The background features a series of concentric, wavy lines in a teal color, resembling ripples on water. On the left side, there are two small, dark, spherical objects, possibly representing particles or droplets, which are the source of the ripples.

波动

第八章 波动 (Wave)

§ 8.1 简谐波, 行波

§ 8.2 机械波

§ 8.3 物体的弹性变形

§ 8.4 波动方程

§ 8.5 波的能量

§ 8.6 惠更斯原理

§ 8.7 波的叠加, 驻波

§ 8.8 声波

§ 8.9 多普勒效应

§ 8.10 复波, 群速度

* § 8.11 孤子

波动（波）： 振动或扰动在空间的传播

机械波（弹性波）： 机械振动在介质中的传播。如弦中横波、空气中声波、水波等。机械振动依靠质元间弹性力传播，因此**只能在介质中传播。**

电磁波： 电磁振动在空间的传播，光是一种电磁波。通过 E 和 B 不停振荡、交互变化而传播，**无需介质作载体，可在真空中传播。**

机械波和电磁波统称为**经典波**，**代表某种实在物理量的波动**。各类波的物理机制可能不同，但具有共同的特征：**可以叠加，发生干涉和衍射**。

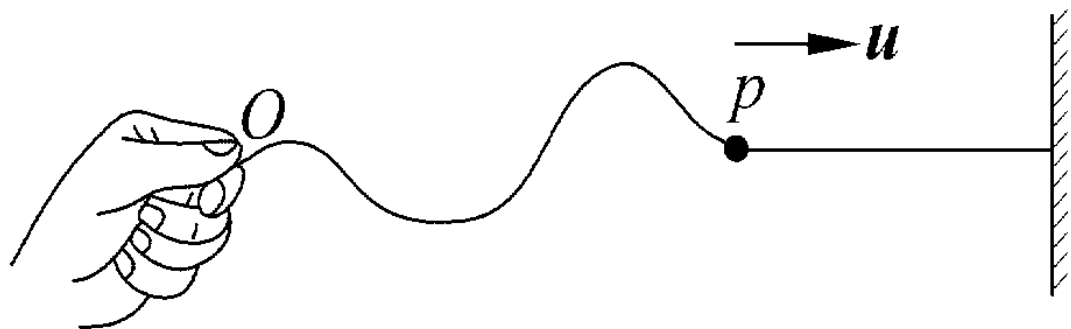
波动也存在于微观世界。电子、质子和中子等能干涉和衍射，具有波动性。这种与实物粒子相联系的波，称为**德布罗意（de Broglie）波**。与经典波不同，**德布罗意波代表的不是实在物理量的波动**。

本章以机械波为例，介绍波的基本概念和规律。

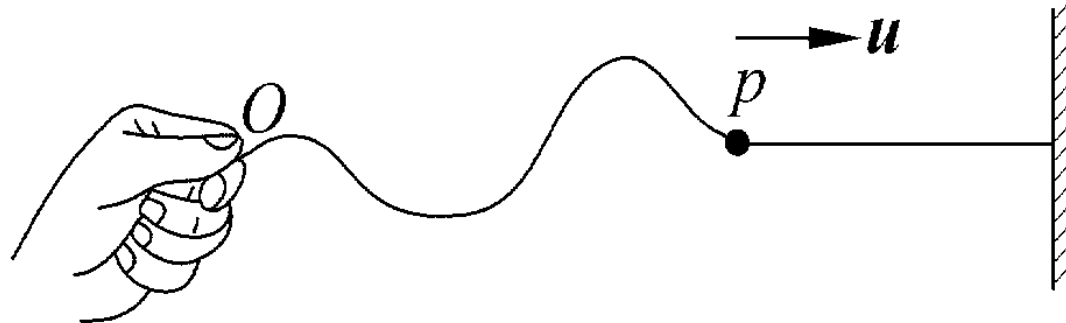
8.1 简谐波、行波

8.1.1 简谐波的形成

简谐波： 简谐振动在空间的传播

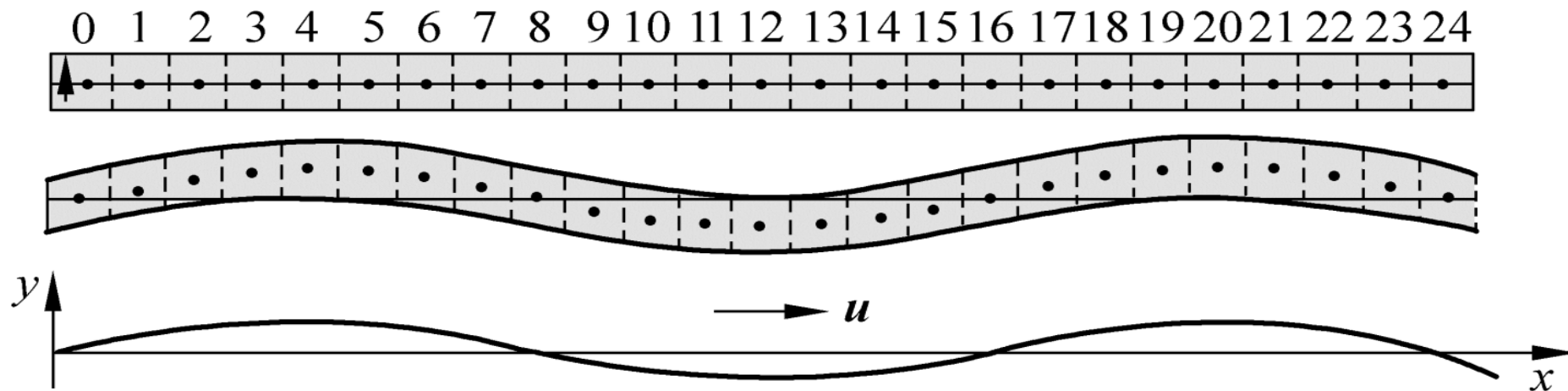


O 点的**运动状态**逐点地传播到 p 点，在绳上形成**横波**。
如果 O 点作简谐振动，则在绳上形成的就是**简谐横波**。



注意： 质元只在平衡位置附近上、下振动，并未向前迁移。
 向前传播的，是质元的振动状态（相位）。

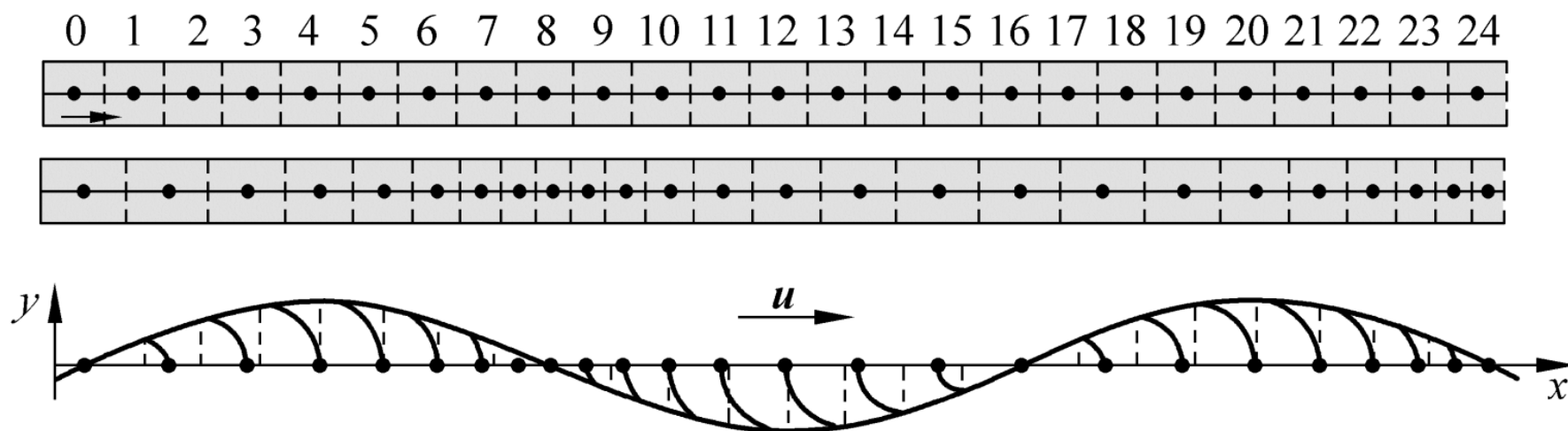
波速 $u = dx/dt$: 相速度



某时刻的横波（ y 为质元位移）

波动演示

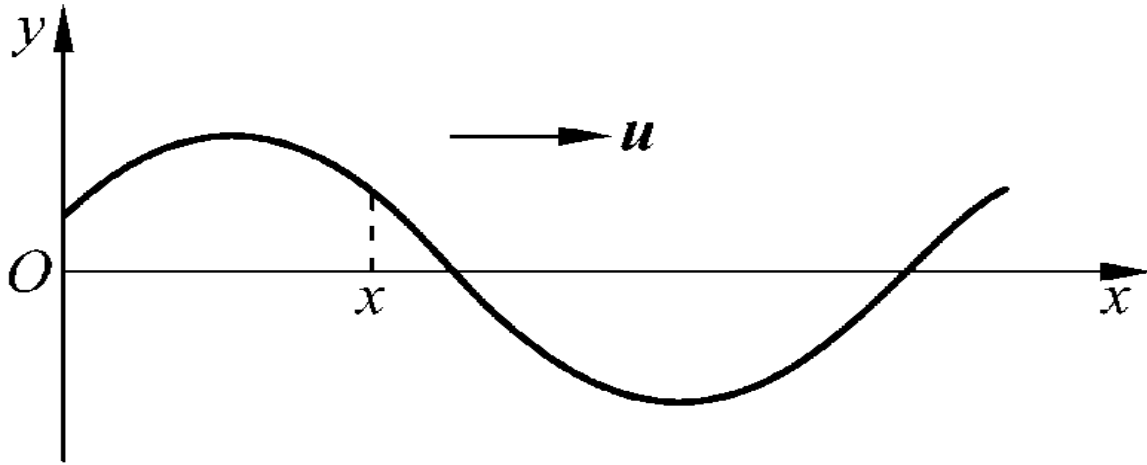
纵波



某时刻的纵波（ y 为质元相对平衡位置的位移）

8.1.2 简谐波的波函数

沿 x 轴正方向传播情况:

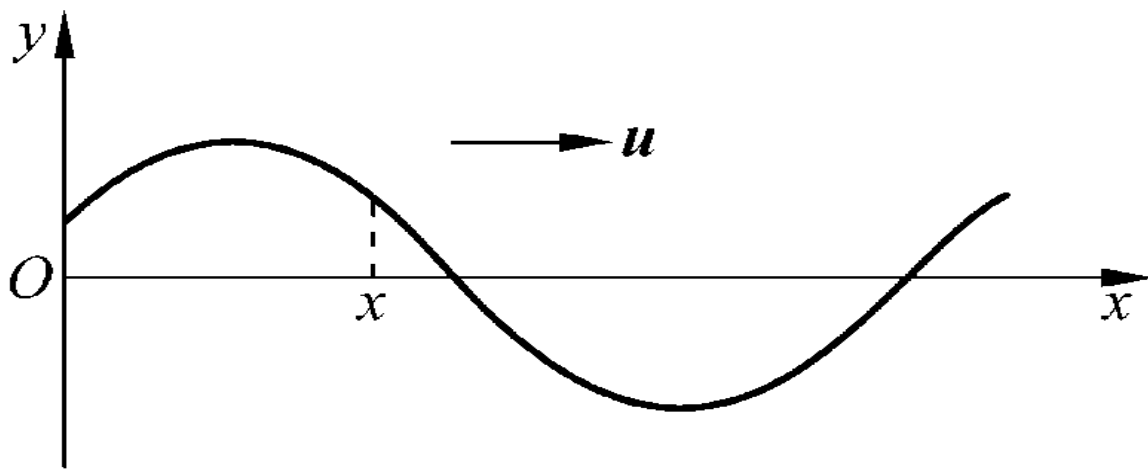


在无耗散的线性介质中, 已知 O 点处质元的振动表达式:

$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

相位 $(\omega t + \varphi)$: 反映 O 点振动状态

问: 坐标 $x > 0$ 处质元的振动表达式?



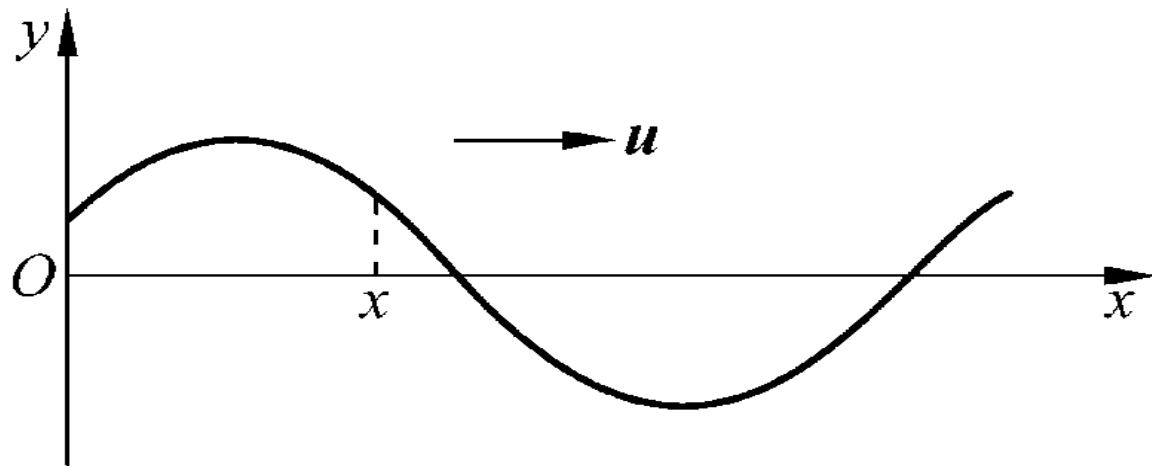
$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

求 $x > 0$ 处质元的振动:

- 振幅仍为 A
- 相位?

x 点相位比 O 点滞后的时间: x/u

$$t \text{ 时刻 } x \text{ 点相位: } \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi$$



$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

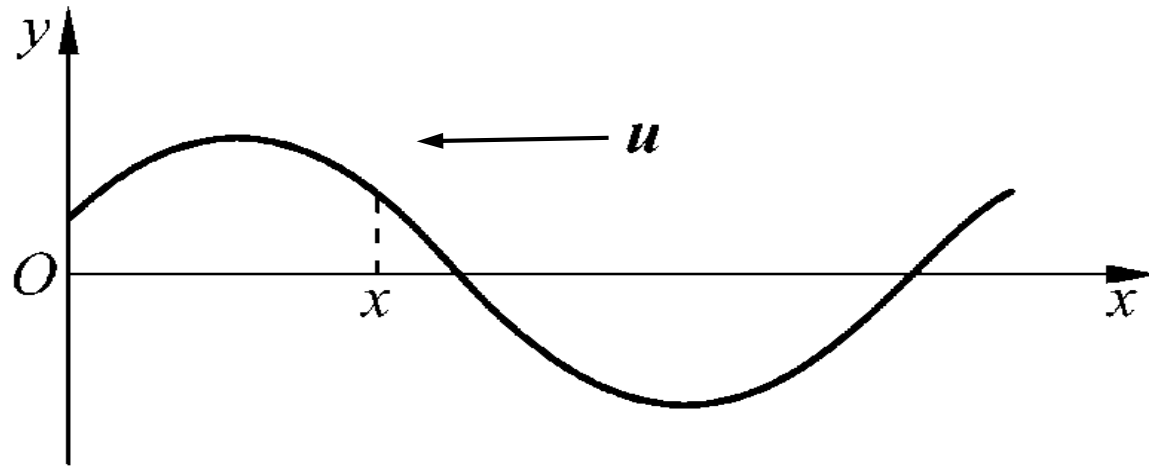
因此， x 处质元的振动表达式为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

——沿 x 轴正方向传播的简谐波的波函数

【思考】 沿 x 轴正方向传播， $x < 0$ 处振动函数？

沿 x 轴反方向传播的波函数？



$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

x 点相位比 O 点超前的时间： x/u

因此，沿反方向传播的波函数：

$$y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

简谐波波函数的一般形式：

$$y = A \cos \left[\omega \left(t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

t 和 x 以 $(t \mp x/u)$ 的形式整体出现

行波：某种扰动逐点传播的波

行波波函数的一般形式：

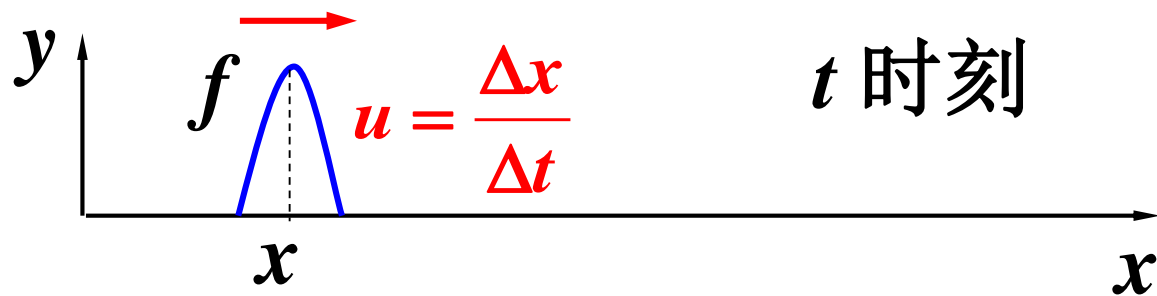
$$y = f \left(t \mp \frac{x}{u} \right)$$

“ $-$ ”：右行波

“ $+$ ”：左行波

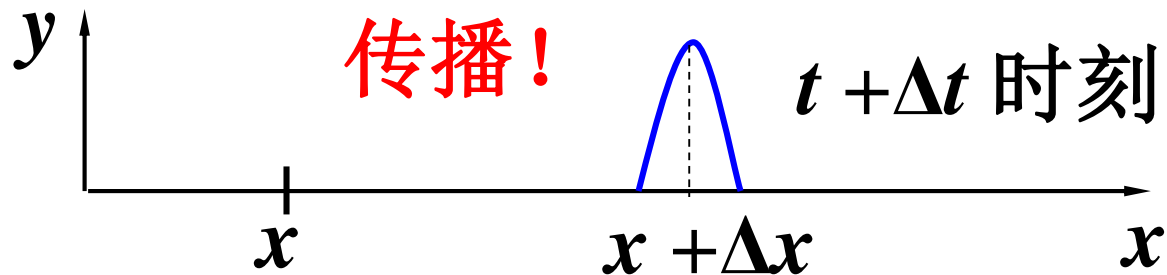
验证行波的传播特征：

以右行波为例： $y = f\left(t - \frac{x}{u}\right)$



$t + \Delta t$ 时刻？

$$f\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{u}\right) = f\left(t + \Delta t - \frac{x + u\Delta t}{u}\right) = f\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

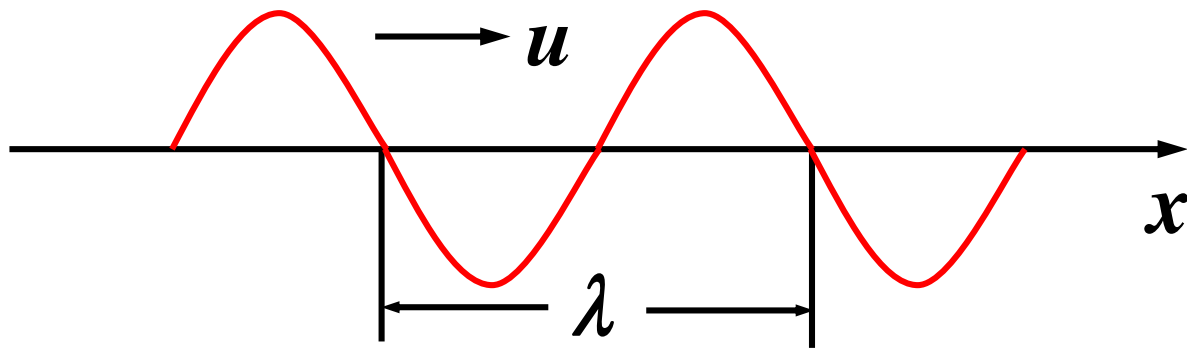


- 简谐波的时间周期性——相应简谐振动周期和频率：

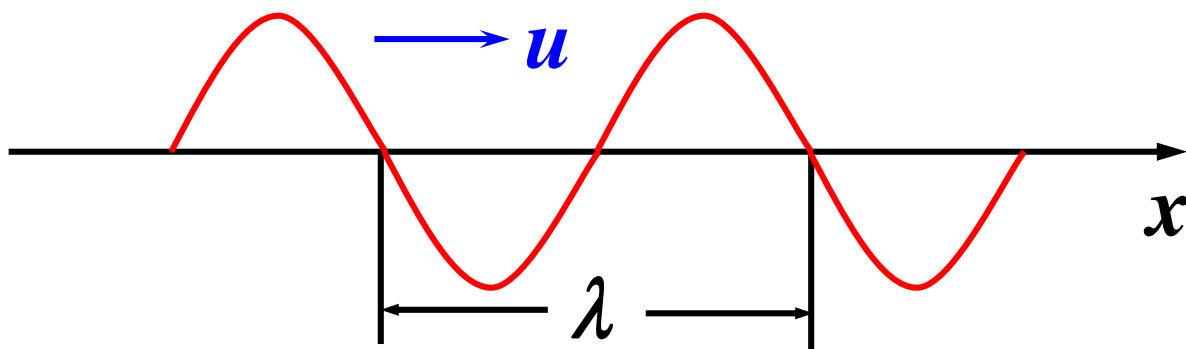
$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

- 简谐波的空间周期性：

波长： $\lambda = uT$



——波在一个周期内，或在一个全振动的时间
内相位传播的距离。



定义波数:

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

——表示单位距离内相位的变化

【思考】角频率 ω 表示什么？

引入 k ，简谐波波函数的一般形式：

$$y = A \cos(\omega t \mp kx + \varphi)$$

“ $-$ ”：沿 x 轴正方向传播 ($k > 0$)

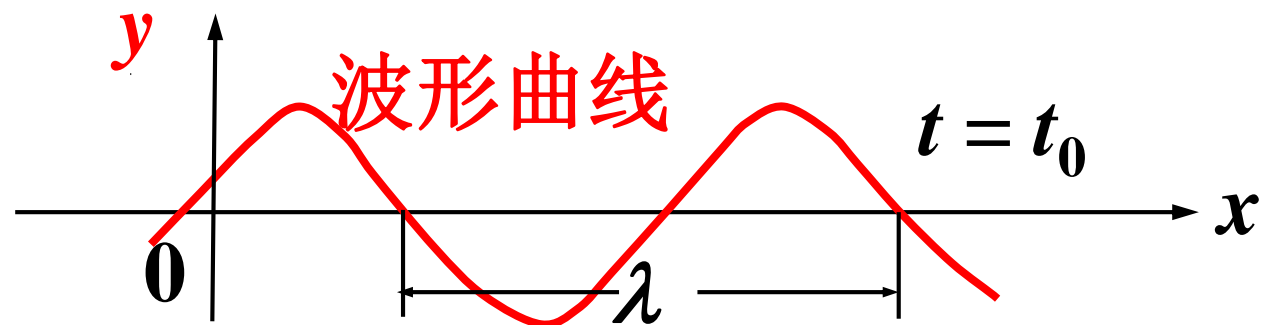
“ $+$ ”：沿 x 轴反方向传播 ($k \rightarrow -k$)

复数形式：

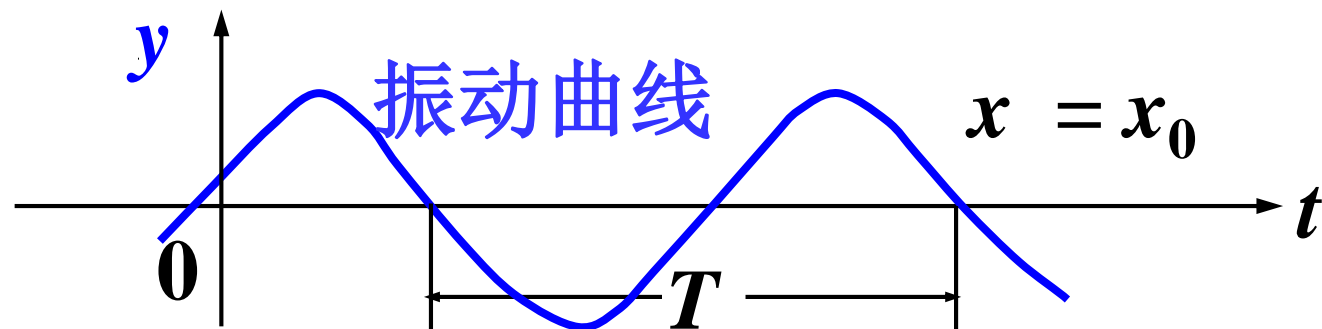
$$\tilde{y} = A e^{-i(\omega t \mp kx + \varphi)}$$

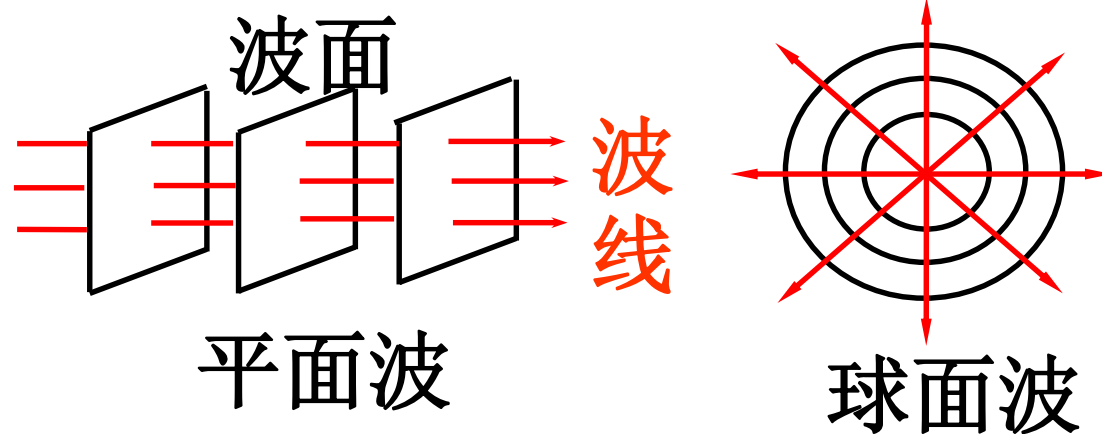
$$y(x, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

$t = t_0$: t_0 时刻空间各点位移分布



$x = x_0$: x_0 点的振动函数

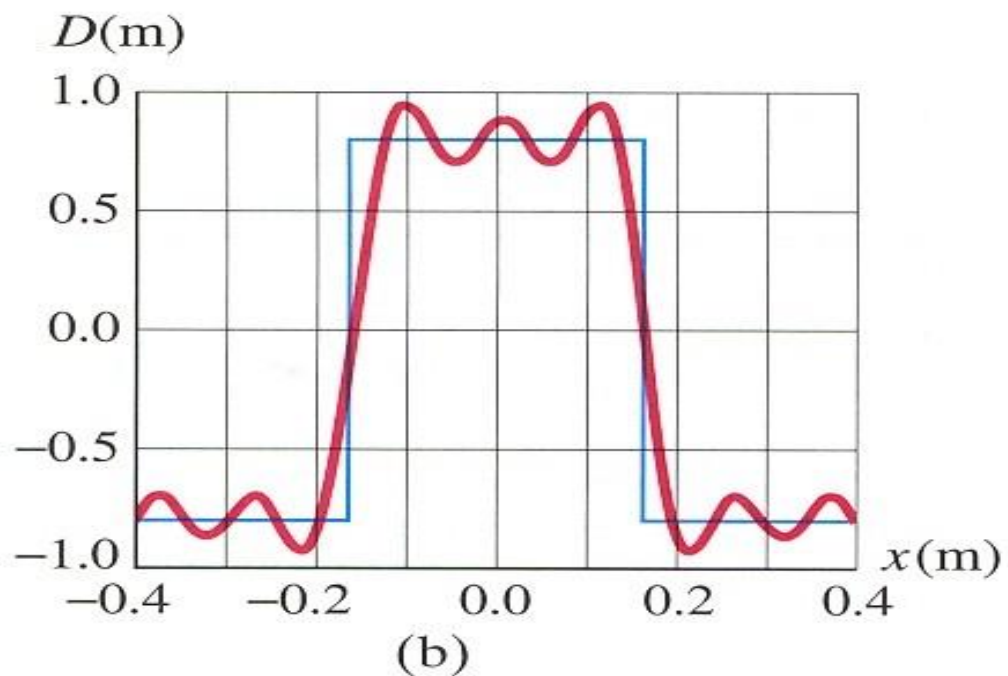
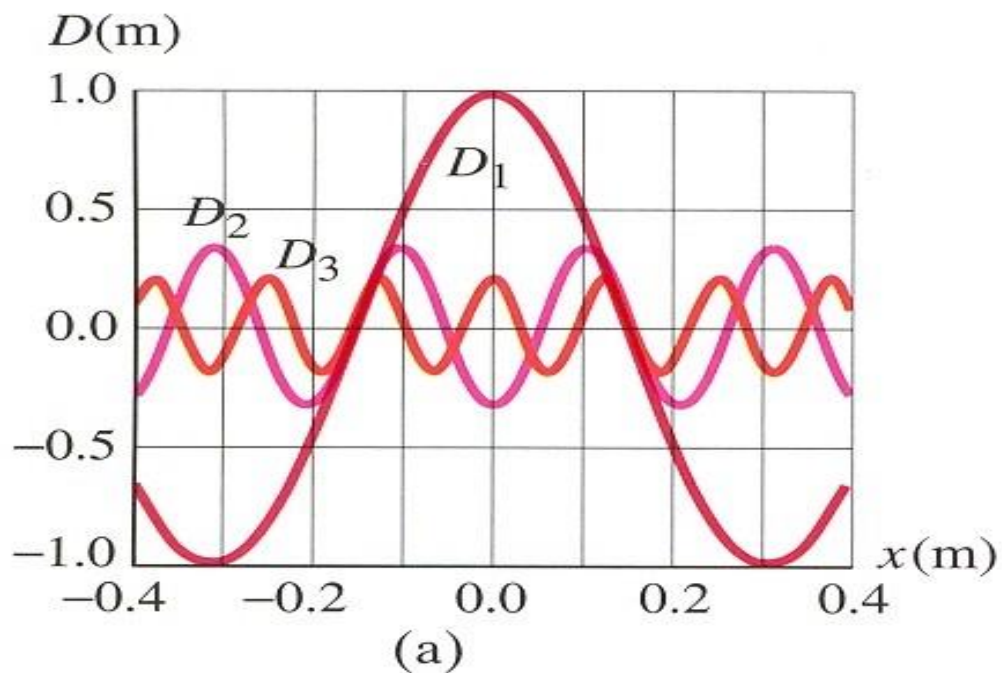




波阵面（等相面）、波前、波线
平面波、球面波、柱面波……

——波长是两个相邻的同相（相位差为 2π ）波阵面之间的距离。

任何一个实际的波都可以看成是由若干简谐波叠加的结果。



【例】 一平面简谐波沿 x 轴正向传播，波速为 u ，波长为 λ 。
已知在 $x_0=\lambda/4$ 处质元振动的振幅为 A ，初相为 $\pi/2$ 。写出波函数的表达式。

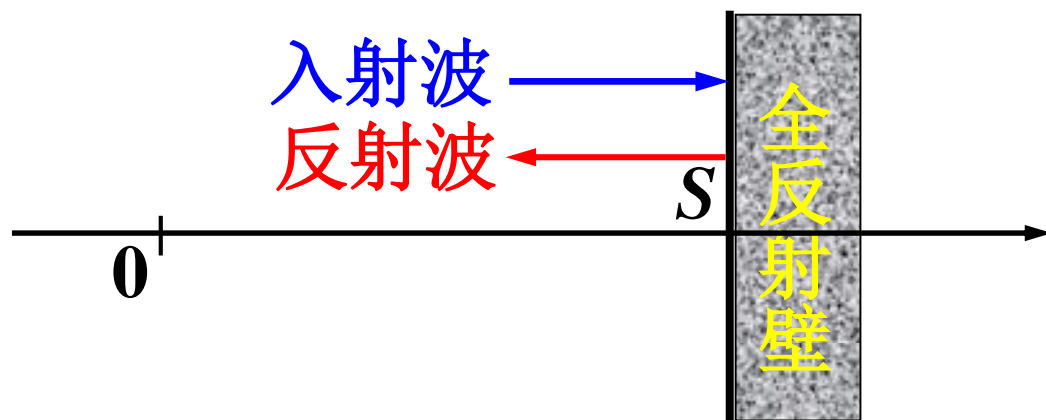
解： $y = A \cos \left(\omega t - k \left(x - \frac{\lambda}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \right)$

相位滞后

$$= A \cos \left(\frac{2\pi u}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} \left(x - \frac{\lambda}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= A \cos \left(\frac{2\pi u}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \pi \right)$$

【例2】 如图示， 已知： $x = 0$ 处点的振动方程 $y_0 = A \cos \omega t$ ， 波长 λ ， 在反射壁 S 处， 反射波的相位突变 π 。



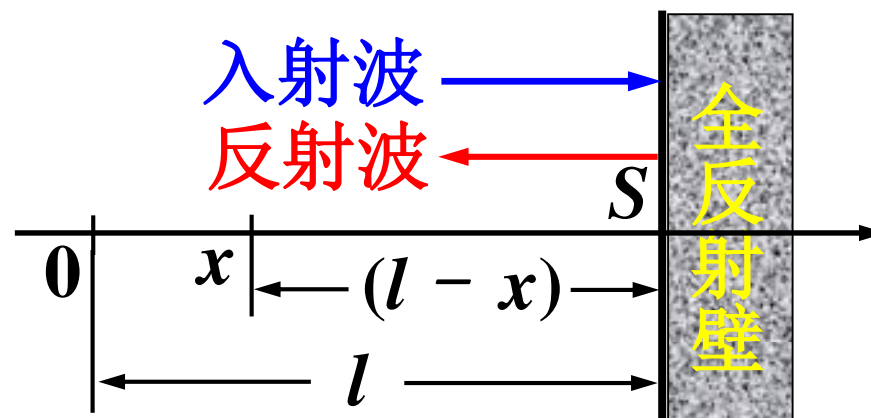
求： 反射波函数 $y'(x, t)$

解： 全反射， A 不变。

波由 0 点经壁反射到 x 点传播的距离为：

$$l + (l - x) = 2l - x$$

相位落后： $\frac{2\pi}{\lambda}(2l - x)$



再考虑在反射壁 S 处，反射波相位突变 π ，

$$\begin{aligned}\therefore y'(x, t) &= A \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(2l - x) \pm \pi\right] \\ &= A \cos\left[\omega t + \frac{x}{\lambda} 2\pi - \frac{2l}{\lambda} 2\pi \pm \pi\right]\end{aligned}$$

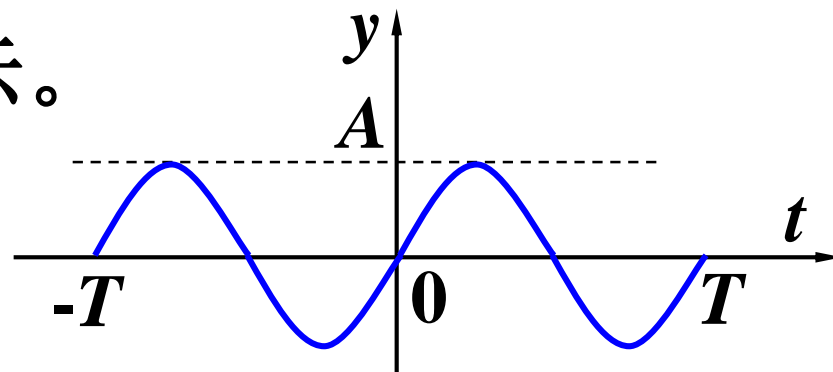
“+”表示沿 $-x$ 方向传播

取+、-均可

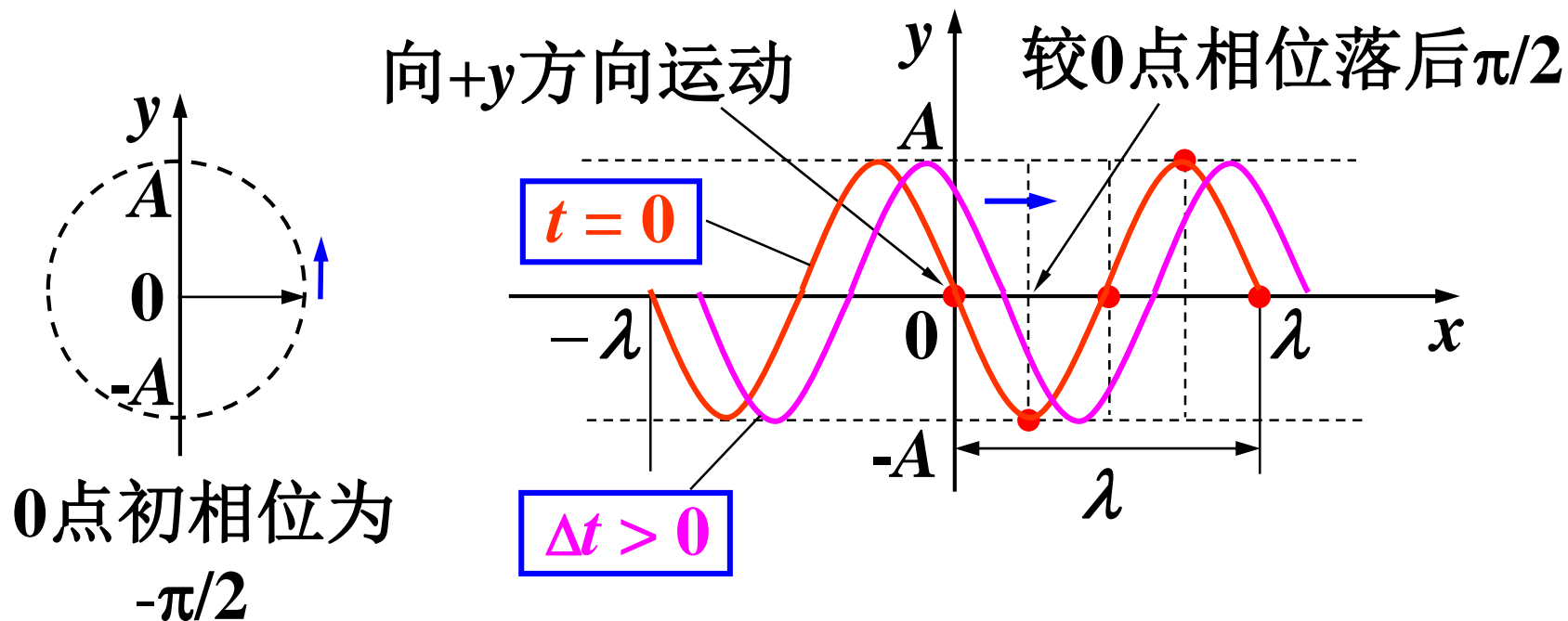
【例3】已知：沿 $+x$ 方向传播的波在 $x = 0$ 点

的振动曲线如图示。

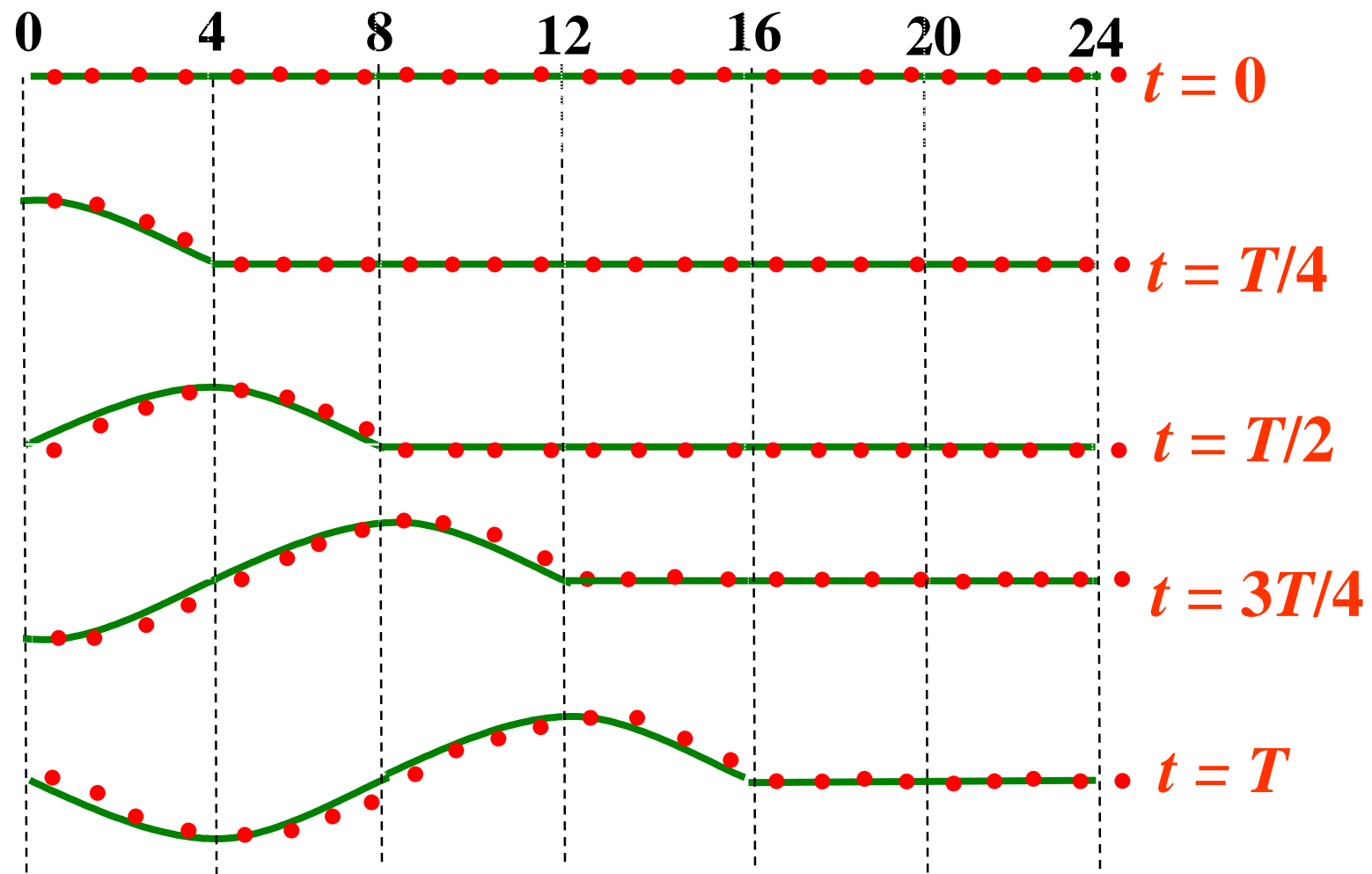
画 $t = 0$ 时的波形图。



解：几何法



8.2 机械波



“上游”的质元依次带动“下游”的质元振动。

—机械波（mechanical wave）。

物质的另一特性：弹性

新模型 ---- 弹性介质模型 (弹性波)

波动是振动状态的传播，不是媒质的传播。

形成机械波的条件

{ 波源
弹性媒质

波的特征量

1. 波速 u : 振动状态传播的速度

它由媒质的性质决定与波源情况无关。

2. 周期 (period) T :

一个完整的波通过波线上的某点所需的时间。

它由波源决定 (波源、观测者均不动时)

频率 (frequency)

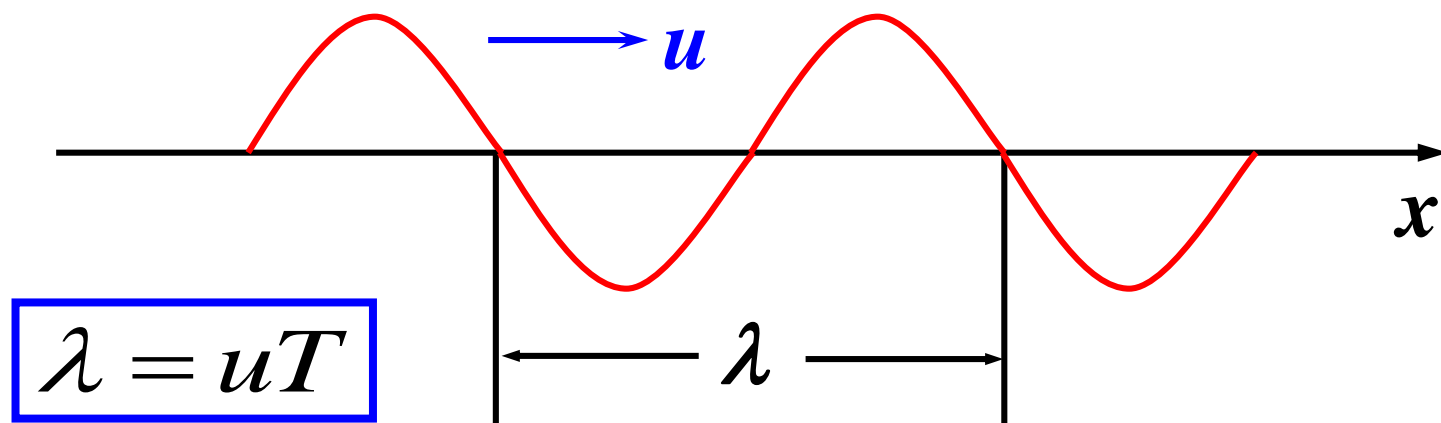
$$\nu = \frac{1}{T}$$

角频率 (angular frequency)

$$\omega = 2\pi\nu$$

3. 波长 (wave length) λ :

波线上相邻的振动状态相同的两质元间的距离。



它由波源和媒质共同决定。

波长是波的“空间周期”。

波矢量 \vec{k} { 方向: 波的传播方向
大小: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{u}$ — 波数

§ 8.3 物体的弹性变形

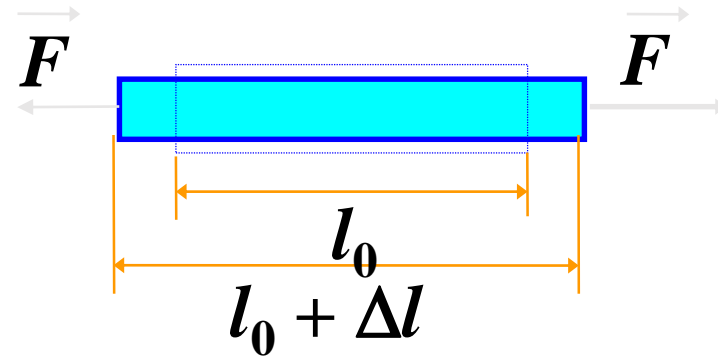
模型：质点，流体，刚体，弹性介质

线变

$$\frac{\mathbf{F}}{S} = Y \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$$

↑
应力 stress 应变 strain

Y – 杨氏弹性模量

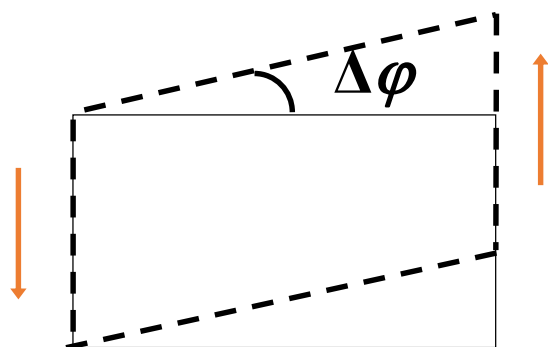


$$k = YS/\ell_0$$

相应形变：线变

$$F = -k\Delta \ell$$

切变 shear



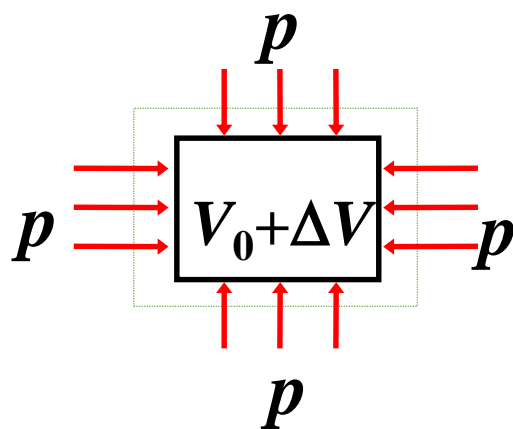
切变

$F_{\text{切}}$

$$\frac{F}{S} = G\Delta\varphi$$

G - 切变模量

体变



体变

$$\Delta p = -K(\Delta V/V_0)$$

K -体积模量

§ 8.4 波动方程 (wave equation)

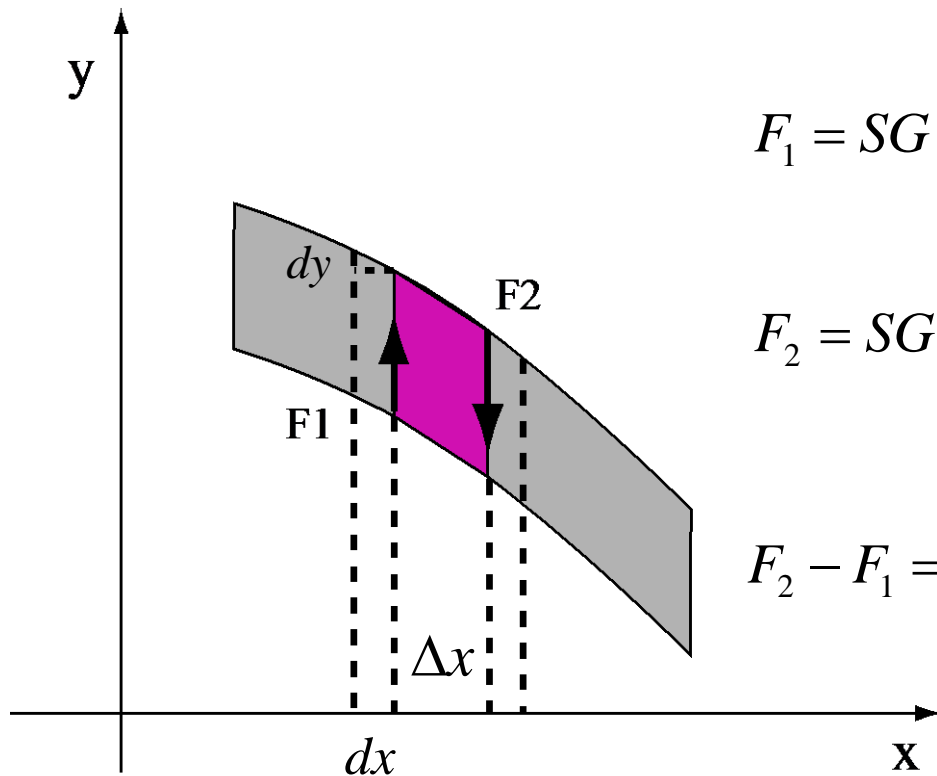
一、平面波波动方程:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \quad (u \text{ 是波速})$$

将 $y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$ 代入可以验证。

实际上任意一个以 $\left(t \mp \frac{x}{u} \right)$ 为变量的波函数

$y = f \left(t \mp \frac{x}{u} \right)$ 都是波动方程的解。
(可自己证明)



$$F_1 = SG \left(\frac{dy}{dx} \right)_x = SG \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x$$

$$F_2 = SG \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x+\Delta x} = SG \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

$$F_2 - F_1 = SG \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = SG \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Delta x$$

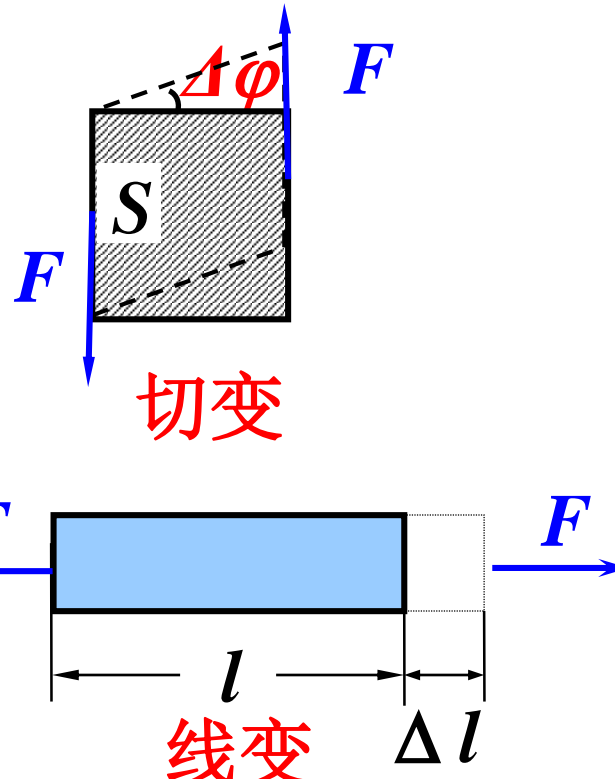
$$F_2 - F_1 = SG \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \rho S \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{G/\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

固体中

横波 $u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, $G = \frac{F/S}{\Delta\phi}$
(切变模量)

纵波 $u_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, $Y = \frac{F/S}{\Delta l/l}$
(杨氏模量)



切变

线变

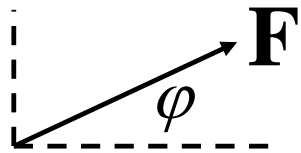
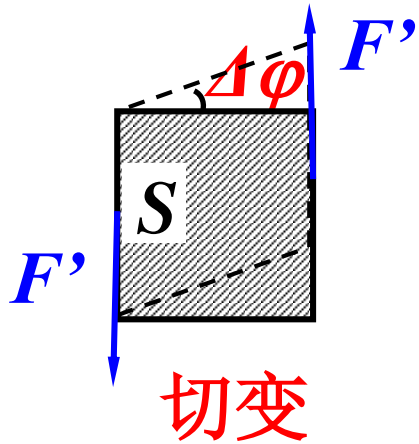
(地震波传播)

因为 $G < Y$, 所以固体中 $u_{\text{横波}} < u_{\text{纵波}}$

举例: 地震波传播 (P 波颠, S 波晃)

弹性绳上的横波 $u = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$

F — 绳的初始张力, ρ_l — 绳的线密度



$$F \sin(\varphi) = F'$$

$$F' = GS\varphi$$

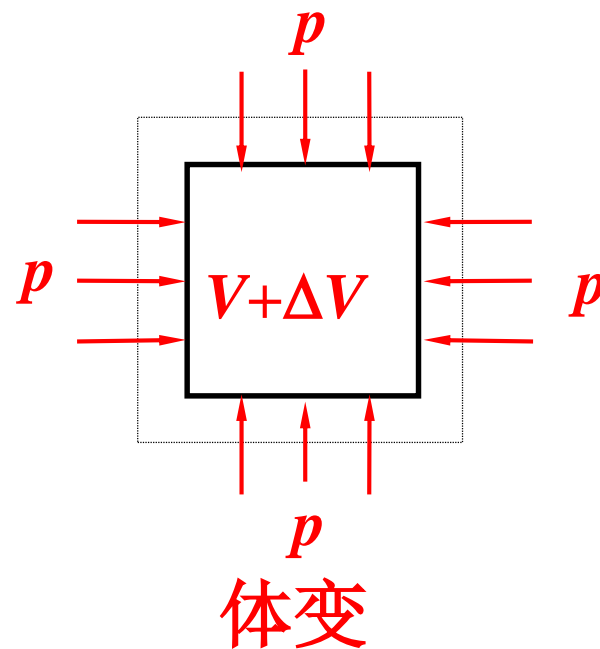
$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{F'}{\rho S \varphi}} = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

波速 u 与媒质性质的关系:

流体中 $u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$,

$$K = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

(体积模量)



应用于气体 $u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$,

γ —— 比热比

$$p = \frac{\rho}{M} RT \quad \text{绝热过程} \quad pV^\gamma = C$$

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{\gamma p}{V} = -\frac{\gamma \rho RT}{MV} = -K \frac{1}{V}$$

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

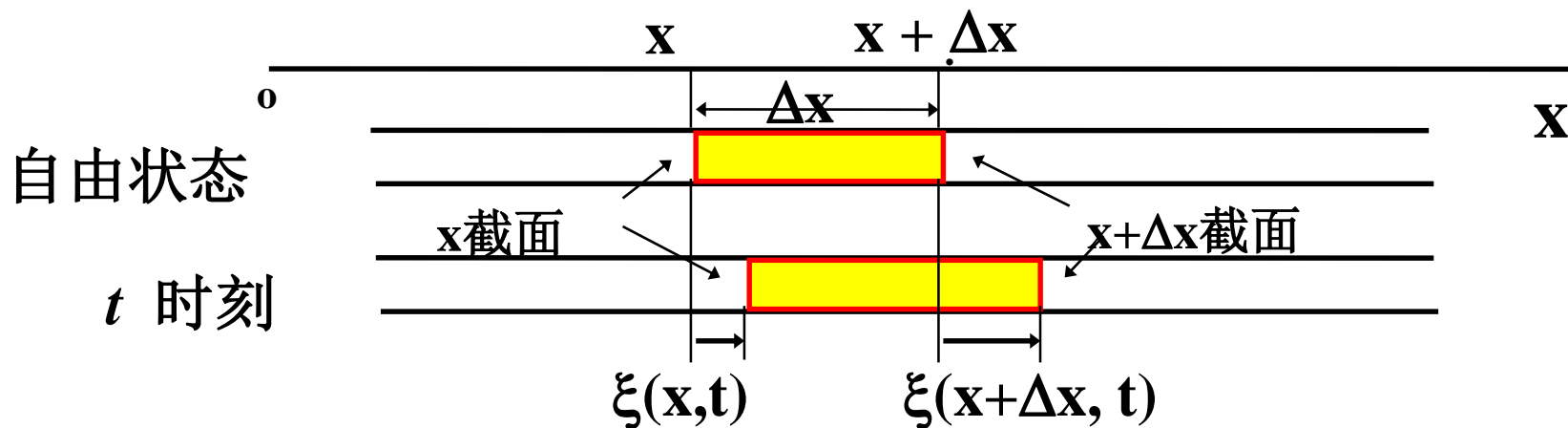
$$\text{气体中} \quad u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

γ — 比热比, p 、 ρ — 无波时压强、密度

M — 摩尔质量, 声音传播是绝热过程。

二、 固体棒中纵波的波动方程(推导)

1. 某截面处的应力、应变关系



波引起的 Δx 段的平均应变:

$$[\xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)] / \Delta x \sim \partial \xi / \partial x$$

x 处截面 t 时刻

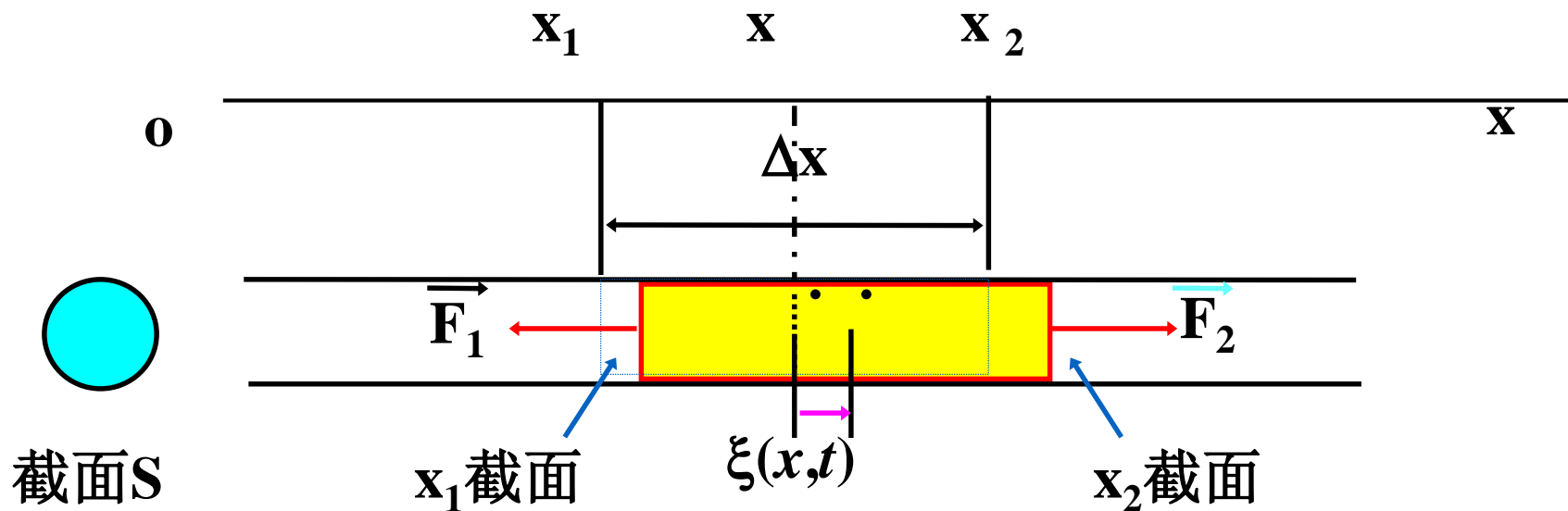
应变为 $\partial\xi/\partial x$

应力为 $F(x,t)/S$

应力、应变关系 $F/S = Y(\partial\xi/\partial x)$

2. 波动方程

在棒上取质元 Δx ,其质心的位移为 $\xi(x,t)$



$$(\rho S \Delta x) (\partial^2 \xi / \partial t^2) = F_2 - F_1$$

$$\rho (\partial^2 \xi / \partial t^2) = [(F_2 / S) - (F_1 / S)] / \Delta x$$

将前述应力、应变结果代入有

$$\rho (\partial^2 \xi / \partial t^2) = Y [(\partial \xi / \partial x)_2 - (\partial \xi / \partial x)_1] / \Delta x$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 并取极限即得所求波动方程

$$(\partial^2 \xi / \partial t^2) = (Y/\rho)(\partial^2 \xi / \partial x^2)$$

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

三维

$$(\partial^2 \xi / \partial t^2) = u^2 (\partial^2 \xi / \partial x^2 + \partial^2 \xi / \partial y^2 + \partial^2 \xi / \partial z^2)$$

§ 8.5 波的能量 (energy of wave)

一. 波的能量

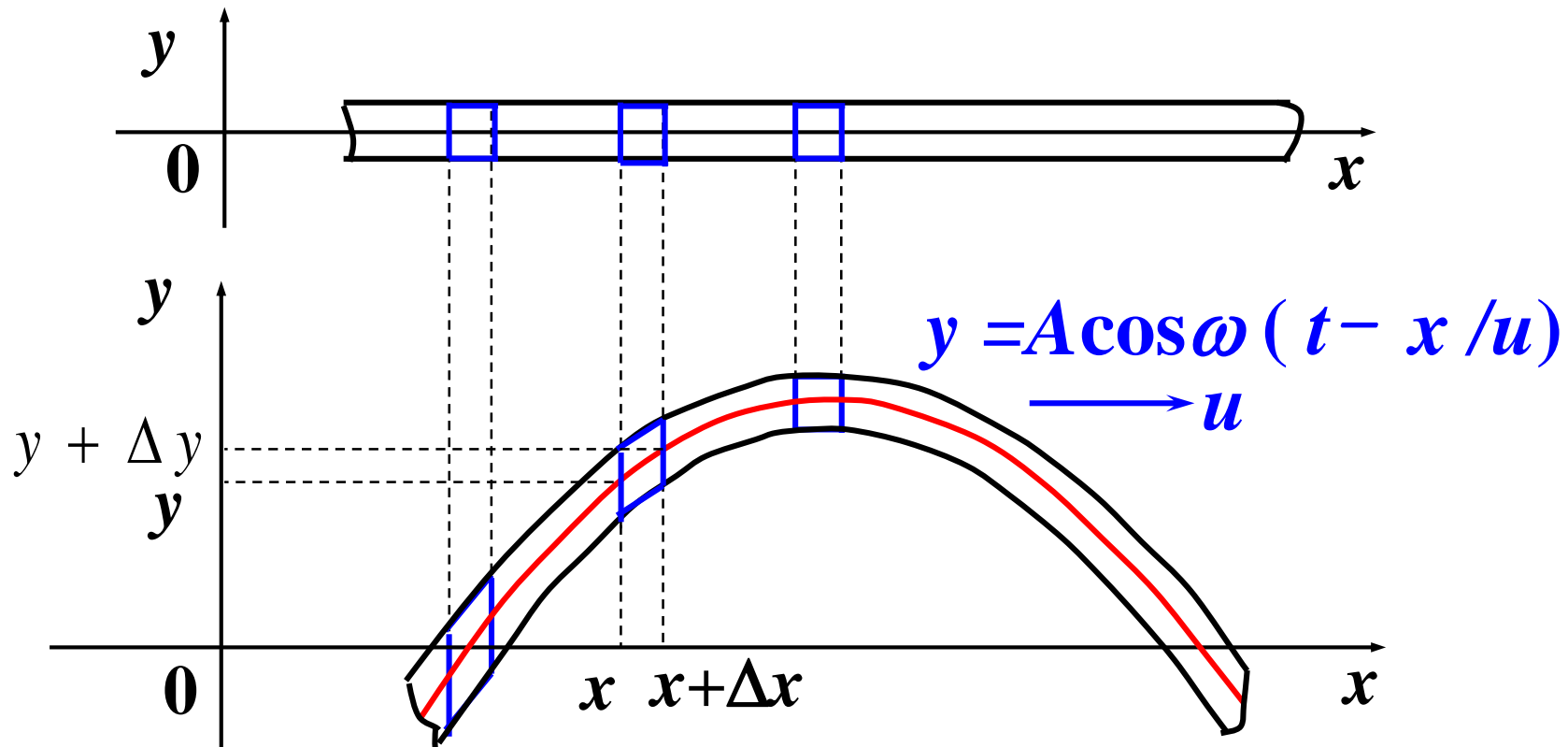
振动有能量，振动的传播将导致能量的传播。

这里要搞清：

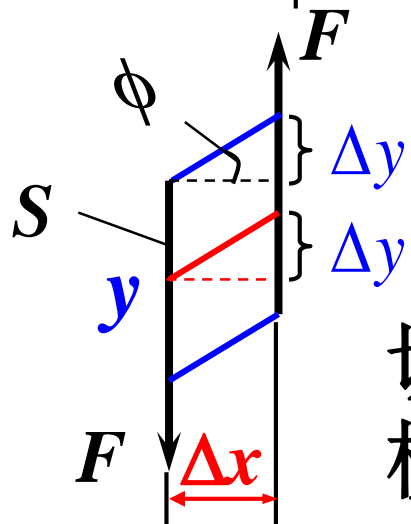
①媒质质元能量是如何变化的？

②能量传播的规律如何？

以弹性棒中的简谐横波为例来分析：



“质元”形变势能 ΔW_p , 振动动能 ΔW_k



$$\Delta W_p = \int_0^{\Delta y} F dy = \int_0^{\phi} GS\phi \Delta x d\phi = \frac{1}{2} G\phi^2 \Delta V$$

切变模量 $G = \frac{F/S}{\phi} \rightarrow F = GS\phi \quad \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} G \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \Delta V = \frac{1}{2} u^2 \rho \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \Delta V$$

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \rightarrow G = u^2 \rho \quad \textcolor{blue}{y = A \cos \omega (t - x/u)}$$

$$\text{又} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\partial y}{\partial x} = -\omega A \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \cdot \frac{1}{u}$$

$$\therefore \Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta W_k &= \frac{1}{2} (\rho \Delta V) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = \Delta W_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{质元总能量 } \Delta W &= \Delta W_p + \Delta W_k = 2\Delta W_p = 2\Delta W_k \\ &= \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u}) \Delta V\end{aligned}$$

振动系统: $E_k \neq E_p$, $E_k + E_p = \text{const.}$

系统与外界无能量交换。

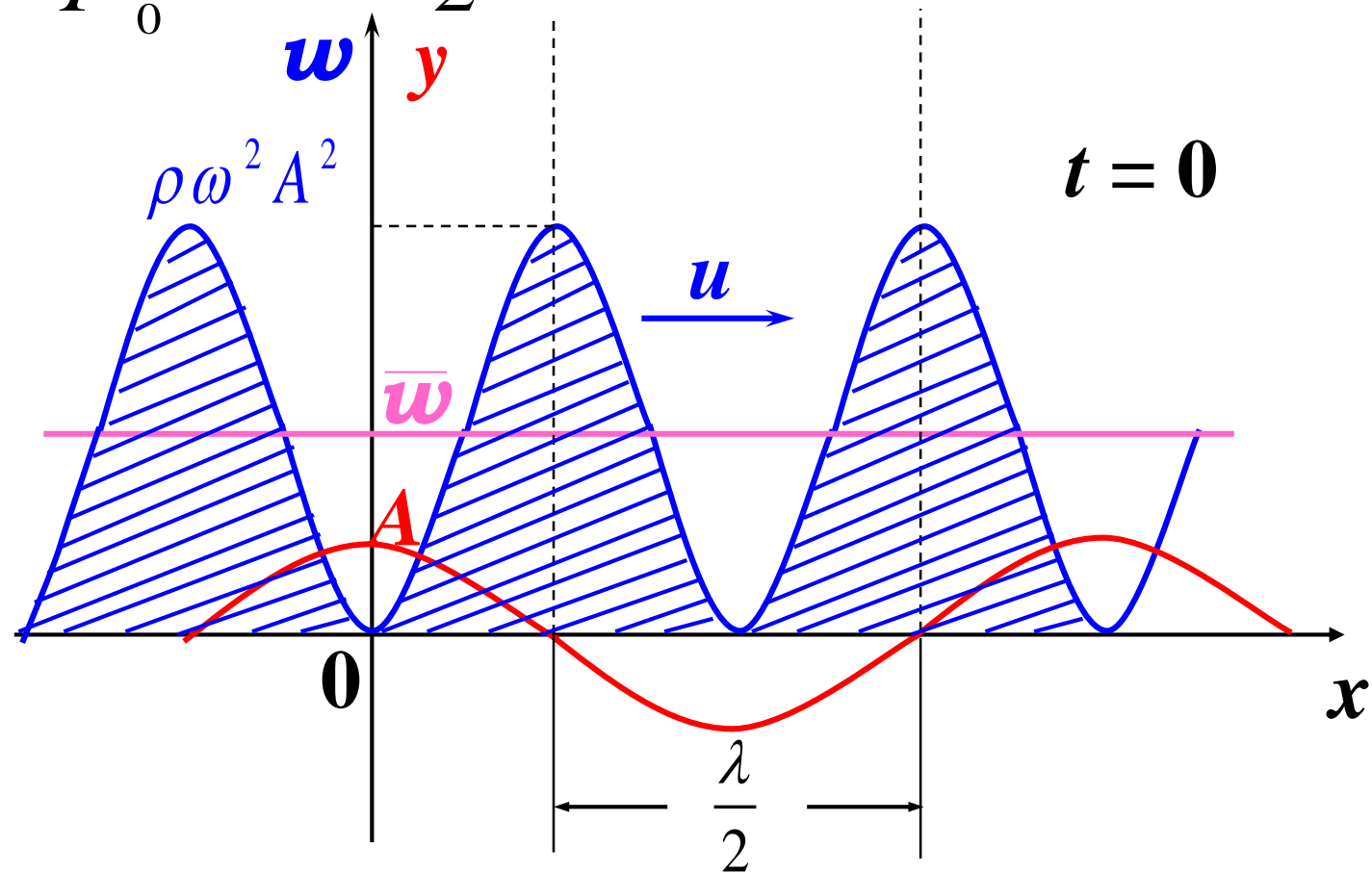
波动质元: $\Delta W_k = \Delta W_p$, $\Delta W_k + \Delta W_p \neq \text{const.}$

每个质元都与周围媒质交换能量。

能量密度 (energy density) :

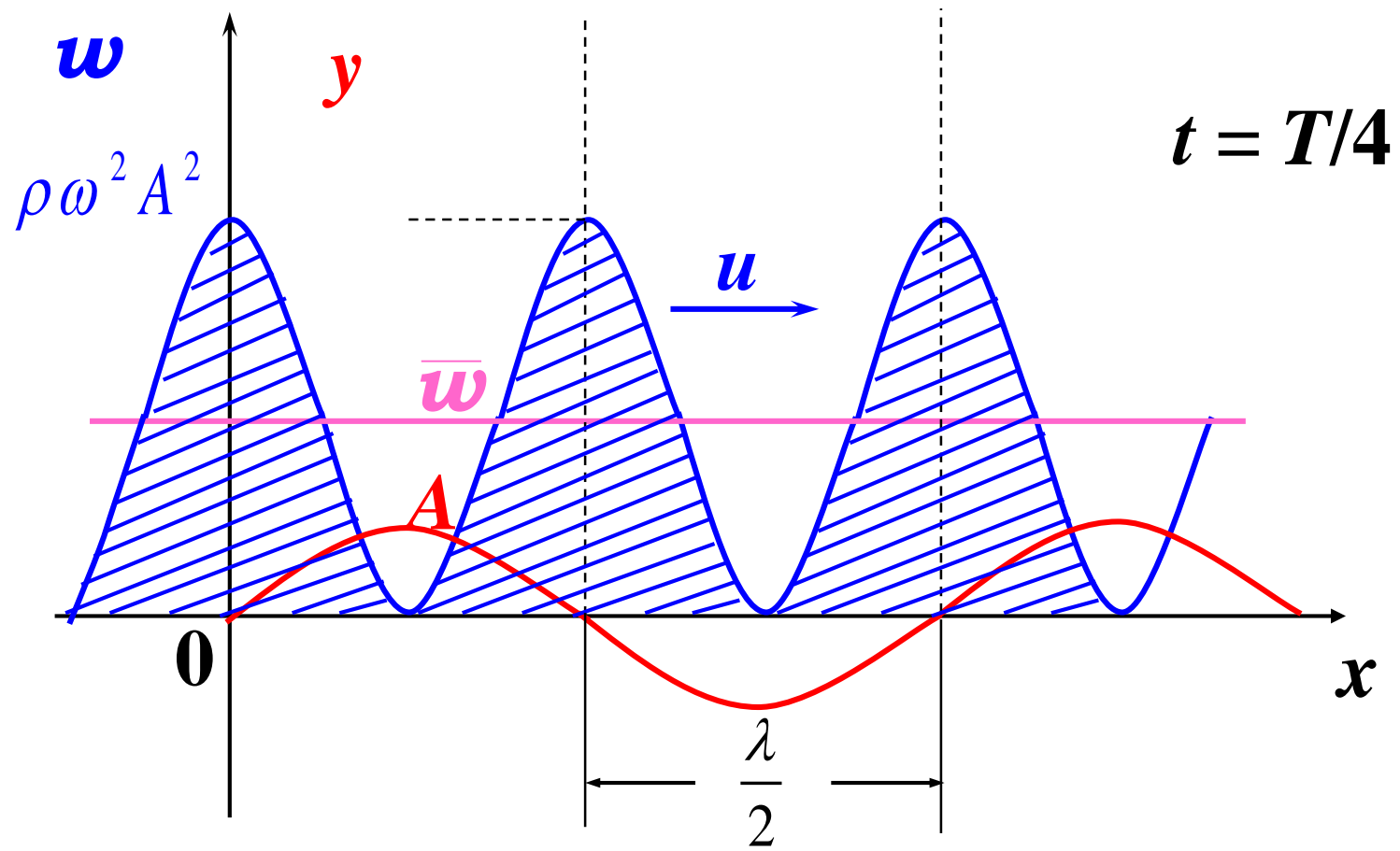
$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u}) \propto \omega^2 A^2 \quad (\text{特征})$$

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w \, dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad \text{适用于各种弹性波}$$



$y = 0$ 处, $w = w_{\max}$, $y = A$ 处, $w = 0$,

偏离平衡位置越远能量反而小, 反之亦然



能量“一堆堆”地传播。

二. 能流密度 (energy flux density)

波的传播 → 能量传播 → 能流

能流密度 S —— 单位时间内通过垂直于波线方向单位面积波的能量。

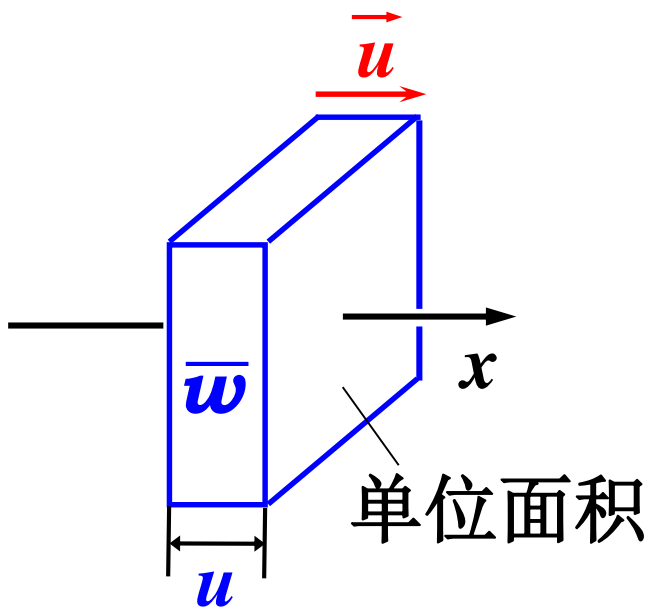
波的强度 $I = \bar{S}$

由图示有

$$I = \bar{w}u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u$$

$$= \frac{1}{2} z \omega^2 A^2$$

$z = \rho u$ —— 媒质的
“特性阻抗”



利用 $I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$ 和能量守恒, 可以证明,

对无吸收媒质:

平面波 $I = \text{const.} \rightarrow A = \text{const.}$

球面波 $r^2 I = \text{const.} \rightarrow A \propto \frac{1}{r}$

柱面波 $r I = \text{const.} \rightarrow A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$

r —— 场点到波源的距离

*三. 波的吸收 (absorption of wave)

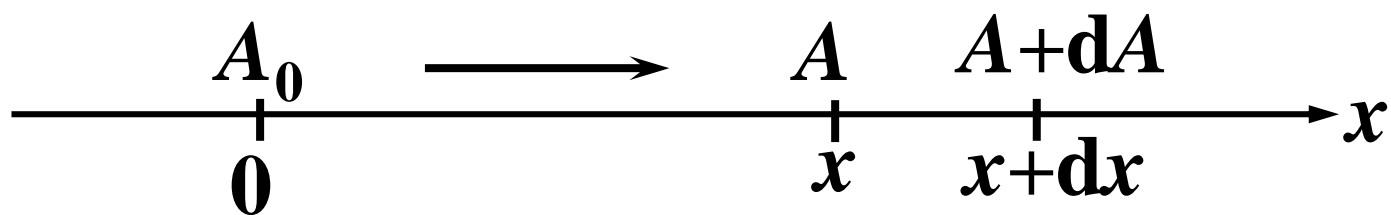
波通过媒质时，一部分能量要被媒质吸收。
造成吸收的因素：

- ①内摩擦：机械能→热运动能（不可逆）；
- ②热传导：疏部、密部有温差，发生热交换，
机械能→热运动能（不可逆）；
- ③分子碰撞：非弹性碰撞使分子规则振动能
→分子内部无规则的转、振能
（不可逆）。

定义吸收系数

$$\alpha = \frac{-dA}{A dx}$$

对平面波:



$$dA = -\alpha A dx \rightarrow \int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = -\int_0^x \alpha dx$$

设 $\alpha = \text{const.}$ 则

$$A = A_0 e^{-\alpha x}$$

$$\because I \propto A^2 \quad \therefore$$

$$I = I_0 e^{-2\alpha x}$$

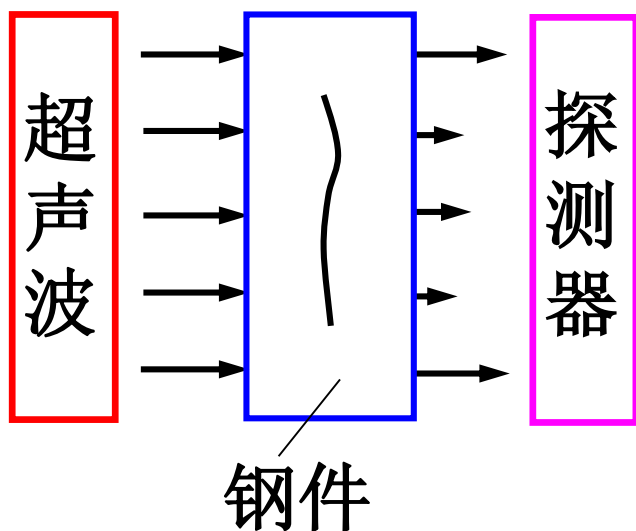
$$\nu^{\uparrow} \rightarrow \alpha^{\uparrow} \begin{cases} \text{空气:} & \alpha \propto \nu^2, \alpha_{\text{气}} = 2 \times 10^{-11} \nu^2 \text{ m}^{-1} \\ \text{钢:} & \alpha \propto \nu, \alpha_{\text{钢}} = 4 \times 10^{-7} \nu \text{ m}^{-1} \end{cases}$$

▲ 空气中低频波可传得很远

▲ ν 很大时（超声） $\alpha_{\text{气}} \gg \alpha_{\text{钢}}$

空气中，低频波吸收弱，传播距离长，

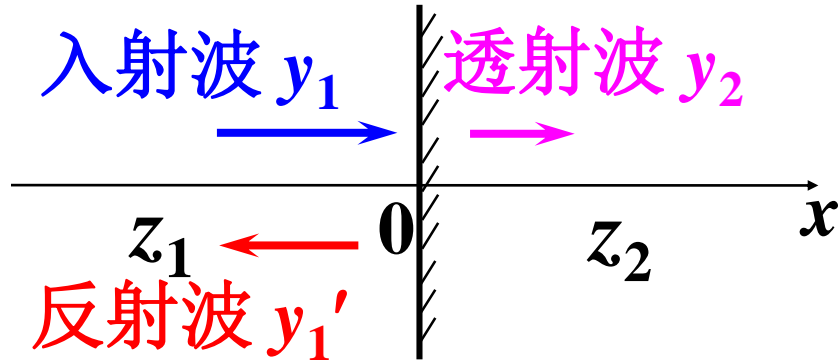
超声波吸收强，传播距离短。



超声波探伤

对 $\nu = 5 \times 10^6 \text{ Hz}$ 的声波，
强度如果要衰减到1%，
只需通过 4.6mm 的空气，
而钢则需 1.15m。

*四. 波在界面的反射和透射



$z = \rho u$ — 特性阻抗

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t - \frac{x}{\lambda_1} 2\pi + \varphi)$$

$$y_1' = A_1' \cos(\omega t + \frac{x}{\lambda_1} 2\pi + \varphi)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t - \frac{x}{\lambda_2} 2\pi + \varphi)$$

$z_{\text{大}}$ ——波密媒质
 $z_{\text{小}}$ ——波疏媒质 } 相对而言

机械波 \perp 入射时，利用界面关系：

①界面两侧质元位移相同（接触）

$$[y_1 + y_1']_{x=0} = [y_2]_{x=0}$$

②界面两侧应力相等（牛顿第三定律）

$$\left[\frac{F_1}{S} + \frac{F_1'}{S} \right]_{x=0} = \left[\frac{F_2}{S} \right]_{x=0}$$

$$Y_1 \left[\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial y_1'}{\partial x} \right]_{x=0} = Y_2 \left[\frac{\partial y_2}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (\text{纵波})$$

将 y 的表达式代入界面关系, 考虑 $Y=\rho u^2$ 可得:

$$A_1' = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} A_1$$
$$A_2 = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} A_1$$

反射波:

(1) 若 $z_1 > z_2$

即波密 \rightarrow 波疏, 无特别

(2) 若 $z_1 < z_2$

$$y_1' = A_1' \cos(\omega t + \frac{x}{\lambda_1} 2\pi + \varphi) = |A_1'| \cos(\omega t + \frac{x}{\lambda_1} 2\pi + \varphi - \pi)$$

即波疏 \rightarrow 波密, 反射波有相位突变 π

——半波损失

透射波：不论 $z_1 > z_2$ ，还是 $z_1 < z_2$ ，无特别

$$\left. \begin{array}{l} \text{反射比 } R = \frac{I_1'}{I_1} = \left(\frac{A_1'}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^2 \\ \text{透射比 } T = \frac{I_2}{I_1} = \frac{z_2 A_2^2}{z_1 A_1^2} = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} R + T = 1 \\ \text{(能量守恒)} \end{array}$$

▲ z_1 、 z_2 互换， R 、 T 不变。

▲ $z_1 \gg z_2$ 或 $z_1 \ll z_2$ 时， $R \approx 1$ ， $T \approx 0$ ，全反射

▲ $z_1 \approx z_2$ 时， $R \approx 0$ （无反射）， $T \approx 1$ ，全透射

	$z(\text{kg/m}^2 \cdot \text{s})$	T
空气(标准状况)	420	空气→水 0.1%
水	1.5×10^6	空气→钢 0.004%
钢(按纵波算)	4.6×10^7	水→钢 12%

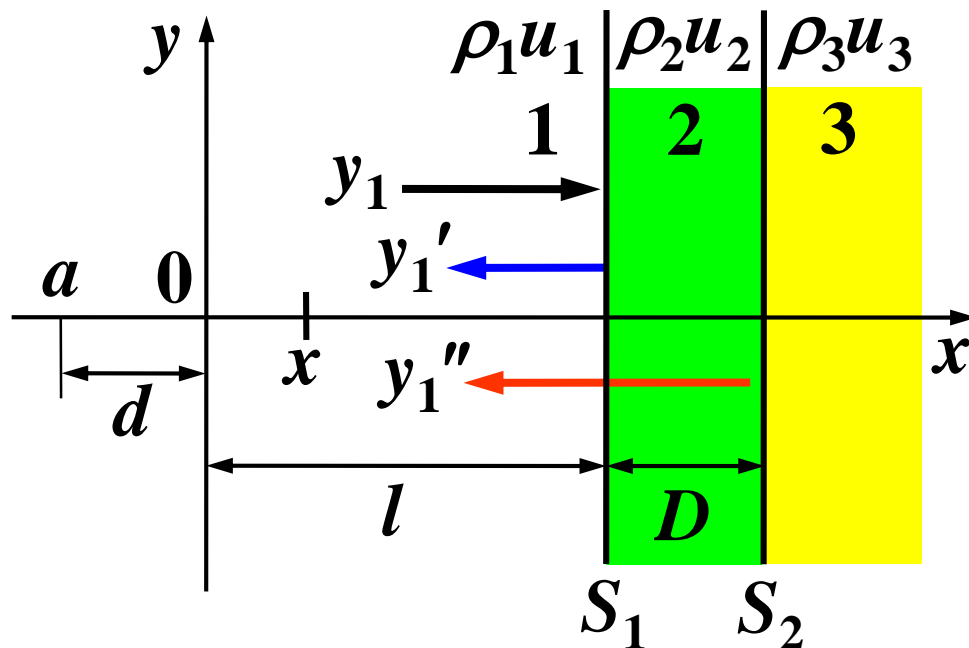
∴ 要使声波进入钢，不能有气隙。

在钢表面 涂一层油(耦合层)，以增加透射率

实际的波发射和接收装置都需要设置耦合层，

以保证声阻抗的“匹配”。 实例：B超

【例】如图示，简谐波沿 x 方向传播， a 点振动方程为 $y_a = A_1 \cos \omega t$ ， $\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2 > \rho_3 u_3$ 。

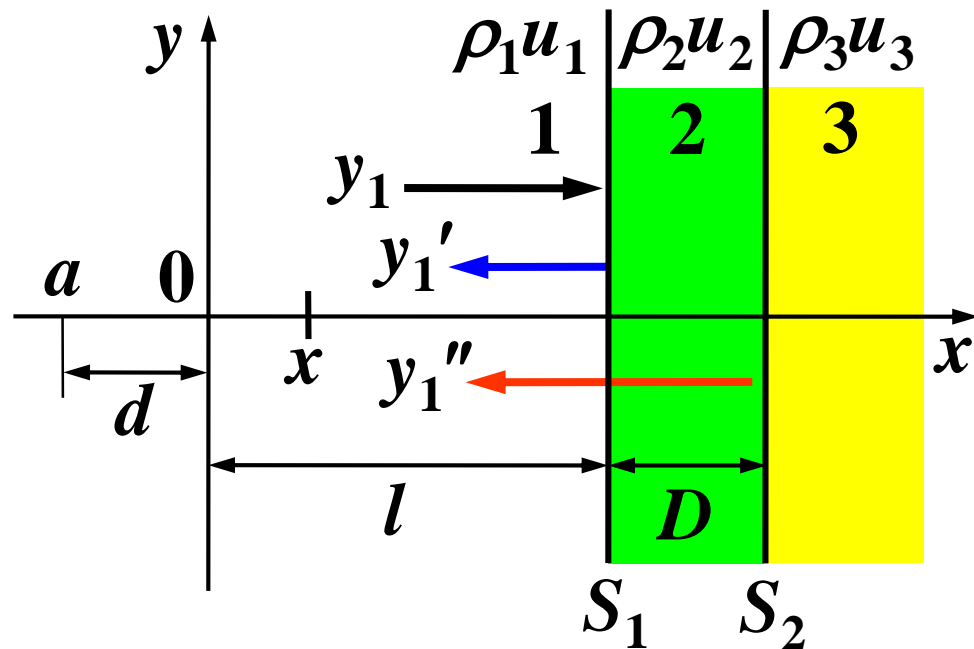


求：

- 1) 1区入射波 y_1
- 2) S_1 面反射波 y_1' ，
设振幅为 A_1'

3) S_2 面上反射回 1 区的波 y_1'' ，设振幅为 A_1''

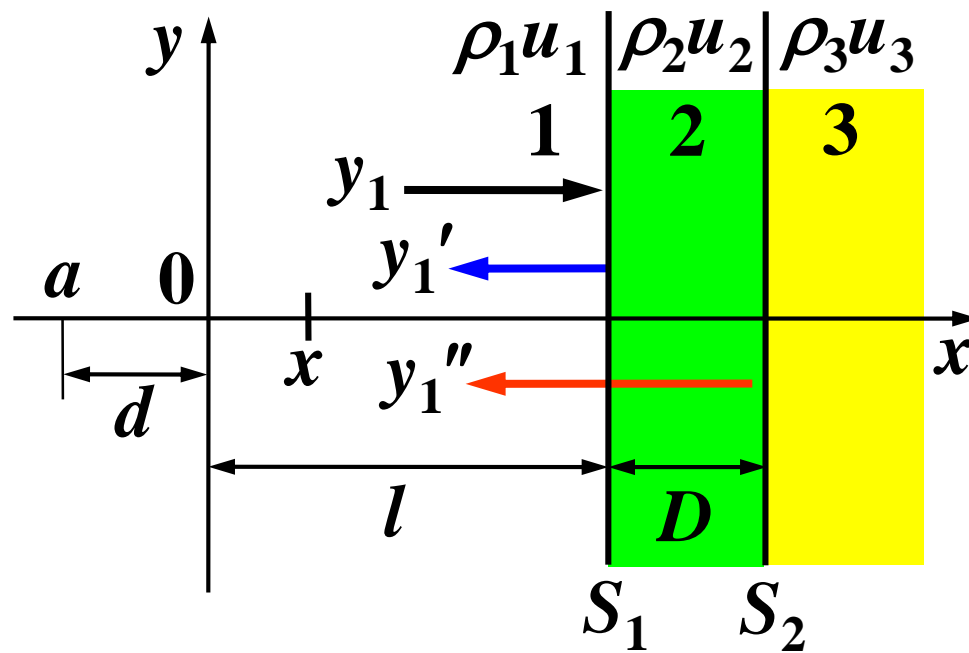
4) 使反射波 y_1' 和 y_1'' 在 1 区干涉相消的 D_{\min}



解: 1) $y_1(x, t) = A_1 \cos \omega(t - \frac{x + d}{u_1})$

2) $y_1'(x, t) = A_1' \cos[\omega(t - \frac{d + l + l - x}{u_1}) - \pi]$

$= A_1' \cos[\omega(t + \frac{x - 2l - d}{u_1}) - \pi]$



$$\begin{aligned}
 3) \quad y_1''(x, t) &= A_1'' \cos \omega \left(t - \frac{d + l + l - x}{u_1} - \frac{2D}{u_2} \right) \\
 &= A_1'' \cos \omega \left(t + \frac{x - 2l - d}{u_1} - \frac{2D}{u_2} \right)
 \end{aligned}$$

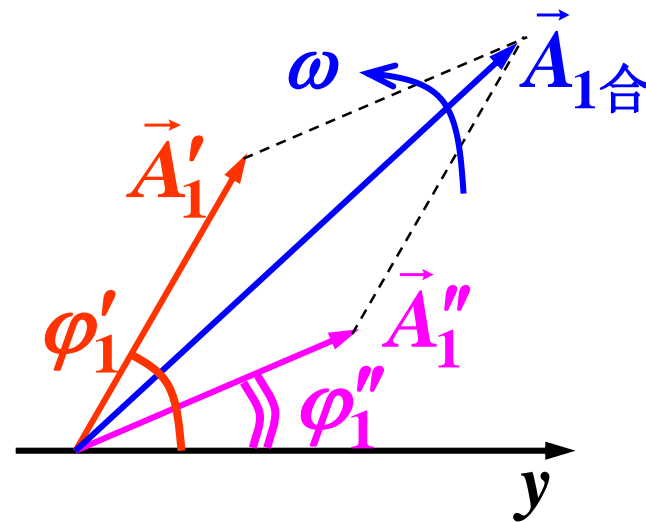
4) 如何使 y_1' 和 y_1'' 产生相消干涉:

$$y_1' = A_1' \cos\left[\omega\left(t + \frac{x - 2l - d}{u_1}\right) - \pi\right] \stackrel{\text{令}}{=} A_1' \cos[\omega t + \varphi_1'(x)]$$

$$y_1'' = A_1'' \cos\left[\omega\left(t + \frac{x - 2l - d}{u_1} - \frac{2D}{u_2}\right)\right] \stackrel{\text{令}}{=} A_1'' \cos[\omega t + \varphi_1''(x)]$$

$$\varphi_1' - \varphi_1'' = -\pi + \frac{2D}{u_2} \omega, \text{ 与 } x \text{ 无关,}$$

y_1' 和 y_1'' 合成的波仍是行波,
其振幅 $A_{1\text{合}}$ 由 $\varphi_1' - \varphi_1''$ 决定。



相长干涉: $\varphi_1' - \varphi_1'' = 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2\ldots)$

相消干涉: $\varphi_1' - \varphi_1'' = (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2\ldots)$

使 y_1' 和 y_1'' 产生相消干涉应满足:

$$\varphi_1' - \varphi_1'' = -\pi + \frac{2D}{u_2} \omega = (2k + 1)\pi$$

$$D = (k + 1)\pi \frac{u_2}{\omega} = (k + 1) \frac{\lambda_2}{2}$$

$$D_{\min} = \lambda_2 / 2$$

媒质 2 可作为隐形涂层。

消声器原理也是利用波的干涉相消。

§ 8.6 惠更斯原理 (Huygens principle)

前面讨论了波动的基本概念, 现在讨论与波的传播特性有关的现象、原理和规律。

由于某些原因, 波在传播过程中其传播方向、频率和振幅都有可能改变。

惠更斯原理给出的方法 (惠更斯作图法) 是一种处理波传播方向的普遍方法。

一. 惠更斯原理 (1690)

1. 原理的叙述

波前上每点可看成发射子波的波源, t 时刻这些子波源发出的子波, 经 Δt 时间后形成半径为 $u\Delta t$ 的球形波阵面, 在波的前进方向上这些子波波阵面的包迹就是 $t+\Delta t$ 时刻新波阵面。

2. 原理的应用

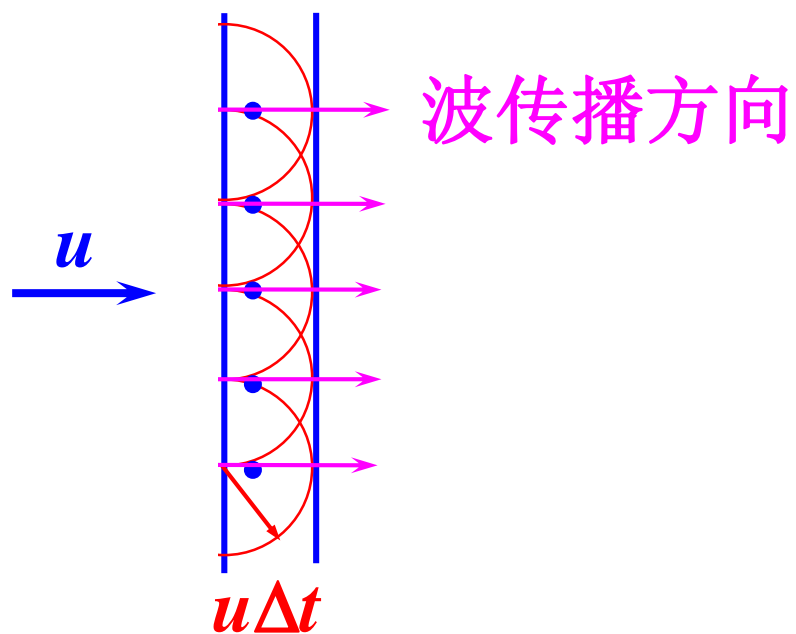
已知 t 时刻的波面 $\rightarrow t+\Delta t$ 时刻的波前,

从而可进一步给出波的传播方向。

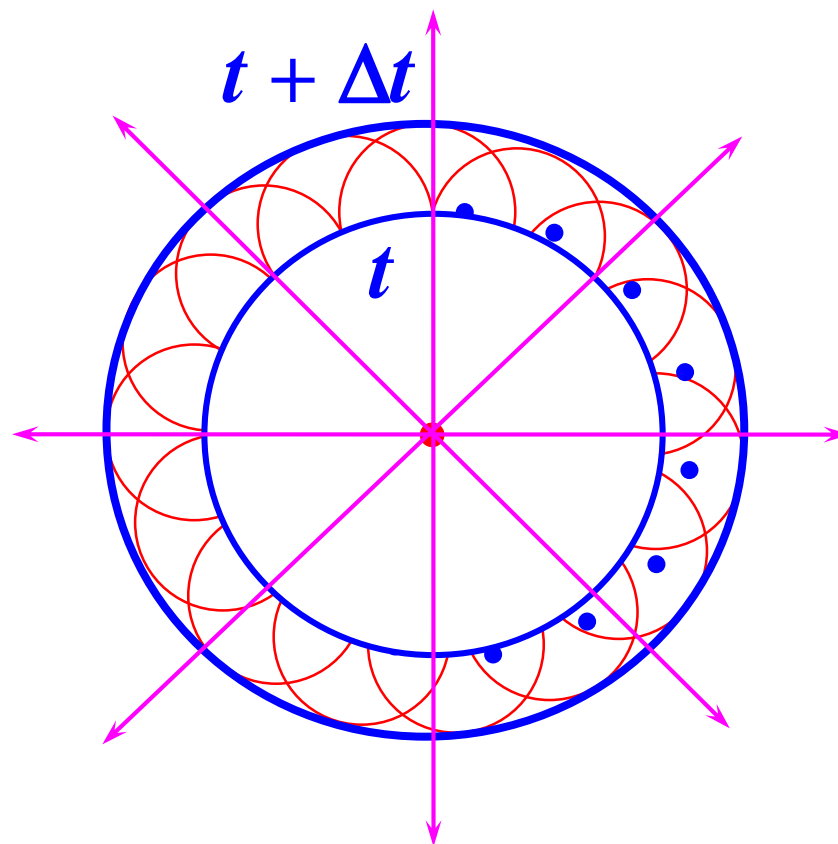
例如，均匀各向同性媒质内波的传播：

平面波

t 时刻波面 $t+\Delta t$ 时刻波面



球面波

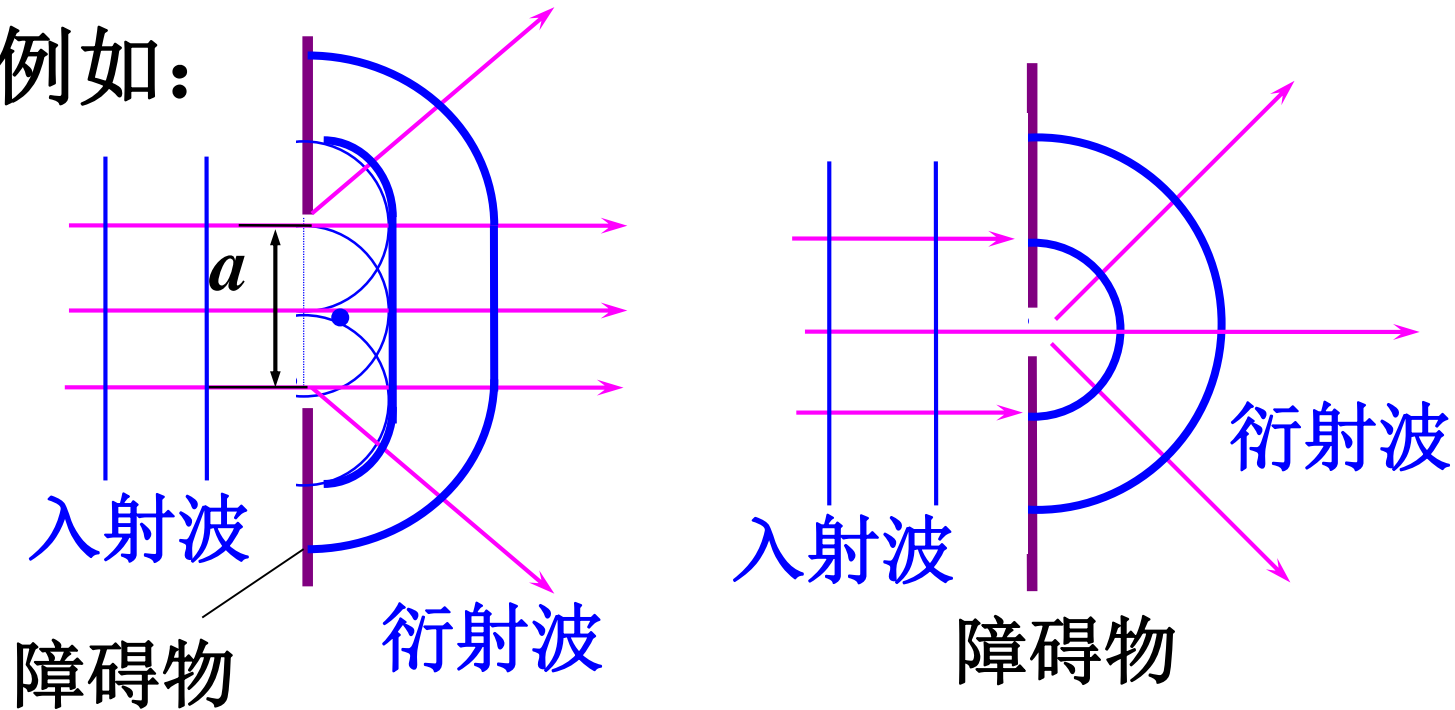


向后？

二. 波的衍射 (wave diffraction)

衍射：波传播过程中，当遇到障碍物时，
能绕过障碍物边缘而偏离直线传播的现象。

例如：



相对波长而言，狭缝越小衍射现象越明显。

衍射是波的特征之一。

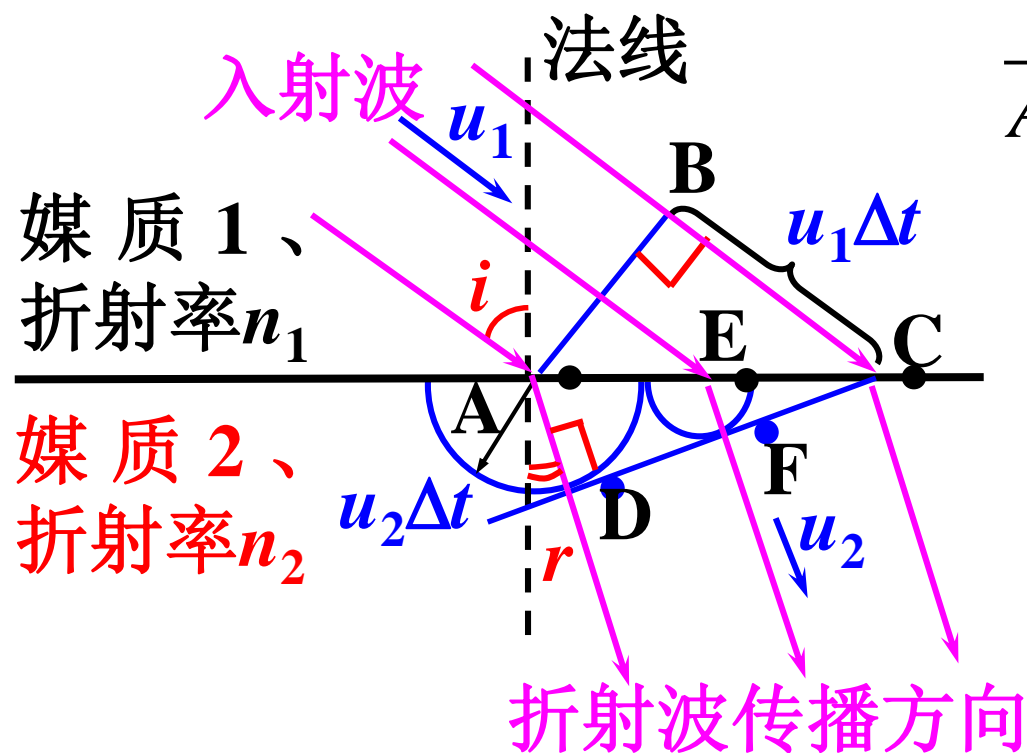


水波通过窄缝时的衍射

三. 波的反射和折射 (reflection & refraction)

△1. 波的反射 (书 P225)

2. 波的折射: 用惠更斯作图法导出折射定律



$$\overline{BC} = u_1 \Delta t = \overline{AC} \sin i$$

$$\overline{AD} = u_2 \Delta t = \overline{AC} \sin r$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2}$$

(折射定律)

光波 $u_1 = \frac{c}{n_1}, \quad u_2 = \frac{c}{n_2}$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1} = \text{const.}$$

得到

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

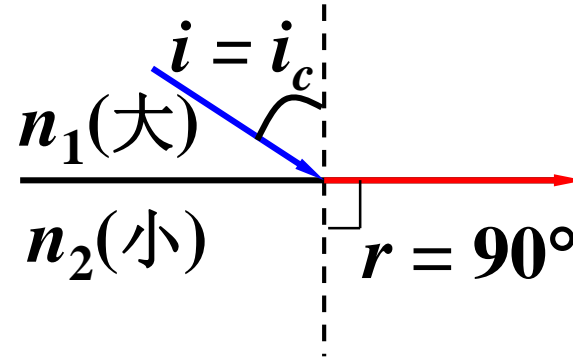
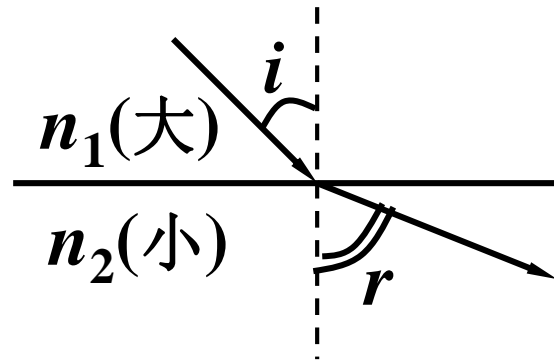
——折射定律

或

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21}$$

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{——相对折射率}$$

光密媒质→光疏媒质时，折射角 $r >$ 入射角 i 。



$$\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$$

i_c — 临界角

当入射 $i >$ 临界角 i_c 时，将无折射光 — 全反射。

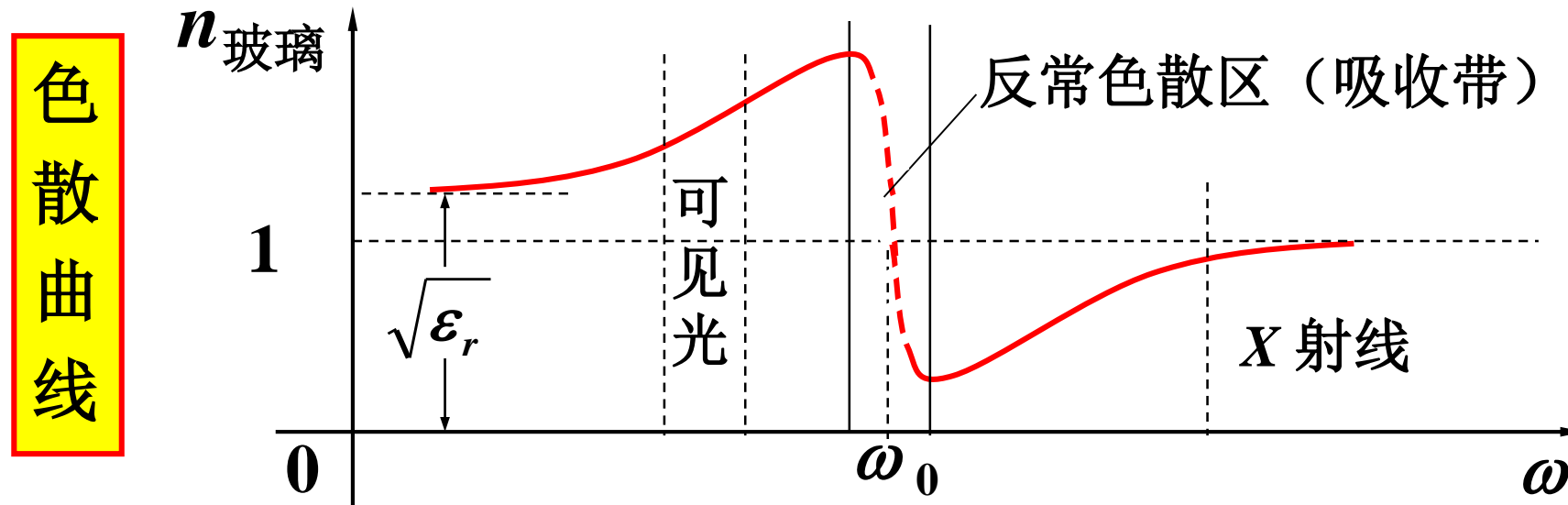
全反射的一个重要应用是光导纤维（光纤），它是现代光通信技术的重要器件。



光 导 纤 维

光纤通讯之父：
高锟（Charles K. Kao）
2009年诺贝尔物理学奖

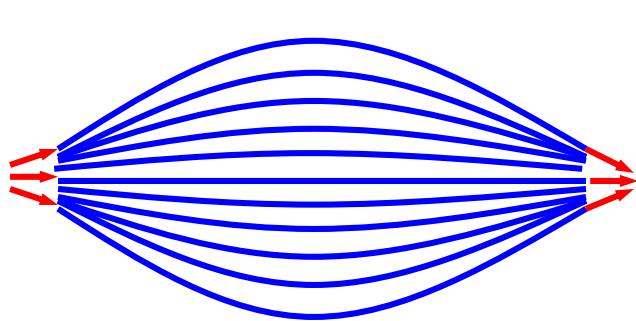
近10年发展起来的**导管 X 光学**也应用了全反射现象。对 X 光来说，玻璃对真空的折射率 <1 ：



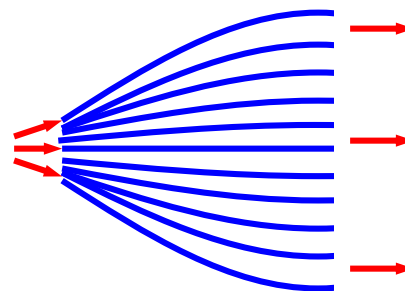
故 X 光从真空或空气射向玻璃时会发生全反射。

X 光以大于临界角入射到内表面光滑的玻璃管内，就可以沿着弯曲的导管传播。

应用毛细的 X 管束可制成 X 光透镜。



聚焦提高光束功率密度



将发散光变为平行光

X 光透镜已用于：

医疗诊断、 X 光天文望远镜等

§ 8.7 波的叠加，驻波

1. 波的叠加原理(**superposition principle**)

波的传播独立性： 若几列波同时在介质中传播，则它们各以原有的振幅、波长和频率沿原方向独立地传播，彼此互不影响。

波的叠加原理： 由于波的传播具有独立性，所以在介质中几列波相遇的区域内，任一质元的位移等于各列波单独传播所引起的该质元的位移的矢量和。

——是分析干涉、衍射的基本依据。

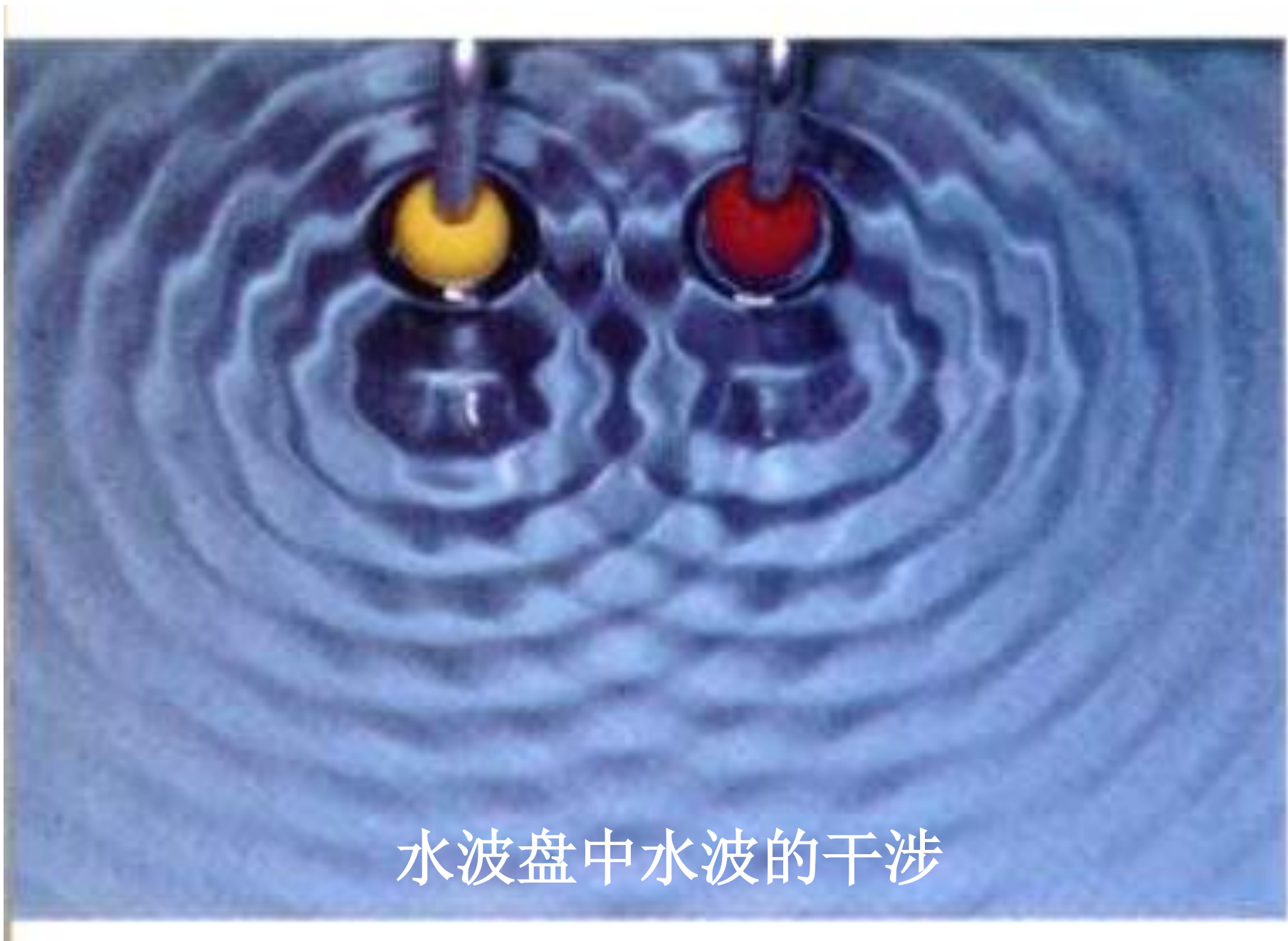
波的独立性演示

叠加原理成立的条件：

只适用于在线性介质中传播的波，波的振幅（强度）不能过大，否则质元受到的恢复力与形变不成正比，叠加原理不成立。

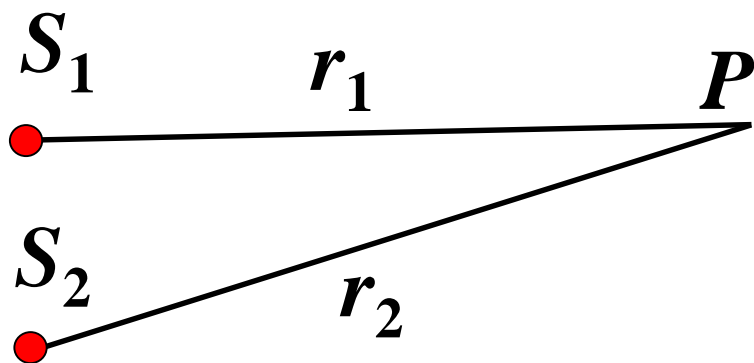
2. 波的干涉

由两个（或两个以上）波源发出的、满足一定条件的波在空间叠加时，在交叠区的不同地点呈现**稳定的相互加强或减弱**的现象，称为**干涉**。



水波盘中水波的干涉

以机械波的干涉为例：



两列波同频率、同方向，分别引起 P 点质元的振动：

$$y_1 = A_1 \cos (\omega t - kr_1 + \varphi_{10})$$

$$y_2 = A_2 \cos (\omega t - kr_2 + \varphi_{20})$$

φ_{10} 和 φ_{20} —— S_1 和 S_2 的振动初相位

两个同方向、同频率的简谐振动的合成—— P 点质元的合振动是同频率简谐振动，合振幅：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

两列波在 P 点的相差：初相差

$$\Delta\varphi = (\varphi_{10} - \varphi_{20}) - k(r_1 - r_2)$$

P 点的叠加强度：干涉项

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \Delta\varphi$$

若 $\Delta\varphi$ 保持恒定，干涉项的正负号只与 P 点位置有关， I 在空间形成稳定的强弱分布——干涉

波的叠加演示

干涉条件：这两列波的

- (1) 相位差保持恒定
- (2) 振动频率相同
- (3) 在叠加处振动方向相同

为获得清晰的强、弱分布，还要求两列波的振幅不要相差太大。

相干波源、相干波、**相干叠加**

实验观察到的强度是在一定时间内的平均值，若干涉项的时间平均值等于零，或不存在干涉项——**非相干叠加：**

$$I = I_1 + I_2$$

关于干涉条件的讨论：

(1) 相位差保持恒定

若 $(\varphi_{10} - \varphi_{20})$ 随时间无规变化

$$\overline{\cos \Delta \varphi} = 0, \quad I = I_1 + I_2$$

——非相干叠加

(2) 振动频率相同

即使频率相差很小也会出现拍，测量时间比拍的周期长得多，对时间取平均

$$I = I_1 + I_2$$

——非相干叠加

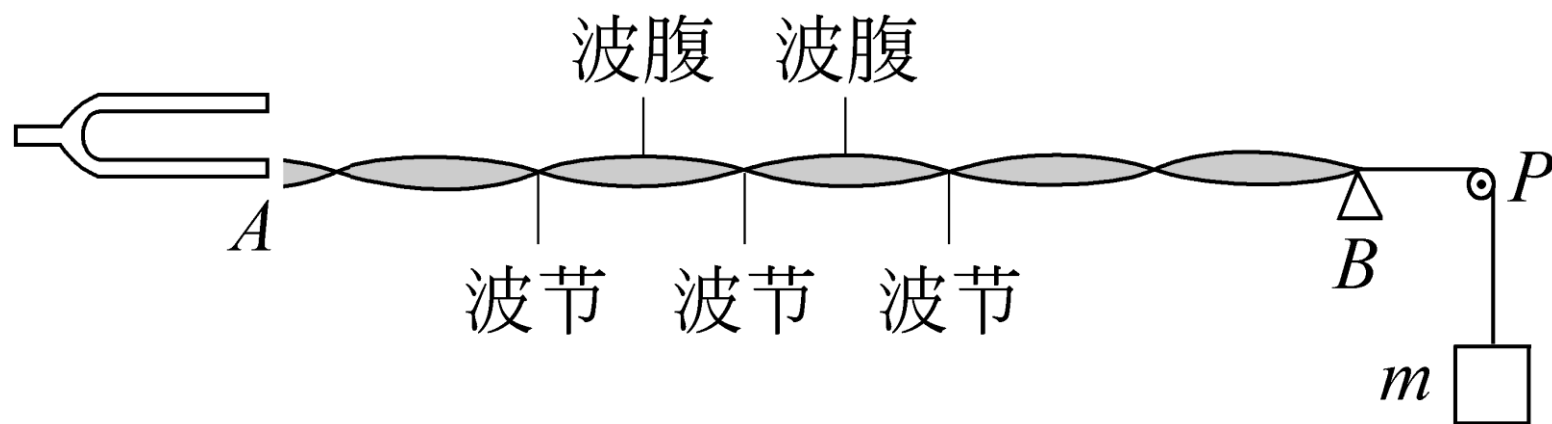
(3) 振动方向相同

两列波在 P 点振动方向互相垂直时， P 点质元运动轨迹是椭圆，不出现干涉项， $I = I_1 + I_2$ ，也是非相干叠加。

不垂直是干涉的必要条件，如果在叠加处振动方向成某一角度，只要不垂直，同方向的分量之间就能干涉。

3. 驻波 (standing wave)

两列等幅、相干的简谐波，沿相反方向传播而叠加时形成驻波。它是常见的重要干涉现象。



弦驻波 (横驻波)

(1) 驻波的描述

设两列行波分别沿 x 轴的正向和反向传播，
在 $x = 0$ 处两波的初相均为 0 ：

$$\rightarrow x: \quad y_1 = A \cos(\omega t - \frac{x}{\lambda} 2\pi)$$

$$\leftarrow x: \quad y_2 = A \cos(\omega t + \frac{x}{\lambda} 2\pi)$$

设两列等幅、相干简谐波沿 x 轴的正、反向传播，为简单，设波函数为

$$y_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right), \quad y_2 = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

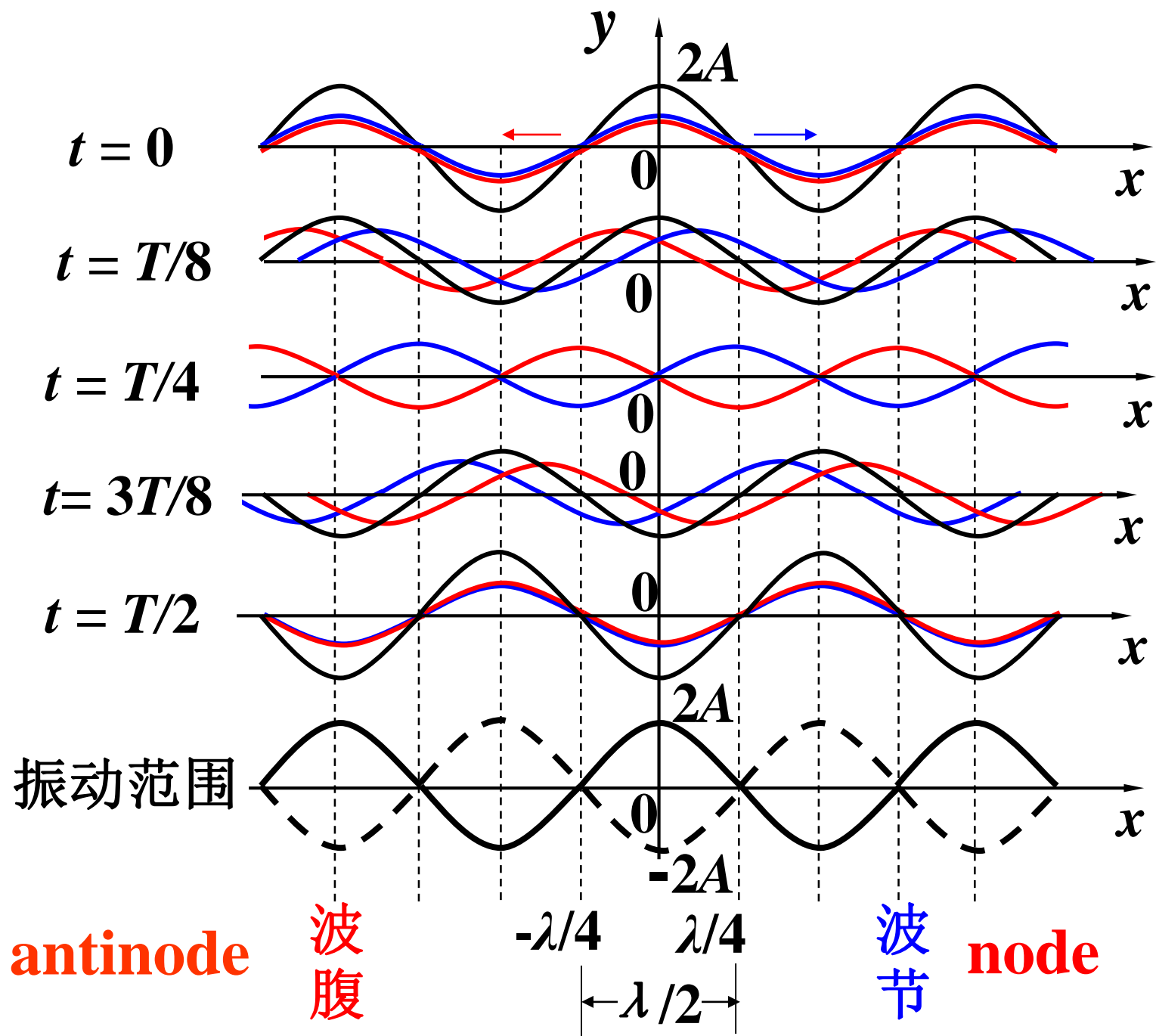
两波相遇处各质元合振动的位移：

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cdot \cos \omega t$$

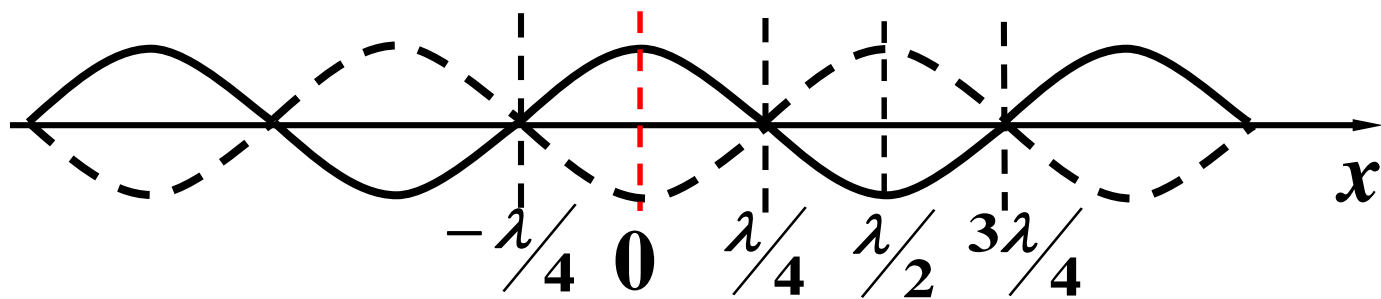
绝对值为振幅 简谐振动

——驻波的波函数，即任意坐标 x 处质元的振动表达式。

注意：它不是 $(t \mp x/u)$ 的函数，相位和能量都不传播，各点作简谐振动，振幅随位置不同而不同。



(2) 驻波的特点



① **振幅** : 各处不等, 出现**波腹**和**波节**。

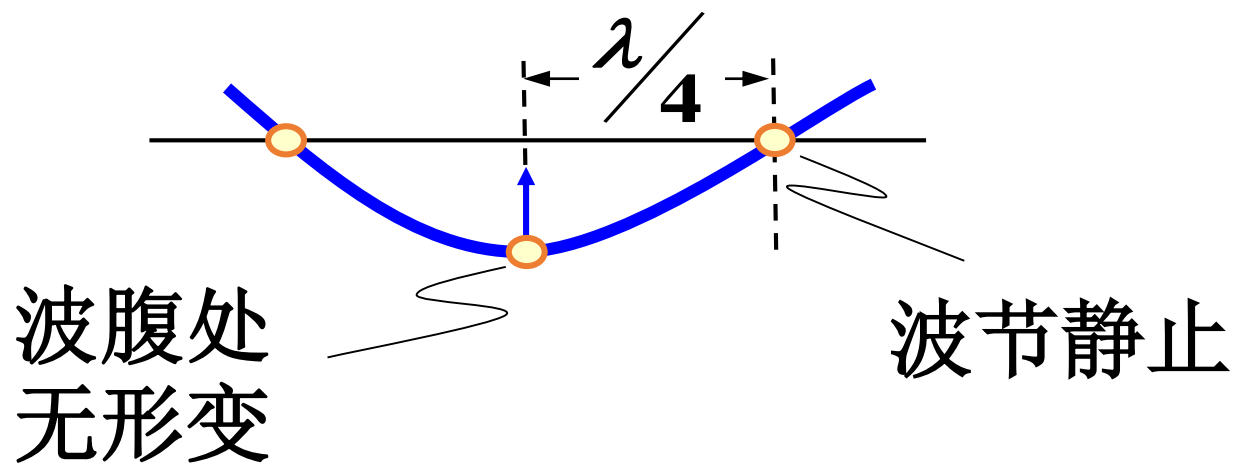
相邻波节间距 $\lambda/2$, 波节和相邻波腹间距 $\lambda/4$ 。

② **相位** : 不传播, 是**分段振动**。

两相邻波节间为一段, 同一段各点振动相位相同; 在波节两边相位相反。

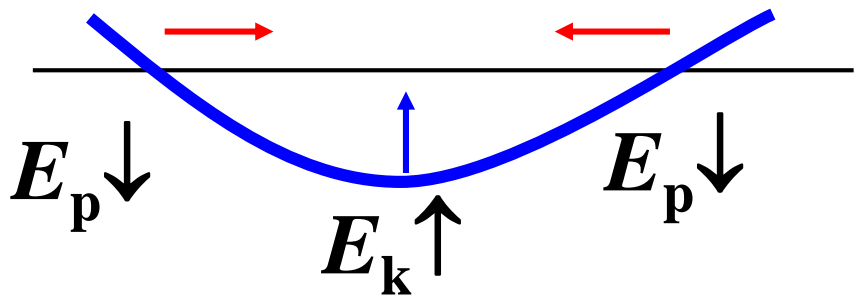
分段振动→相位不传播 (**演示**)

③ 能量的流动



虽然形变使波节两侧有相互作用力，但波节静止，波节一侧的质元不会对另一侧的质元做功而传递能量；波腹处不形变，两侧没有作用力，能量也不能通过波腹。

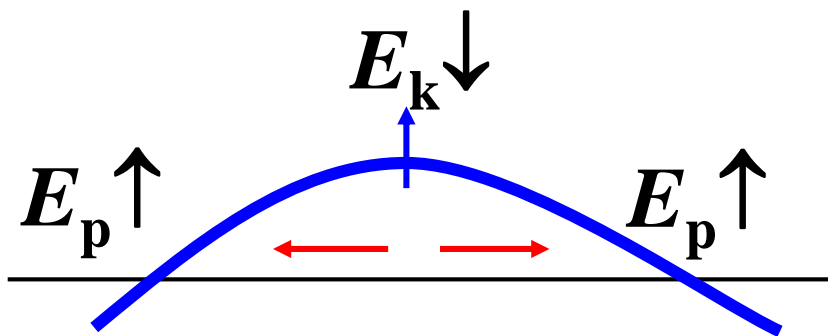
因此：驻波能量在整体上不传播，只能在波节和相邻波腹之间 $\lambda/4$ 区域内流动。这一区域构成一个独立的振动体系，它与外界不交换能量。



势能→动能，能量：波节→波腹



势能为零，动能最大，能量集中在波腹处。



动能→势能，能量：波腹→波节

(3) $A_1 \neq A_2$ 的情形:

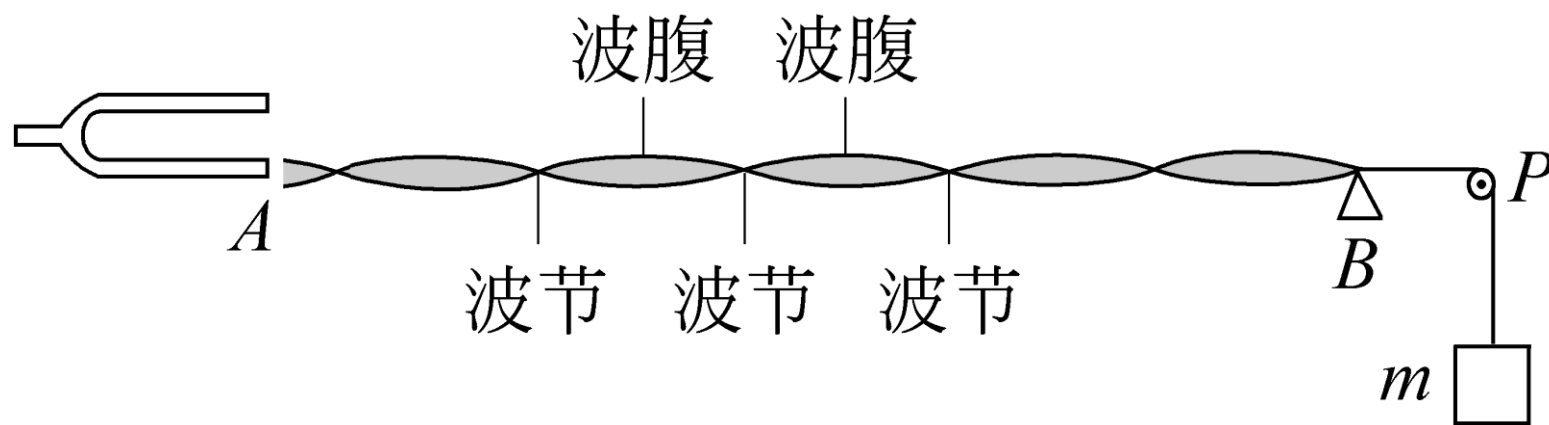
设 $A_2 = (A_1 + \Delta A) > A_1$,

则有 $y = 2A_1 \cos \frac{x}{\lambda} 2\pi \cdot \cos \omega t + \Delta A \cos(\omega t + \frac{x}{\lambda} 2\pi)$

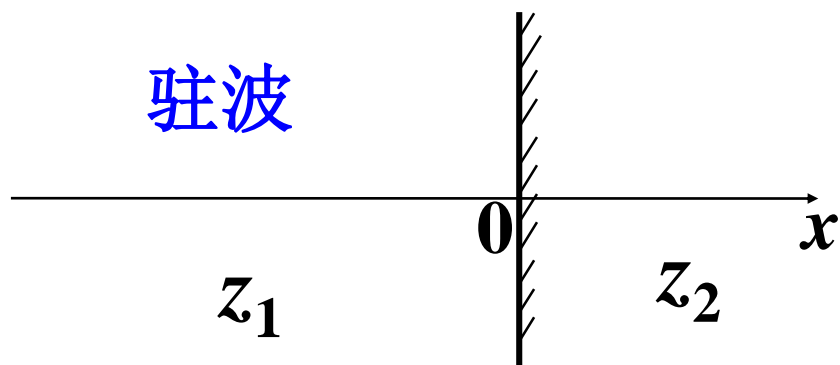
典型的驻波

行波

此时总的仍可叫“驻波”，不过波节处有振动。



(4) 驻波在界面

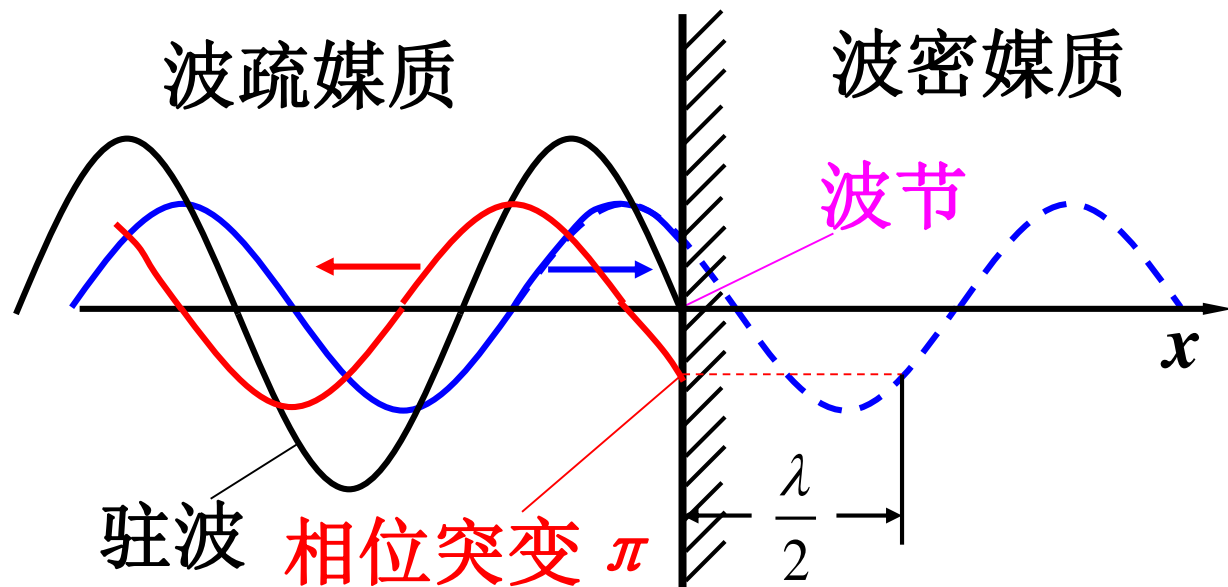


$z = \rho u$ — 特性阻抗

$z_2 \gg z_1$ 半波损失
界面上总是波节

$z_2 \ll z_1$
界面上总是波腹

若忽略透射波，则入射和反射波的波形如下：



$$[y_1 + y_1']_{x=0}$$

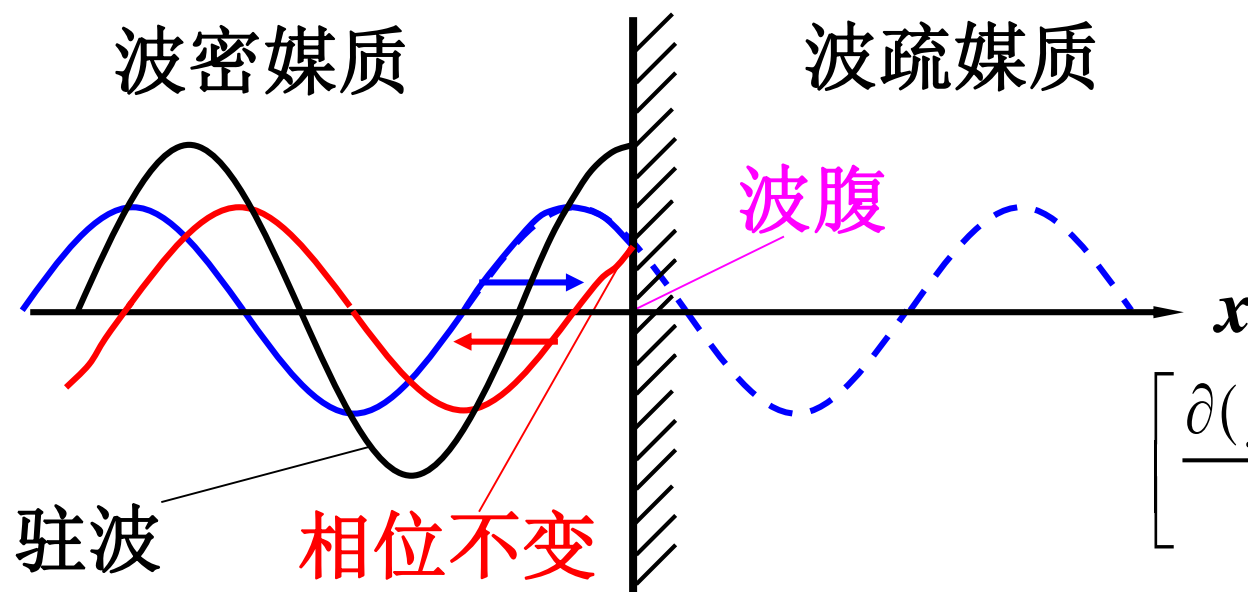
$$\parallel$$

$$[y_2]_{x=0} = 0$$

$$Y_1 \left[\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial y_1'}{\partial x} \right]_{x=0}$$

\parallel

$$Y_2 \left[\frac{\partial y_2}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$$

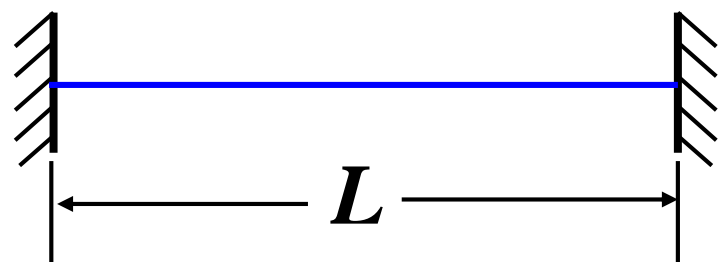


$$\left[\frac{\partial (y_1 + y_1')}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$$

4、简正模式 (normal mode)

波在一定边界内传播时就会形成各种驻波。

如两端固定的弦，形成驻波必须满足以下条件：



$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$

$$\text{或} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}$$

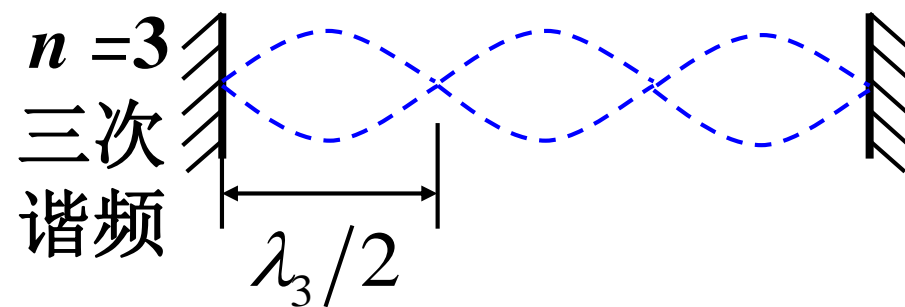
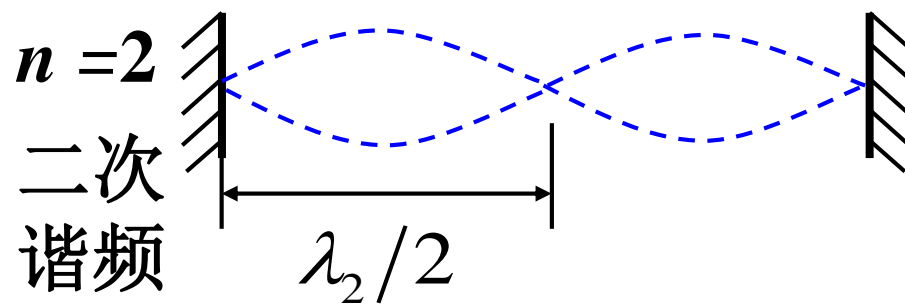
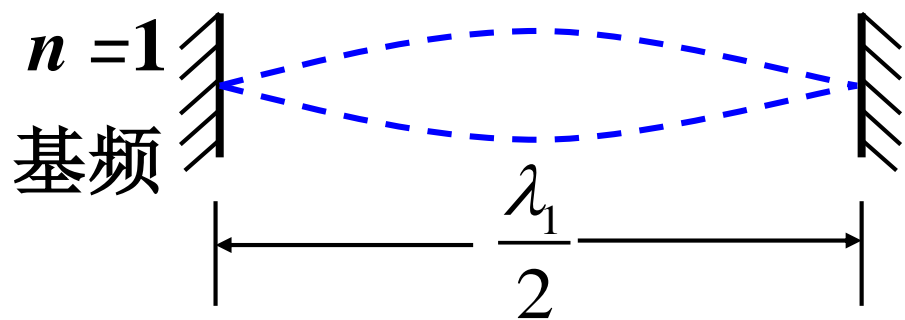
——系统的固有频率

波速 $u = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$

F ——弦中的张力

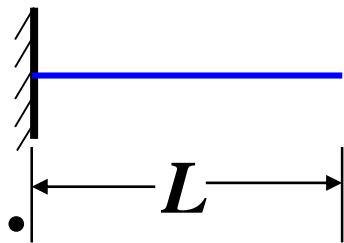
ρ_l ——弦的线密度

每种可能的**稳定振动方式**称作系统的一个**简正模式**。

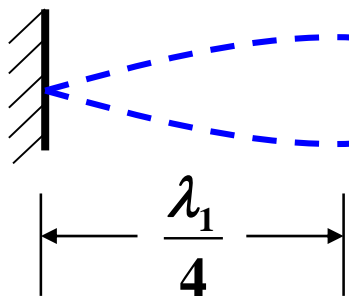


边界情况不同，简正模式也不同：

$$L = n \frac{\lambda_n}{4}$$

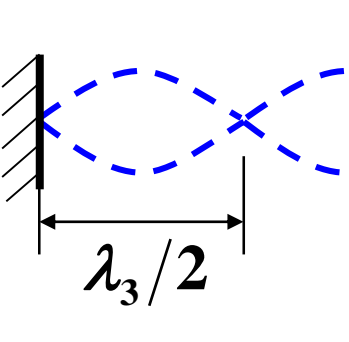
$$n=1,3,\dots$$


$n = 1$
基频
 ν_1



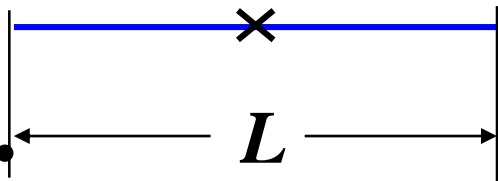
$$\frac{\lambda_1}{4}$$

$n = 3$
三次
谐频
 ν_3

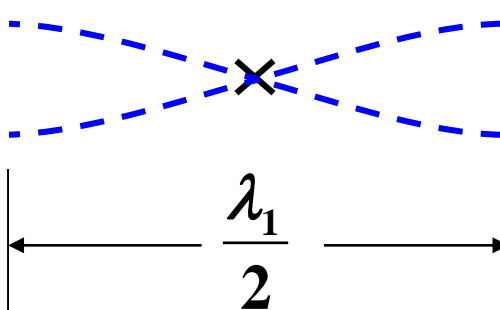


$$\frac{\lambda_3}{2}$$

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

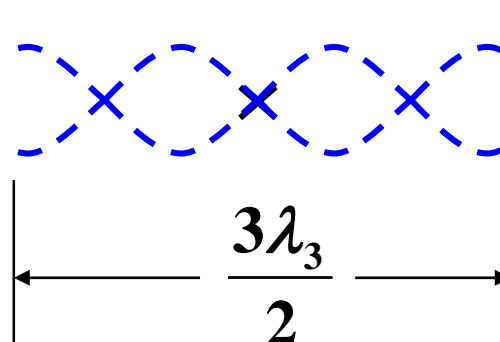
$$n=1,3,\dots$$


$n = 1$
基频
 ν_1



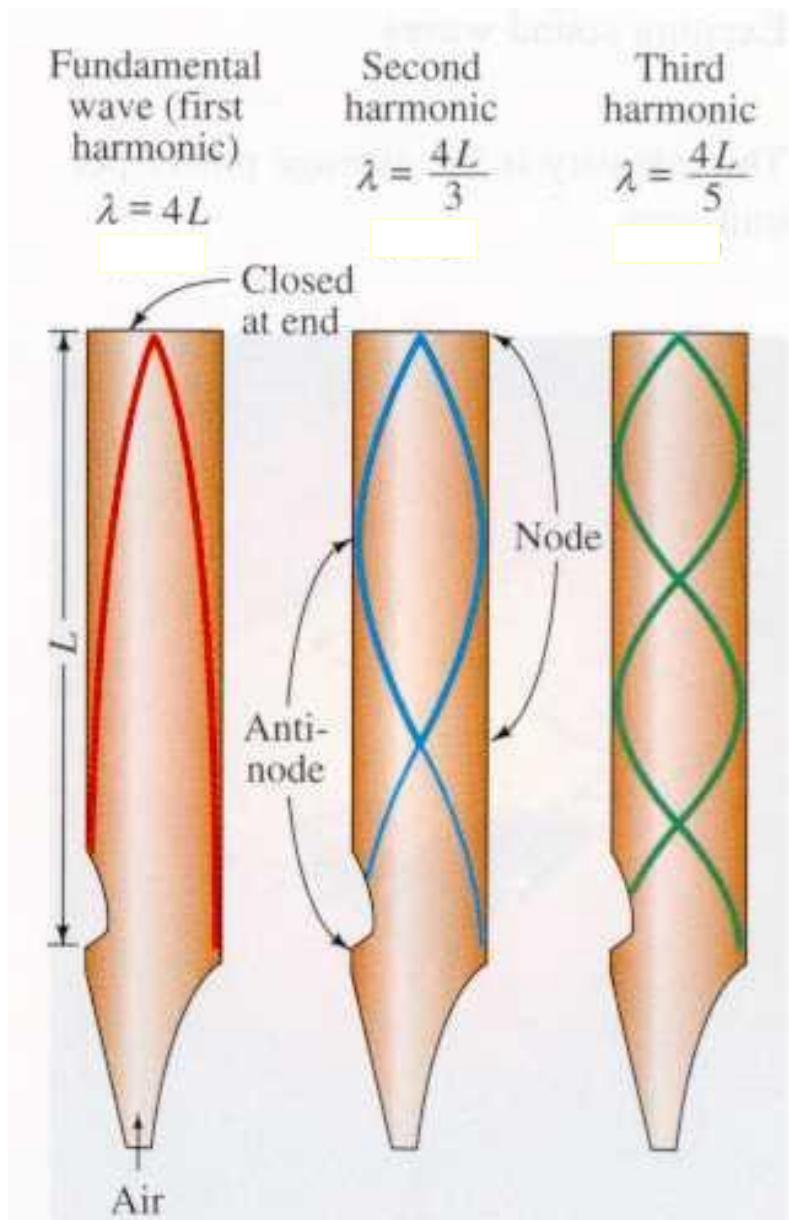
$$\frac{\lambda_1}{2}$$

$n = 3$
三次
谐频
 ν_3

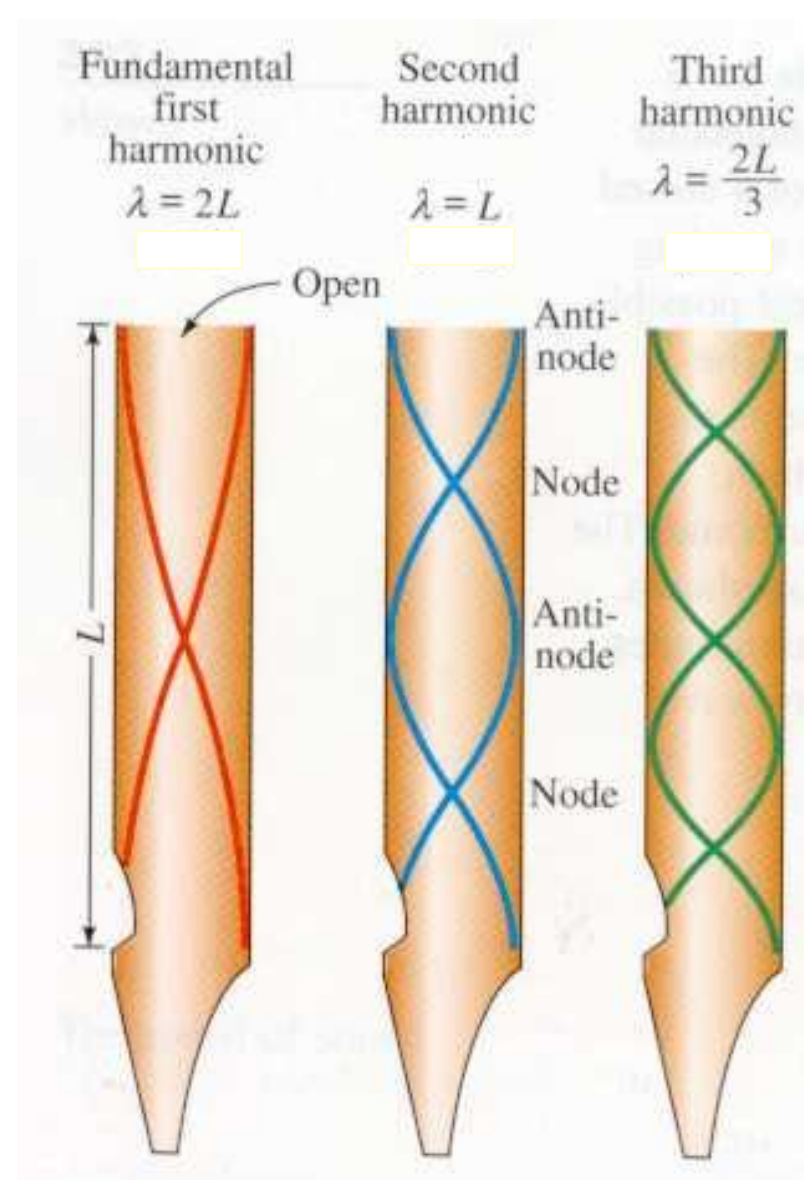


$$\frac{3\lambda_3}{2}$$

(实验演示)

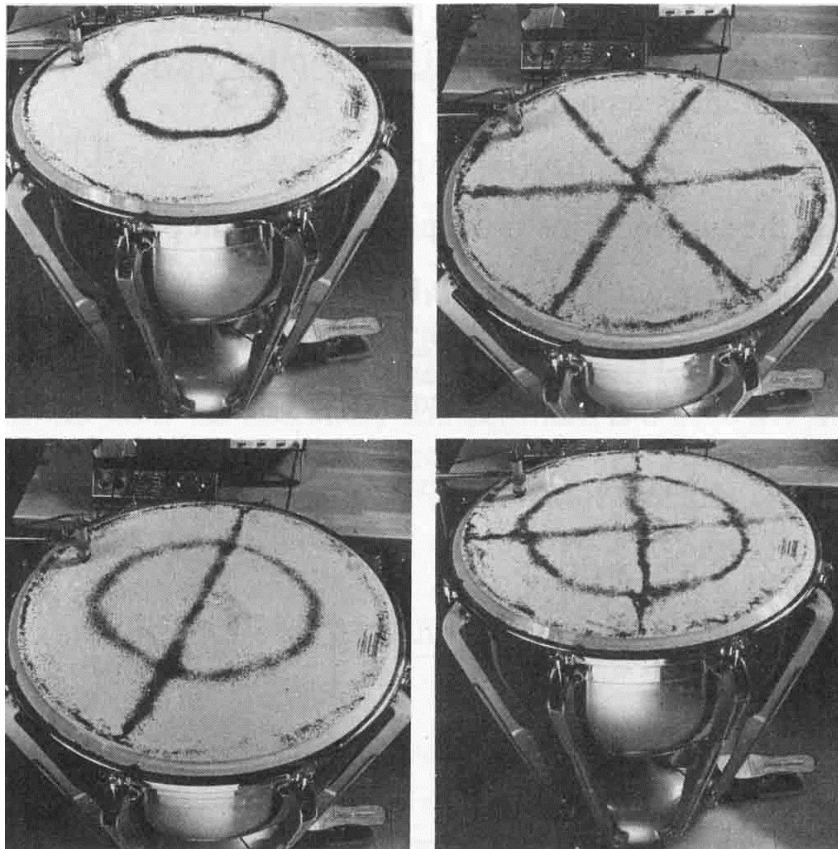
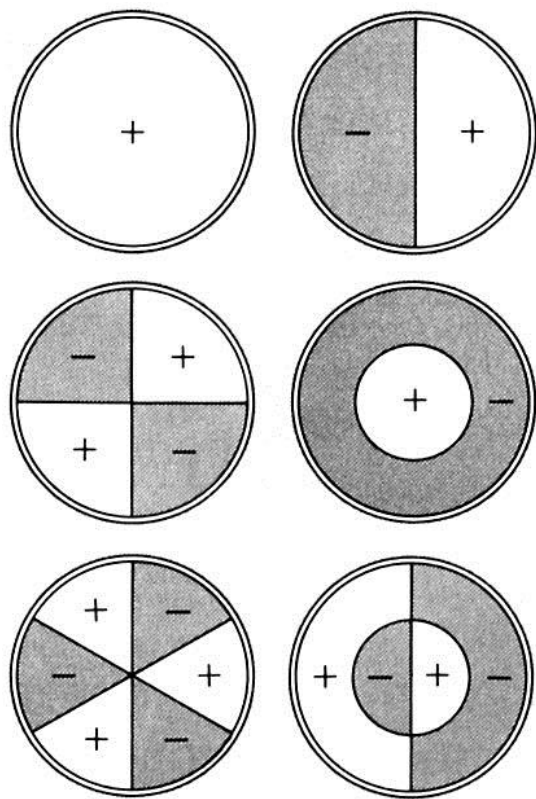


末端封闭的笛中的驻波

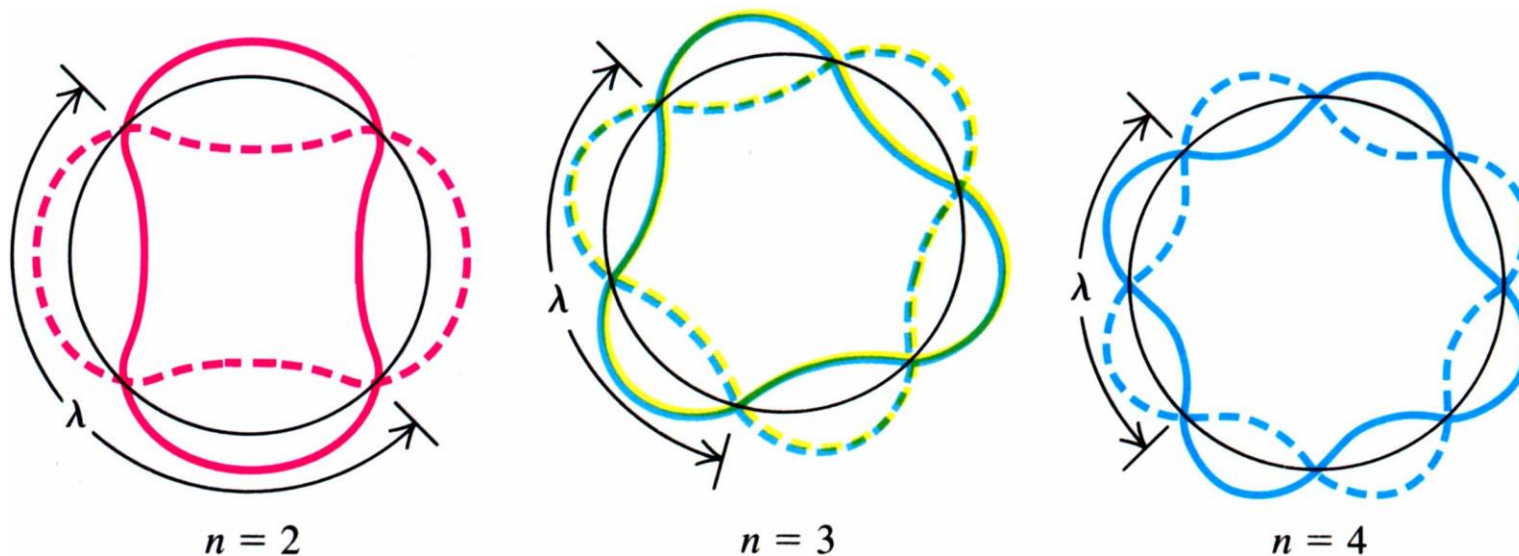


末端开放的笛中的驻波

鼓皮上的二维驻波（简正模式）



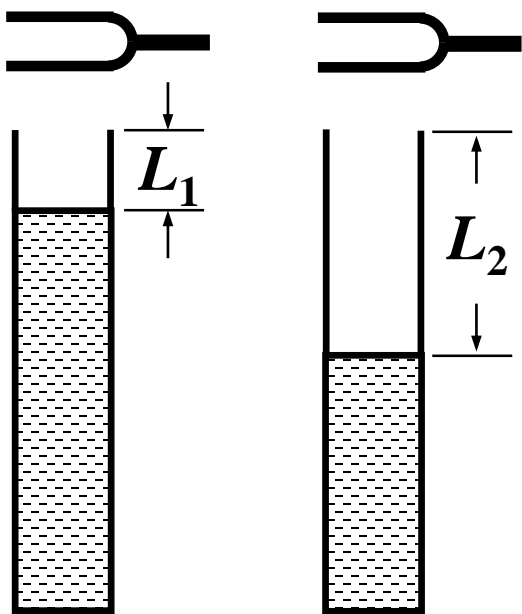
圆环弦上的驻波（简正模式）



此模型在量子力学早期是重要物理图像

（实验演示）

【例】一频率为 248.5Hz 的音叉放在盛水的细管口，连续调节水面高度，当空气柱的高度相继为 $L_1 = 0.34\text{m}$ 和 $L_2 = 1.03\text{m}$ 时发生共鸣。
求：声波在空气中的声速 u 。



解：发生共鸣时形成驻波，
管口为波腹，水面为波节。
空气柱长度满足条件：

$$L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

两次共鸣的频率不变 — 两次激发模式相同,

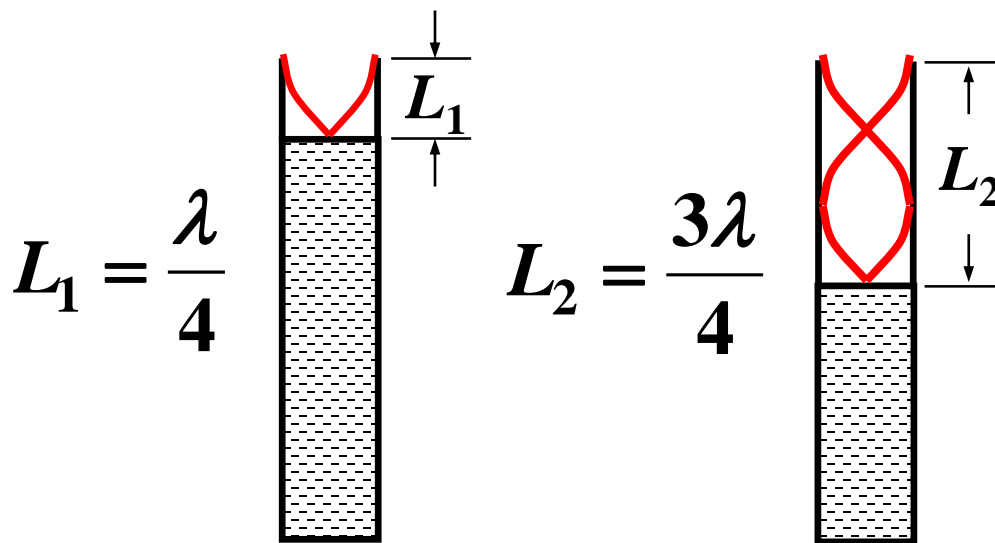
波长满足: $L_1 = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$, $L_2 = [2(n + 1) + 1]\frac{\lambda}{4}$

$$\therefore \lambda = 2(L_2 - L_1) = 1.38\text{m}, \quad n = \frac{3L_1 - L_2}{2(L_2 - L_1)} \approx 0$$

声速: $u = \lambda\nu = 1.38 \times 248.5 = 343\text{m/s}$

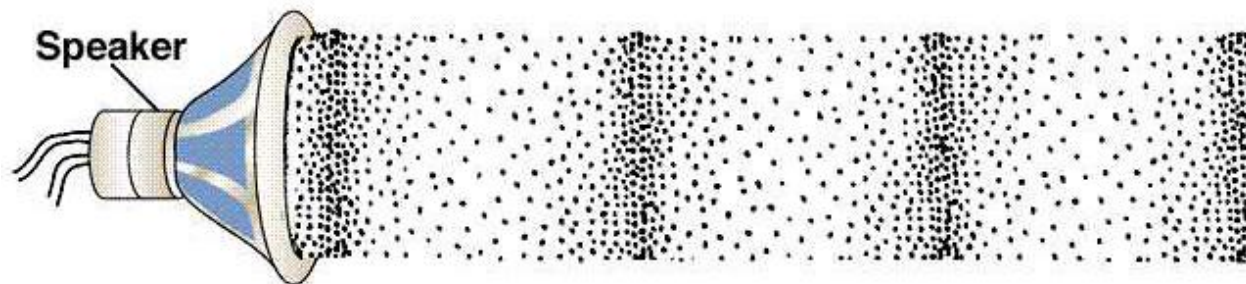
用横波示意声音
的位移纵波

对声音的压强纵
波, 需把波节和
波腹调换 (为何)



§ 8.8 声波 (sound wave)

气体或液体中的声波是疏密波，是纵波。



声压定义

有声波时的压强 p 和无声波时的压强 p_0 之差:

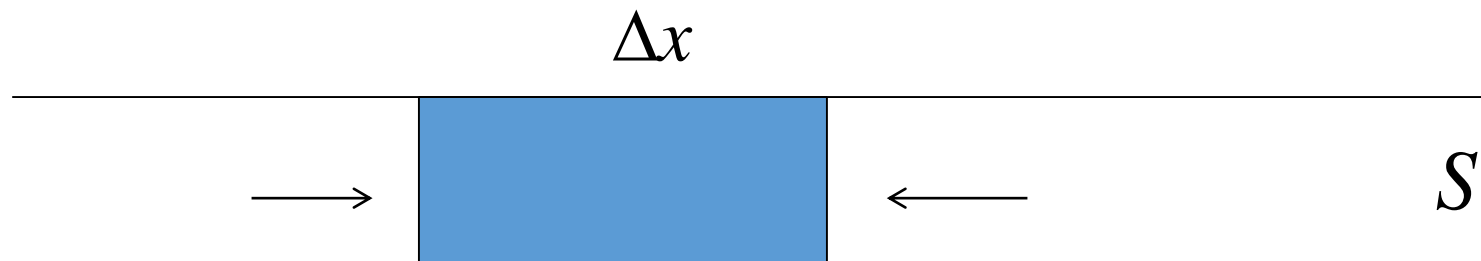
$$\Delta p = p - p_0 \begin{cases} \Delta p > 0 & \text{媒质稠密区} \\ \Delta p < 0 & \text{媒质稀疏区} \end{cases}$$

声压 (sound pressure)

$$p = p_{\text{波}} - p_{\text{静}}$$

(可正、可负)

一维模型



$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} \rightarrow \frac{F}{S} = -K \frac{\Delta l}{l} \quad \Delta p = -K \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta p = -K \frac{\partial y}{\partial x} \quad y(x, t) = A \cos \omega(t - \frac{x}{u})$$

$$\Delta p = -KA \frac{\omega}{u} \sin \omega(t - \frac{x}{u})$$

声压振幅: $p_m = \rho u A \omega$ 位移的导数

声强 (intensity of sound) $I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2$

标准声强: $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

(在1000Hz下, 这个声强人能够勉强听到)

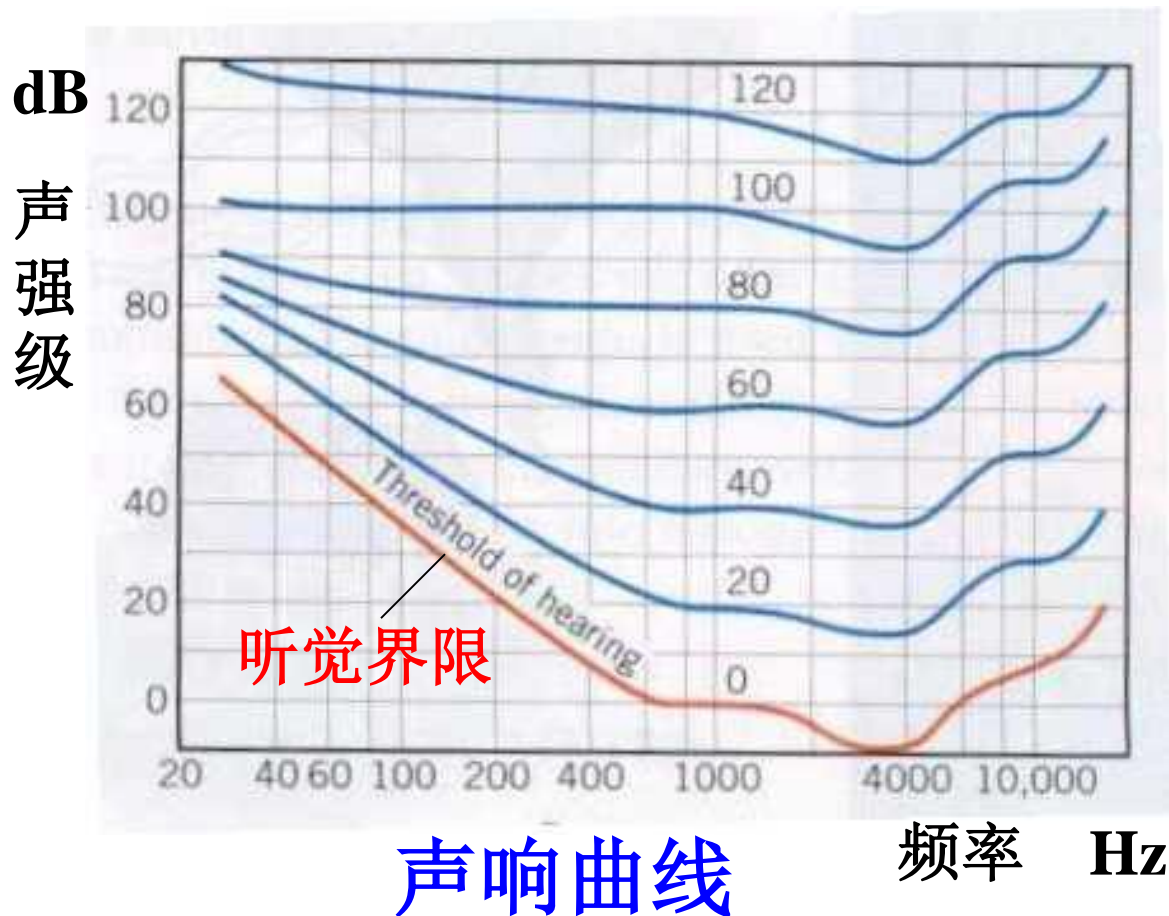
ν ~几百Hz 时, 标准声强振幅~ 10^{-10} m

声强级

(sound intensity level)

$$L = \log \frac{I}{I_0} (\text{Bel}) = 10 \log \frac{I}{I_0} (\text{dB})$$

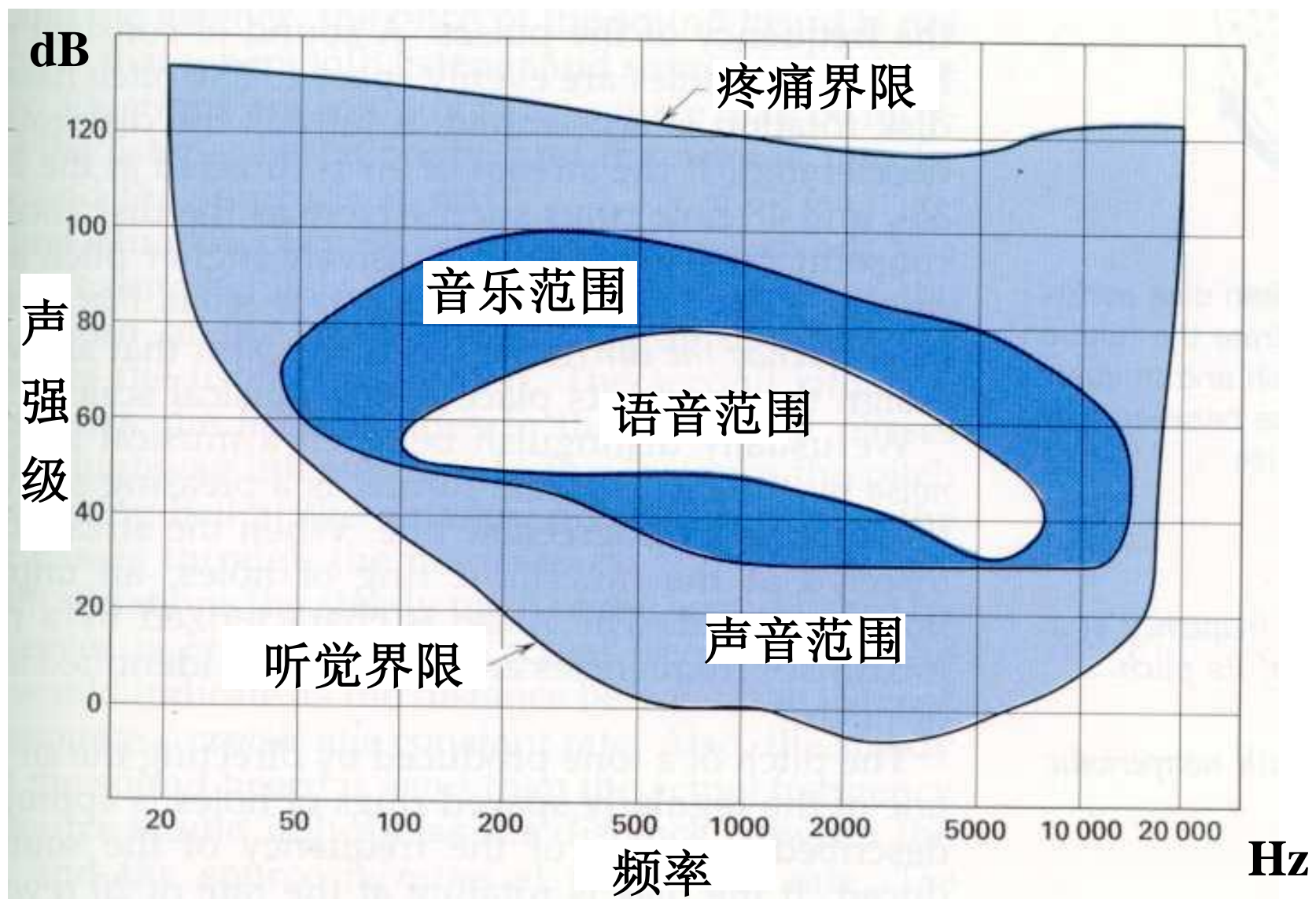
正常说话~60dB，噪声>70dB，炮声~120dB。



每条曲线描绘的是不同频率下人耳感受相同响度(几千人的测试数据)的声强级

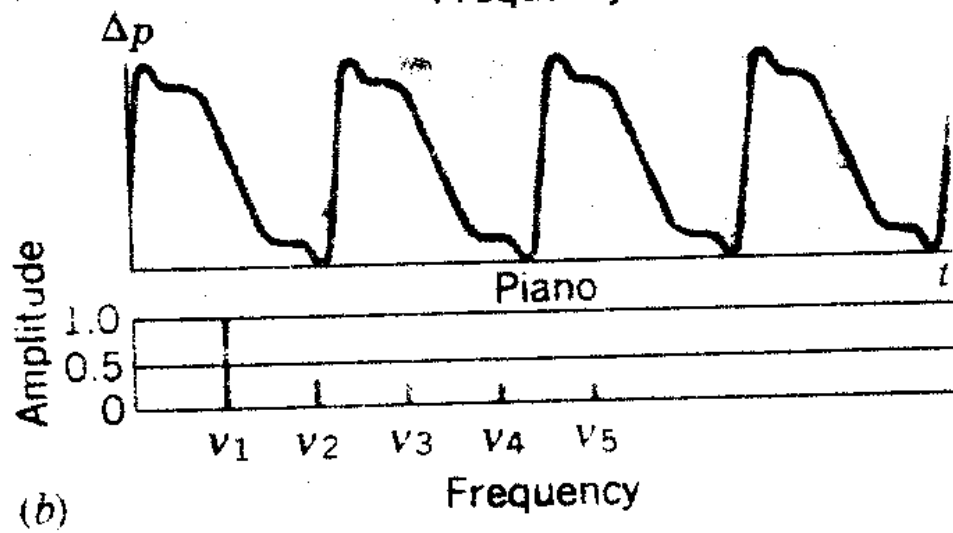
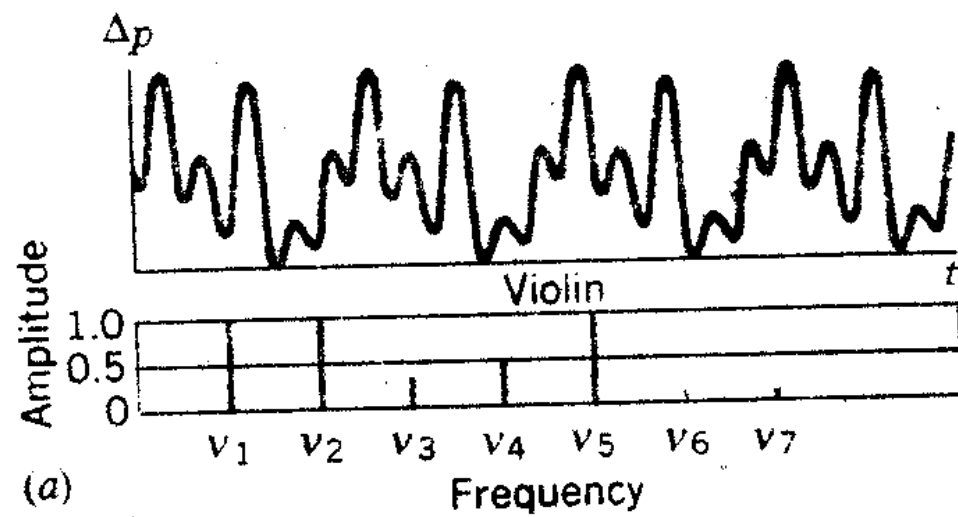
TABLE 2 SOME INTENSITIES AND SOUND LEVELS

<i>Sound</i>	<i>Intensity</i> (W/m ²)	<i>Relative</i> <i>Intensity</i> (I/I_0)	<i>Sound</i> <i>Level</i> (dB)
Threshold of hearing	1×10^{-12}	10^0	0
Rustle of leaves	1×10^{-11}	10^1	10
Whisper (at 1 m)	1×10^{-10}	10^2	20
City street, no traffic	1×10^{-9}	10^3	30
Office, classroom	1×10^{-7}	10^5	50
Normal conversation (at 1 m)	1×10^{-6}	10^6	60
Jackhammer (at 1 m)	1×10^{-3}	10^9	90
Rock group	1×10^{-1}	10^{11}	110
Threshold of pain	1	10^{12}	120
Jet engine (at 50 m)	10	10^{13}	130
Saturn rocket (at 50 m)	1×10^8	10^{20}	200



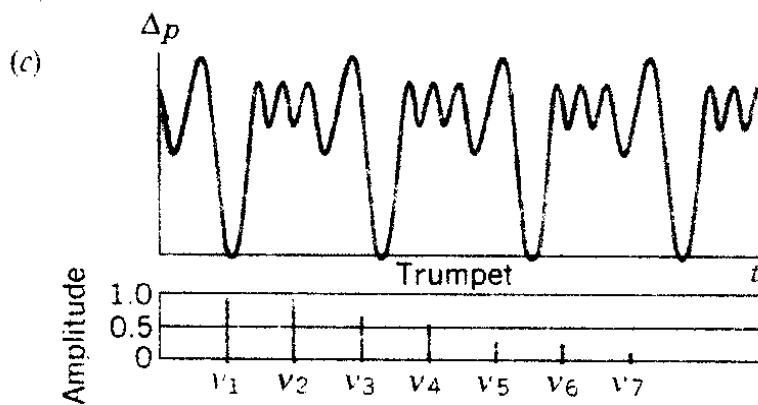
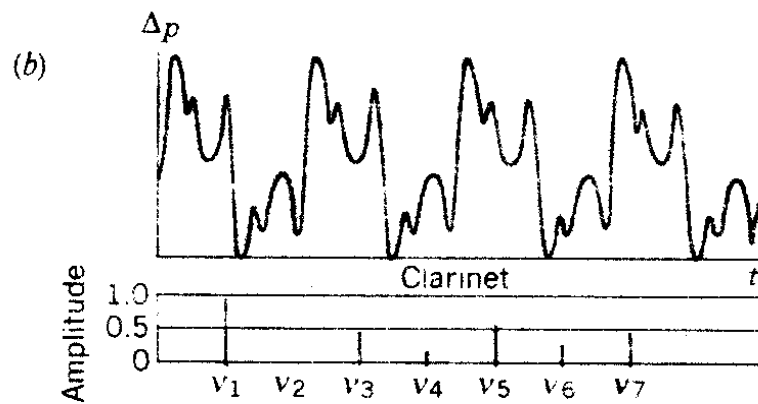
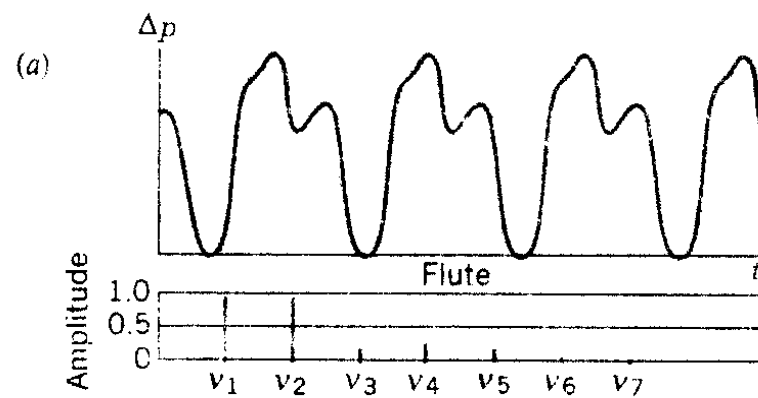
声 阈

音质与波形相关



长笛、单簧管、小号

440Hz



可闻声波： 20 ~ 20000Hz

次声波： $\nu < 20\text{Hz}$ 的声波

常见于地震、火山爆发、风暴、核爆炸等，
穿透力极强，某些对人体伤害极大。

超声波： $\nu > 20000\text{Hz}$ 的声波

特点：频率高，波长短，能量集中，有良好的束射性和方向性。

应用：超声清洗，水下定位与通讯、体外碎石、B超，D超等。

【演示】 超声喷泉

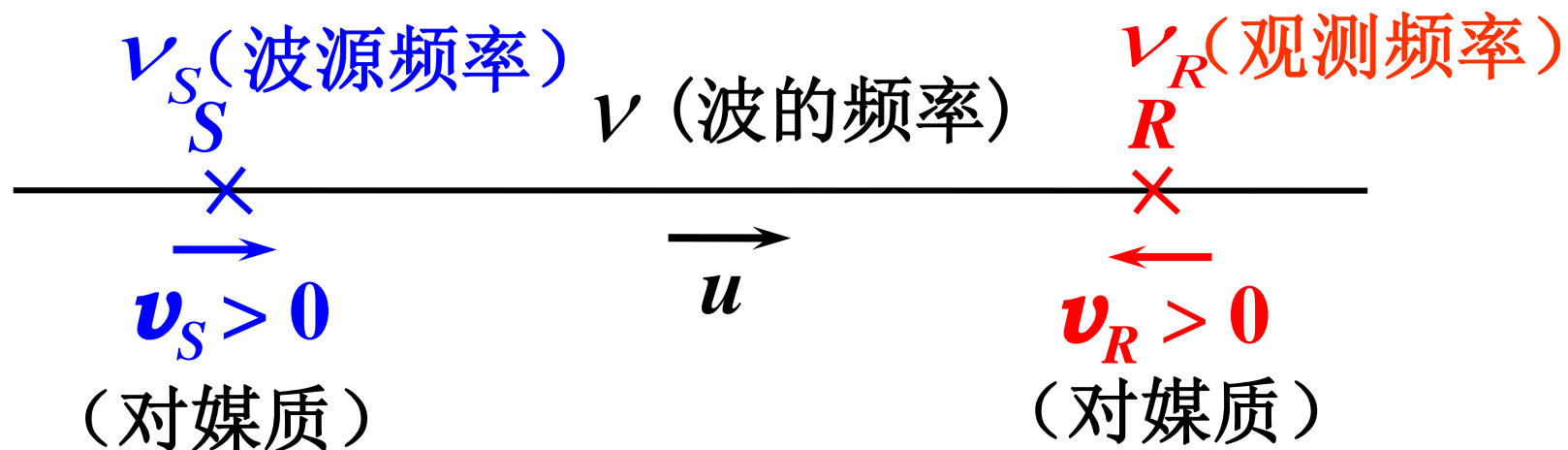


§ 8.9 多普勒效应 (Doppler effect)

多普勒效应： 由于波源和观察者的运动，而使观测的频率不同于波源频率的现象。

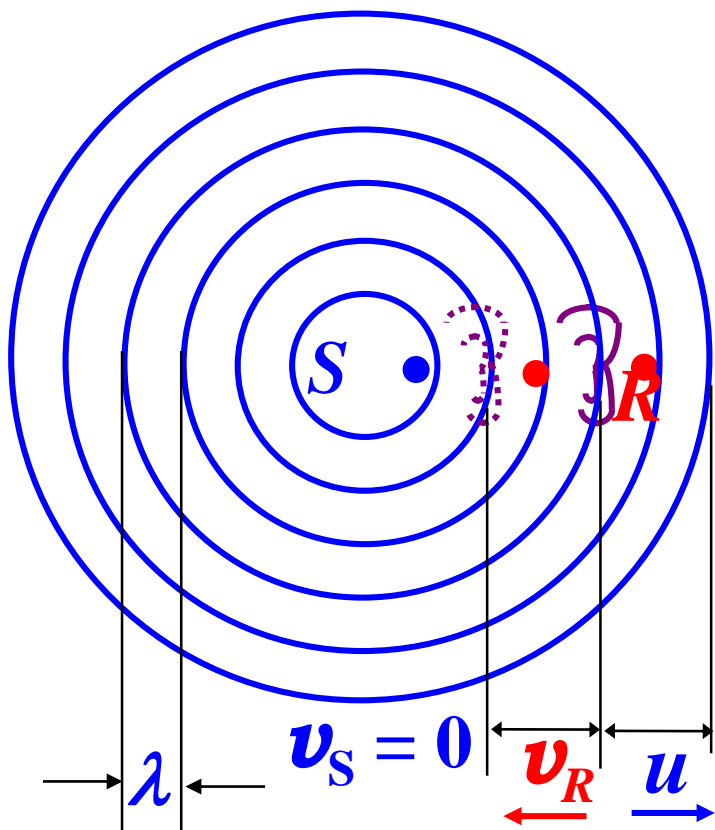
一. 机械波的多普勒效应

设 运动在波源 S 和观测者 R 的连线方向上，以二者相向运动的方向为速度的正方向。



(1) $\mathbf{v}_S = 0$, $\mathbf{v}_R \neq 0$, 媒质中波长 $\lambda = \lambda_s$

单位时间接收到完整波的个数



$$\nu_R = \frac{u + v_R}{\lambda} = \frac{u + v_R}{u} \nu_S$$

$$\left(\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{u}{\nu_S} \right)$$

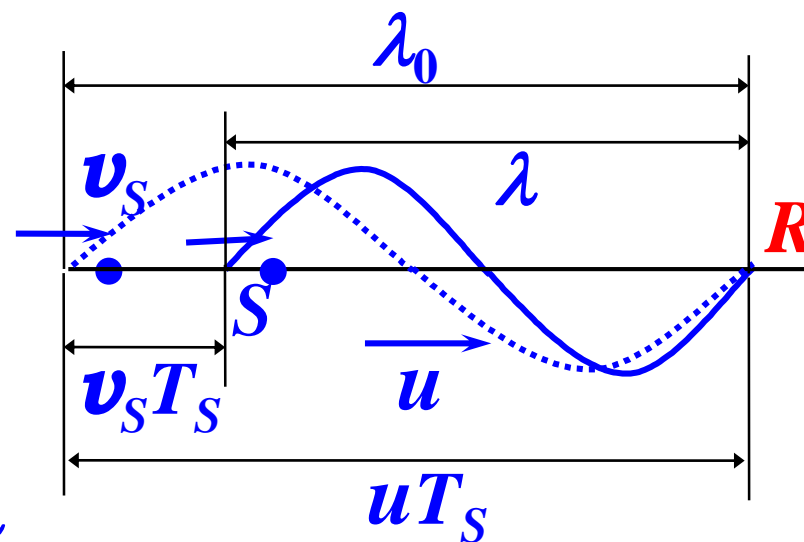
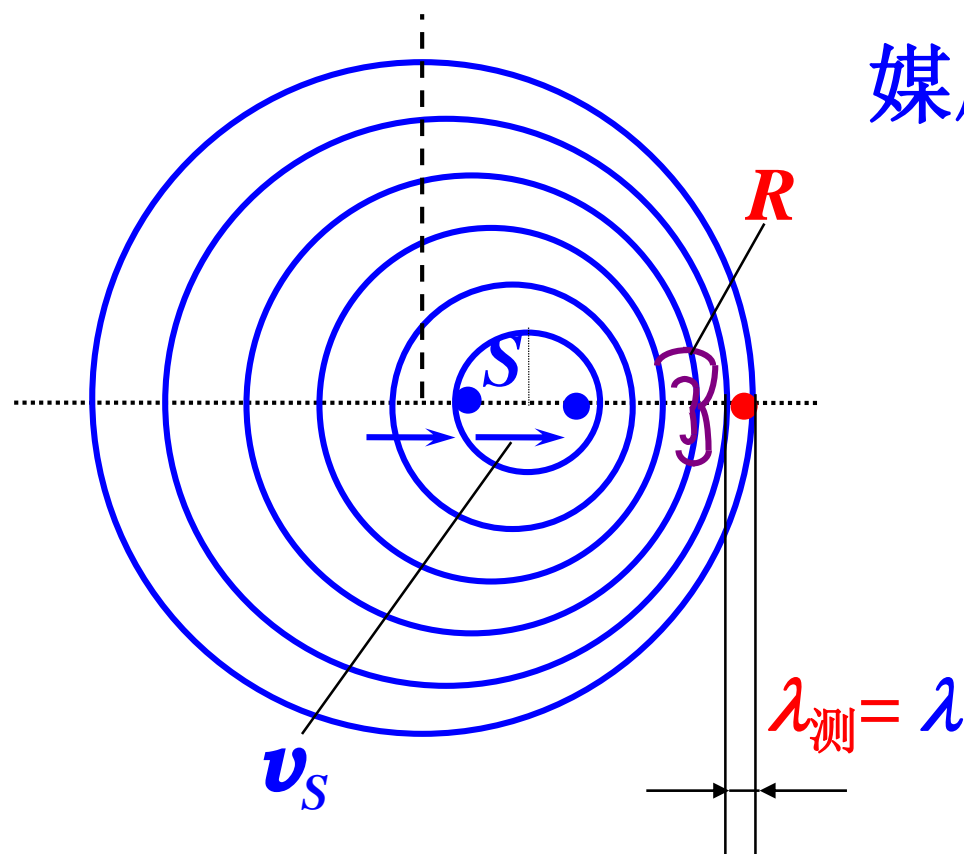
$$\mathbf{v}_R > 0 (R \text{ 接近 } S), \quad \nu_R > \nu_S$$

$$\mathbf{v}_R < 0 (R \text{ 远离 } S), \quad \nu_R < \nu_S$$

(2) $\mathbf{v}_R = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_S \neq \mathbf{0}$,

此时, $v_R = v$

媒质中波长发生变化



S 运动的前方波长缩短

$$v_R = v = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{(u - v_S)T_S} = \frac{u}{u - v_S} v_S$$



水波的多普勒效应（波源向左运动）

(3) $\boldsymbol{v}_R \neq 0$, $\boldsymbol{v}_S \neq 0$, 此时, $\boldsymbol{v}_S \neq \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v}_R$

$$\boldsymbol{v}_R = \frac{u + \boldsymbol{v}_R}{u} \boldsymbol{v} = \frac{u + \boldsymbol{v}_R}{u} \cdot \frac{u}{u - \boldsymbol{v}_S} \boldsymbol{v}_S = \frac{u + \boldsymbol{v}_R}{u - \boldsymbol{v}_S} \boldsymbol{v}_S$$

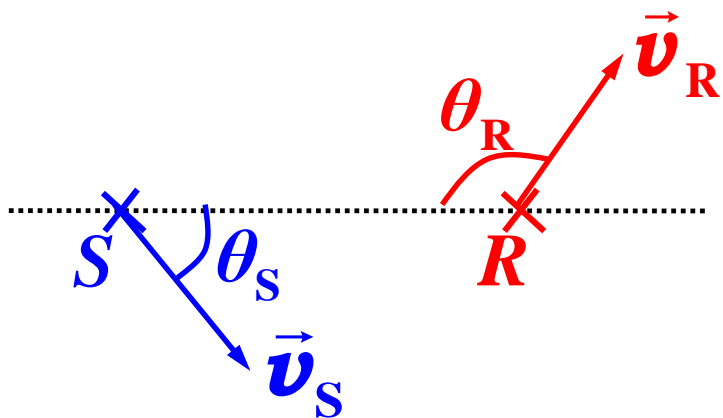
当 $\boldsymbol{v}_R = -\boldsymbol{v}_S$ 时 (无相对运动) , $\boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{v}_S$

注意:

1. S 动 R 不动 $\longrightarrow \lambda \neq \lambda_0 \longrightarrow \boldsymbol{v}_R \neq \boldsymbol{v}_S$
 R 动 S 不动 $\xrightarrow[\lambda = \lambda_0]{\text{波对 } R \text{ 速度不是 } u} \boldsymbol{v}_R \neq \boldsymbol{v}_S$ } 本质不同

2. \boldsymbol{v}_R 、 \boldsymbol{v}_S 是对媒质而言, 且以相向为正。

(4) 机械波的多普勒效应的一般形式



θ_R 是 \vec{v}_R 与 \overrightarrow{RS} 之间夹角

θ_S 是 \vec{v}_S 与 \overrightarrow{SR} 之间夹角

$$\nu_R = \frac{u + |\mathbf{v}_R| \cdot \cos \theta_R}{u - |\mathbf{v}_S| \cdot \cos \theta_S} \nu_S$$

无相对运动情形: $\vec{v}_R = \vec{v}_S$, $\theta_R + \theta_S = \pi$, $\nu_R = \nu_S$

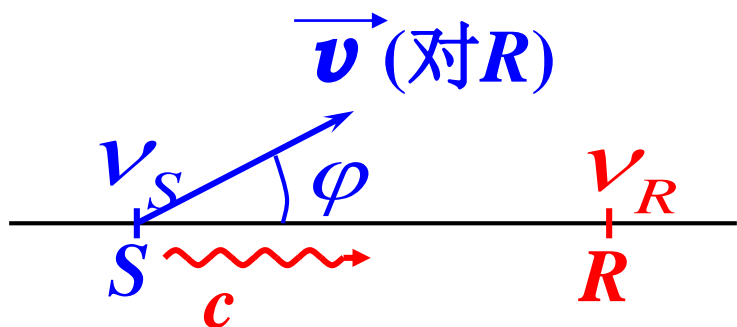
横向运动情形: $\theta_R = \theta_S = \pi/2$, $\nu_R = \nu_S$

机械波不存在横向多普勒效应

二. 电磁波的多普勒效应

电磁波不同于机械波，不需要媒质。

由相对论可导出：



$$\nu_R = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c - v \cos \phi} \nu_S$$

当 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 时，仍有 $\nu_R \neq \nu_S$ — 横向多普勒效应

纵向多普勒效应

光源和接收器相对接近时， $\theta = 0$ ：

$$\nu_R = \sqrt{\frac{c + |\mathbf{v}|}{c - |\mathbf{v}|}} \nu_S \quad \text{频率增大}$$

光源和接收器相对远离时， $\theta = \pi$ ：

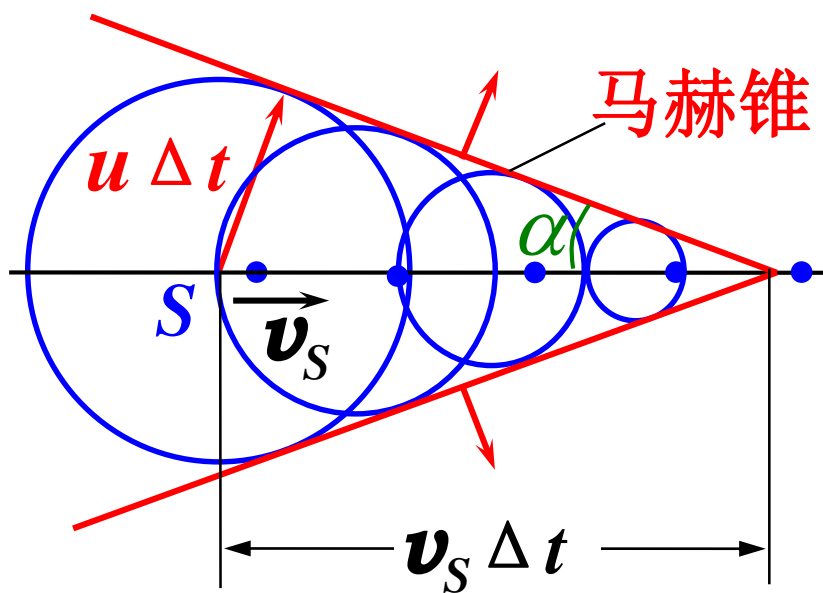
$$\nu_R = \sqrt{\frac{c - |\mathbf{v}|}{c + |\mathbf{v}|}} \nu_S \quad \text{频率减小}$$

频率变化与机械波的情形一样。

多普勒红移（宇宙“大爆炸”论）

三. 激波

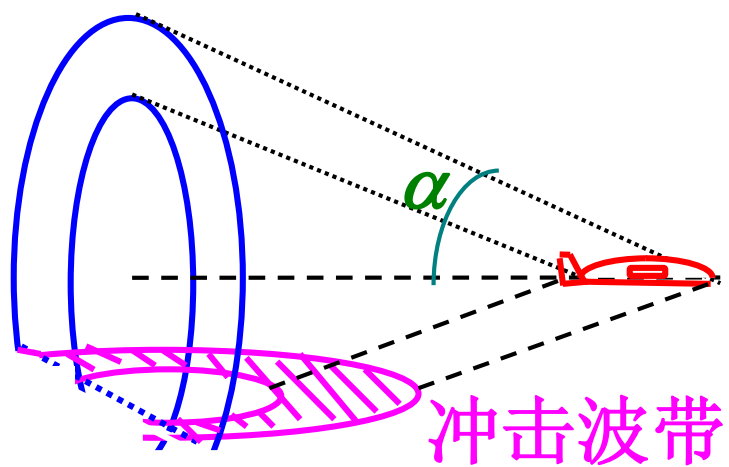
$v_S > u$ 时, $v_R < 0$ —后发出的波面



将超越先发出的波面,
形成锥形波阵面——
(冲击波) (shock wave)

$$\sin \alpha = \frac{u}{v_S}$$

$\frac{v_S}{u}$ —马赫数(Mach number)



对超音速飞机的最小
飞行高度要有一定限制。



物体穿越音障后, 周围压强陡降, 潮湿的天气, 有水汽凝结





超音速的子弹
在空气中形成
的激波

(马赫数为2)

海啸(tsunami)——地震可能引发海面上冲击波，到达海岸的时候形成海啸（ground sea）。

电磁激波——切连柯夫辐射(Cherenkov radiation):

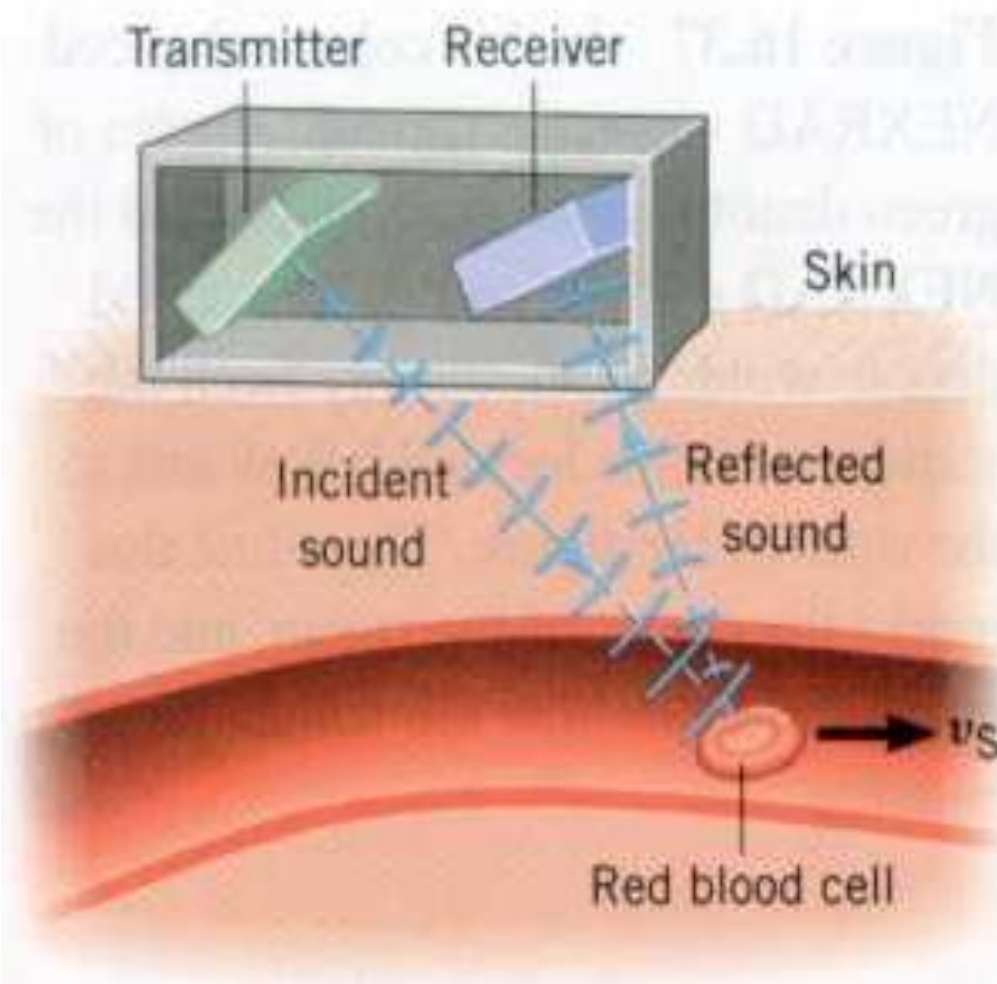
高能带电粒子在介质中的速度超过光在介质中的速度时，将发生锥形的电磁波——切连柯夫辐射。

四. 多普勒效应的应用:

- ▲ 测速（固、液、气）
- ▲ 多普勒红移（“大爆炸”宇宙论）
- ▲ 卫星跟踪（书P239）



警察用多普勒测速仪测速

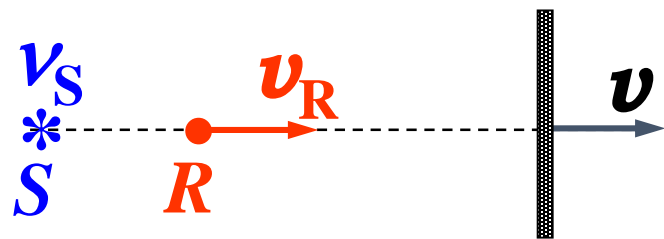


超声多普勒效应测血流速



【例】 一静止声源 S 的频率 $\nu_S = 300\text{Hz}$ ，声速 $u = 330\text{m/s}$ ，观察者 R 以速度 $\nu_R = 60\text{m/s}$ 向右运动，反射壁以速度 $\nu = 100\text{m/s}$ 也向右运动。

求： R 测得的拍频？



解： R 收到的声源发射波的频率：

$$\nu_R = \frac{u - \nu_R}{u} \nu_S \quad (\text{各量为绝对值，下同})$$

反射壁收到的声源发射波的频率：

$$\nu' = \frac{u - \nu}{u} \nu_S$$

R 收到的反射壁反射波的频率:

$$\nu'_R = \frac{u + \mathbf{v}_R}{u + \mathbf{v}} \nu' = \frac{u + \mathbf{v}_R}{u + \mathbf{v}} \cdot \frac{u - \mathbf{v}}{u} \nu_S$$

拍频: $|\nu_R - \nu'_R| = \left| 2 \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_R}{u + \mathbf{v}} \nu_S \right|$

$$= 2 \times \frac{100 - 60}{330 + 100} \times 300$$

$$\approx 55.8 \text{ Hz}$$

【思考】 其它条件不变, 换为测得拍频 55.8Hz, 则反射壁的速度是多少?



8.10 色散 复波和群速度

1. 色散 (dispersion)

介质中的波速，只与介质的性质有关，而与波的性质无关。

实际上，在有些介质中，波速除了与介质有关外，不同频率简谐波的波速也不同。

这种波速与波的频率（波长）有关的现象称为色散。

色散介质：能产生色散现象的介质

无色散介质：不产生色散现象的介质

注意：对**线性介质**，当波从一种介质进入另一种介质后，**频率不变，波速或波长变。**

例如：**光从空气进入玻璃，频率不变，波速或波长变。**

色散规律由**色散关系**描述。**色散关系**是指对同一种介质，频率 ω 对波数 k 的依赖关系 $\omega(k)$ ，其形式**取决于波与这种物质相互作用的具体机制**。色散关系也常表示为 $u(k)$ 或 $u(\lambda)$ 的关系。

例如，深水表面重力波的色散关系：

$$\omega = \sqrt{gk} \quad \text{或} \quad u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

传播于1维刚性棒的横波的色散关系：

$$\omega = ak^2 \quad \text{或} \quad u = ak$$

正常色散： $\frac{du}{dk} < 0$ 或 $\frac{du}{d\lambda} > 0$

反常色散： $\frac{du}{dk} > 0$ 或 $\frac{du}{d\lambda} < 0$

例如对上面的深水表面重力波：

$$\frac{du}{d\lambda} = \sqrt{\frac{g}{8\pi\lambda}} > 0, \quad \text{正常色散}$$

而1维刚性棒的横波： $\frac{du}{dk} = a > 0$ ，反常色散

2. 复波和群速度 (group velocity)

复波：若干不同频率的简谐波叠加而成的合成波
——非简谐波

如，两个**频率相近、相速度相近**的简谐波：

$$y_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$y_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

ω_1 、 ω_2 较大，且 $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$

两简谐波的相速度： $u_1 = \frac{\omega_1}{k_1}$, $u_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$

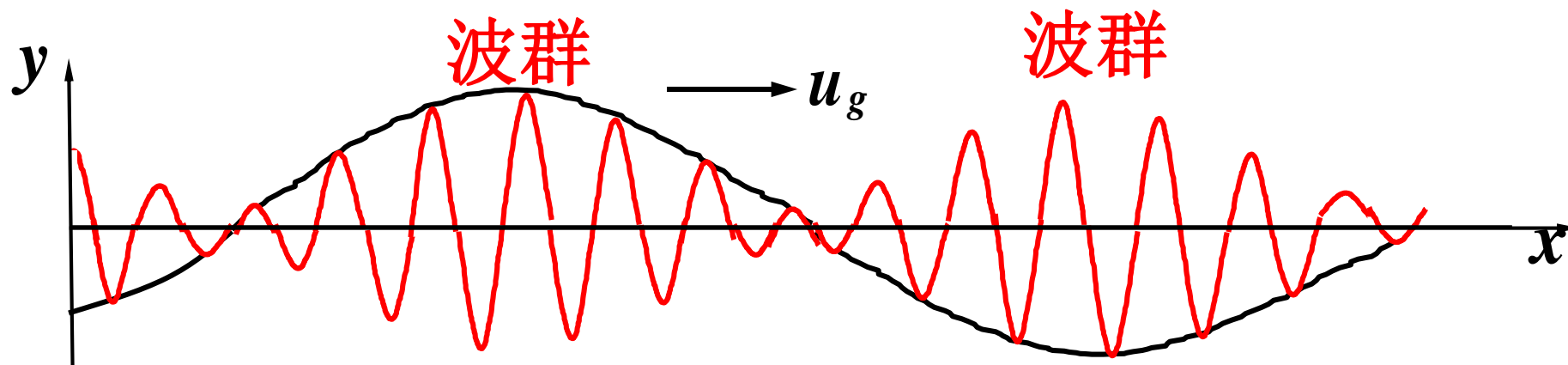
合成的复波:

$$y = y_1 + y_2 \\ = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cdot \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}x)$$

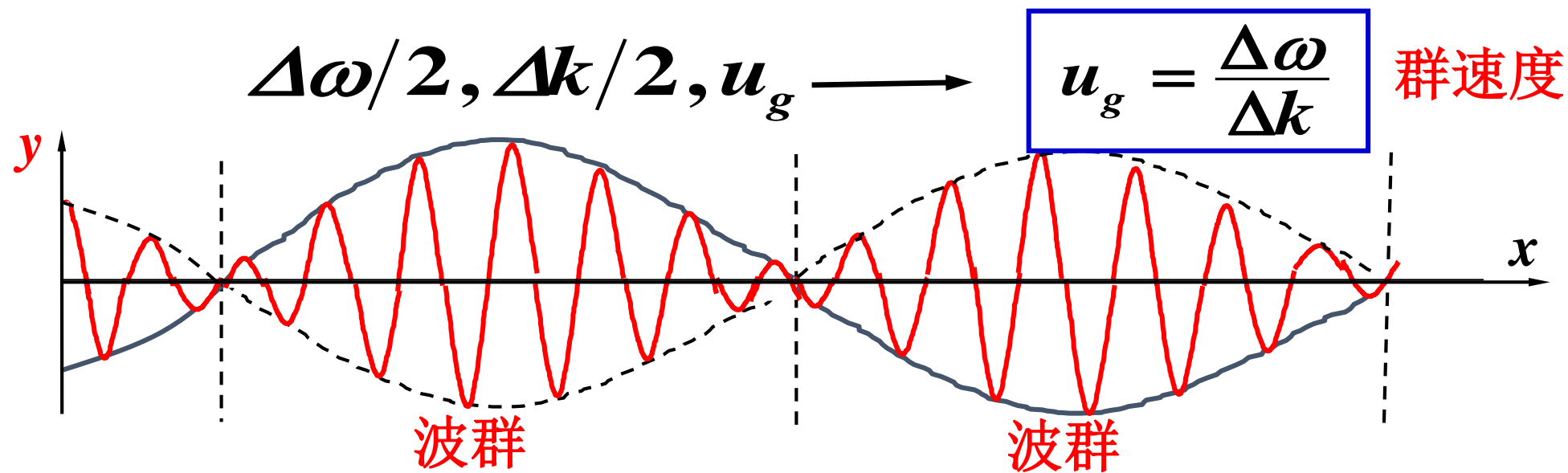
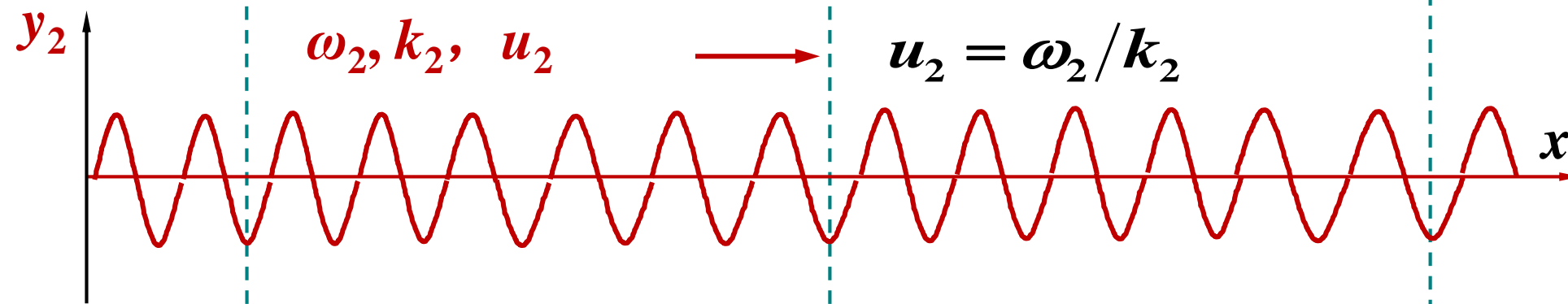
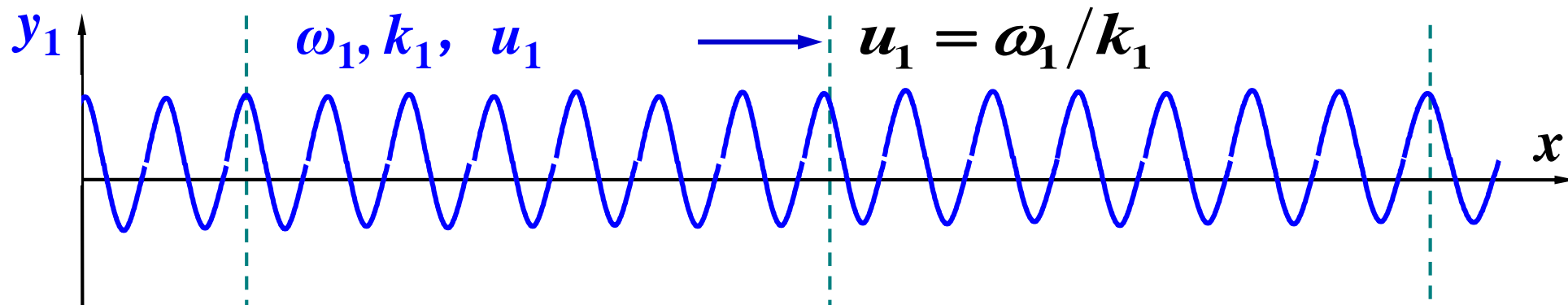
载波

其中: $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $\Delta k = k_1 - k_2$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$



u_g ——群速度: 波群、波包或信号的传播速度



群速度的定义：

$$u_g = \frac{d\omega}{dk}, \text{ 相速度: } u = \frac{\omega}{k}$$

由 $\omega = uk$, $\lambda = 2\pi/k$, 得

$$u_g = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

对于无色散介质，相速为常数， $du/d\lambda = 0$
，有 $u_g = u$ （无色散介质）

——在无色散介质中，群速度等于相速度。

在色散介质中 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\lambda \neq 0$ ，复波的群速度不等于相速度

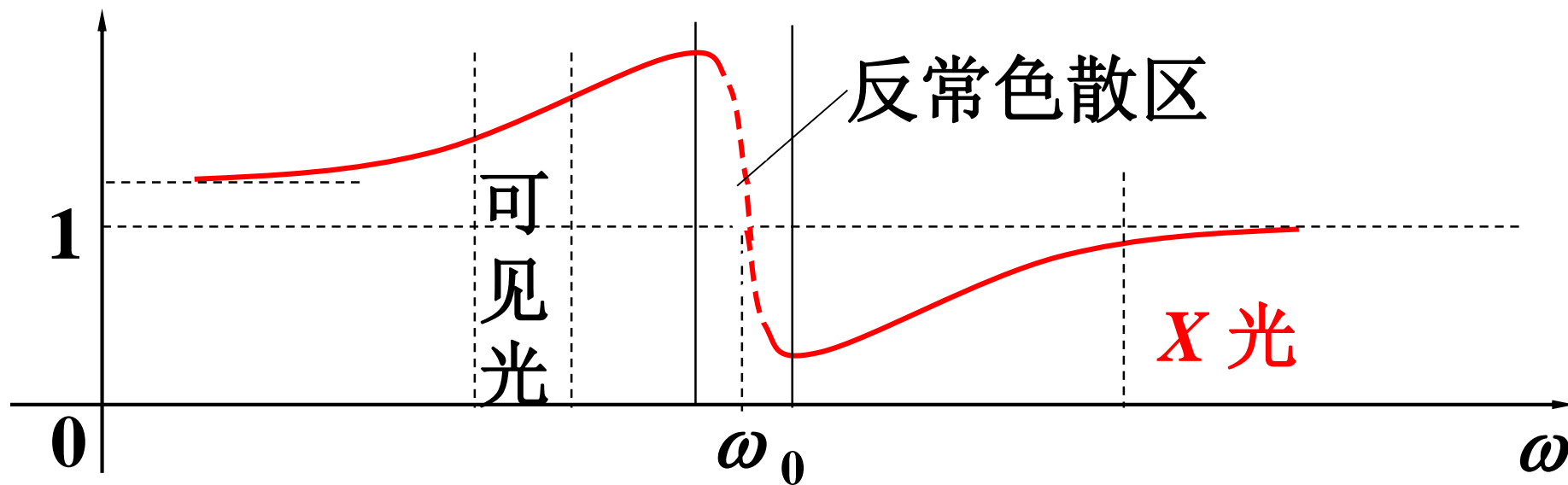
$$u_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = u - \lambda \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} \neq u$$

色散越严重，即 $\left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} \right|$ 越大， u_g 与 u 相差越大。

色散引起波包扩散。色散严重→波包扩散→消失，群速的概念将失去意义。

只有在 $\left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} \right|$ 较小的情况下，群速才有意义，波包才稳定。

$n_{\text{玻璃}}(c/u)$



玻璃对光的色散曲线

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

对 X 光来说，玻璃的折射率 <1 ，用于导管 X 光学。

Δ^* § 8.11 孤子

在非线性介质中，相速度和振幅有关，非线性效应有可能使波包被挤压，从而与色散引起的波包扩散相抵消，形成形状不变的孤立波，称做孤立子或孤子。

孤子在信号传播中有重要应用。

