数值分析与算法

课程项目

题　目：	Riemann-Zeta Function的性质与应用
姓　名：	高嘉伟
学　号：	2020011073
日　期：	2022年12月29日

第一题 级数求和

1 求解方法

由 Riemann-Zeta function的性质:

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2\cdot(2n)!}$$

代入得到:

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \\
&= \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(4) &= \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots \\
&= \frac{\pi^4}{90} \\
\zeta(6) &= \frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots \\
&= \frac{\pi^6}{945} \\
\zeta(8) &= \frac{1}{1^8}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\cdots \\
&= \frac{\pi^8}{9450}
\end{aligned}$$

则只需使用计算机完成级数求和, 再根据上述性质转换到π的值即可.

此外, 还需要证明这个无穷级数求和是收敛的. 以$x=2$为例:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} &< 1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)} \\
&= 1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\
&= 1+1-\frac{1}{N} \xrightarrow{N\to\infty} 2
\end{aligned}$$

则级数求和收敛, 其他级数可通过放缩证明收敛性.

2 误差分析

2.1 方法误差

方法误差主要发生在用有限求和来代替无穷求和时, 即级数截断后的余项.

记迭代N步后的方法误差为$\Delta_N(x)$,

则:

$$\begin{aligned}
\Delta_N(x) &= \zeta(x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x} \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^x}
\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{n^x}$ 对 n 而言单调递减, 故可使用积分放缩:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} dt \\
&= \int_{N}^{\infty} \frac{1}{t^x} dt \\
&= \frac{1}{(x-1)N^{x-1}}
\end{aligned}
$$

若使用$x=2$,则有

$$\Delta_N(2) < \frac{1}{N}$$

若要求较高精度, 则需要较大的 N 才能达到精度目标, 而若使用 $\zeta(2)$ 的话收敛速度太慢.

根据提示, 选取$\zeta(8)$公式进行计算, 则有:

$$\Delta_N(8) < \frac{1}{7N^7}$$

此时有

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

即

$$\pi = (9450\zeta(8))^{\frac{1}{8}}$$

分析误差: 令$f(x) = (9450x)^{1/8}$, 则有

$$
\begin{aligned}
\Delta_\pi &\leqslant \max |f'(x)| \Delta_N(8) \\
&= \max \left| \frac{9450}{8} (9450x)^{-\frac{7}{8}} \right| \Delta_N(8)
\end{aligned}
$$

2.2 舍入误差

假设无穷级数中的每一项保留到小数点后m位,

即

$$|\delta| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-m}$$

设求和N项, 舍入误差为δ_N, 则有:

$$|\delta_N| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\delta| \leqslant \frac{N}{2} \times 10^{-m}$$

选取$\zeta(8)$公式进行计算, 令$f(x) = (9450x)^{1/8}$, 则同理有

$$
\begin{aligned}
\delta_\pi &\leqslant \max |f'(x)| \delta_N \\
&= \max \left| \frac{9450}{8} (9450x)^{-\frac{7}{8}} \right| \delta_N
\end{aligned}
$$

2.3 误差分配

假设要求精度达到10^{-r}, 则这里将误差一分为2, 即:

- $\Delta_\pi \leqslant 0.5 \times 10^{-r}$
- $\delta_\pi \leqslant 0.5 \times 10^{-r}$

首先通过方法误差确定N,

由:

$$\begin{aligned}\Delta_\pi &\leqslant \max\left|f'(x)\right|\Delta_N(8)\\ &= \max\left|\frac{9450}{8}(9450x)^{-\frac{7}{8}}\right|\Delta_N(8)\end{aligned}$$

$$\Delta_N(8) < \frac{1}{7N^7}$$

并取

$$\max\left|\frac{9450}{8}(9450x)^{-\frac{7}{8}}\right| = 0.4$$

并将其记作A.

则

$$N \geqslant (\frac{2}{7}A \times 10^r)^{1/7}$$

取满足条件的最小整数即可.

其次确定舍入误差.

由

$$\begin{aligned}\delta_\pi &\leqslant \max\left|f'(x)\right|\delta_N\\ &= \max\left|\frac{9450}{8}(9450x)^{-\frac{7}{8}}\right|\delta_N\end{aligned}$$

与

$$|\delta_N| \leqslant \sum_{n=1}^{N}|\delta| \leqslant \frac{N}{2} \times 10^{-m}$$

可得

$$m \geqslant r + \lg(AN)$$

3 求解结果

题目中要求精确到小数点后20位, 即取$r = 20$.

则

$$
\begin{aligned}
N &\geqslant (\frac{2}{7}A \times 10^r)^{1/7} \\
&= 527.9
\end{aligned}
$$

$$
m \geqslant r + \lg(AN) = 22.3
$$

取$N = 528$即可满足要求.

对于$m = 22.3$, 对应76.4 bit 的精确度. 普通的`float`数据类型无法满足要求, 故在代码中通过

```
gmpy2.get_context().precision = 77
```

设置精确度.

计算得结果为

$$
3.14159265358979323846 7672
$$

保留20位小数, 获得结果为

$$
3.14159265358979323846
$$

符合预期, 与查得的精确值结果相同.

第二题 方程求根

1 求解方法

求解方程

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}=a$$

在本题中使用Newton法进行迭代

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

其中

$$f(x_n)=\zeta(x_n)-a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_n}}-a$$

$$f'(x_n)=\zeta'(x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\ln n}{n^{x_n}}$$

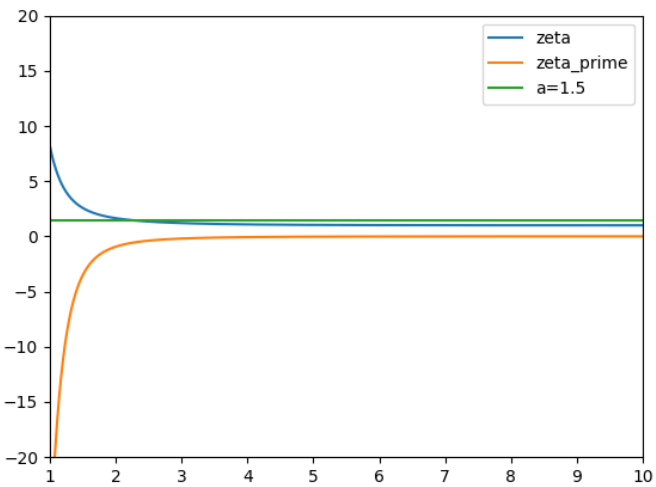
而对于

$$\varphi(x)=x-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}=x-\frac{\zeta\left(x_n\right)-a}{\zeta'\left(x_n\right)}$$

有

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=1-\frac{\left(f'\left(x_n\right)\right)^2-f\left(x_n\right)\cdot f''\left(x_n\right)}{\left(f'\left(x_n\right)\right)^2}\\&=\frac{f\left(x_n\right)\cdot f''\left(x_n\right)}{\left(f'\left(x_n\right)\right)^2}\end{aligned}$$

使用Python绘制$f\left(x_n\right)$, $f'\left(x_n\right)$图像辅助判断:



则通过图像我们粗略可知, 若$a=1.5$, 则有$x^*\approx 2.1$, 且在邻域$[2,2.25]$上, 有:

- $\varphi'(x)$ 在 x^* 附近连续
- $\left|\varphi'\left(x^*\right)\right|<1$

通过理论分析, 对于$a>1$, 上述条件均成立. 也即, $x_{n+1}=\varphi\left(x_n\right)$ 在 x^* 附近具有局部收敛性均成立.

则通过选取附近的x_0, 牛顿法最终会收敛到真值.

2 误差分析

2.1 方法误差

方法误差主要来源于:

- 牛顿法带来的方法误差. 这里我们采取事后估计法来估计.
- 计算$f(x)$与$f'(x)$时截断带来的方法误差.

事后估计法:

选择初始区间 $[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 记区间上 $\max|\varphi'(x)|=L$, 则有:

$$|x_k-x^*| \leq \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$$

计算$f(x)$与$f'(x)$时截断带来的方法误差:

为方便起见, 使用无穷求和时令求解$f(x)$与$f'(x)$的求和步数N相同.

则:

$$\begin{aligned}\Delta_N(x_n) &= \zeta(x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{x_n}} \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_n}}\end{aligned}$$

使用积分放缩:

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_n}} &< \sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^{x_n}}dt \\ &= \int_{N}^{\infty}\frac{1}{t^{x_n}}dt \\ &= \frac{1}{(x_n-1)N^{x_n-1}}\end{aligned}$$

由于取小区间$[x^*-\delta, x^*+\delta]=[2, 2.25]$, 则可放缩

$$\frac{1}{(x_n-1)N^{x_n-1}} < \frac{1}{N}$$

对于$f'(x)$, 有:

$$
\begin{aligned}
|\Delta'_N(x_n)| &= |\zeta'(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n^{x_n}}| \\
&= |\sum_{n=N+1}^{\infty} -\frac{\ln n}{n^{x_n}}| \\
&= |\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x_n}}|
\end{aligned}
$$

而由于$\frac{\ln n}{n^{x_n}}$在N较大时单调递减, 则:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x_n}} &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t^{x_n}} dt \\
&= \int_{N}^{\infty} \frac{\ln t}{t^{x_n}} dt \\
&= \frac{1 - \ln N + x_n \ln N}{(x_n - 1)^2 N^{x_n - 1}}
\end{aligned}
$$

由于取小区间$[x^* - \delta, x^* + \delta] = [2, 2.25]$, 则可放缩

$$
\begin{aligned}
\frac{1 - \ln N + x_n \ln N}{(x_n - 1)^2 N^{x_n - 1}} &< \frac{\ln N + 1}{(x_n - 1) N^{x_n - 1}} \\
&< \frac{1 + \ln N}{N}
\end{aligned}
$$

则在计算

$$
x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}
$$

时, 假设x_n准确无误, 分析此步$\Delta_N(x_n)$与$\Delta'_N(x_n)$带来的影响(也即截断误差), 则有:

$$
\begin{aligned}
|\Delta x_{n+1}| &\leqslant \max \left| \left(\frac{\partial F}{\partial f(x_n)} \right) \right| |\Delta_N(x_n)| \\
&+ \max \left| \left(\frac{\partial F}{\partial f'(x_n)} \right) \right| |\Delta'_N(x_n)| \\
&= \max \left| -\frac{1}{f'(x_n)} \right| |\Delta_N(x_n)| \\
&+ \max \left| \frac{f(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right| |\Delta'_N(x_n)|
\end{aligned}
$$

设

$$
\max \left| -\frac{1}{f'(x_n)} \right| = M_1
$$

$$
\max \left| \frac{f(x_n)}{\left(f'(x_n)\right)^2} \right| = M_2
$$

则可得

$$
|\Delta x_{n+1}| \leqslant \frac{M_1}{N} + \frac{(1 + \ln N) M_2}{N}
$$

由于这是局部截断误差, 则可算得累积误差为:

$$
|\Delta x_{n+1}| \leqslant |\Delta x_n| + \frac{M_1}{N} + \frac{(1 + \ln N) M_2}{N}
$$

则有:

$$
|\Delta x_n| \leqslant n \left(\frac{M_1}{N} + \frac{(1 + \ln N) M_2}{N} \right)
$$

2.2 舍入误差

由

$$x_{n+1}=\varphi\left(x_n\right)$$

则

$$\left|\delta_{n+1}\right| \leq \max\left|\varphi'(x)\right| \cdot \left|\delta_n\right| + \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}$$

记

$$\max\left|\varphi'(x)\right| = L$$

则可解得累积误差:

$$\delta_{n+1} \leqslant (L^{n+1}-1)\frac{1}{2}\frac{1}{L-1}10^{-m}$$

2.3 误差分配

在误差分配中, 主要有三个参数需要决定:

- 牛顿法迭代次数n
- 求解$\zeta(x)$和$\zeta'(x)$的求和次数N. 为方便起见,这里取成了一样的
- 舍入误差系数m

假设要求精度达到10^{-r}, 则这里将误差上限一分为3, 即:

- 事后估计法的误差: $\Delta_1 x_n \leqslant 0.5\times 10^{-r}$
- 求解$\zeta(x)$截断误差: $\Delta_2 x_n \leqslant 0.25\times 10^{-r}$
- 舍入误差: $\delta x_n \leqslant 0.25\times 10^{-r}$

3 求解结果

题目中要求以 $a=1.5$ 为例, 给出 x 精确到 4 位小数的求解结果, 即要求精度达到10^{-4}.

首先确定迭代次数n.

记

$$\max\left|\varphi'(x)\right| = L$$

$$\max\left|-\frac{1}{f'\left(x_n\right)}\right| = M_1$$

$$\max\left|\frac{f\left(x_n\right)}{\left(f'\left(x_n\right)\right)^2}\right| = M_2$$

当迭代到第n步时:

由事后估计法:

$$\left|\Delta_1 x_n\right| \leq \frac{1}{1-L}\left|x_{n+1}-x_n\right|$$

即

$$\frac{1}{1-L}|x_{n+1}-x_n| \leqslant 0.5\times 10^{-r}$$

时停止迭代.

在小区间$[2,2.25]$上:

$$L=0.3237$$

则当

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant 3.382\times 10^{-5}$$

时停止迭代.

选取$x_0=2.2$, 则解得

$$x=2.1853$$

在$n=3$后停止迭代

由$\zeta(x)$和$\zeta'(x)$截断误差表达式:

$$|\Delta_2 x_n| \leqslant n\left(\frac{M_1}{N}+\frac{(1+\ln N)M_2}{N}\right)$$

可确定N.

在小区间$[2,2.25]$上:

解得:

$$M_1=1.6951$$

$$M_2=0.0941$$

由

$$n\left(\frac{M_1}{N}+\frac{(1+\ln N)M_2}{N}\right) \leqslant 0.25\times 10^{-4}$$

解得当$N \geqslant 500000$时, 一定满足精度要求.注意到这是一个很粗糙的放缩, 但可保证**一定满足精度要求**.

舍入误差:

$$\delta_{n+1} \leqslant (L^{n+1}-1)\frac{1}{2}\frac{1}{L-1}10^{-m}$$

由

$$(L^{n+1}-1)\frac{1}{2}\frac{1}{L-1}10^{-m} \leqslant 0.25\times 10^{-4}$$

解得$m \geqslant 4.47$.

取$m = 5$, 则对应bit位为17位. 由于python自带float数据结构的精度足够满足要求, 故不再在程序中显式调整精度.

第三题 求解定积分

1 求解方法

求解

$$I=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t-1}dt$$

经过试验, 此积分较难求解, 主要由于$\frac{t^{x-1}}{e^t-1}$在$t\to 0$时分子分母均趋近于0.

则根据提示, 有:

$$I=\zeta(x)\Gamma(x)$$

而又有

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t}dt$$

故求解$I(x)$时, 只需求解$\zeta(x)\Gamma(x)$即可.

其中, $\zeta(x)$我们可以通过无穷级数求和求解.

而对于$\Gamma(x)$的无穷积分, 可以将其分为两部分, 即

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t}dt=\int_0^A \frac{t^{x-1}}{e^t}dt+\int_A^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t}dt$$

其中, A为需要选定的常数, 选定标准为$\int_A^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t}dt$不超过误差上界. 我们只需计算下列积分即可:

$$\int_0^A \frac{t^{x-1}}{e^t}dt$$

采用复化梯形公式进行数值积分.

将$[0,A]$区间进行n等分, 则有:

$$h=\frac{A-0}{n}$$

则令$f(t)=\frac{t^{x-1}}{e^t}$, 则有:

$$\begin{aligned}\int_0^A f(t)dt&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt\\&\approx\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f\left(t_k\right)+f\left(t_{k+1}\right)\right]\\&=\frac{h}{2}\left[f(0)+2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(t_k\right)+f(A)\right]\end{aligned}$$

2 误差分析

2.1 方法误差

方法误差主要来自三处:

- 通过无穷级数求和求解$\zeta(x)$的时候的截断误差Δ_N, 由设置的求和项数N决定
- 在求解$\Gamma(x)$时的积分截断误差Δ_A, 由设置的积分上限A决定.
- 复化梯形公式带来的方法误差

求和截断误差:

与之前分析的结果相同

$$\begin{aligned}\Delta_N(x) &= \zeta(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{xn}} \\ &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} dt \\ &= \int_{N}^{\infty} \frac{1}{t^x} dt \\ &= \frac{1}{(x-1)N^{x-1}}\end{aligned}$$

积分截断误差:

由于A较大, 则此时有$e^t > t^{10}$, 则有:

$$\int_A^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t} dt < \int_A^{\infty} t^{x-11} dt = \frac{A^{x-10}}{10-x}$$

复化梯形公式带来的误差:

存在$\eta_k \in (x_k, x_{k+1})$, 使复化梯形公式余项表示为:

$$R[f] = \sum_{k=0}^{n-1} R_k(f) = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{h^3}{12} f''(\eta_k)$$

则

$$f''(x) = \frac{t^{x-3}\left(t^2 + (2-2x)t + (x-1)(x-2)\right)}{e^t}$$

可得

$$f''(x) \in C[0, A]$$

则一定存在一个 $\eta \in [0, A]$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) = n f''(\eta), \eta \in [0, A]$$

则

$$R[f] = -\frac{n \cdot h^3}{12} f''(\eta) = -\frac{Ah^2}{12} f''(\eta)$$

而由于

$$I = \zeta(x)\Gamma(x)$$

则

$$\begin{aligned} |\Delta I| \leqslant \max|\frac{\partial I}{\partial \zeta}| \cdot |\Delta\zeta| \\ + \max|\frac{\partial I}{\partial \Gamma}| \cdot |\Delta\Gamma| \\ = \max|\Gamma| \cdot |\Delta\zeta| \\ + \max|\zeta| \cdot |\Delta\Gamma| \end{aligned}$$

2.2 舍入误差

舍入误差主要来源为:

- 在计算$\zeta(x)$时, 求和时每一项带来的舍入误差.
- 在计算$\Gamma(x)$时, 复化梯形公式求和时带来的舍入误差.

假设每一项保留到小数点后m位,

即

$$|\delta| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-m}$$

设求解$\zeta(x)$时求和N项, 舍入误差为δ_N, 则有:

$$|\delta_N| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\delta| \leqslant \frac{N}{2} \times 10^{-m}$$

设计算$\Gamma(x)$时共n个子区间, 则共有$2 + 2 \times (n-1) = 2n$次计算.

则

$$|\delta_n| \leqslant hn|\delta| \leqslant \frac{A}{2} \times 10^{-m}$$

而由于

$$I = \zeta(x)\Gamma(x)$$

则

$$\begin{aligned} |\delta I| \leqslant \max|\frac{\partial I}{\partial \zeta}| \cdot |\delta\zeta| \\ + \max|\frac{\partial I}{\partial \Gamma}| \cdot |\delta\Gamma| \\ = \max|\Gamma| \cdot |\delta\zeta| \\ + \max|\zeta| \cdot |\delta\Gamma| \end{aligned}$$

2.3 误差分配

在误差分配中, 主要有三个参数需要决定:

- 求解$\Gamma(x)$的积分上限A
- 复化梯形公式划分的区间数n
- 求解$\zeta(x)$的求和次数N.

- 舍入误差系数m

其中, 前三项对应方法误差; 最后一项对应舍入误差.

假设要求精度达到10^{-r}, 则这里将误差上限一分为2, 即:

- 方法误差: $\Delta \leqslant 0.5 \times 10^{-r}$
- 舍入误差: $\delta \leqslant 0.5 \times 10^{-r}$

3 求解结果

本题要求以$x = 3.5$为例, 给出I精确到4位小数的求解结果.

则有

$$\Delta_N(x) < \frac{1}{2.5N^{2.5}}$$

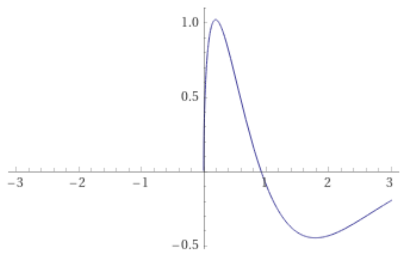
$$\Delta_A(x) < \frac{1}{6.5A^{6.5}}$$

$$R[f] = -\frac{n \cdot h^3}{12} f''(\eta) = -\frac{Ah^2}{12} f''(\eta)$$

其中

$$f''(3.5) = \frac{t^{0.5}\left(t^2 - 5t + 3.75\right)}{e^t}$$

绘制函数图像辅助分析:



通过计算, 可得

$$f''(3.5) < 2$$

则

$$|R[f]| < \frac{A^3}{6n^2}$$

而又由于

$$\max|\Gamma(3.5)| < 3.5$$

$$\max|\zeta(3.5)| < 1.5$$

则

$$|\Delta I| \leqslant 3.5 \times \frac{1}{2.5N^{2.5}} + 1.5 \times (\frac{1}{6.5A^{6.5}} + \frac{A^3}{6n^2})$$

不妨取

- $N = 10000$
- $A = 200$
- $n = 250000$

则有

$$|\Delta I| \leqslant 0.32 \times 10^{-4}$$

满足方法误差精度要求

而对于舍入误差,

$$|\delta I| \leqslant 3.5 \times \frac{N}{2} \times 10^{-m} + 1.5 \times \frac{A}{2} \times 10^{-m}$$

则当$N = 10000$, $A = 200$时, Python 中 `float` 精度为 53 bit, 转换为十进制大约可保证 $m = 15$ 的精度, 则此时

$$|\delta I| \leqslant 3.5 \times \frac{N}{2} \times 10^{-m} + 1.5 \times \frac{A}{2} \times 10^{-m} < 1.77 \times 10^{-11}$$

满足误差分配的要求.

故使用计算机求解, 结果为

$$I = 3.7445$$

第四题 求解微分方程

1　求解方法

在本题中, 我们使用改进欧拉法进行计算:

预测:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

校正:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]$$

其中, $f(x_n, y_n) = \zeta(y_n)$, 我们根据之前级数求和的结果进行估算.

2　误差分析

2.1　方法误差

同“第二题 方程求根”中的一样, 方法误差主要来源于两项:

- 改进欧拉法带来的误差
- 在改进欧拉法中每一步计算时, 由于截断$\zeta(y)$的无穷级数求和所带来的误差

改进欧拉法带来的误差:

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{n+1} & \le (1+hM)\Delta_n + \frac{L}{2}h^2 \\ \Delta_{n+1} & \le \Delta_n + \frac{h}{2}M\Delta_n + \frac{h}{2}M\bar{\Delta}_{n+1} + \frac{T\cdot h^3}{12} \end{cases}$$

则可得

$$\Delta_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\Delta_n + \left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3$$

其中:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le M, \left|y^{(2)}(x)\right| \le L, \left|y^{(3)}(x)\right| \le T$$

求解这些常数的显式表达:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \zeta'(y)$$

$$\begin{aligned} y^{(2)}(x) &= \frac{dy'}{dx} \\ &= \frac{df(x,y)}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}f \\ &= \zeta'(y)\zeta(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) &= \frac{dy^{(2)}}{dx} \\ &= (\zeta''(y)\zeta(y) + \zeta'(y)^2)\zeta(y) \\ &= \zeta''(y)\zeta(y)^2 + \zeta'(y)^2\zeta(y) \end{aligned}$$

截断无穷级数求和所带来的误差:

设计算$\zeta(y)$时无穷求和的截取步数为N步.

则:

$$\begin{aligned}\Delta_N(y_n) &= \zeta(y_n) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{y_n}} \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{y_n}}\end{aligned}$$

使用积分放缩:

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{y_n}} &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^{y_n}} dt \\ &= \int_{N}^{\infty} \frac{1}{t^{y_n}} dt \\ &= \frac{1}{(y_n-1)N^{y_n-1}} \\ &< \frac{1}{N}\end{aligned}$$

则考虑计算ζ函数带来的方法误差为:

$$\begin{cases}\bar{\Delta}_{n+1} & \leq (1+hM)\Delta_n + \frac{L}{2}h^2 + h\Delta_N \\ \Delta_{n+1} & \leq \Delta_n + \frac{h}{2}M\Delta_n + \frac{h}{2}M\bar{\Delta}_{n+1} + \frac{T\cdot h^3}{12} + h\Delta_N\end{cases}$$

则可得:

$$\Delta_{n+1} \leq \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\Delta_n + \left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3 + (1 + \frac{hM}{2})h\Delta_N$$

则累积误差:

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &\leqslant \left(\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^{n+1} - 1\right) \times \frac{\left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3 + \left(1 + \frac{hM}{2}\right)h\Delta_N}{hM + \frac{h^2}{2}M^2} \\ &\leqslant \left(\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^{n+1} - 1\right) \times \left(\frac{\left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3}{hM + \frac{h^2}{2}M^2} + \frac{\left(1 + \frac{hM}{2}\right)h\Delta_N}{hM + \frac{h^2}{2}M^2}\right) \\ &\leqslant \left(\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^{n+1} - 1\right) \times \left(\frac{\left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3}{hM + \frac{h^2}{2}M^2} + \frac{\Delta_N}{M}\right)\end{aligned}$$

其中, 当$n \to \infty$时, $\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^{n+1} - 1$接近一个和$e$有关的常数.

$\frac{\left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3}{hM + \frac{h^2}{2}M^2}$为改进欧拉法的累积方法误差, 收敛速度为$O(h^2)$

$\frac{\Delta_N}{M}$为计算$\zeta(y)$引入的误差.

2.2 舍入误差

舍入误差:

$$\begin{cases}\bar{\delta}_{n+1} \leq (1+hM)\delta_n + \frac{1}{2}\cdot 10^{-m} \\ \delta_{n+1} \leq \delta_n + \frac{h}{2}M\delta_n + \frac{h}{2}M\bar{\delta}_{n+1} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-m}\end{cases}$$

可得:

$$\delta_{n+1} \leqslant \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\delta_n + \left(1 + \frac{hM}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}$$

考虑到在计算ζ函数时的舍入误差$|\delta_N|$, 其中由“第一题 级数求和”中的结果可知:

$$|\delta_N| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\delta| \leqslant \frac{N}{2} \times 10^{-m}$$

则舍入误差公式变为:

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{n+1} \leq (1 + hM)\delta_n + \frac{1}{2} \cdot 10^{-m} + h\left|\delta_N\right| \\ \delta_{n+1} \leq \delta_n + \frac{h}{2}M\delta_n + \frac{h}{2}M\bar{\delta}_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-m} + h\left|\delta_N\right| \end{cases}$$

则可得:

$$\delta_{n+1} \leqslant \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\delta_n + \left(1 + \frac{hM}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-m} + h\left|\delta_N\right|\right)$$

则累积误差:

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &\leqslant \left(\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^{n+1} - 1\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{hM}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-m} + h\left|\delta_N\right|\right)}{hM + \frac{h^2}{2}M^2} \\ &= \left(\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^{n+1} - 1\right) \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-m} + h\left|\delta_N\right|}{hM} \\ &= \left(\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^{n+1} - 1\right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-m}}{hM} + \frac{|\delta_N|}{M}\right) \end{aligned}$$

2.3 误差分配

在误差分配中, 主要有三个参数需要决定:

- 改进欧拉法的步长 h, 可通过确定迭代次数n来确定
- 求解$\zeta(x)$的求和次数 N.
- 舍入误差系数m

假设要求精度达到10^{-r}, 则令

$$\Delta_n \leqslant 0.5 * 10^{-r}$$

$$\delta_n \leqslant 0.5 * 10^{-r}$$

则首先通过

$$\Delta_n \leqslant \left(\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^n - 1\right) \times \left(\frac{\left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3}{hM + \frac{h^2}{2}M^2} + \frac{\Delta_N}{M}\right)$$

确定迭代次数n.

其中

$$h = \frac{x^* - x_0}{n}$$

进行近似分析, 由于n较大, h较小, 故可近似认为

$$\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1=e^{M(x^*-x_0)}-1$$

同样, 可近似认为:

$$\frac{\left(\frac{LM}{4}+\frac{T}{12}\right)h^3}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}=\frac{3LM+T}{12M}h^2$$

3 求解结果

首先分析常数项:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\le M,\left|y^{(2)}(x)\right|\le L,\left|y^{(3)}(x)\right|\le T$$

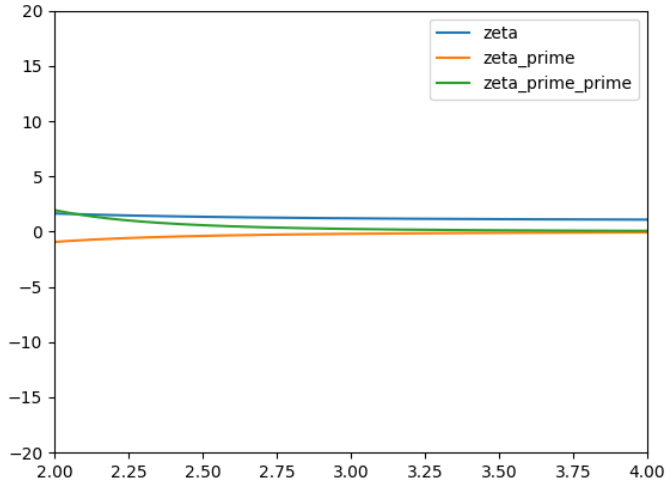
由

$$M=\max|\zeta'(y)|$$

$$L=\max|\zeta'(y)\zeta(y)|$$

$$T=\max|\zeta''(y)\zeta(y)^2+\zeta'(y)^2\zeta(y)|$$

绘制三者图像辅助分析:



对于微分方程$y'(x)=\zeta(y)$, 根据初始条件$y(2)=2$, 由于$\zeta(y)>0$, 则当$x>2$时, $y>2$. 而对于$y>2$, $|\zeta(y)|$, $|\zeta'(y)|$, $|\zeta''(y)|$均单调下降, 则其最大值均在$y=2$处取到.

则取

$$M=0.9333,L=1.5347,T=6.7103$$

对于方法误差:

近似表达式:

$$
\begin{aligned}
\Delta_n &\leqslant \left(\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right)\times\left(\frac{(\frac{LM}{4}+\frac{T}{12})h^3}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}+\frac{\Delta_N}{M}\right)\\
&\approx \left(e^{M(x^*-x_0)}-1\right)\times\left(\frac{3LM+T}{12M}h^2+\frac{\Delta_N}{M}\right)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\Delta_N<\frac{1}{N}
$$

$$
x^*-x_0=4-2=2
$$

则当$N=150000$, $n=2000$时, 可得:

$$
\Delta_n\leqslant 0.45\times 10^{-4}
$$

对于舍入误差:

$$
\begin{aligned}
\delta_n &= \left(\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-m}}{hM}+\frac{|\delta_N|}{M}\right)\\
&\approx \left(e^{M(x^*-x_0)}-1\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-m}}{hM}+\frac{|\delta_N|}{M}\right)
\end{aligned}
$$

其中

$$
|\delta_N|\leqslant\sum_{n=1}^{N}|\delta|\leqslant\frac{N}{2}\times 10^{-m}
$$

Python 中 `float` 精度为 53 bit, 转换为十进制大约可保证$m=15$的精度.

此时

$$
\delta_n\leqslant 4.422\times 10^{-10}
$$

则 Python 中 `float` 精度满足要求, 故不再显式调整精度.

使用计算机求解, 则结果为:

$$
y(4)=4.4051
$$