第四章 离散时间控制系统

§1 采样控制系统

随着计算机技术的飞速进步，数字控制器已经普遍用于工业控制系统，以获得最优控制性能，如最大的生产效率、最低的成本等传统 PID 控制难以直接实现的目标。数字控制已逐渐取代模拟控制方式，主要原因归结于低成本数字计算机的涌现，以及通过数字信号处理获得的灵活算法。

在数字控制系统中，控制对象所涉及的信号大多具有连续时间和连续幅值，但数字控制器能够接收、处理并输出的是时间和幅值皆为离散的信号，因此需要相应的数模转换器实现控制器与对象的互联。本课仅考虑离散时间信号，即幅值未经过数字化处理（或者数字化足够精细以至于可以近似为连续值）。

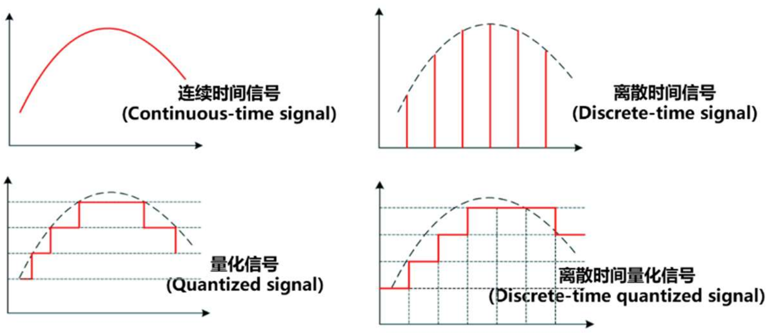

图 1. 时间信号的分类

典型的离散时间控制系统结构如图 2 所示。从被控对象输出测量获得的模拟信号经过采样变成离散时间信号，并经过 A/D 转换为量化数字信号供数字控制算法处理，所形成的控制信号经过 D/A 转换器形成连续时间信号馈入执行器产生控制动作。

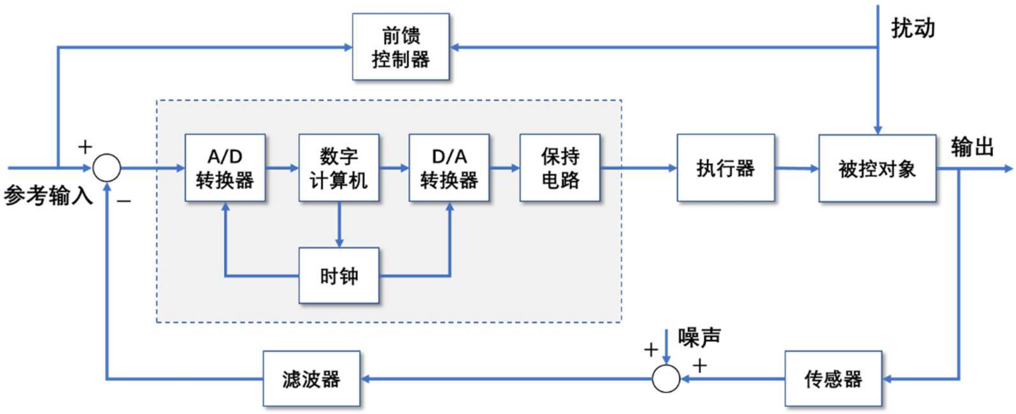

图 2. 离散时间控制系统结构图

假设信号采样的时钟周期为T，则数学上理想采样对应于将连续时间信号$\underline{x}(t)$映射为离散序列$\{\underline{x}(0),\underline{x}(T),\underline{x}(2T),\cdots,\underline{x}(kT),\cdots\}$的过程，在不影响理解的情况下，可以略去采样周期，简写为$\{x(0),x(1),x(2),\cdots,x(k),\cdots\}$。根据著名的香农采样定理，如果连续时间信号$\underline{x}(t)$的带宽为$f_c$，则采样周期至少要满足$\mathrm{T}<(2\mathrm{f_c})^{-1}$，才能保证能够从采样信号恢复原始的连续时间信号，工程上通常选择$\mathrm{T}<(10\sim 20\mathrm{f_c})^{-1}$.

将离散时间信号转换为连续时间信号的过程通常通过保持电路实现，数学上对应于将离散序列$\{x(0),x(1),x(2),\cdots,x(k),\cdots\}$ 变换为如下的分段常数函数：

$$\underline{x}_{\mathrm{ZOH}}(t)=x(k),\quad t\in[kT,(k+1)T],\mathrm{k}=0,1,2,\cdots \tag{1.1}$$

§2 离散时间系统的状态空间描述

连续时间系统的状态空间表达法也可以推广到离散时间系统。在连续时间系统中，可以从微分方程或传递函数来建立状态空间描述。而在离散系统中，可以从差分方程或脉冲传递函数来建立离散状态空间描述。

设离散时间系统的差分方程为：

$$\begin{aligned} y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\cdots+a_{n-1}y(k+1)+a_ny(k) \\ =b_0u(k+n)+b_1u(k+n-1)+\cdots+b_nu(k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

在方程两边做离散时间序列的 z-变换，可得到类比于连续时间系统传递函数的脉冲传递函数：

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_{n-1}z+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n} \tag{2.2}$$

离散时间系统(2.1)(2.2)也可以基于如下状态空间模型实现：

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + hu(k) \\ y(k) = c^{\top}x(k) + du(k) \end{cases} \tag{2.3}$$

式（2.3）可以用方块图 3 来表示，图中$\mathbf{z}^{-1}$代表右移算子，类似于连续系统中的积分算子。如何根据已知的差分方程（2.1）或脉冲传递函数模型(2.2)确定相应的状态空间模型，称为状态空间实现问题。

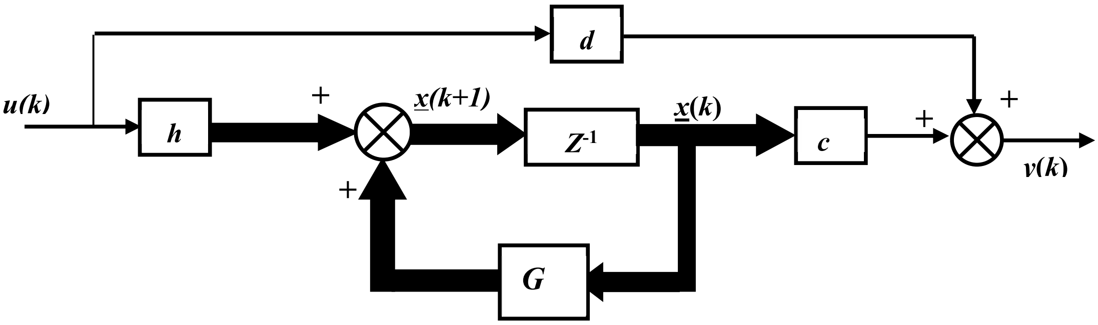

图 3　离散时间状态空间模型框图表示

2.1 由差分方程导出离散状态方程

由差分方程（即时域模型）导出离散状态方程和连续系统类似，可分两种情况讨论。首先，当差分方程作用函数中不包含控制量的高阶差分时，(2.1) 式可以写成：

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1}y(k+1) + a_n y(k) = bu(k) \tag{2.4}$$

选取从k时刻起n个样时刻的输出(k),$y(k+1)$,$\cdots$ $y(k+n-1)$作为k时刻的变量，即令

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = y(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k) = y(k+n-1) \end{cases} \tag{2.5}$$

根据（2.4）、（2.5）两式可得：

$$\begin{cases} x_1(k) = x_2(k) \\ x_2(k) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) = x_n(k) \\ x_n(k) = -a_n x_1(k) - \cdots - a_1 x_n(k) + bu(k) \end{cases} \tag{2.6}$$

而　$y(k) = x_1(k)$，从而（2.6）式可写成：

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] x(k)
\end{cases} \tag{2.7}
$$

下面考虑差分方程中包含控制量高阶差分的一般情况。首先考察一个三阶差分方程的例子：

$$
\begin{aligned}
& y(k+3) + a_1 y(k+2) + a_2 y(k+1) + a_3 y(k) \\
& = b_0 u(k+3) + b_1 u(k+2) + b_2 u(k+1) + b_3 u(k)
\end{aligned}
$$

状态空间实现是不唯一的，在此我们选择如下形式的三阶状态方程：

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} u(k)
$$

$$
y(k) = x_1(k) + h_0 u(k)
$$

将其代入差分方程并比较系数可得：

$$
\begin{cases}
h_0 = b_0 \\
h_1 = b_1 - a_1 h_0 \\
h_2 = b_2 - a_1 h_1 - a_2 h_0 \\
\vdots \\
h_3 = b_3 - a_1 h_2 - a_2 h_1 - a_3 h_0
\end{cases}
$$

相应的变量对应于：

$$
\begin{cases}
x_1(k) = y(k) - h_0 u(k) \\
x_2(k) = y(k+1) - h_0 u(k+1) - h_1 u(k) \\
x_3(k) = y(k+2) - h_0 u(k+2) - h_1 u(k+1) - h_2 u(k)
\end{cases}
$$

上面以三阶为例的状态方程可以推广到如下n阶差分方程：

$$
y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_n y(k) = b_0 u(k+n) + \cdots + b_n u(k) \tag{2.8}
$$

可推导得到如下状态空间实现：

$$
\begin{gathered}
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] x(k) + h_0 u(k)
\end{gathered} \tag{2.9}
$$

其中系数计算关系式为

$$
\begin{cases} h_0 = b_0 \\ h_1 = b_1 - a_1 h_0 \\ h_2 = b_2 - a_1 h_1 - a_2 h_0 \\ \vdots \\ h_n = b_n - a_1 h_{n-1} - \cdots - a_n h_0 \end{cases} \tag{2.10}
$$

§3 线性连续时间状态空间描述的离散化

如果用数字计算机对连续时间状态方程求解，或者对连续受控对象采用数字计算机进行在线控制，都要碰到一个将连续时间系统化为离散时间系统的问题。本节将讨论线性连续时间状态空间描述的离散化方法。

对于线性时不变系统

$$
\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases} \tag{3.1}
$$

若采样周期为T，并记$x(k) \triangleq \underline{x}(kT)$，$u(k) \triangleq \underline{u}(kT)$，则在采样时刻 $(k+1)T$ 时状态向量：

$$
x(k+1) = e^{AT}x(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]}B\underline{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.2}
$$

令$t = (k+1)T - \tau$，则

$$
x(k+1) = e^{AT}x(k) + \int_0^T e^{At}B\underline{u}[(k+1)T - t]\mathrm{d}\tau \tag{3.3}
$$

若控制输入为采样保持信号，则在该采样周期内$\underline{u}[(k+1)T - s] \equiv u(k)$，其中$\mathrm{s} \in [0,\mathrm{T}]$，因此

$$
x(k+1) = e^{AT}x(k) + \left[\int_0^T e^{At}B\mathrm{d}t\right]u(k). \tag{3.4}
$$

故连续时间系统离散后的方程为

$$
\begin{cases} x(k+1) = G(T)x(k) + H(T)u(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \tag{3.5}
$$

其中输出方程中矩阵C和D是不变的，而系数矩阵

$$
G(T) = e^{AT}, \quad H(T) = \left(\int_0^T e^{At}dt\right)B \tag{3.6}
$$

则与采样周期的大小有关。当采样周期 T 较小（例如为系统最小时间常数的十分

之一以下时），时不变系统离散化状态方程可近似表达为：

$$x(k+1)=(TA+I)x(k)+TBu(k) \tag{3.7}$$

即　$G(T)\approx AT+1$，$H(T)\approx TB$。

[例 3.1]　求连续系统

$$\dot{\underline{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\underline{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

的离散状态空间描述。

解：由式（3.6）计算

$$G(T)=e^{AT}=\mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=\mathscr{L}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}$$

$$H(T)=\int_0^T e^{At}\underline{b}\,\mathrm{d}t=\int_0^T\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(T+\frac{e^{-2T}-1}{2})\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}$$

从而可求得离散化状态方程为：

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(T+\frac{e^{-2T}-1}{2})\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}u(k)$$

假如采样周期T为 1 秒，则上述状态方程为：

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.432\\ 0 & 0.135\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.284\\ 0.432\end{bmatrix}u(k)$$

§4　离散时间系统状态方程的解

考察如下线性定常离散时间系统：

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k) \tag{4.1}$$

状态演化求解的方法主要分为两类：一类是用矩阵差分方程的迭代法，另一类是用 z 变换法（与连续时间系统的拉普拉斯变换法类似）。在此仅讨论迭代法。

对于任意采样时刻$k>0$，方程（4.1）的解可用迭代法求得，即先令$k=0$，由已知条件$x(0)$，$u(0)$可先求得$x(1)$，再令$k=1$，由求得的$x(1)$和已知$u(1)$可求得$x(2)$，如此进行，即可得$x(k)$。显然，这种解法便于在数字计算机上进行运算。方

程（4.1）式可迭代计算如下

$$
\begin{aligned}
&n=0 \qquad x(1)=Gx(0)+Hu(0)\\
&n=1 \qquad x(2)=Gx(1)+Hu(1)=G^2x(0)+GHu(0)+Hu(1)\\
&n=2 \qquad x(3)=Gx(2)+Hu(2)=G^3x(0)+G^2Hu(0)+GHu(1)+Hu(2)\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

以此类推，当 $n=k-1$时，

$$x(k)=G^kx(0)+G^{k-1}Hu(0)+\cdots+Hu(k-1)=G^kx(0)+\sum_{j=0}^{k-1}G^{k-j-1}Hu(j) \tag{4.2}$$

或

$$x(k)=G^kx(0)+\sum_{j=0}^{k-1}G^jH\cdot u(k-j-1) \tag{4.3}$$

上两式可以用向量矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x(1)\\ x(2)\\ \vdots\\ x(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G\\ G^2\\ \vdots\\ G^k\end{bmatrix}x(0)+\begin{bmatrix} H & 0 & \cdots & 0\\ GH & H & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ G^{k-1}H & G^{k-1}H & \cdots & H\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0)\\ u(1)\\ \vdots\\ u(k-1)\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

解式（4.2）是按初始时刻为$k=0$得到的，若初始时刻从$k=h$开始，且相应的初始状态为$x(h)$，则其解为：

$$x(k)=G^{k-h}x(h)+\sum_{j=h}^{k-1}G^{k-j-1}Hu(j) \tag{4.5}$$

由解式（4.2）可以看出，离散系统的解和连续系统的解的结构非常类似，由两部分组成。第一部分是由初始状态$x(0)$转移而来，第二部分是由控制作用所激励的状态转移产生的，而且其中G^k或G^{k-h}相当于连续时间系统中的$\varphi(t)=e^{At}$或$\varphi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$，类似地，这里也定义：

$$\varphi(k)=G^k \tag{4.6}$$

称为离散时间系统的状态转移矩阵，很明显它满足：

$$\begin{cases}\varphi(k+1)=G\varphi(k)\\ \varphi(0)=I\end{cases} \tag{4.7}$$

状态转移矩阵具有如下性质：

（1）$\varphi(k-h)=\varphi(k-h_1)\varphi(h_1-h)$，　$(k>h_1\geq \mathrm{h})$

（2）当且仅当$G(k)$是非奇异时，$\varphi^{-1}(k)=\varphi(-k)$。对于由连续系统离散化得到的系统，$G=e^{AT}$ 总是非奇异的，所以$\varphi(k)$必是非奇异的。

利用状态转移$\varphi(k)$，离散时间状态方程的解（4.2）可写成

$$x(k)=\varphi(k)x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\varphi(k-j-1)Hu(j) \tag{4.8}$$

而（4.5）式可写成：

$$x(k)=\varphi(k-h)x(h)+\sum_{j=h}^{k-1}\varphi(k-j-1)Hu(j) \tag{4.7}$$

[例 4.1] 离散状态方程

$$x(k+1)=Gx(k)+hu(k),\quad \text{其中 } G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}, h=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

试求当初始状态$x(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$和控制作用为$u(k)\equiv 1$时，此系统的$\varphi(k)$和$x(k)$。

解：根据定义

$$\varphi(k)=G^k=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}^k$$

令$x(k)=T\tilde{x}(k)$，其中线性变换$\mathrm{T}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{bmatrix}$ 将G变换为约当规范型

$$T^{-1}GT=\Lambda=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0 & -0.8\end{bmatrix},$$

则

$$\tilde{x}(k+1)=T^{-1}GT\tilde{x}(k)+T^{-1}hu(k)$$

相应地有

$$\tilde{x}(k)=\tilde{\varphi}(k)\cdot\tilde{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\tilde{\varphi}(j)T^{-1}hu(k-j-1)$$

其中$\tilde{\varphi}(k)=(T^{-1}GT)^k=(\Lambda)^k=\begin{bmatrix}(-0.2)^k & 0\\ 0 & (-0.8)^k\end{bmatrix}$。故

$$\tilde{x}(k)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-(0.2)^k\\ 4(-0.8)^k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{0.4}[1-(-0.2)^k]\\ -\frac{1}{0.9}[1-(-0.8)^k]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{17}{6}(-0.2)^k+\frac{5}{2}\\ \frac{22}{9}(-0.8)^k-\frac{10}{9}\end{bmatrix}$$

再通过变换T得到

$$x(k)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{bmatrix}\underline{\tilde{x}}(k)=\begin{bmatrix}-\frac{17}{6}(-0.2)^k+\frac{22}{9}(-0.8)^k+\frac{25}{18}\\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k-\frac{17.6}{9}(-0.8)^k+\frac{7}{18}\end{bmatrix}$$

§5 离散时间系统的稳定性

对线性时不变离散自由运动方程

$$x(k+1)=Gx(k) \tag{5.1}$$

其解为 $x(k)=\varphi(k)x_0$. 依定义，当系统渐近稳定时，必有

$$\lim_{k\to\infty}x(k)=\lim_{k\to\infty}\varphi(k)x_0=0 \tag{5.2}$$

由于起始条件x_0是任意的非零向量，上式即等价于$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(k)=0$

现设G具有两两相异特征值$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$(当有重根时也可进行类似地推导，但过程相对复杂)，由（4.6）式可导出：

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(k)=P^{-1}\left[\lim_{k\to\infty}\operatorname{diag}(\mu_1^k,\cdots,\mu_n^k)\right]P=0, \tag{5.3}$$

其中P是对角化矩阵G的相似变换。显然，欲使(5.2)成立要求$\lim\limits_{k\to\infty}\mu_i^k=0$，也即

$$|\mu_i|<1 \quad (i=1,2,\cdots n) \tag{5.4}$$

这表明线性时不变离散系统稳定的充分必要条件为其系数矩阵G的特征值的模均小于 1，即分布在z平面上以原点为中心的单位园内。如果离散时间系统是由连续时间系统 $\dot{x}=Ax$离散化而来，当连续时间系统渐进稳定时，即其特征值实部都小于零，$R_e[\lambda_i]<0,(i=1,2,\cdots,n)$，则其离散化系统的特征值$|\mu_i|=\left|e^{\lambda_i T}\right|=e^{R_e[\lambda_i]T}<1,(i=1,2,\cdots,n)$，因此也一定是稳定的。事实上，这个结论是和经典控制理论中所指出的“时不变线性离散系统稳定的充要条件为其脉冲传递函数的极点的模均小于 1”的条件相等价的。

§6 离散时间系统的能控性与能观性※

对于离散时间控制系统，如果在有限个采样时间周期内，控制能够将系统从初始状态转移到状态空间中任意状态，则称此系统是状态完全能控的。

考察离散时间控制系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k),$$

这里为避免后面符号混淆，仍采用A,B表示离散后的系数矩阵。系统的状态能控性条件可以从状态方程的解

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} H\, u(j) \tag{6.1}$$

观察得到。我们将上式整理写作：

$$x(k) = A^k x(0) + [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{k-1}B] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

这表明$x(k) - A^k x(0)$是矩阵$[\boldsymbol{B} \quad AB \quad \cdots \quad A^{k-1}B]$列向量的线性组合，而组合系数为可自由选择的控制量$u(0),\cdots,u(k-1)$。根据 Cayley-Hamilton 定理，$A^n$与$I,A,\cdots,A^{n-1}$线性相关，因此当$k \geq n$时，$A^k B$中不会包含新的线性无关向量。故系统状态完全能控的充分必要条件是能控性矩阵

$$\mathrm{Q_c} = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \tag{6.3}$$

列满秩，这与连续时间系统的状态能控性判据完全类似。

与连续时间系统不同，离散时间系统中实现状态转移的控制序列可以显式计算。例如，当系统中只有一个控制输入且状态完全能控，希望将状态从初态x_0转移到目标态x_T，则根据上式可知最多需要n步即可实现状态转移，相应控制序列为：

$$[u(n-1),\cdots,u(0)]^\top = Q_c^{-1}(x_T - A^k x_0). \tag{6.4}$$

从上面分析中还可以看到，如果要实现任意状态转移，则至少需要n步控制才能达到（要保证$\mathrm{Q_c}$满秩）。但如果有多个控制输入，则所需的最少控制步数有可能可以小于n。

能观性的分析与上面类似。称系统

$$x(k+1) = Ax(k), \qquad y(k) = Cx(k) \tag{6.5}$$

是能观的，若根据观测输出$y(0),y(1),\cdots$,可以唯一确定未知状态初值$x(0)$. 根据状态方程的解，不难得到

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} x(0) \tag{6.6}$$

同理，当且仅当能观性矩阵

$$
Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{6.7}
$$

列满秩时，可以从上述方程中唯一解得状态初值$x(0)$，即系统是状态能观的。

§7 离散时间系统的最优控制

前面，我们已经比较系统地学习了连续系统的最优控制问题，其理论可以方便地推广到离散系统中来，因而，二者有很多相似性。

7.1 离散系统最优控制的一般问题

受控系统的运动方程和性能指标如下：

$$
\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k),\ k],\quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{7.1a}
$$

$$
J = \varphi[\boldsymbol{x}(N),\ N] + \textstyle\sum_{k=0}^{N-1} L[\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k),\ k] \tag{7.1b}
$$

这里，初始状态$\boldsymbol{x}(0)$是给定的，末端状态$\boldsymbol{x}(N)$是自由的。求解最优控制序列$\boldsymbol{u}^*(k)$，$k=0,\ \cdots,\ N-1$，使得上述性能指标最小。

[定理 7.1] 末时刻固定末状态自由的离散系统最优控制问题（7.1），其最优解应满足的必要条件如下：

H 函数： $H(k) = L(k) + \lambda^T(k+1)\boldsymbol{f}(k)$

控制方程：$\frac{\partial H(k)}{\partial \boldsymbol{u}(k)} = 0$（变分法） 或 $H[u^*(k)] = \min\limits_{u(k)\in U} H[u(k)]$ （极小值原理）

正则方程：$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), k] & \text{状态方程} \\ \lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial \boldsymbol{x}(k)} & \text{协态方程} \end{cases}$

边界条件：$\begin{cases} \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 & \text{初始条件} \\ \lambda(N) = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}(N)} & \text{末端条件} \end{cases}$

[例 7.1] 对下述系统和给定的性能指标，求最优控制序列。

$$
x(k+1) = -x(k) + u(k),\ x(0) = 3
$$

$$
J = \frac{1}{2}x^2(2) + \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2}u^2(k)
$$

解：设最优控制序列为$u^*(0)$，$u^*(1)$，必要条件为：

H 函数：$H(k)=\frac{1}{2}u^2(k)+\lambda(k+1)[u(k)-x(k)]$，$k=0,\ 1$

控制方程：$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)}=u(k)+\lambda(k+1)=0$，由此可得 $u(k)=-\lambda(k+1)$.

正则方程：$x(k+1)=-x(k)-\lambda(k+1)$，$\lambda(k)=\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)}=-\lambda(k+1)$

边界条件：$x(0)=3$， $\lambda(2)=\frac{\partial\varphi}{\partial x(2)}=x(2)$

首先由正则方程和边界条件解得：

$$\lambda^*(1)=-\lambda^*(2)=-x^*(2),$$

将其代入状态方程，我们有

$$x^*(1)=-x^*(0)-\lambda(1)=-3+x^*(2)$$

$$x^*(2)=-x^*(1)-\lambda^*(2)=3-2x^*(2)$$

从中可以顺序解得：

$$x^*(1)=-2,\quad x^*(2)=1;\ \lambda^*(1)=-1,\ \lambda^*(2)=1;$$

由 $u(k)=-\lambda(k+1)$得到： $u^*(0)=1$， $u^*(1)=-1$.

7.2 线性离散系统有限拍状态调节器的最优反馈控制解

受控系统和最小化性能指标如下：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\quad \boldsymbol{x}(\mathbf{0})=\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}} \tag{7.2a}$$

$$\boldsymbol{J}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{N})+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}}[\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})+\boldsymbol{u}^{\top}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})] \tag{7.2b}$$

其中F和Q非负定，R正定。

[定理 7.2] 有限拍状态调节器问题（7.2）最优解可由如下反馈控制实现：

$$\mathbf{u}^*(k)=-\mathrm{K}(\mathrm{k})\mathbf{x}(k) \tag{7.4}$$

其中$K(k)=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}(\mathrm{A}^{\top})^{-1}[\mathrm{P}(k)-\mathrm{Q}]$， 矩阵$P(k)$是 Riccati 矩阵递推方程

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{k})=\mathbf{Q}+\mathbf{A}^{\top}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})]^{-1}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})=\boldsymbol{F} \tag{7.3}$$

的解；且最小值

$$J^*=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) \tag{7.5}$$

[例 7.2] 对下述系统和给定的性能指标，求最优控制序列。

$$K(0)=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathrm{A}^\top)^{-1}[\mathrm{P}(0)-\mathrm{Q}]=-\frac{1}{3}$$

$$x(k+1)=-x(k)+u(k),\ x(0)=3$$

$$J=\frac{1}{2}x^2(2)+\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{2}u^2(k)$$

解：该例同[例 7.1]。$\mathbf{A}=-1,\quad \mathbf{B}=1,\quad \mathbf{F}=1,\quad \mathbf{Q}=0,\quad \mathbf{R}=1$

（1）$P(2)=F=1$，反向递推得

$$\mathbf{P(1)=Q+A^\top}\boldsymbol{P(2)[I+BR^{-1}B^\top P(2)]^{-1}A}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{P(0)=Q+A^\top}\boldsymbol{P(1)[I+BR^{-1}B^\top P(1)]^{-1}A}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

反馈控制律为:

$$K(0)=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathrm{A}^\top)^{-1}[\mathrm{P}(0)-\mathrm{Q}]=-\frac{1}{3}$$

$$K(1)=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathrm{A}^\top)^{-1}[\mathrm{P}(1)-\mathrm{Q}]=-\frac{1}{2}$$

正向递推得：$u^*(0)=1$，$x^*(1)=-2$，$u^*(1)=-1$，$x^*(2)=1$

（3）$J^*=(1/2)x^*(0)P(0)x^*(0)=3/2$

校核：$J=\frac{1}{2}[x^*(2)]^2+\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{2}[u^*(k)]^2=\frac{3}{2}$

7.3 线性定常离散系统有限拍状态调节器的最优开环控制解

上述有限拍最优调节器问题还可以利用最小二乘法直接求取开环最优控制解，这是后面预测控制的基础。

首先由状态方程的解

$$\boldsymbol{x(k)=A^k x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}A^{k-j+1}Bu(j)}$$

可将前$\boldsymbol{k}$步的解写作如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(1) \\ \boldsymbol{x}(2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}^k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(\mathbf{0}) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{u}(\mathbf{1}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}-\mathbf{1}) \end{bmatrix}$$

我们将其简写作 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{k})$，并将指标简写为：

$$\boldsymbol{J} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{N}) + \boldsymbol{U}^\top(\boldsymbol{N})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{N}) + \boldsymbol{x}_0^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_0\}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{N}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{F} \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}$. 将状态方程代入优化指标可得到一个标准的最小二乘问题，并容易计算求得使 $\boldsymbol{J}$ 最小的开环控制解为

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{N}) = -[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N}) + \boldsymbol{H}^\top(\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{N})]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{H}^\top(\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}_0$$

易见最优解随状态初值和区间长度变化.

7.4 线性定常离散系统无限拍状态调节器

受控系统和最小化性能指标如下：

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \tag{7.6a}$$

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^\top(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^\top(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \tag{7.6b}$$

其中 $\mathbf{Q}$非负定，$\mathbf{R}$正定。

离散系统 Riccati 矩阵代数方程：

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^\top\widetilde{\mathbf{P}} \tag{7.7a}$$

$$\widetilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T]^{-1}\mathbf{A} \tag{7.7b}$$

[定理 7.3] 若系统完全可控，无限拍状态调节器问题 (7.6) 的最优控制可由如下反馈实现：

$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}(k) \tag{7.8}$$

其中，$\widetilde{\mathbf{P}}$是 Riccati 矩阵代数方程（7.7）的非负定解，且$J^* = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$.