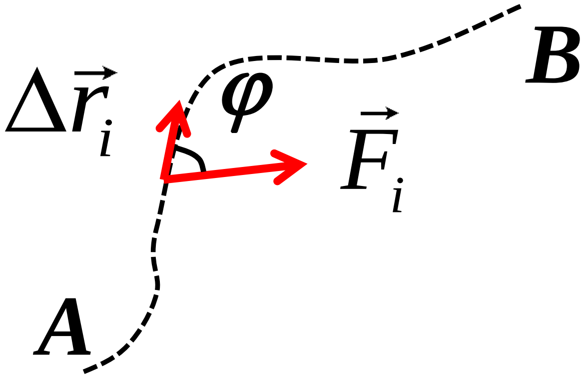
功和能

第四章 功和能

§4.1 功



力的空间积累

$$\Delta W_i = F_i \Delta r_i \cos\varphi$$

矢量的点积（标量积）

功 $$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

功率 $$P_i = \vec{F}_i \cdot \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

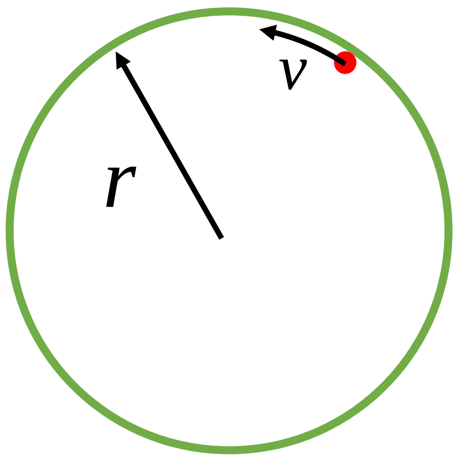
1. 力垂直于位移方向，不改变速度的大小。

2. 力平行于位移方向，改变物体的运动速度。

A到B做功 $$\boxed{W_{AB} = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

注意这里的积分是路径积分

例：光滑的水平桌面上有一环带，环带与小物体的摩擦系数 μ，在平行于速度方向的外力作用下小物体（质量 *m* ）以速率 *v* 做匀速圆周运动，求转一周摩擦力做的功。



转一周

解：小物体对环带压力

$$N = m\frac{v^2}{r}$$

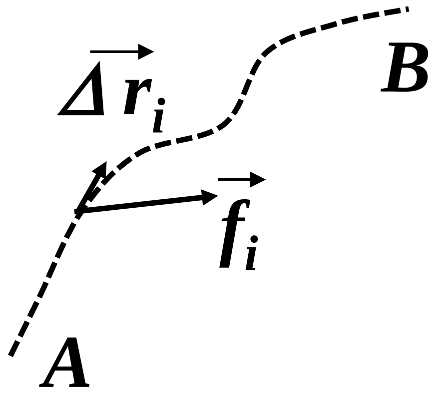
$$f = N\mu = \mu m\frac{v^2}{r}$$

$$W = \int_l \vec{f}\cdot d\vec{l} = \int_l (-f\hat{\theta})\cdot(rd\theta\hat{\theta}) = -f\int_0^{2\pi} rd\theta = -2\pi\mu mv^2$$

§4.2 动能定理

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

证明： $W_{AB}=E_{BK}-E_{AK}$



$$w_{AB}=\int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{r}=\int_A^B m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int_A^B m d\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}$$

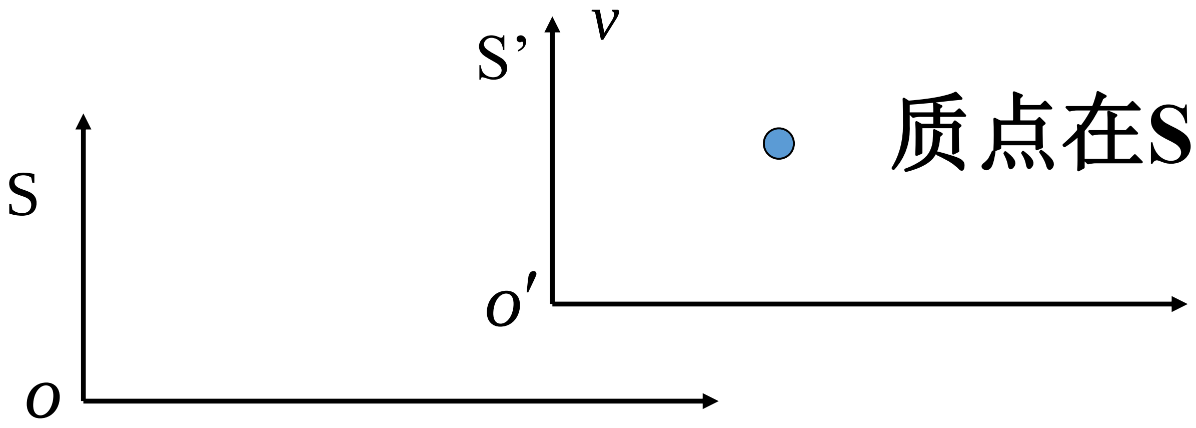
$$=\int_A^B m\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}=\int_A^B d(\frac{1}{2}m\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon})$$

$$=\frac{1}{2}m\upsilon_B^2-\frac{1}{2}m\upsilon_A^2=E_{BK}-E_{AK}$$

$$d(\frac{1}{2}mv^2)=\vec{f}\cdot d\vec{r}$$

功率 $\vec{f}\cdot\vec{v}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$

动能的相对性



质点在S’系中静止

在S参考系动能为 $\frac{1}{2}mv^2$

在S’参考系动能为零

动能是相对于参考系而言的，表示物体在本参考系中可以利用的能量。

质点系动能定理

$$W_{外}+W_{内}=\sum_i E_{KB}^i - E_{KA}^i = E_{KB}-E_{KA}$$

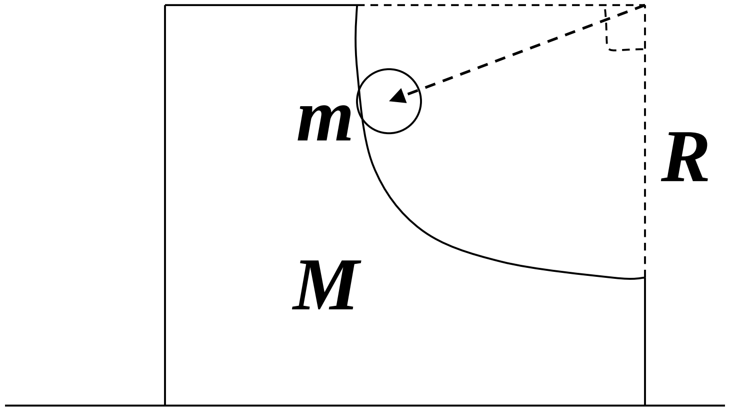
注意：内力虽成对出现，但内力功的和不一定为零。

注意：内力能改变系统的总动能，但不能改变系统的总动量

例：炸弹爆炸，过程内力和为零，但内力所做的功转化为弹片的动能。

※ 迄今，最不可思议的动能是，宇宙射线中有些质子的动能达到 10^{19} eV，是其静止能量的 10^{10}倍。

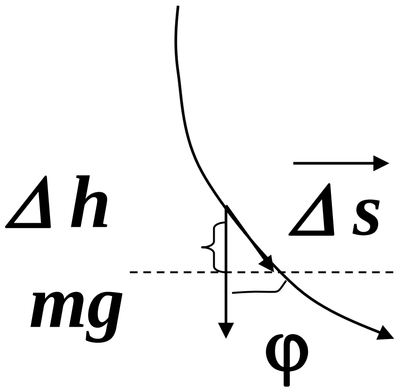
例：有一面为1/4凹圆柱面（半径*R*）的物体（质量M）放置在光滑水平面，一小球（质量*m*），从静止开始沿圆面从顶端无摩擦下落（如图），小球从水平方向飞离大物体时速度 *v*，求：1）重力所做的功；2）内力所做的功。



解：重力只对小球做功

$$\Delta W_{重力} = mg\Delta s\cos\phi = mg\Delta h$$

$$W_{重力} = mgR$$



水平方向无外力，系统保持水平方向动量守恒。

$$mv + MV = 0$$

$$W_{重力}+W_{内力}=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}mv^2$$

对M，内力所做的功 $\frac{1}{2}MV^2=\frac{m^2v^2}{2M}$

对m，内力所做的功 $\frac{1}{2}mv^2-mgR$

* 本例中实际内力对两个物体分别所做功互相抵消。

质心系

$$E'_K=\sum_i\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i-\vec{v}_c)^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^{\,2}-\sum_i m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_c+\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_c^{\,2}$$

$$E'_K=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2-\frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right)v_c^2=E_K-E_{KC}$$

柯尼希定理

$$\boxed{E_K=E'_K+E_{KC}}$$

质点系总能量等于质心的动能和质点系的内能之和。质点系的内能是所有质点相对于质心的动能和。

两体问题 $E'_K = \frac{1}{2}\mu v^2$

折合质量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 相对速度 $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

$$= \vec{v}\,'_2 - \vec{v}\,'_1$$

$$m_1\vec{v}\,'_1 + m_2\vec{v}\,'_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 \qquad E_k = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

在质心系，动能定理成立，不论是否为惯性系

$$\vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i' + \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_c$$

$$\sum_i \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i' + \sum_i \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_c$$

$$\sum_i \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i' + \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_c$$

$$\int_A^B \sum_i \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = \int_A^B \sum_i \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i' + \int_A^B \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_c$$

$$W_{\text{外}, AB} + W_{\text{内}, AB} = W'_{\text{外}, AB} + W'_{\text{内}, AB} + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_c$$

$$W_{外,\mathrm{AB}}+W_{内,\mathrm{AB}}=W'_{外,\mathrm{AB}}+W'_{内,\mathrm{AB}}+\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_c$$

$$W_{外,\mathrm{AB}}+W_{内,\mathrm{AB}}=E_{KB}-E_{KA}$$

$$W'_{外,\mathrm{AB}}+W'_{内,\mathrm{AB}}=E_{KcB}+E'_{KB}-E'_{KA}-E_{KcA}-\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_c$$

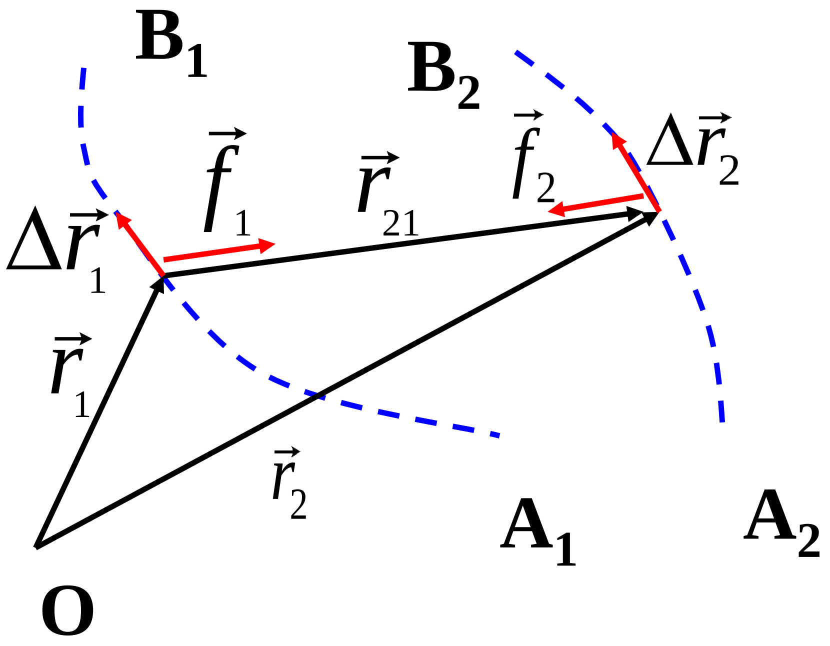
$$\vec{F}\cdot d\vec{r}_c=M\frac{d\vec{V}_c}{dt}\cdot d\vec{r}_c=M\vec{V}_c\cdot d\vec{V}_c=d\left(\frac{1}{2}M\vec{V}_c^{2}\right)$$

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_c=E_{KcB}-E_{KcA}$$

$$\boxed{W'_{外,\mathrm{AB}}+W'_{内,\mathrm{AB}}=E'_{KB}-E'_{KA}}$$

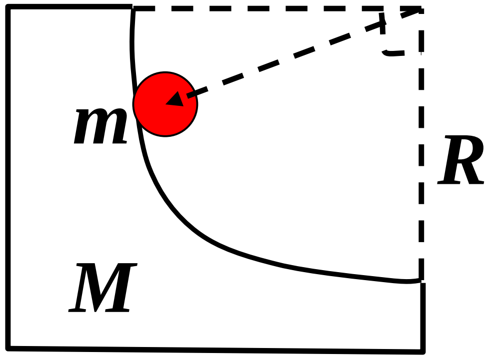
§4.3 一对力的功

系统内力总是成对出现



$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W_{对} &= \vec f_1\cdot \mathrm{d}\vec r_1 + \vec f_2\cdot \mathrm{d}\vec r_2 \\
&= \vec f_2\cdot(\mathrm{d}\vec r_2 - \mathrm{d}\vec r_1) \\
&= \vec f_2\cdot \mathrm{d}(\vec r_2 - \vec r_1) \\
&= \vec f_2\cdot \mathrm{d}\vec r_{21}
\end{aligned}
$$

一对力所做的功，等于其中一个物体所受的力沿两个物体**相对移动的路径**所做的功。



上一例，内力与相对位移总垂直，故内力所做的功总和为零。

$$W_{重力} + W_{内力} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_{对} = \int_A^B \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21} = \int_A^B \vec{f}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{12}$$

A 表示初位形，即 m_1 在 A_1，m_2 在 A_2；

B 表示末位形，即 m_1 在 B_1，m_2 在 B_2。

几点说明：

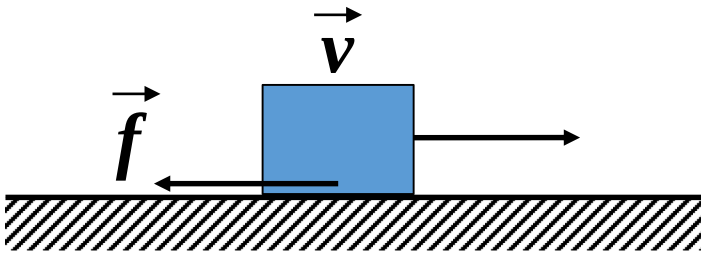
1. $W_{对}$ 与参考系选取无关。

2. 一对滑动摩擦力的功恒小于零。

（摩擦生热是一对滑动摩擦力作功的结果）

3. 在无相对位移、或相对位移与一对力垂直的情况下，一对力的功必为零。

例：摩擦力做功



摩擦力做功

$$\Delta W = -f\Delta s$$

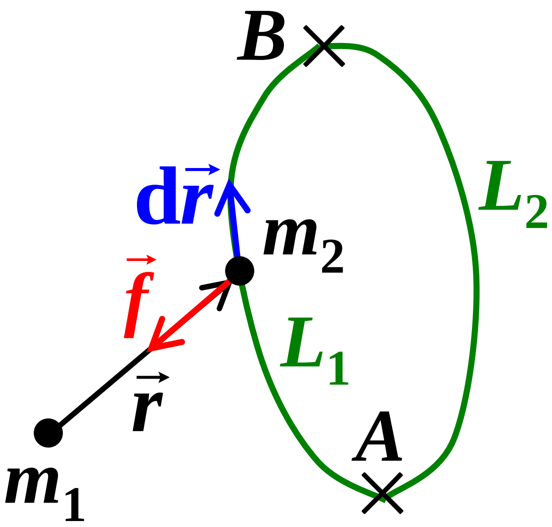
在物体参考系（也是惯性系），物体没有移动

$$\Delta W = ?$$

摩擦力是一对力，一对力所做的功与参考系的选择无关。

§ 4.4 保守力

保守力：力所做的功与相对移动的路径无关，只决定于物体的始末相对位置。



$$\int_{A\,(L_1)}^{B} \vec{f}_{保守}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{A\,(L_2)}^{B} \vec{f}_{保守}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\int_{A\,(L_1)}^{B} \vec{f}_{保守}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{B\,(L_2)}^{A} \vec{f}_{保守}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

$$\boxed{\oint_L \vec{f}_{保守}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0}$$

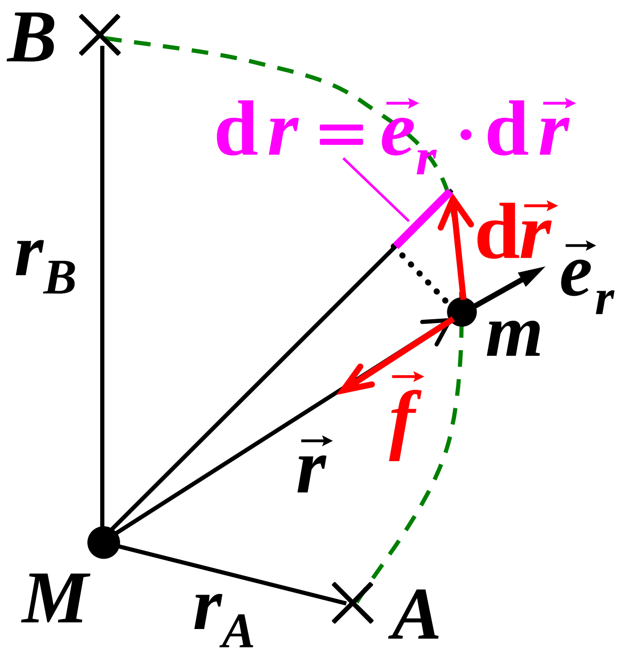
— 保守力定义式

（L 是任意闭合路径）

保守力沿任意闭合曲线对物体所做的功为零

常见的保守力

1. 万有引力



$$W_{对} = \int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_A^B -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} -\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A}$$

任何有心力 $f(r)\vec{e}_r$ 都是保守力。

2. 弹力 $\vec{f} = -k(x - x_0)\cdot\vec{i}$ （一维情况）

$x - x_0$ — 弹簧伸长量，k — 弹簧劲度

3. 重力 $\vec{P} = m\vec{g}$

非保守力

做功与路径有关的力称为非保守力。

摩擦力

滑动摩擦力作为内力，功恒为负，耗散力；

静摩擦力作功可正、负或零，非耗散力。

爆炸力：作为内力，作功为正。

§ 4.5 势能

保守力做功与路径无关，可用引入**标量函数**

— **势能$E_p(r)$**替代保守力做功。

定义： 系统由位形 A 变到位形 B 的过程中，
保守内力作功等于系统势能的减少，
或势能增量的负值。

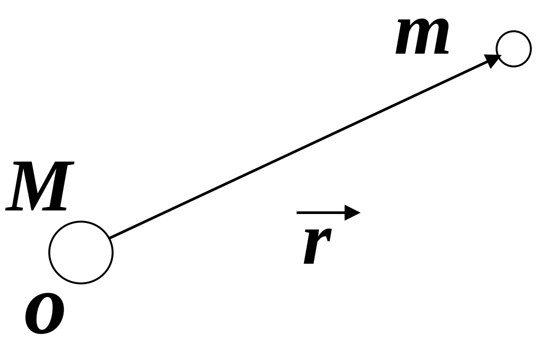
$$\boxed{E_p(A)-E_p(B)=-\Delta E_p=W_{\text{保内}}=\int_A^B \vec{f}_{\text{保内}}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

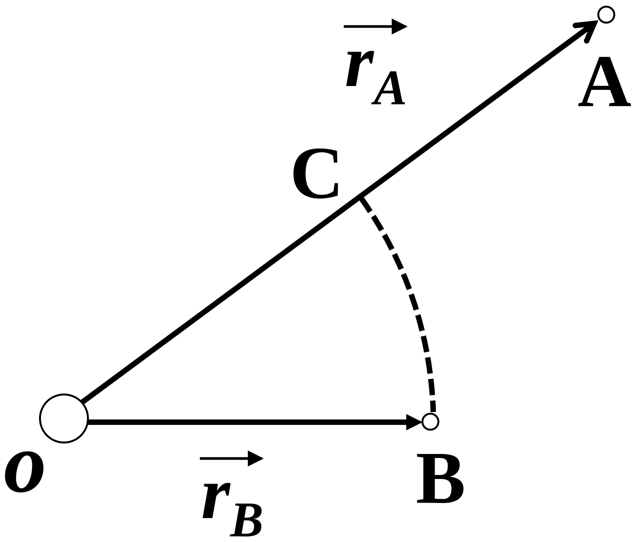
势能零点：选择某位形 O 且规定 $E_p(O)=0$

$$E_p(A)=W_{AO}=\int_A^O \vec{f}_{\text{保内}}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

§4.6 万有引力势能

$$\vec{f} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$





$$W_{B\to A} = W_{B\to C} + W_{C\to A} = W_{C\to A}$$

$$W_{C\to A} = \int_C^A \vec{f}\cdot d\vec{r} = -GmM\int_{r_C}^{r_A}\frac{dr}{r^2}$$

$$= -GmM\left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$W_{B\to A}=W_{C\to A}=GmM\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_C}\right)=\frac{GmM}{r_A}-\frac{GmM}{r_B}$$

$$\boxed{E_P(B)-E_P(A)=W_{B\to A}}$$

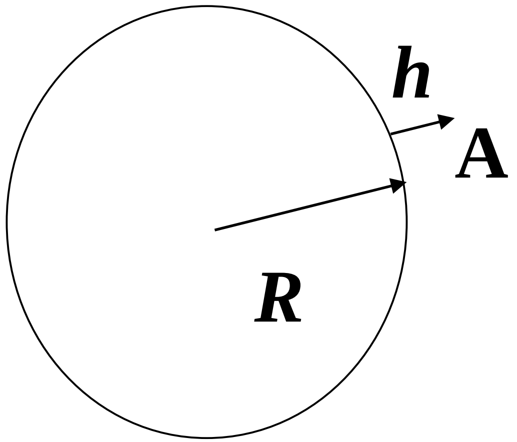
选无限远点势能为零 $r_A\to\infty$

$$\boxed{E_P=-G\frac{mM}{r}}$$

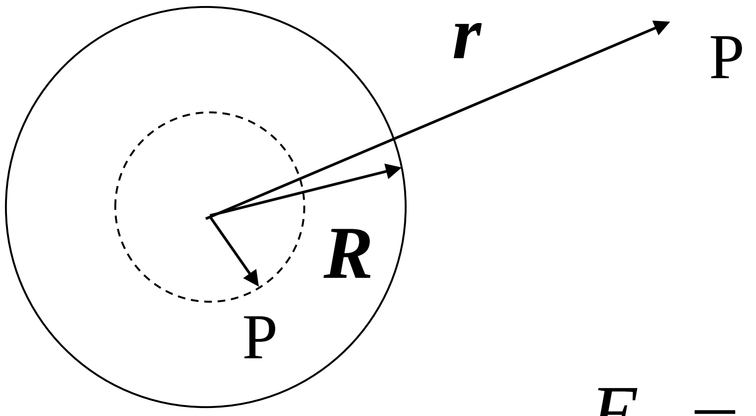
地面

$$E_{PA}-E_{P地}=G\frac{mM}{R}-G\frac{mM}{R+h}$$

$$=\frac{GmMh}{R(R+h)}\approx m\frac{GM}{R^2}h=mgh$$



球壳与质点的引力势能



结论

$r > R$ $$E_P = -G\frac{mM}{r}$$

质点在球外时，与壳质量全部集中在球心一样

$r < R$ $$E_{P壳} = -G\frac{mM}{R}$$

质点在球面内时，壳质量对质点无作用

对于球体

$r < R$ $$E_{P球} = -G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{2R^3}(R^2 - r^2)$$

§4.7 弹性势能

弹性力　$-kx$

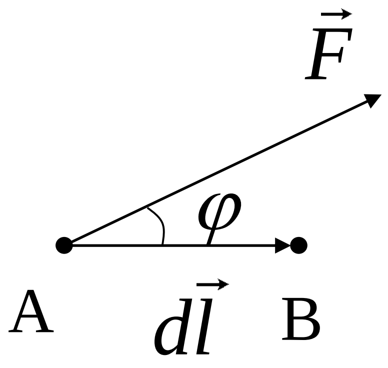
$$W_{A\to B}=-k\int_A^B xdx=-\frac{1}{2}k(x_B{}^2-x_A{}^2)$$

$$E_P(A)-E_P(B)=W_{A\to B}$$

自然长度 x_B=0，弹性势能为零

$$E_P=\frac{1}{2}kx^2$$

§4.8 由势能求保守力



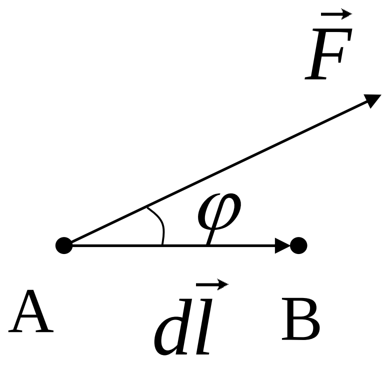
$$E_P(A) - E_P(B) = W_{A\to B}$$

$$-dE_P = W_{A\to B} = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F_l\, dl$$

$$\boxed{F_l = -\frac{dE_P}{dl}}$$

$$E_P = -G\frac{mM}{r} \quad \rightarrow \quad F_r = -\frac{dE_P}{dr} = -G\frac{mM}{r^2}$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad F_x = -\frac{dE_P}{dx} = -kx$$



$$F_l = F\cos\varphi$$

$$F_l = -\frac{dE_P}{dl}$$

***l* 方向变化率**

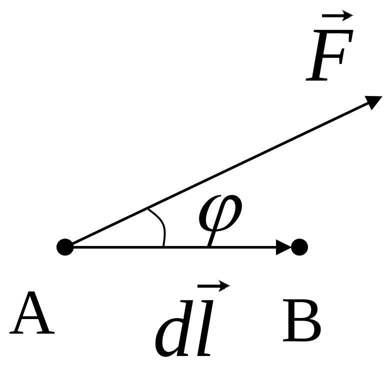
$$\boxed{F_l = -\frac{\partial E_P}{\partial l}}$$

***l* 方向导数**

***x* 分量** $F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x}$ **同理对 *y*, *z* 分量**

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$= -\vec{i}\,\frac{\partial E_P}{\partial x} - \vec{j}\,\frac{\partial E_P}{\partial y} - \vec{k}\,\frac{\partial E_P}{\partial z}$$



$$F_l = F\cos\varphi$$

$$\boxed{\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla E_P = -grad(E_P)}$$

梯度

F = 负的沿 $\hat{F}$ 方向 E_P 的变化率

梯度：变化最陡的方向导数

$$E_P = -G\frac{mM}{r} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla E_P$$

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_P}{\partial r}\hat{r} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

势能曲线

对一维情形： $f=-\dfrac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$

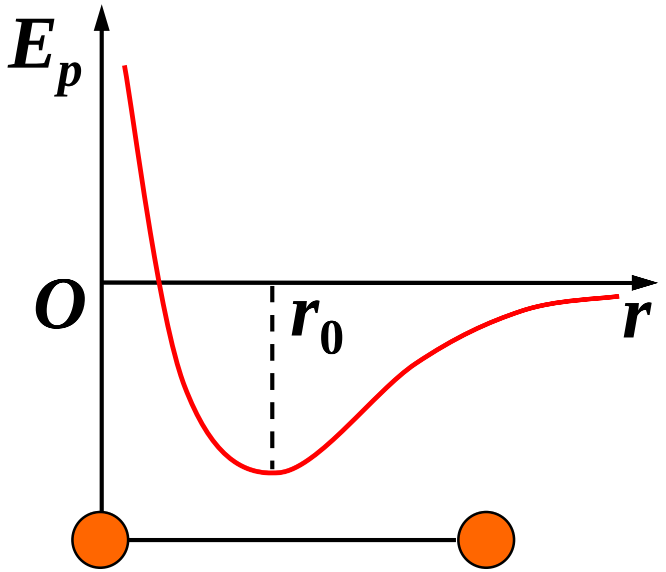
保守力指向势能下降的方向，大小正比于势能曲线的斜率。

势能曲线形象地反映出系统的稳定性：

- 势能曲线上每一个局部的最低点都是稳定的平衡点：当质点偏离了稳定的平衡点时，会受到指向平衡点的力，即质点可以围绕这些平衡点作小振动。

- 势能曲线上每个局部的最高点都是不稳定的平衡点：一旦质点偏离不稳定的平衡点，都会受到偏离平衡点的力，质点就会远离而去。

例：双原子分子势能曲线

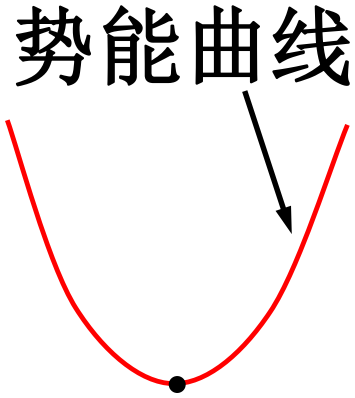


$r = r_0$： $f = 0$，平衡位置

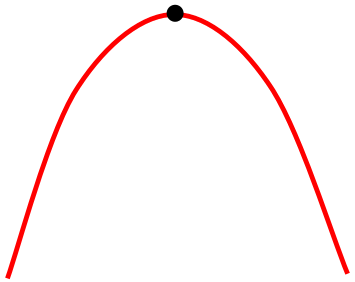
$r > r_0$： $f < 0$，引力作用

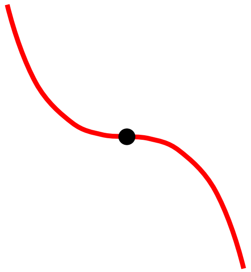
$r < r_0$： $f > 0$，斥力作用

平衡种类



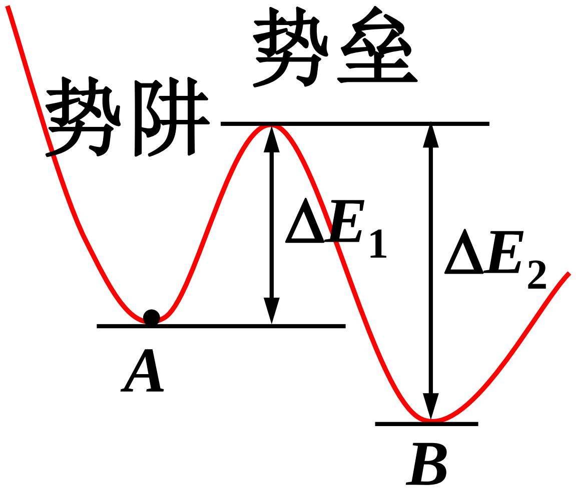
稳定平衡





不稳平衡

随遇平衡



亚稳平衡

在 A 点，若 $E_k > \Delta E_1$ 则质点可越过势垒进入 B 区。

在 B 点，若 $E_k > \Delta E_2$ 则质点可越过势垒进入 A 区。

总能量 E 决定了质点在势场中的运动范围。

§4.9 机械能守恒定律

$$W_{外}+W_{内}=E_{KB}-E_{KA}$$ 内力分为两部分

$$W_{外}+W_{内非}+W_{内保}=E_{KB}-E_{KA}$$

$$W_{内保A\to B}=E_P(A)-E_P(B)$$

$$W_{外}+W_{内非}=(E_{KB}+E_{PB})-(E_{KA}+E_{PA})$$

机械能 $E=E_K+E_P$

$$W_{外}+W_{内非}=E_B-E_A$$

质点系只有保守内力做功，机械能守恒。

更普遍地，孤立系统能量守恒。

机械能守恒定律

只有保守内力作功时，系统机械能不变。

$$\boxed{W_{外}=0 \text{ 且 } W_{非保内}=0\text{，则 } E=\text{常量}}$$

—— 机械能守恒定律

孤立的、保守的系统机械能守恒。

当$\Delta E=0$时，$\Delta E_k=-\Delta E_p=W_{保内}$

即 $E_p \underset{W_{保内}<0}{\overset{W_{保内}>0}{\rightleftarrows}} E_k$

车载摆实验演示

小球碰撞演示

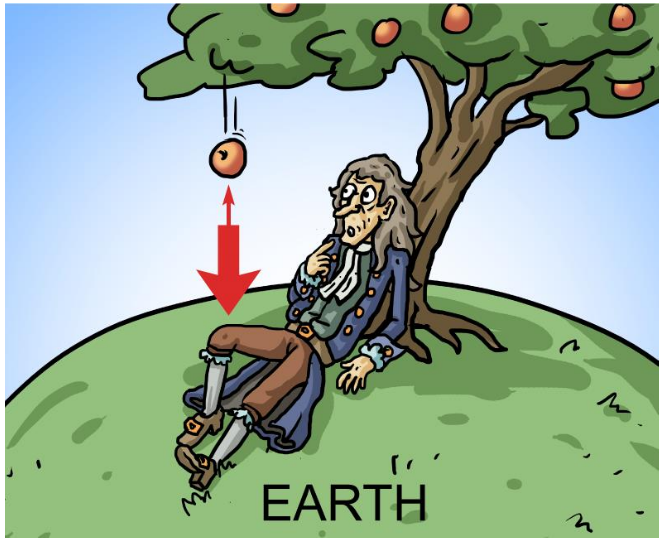
系统势能与动能的相互转化通过保守内力做功来实现和度量。

普遍的能量守恒定律

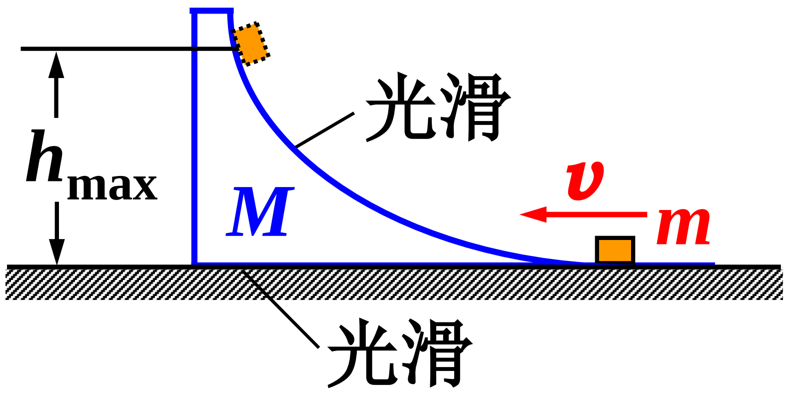
考虑各种物理现象，计及各种能量：

一个孤立系统不管经历何种变化，系统所有能量的总和保持不变。

机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现。



例1 已知 m，M 和滑块的初速度v，求：$h_{max} = ?$



解：$m + M +$ 地球：

$W_{外} = 0$，$W_{非保内} = 0$

故机械能守恒。

当 $h = h_{max}$ 时，M 与 m 有相同水平速度 $\vec{V}$。

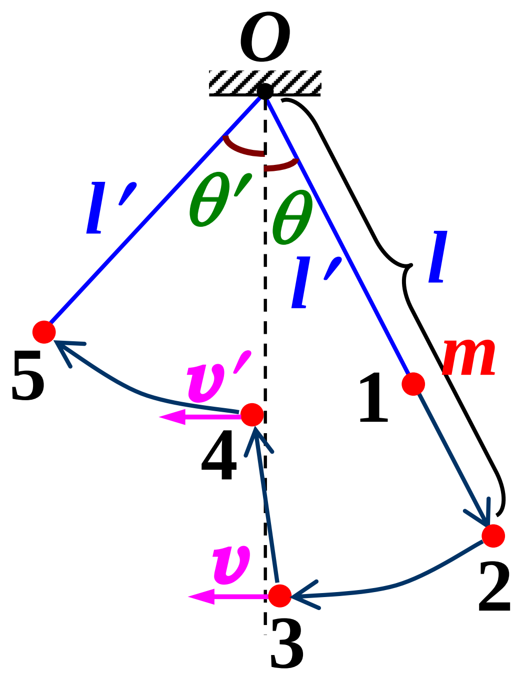
取地面 $E_p = 0$，有：

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgh_{max} \qquad (1)$$

$$mv = (m+M)V \qquad (2)$$

由(1)(2) 得：$h_{max} = \dfrac{M}{M+m} \cdot \dfrac{v^2}{2g}$

例2 分析荡秋千原理：m 表示人的质心



$1 \rightarrow 2$：人迅速蹲下，使有效摆长 $\overline{Om}$ 由 l' 变为 l；

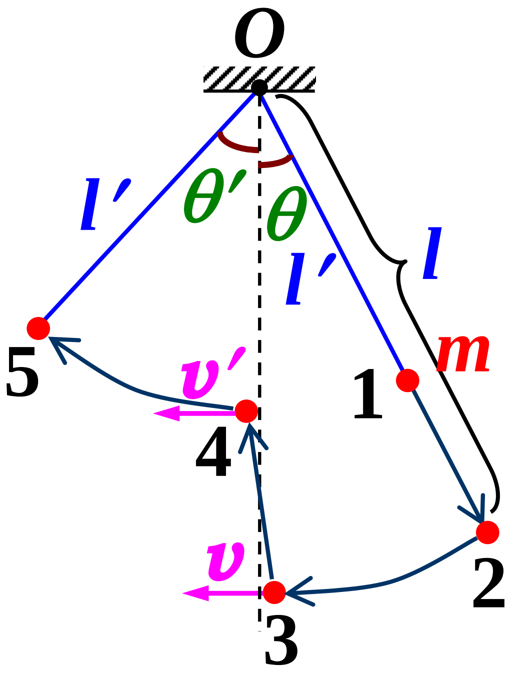
$2 \rightarrow 3$：对（人+地球）系统，只重力作功，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1-\cos\theta) \quad (1)$$

$3 \rightarrow 4$：人对 O，$M_{外} = 0$

角动量守恒：$mv'l' = mvl \quad (2)$

$4 \rightarrow 5$：对（人+地球）系统，机械能守恒：



$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2 = mgl'(1-\cos\theta') \qquad (3)$$

(1)(2)(3)解得：

$$\frac{1-\cos\theta'}{1-\cos\theta} = \frac{l^3}{l'^3} > 1$$

$$\therefore \cos\theta' < \cos\theta$$

$\theta' > \theta$ 即人越摆越高

人越摆越高，能量从哪儿来？

演示荡秋千

质点在有心力场中的运动

1. 有心力场

有心力是指方向始终指向（背向）固定中心的力，如万有引力，可表达为：

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

$\hat{r}$ 是以固定中心为原点的矢径的单位矢量。

有心力场是保守力场，其势能为：

$$V(r) = \int_r^{r_0} f(r)\mathrm{d}r + V(r_0)$$

2. 有心力场中质点运动方程

质点在有心力场中运动的 2 个重要特征：

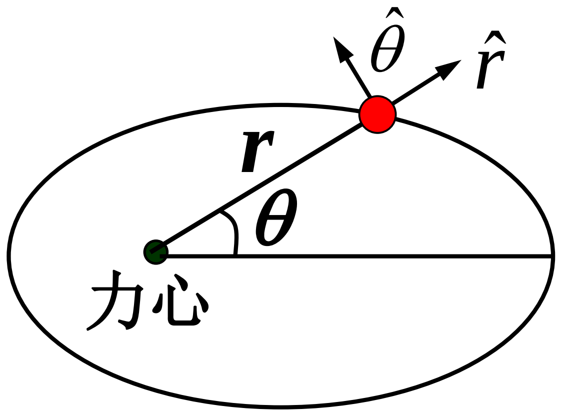
- 角动量守恒，运动必在一个平面上：

$$\vec{L} = \text{常矢量}$$

- 质点的机械能守恒：

$$E = \text{常量}$$

采用极坐标系：



位矢： $\vec{r} = r\hat{r}$

速度： $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

由角动量守恒得:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta})$$

$$\boxed{mr^2\dot{\theta} = L \ (\text{常量})} \qquad (1)$$

由机械能守恒得:

$$\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} + V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$$

代入 (1) 得关于 r 的方程:

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \ (\text{常量})} \qquad (2)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)=E}$$

$\vec{L}$, E 具体地要由初始条件 $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ 决定:

$$\vec{L}=\vec{r}_0\times m\vec{v}_0\,,\qquad E=\frac{1}{2}mv_0^2+V(r_0)$$

初始条件 $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ 和势函数 $V(r)$ 的具体形式决定轨道特征：封闭性、形状、大小和取向。

有效势和轨道特征

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)=E$$

径向动能： $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$

$$f_{effect}=-\nabla\frac{L^2}{2mr^2}=\frac{L^2}{mr^3}\hat{r}$$

有效势能： $V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)$

在径向（r 方向），质点相当于在一个保守势场 $V_{eff}(r)$ 中运动，径向动能和有效势能相互转化。

对万有引力场有： $$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=E$$

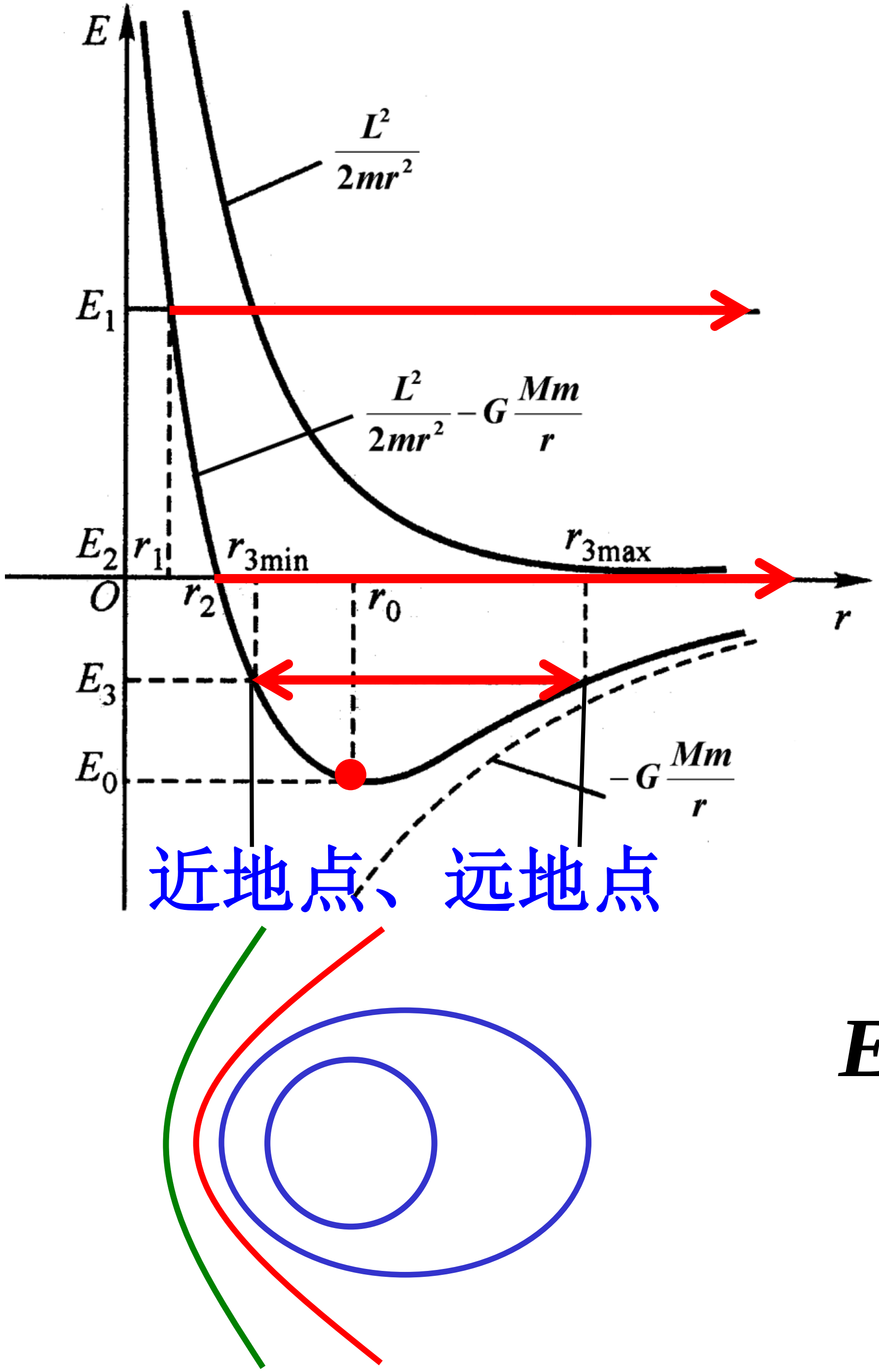
近、远地点对应 $\dot{r}=0$， 此时径向动能为零，有效势能等于总机械能，可得：

$$r^2+\frac{GMm}{E}r-\frac{L^2}{2mE}=0$$

$E<0$ 时 2 根，对应椭圆轨道 — 束缚态。

$E=0$ 时 1 根，对应抛物轨道，质点刚好逃逸，动能全部转化为势能。

$E>0$ 时 1 根，对应双曲轨道，不受约束。



$E=E_1>0$ 时，双曲轨道

$$r_{\min}=r_1\le r<\infty$$

$E=E_2=0$ 时，抛物轨道

$$r_{\min}=r_2\le r<\infty$$

$E=E_3<0$ 时，椭圆轨道

$$r_{3\min}\le r\le r_{3\max}$$

$E=E_0=V_{eff\ \min}$时，圆轨道

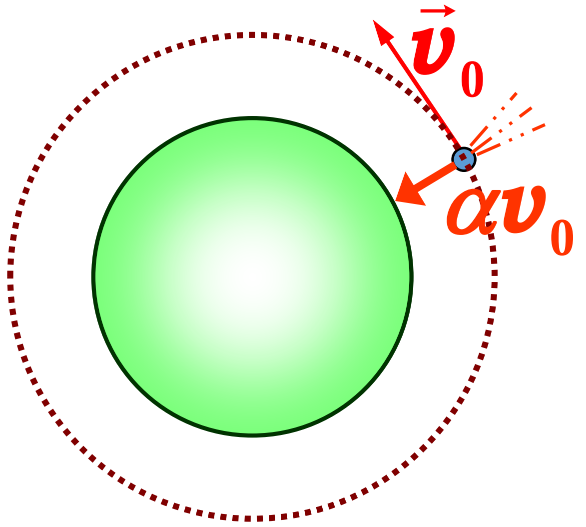
$$r=r_0$$

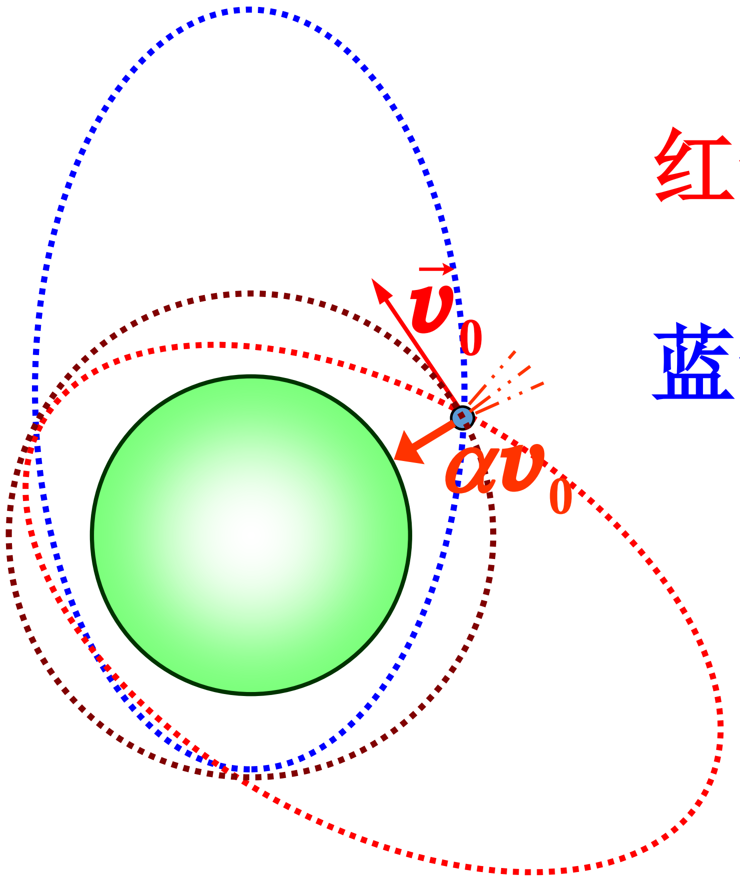
4. 变轨问题

势函数 $V(r)$ 确定后，初始条件 $\vec{r}_0, \vec{v}_0$ 决定轨道特征（形状、大小和取向）。

改变初始条件 $\vec{r}_0, \vec{v}_0$ 即可改变轨道特征。

例如，宇宙飞船绕地球作匀速圆周运动，速度 $\vec{v}_0$ 。让飞船在极短时间内向外侧或内侧点火喷气，使其获得一附加的指向地心的很小的速度 αv_0 ，飞船即可变轨。





红色轨道对应外侧点火，

蓝色轨道对应内侧点火。

例：在平面两相同的球做非对心完全弹性碰撞，其中一球开始时处于静止状态，另一球速度 $\vec{v}$。求证：碰撞后两球速度总互相垂直。

解：设碰撞后两球速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

由动量守恒 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

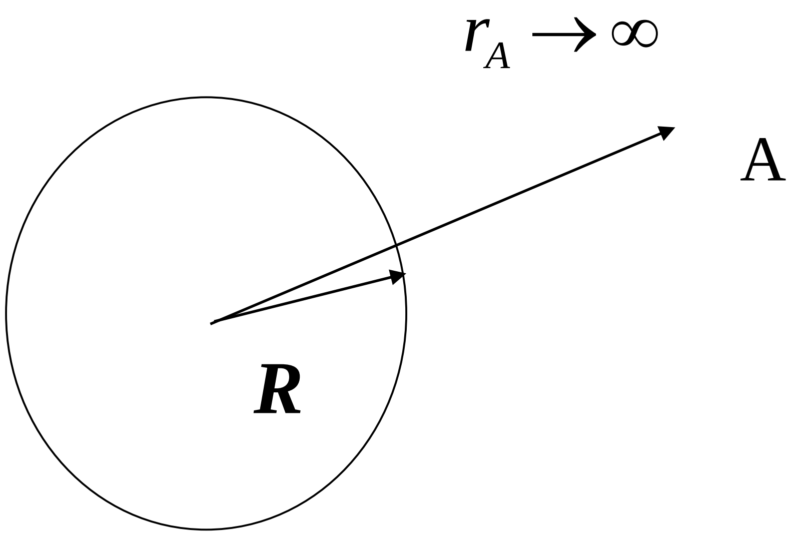
两边平方 $v^2 = v_1^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_2^2$

由机械能守恒（势能无变化）$v^2 = v_1^2 + v_2^2$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ 两球速度总互相垂直

演示对心碰撞

例：逃逸速度



$$-G\frac{mM}{R}+\frac{1}{2}m\upsilon_e^2=0$$

$$\boxed{\upsilon_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2gR}}$$

守恒律与对称性

动　量　守恒:　　空间平移对称性

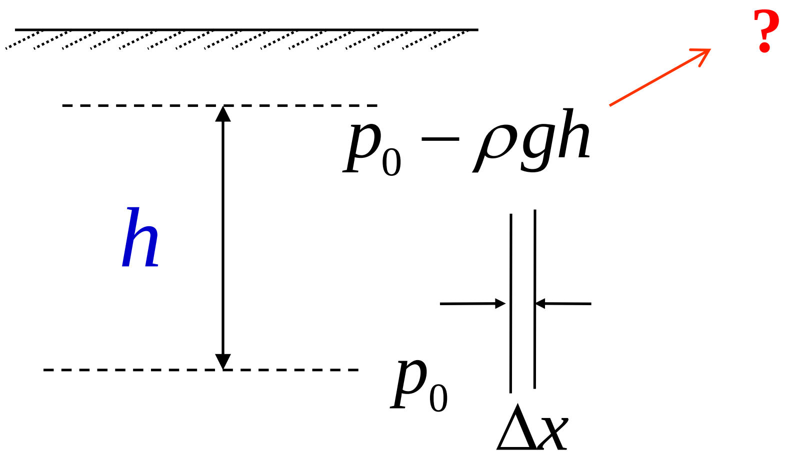
角动量守恒:　　空间各向同性对称性

能　量　守恒:　　时间平移对称性

§4.10 流体的稳定流动

流体有想象不到的力量

静流体没有切向力, 只有压强 (各向同性)



单位质量势能 U

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

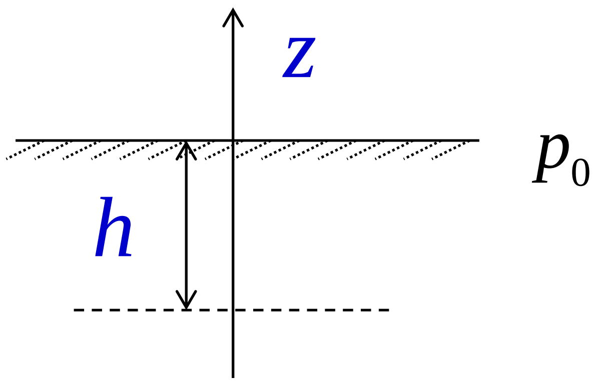
$$[p(x+\Delta x)-p(x)]\Delta s\approx-\Delta s\Delta x\rho\frac{\partial U}{\partial x}$$

同理对 y, z 分量

$$\boxed{-\nabla p-\rho\nabla U=0}$$

密度不变 $\boxed{p+\rho U=const.}$

重力作用下 $p+\rho gz=const.$



$$p_0=p-\rho gh$$

流体有粘滞性

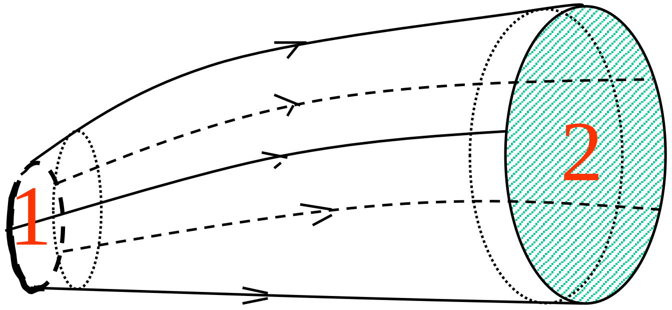
运动流体非常复杂, 如湍流

地球中心压强?

一般液体密度变化不大，假设是常量
且忽略粘滞, 就是理想流体 (模型）

流场速度不随时间改变--- 稳定流动

稳定流动



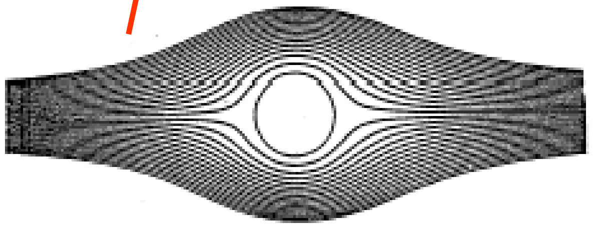
$$\rho\upsilon_1 A_1 \Delta t = \rho\upsilon_2 A_2 \Delta t$$

$$\upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2$$

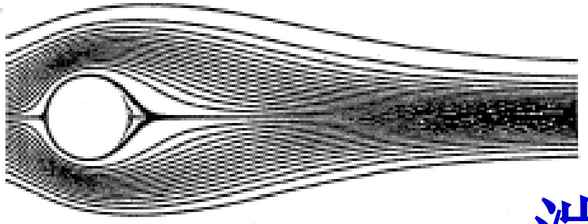
真实流体

雷诺数

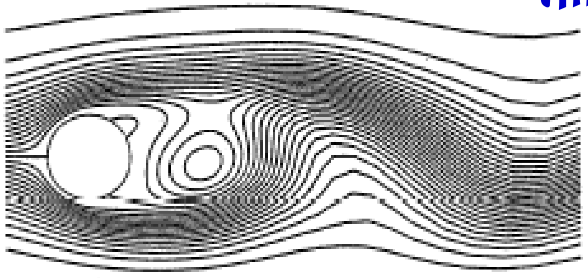
$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\eta}}$$



(a) $Re = 0.1$

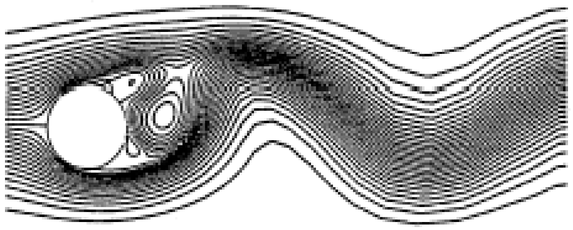


(b) $Re = 7.0$

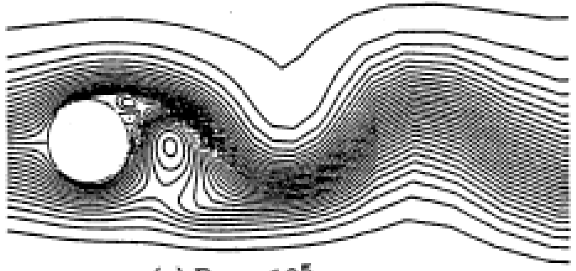


(c) $Re = 10^2$

湍流



(d) $Re = 10^4$



(e) $Re = 10^5$

ρ：流体的密度

V：流场的速度

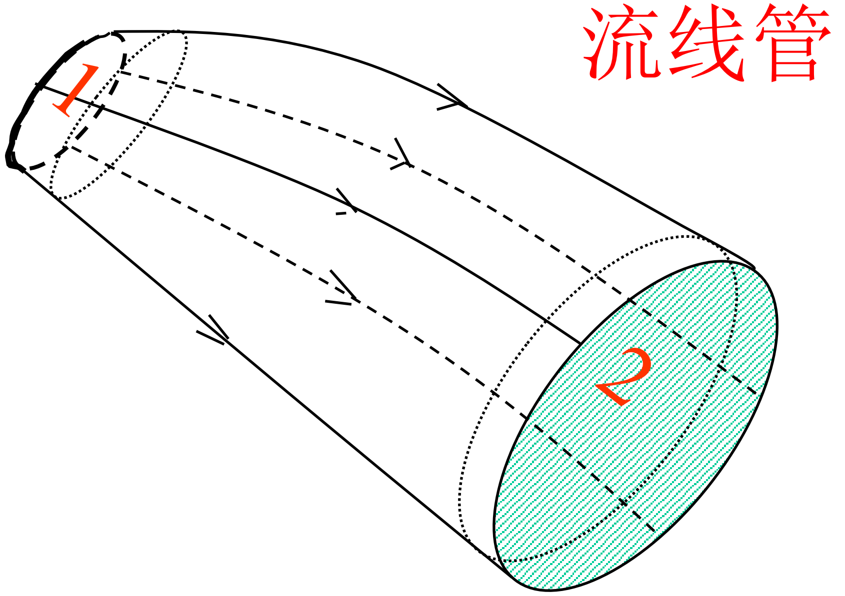
D: 流场的特征长度

η: 粘滞系数

乒乓球 ~30m/s

Re ~ 5000

§4.11 伯努利方程



$$E=\frac{1}{2}\upsilon^2+U$$

做功 $$p_1A_1\upsilon_1\Delta t-p_2A_2\upsilon_2\Delta t=\Delta M(E_2-E_1)$$

$$E_2-E_1=\frac{p_1A_1\upsilon_1\Delta t}{\Delta M}-\frac{p_2A_2\upsilon_2\Delta t}{\Delta M}=\frac{p_1}{\rho_1}-\frac{p_2}{\rho_2}$$

$$E_2+\frac{p_2}{\rho_2}=E_1+\frac{p_1}{\rho_1}$$

沿流线 $$\boxed{\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\upsilon^2+U=const.}$$

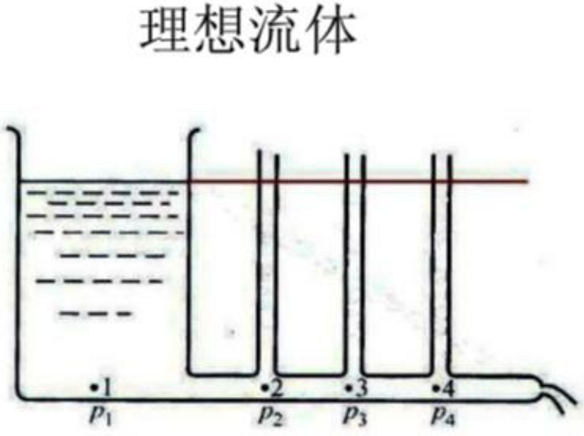
若无旋 $$\boxed{\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\upsilon^2+U=const.}$$

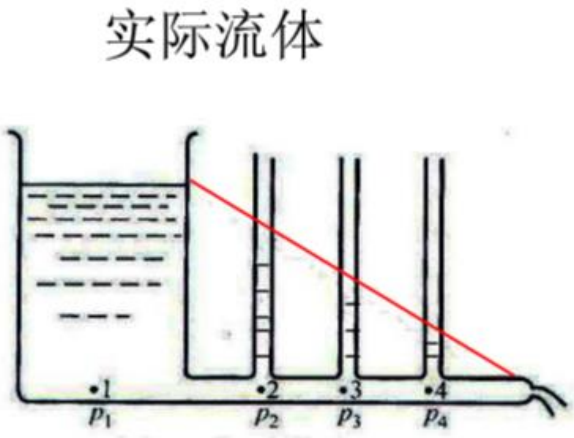
不仅仅沿流线, 处处是常量

本质是流体流动中的功能关系式

伯努利方程演示实验

非理想流体

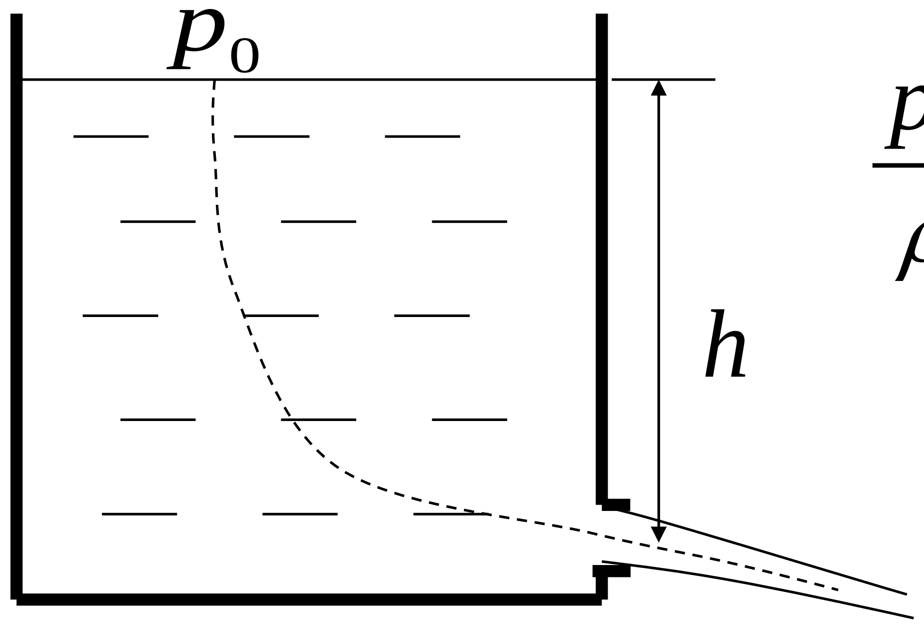




$$p_1 A_1 \upsilon_1 \Delta t - p_2 A_2 \upsilon_2 \Delta t - W_{耗} = \Delta M (E_2 - E_1)$$

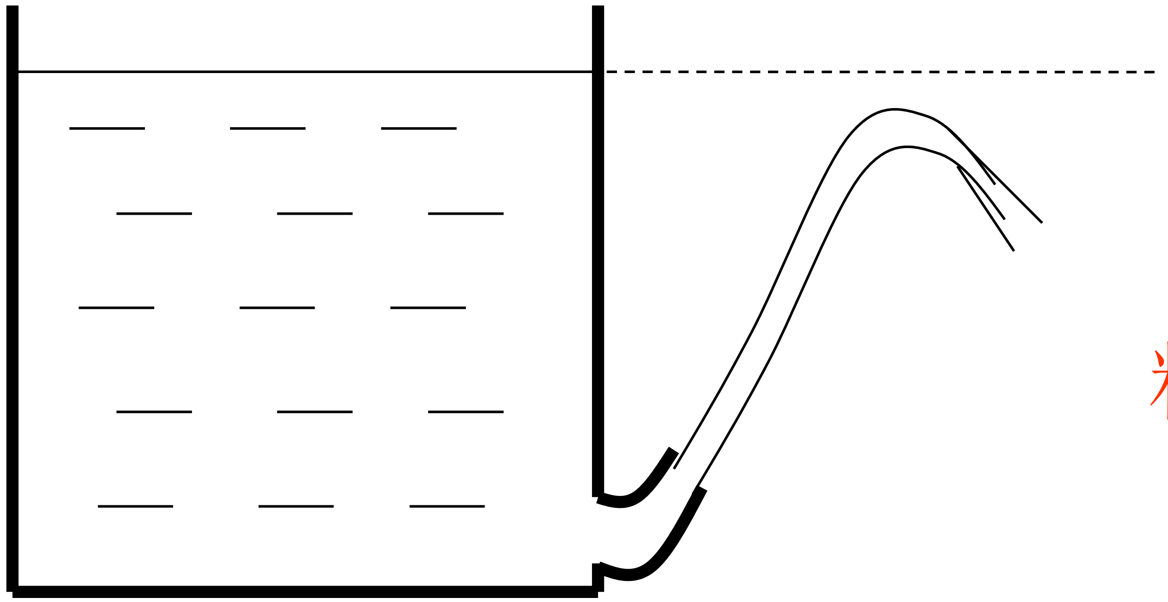
$$E_2 - E_1 = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} - w$$

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}\upsilon_1{}^2 + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}\upsilon_2{}^2 + U_2 + w$$

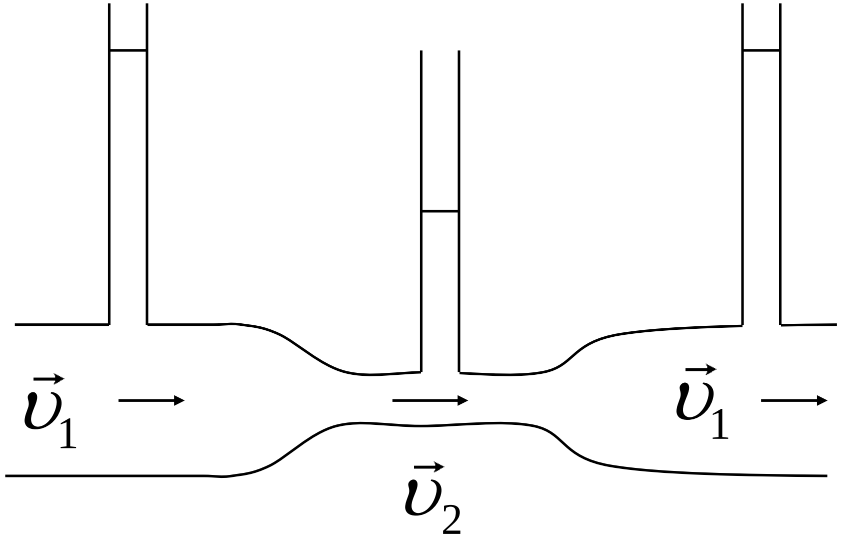


$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\upsilon^2 - gh$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh}$$



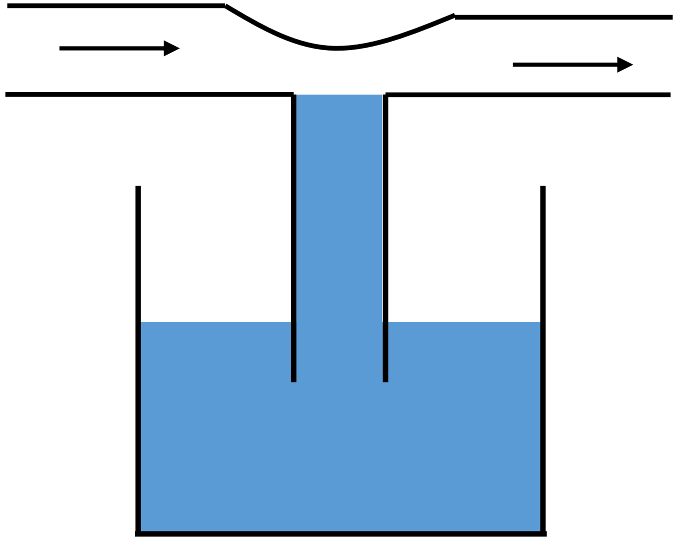
粘滞等

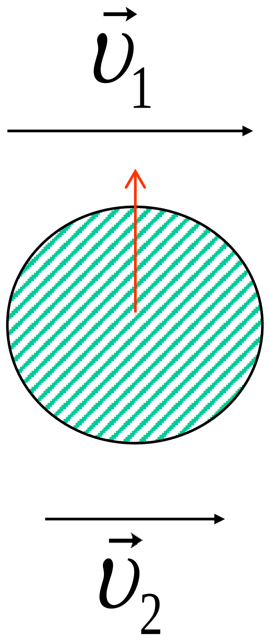


流速大处压强小

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+U=const.$$

等高流管





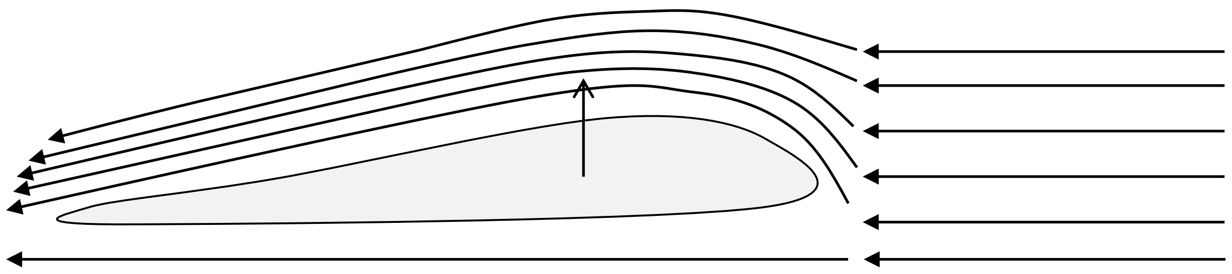
伯努利方程

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\upsilon^2+U=const.$$

$\upsilon_1>\upsilon_2$ $p_1<p_2$

上升的力 香蕉球?

飞机机翼的升力



演示乒乓球实验

作业3.15

$$F_{air}dt = dm_1 \cdot (v_f - v_i) = dm_1 \cdot (-280 - 0)$$

$$F_1 = -F_{air} = 280\frac{dm_1}{dt}$$

$$F_{fuel}dt = dm_2 \cdot (v_f - v_i) = dm_2 \cdot (-490)$$

$$F_2 = -F_{fuel} = 490\frac{dm_2}{dt}$$

$$F = F_1 + F_2$$

作业3.16

$$y_c = \frac{1}{m}\int_0^R \int_0^\pi r\sin(\theta)\cdot \rho r dr d\theta$$

$$y_c = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi R^2 \rho}\int_0^R \int_0^\pi r\sin(\theta)\cdot \rho r dr d\theta$$

$$y_c = \frac{4R}{3\pi}$$