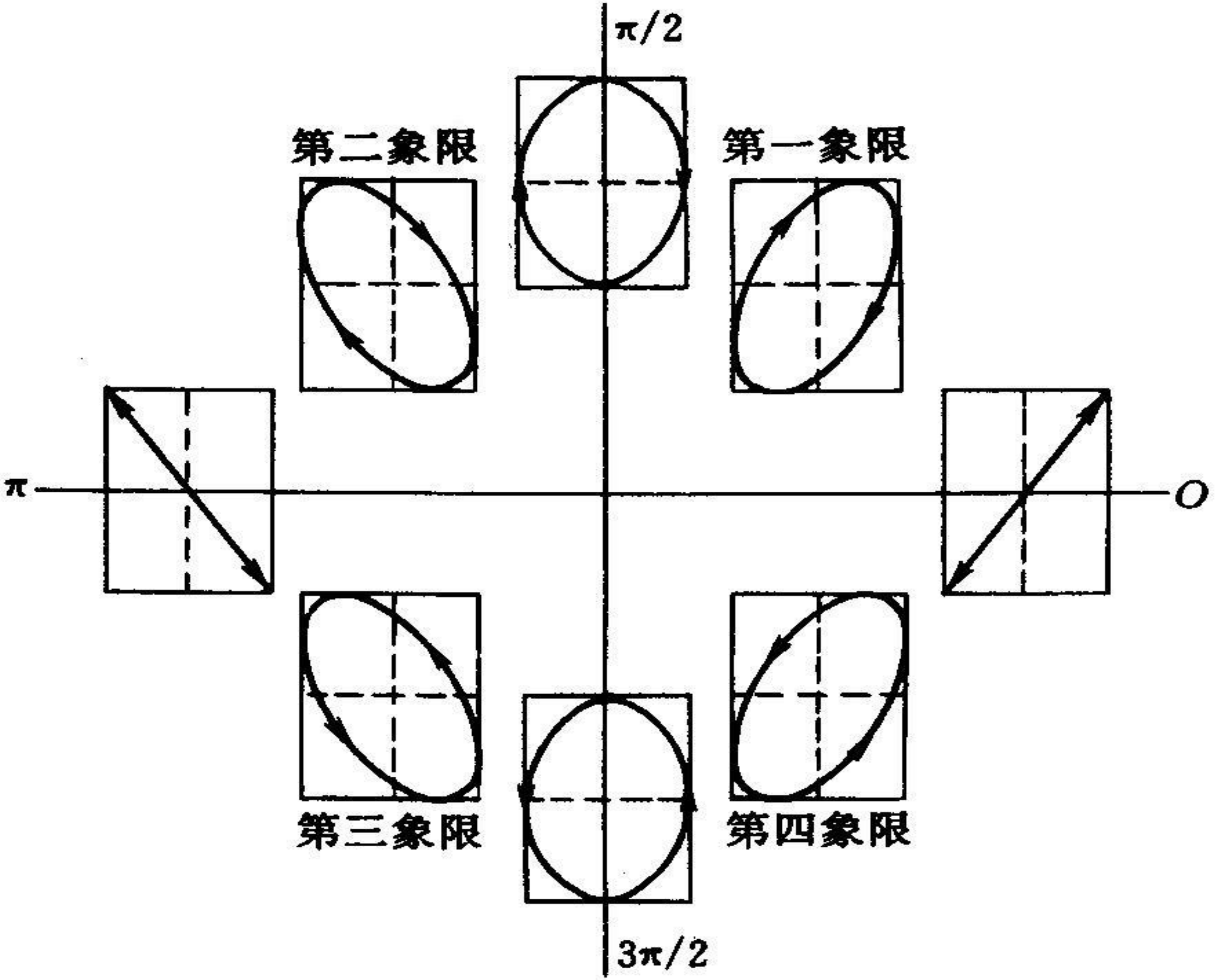
周期等于分振动的周期

当 $A_1=A_2$ 时：左旋圆



$\varphi_2-\varphi_1=-\pi/2$

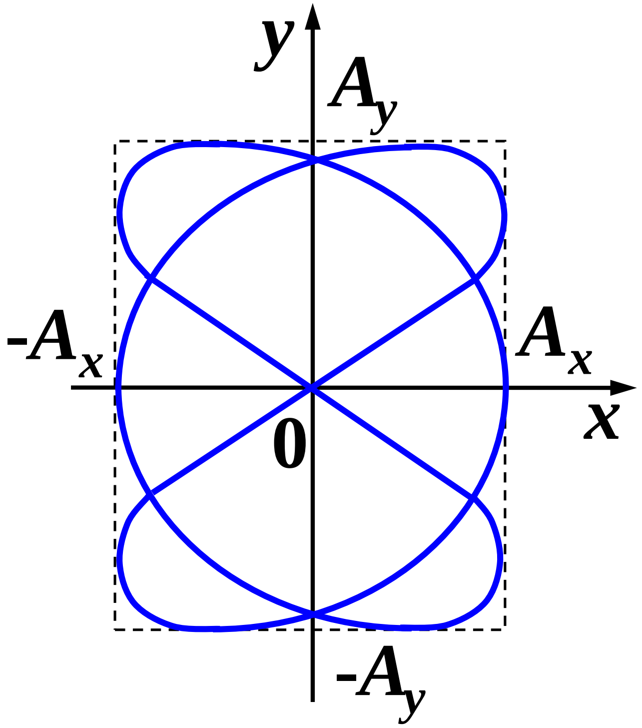
（5）当 $\varphi_2-\varphi_1$ 取其他值时，合运动的轨迹一般为斜椭圆。



π/2
第二象限
第一象限
π
O
第三象限
第四象限
3π/2

2. 不同频率，但有简单整数比 $\omega_x/\omega_y = m/n$

合成轨迹为稳定的闭合曲线 —— 李萨如图形

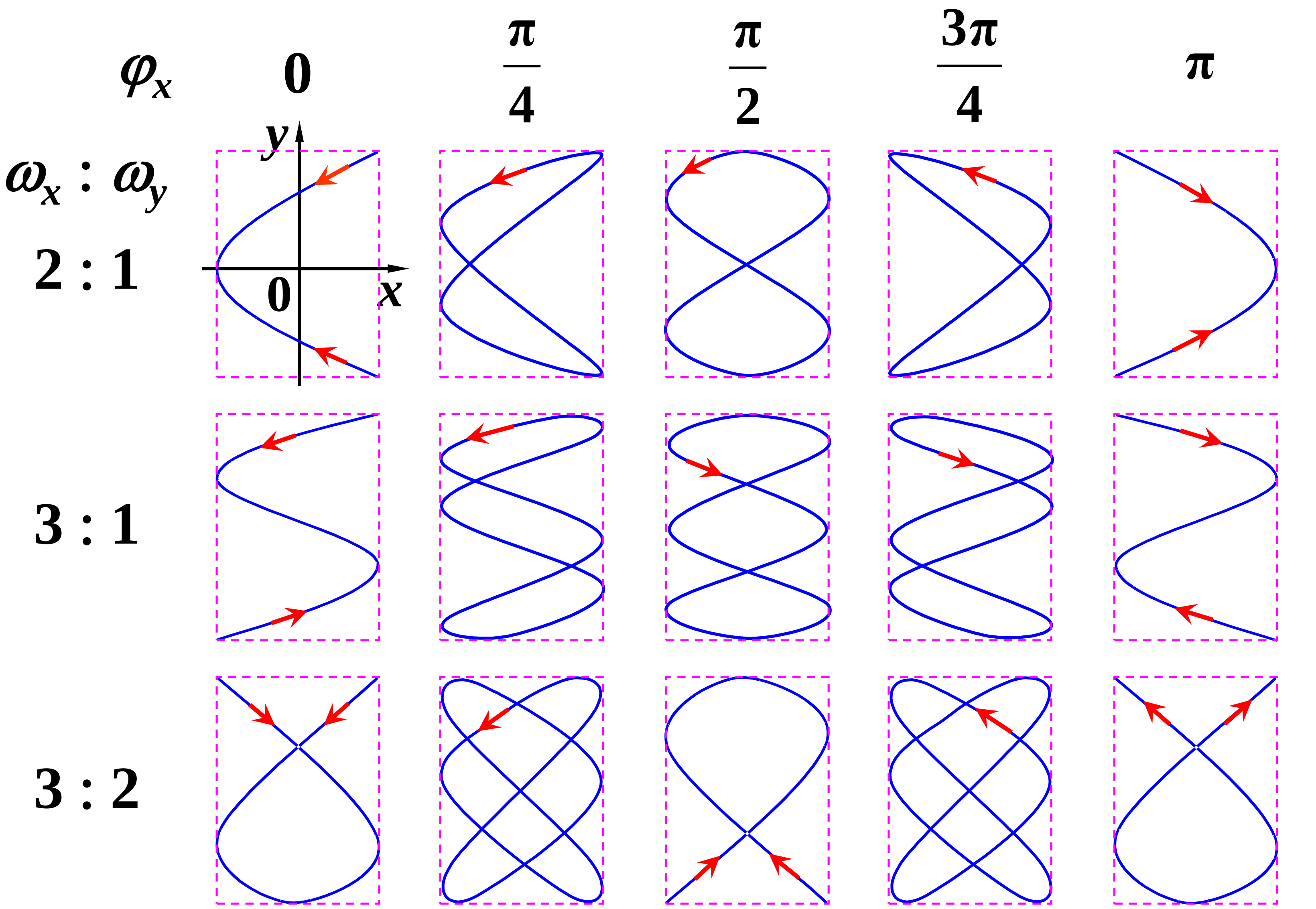


$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{x\text{达到最大的次数}}{y\text{达到最大的次数}}$$

例如左图：$\dfrac{\omega_x}{\omega_y} = \dfrac{3}{2}$

应用：测定未知频率

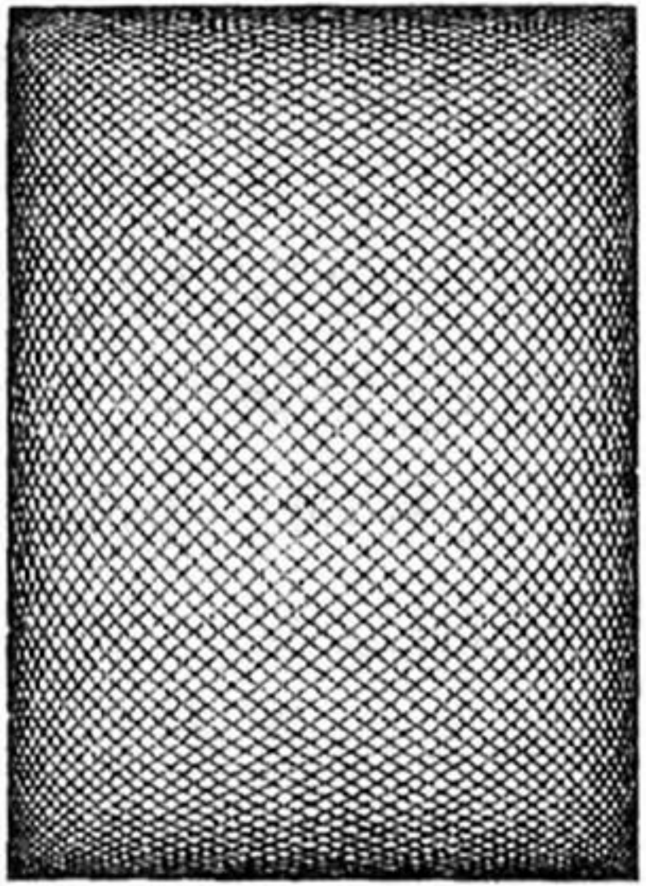
$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x), \quad y = A_y \cos \omega_y t, \quad A_x : A_y = 2:3$$



3. $\dfrac{\omega_x}{\omega_y}=$ 无理数

合成轨迹为非闭合曲线

两个振动间如果存在弱的物理耦合，就可以使得 $\omega_1 : \omega_2$ 就近锁定为两个整数比，称为锁频现象，如生物钟现象。



示波器演示实验

§6. 9*频谱分析

任何周期振动

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t)$$

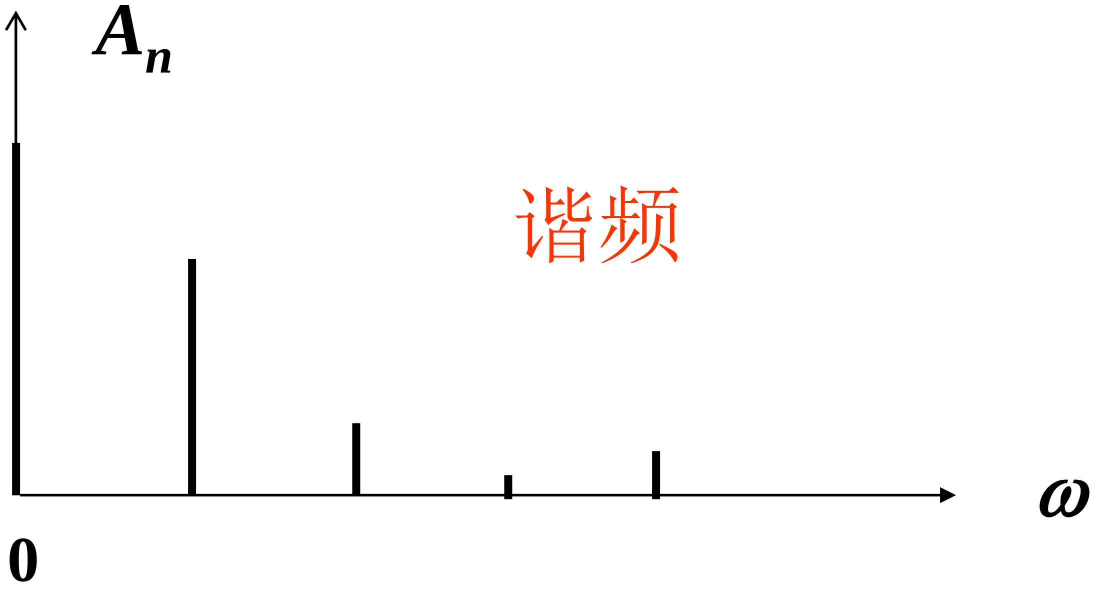
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}A_n\cos(\omega_n t+\phi_n)\qquad \omega_n=\frac{2\pi n}{T}=n\omega_1$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\frac{2\pi}{T}tdt$$

基频



$$\text{任意振动} \xrightarrow[\text{分解}]{\text{傅立叶分析}} \text{简谐振动叠加}$$

周期为 T 的任意振动可分解为傅立叶级数：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)] \quad (\omega = 2\pi/T)$$

$k = 1$ 基频（ ω） 决定音调

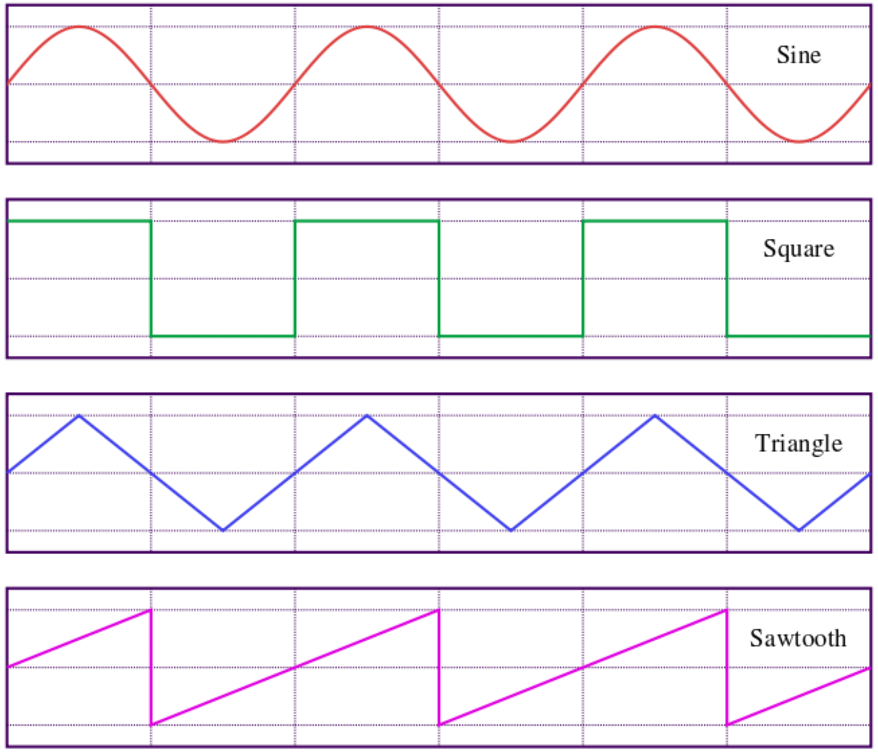
$k = 2$ 二次谐频（2ω）

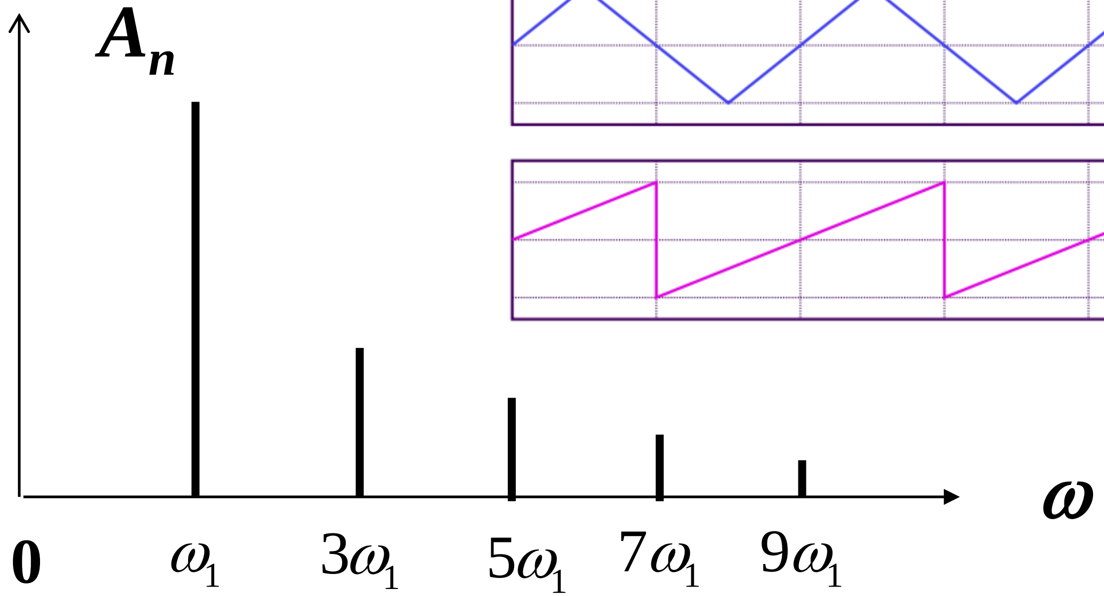
$k = 3$ 三次谐频（3ω）

……

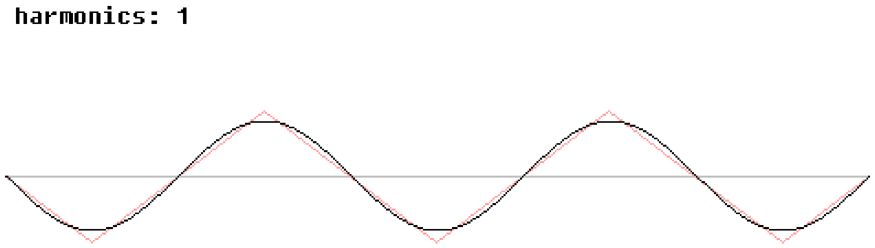
高次谐频 决定音色

方波 $$f(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\omega t]$$

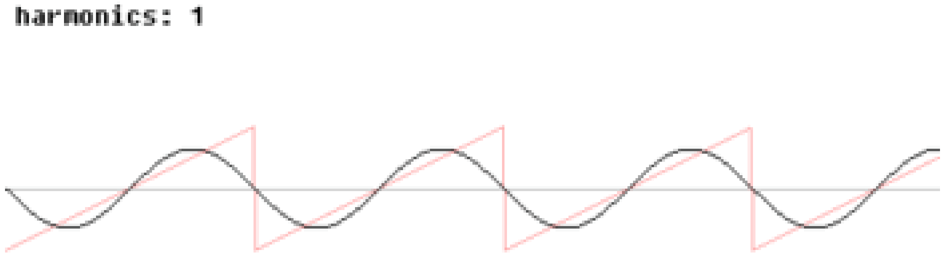




三角波 $$f(t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin[(2n-1)\omega t]$$

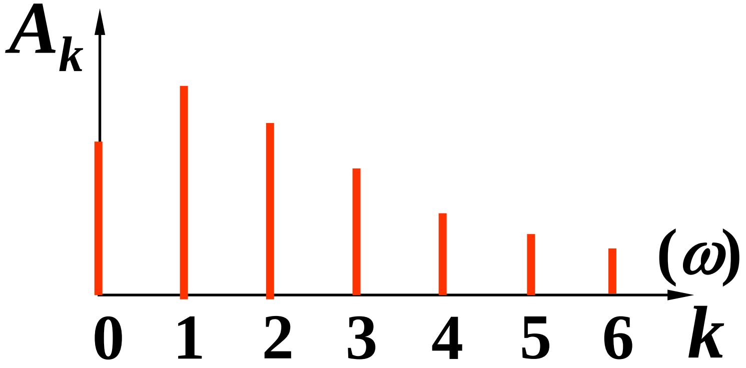


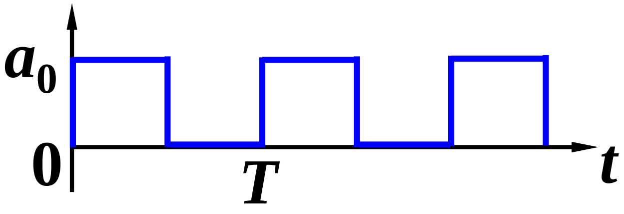
锯齿波 $$f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\omega t)$$



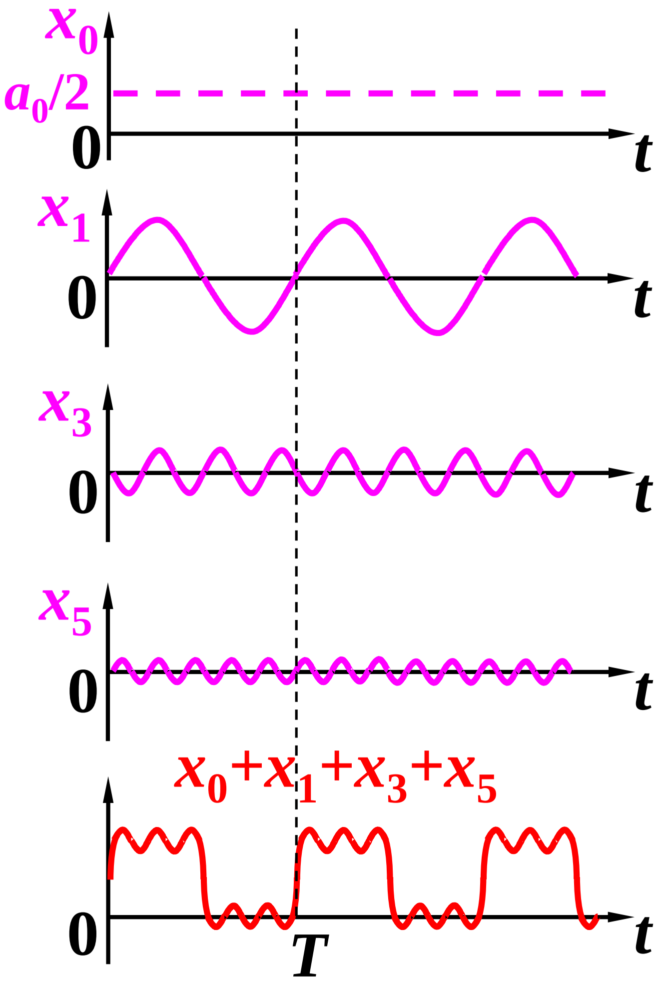
分立谱：

例如方波：





$x_{2n} = 0,\ n = 1, 2, \dots$



赞美歌唱家：

“声音洪亮，

音域宽广，

音色甜美”，

各指什么因素？

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}[a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t]d\omega$$

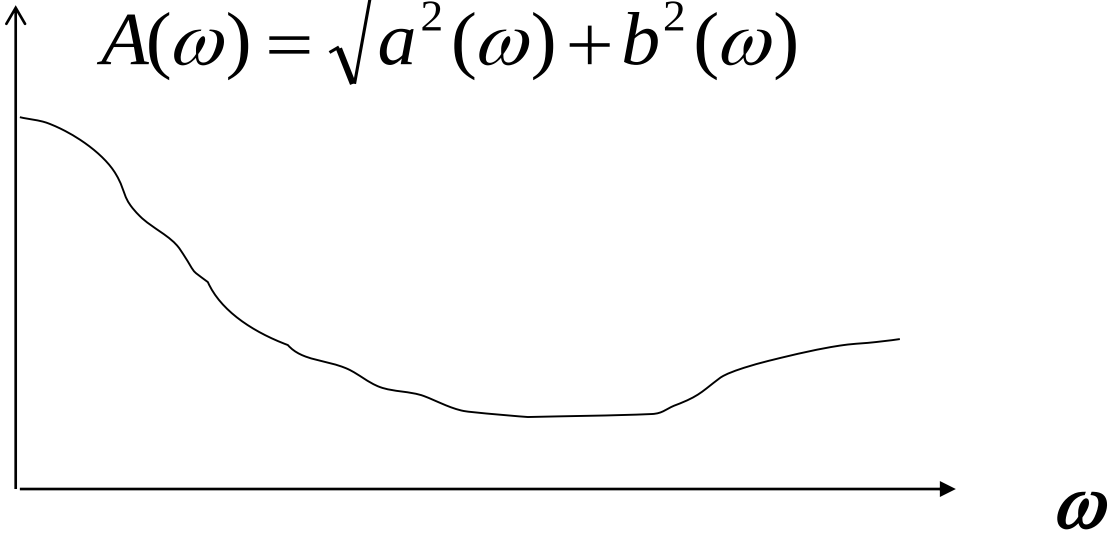
任何非周期运动

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt$$

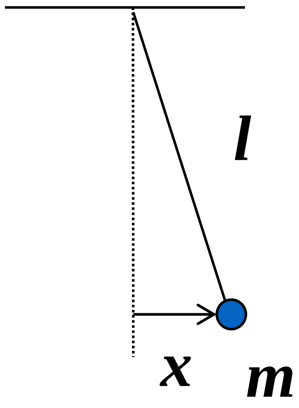
$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt$$

$$A(\omega)=\sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)}$$



§6.10 相图



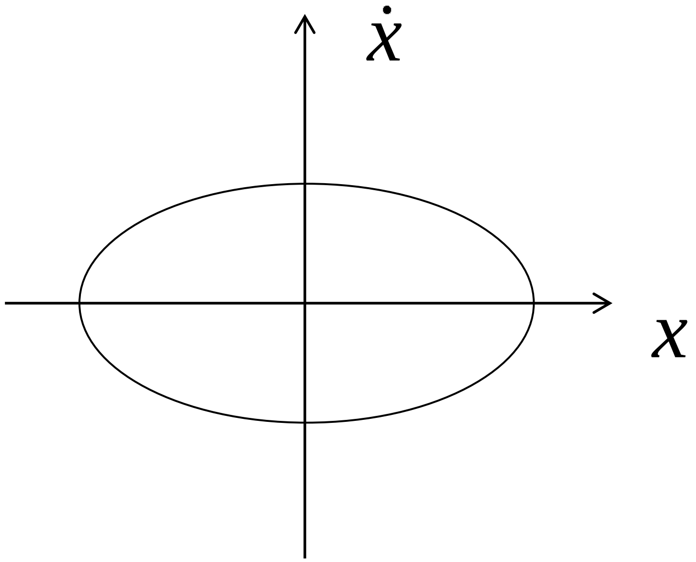
$$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\dot{x}=y$$

$$\dot{y}=-\omega^2 x$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{\omega^2 x}$$

$$\omega^2 x^2+y^2=c$$

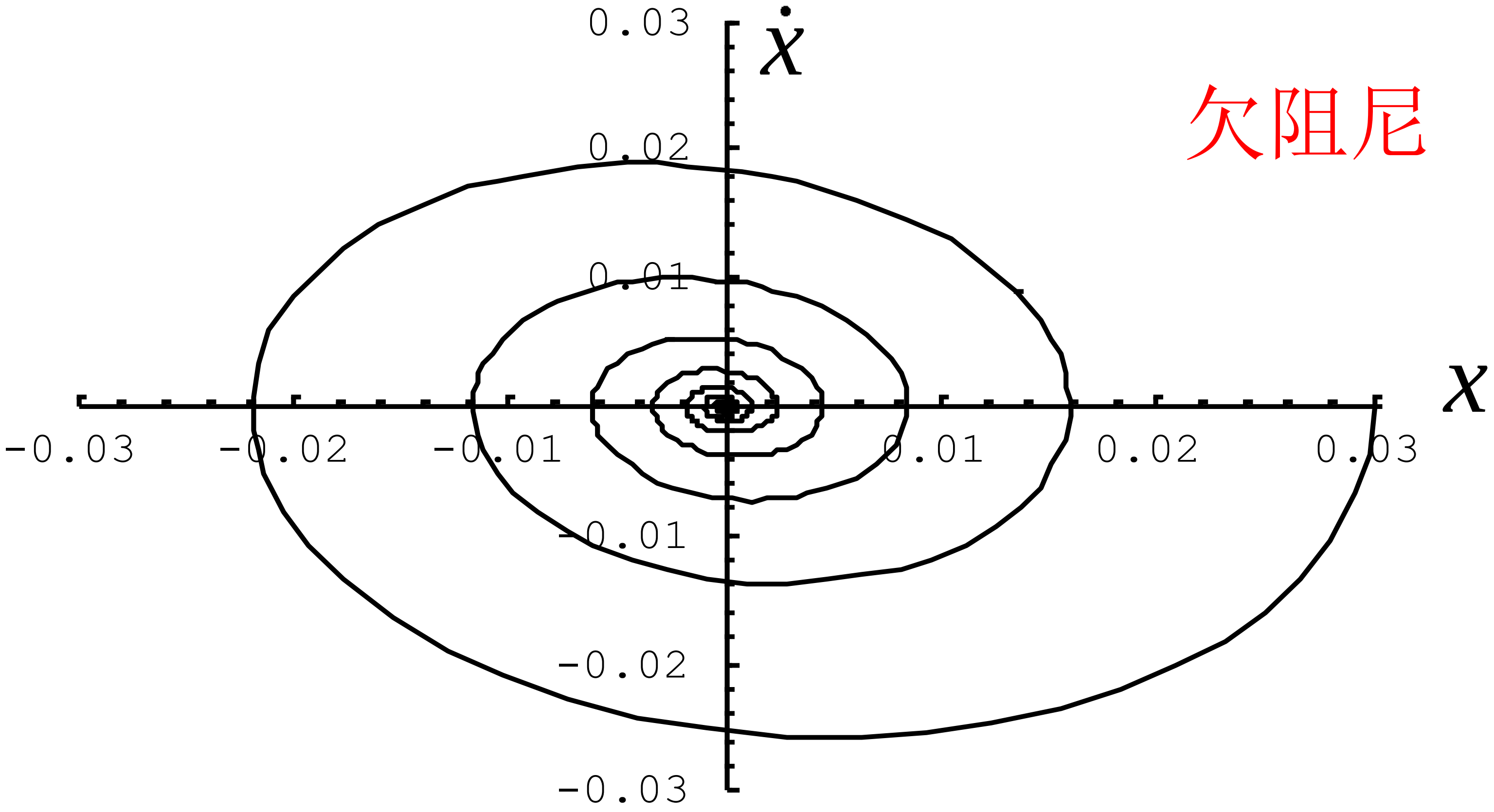


简谐振动相图

阻尼振动

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

$$x|_{t=0}=0.03,\qquad \dot{x}|_{t=0}=0,\qquad \beta=0.1,\quad \omega_0=1$$



欠阻尼

临界阻尼或过阻尼?

受迫振动

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f\cos\omega t$$

系统最终按ω频率振动

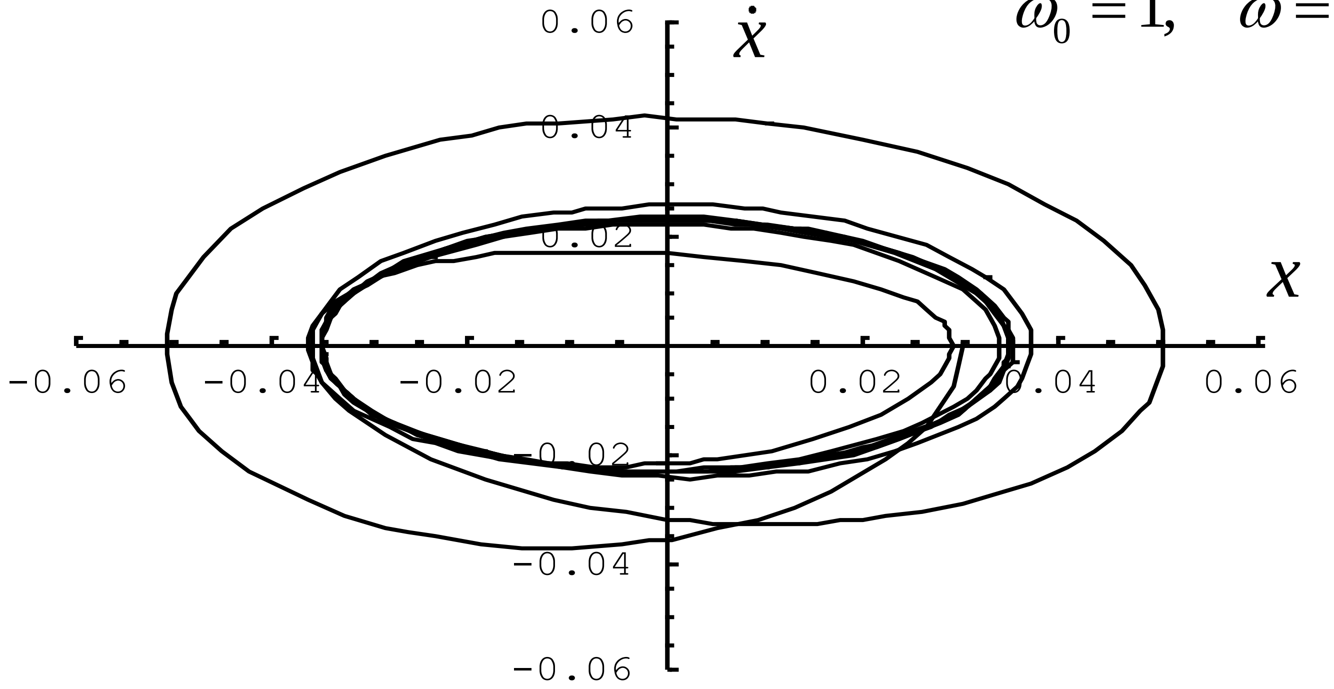
$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\dot{x}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$x|_{t=0}=0.03,\qquad \dot{x}|_{t=0}=0,$$

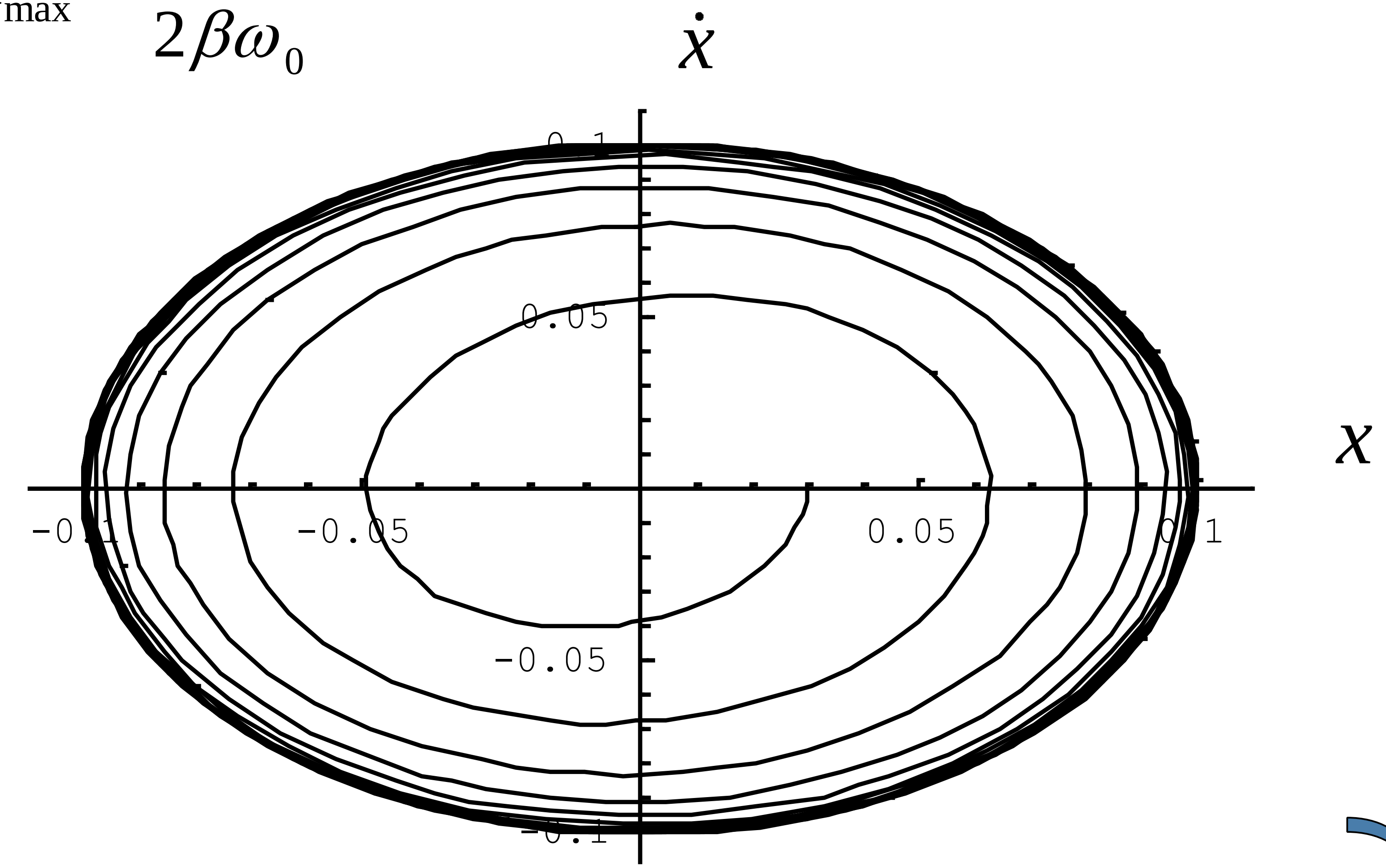
$$\beta=0.1,\quad f=0.02,$$

$$\omega_0=1,\quad \omega=0.666,$$



$\omega \approx \omega_0 = 1$ 时产生共振　系统对外界响应最大

$$x_{\max} \approx \frac{f}{2\beta\omega_0}$$



§6.11 *非线性振动及混沌

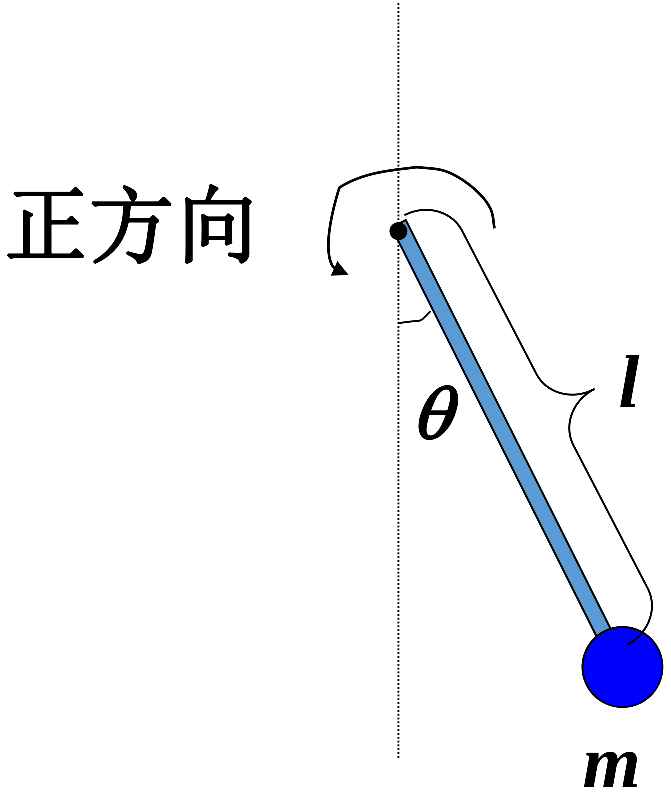
Poincaré 1892 三体问题　发现混沌

E.N.Lorenz 1963 天气模型 数值计算

M.J.Lighthill （噪声）1986:

We collectively wish to apologize for having misled the general public by spreading ideas about the determinism of systems satisfying Newton’s law of motion that, after 1960, were proven to be incorrect……

最简单的非线性振子：轻杆儿一端为轴另一端连一质点



$$\tau_g+\tau_f+\tau_{ext}=I\ddot{\theta}$$

$$\tau_g=-mgl\sin\theta$$

$$\because f_r\propto\upsilon$$

$$\therefore \tau_f=-2\beta\dot{\theta}$$

$$\tau_{ext}=\tau_0\cos\omega t$$

$$\ddot{\theta}+2\alpha\dot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta = f\cos\omega t$$

θ很小, 线性, 否则非线性

$$\ddot{\theta}+2\alpha\dot{\theta}+\omega_0^2\theta = f\cos\omega t \qquad \theta=\theta(t)$$

$$\theta|_{t=0}=\xi \qquad \dot{\theta}|_{t=0}=\eta$$

令 $\xi\to\xi+\delta\xi$ 或 $\eta\to\eta+\delta\eta$

经过有限时间 $\theta=\theta(t)+\delta\theta$

$\delta\xi\to 0$时 $\delta\theta\to 0$ 解稳定 经典力学可预测性

$\delta\eta\to 0$

θ不小

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = f\cos\omega t$$

$$\theta|_{t=0} = \xi \qquad \dot{\theta}|_{t=0} = \eta$$

$$\theta = \theta(t)$$

令 $\xi \to \xi + \delta\xi$ 或 $\eta \to \eta + \delta\eta$

经过有限时间 $\theta = \theta(t) + \delta\theta$

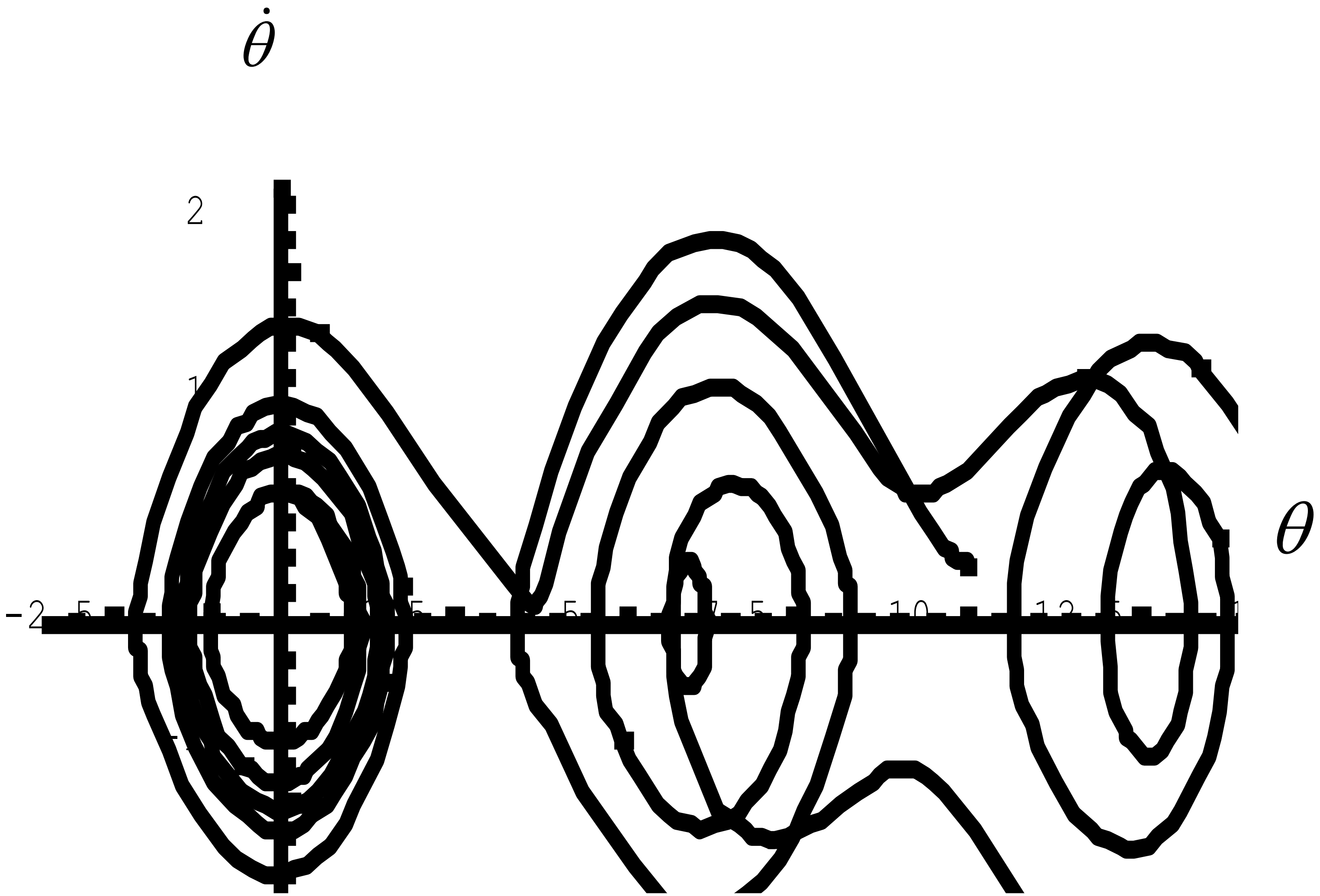
在有些条件下（f大）

$\delta\xi \to 0$时 $\delta\theta \not\to 0$ 解不稳定

$\delta\eta \to 0$ 初值敏感，混沌

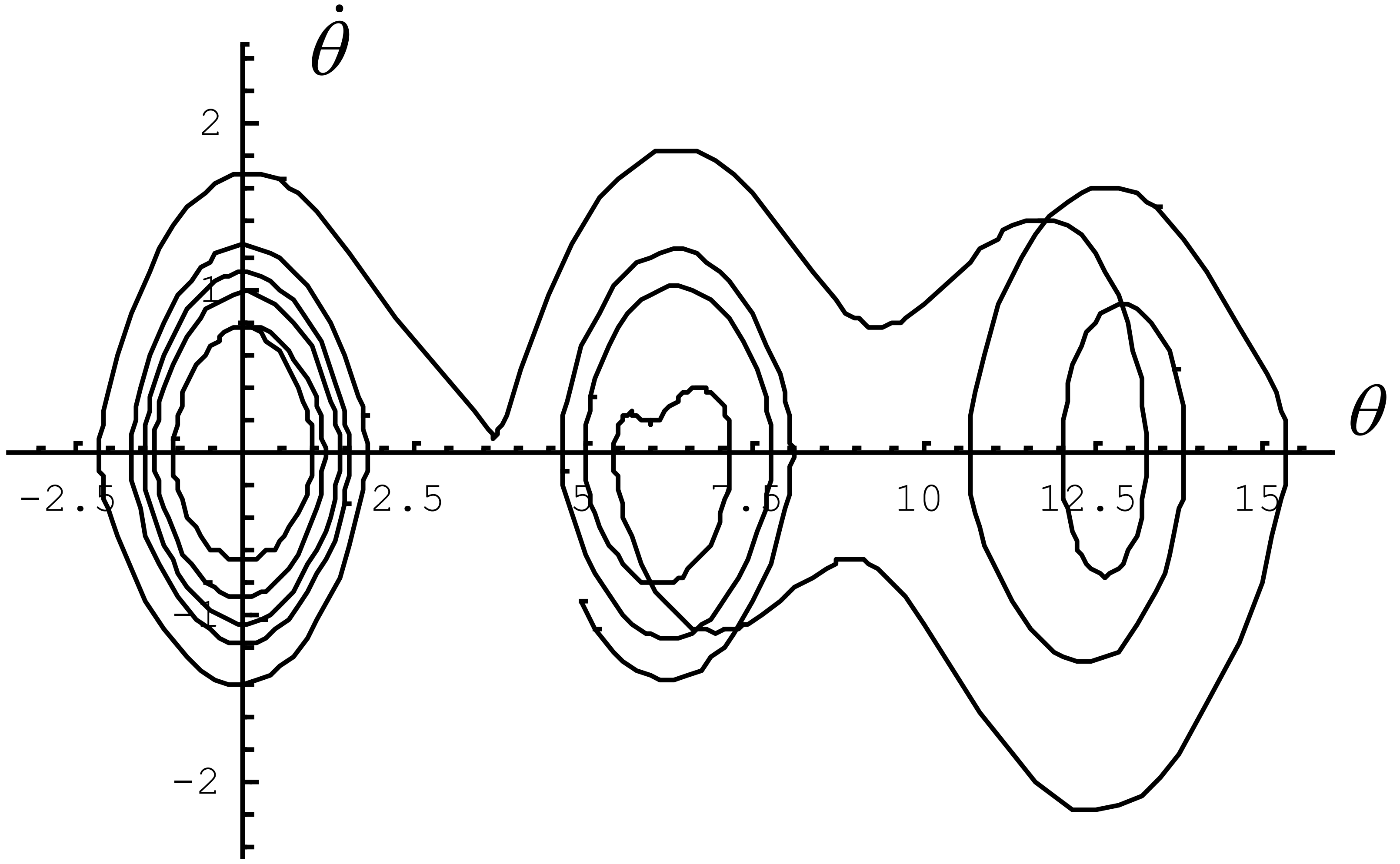
$$\theta\,|_{t=0} = -0.0885 \qquad \dot{\theta}\,|_{t=0} = 0.8 \qquad \alpha = 0.1$$

$$f = 0.52 \qquad \omega = 0.666$$



$$\theta|_{t=0} = -0.0886 \qquad \dot{\theta}|_{t=0} = 0.8 \qquad \alpha = 0.1$$

$$f = 0.52 \qquad \omega = 0.666$$



$$\theta|_{t=0} = -0.0887 \qquad \dot{\theta}|_{t=0} = 0.8 \qquad \alpha = 0.1$$

$$f = 0.52 \qquad \omega = 0.666$$