37. (a)

设向右的概率为p,向左的概率为q

$P(X_1 \geq 0) = p$

$P(X_2 \geq 0) = P(X_2=0) + P(X_2=1) + P(X_2=2)$

$= C_2^1 p^1 q^1 + p^2$

$= 2pq + p^2$

$P(X_3 \geq 0) = P(X_3=0) + P(X_3=1) + P(X_3=2) + P(X_3=3)$

$= 0 + C_3^2 p^2 q^1 + 0 + C_3^3 p^3$

$= 3p^2 q + p^3$

$P(X_4 \geq 0) = P(X_4=0) + P(X_4=1) + P(X_4=2) + P(X_4=3) + P(X_4=4)$

$= C_4^2 p^2 q^2 + 0 + C_4^3 p^3 q + 0 + C_4^4 p^4$

$= 6p^2q^2 + 4p^3q + p^4$

综上,概率和为 $p + 2pq + p^2 + \underline{3p^2q + p^3} + 6p^2q^2 + \underline{4p^3q + p^4}$

$= p^2(1+q)$

(d) 原式 $= P(X_1=-1) + P(X_1=0) + P(X_1=1) + P(X_2=-2) + P(X_2=-1) + P(X_2=0) + P(X_2=1) + P(X_2=2)$

$+ P(X_3=-2) + P(X_3=-1) + P(X_3=0) + P(X_3=1) + P(X_3=2)$

$+ P(X_4=-2) + P(X_4=-1) + P(X_4=0) + P(X_4=1) + P(X_4=2)$

$= q^2(1+p)$

39. (a)

由随机徘徊的Markov性,

可知:

$P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n, \ldots X_0=i_0) = P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n)$;

(b) $P(X_{n+1}=i_{n+1}, X_{n-1}=i_{n-1} | X_n=i_n)$

$= P(X_{n+1}-X_n = i_{n+1}-i_n, X_n - X_{n-1} = i_n - i_{n-1} | X_n=i_n)$

$= P(X_{n+1}-X_n = i_{n+1}-i_n | X_n=i_n) \cdot P(X_n - X_{n-1} = i_n - i_{n-1} | X_n=i_n)$

$= P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n) P(X_{n-1}=i_{n-1} | X_n=i_n)$

P115. 1. 设 $X \sim Poisson(\lambda)$

$$p(X) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad (x \geq 0)$$

则 $P(X=1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1}$

$$p(X=2) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2}$$

由 $P(X=1) = P(X=2)$

$\therefore \lambda = \frac{\lambda^2}{2}$

$\therefore \lambda = 2$

$\therefore P(X=4) = e^{-2}\frac{2^4}{4!}$

$$= \frac{2}{3}e^{-2}$$

5. 由随机分流的不变性,

则试验成功次数满足参数为 λp 的 Poisson 分布

则 $P(X=k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$

数学期望为 λp

6. 设雌虫数目为 N

则 $P(N=i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$

而 1 个雌虫下卵的数目为 k 的概率为 $P(X=k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$

则地区虫卵

$$P(X=k) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i\mu)^k e^{-\mu i}}{k!}\frac{(\lambda)^i e^{-\lambda}}{i!}$$

$$= \frac{\mu^k e^{-\lambda}}{k!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{-\mu})^i (i)^k}{(i)!}$$

7.

$$P(x) = p\cdot\frac{\lambda_1^x}{x!}e^{-\lambda_1} + (1-p)\frac{\lambda_2^x}{x!}e^{-\lambda_2}$$

10. (a) 与第5题类似

$$P(X=k) = \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda}$$

$$P(Y=k) = \frac{[(1-p)\lambda]^k}{k!}e^{-(1-p)\lambda}$$

(b) 根据提示

考虑 $P(X=x, Y=y) = \sum_{k=0}^{\infty}P(X=x, Y=y \mid N=k)\, P(N=k)$

只有当 $k=x+y$ 时才不为0

$\therefore$ 不相互独立

(b) $P(X=x, Y=y)=\sum_{k=0}^{\infty} P(X=x, Y=y \mid N=k) P(N=k)$

12.

$P(M=m)$ 可以分为 $X_1=m, X_2<m$ 或 $X_1<m, X_2=m$ 或 $X_1=X_2=m$

由于 X_1、X_2 i.i.d.

$\therefore P(M=m)=\frac{2e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}\cdot\sum_{i=0}^{m-1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}+\frac{\lambda^{2m}e^{-2\lambda}}{(m!)^2}$

同理: $P(N=n)=\frac{2e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}+\frac{(\lambda)^{2n}e^{-2\lambda}}{(n!)^2}$

14. 此过程中 $\lambda=6$ 人/小时

则 $N_1(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$\therefore N_1(0)+N_1(1)+N_1(2)$

$=e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$

$=25e^{-6}$

补充:

$$N_5\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & n & \cdots\\ e^{-10} & 2e^{-10} & & \frac{(10)^n}{n!}e^{-10} & \cdot\end{pmatrix}$$

$$N_2\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & n & \cdots\\ e^{-4} & 2e^{-4} & \cdots & \frac{4^n}{n!}e^{-4} & \end{pmatrix}$$

则条件期望

由于 $P(N_2=k \mid N_5=n)$

$=C_n^k\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}$

则 $E[N(2)\mid N(5)]=\frac{2}{5}n=\frac{2}{5}N_5$ 则分布可得

而 $P(N_5=k \mid N_2=n)=\frac{P(N_5=k, N_2=n)}{P(N_2=n)}=\frac{P(N_5-N_2=k-n)\cancel{P(N_2=n)}}{\cancel{P(N_2=n)}}$

$= P(N_3 = k-n)$

$\therefore E(N(5)|N(2)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot 6^{k-t} e^{-6}}{(k-t)!} = N_2 + 6$ 则分布可得