# 26.5 实物粒子的波动性

光(波)具有粒子性，那么实物粒子具有波动性吗?

## 一、德布罗意假设

L.V. de Broglie （法国人，1892 – 1986）

从自然界的对称性出发，认为既然光(波)具有粒子性，那么实物粒子也应具有波动性。

1924.11.29德布罗意把题为“量子理论的研究”的博士论文提交给了巴黎大学。

他在论文中指出：

一个能量为$E$、动量为 $p$ 的实物粒子，同时也具有波动性，它的波长$\lambda$、频率$\nu$和 $E$、$p$的关系与光子一样：

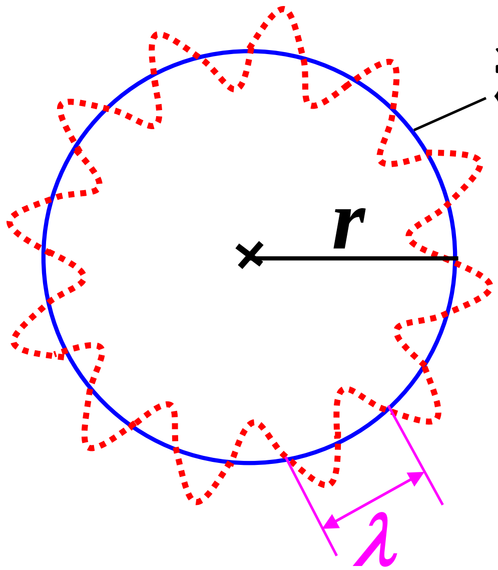
$$E = h\nu \qquad p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \frac{E}{h} \\ \lambda &= \frac{h}{p} \end{aligned}\right\} \text{德布罗意关系}$$

与粒子相联系的波称为物质波或德布罗意波，

$\lambda$— 德布罗意波长（**de Broglie wavelength**）

物质波的概念可以成功地解释原子中令人困惑的轨道量子化条件。




稳定轨道 $2\pi r = n\lambda$

波长 $\lambda = \dfrac{h}{p}$

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi r = n\lambda \\ \lambda = \dfrac{h}{p} \end{array}\right\} \rightarrow 2\pi r m \boldsymbol{v} = nh$$

$$l = \frac{h}{2\pi} \cdot n = n\hbar, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

— 轨道角动量量子化

论文获得了评委会高度评价。爱因斯坦称：

"揭开了自然界巨大帷幕的一角"

"看来疯狂，可真是站得住脚呢"

路易·德布罗意（伊）（Louis de Broglie，1892－1987）是著名的法国物理学家，也是第七代布罗伊公爵。从他的“姓氏”中有个de就可以看出来他的贵族身份。法国贵族的姓，是de后面跟着封地的名字，在德布罗意这儿，封地名字则是“布罗伊”。德布罗意的祖先是路易十四和路易十五时代的法国元帅，因此被封为布罗伊公爵。

德布罗意家族地位显赫，名人众多。自17世纪以来，这个家族的成员在法国军队、政治、外交方面颇具盛名，数百年来在战场上和外交上为法国各朝国王服务。德布罗意的祖父（第四代）是法国著名评论家、公共活动家和历史学家，曾于1871年任法国驻英国大使，1873一1874任法国首相。

第一代布罗伊公爵，元帅
（1671年–1745年）

……

第七代布罗伊公爵，物理学家
（1892年—1987年）

**路易.德布罗意**　　**提出电子的波动性**

**1929年获诺贝尔物理学奖**

经爱因斯坦的推荐，物质波理论受到了关注。

在论文答辩会上，佩林问：

“这种波怎样用实验来证实呢？”

德布罗意答道：

“用电子在晶体上的衍射实验可以做到。”

电子的波长：$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E}}$ （电子$v << c$）

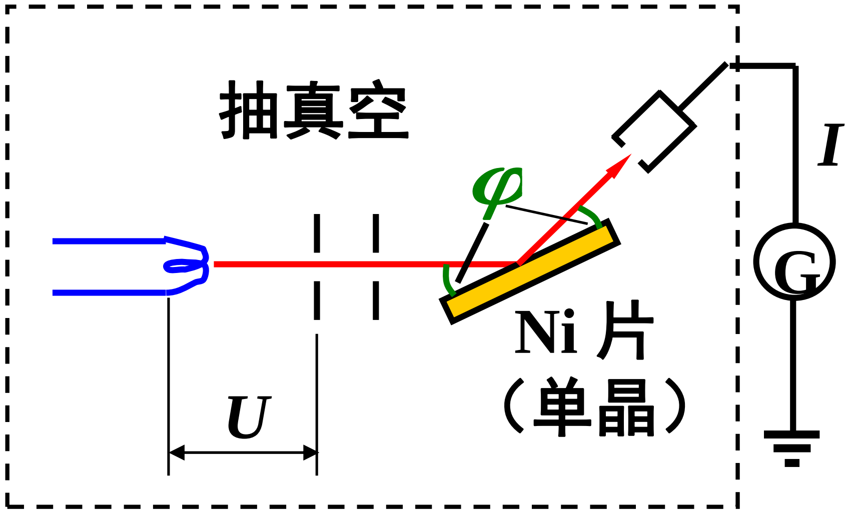
设加速电压为$U$（单位为伏特）

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}} \approx \frac{1.225}{\sqrt{U}} (\text{nm})$$

$U$=150$V$ 时，$\lambda$=0.1nm —— $X$ 射线波段

## 二、电子衍射实验

● 戴维孙(Davisson)革末(Germer)实验(1927)



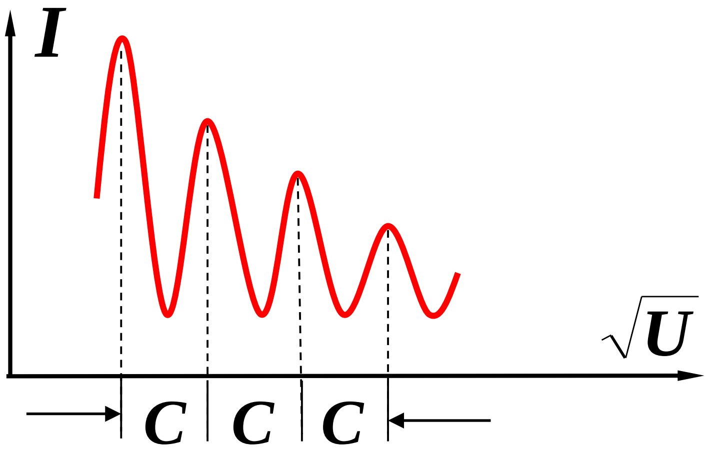

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}}$$

当满足 $2d\sin\varphi = n\lambda$，$n = 1,2,3,\ldots$ 时，应观察到电流 $I$ 为极大。

$$\sqrt{U} = n\frac{h}{2d\sin\varphi\sqrt{2em_0}} = nC$$

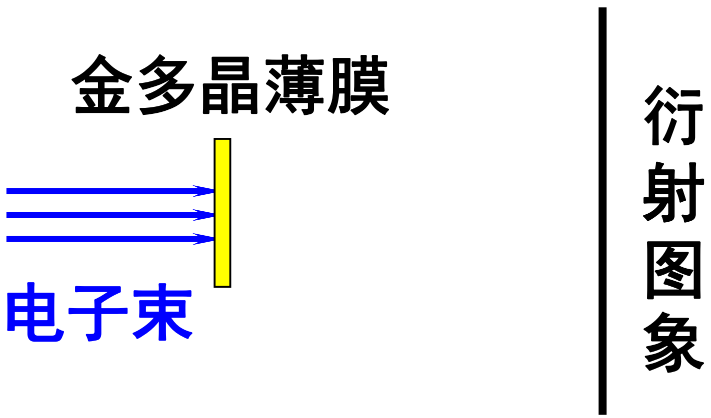
当 $\sqrt{U} = C$，$2C$，$3C\ldots$时，

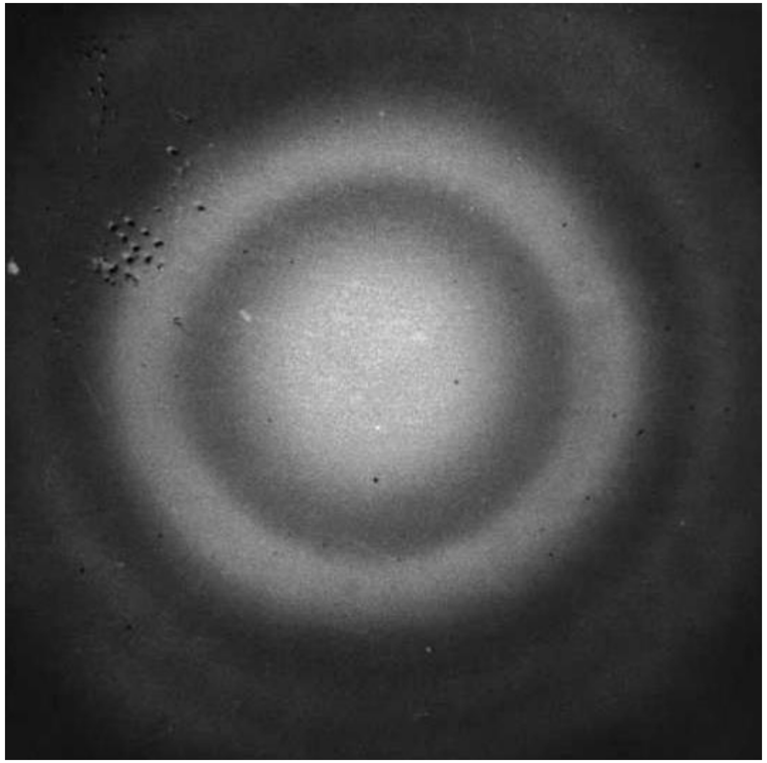
实验观察到 $I$ 为极大！



## ●G.P.汤姆孙（G.P.Thomson）实验（1927）

电子通过金多晶薄膜衍射



1929年德布罗意获诺贝尔物理奖

1937年戴维孙、 G.P.汤姆孙共获诺贝尔物理奖

# The Nobel Prize in Physics 1937

"for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals"

**Clinton Joseph Davisson**

1/2 of the prize

USA

Bell Telephone Laboratories
New York, NY, USA

b. 1881
d. 1958

**George Paget Thomson**

1/2 of the prize

United Kingdom

London University
London, United Kingdom

b. 1892
d. 1975

汤姆逊在实验室

1897年汤姆逊发现电子

电子的发现确定了原子是可以再分的。为认识原子结构以及更深层次的结构开辟了道路。

# The Nobel Prize in Physics 1906

"in recognition of the great merits of his theoretical and experimental investigations on the conduction of electricity by gases"

**Joseph John Thomson**

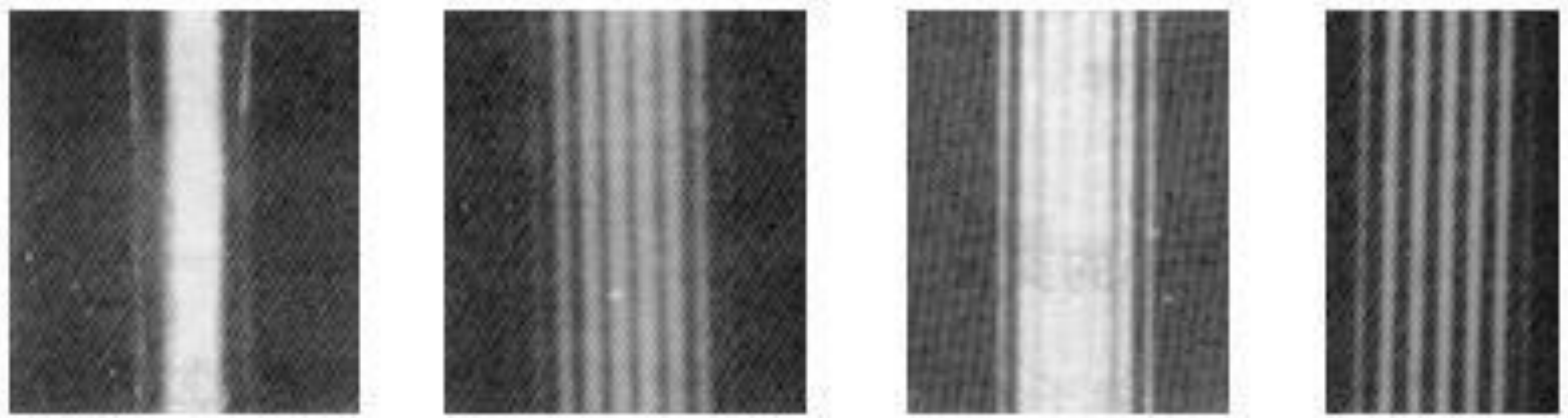
United Kingdom

University of Cambridge
Cambridge, United Kingdom

b. 1856
d. 1940

● 约恩孙（Jonsson）实验（1961）

电子单、双、三、四缝衍射实验：



单 缝　　双 缝　　三 缝　　四 缝

质子、中子、原子、分子…也有波动性。

$$\lambda = \frac{h}{mv} \propto \frac{1}{m}, \quad m\uparrow \to \lambda\downarrow$$

宏观粒子 $m$ 大，$\lambda \to 0$，表现不出波动性。

【例】$m = 0.01\text{kg}$，$v = 300\ \text{m/s}$ 的子弹

波长 $$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}}{0.01\times300} = 2.21\times10^{-34}\ \text{m}$$

$h$极小 $\rightarrow$ 宏观物体的波长小得实验难以测量

$\rightarrow$ “宏观物体只表现出粒子性”

两把自然尺度：$c$ 和 $h$

$c\rightarrow\infty$： 相对论 $\longrightarrow$ 牛顿力学

$h\rightarrow 0$： 量子物理 $\longrightarrow$ 经典物理

（$\lambda\rightarrow 0$：波动光学 $\longrightarrow$ 几何光学）

## 26.6 概率波与概率幅

### 一、对物质波的理解，概率波的概念

**德布罗意：** 物质波是引导粒子运动的“导波”。

— 本质是什么，不明确。

**薛定谔：** 波是基本的，电子是“物质波包”。

—夸大了波动性，抹煞了粒子性。

●通过电子衍射可以在空间不同方向上观测到波包的一部分，如果波代表实体，那就意味着能观测到电子的一部分，这与显示电子具有整体性的实验结果矛盾。

●波包总要扩散，而电子是稳定的。

**另一种理解：**粒子是基本的，电子的波动性是大量电子之间相互作用的结果。

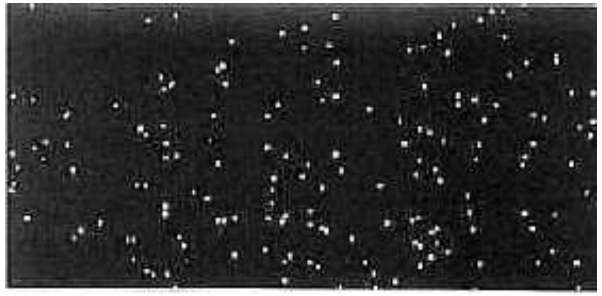
为防止电子间发生作用，让电子一个一个地入射，发现时间足够长后的干涉图样和大量电子同时入射时完全相同。

这说明，电子的波动性并不是很多电子在空间聚集在一起时相互作用的结果，而是单个电子就具有波动性。换言之，干涉是电子“自己和自己”的干涉。

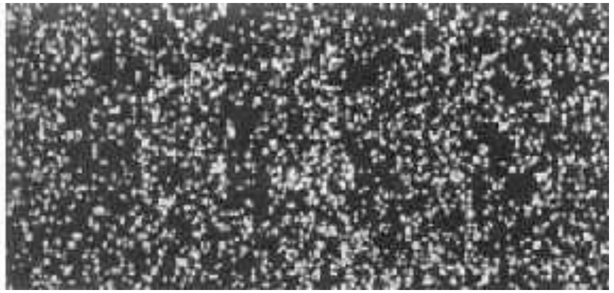
无论是大量电子同时入射，还是电子一个一个地长时间地入射，都只是让单个电子干涉的效果在底片上积累并显现出来而已。

# 一个一个电子依次入射双缝的衍射实验：

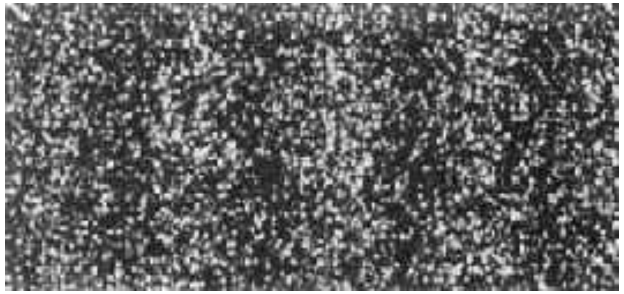
7个电子



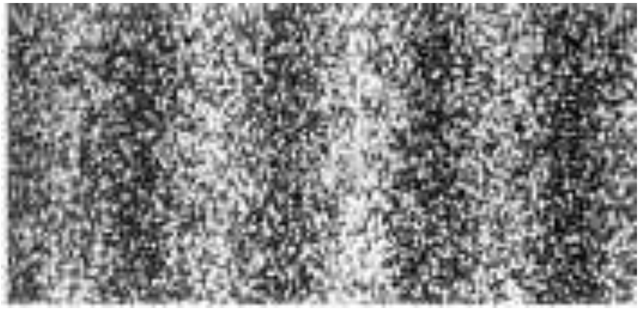
100个电子



3000



20000



70000

底片上出现一个个的点子 →电子具有粒子性。随着电子增多，逐渐形成衍射图样 → 来源于“一个电子”所具有的波动性,而不是电子间相互作用的结果。

尽管单个电子的去向是概率性的，但其概率在一定条件下（如双缝），还是有确定的规律的。

玻恩（M.Born）：德布罗意波并不像经典波那样是代表实在物理量的波动，而是描述粒子在空间的概率分布的“概率波”。

## 二、波函数及其统计解释

### 1、波函数（wave function）

量子力学假定：微观粒子的状态用波函数表示。

平面简谐波函数： $y = A\cos(\omega t - kx)$

复数表示： $y = Ae^{-i(\omega t - kx)}$

概率波波函数：一维 $\Psi(x,t)$，三维 $\Psi(\vec{r},t)$

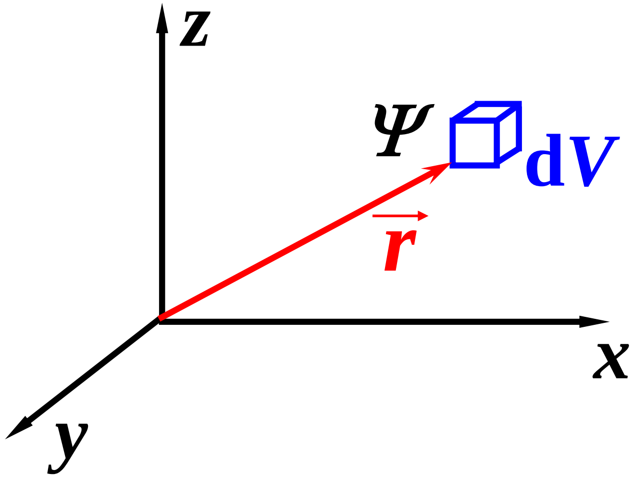
### 2、波函数的统计解释

物质波是“概率波”，它是怎样描述粒子在空间各处出现的概率呢？

玻恩对 $\Psi$ 的统计解释(1926)：波函数 $\Psi$ 是描述粒子在空间概率分布的"概率振幅"。其模方

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2 = \Psi(\vec{r},t)^* \Psi(\vec{r},t)$$

代表 $t$ 时刻，在坐标 $\vec{r}$ 附近单位体积中发现一个粒子的概率，称为"概率密度"。




在 $t$ 时刻，在 $\vec{r}$ 附近dV内发现粒子的概率为：

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2 \mathrm{d}V$$

在空间 $\Omega$ 发现粒子的概率为：$\int_{\Omega} |\Psi(\vec{r},t)|^2 \mathrm{d}V$

$\Psi(\vec{r},t)$不同于经典波的波函数，它无直接的物理意义，有意义的是$|\Psi|^2$和波函数的位相。

对单个粒子：$|\Psi|^2$给出粒子概率密度分布；

对大量粒子：$N|\Psi|^2$给出粒子数的分布；

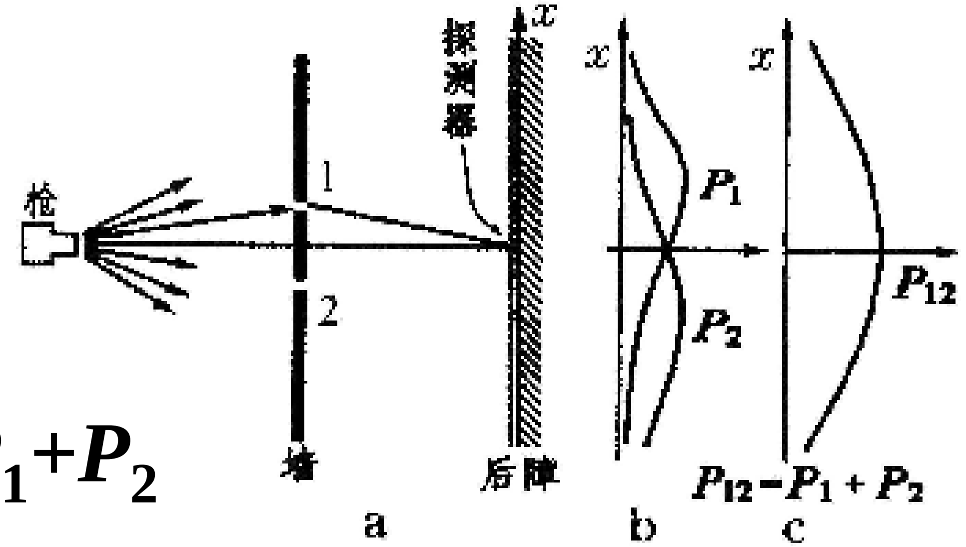
## 3、用电子双缝衍射实验说明概率波的含义

### （1）子弹穿过双缝

只开上缝→ $P_1$

只开下缝→ $P_2$

双缝 齐开→ $P_{12}=P_1+P_2$

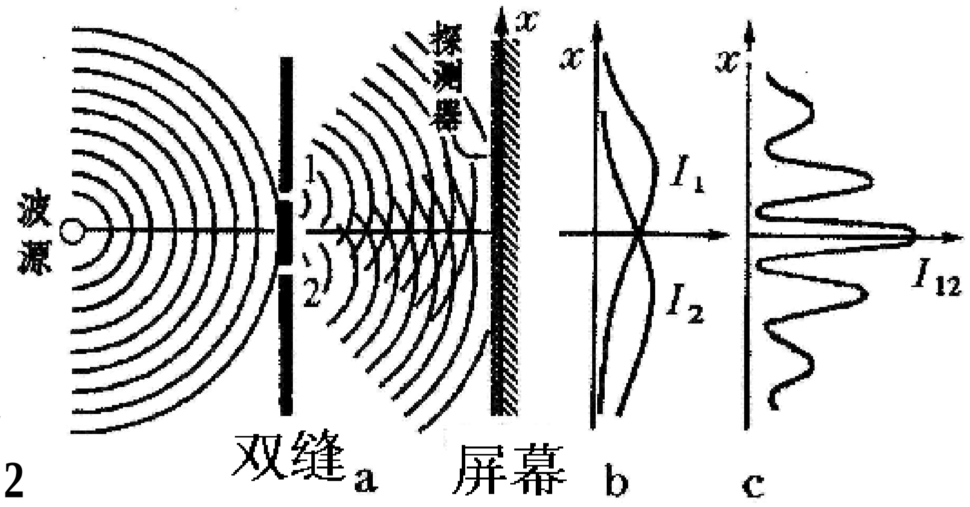


## （2）光波

只开上缝→光强 $I_1$

只开下缝→光强 $I_2$

双缝齐开→$I_{12} \neq I_1 + I_2$




通过上缝的光波用 $A_1(x)e^{-i\omega t}$ 描述

通过下缝的光波用 $A_2(x)e^{-i\omega t}$ 描述

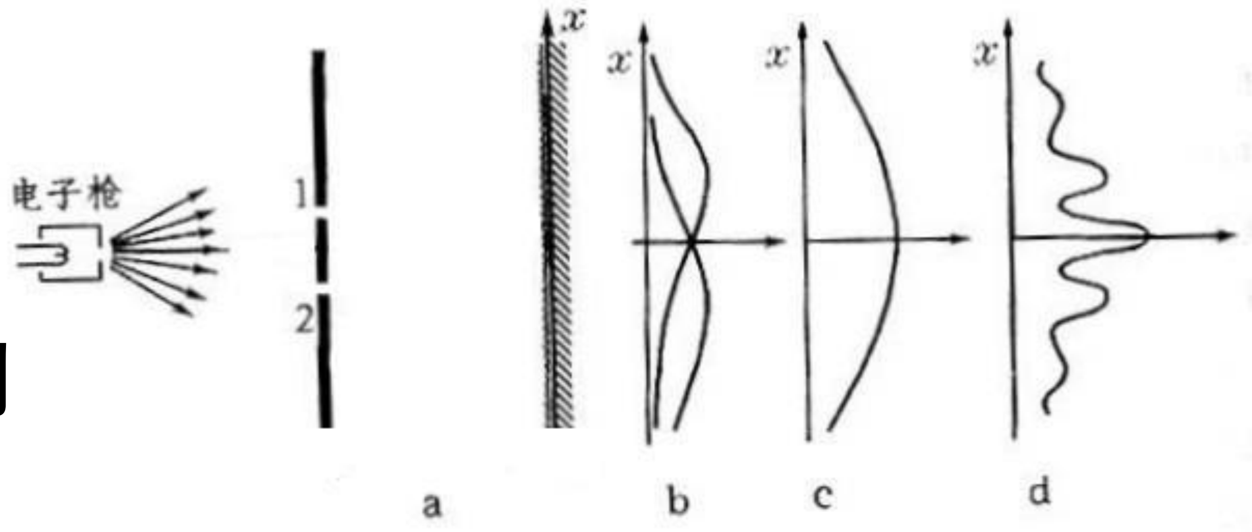
双缝 齐开时的光波为 $(A_1 + A_2)e^{-i\omega t}$

光强为$\mathbf{I}_{12} = |\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2|^2 = |\mathbf{A}_1|^2 + |\mathbf{A}_2|^2 + \underbrace{\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^*}_{\text{干涉项}}$

$= I_1 + I_2$+干涉项

## （3）电子

通过双缝后，
分布是d不是c。
电子的状态用
波函数$\Psi$描述。




只开上缝时，电子有一定的概率通过上缝，
其状态用 $\psi_1(x)$描述，电子的概率分布为$P_1=|\Psi_1|^2$
只开下缝时，电子有一定的概率通过下缝，
其状态用 $\psi_2(x)$ 描述，电子的概率分布为$P_2=|\Psi_2|^2$
双缝齐开时，电子可通过上缝也可通过下缝，
通过上、下缝各有一定的概率，$\psi_1$、$\psi_2$ 都有。

总的概率幅为 $\Psi_{12}=\Psi_1+\Psi_2$

$$P_{12}=|\Psi_{12}|^2=|\Psi_1+\Psi_2|^2\neq|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2=P_1+P_2$$

出现了干涉。可见，干涉是概率波的干涉，是由于概率幅的线性叠加产生的。

即使只有一个电子，当双缝齐开时，它的状态也要用 $\Psi_{12}=\Psi_1+\Psi_2$ 来描述。

两部分概率幅的叠加就会产生干涉。

微观粒子的波动性，实质上就是概率幅的相干叠加性。衍射图样是概率波的干涉结果。

## 4、统计解释对波函数提出的要求

根据波函数的统计解释，它应有以下性质：

1）有限性：在空间任何有限体积元ΔV中找到粒子的概率 $\left(\iiint_{\Delta V}|\Psi|^2\,\mathrm{d}V\right)$ 必须为有限值。

归一化：在空间各点的概率总和必须为1。

归一化条件：$\int_{\Omega}\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2\mathrm{d}V=1$，($\Omega$ — 全空间)

若 $\int_{\Omega}\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2\mathrm{d}V=A$， 则 $\int_{\Omega}\left|\frac{1}{\sqrt{A}}\Psi(\vec{r},t)\right|^2\mathrm{d}V=1$

$\frac{1}{\sqrt{A}}$ — 归一化因子

2）单值性：波函数应单值，从而保证概率密度在任意时刻、任意位置都是确定的。

3）连续性：

●波函数连续，保证概率密度连续。

●对于势场连续点，或势场不是无限大的间断点，波函数的一阶导数连续。

玻恩（M.Born，1882 – 1970）

由于进行了量子力学的基本研究，特别是对波函数作出的统计解释，获得了1954年诺贝尔物理学奖。

波函数本身“测不到，看不见”，是一个很抽象的概念，但是它的模方给我们展示了粒子在空间分布的图像，即粒子坐标的取值情况。当测量粒子的某一力学量的取值时，只要给定描述粒子状态的波函数，按照量子力学给出的一套方法就可以预言一次测量可能测到哪个值，以及测到这个值的概率是多少。

对波恩的统计诠释是有争论的，爱因斯坦就反对统计诠释。他不相信“上帝玩掷骰子游戏”，认为用波函数对物理实在的描述是不完备的，还有一个我们尚不了解的“隐参数”。虽然至今所有实验都证实统计诠释是正确的，但是这种关于量子力学根本问题的争论不但推动了量子力学的发展，而且还为量子信息论等新兴学科的诞生奠定了基础。

## 5、自由粒子的波函数

与自由粒子相联系的德布罗意波，是一个单色平面波。

**沿+$x$传播的单色平面波，波函数：**

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$$

**复数形式可写成**

$$y(x,t)=Ae^{-i(\omega t-kx)}$$

微观粒子波函数一般是坐标和时间的复函数，因此采用复数形式的平面波表达式，只要把其中描述波动性的参量$\omega$、$k$换成描述粒子性的参量$E$、$p$就可以了。

由德布罗意关系 $\nu=\frac{E}{h},\lambda=\frac{h}{p}$ ，得

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi E}{h}=\frac{E}{\hbar}$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi p}{h}=\frac{p}{\hbar}$$

其中

$$\hbar=\frac{h}{2\pi}=1.05\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}=6.58\times10^{-16}\,\mathrm{eV\cdot s}$$

**自由粒子波函数**：$\Psi(x,t)=Ae^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

$\Psi(x,t)=\Phi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$，$\Phi(x)=Ae^{\frac{i}{\hbar}px}$（空间因子）

自由粒子波函数：

$$\boxed{\Phi(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}px}}$$

$p>0$：向右

$p<0$：向左

三维：

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = Ae^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}}$$

概率密度：$|\Phi|^2 = |A|^2 = \text{const}.$

空间位置完全不确定，动量取确定值 $\vec{p} = \text{const}.$

在量子力学中，凡某一物理量有确定数值的状态称为该物理量的**本征态**。上述平面波所描述的量子态，具有确定的动量，所以它是动量的本征态。相应的波函数叫**本征函数**，物理量的数值叫**本征值**。

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}|A|^2\mathrm{d}x\to\infty$$

原因：$\Phi(x)$代表全空间理想平面波，而实际的自由粒子，例如由加速器引出的粒子束，只能分布在有限的空间内。若限定粒子只能出现在某一区间，则自由粒子波函数变成

$$\Phi(x)=\begin{cases}Ae^{\frac{i}{\hbar}px}, & |x|\le L/2\\ 0, & |x|>L/2\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x)|^2\mathrm{d}x=A^2\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}x=1$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{L}}$$

"归一化"的自由粒子波函数：

$$\Psi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{L}}e^{\frac{i}{\hbar}px}, & |x|\le L/2\\ 0, & |x|>L/2\end{cases}$$

这称为"箱归一化"，上式表示的就是自由粒子的"箱归一化"波函数。

为回到原来理想平面波的情况，只要在用箱归一化波函数所得结果中，令$L\to\infty$就可以了。

## 三、状态叠加原理

**量子力学要求：**若体系具有一系列互异的可能状态$\{\Psi_1, \Psi_2 \cdots\}$，则它们的**线性组合**

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$$

也是该体系的一个**可能的状态**。展开系数$C_n$为任意复常数。

若叠加中各状态间的差异无穷小，则应该**用积分代替求和：**

$$\Psi = \int C_\lambda \Psi_\lambda \, \mathrm{d}\lambda$$

从形式上看，量子力学中的态的叠加与经典波中子波的叠加相同，但两者物理本质完全不同。在量子力学中，态叠加原理是波的叠加性与“波函数完全地描述一个粒子的运动状态”两个概念的概括，是量子态的叠加。当一个粒子处于下式所描述的叠加态时，

$$\psi(\vec{r},t)=c_1\psi_1(\vec{r},t)+c_2\psi_2(\vec{r},t)$$

它同时地既处在“1”态，又处在“2”态，这是经典概念所不能理解的。

若$\Psi_1$、$\Psi_2$为粒子某个物理量A的本征函数，本征值分别为$A_1$和$A_2$，则当粒子处于$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2$态，并测量其物理量A时，有时会得到$A_1$，有时会得到$A_2$，两者出现的次数之比为

$$\frac{|C_1|^2}{|C_2|^2}$$

（若用归一化波函数，应有 $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$ ）

至于某一次测量结果究竟是什么，则是事先不能确定的。态的叠加导致测量的某种不确定性。

## 四、对波粒二象性的理解

粒子性

- "原子性"或"整体性"：

  只在空间和时间的很小区域内，作为一个整体产生效果。

- 具有集中的能量$E$和动量$p$

- 不是经典粒子！抛弃了"轨道"概念！

  轨道：粒子在任意时刻都具有确定的位置和速度，从而下一时刻的位置和速度完全确定。但这和粒子性本身是完全不同的两个概念。

波动性

- "相干叠加"、干涉、衍射、偏振

- 具有波长$\lambda$和波矢 $\vec{k}\left(=\dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{e}\right)$

- 不是经典波！不代表实在物理量的波动。

## 26.7 不确定关系 （uncertainty relation）

经典粒子的轨道概念在多大程度上适用于微观世界？1927年，海森伯分析了一些理想实验并考虑到德布罗意关系，得出不确定度关系（测不准关系）：**粒子在同一方向上的坐标和动量不能同时确定。**

如果用$\Delta x$代表位置的测量不确定度（不确定范围），用$\Delta p_x$代表沿$x$方向的动量的测量不确定度，那么它们的乘积有一个下限，即

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

$$\Delta p_x = \sqrt{\overline{\left(p_x - \overline{p_x}\right)^2}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\overline{\left(x - \overline{x}\right)^2}}$$

**不确定度关系：**

$$\boxed{\Delta x\cdot\Delta p_x\geq\frac{\hbar}{2},\quad \Delta y\cdot\Delta p_y\geq\frac{\hbar}{2},\quad \Delta z\cdot\Delta p_z\geq\frac{\hbar}{2}}$$

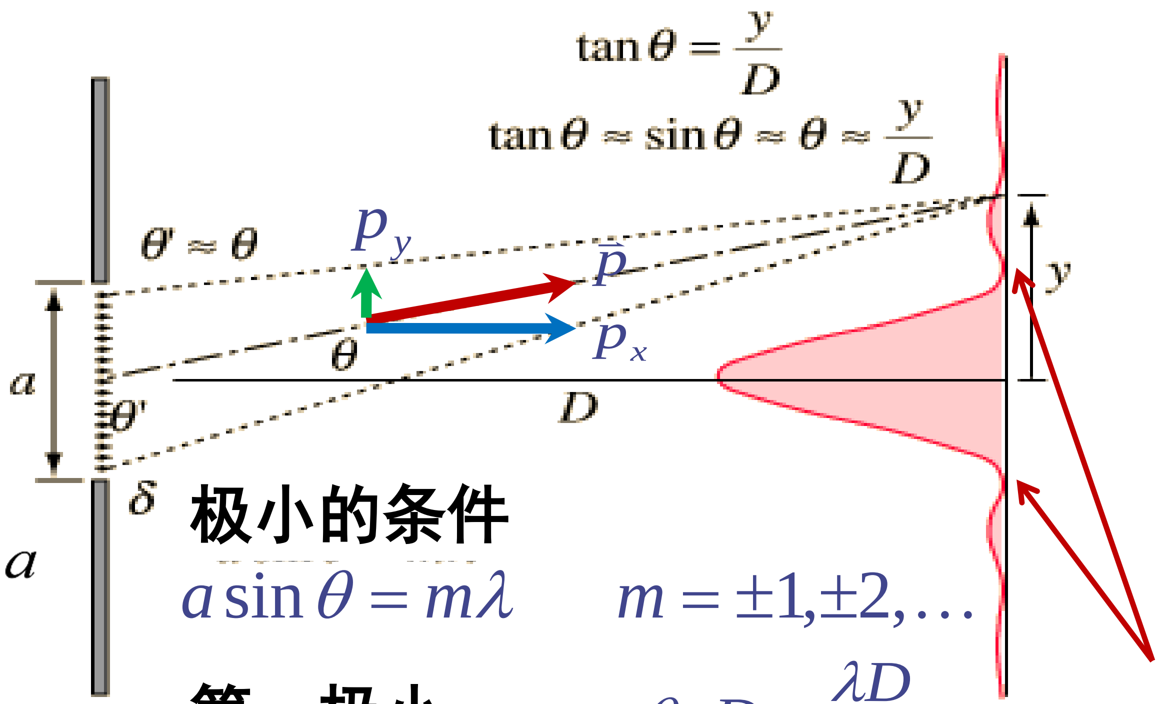
**能量和时间之间的不确定度关系：**

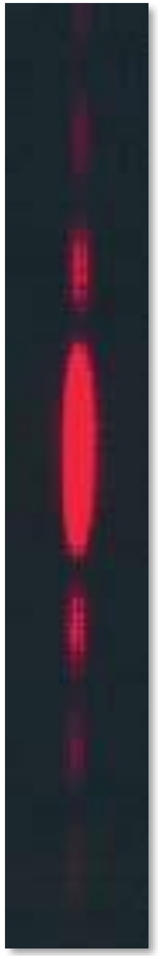
$$\boxed{\Delta E\cdot\Delta t\geq\frac{\hbar}{2}}$$

$$\boxed{\tau\Gamma\sim\hbar}$$

$\tau$：寿命，$\Gamma$：能级宽度。

## 单缝衍射： $\lambda \sim a$ $\quad\quad$ $\Delta p_y \Delta y \geq h$



**极小的条件**

$\Delta y = a$

$$a\sin\theta = m\lambda \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

**第一极小** $\quad y_1 \approx \theta \cdot D \approx \dfrac{\lambda D}{a}$

$$\Delta p_y \approx p_y = p\sin\theta = p\lambda / a = p\lambda / \Delta y$$

第26章结束