7.7 波的叠加，驻波

一. 波的叠加原理

波的独立传播原理：

有几列波同时在媒质中传播时，它们的传播特性（波长、频率、波速、波形）不会因其它波的存在而发生影响

细雨绵绵
独立传播

▲红、绿光束空间交叉相遇

（红仍是红、绿仍是绿）

▲听乐队演奏

（仍可辨出不同乐器的音色、旋律）

▲空中无线电波很多

（仍能分别接收不同的电台广播）

波的叠加原理：几列波可以保持各自的特点(方向、振幅、波长、频率)同时通过同一介质，在它们相遇处，质元的位移为各波单独在该处产生位移的叠加。

叠加原理由波动方程的线性所决定，当波强度过大时， 介质形变与弹力的关系不再呈线性，叠加原理也就不再成立了。

★对于电磁波的情形：

*麦克斯韦方程组的各个方程都是线性的，

如果 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 和 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 也是线性关系，

则$\vec{E}$或$\vec{H}$的每个分量的波动方程也是线性方程。

其解同样满足叠加原理。

*光波在介质中传播时：

▲ 弱光情形，介质可看作线性介质。

弱光：光波电场强度的幅值<<原子内部电子受到的电场强度（～10^{10}V/m）。

普通光源的光属弱光 (E的幅值～10^3V/m)。

▲ 强光情形（激光E 的幅值可超过10^{9} V/m），介质非线性，波的叠加原理不成立。

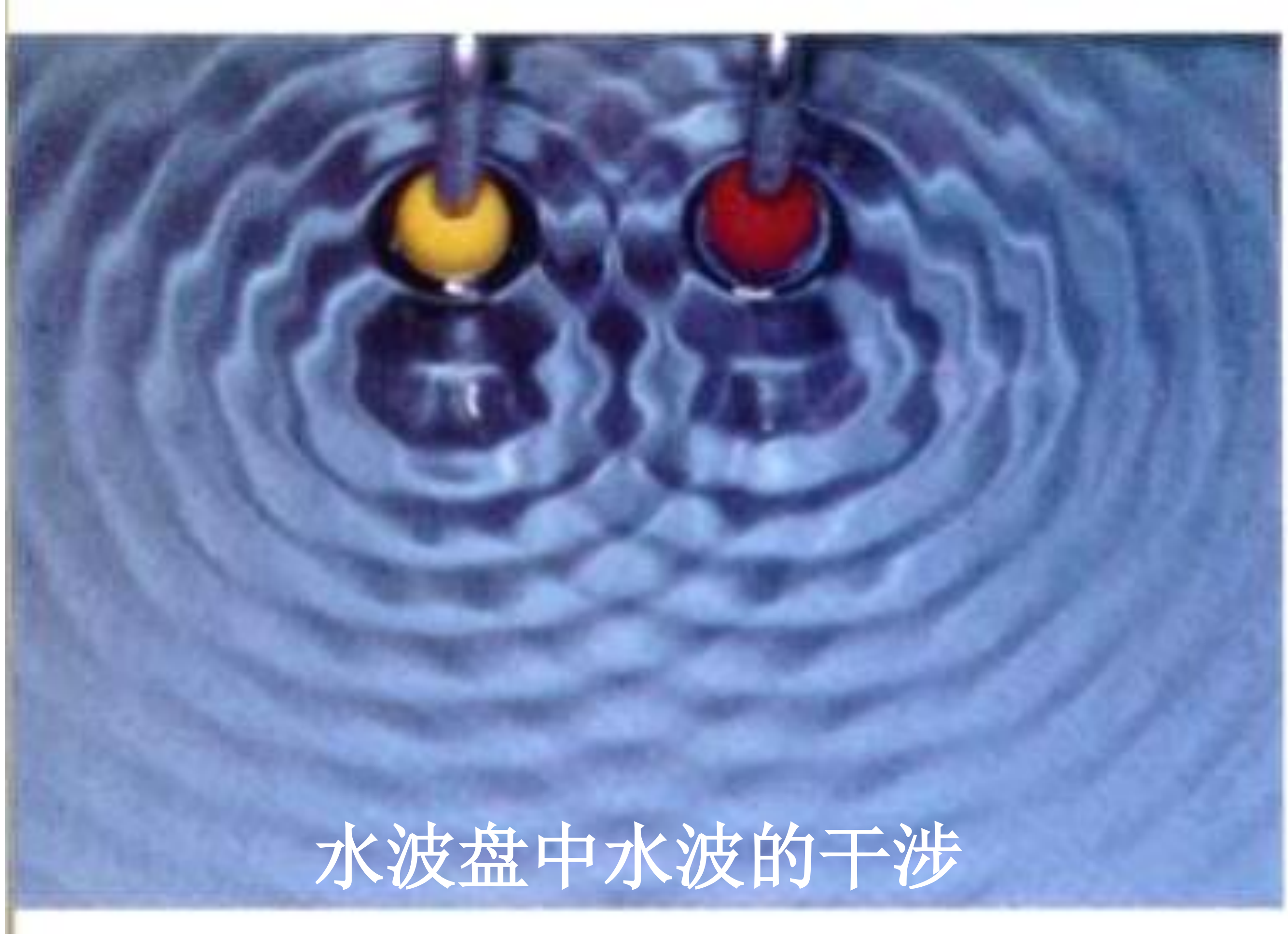
非线性光学现象：倍频效应

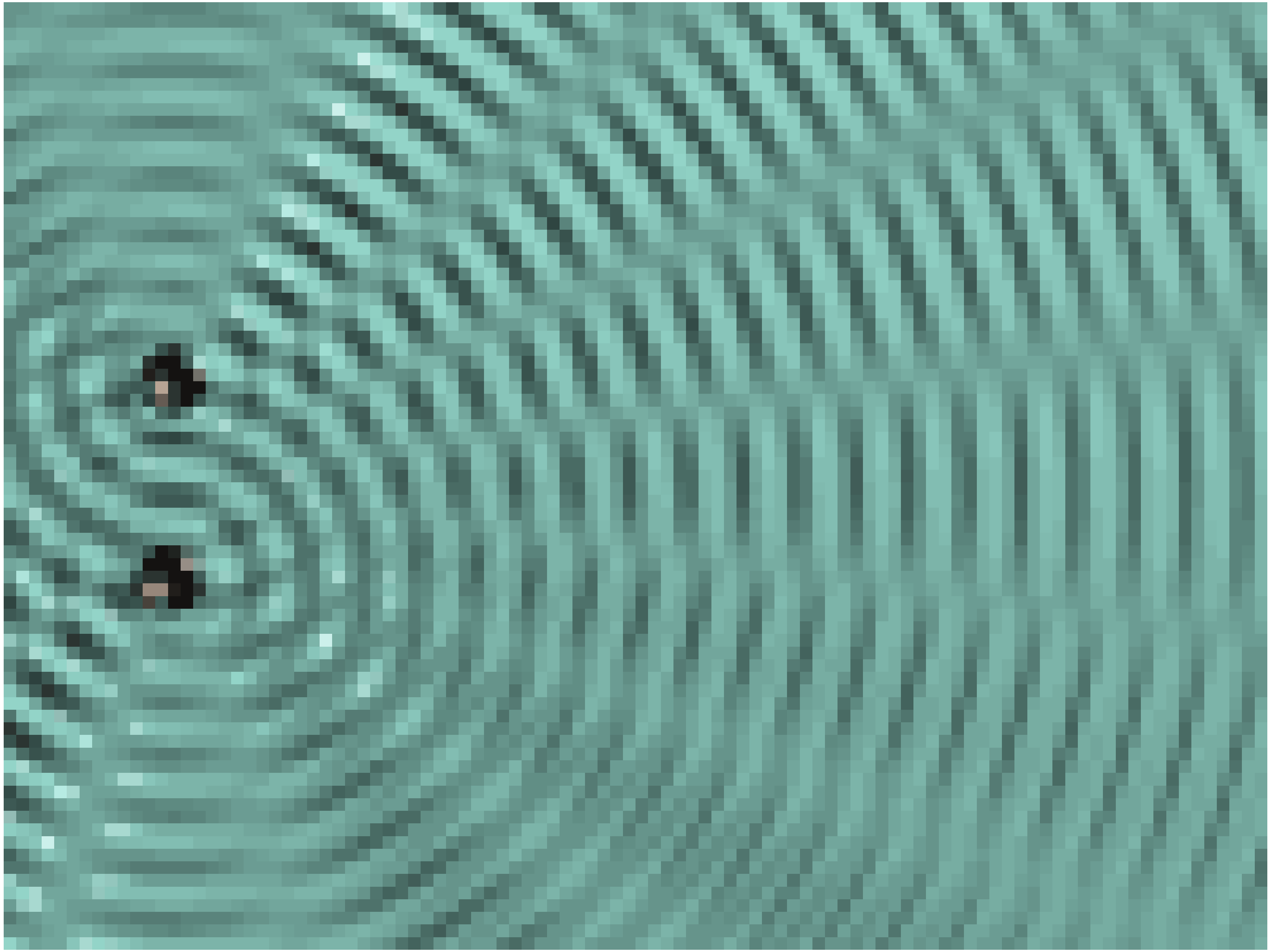
混频效应

光致透明和光学双稳态

二. 波的干涉现象

波叠加时在空间出现稳定的振动加强和减弱的分布叫波的干涉。





相干条件：①频率相同；

②振动方向相同；

③有固定的相位差。

两列波干涉的一般规律留待在后面光的干涉中再去分析。

下面研究一种特殊的、常见的干涉现象

——驻波

三. 驻波（standing wave）

能够传播的波叫行波（travelling wave）。

两列相干的行波沿相反方向传播而叠加时，就形成驻波，它是一种常见的重要干涉现象。

1. 驻波的描述

设两列行波分别沿 x 轴的正向和反向传播，在 $x = 0$ 处两波的初相均为 0：

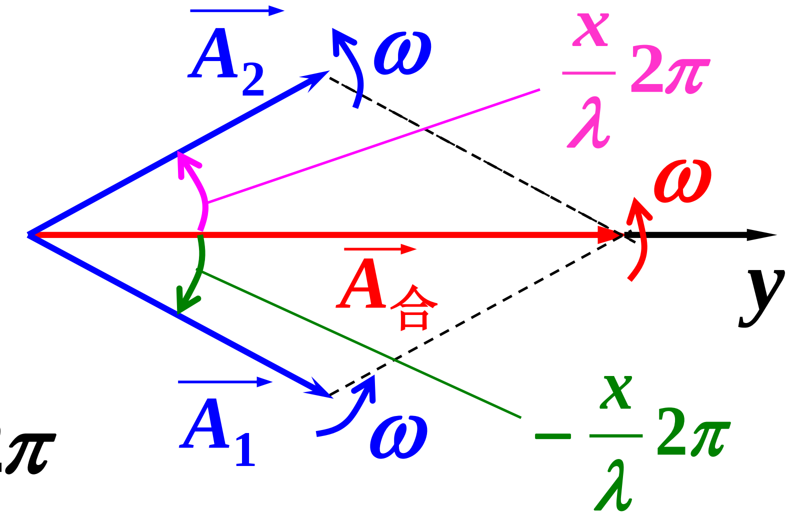
$$\rightarrow x: \quad y_1 = A\cos(\omega t - \frac{x}{\lambda} 2\pi)$$

$$\leftarrow x: \quad y_2 = A\cos(\omega t + \frac{x}{\lambda} 2\pi)$$

$$y = y_1 + y_2$$

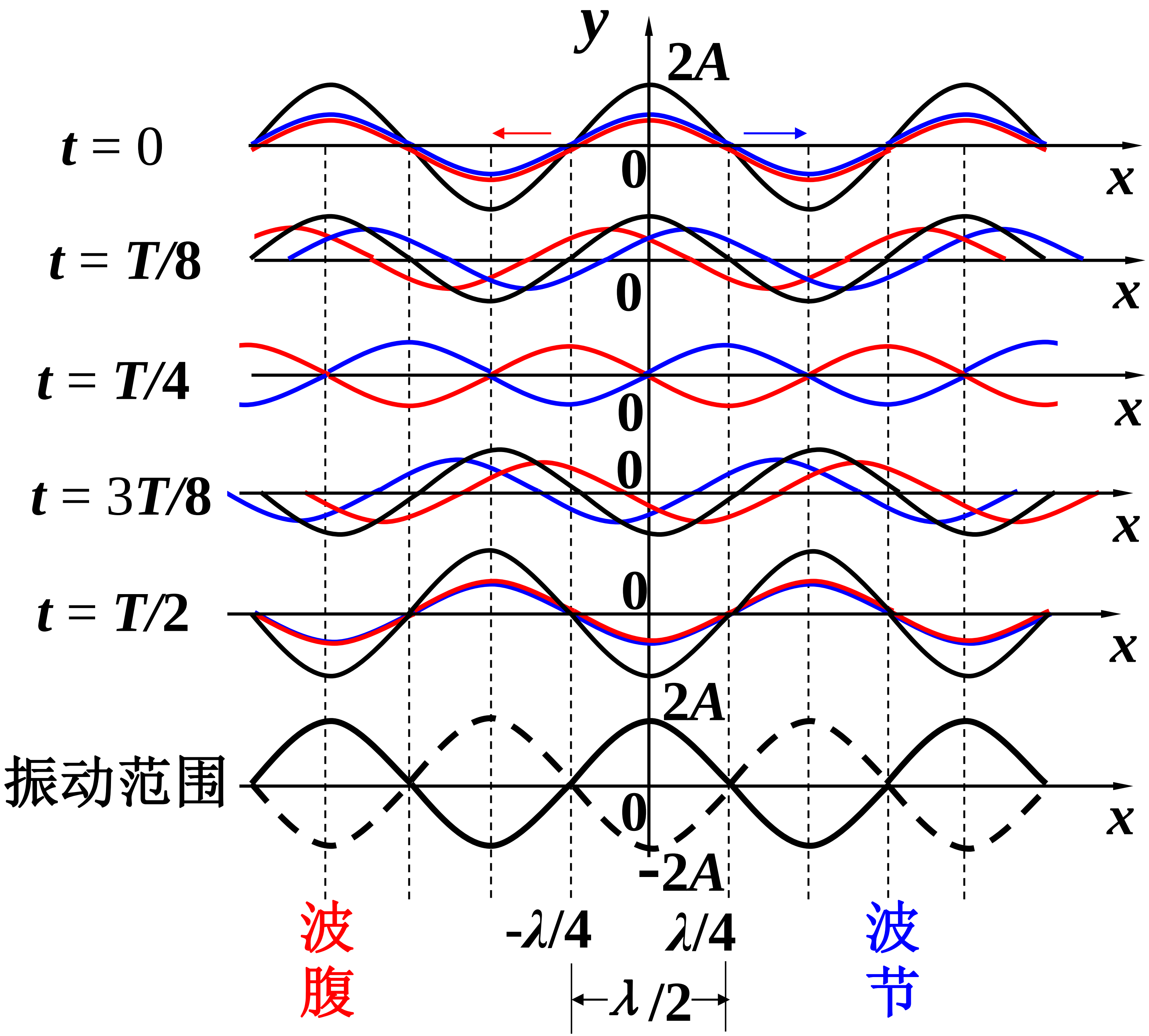
令 $\quad |A_1| = |A_2| = A$

如图 $\quad A_{合} = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi$



$$\therefore \quad y = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi \cdot \cos\omega t$$ ——不具备传播的特征

其绝对值为振幅 相位中无 x



y
2A
0
x
t = 0
t = T/8
t = T/4
t = 3T/8
t = T/2
振动范围
2A
-2A
波腹
-λ/4
λ/4
λ/2
波节

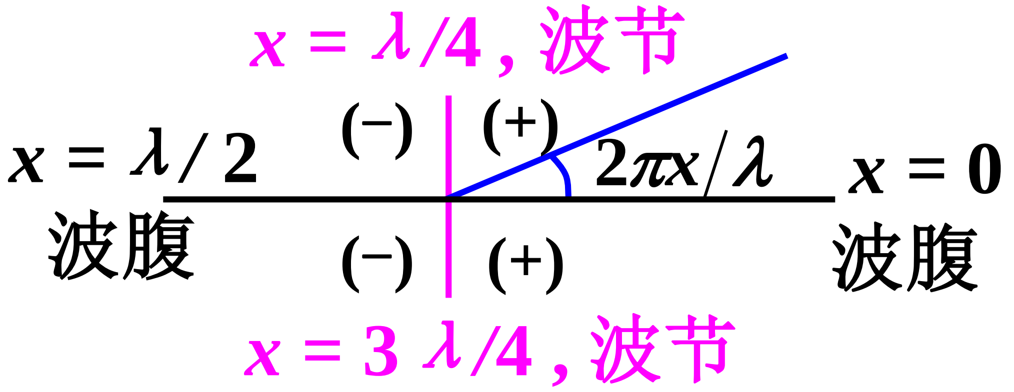
2. 驻波的特点：

①振幅：各处不等大，出现了波腹（振幅最大处）和波节（振幅最小处）。

相邻波节间距$\lambda/2$，测波节间距可得行波波长。

②相位：相位中没有x坐标，故没有了相位的传播。

驻波是分段的振动。两相邻波节间为一段，同一段振动方向相同；相邻段振动方向相反：



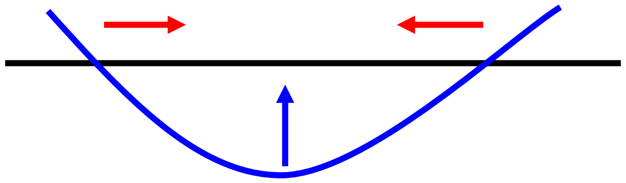
$$A = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi$$

在波节两侧变号

③ **能量：** 合能流密度为 $\overline{w}\cdot\vec{u}+\overline{w}\cdot(-\vec{u})=0$ ，

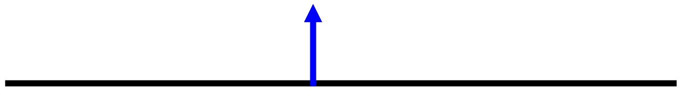
平均说来没有能量的传播，

但各质元间仍有能量的交换。



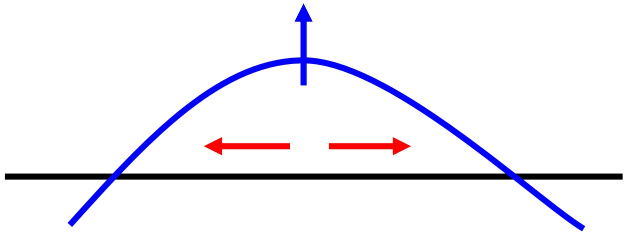
能量由两端向中间传，

势能→动能。



瞬时位移为0，势能为0，

动能最大。



能量由中间向两端传，

动能→势能。

3. $A_1 \neq A_2$ 的情形：

设 $A_2 = (A_1 + \Delta A) > A_1$，　则有

$$y = 2A_1 \cos\frac{x}{\lambda}2\pi \cdot \cos\omega t + \Delta A\cos(\omega t + \frac{x}{\lambda}2\pi)$$

典型的驻波　　　　行波

此时总的仍可叫“驻波”，不过波节处有振动。

四.波在界面的反射和透射，“半波损失”

$$y_1 = A_1\cos(\omega t - k_1 x + \varphi_1) \qquad \tilde{y}_1 = A_1 \exp[i(\omega t - k_1 x + \varphi_1)]$$

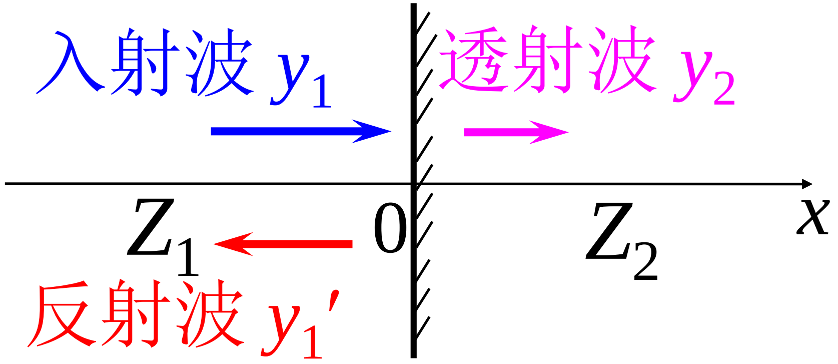
$$y_1' = A_1'\cos(\omega t + k_1 x + \varphi_1') \qquad \tilde{y}_1' = A_1' \exp[i(\omega t + k_1 x + \varphi_1')]$$

$$y_2 = A_2\cos(\omega t - k_2 x + \varphi_2) \qquad \tilde{y}_2 = A_2 \exp[i(\omega t - k_2 x + \varphi_2)]$$

$$\tilde{A}_1 = A_1 \exp(i\varphi_1)$$

$$\tilde{A}_1' = A_1' \exp(i\varphi_1')$$

$$\tilde{A}_2 = A_2 \exp(i\varphi_2)$$



$\mathbf{Z} = \rho \mathbf{u}$ — 特性阻抗

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{A}_1'}{\tilde{A}_1} \qquad \tilde{t} = \frac{\tilde{A}_2}{\tilde{A}_1}$$

$$\left.\begin{array}{l}Z\text{大}\text{——波密媒质}\\ Z\text{小}\text{——波疏媒质}\end{array}\right\}\text{相对而言}$$

机械波⊥入射时，利用界面关系：

①界面两侧质元位移相同（接触）

$$[y_1+y_1']_{x=0}=[y_2]_{x=0}$$

②界面两侧应力相等（牛顿第三定律）

$$\left[\frac{F_1}{S}+\frac{F_1'}{S}\right]_{x=0}=\left[\frac{F_2}{S}\right]_{x=0}$$

$$E_1\left[\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial y_1'}{\partial x}\right]_{x=0}=E_2\left[\frac{\partial y_2}{\partial x}\right]_{x=0}\quad\text{（纵波）}$$

复数对应

$$\tilde{y}_1 = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x + \varphi_1)} \qquad \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial x} = -ik_1\tilde{y}_1$$

$$\tilde{y}_1' = A_1' \exp\left[i(\omega t + k_1 x + \varphi_1')\right] \qquad \frac{\partial \tilde{y}_1'}{\partial x} = ik_1\tilde{y}_1'$$

$$\tilde{y}_2 = A_2 \exp\left[i(\omega t - k_2 x + \varphi_2)\right] \qquad \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial x} = -ik_2\tilde{y}_2$$

x=0

$$\tilde{y}_1' = \tilde{r}\tilde{y}_1 \qquad \tilde{r} = \frac{A_1'}{A_1} e^{i(\varphi_1' - \varphi_1)}$$

$$\tilde{y}_2 = \tilde{t}\tilde{y}_1 \qquad \tilde{t} = \frac{A_2}{A_1} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

代入边界条件，

$$[y_1+y_1']_{x=0} = [y_2]_{x=0} \quad \Rightarrow \quad 1+\tilde{r} = \tilde{t}$$

$$E_1\left[\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial y_1'}{\partial x}\right]_{x=0} = E_2\left[\frac{\partial y_2}{\partial x}\right]_{x=0} \quad \Rightarrow \quad E_1\left(-k_1+k_1\tilde{r}\right) = -E_2k_2\tilde{t}$$

并注意到 $\mathbf{k}=\dfrac{\omega}{\mathbf{u}}$ ， $\dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{u}}=\rho\mathbf{u}=\mathbf{Z}$ ，

可得：

$$\tilde{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{Z}_1-\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2} \qquad \tilde{\mathbf{t}}=\frac{2\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2}$$

1. 相位关系

反射波： (1)若$Z_1 > Z_2$， 则 $\varphi_1' = \varphi_1$

即波密→波疏， 反射波和入射波同相

(2) 若$Z_1 < Z_2$， 则 $\varphi_1' = \varphi_1 \pm \pi$

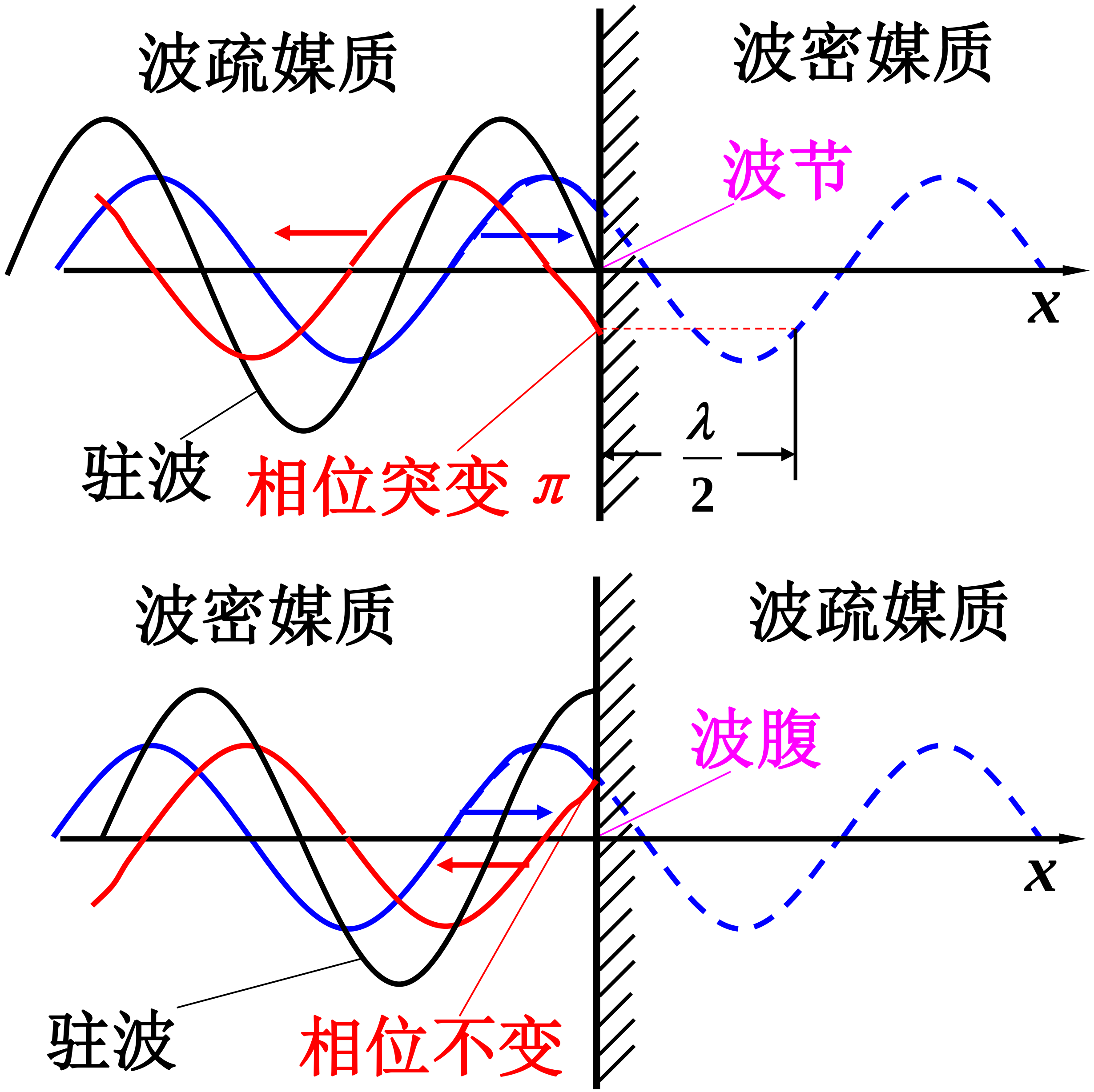
即波疏→波密， 反射波有相位突变π

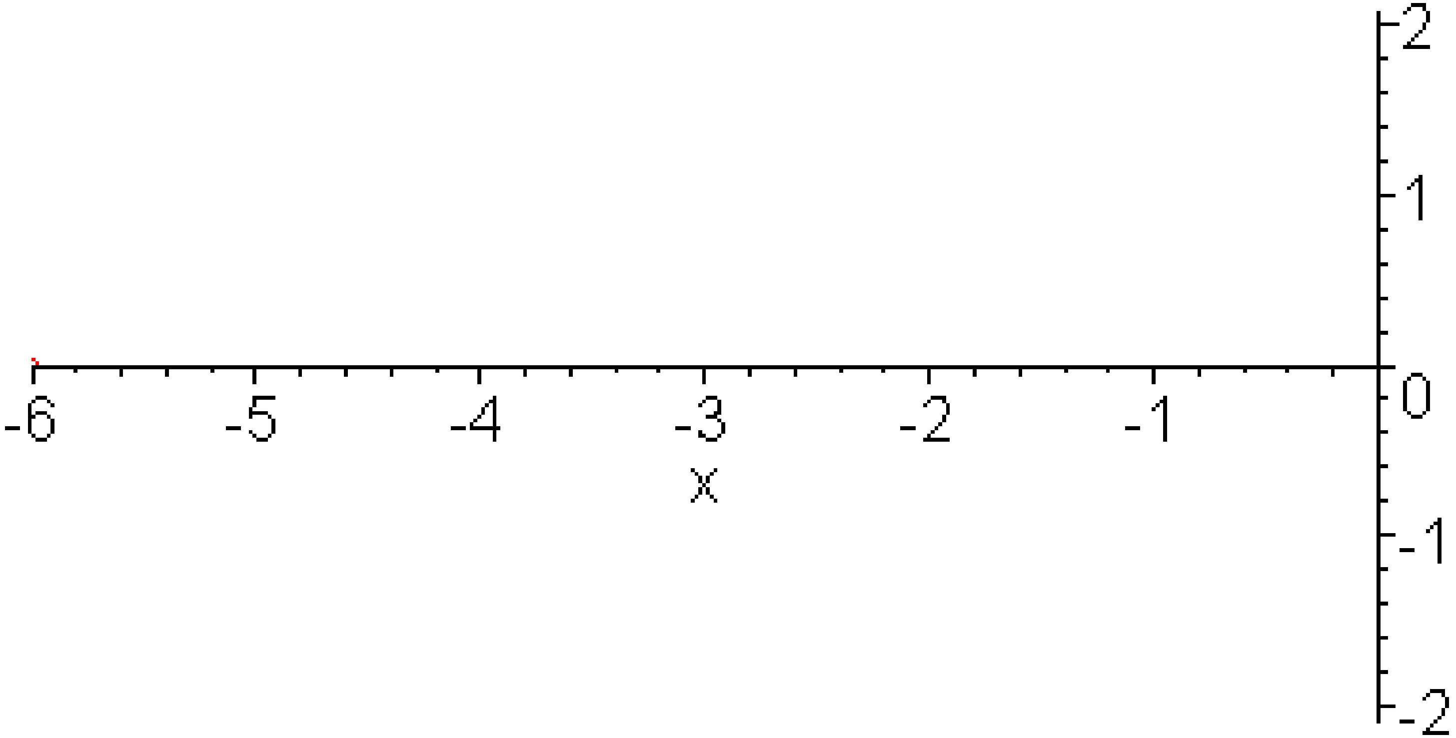
——半波损失

透射波:不论 $Z_1 > Z_2$，还是 $Z_1 < Z_2$， 均有$\varphi_2 = \varphi_1$

即透射波总是与入射波同相

若忽略透射波，则入射和反射波的波形如下：





2
1
0
-1
-2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
x

2. 振幅关系：（利用$I=\frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2=\frac{1}{2}Z\omega^2A^2$）

$$A_1'=\left|\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\right|A_1,\qquad A_2=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}A_1,$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{反射比 } R=\frac{I_1'}{I_1}=\left(\frac{A_1'}{A_1}\right)^2=\left(\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\right)^2\\&\text{透射比 } T=\frac{I_2}{I_1}=\frac{Z_2A_2^2}{Z_1A_1^2}=\frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}\end{aligned}\right\}\begin{gathered}R+T=1\\(\text{能量守恒})\end{gathered}$$

▲ Z_1 、 Z_2 互换， R、T 不变。

▲ $Z_1>>Z_2$或 $Z_1<<Z_2$时, $R\approx1$， $T\approx0$， 全反射。

▲ $Z_1\approx Z_2$时， $R\approx0$（无反射）,$T\approx1$， 全透射。

	$Z(kg/m^2\cdot s)$	T
空气(标准状况)	420	空气→水 0.1%
水	1.5×10^6	空气→钢 0.004%
钢(按纵波算)	4.6×10^7	水→钢 12%

∴ 要使声波进入钢，不能有气隙。通常在钢表面涂一层油(保持“声接触”的过渡层)，以增加透射率。

实际的波发射和接收装置都需要设置过渡层，以保证声阻抗的“匹配”。

例7.3 A string consists of two parts attached at x=0. The right part of the string (x > 0) has mass μ_r per unit length and the left part of the string (x < 0) has mass μ_l per unit length. The string tension is T. If a wave of unit amplitude travels along the left part of the string, what is the amplitude of the wave that is transmitted to the right part of the string?

A. 1

B. $\dfrac{2\sqrt{\mu_l/\mu_r}}{1+\sqrt{\mu_l/\mu_r}}$

C. $\dfrac{\sqrt{\mu_l/\mu_r}-1}{\sqrt{\mu_l/\mu_r}+1}$

D. 0

E. $\dfrac{2}{1+\sqrt{\mu_l/\mu_r}}$

$$u=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

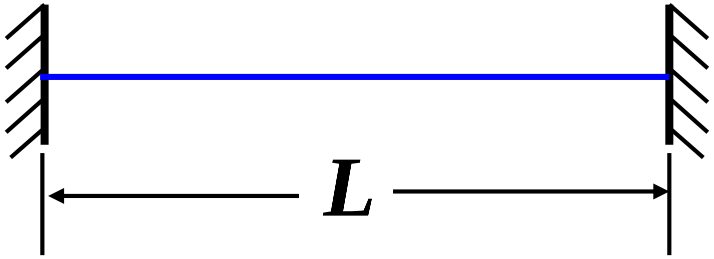
解: $\dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{2Z_1}{Z_1+Z_2}$ $\quad Z=\rho u=\dfrac{\Delta m}{\Delta V}u=\dfrac{\Delta m}{S\Delta l}u=\dfrac{\mu u}{S}$

选B。

五. 简正模式（normal mode）

波在一定边界内传播时就会形成各种驻波。

如两端固定的弦，形成驻波必须满足以下条件：



$$n\frac{\lambda_n}{2}=L,\quad n=1,2,3\cdots$$

或 $$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

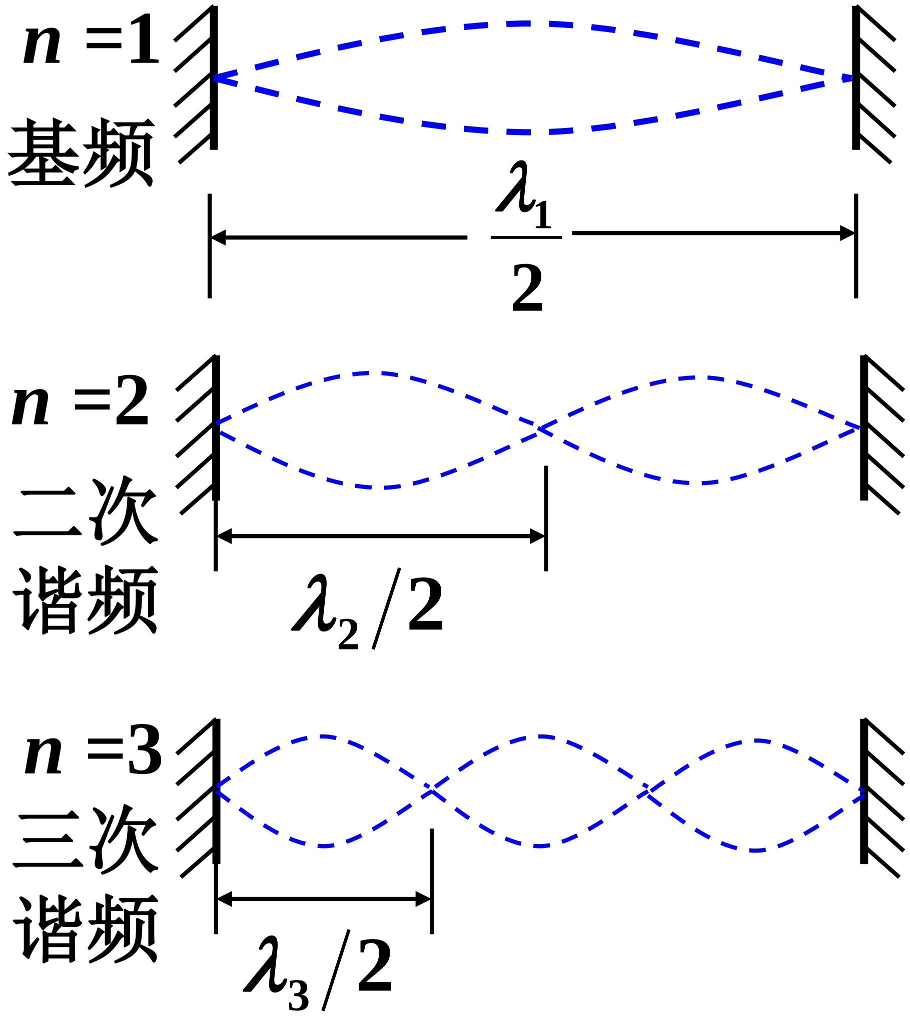
$$\nu_n=\frac{u}{\lambda_n}=n\frac{u}{2L}$$ ——系统的固有频率

波速 $$u=\sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

F ——弦中的张力

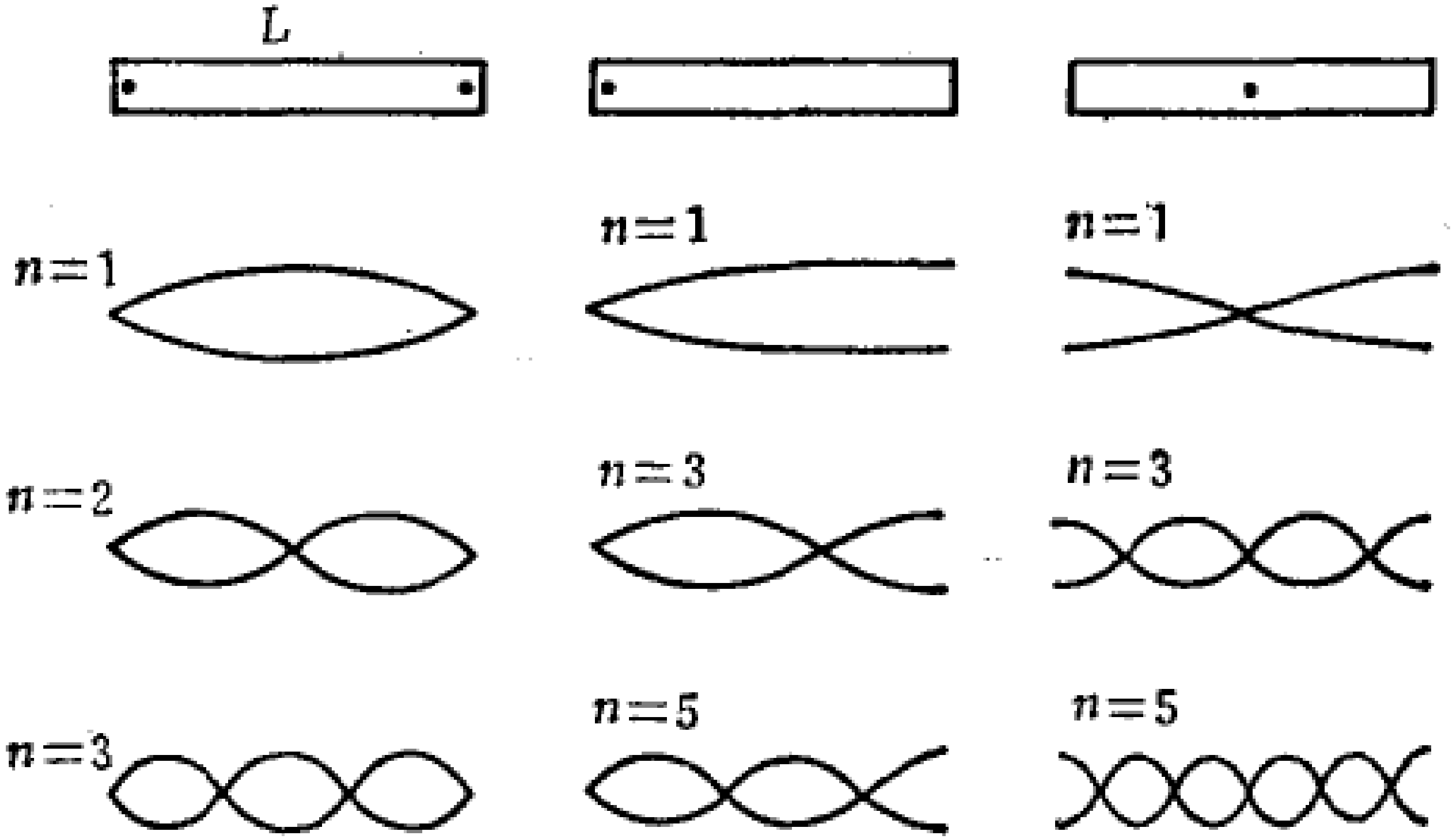
ρ_l ——弦的线密度

每种可能的稳定振动方式称作系统的一个简正模式。



去籽取花，悬弓弹花。

宋应星，《天工开物》

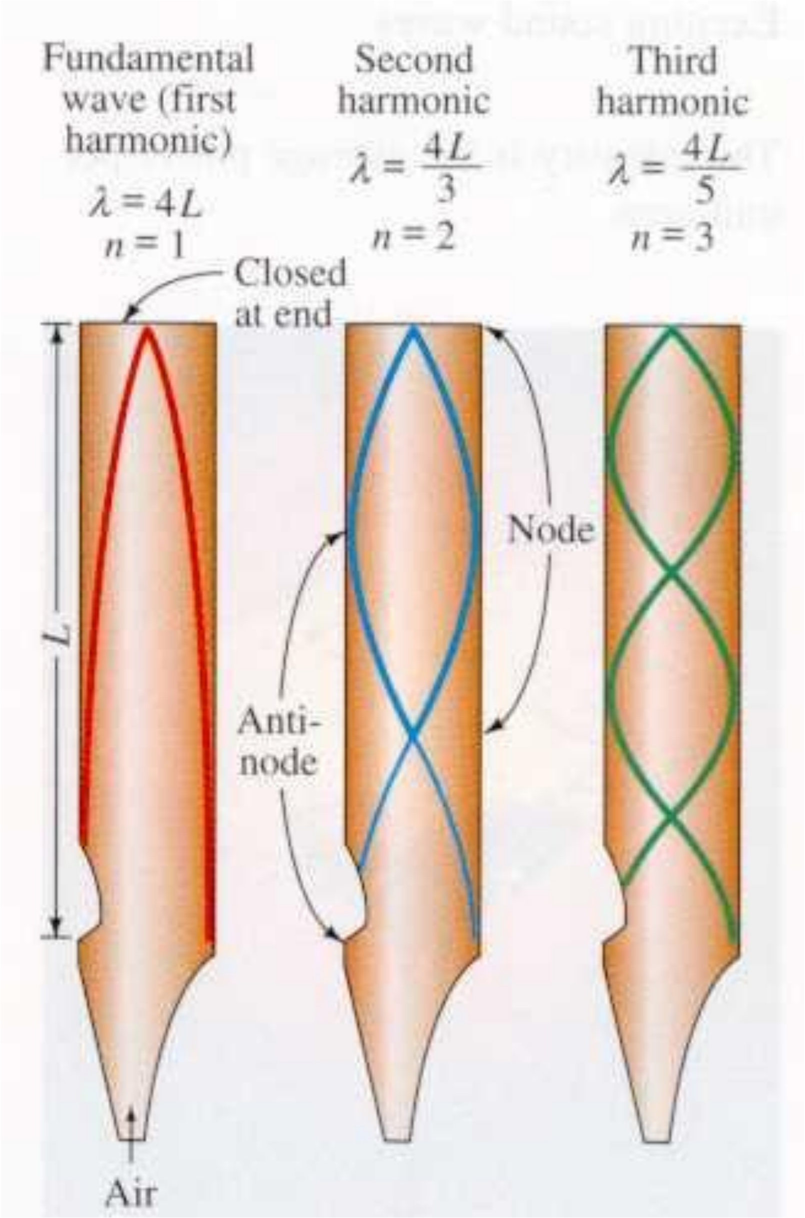


$L=n\cdot\frac{\lambda}{2}$
(a)两端固定

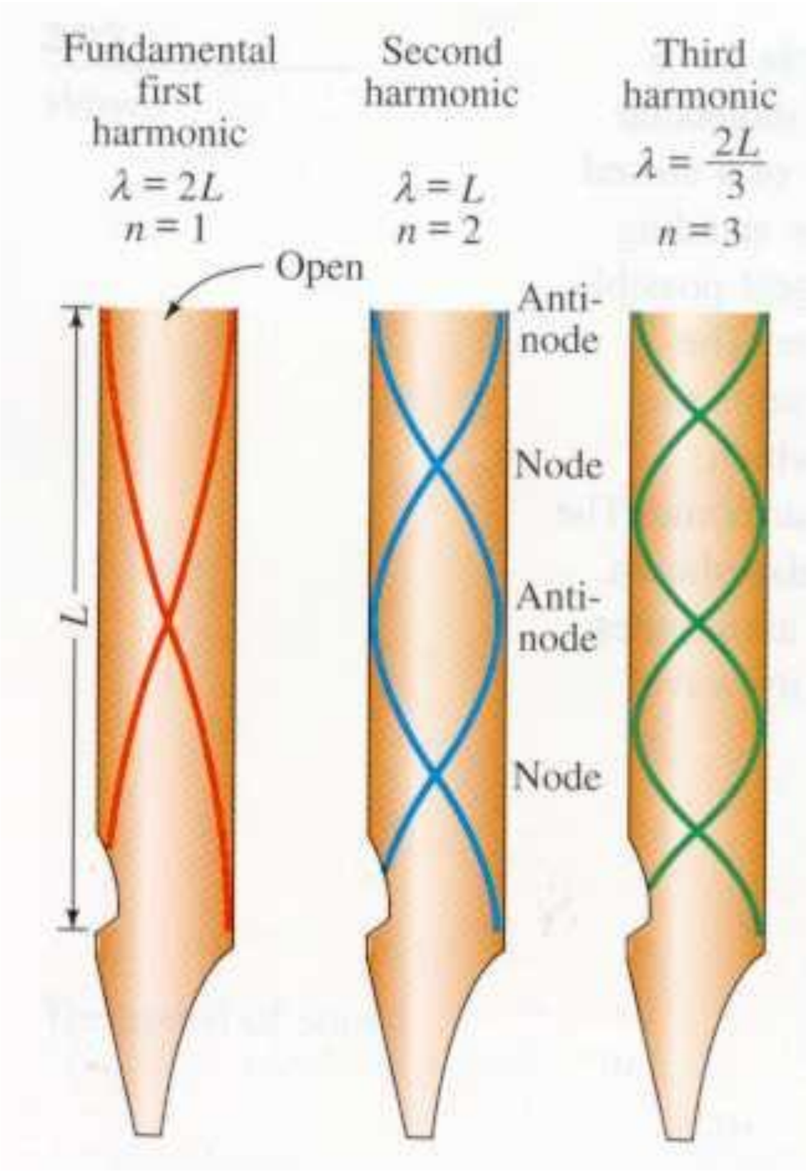
$L=n\cdot\frac{\lambda}{4}$
(b)一端固定

$L=n\cdot\frac{\lambda}{2}$
(c)中心固定

同样一根杆，边界条件不同，简正模式也不同。



末端封闭的笛中的驻波



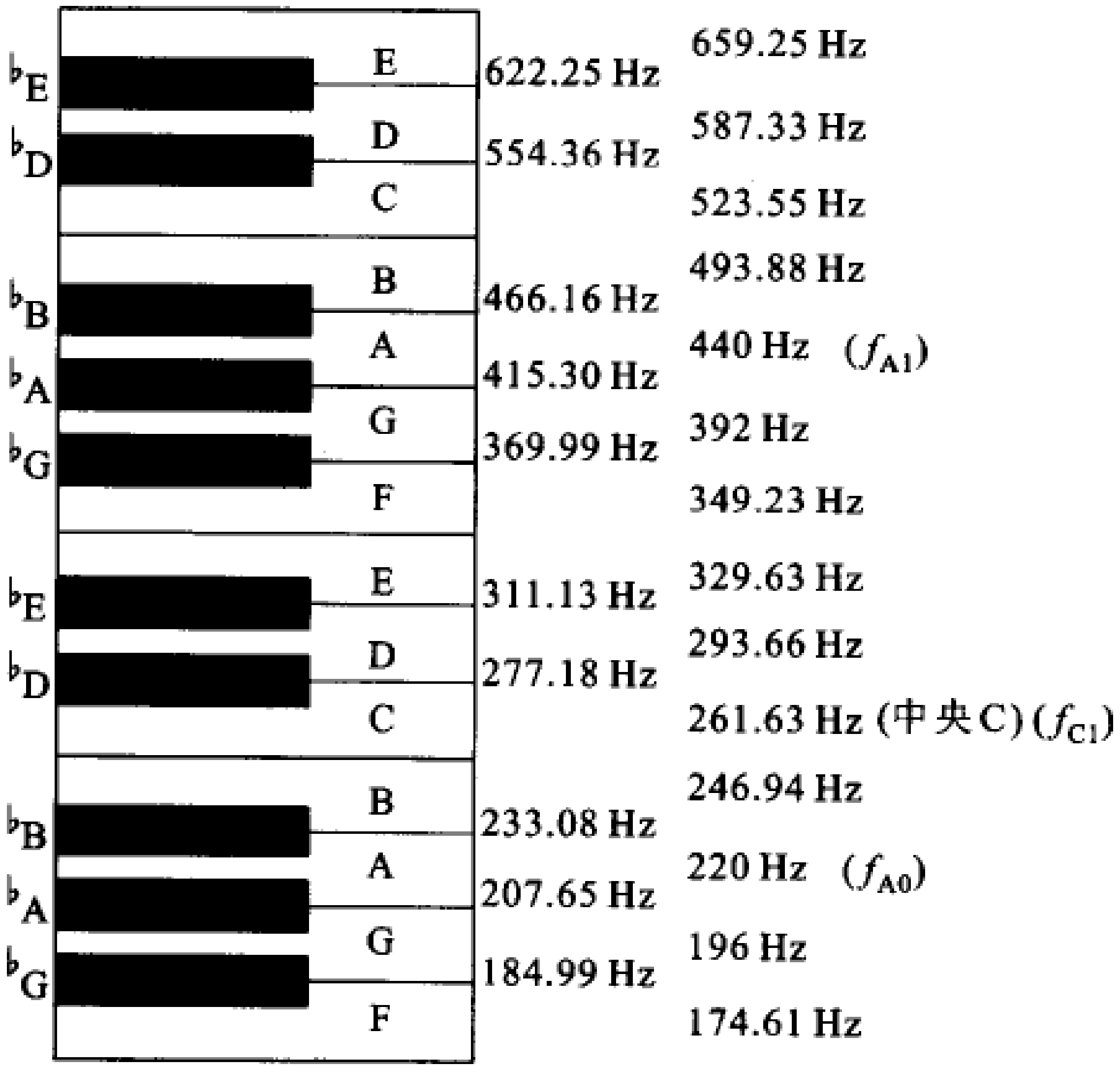
末端开放的笛中的驻波

两端固定的弦受激发后所发出的声音，包含有各种频率。

用声学术语来说，　　频率最低的称为基音，　　与n其他值相对应的音称为泛音，按照频率由低到高的顺序，分别称为第一泛音、第二泛音等等。各次泛音的强弱与声源的形状结构和激发方式有关。不同乐器奏出同一乐音时，基音相同，泛音的组成和泛音的强弱不同，即频谱不同，这种泛音的不同就是各种不同乐器的音色。管乐器是由管内气柱振动形成驻波，它与弦乐器有不同的音色。锣、鼓等打击乐器所形成的驻波分布就更为复杂，而且各自有不同的音色。

对于一定的振动系统，它的简正模式对应于系统的许多固有频率。如果外界以周期性强迫力激发系统的振动。当强迫力频率与某一固有频率相同或接近时，系统激发起振幅很大的驻波，这也是一种共振现象。

一个振动系统既可当作发射能量的系统（波源），也可当作吸收能量的系统（例如，共振吸收）。无论是作为发射系统或吸收系统，都必须研究振动系统内部驻波的运动方式，即，必须研究振动系统的简正模式。

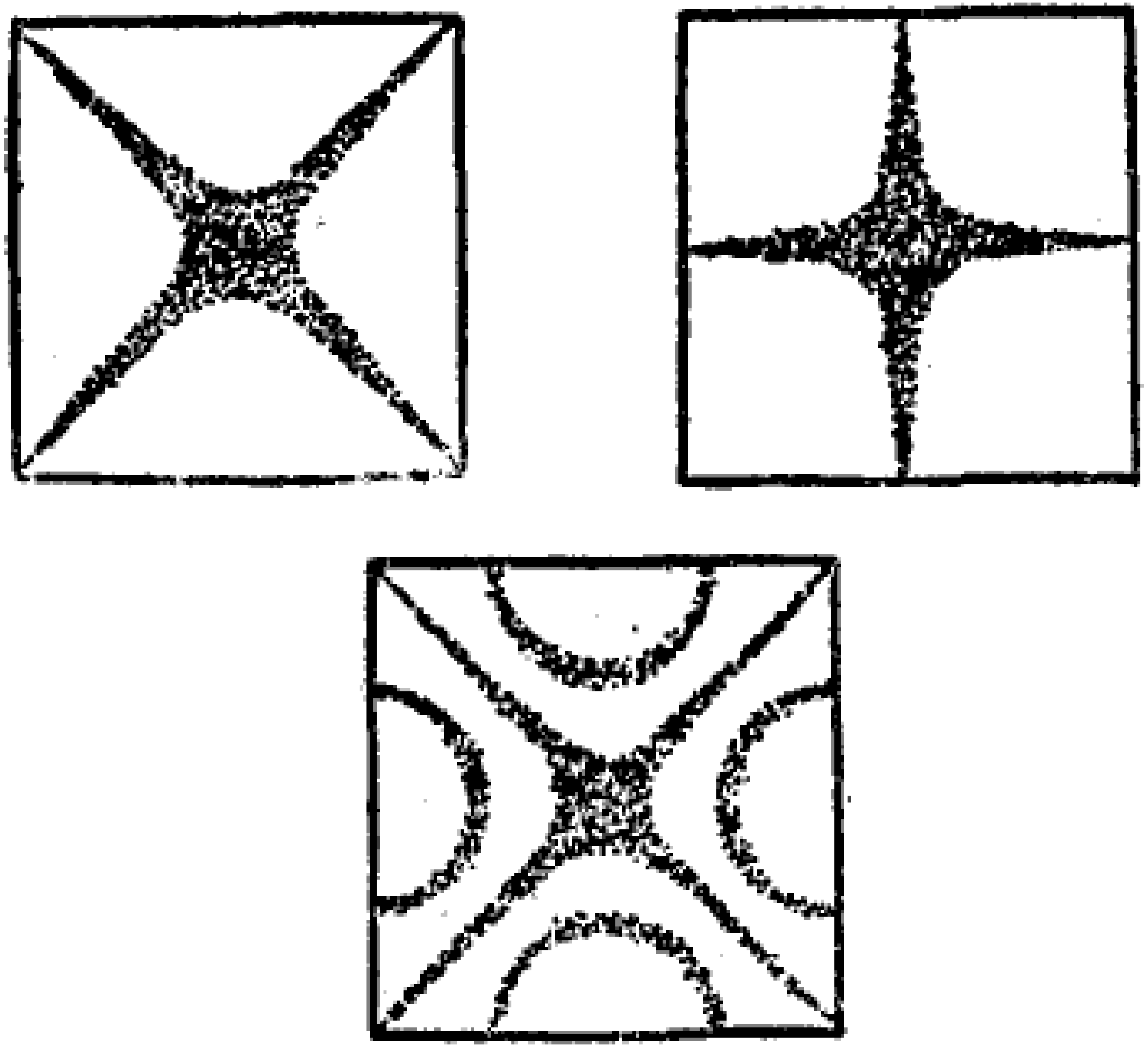


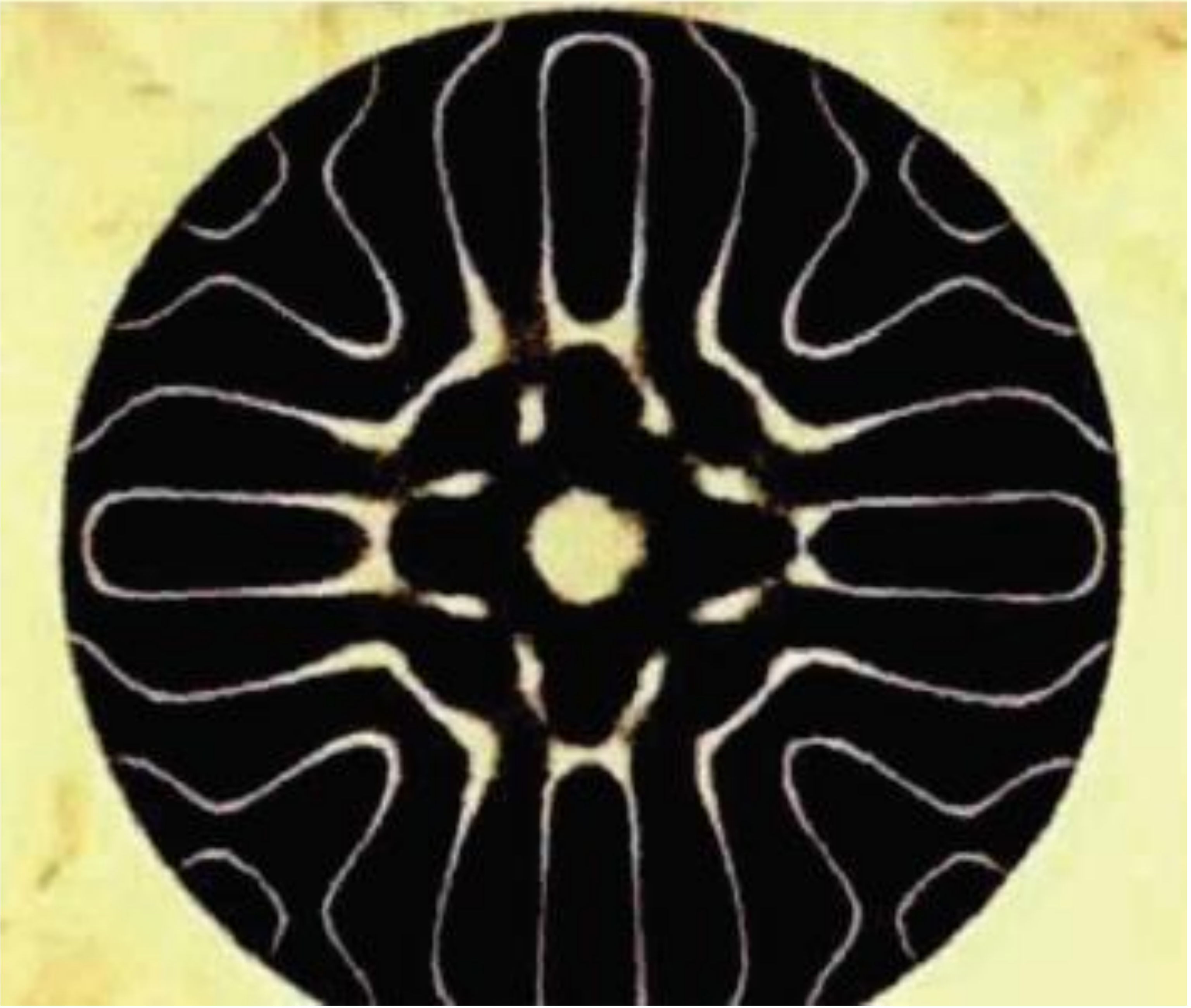
钢琴键盘音名与频率对照

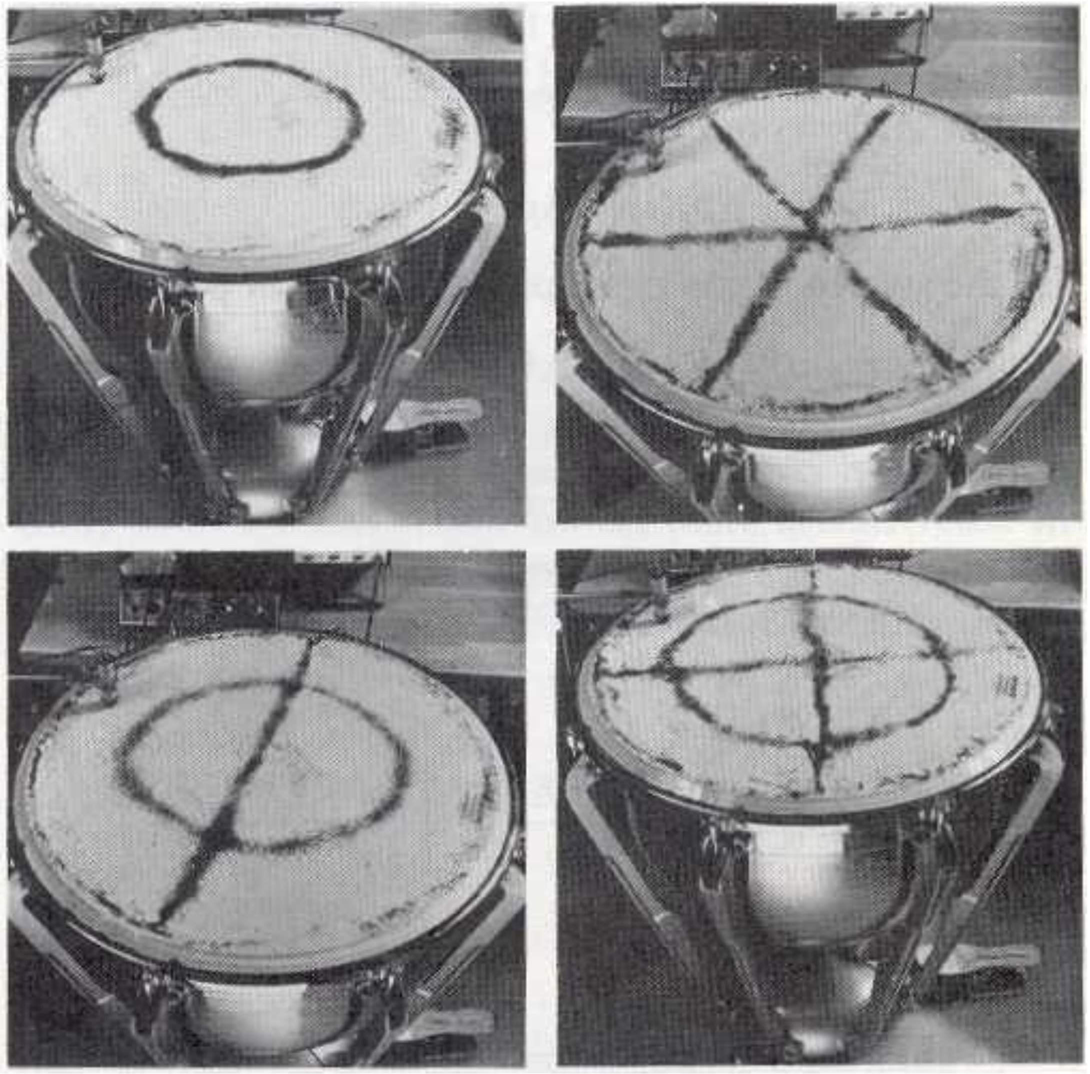
由于机械波传到界面时发生反射，因此，机械波在有限大小的物体中传播时，会产生各式各样的驻波。物体中可能产生的驻波就是物体在没有外力条件下可能持续下去的固有振动。这一点对于声源是很重要的。

驻波在声学、无线电学和光学等等部门中都很重要，一方面它可以用来测定波长，另一方面它可以用来确定振动系统的固有频率。

18世纪德国的物理学家，同时也是一位音乐家的**克拉尼**（Ernst Chladni，1756-1827）对薄板振动模态的图形怀有特殊兴趣。他将细沙撒在薄板上，用小提琴的琴弓摩擦板的边缘，使板产生驻波形式的振动。板上的细沙在振幅最大的波腹附近因上下跳动而不可能保持在原地逗留，**只有在振幅为零的波节处才有细沙的聚集。**因此细沙所形成的图案就描绘出薄板二维振动的节线，称为**克拉尼图形**。于是原来用肉眼难以分辨的振动形态就能以克拉尼图形直观地展现出来。1809年，这种图形（现仍称为克拉尼图形）在巴黎一个科学家集会上展出时强烈地吸引了观众。

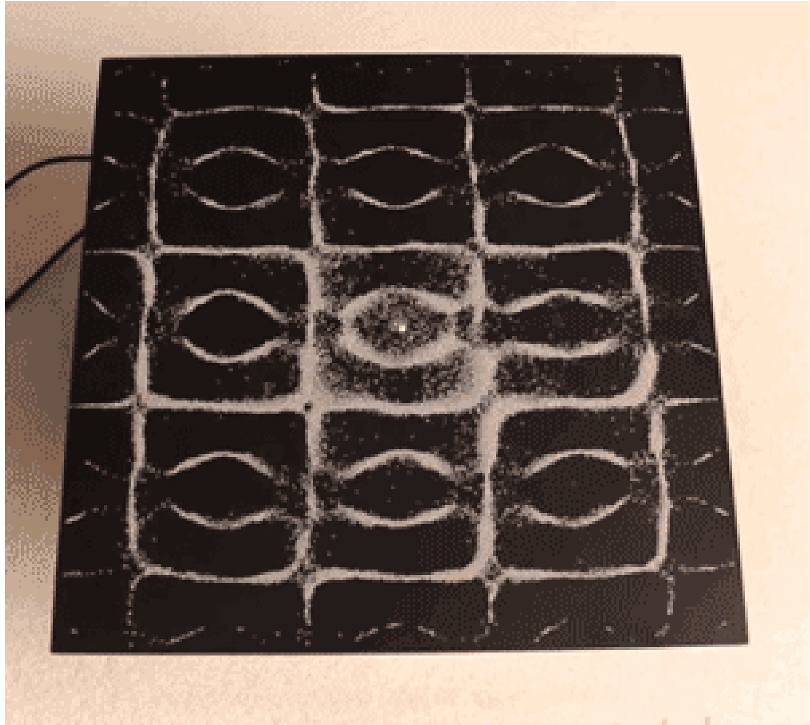


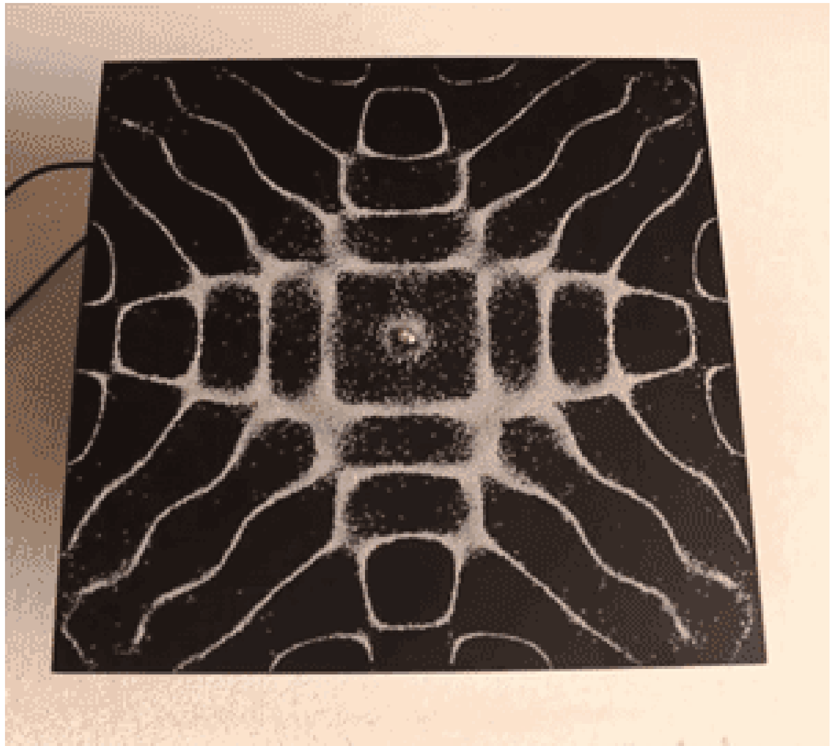




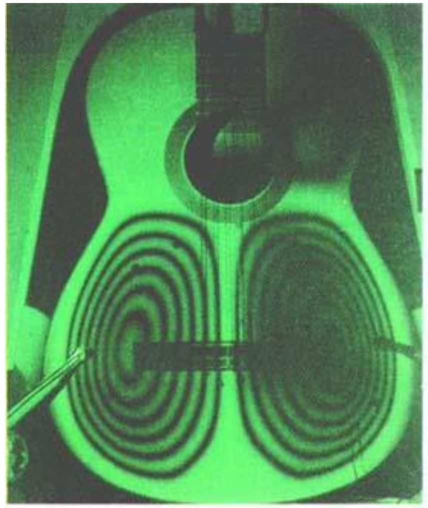
鼓皮上的二维驻波(图为几种简正模式)

二维共振克拉尼图案

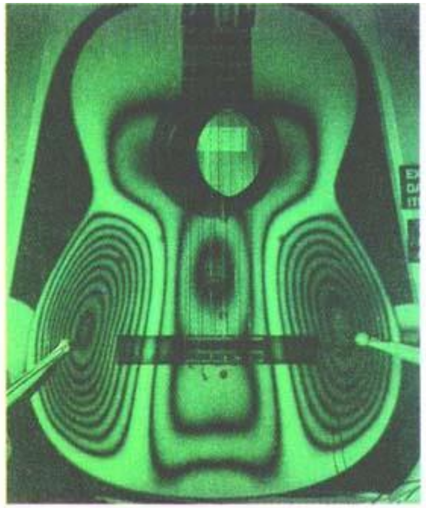




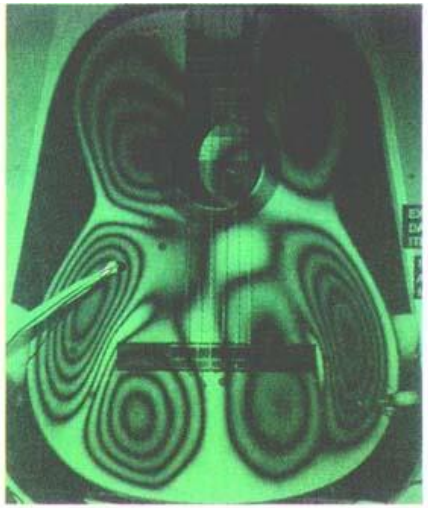
小提琴的简正模式



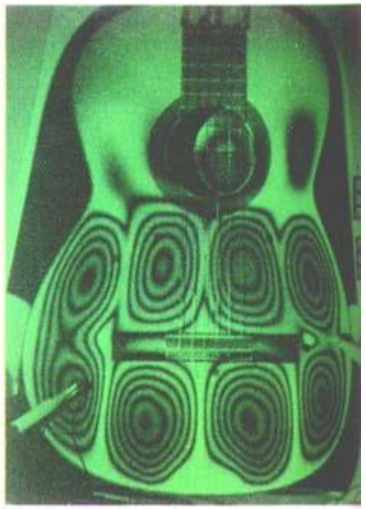
268Hz



553Hz



672Hz



1010Hz

例7.4 有一口井，侧面竖直，井底有水，它可与7Hz和7Hz以上的某些频率共鸣。井里的空气密度 ρ 为 $1.1\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$，压强 p 为 $9.5\times10^4\text{Pa}$，热容比 γ 为7/5。试问此井有多深？

选题目的 空气驻波的合成。

分析 井中空气入射波与反射波合成驻波，且井口为波腹。

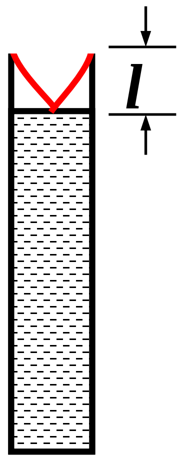
解 声波传播速度为

$$u=\sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}}=347.7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

当产生驻波且频率为7Hz时，由于井口为波腹，则井深

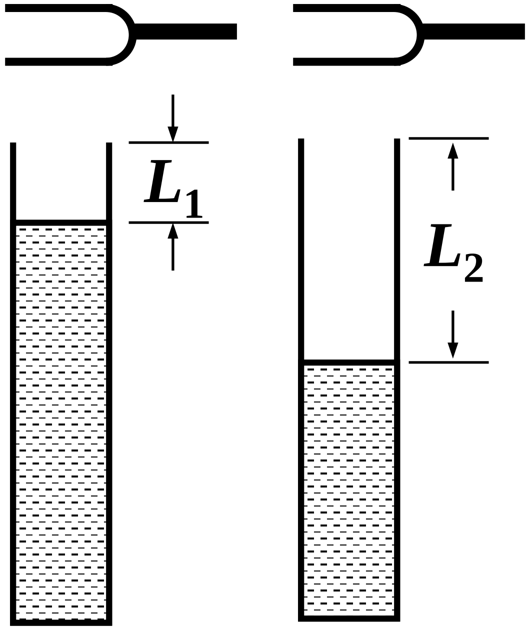
$$l=\lambda/4=u/4\nu=12.4\text{m}$$

讨论 此题的关键是判断出井口为空气驻波的波腹，井底为波节，相邻波腹与波节的距离是 $\lambda/4$。



例7.5一频率为248.5Hz的音叉放在盛水的细管口，连续调节水面高度，当空气柱的高度相继为 $L_1 = 0.34$ m 和 $L_2 = 1.03$ m 时发生共鸣。

求：声波在空气中的声速 u



解：发生共鸣时形成驻波，管口为波腹，水面为波节。

空气柱长满足条件：

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2\cdots$$

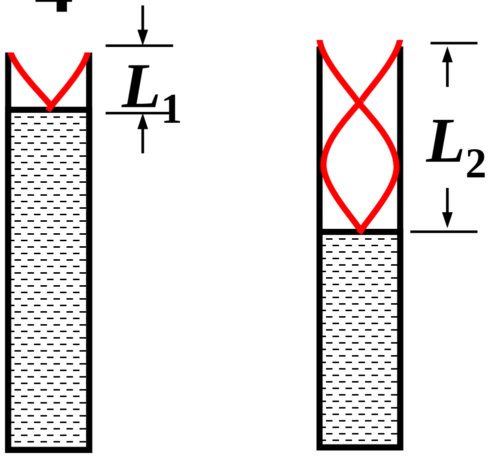
$$\left.\begin{aligned} L_1 &= (2n+1)\frac{\lambda}{4} = 0.34\,\text{m} \\ L_2 &= [2(n+1)+1]\frac{\lambda}{4} = 1.03\,\text{m} \end{aligned}\right\} L_2 - L_1 = \frac{\lambda}{2} = 0.69\,\text{m}$$

故 $\lambda = 2(L_2 - L_1) = 1.38\,\text{m}$

声速 $u = \lambda\nu = 1.38 \times 248.5 = 343\,\text{m/s}$

因 $L_1 = (2n+1)\dfrac{\lambda}{4} = (2n+1)\dfrac{1.38\,\text{m}}{4} = 0.34\,\text{m}$

得 $n = 0 \rightarrow \begin{cases} L_1 = \dfrac{\lambda}{4} \\ L_2 = \dfrac{3\lambda}{4} \end{cases}$



例7.6 有一提琴弦长 50 cm，两端固定，当不按手指演奏时发出的声音是 A 调(440 Hz)，试问：要奏出 C 调(528 Hz)，手指应该按在什么位置？

解 琴弦两端为波节，驻波条件为 $l = n\dfrac{\lambda}{2}$，$n = 1$ 对应于基音。A 调声波波长为

$$\lambda_1 = 2l_1 = 2\times 50 = 100(\text{cm})$$

波速为

$$v = \lambda_1\nu_1 = 1\times 440 = 440(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

C 调的波长为

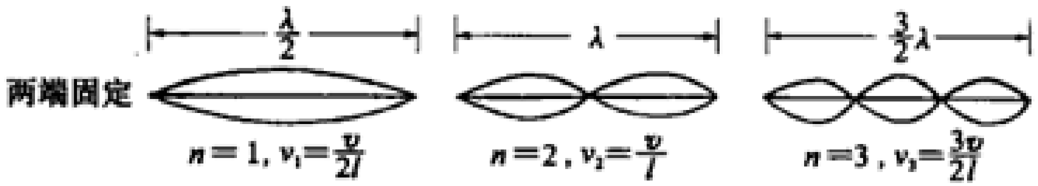
$$\lambda_2 = \frac{v}{\nu_2} = \frac{440}{528} = 0.833(\text{m})$$

由驻波条件得弦长

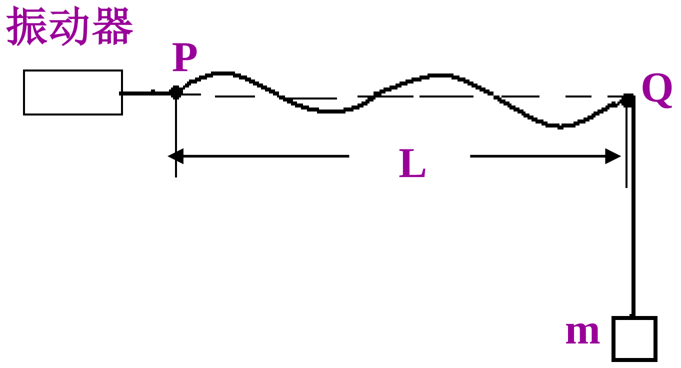
$$l_2 = \frac{\lambda_2}{2} = \frac{0.833}{2} = 0.417(\text{m})$$

所以手指应按在离琴弦下端 0.417 m 处。

弦线振动的简正模式



例7.7 在右图中，一根线栓在P点的正弦振动器上，然后绕过支点Q，由质量为m的物块拉紧。点P和Q之间的距离是L = 1.2 m，线的线密度是1.6 g/m，振动器的频率固定为120 Hz。P点的振幅很小，足以看作为波节，Q点也是一个波节。



(1) 当质量m多大时振动器可以在线上建立起四次谐模?

(2) 如果m = 1.00 kg，建立的驻波模式是什么?

解： (1) 线只在某些频率发生共振，这些频率的大小取决于线上的波速u和线的长度L。

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad \lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad \nu = \frac{u}{\lambda} \qquad \nu_n = n\frac{u}{2L}$$

$$u=\frac{2L\nu_n}{n}=\frac{2Lf}{n}$$

$$u=\sqrt{\frac{F}{\rho_l}}=\sqrt{\frac{mg}{\rho_l}}$$

$$\Rightarrow \quad m=\frac{4L^2f^2\rho_l}{n^2g} \qquad ①$$

$$=\frac{4\times1.2^2\times120^2\times1.6\times10^{-3}}{4^2\times9.8}=0.85(\text{kg})$$

(2) 由①式 $n=2Lf\sqrt{\frac{\rho_l}{mg}}=3.7$

振动器不可能在线上建立驻波，线的任何振动都将很小，甚至可能觉察不到。

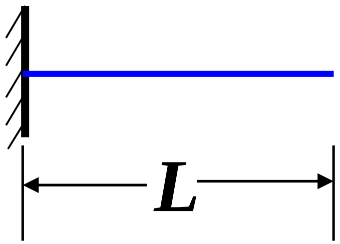
例7.8 一端固定，另一端自由的棒中有余弦驻波存在，其中三个最低振动频率之比为____。

A. 1：2：3　　　B. 1：2：4

C. 1：3：5　　　D. 1：4：9

解:

$$L = n\frac{\lambda_n}{4}$$



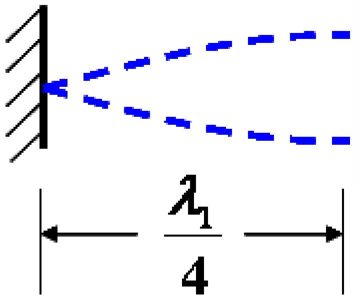
n=1, 3, 5, ⋯

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{4L}$$

$n = 1$

基频

ν_1

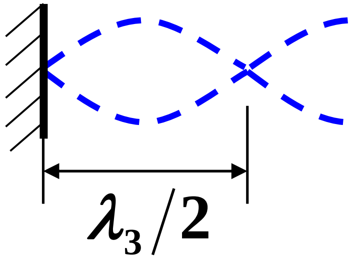


$n = 3$

三次

谐频

ν_3

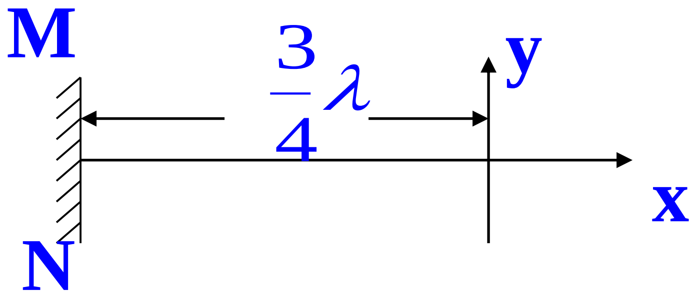


故　$\nu_1 : \nu_3 : \nu_5 = 1 : 3 : 5$

选C。

例7.9 在波线上原点O处有一振动方程为$y_o = A\cos\omega t$的波源，产生的横波向x轴的正、负方向传播，距原点$\frac{3}{4}\lambda$的x轴负向有一波密介质做成的全反射面MN，如图所示，试求：

1. 传向反射面MN的入射波的波函数。
2. 由MN反射的波的波函数。
3. 在 $-\frac{3}{4}\lambda \le x \le 0$ 区域内，合成波的波函数。此合成波是驻波吗？若是驻波，试求出波腹和波节的坐标。
4. 在x.>0区域内，合成波的波函数。此合成波是平面简谐波吗？



解： **1.** $y_{入}=A\cos\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)$ **或** $y_{入}=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$

在MN面反射点：

$$y_{入}=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\frac{3}{4}\lambda}{\lambda}\right)=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{3}{4}\right)=A\cos\left(\omega t-\frac{3\pi}{2}\right)$$

2. 反射波在MN面反射点有半波损失：

$$y_{反}=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{3}{4}\right)+\pi\right]=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{4}\right)=A\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

反射波的波函数：

$$y_{反}=A\cos 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x+\frac{3}{4}\lambda}{\lambda}-\frac{1}{4}\right]=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

3. $y = y_{反} + y_{入} = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$ **为驻波。**

波节： $x = -\frac{3}{4}\lambda,\ -\frac{\lambda}{4}$ **波腹：** $x = -\frac{\lambda}{2},\ 0$

4. $y_{正} = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

合成波： $y = y_{正} + y_{反} = 2A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

为平面简谐波。