第二章 抗外扰控制

本章内容

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

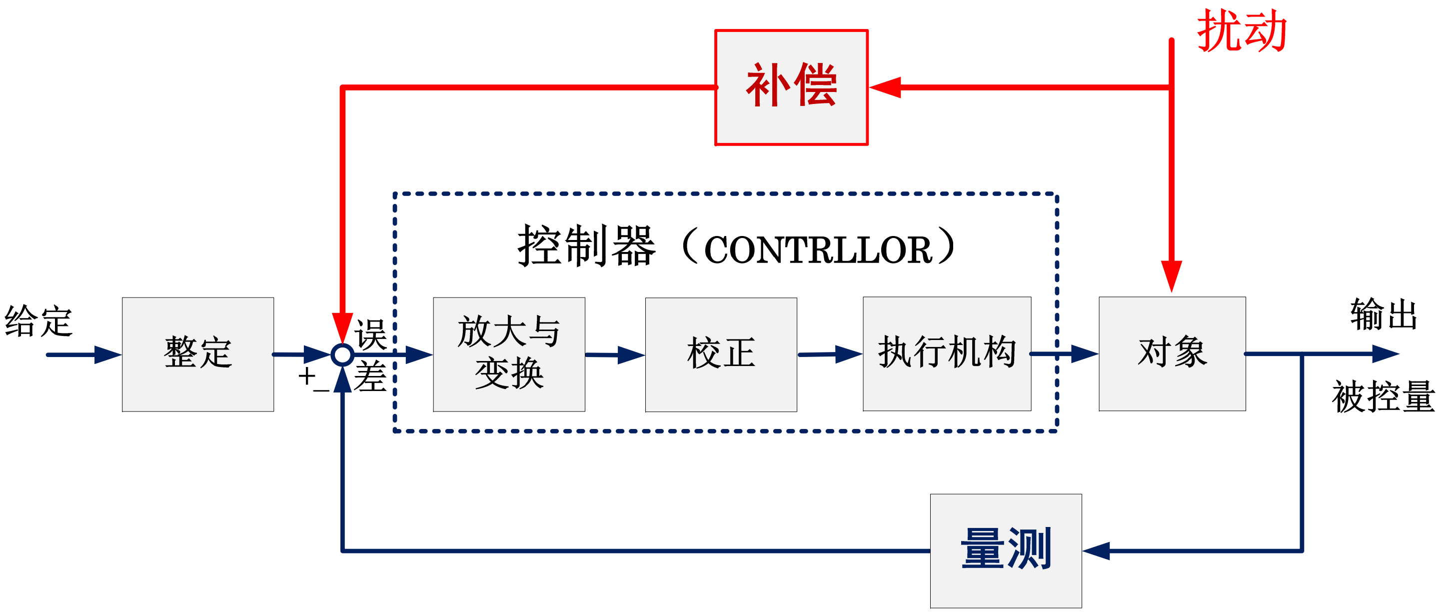
- 基本概念
- 控制系统中的外扰
- 状态对外扰的不变性
- 输出对外扰的不变性
- 静态外扰不变性
- 鲁棒抗外扰控制器

基本概念

前馈控制与反馈控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

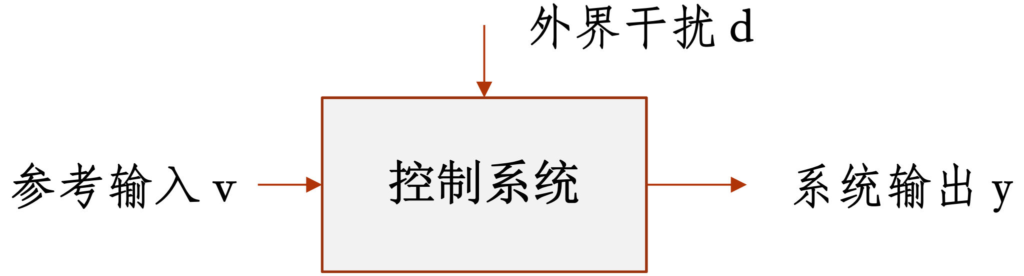
按扰动控制 【粗调】(顺馈/前馈, 误差发生前执行，feedforward)



按偏差控制 【细调】(反馈，误差发生后执行，feedback)

实现的前提：输出/扰动可以测量或者估计

跟踪问题与干扰抑制

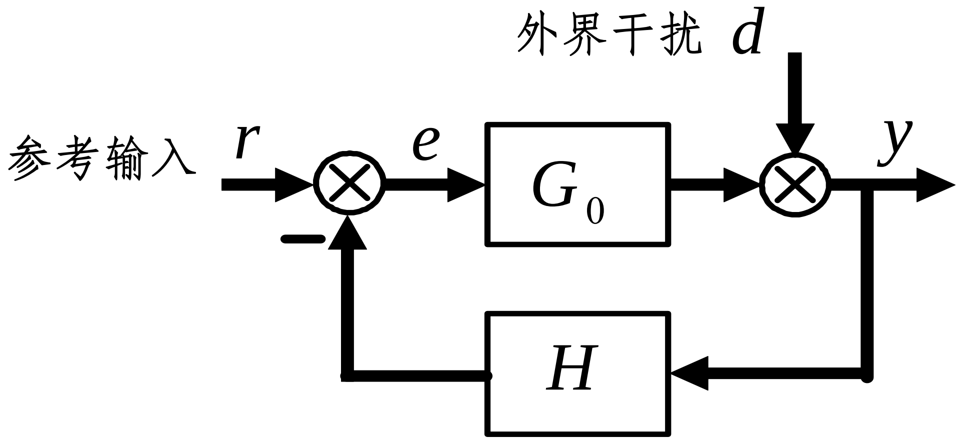


$$\boldsymbol{Y(s) = G_v(s)V(s) + G_d(s)D(s)}$$

- 对任意外扰完全不变：$\boldsymbol{G_d(s) = 0}$
- 若$\boldsymbol{G_d(s) \neq 0}$，对外扰静态不变（需要扰动模型）

跟踪问题与干扰抑制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



跟踪问题和干扰抑制问题都与灵敏度函数有关

$$S(s) = W_{r\to e}(s) = W_{d\to y}(s) = \frac{1}{1+G_0(s)H(s)}$$

设计目标: 误差或扰动不可能完全消除，希望在工作频段内或对特定信号使$S(s)$的增益尽可能小.

内模原理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设 $G_0(s)=\frac{N_0(s)}{D_0(s)}, H(s)=\frac{N_h(s)}{D_h(s)}$。对阶跃型外扰$d(s)=\frac{d_0}{s}$:

$$y=S(s)d=\frac{1}{1+G_0(s)H(s)}\frac{d_0}{s}=\frac{D_0(s)D_h(s)}{\Delta(s)}\frac{d_0}{s}$$

其中 $\Delta(s)=D_0(s)D_h(s)+N_0(s)N_h(s)$.

为了使得输出y趋于零，应满足:

1) 闭环系统渐近稳定，即 $\Delta(s)$为Hurwitz多项式.

2）$D_0(s)D_h(s)$需包含因子 s.

回顾：古典控制中静差与开环传函型次的关系.

内模原理

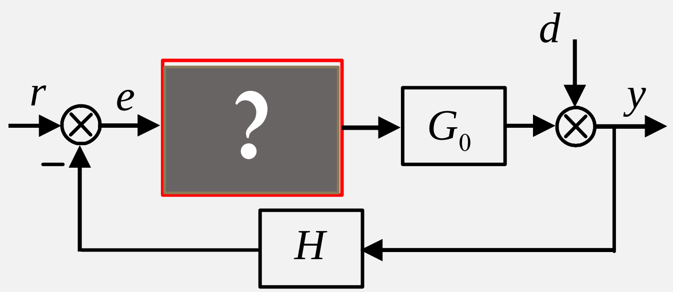
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

若外扰 $\boldsymbol{d}$ 为正/余弦信号，即$\boldsymbol{d(s)=\frac{d_1 s+d_0}{s^2+\omega_0^2}}$. 此时输出为：

$$\boldsymbol{S(s)d(s)=\frac{D_0(s)D_h(s)}{\Delta(s)}\cdot\frac{d_1 s+d_0}{s^2+\omega_0^2}}$$

为使跟踪误差$\boldsymbol{e}$趋于零，$\boldsymbol{D_0(s)D_h(s)}$需包含因子$\boldsymbol{s^2+\omega_0^2}$。

【上述结论对于参考输入跟踪问题同样成立】



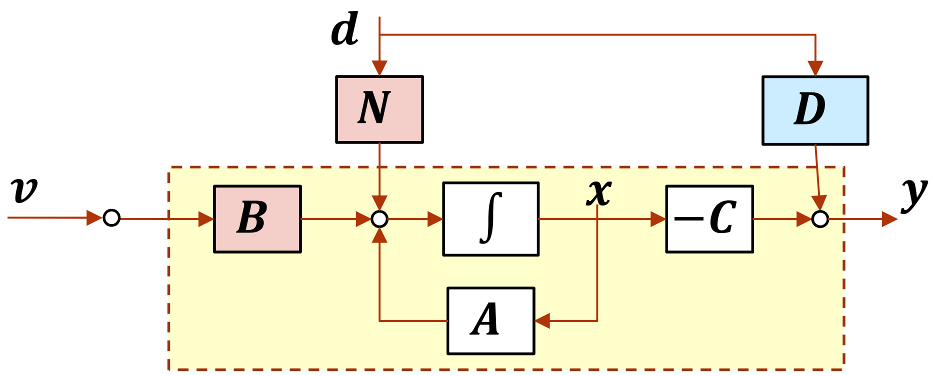
内模原理 —— 控制器中应包含外扰或参考输入信号的特性

以其人之道，还治其人之身

控制系统中的外扰

带外扰的状态空间模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

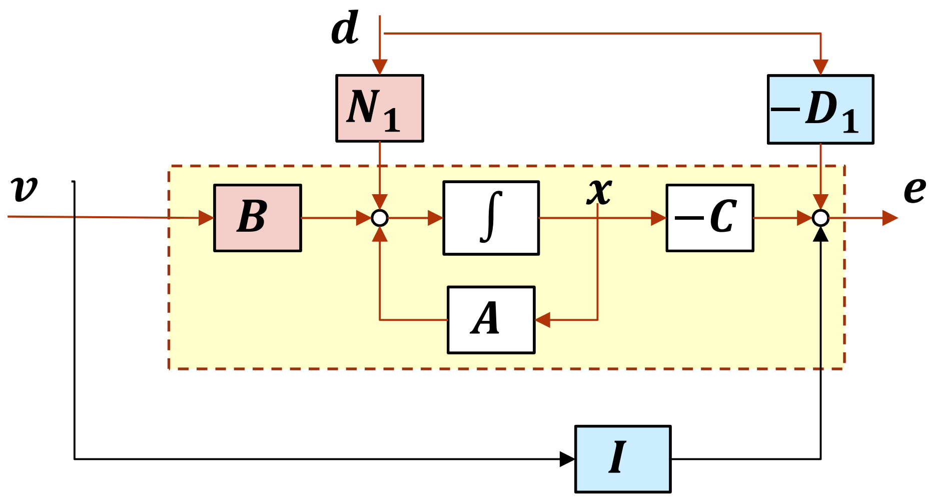


状态空间模型 $\Sigma_O:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bv+Nd\\ y=Cx+Dd\end{cases}$,

可统一描述抗外扰控制器和调节器设计问题。

存在外扰的调节器问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



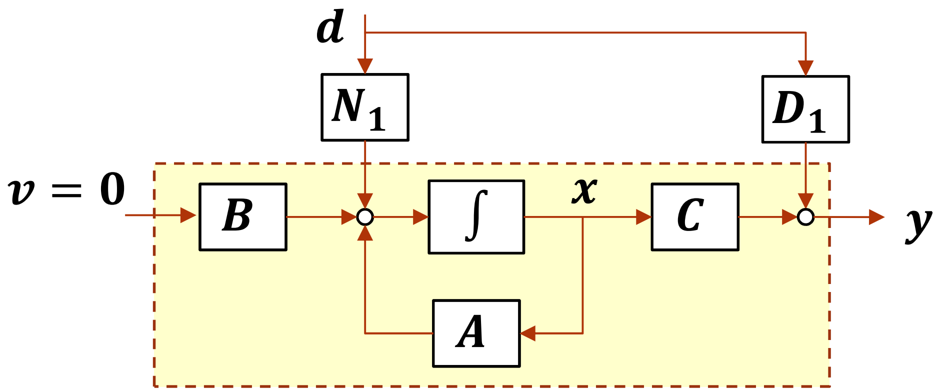
$$N=\begin{bmatrix}N_1 & \\ & B\end{bmatrix},\quad C=-\widetilde{C},\quad D=\begin{bmatrix}-D_1 & I\end{bmatrix}$$

设计系统使系统Σ_O: $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bw\\ e=Cx+Dw\end{cases}$, 其中 $w=\begin{bmatrix}d\\ v\end{bmatrix}$

跟踪误差趋于零且不受干扰影响.

干扰抑制问题（$v=0$）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



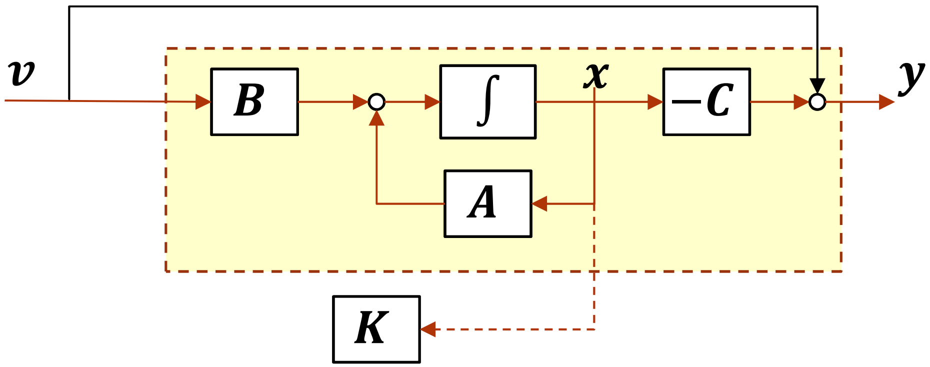
$$N=[N_1 \quad 0], \qquad D=[D_1 \quad 0]$$

设计控制使系统$\Sigma_O:\begin{cases}\dot{x}=Ax+N_1d\\ y=Cx+D_1d\end{cases}$

输出不受干扰影响。

调节器问题（$d = 0$）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



$$N = 0, \qquad C = -\tilde{C}, \qquad D = [0 \quad I]$$

设计控制使系统Σ_O : $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv \\ y = v - \tilde{C}x \end{cases}$

输出（跟踪误差）为零.

对外扰的不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑有外部输入的系统：$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w} \end{cases}$

当输入$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \equiv \boldsymbol{0}$时，状态/输出的解可以分解为：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) + \tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t});$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) + \tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$$

其中$\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})/\tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$是初态为零时在$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t})$作用下的强迫响应.

系统渐近稳定时自由响应趋于零，而强迫响应通常随外扰$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t})$【包括扰动和参考输入】变化.

对外扰的不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

完全不变性：

状态（或输出）强迫响应完全为零，不受扰动影响

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0} \quad (\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0})，且\ \tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) \equiv \boldsymbol{0}\ (\tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) \equiv \boldsymbol{0})$$

静态不变性：

状态（或输出）响应的稳态部分为零，不受扰动影响

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0} \quad (\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0})$$

抗外扰控制的基本设计原理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

双通道原理：

基于误差的反馈与基于扰动的顺馈相互配合，通过相互抵消消除扰动对输出的影响.

内模原理：

将扰动的动态运动特征嵌入控制器结构设计中，消除不稳定扰动模态（包括常值、正弦等信号）对输出的影响.

对外扰的完全不变性

状态对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

当控制输入为零（$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$）时，根据状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}$$

的Laplace变换可得：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}^{-1}\left[(\boldsymbol{s}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}\right]$$

易见状态对外扰完全不变的充要条件为：

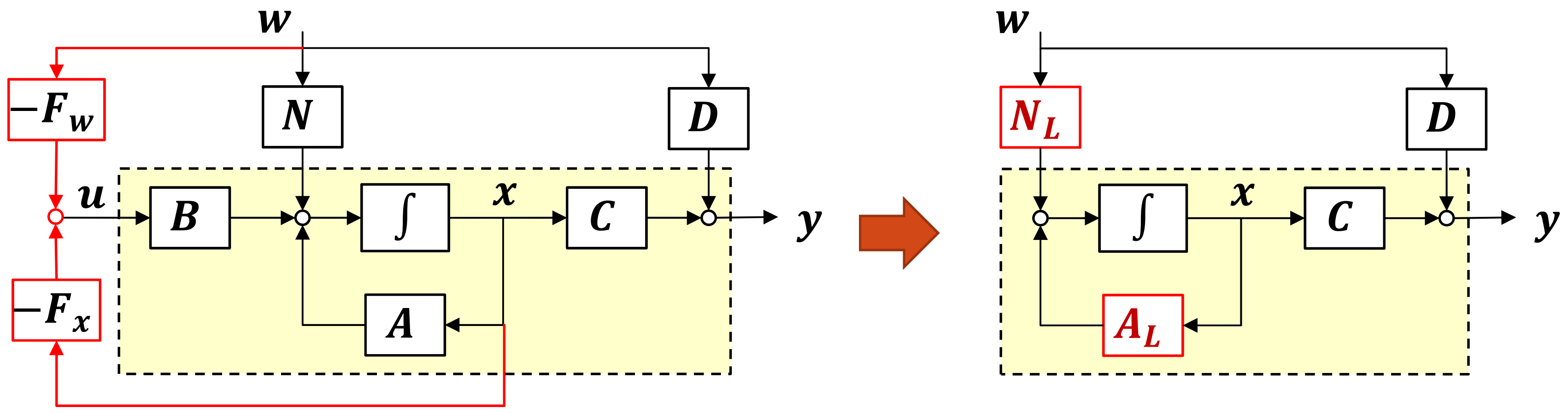
1）系统稳定，即 $\boldsymbol{A}$ 为Hurwitz矩阵；

2）$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}=0$，即 $\boldsymbol{N}=0$.

当$\boldsymbol{N}\neq 0$或开环系统不稳定时，如何使状态对外扰不变？

状态对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



采用控制律 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$，得到闭环系统

$$\boldsymbol{\Sigma}_L:\quad \dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w)\boldsymbol{w}$$

- 状态反馈 $\boldsymbol{F}_x$ 改造 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_L = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x$，保证闭环稳定；
- 扰动顺馈 $\boldsymbol{F}_w$改造 $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}_L = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w$，阻断扰动影响.

状态对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理 基于控制律 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x \boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_w \boldsymbol{w}$ 可实现状态对外扰完全不变的充要条件是：

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \text{ 可镇定，且 } \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = \operatorname{rank} [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}].$$

证明：$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$可镇定保证存在$\boldsymbol{F}_x$使得$\boldsymbol{A}_L = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x$稳定。

欲使状态对外扰完全不变，须 $\boldsymbol{N}_L = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w = \boldsymbol{0}$，

即$\boldsymbol{N}$的列向量可由$\boldsymbol{B}$的列向量线性表示，这等价于

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{B} = \operatorname{rank} [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}].$$

这意味着扰动作用的方向不能超出控制作用的范围.

输出对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑外扰对输出的影响（$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$），由状态空间方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

的Laplace变换可得：

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}\right]$$

易见输出 $\boldsymbol{y}$ 完全不受扰动 $\boldsymbol{w}$ 影响的充要条件为：

1）系统稳定，即 $\boldsymbol{A}$ 为Hurwitz矩阵；

2）$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}=0.$

输出对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

可以证明

$$C(sI-A)^{-1}N=\frac{p_0(s)CA^{n-1}N+p_1(s)CA^{n-2}N+\cdots+p_{n-1}(s)CN}{s^n+\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}$$

其中 $p_k(s)$是幂次为 k 的首一多项式，分母为特征多项式。

故有

$$C(sI-A)^{-1}N=0 \quad\Leftrightarrow\quad CA^kN=0 \ \ (k=0,1,\cdots,n-1)$$

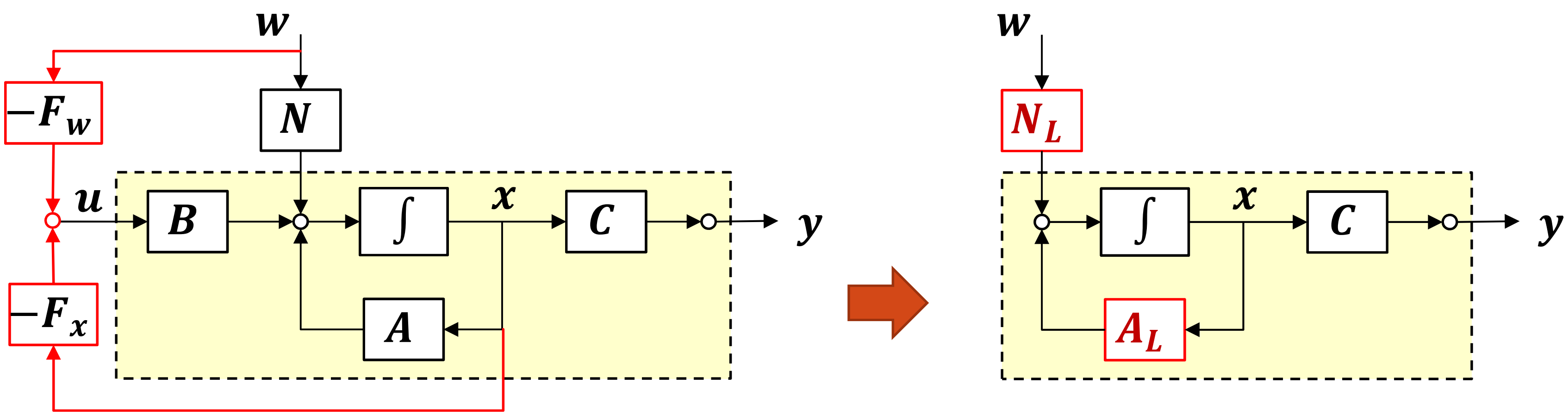
即

$$C\begin{bmatrix}N & AN & \cdots & A^{n-1}N\end{bmatrix}=0$$

上述条件意味着 w 可控的状态是输出y不可观测的。

输出对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



采用控制律 $u=-F_x x-F_w w$，得到闭环系统

$$\Sigma_L:\quad \dot{x}=(A-BF_x)x+(N-BF_w)w$$

- 反馈 F_x 改造 $A\to A_L=A-BF_x$，保证闭环稳定;
- 顺馈 F_w改造 $N\to N_L=N-BF_w$，阻断扰动对输出影响.

输出对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理 基于控制律 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$ 可实现状态对外扰完全不变的充要条件是：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\text{ 可镇定，且}\boldsymbol{C}[\boldsymbol{N}_L\quad \boldsymbol{A}_L\boldsymbol{N}_L\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}_L^{n-1}\boldsymbol{N}_L]=0,$$

其中 $\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{N}_L=\boldsymbol{N}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w$.

具体实现方案不唯一，可以

- 仅靠顺馈（$\boldsymbol{F}_x=\boldsymbol{0}$）：$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{N}_L\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}_L\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{N}_L]=0$

- 仅靠反馈（$\boldsymbol{F}_w=\boldsymbol{0}$）：$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{N}\quad \boldsymbol{A}_L\boldsymbol{N}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}_L^{n-1}\boldsymbol{N}]=0$

思考：如果 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}$ 且 $\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{0}$，是否能够通过反馈+顺馈实现输出对外扰完全不变？

示例

分析如下受控系统状态和输出对外扰的完全不变性，并设计控制方案改善对外扰的完全不变性。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = [2 \quad 1]\ \boldsymbol{x} \end{cases}$$

(1) 状态对外扰不具有完全不变性，且无法改变

$$\mathbf{rank}\,\boldsymbol{B} \neq \mathbf{rank}[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}]$$

(2) 输出对外扰不具有完全不变性（← 可以改善）

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{AN}] = [\mathbf{0} \quad \mathbf{150}] \neq \mathbf{0}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑状态反馈 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}$，由于 $\boldsymbol{CN}=\mathbf{0}$，因此输出对外扰完全不变等价于：

$$\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}_x \text{ 渐进稳定，且 } \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}_x)\boldsymbol{N}=\mathbf{0}$$

设 $\boldsymbol{F}_x=[\boldsymbol{f}_1 \quad \boldsymbol{f}_2]$，可得闭环特征多项式：

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF}_x)=s^2+(3+f_2)s+(20+5f_1+3f_2)$$

根据劳斯判据，闭环系统稳定要求：

$$3+f_2>0，\ 20+5f_1+3f_2>0.$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

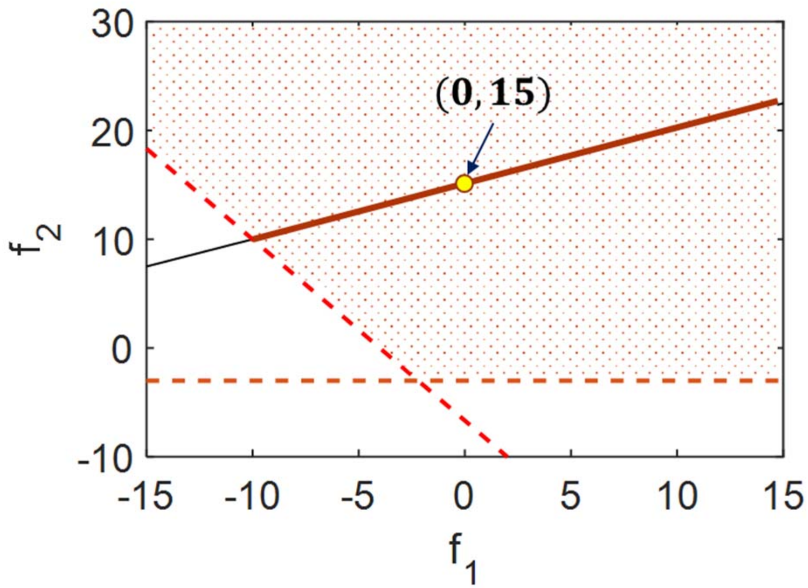
进一步，由条件

$$C(A-BF_x)N$$

$$=150+5f_1-10f_2=0$$

可选 $f_1=0$，$f_2=15$，

即 $F_x=[0\quad 15]$.



可检验基于上述反馈控制方案输出对外扰完全不变。

思考：能否仅利用顺馈实现输出对外扰完全不变?

对外扰的静态不变性

外模型

常见的确定性外扰$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$或参考输入信号$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$可由线性模型描述：

$$\dot{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}).$$

由于跟踪和干扰抑制问题数学上相同，可以将外扰和参考输入合称为外部信号，合并模型如下：

$$\dot{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}),$$

其中 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{T} \end{bmatrix}$.

外模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

常见信号模型（以外扰为例）： $\dot{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$

阶跃函数：$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) \equiv \boldsymbol{d}(\mathbf{0})$

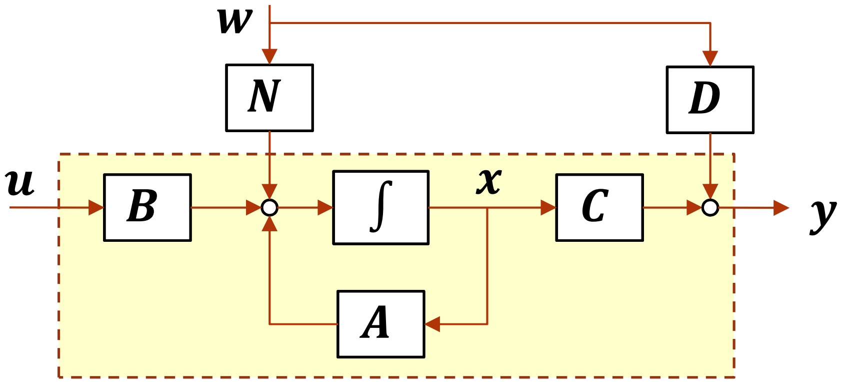
斜坡函数：$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{d}_1(\mathbf{0}) + \boldsymbol{d}_2(\mathbf{0})\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{d}_2(\mathbf{0}) \end{cases}$

正余弦函数： $\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \boldsymbol{d}_1(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{d}_1(\mathbf{0}) \cos \boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{d}_2(\mathbf{0}) \sin \boldsymbol{\omega t} \\ \boldsymbol{d}_2(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{d}_2(\mathbf{0}) \cos \boldsymbol{\omega t} - \boldsymbol{d}_1(\mathbf{0}) \sin \boldsymbol{\omega t} \end{cases}$$

输出对外扰的静态不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



$$\Sigma_O:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{w}\\ \dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w}\end{cases}$$

静态不变性：输出的稳态值不受扰动影响

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0}$$

状态强迫响应 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 可不为零.

注：$\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{0}$时，一般无法实现对外扰完全不变，但可以针对已知外扰模式实现静态不变.

外扰引起的强制解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理 外扰 $\boldsymbol{w}$ 引起的状态稳态强迫响应可以表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t)，\text{即} \lim_{\boldsymbol{t}\to\infty} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t),$$

当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 为稳定矩阵，且如下关于$\boldsymbol{P}$的矩阵方程有解：

$$\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}.$$

注：Sylvester 矩阵方程 $\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}$ 有唯一解矩阵$\boldsymbol{P}$ 的充要条件是矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{M}$没有相同特征值。

外扰引起的强制解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

证明：（充分性）若$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$且方程有解，则

$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}(\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM})\boldsymbol{w}(\tau)d\tau$$

$$=e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{APw}(\tau)d\tau$$

$\dot{\boldsymbol{w}}(\tau)=\boldsymbol{Mw}(\tau)$

$$-\left\{\left[e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Pw}(\tau)\right]\Big|_{t_0}^{t}+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{APw}(\tau)d\tau\right\}$$

$$=-\boldsymbol{Pw}(t)+e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{Pw}(t_0)$$

当$\boldsymbol{A}$渐进稳定时，可见$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=-\boldsymbol{Pw}(t)$。

外扰引起的强制解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

（必要性）令$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，若外扰$\boldsymbol{w}$引起的状态的稳态强制解为 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=-\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t)$，将其代入状态方程得：

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}$$

另一方面，直接对两边求导得 $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=-\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{w}}=-\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}\boldsymbol{w}.$

两式联立，并由$\boldsymbol{w}$的任意性可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$成立。

根据前面推导：

$$\boldsymbol{x}(t)=-\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t)+e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}[\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t_0)]\to-\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t),$$

易见后项必趋于零，因此 $\boldsymbol{A}$ 必然渐近稳定。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

求如下系统外扰产生的强迫响应 $\widetilde{\boldsymbol{x}}(t)$.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \dot{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

解：$\boldsymbol{A}$特征值$\{-\mathbf{1},\ -\mathbf{2}\}$和$\boldsymbol{M}$特征值$\{\pm \boldsymbol{j}\}$相异，故可解方程

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

强迫响应为

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t) = -\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{M}t}\boldsymbol{w}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -\sin \boldsymbol{t} \\ -\cos \boldsymbol{t} \end{bmatrix}$$

实现静态不变性的条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

若希望稳态输出 $\tilde{\boldsymbol{y}}$不受外扰 $\boldsymbol{w}$影响，即 $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w} = 0$

则根据前述结论 $\tilde{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}$，得 $\boldsymbol{CP} = \boldsymbol{D}$。

定理　对于系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w}$，若 $\boldsymbol{A}$ 渐近稳定且下述矩阵方程组有解

$$\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}\,(\text{装置条件}),\ \boldsymbol{CP} = \boldsymbol{D}\,(\text{输出条件}),$$

则输出对外扰静态不变.

实现静态不变性的条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理 对于系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Nw}$，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Dw}$，若 $\boldsymbol{A}$ 渐近稳定且下述矩阵方程组有解

$$\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}\ (\text{装置条件}),\ \boldsymbol{CP} = \boldsymbol{D}\ (\text{输出条件}),$$

则输出对外扰静态不变.

上述矩阵方程组是超定方程

- 若外扰模型$\boldsymbol{M}$没有负实部特征值，则$\boldsymbol{A}$渐近稳定时，方程 $\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}$ 一定有唯一解$\boldsymbol{P}$.
- 若解 $\boldsymbol{P}$ 不满足$\boldsymbol{CP} = \boldsymbol{D}$，则需通过反馈改造 $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{N}$.

抗干扰控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑如下系统：

$$\Sigma_O: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{w} \\ \dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w} \end{cases}$$

若状态和外扰可直接测量，则可以通过控制律

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$$

改善系统的抗干扰性能（反馈+顺馈）.

问题：设计控制律，使输出稳态无差，即 $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$.

抗干扰控制设计

根据前面讨论，实现稳态无差的充要条件是闭环系统渐近稳定，且存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足方程组：

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w,\ \ \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}.$$

定理：闭环系统输出稳态无差的充要条件是：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可镇定，且存在矩阵$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$满足：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}.$$

反馈控制律的设计：

（1）选择$\boldsymbol{F}_x$使得$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x$为Hurwitz矩阵；

（2）利用上述方程解，计算 $\boldsymbol{F}_w=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{P}$.

示例

有外扰的受控系统如下，设计控制律$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$，使闭环极点为 −1，−1，且实现输出稳态无差.

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \dot{\boldsymbol{w}}=0\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}\end{cases}$$

解：容易验证$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$完全可控，故可以设计状态反馈矩阵$\boldsymbol{F}_x$配置闭环极点为 −1，−1:

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)=(s+1)^2\ \Rightarrow\ \boldsymbol{F}_x=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

根据条件

$$\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}+\boldsymbol{BQ}=\boldsymbol{N},\qquad \boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}$$

求矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$，得到

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

最后得到顺馈补偿矩阵：

$$\boldsymbol{F}_w=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器

抗干扰控制的鲁棒性

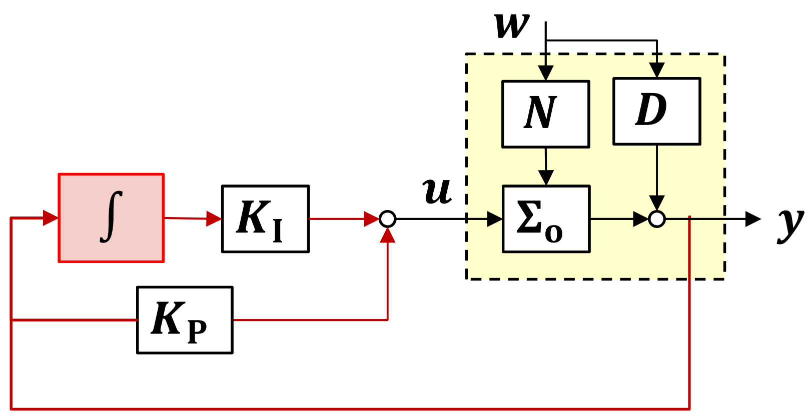
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 鲁棒性（Robustness）：系统自身或环境发生变化时，系统性能仍然保持不变或者变化很小的能力。
- 前述抗干扰控制器实现静态无差需要控制器和受控系统的“精确配合”(矩阵方程有解)，因此对系统参数的变化不具有鲁棒性。

问题：是否可能改进控制器设计，使得不论干扰为何种形式、不论系统参数如何变化，系统仍保持静态无差?

若否，是否能够针对特定干扰设计鲁棒抗干扰控制器?

PI 控制的启发

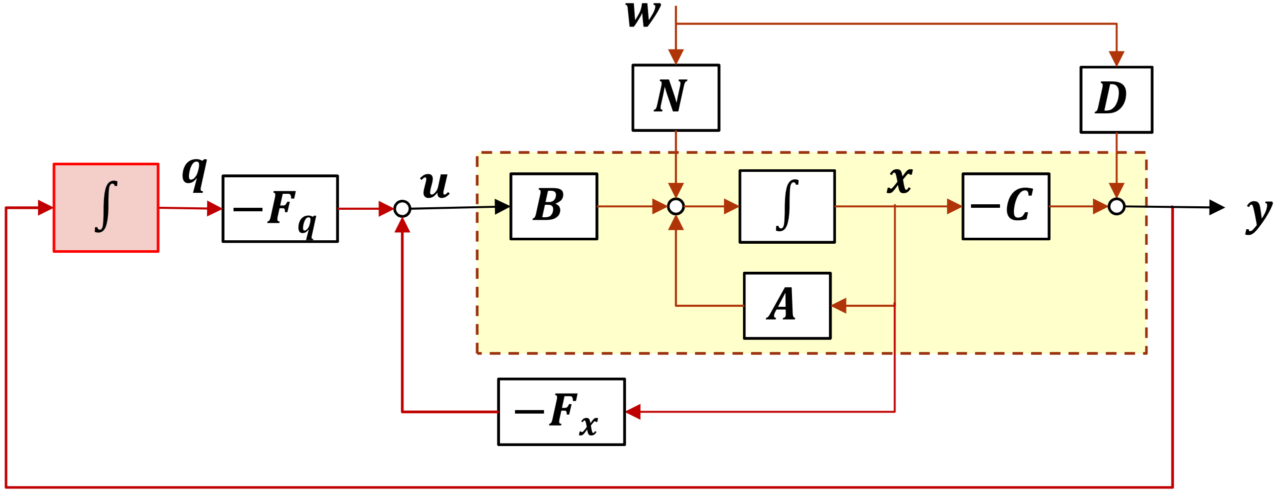


在经典的单变量控制理论中，为使闭环系统对常值扰动静态无差，通常采用PI控制. 只要y不为零，积分器输出就会随之增长或减少，直到将 y “拉回零”.

系统参数发生变化时，只要系统仍然稳定，积分环节将保证系统静态无差，从而使后者对参数变化具有鲁棒性.

PI 控制的启发

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



对于多变量系统，仿照上述基于 PI 抗干扰控制的思想，在每个输出分量后面串入一个积分器，共 m 个积分器。

$$\Sigma_O:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu+Nw\\ \dot{w}=0\\ y=Cx+Dw\end{cases}$$

$$u=-F_xx-F_ww$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{q}=y\\ u=-F_xx-F_qq\end{cases}$$

PI控制的启发

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

增广系统方程：$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w} \end{cases}$

代入 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x \boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_q \boldsymbol{q}$，得到闭环系统$\Sigma_L$的方程：

$\boldsymbol{\Sigma}_L$：$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_L = \boldsymbol{A}_L \boldsymbol{x}_L + \boldsymbol{N}_L \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_L \boldsymbol{x}_L + \boldsymbol{D}_L \boldsymbol{w} \end{cases}$，其中 $\boldsymbol{x}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_q \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{N}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{C}_L = [\boldsymbol{C} \quad 0]$，$\boldsymbol{D}_L = \boldsymbol{D}$.

输出静态无差条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：采用上述抗干扰控制器实现输出静态无差的充要条件是闭环系统 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{L}}$ 渐近稳定.

证： 输出静态无差的充要条件是$\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}_L$和$\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}_L$：

$$\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}_L \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_q\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_L=[\boldsymbol{C}\quad 0],\quad \boldsymbol{D}_L=\boldsymbol{D}$$

由于等式$\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}_L$的第二行就是$\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}_L$，因此只需存在$\boldsymbol{P}$满足$\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}_L$即可. 而$\boldsymbol{A}_L$渐稳时必可逆，故方程必存在解 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{N}_L$.

输出静态无差条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

根据上述定理，为实现闭环系统输出静态无差，控制的设计转化为如下问题：

寻找 $\boldsymbol{F}_C=[\boldsymbol{F}_x \quad \boldsymbol{F}_q]$，使得为渐近稳定矩阵

$$\boldsymbol{A}_L=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{F}_C=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_q\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}.$$

若原系统可控，则增广系统 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ 一定也完全可控：

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_C=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n+m-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{CB} & \cdots & \boldsymbol{CA}^{n+m-2}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AQ}\\ 0 & \boldsymbol{CQ}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{I} & 0\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{Q}_C$是原系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$的能控性矩阵，故$\boldsymbol{F}_C$一定存在.

鲁棒抗干扰控制器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

推论：系统存在鲁棒抗干扰控制器且可任意配置极点的充要条件是 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 完全可控，且

$$\textbf{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}.$$

- 不难看出，上述条件要求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数不少于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数，即控制量个数不少于被调量个数。

思考：$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的秩应满足什么要求？物理意义是什么？

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

为如下系统设计鲁棒抗干扰控制器，使闭环极点为 -1，-1，-2，-2，其中扰动 $\boldsymbol{w}$ 是常值.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

解：容易检验 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 完全可控，且

$$\mathbf{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = 4 = n + m$$

因此存在反馈控制律实现鲁棒抗干扰控制.

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设计鲁棒抗干扰控制器：

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_q\boldsymbol{q}$$

根据期望闭环极点$\{-\mathbf{1},-\mathbf{1},-\mathbf{2},-\mathbf{2}\}$解极点配置方程：

$$\mathbf{det}\left(\boldsymbol{sI} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}_x & -\boldsymbol{BF}_q \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}\right) = (\boldsymbol{s}+\mathbf{1})^2(\boldsymbol{s}+\mathbf{2})^2$$

可得（解不唯一）

$$\boldsymbol{F}_x = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F}_q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

一般扰动下的鲁棒抗干扰控制器

PI控制的推广

- 常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器采用积分器作补偿器，而积分器描述了常值扰动模型，即$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{w}(\mathbf{0})$。

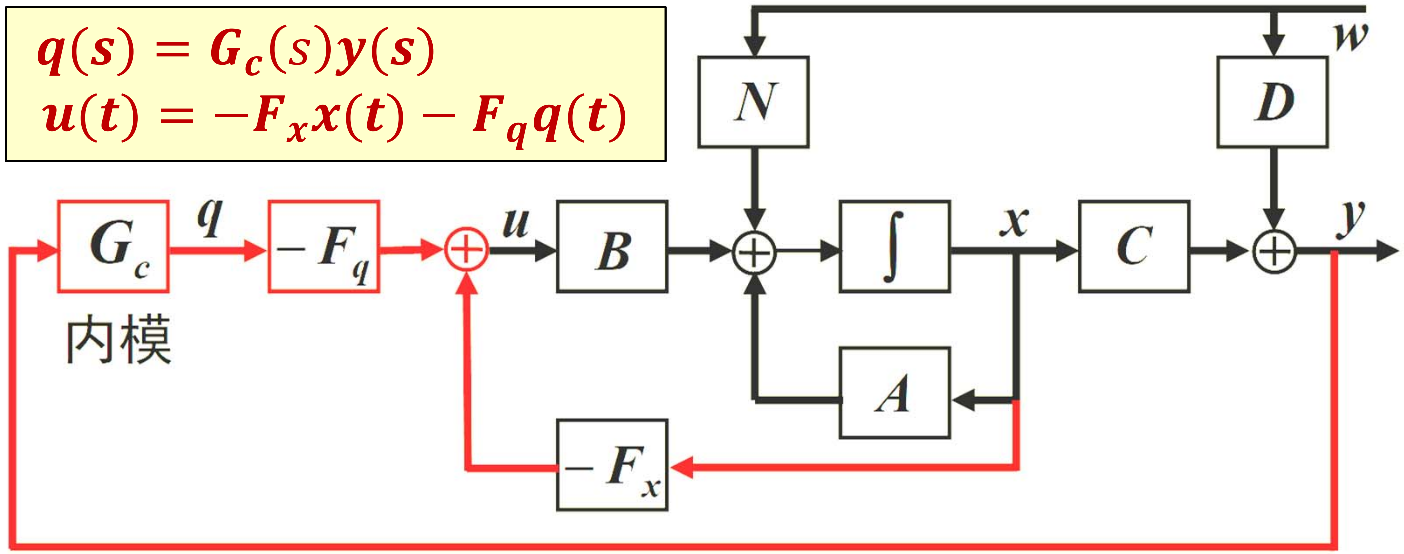
问题：如果干扰不是常值，所设计的鲁棒抗干扰控制器能保持输出稳态无差吗?

$$\boldsymbol{\Sigma_O}:\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{w} \\ \dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w} \end{cases}$$

鲁棒抗干扰控制器如何根据扰动模型设计?

鲁棒抗干扰控制器

$$q(s) = G_c(s)y(s)$$
$$u(t) = -F_x x(t) - F_q q(t)$$



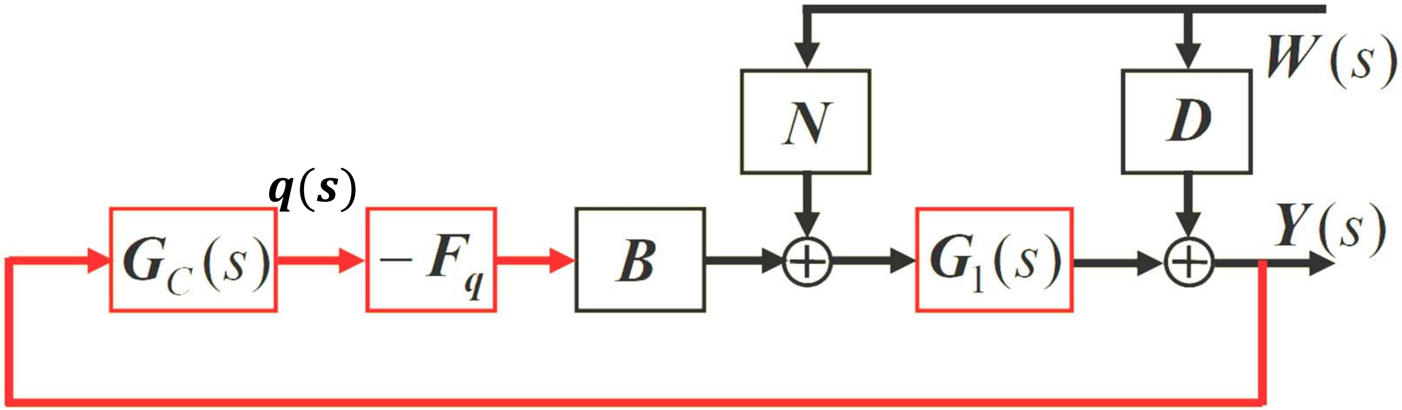
$$sx(s) = Ax(s) + Nw(s) + B\left[-F_x x(s) - F_q q(s)\right]$$

$$\Rightarrow \quad Cx(s) = G_1(s)\left[Nw(s) - BF_q q(s)\right]$$

其中闭环传递函数 $G_1(s) = C(sI - A + BF_x)^{-1} = \dfrac{R(s)}{\psi(s)}$

鲁棒抗干扰控制器

根据 $\boldsymbol{Cx}(s)=\boldsymbol{G_1}(\boldsymbol{s})\left[\boldsymbol{Nw}(s)-\boldsymbol{BF}_q\boldsymbol{q}(\boldsymbol{s})\right]$ 画出等价框图：



并得到输出与干扰信号的传递关系：

$$\boldsymbol{y}(s)=[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{BF_q}\boldsymbol{G}_C(s)]^{-1}[\boldsymbol{D}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{N}]\boldsymbol{w}(s)$$

如何选择适当的$\boldsymbol{G_C}(\boldsymbol{s})$阻断干扰对输出的影响?

鲁棒抗干扰控制器

根据外扰模型：$\dot{\boldsymbol{w}}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{w}(t)$，可以得到频域表示

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{s}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{w}(\mathbf{0}).$$

记 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1}=\frac{\boldsymbol{P}(s)}{\varphi(s)}$，其中$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{s})$是多项式矩阵，则

$$\boldsymbol{y}(s)=[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_{q}\boldsymbol{G}_{C}(\boldsymbol{s})]^{-1}[\boldsymbol{D}+\boldsymbol{G}_{1}(s)\boldsymbol{N}]\frac{\boldsymbol{P}(s)}{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})}\boldsymbol{w}(\mathbf{0})$$

思路：设计$\boldsymbol{G}_{C}(\boldsymbol{s})$产生零点与外扰极点$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$对消.

内模原理

选择 $G_C(s)=\frac{Q(s)}{\varphi(s)}$，其中$Q(s)$为待定多项式矩阵

$$G_2(s)=[I+G_1(s)BF_qG_C(s)]^{-1}$$

$$=\left[I+\frac{R(s)}{\psi(s)}BF_q\frac{Q(s)}{\varphi(s)}\right]^{-1}=\psi(s)\varphi(s)\frac{T(s)}{\gamma(s)}$$

其中 $\frac{T(s)}{\gamma(s)}=[\psi(s)\varphi(s)I+R(s)BF_qQ(s)]^{-1}$.

综上可实现期望的零极对消：

$$y(s)=\varphi(s)\frac{T(s)}{\gamma(s)}[D\psi(s)+R(s)N]\frac{P(s)}{\varphi(s)}w(0).$$

内模原理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})\frac{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s})}{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{s})}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{N}]\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{s})}{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})}\boldsymbol{w}(\mathbf{0})$$

- 外扰的内模嵌在$\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{y}$的反馈通道里，使得它的极点多项式$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$变成闭环的零点多项式，从而与外扰极点多项式$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$对消。
- 可通过反馈$\boldsymbol{F_x}$将$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{s})$的根配置在左半开平面，因此$\lim\limits_{t \to 0} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$。只要极点配置离虚轴足够远，所得闭环系统的输出稳态无差性对系统参数变化就具有鲁棒性。

内模原理

定理　在外扰至误差输出的反馈通道中，对每个误差输出分量都串入外扰的内模，只要闭环渐近稳定，则闭环实现输出稳态无差。