第一章 解耦控制

本章内容

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

1. 基本概念
2. 串联补偿器方法
3. 状态反馈+输入变换
4. 解耦阶常数的性质
5. 闭环极点配置
6. 静态解耦控制

基本概念

多变量系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

飞机控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$为高度，

$x_2(t)$为前向速度，

$x_3(t)$为俯仰角，

$x_4(t)$为俯仰角速度，

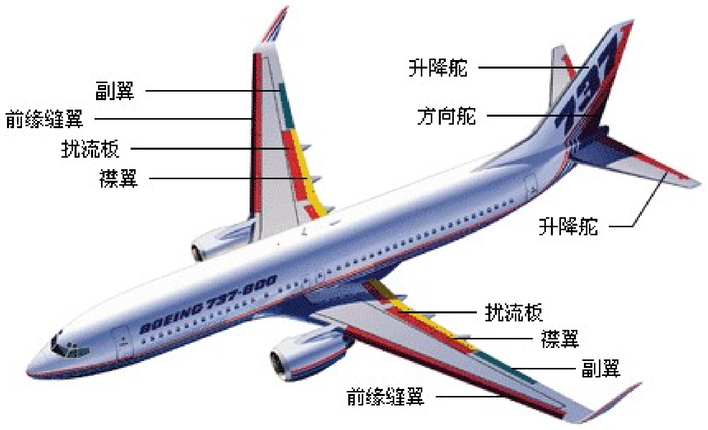
$x_5(t)$为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$为扰流板角度，

$u_2(t)$为前向加速度，

$u_3(t)$为升降舵角度。

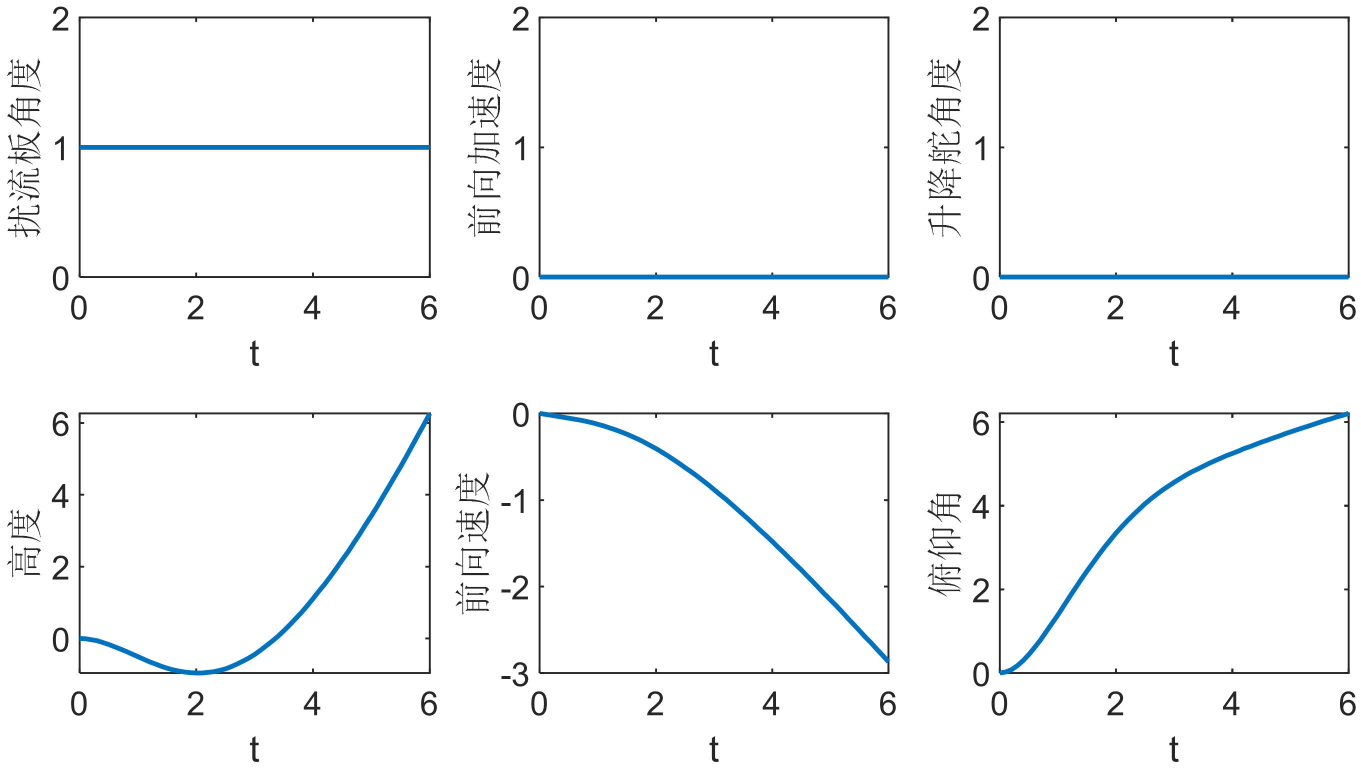


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

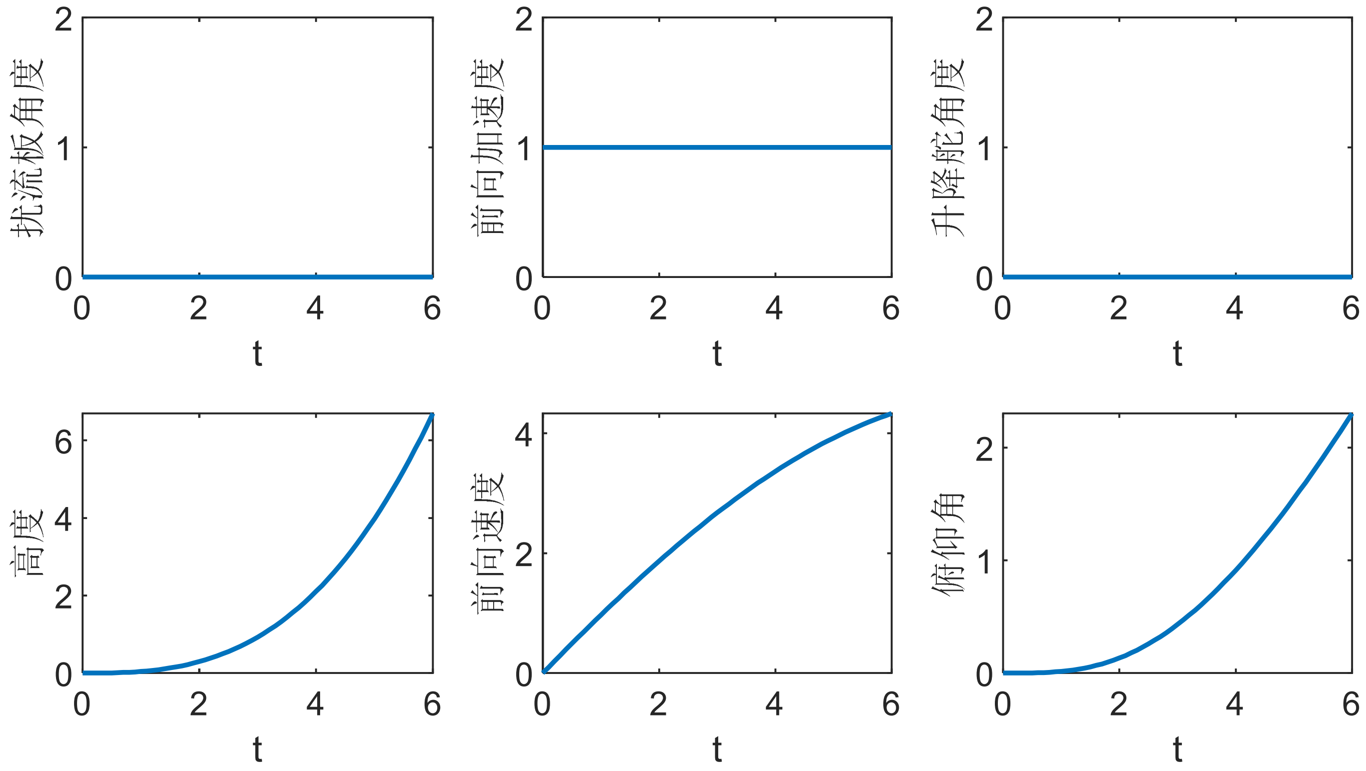
控制互耦（调节扰流板）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



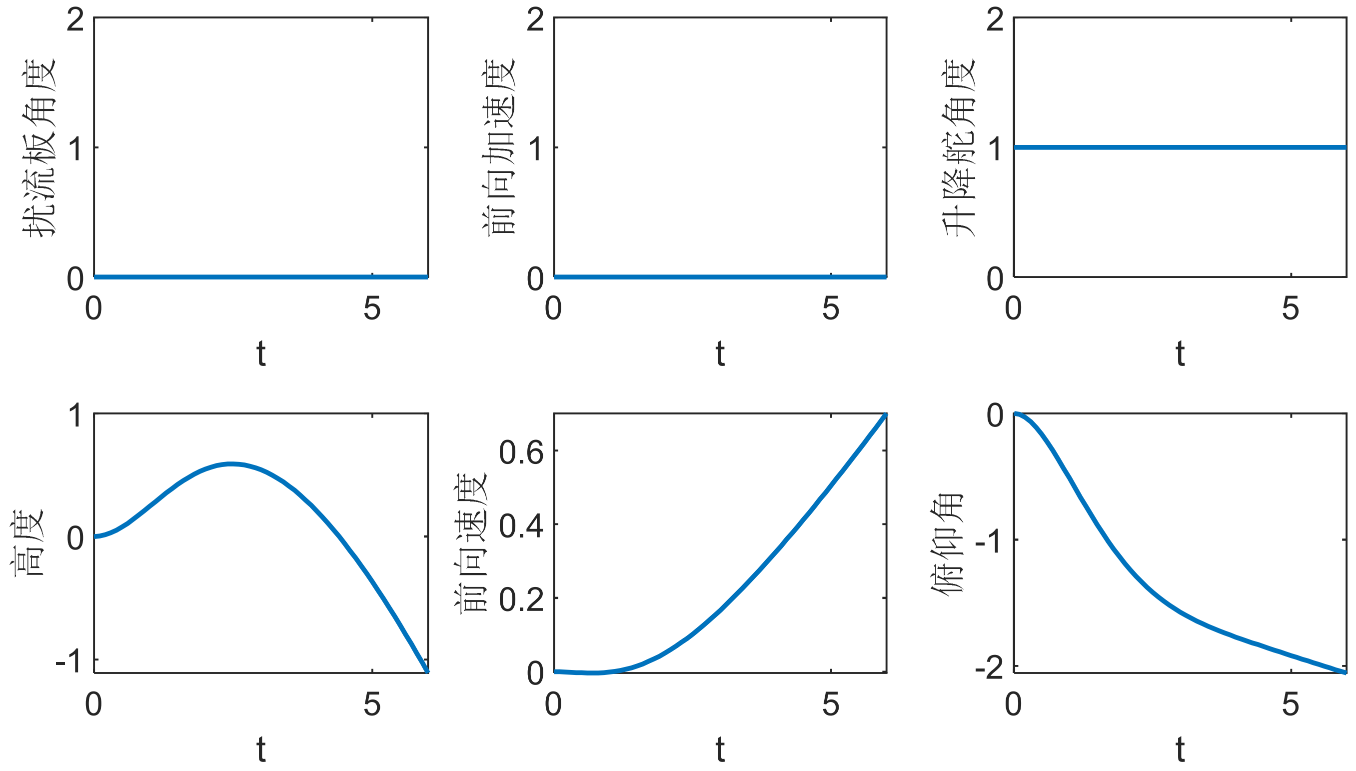
控制互耦（调节加速度）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



控制互耦（调节升降舵）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

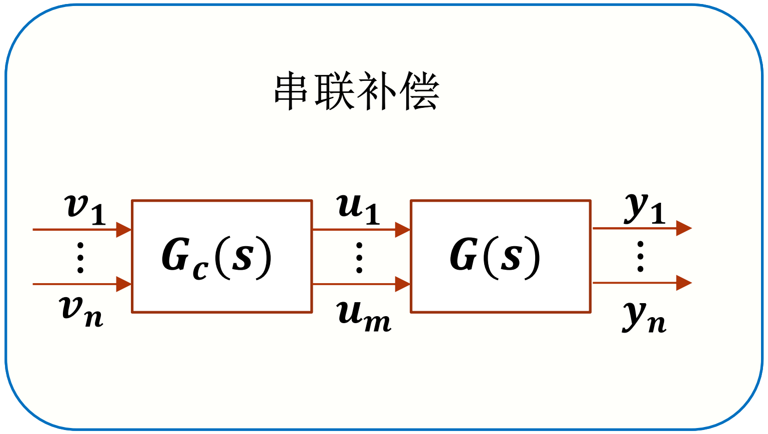


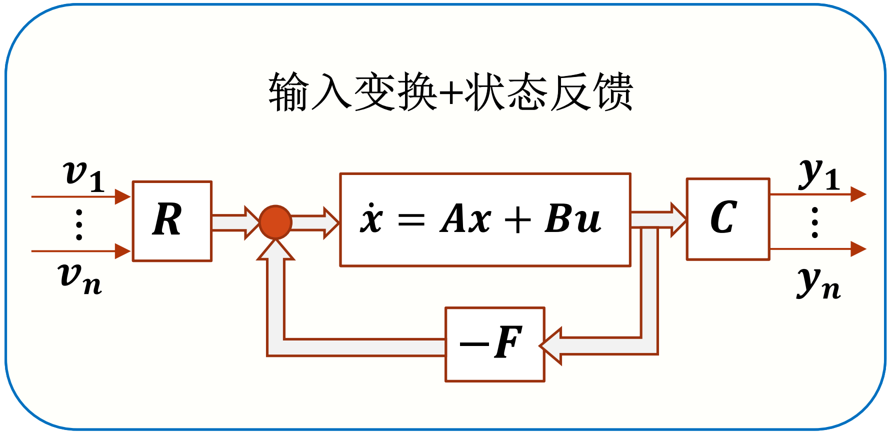
解耦控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

如何通过输入变换和反馈改造系统结构，使系统的参考输入和输出之间一一对应、互不耦合.

优点：将控制设计分解为多个易于分析的单变量问题。





多选题 1分

设置

请问下列哪些矩阵 A 存在右逆（即存在A_R使得$A \times A_R = I$）？

A $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

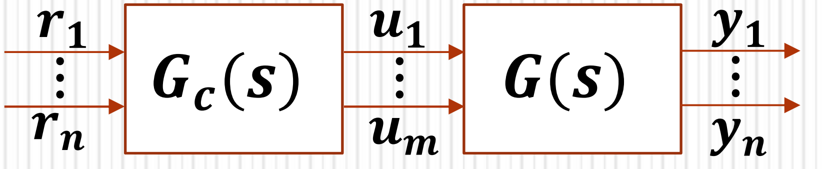
B $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

提交

串联补偿器方法



解耦系统

记$\boldsymbol{G(s)}$为$\boldsymbol{n}$-输入 $\boldsymbol{n}$-输出线性定常系统的传递函数矩阵.

定义1：若$\boldsymbol{G(s)}$为非奇异对角阵，则称该系统为输入输出解耦系统.

$$\boldsymbol{G(s)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g_1(s)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{g_n(s)} \end{bmatrix}$$

定义2：对角元素为积分器的解耦系统称为积分型解耦系统 (Integral Decoupling)

$$\boldsymbol{G(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{s^{\alpha_1}}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{s^{\alpha_n}}} \end{bmatrix}$$

可逆系统

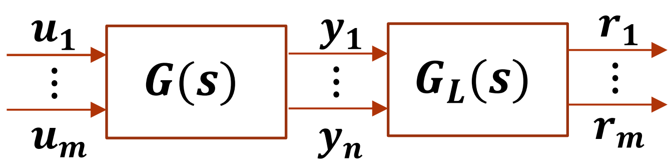
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

记$G(s)$为m-输入 n-输出线性定常系统的传递函数矩阵.

定义1：若存在$G_L(s)$使得

$$G_L(s)G(s)=\mathbb{I}_m$$

则称系统$G(s)$是左可逆的，$G_L(s)$称为左逆系统.



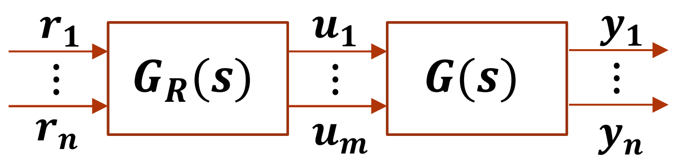
可用于恢复未知输入信号（$n\geq m$）

（又称函数可观性）

定义2: 若存在$G_R(s)$使得

$$G(s)G_R(s)=\mathbb{I}_n$$

则称系统$G(s)$是右可逆的，$G_R(s)$称为右逆系统.



可用于按需设计控制输入（$m\geq n$）

（又称函数可控性）

可逆系统

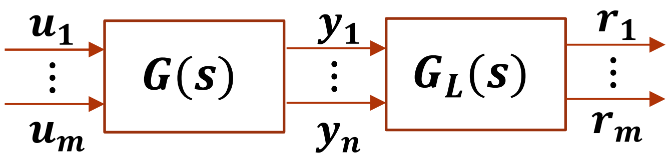
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

记$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$为$\boldsymbol{m}$-输入 $\boldsymbol{n}$-输出线性定常系统的传递函数矩阵.

定义1：若存在$\boldsymbol{G}_L(\boldsymbol{s})$使得

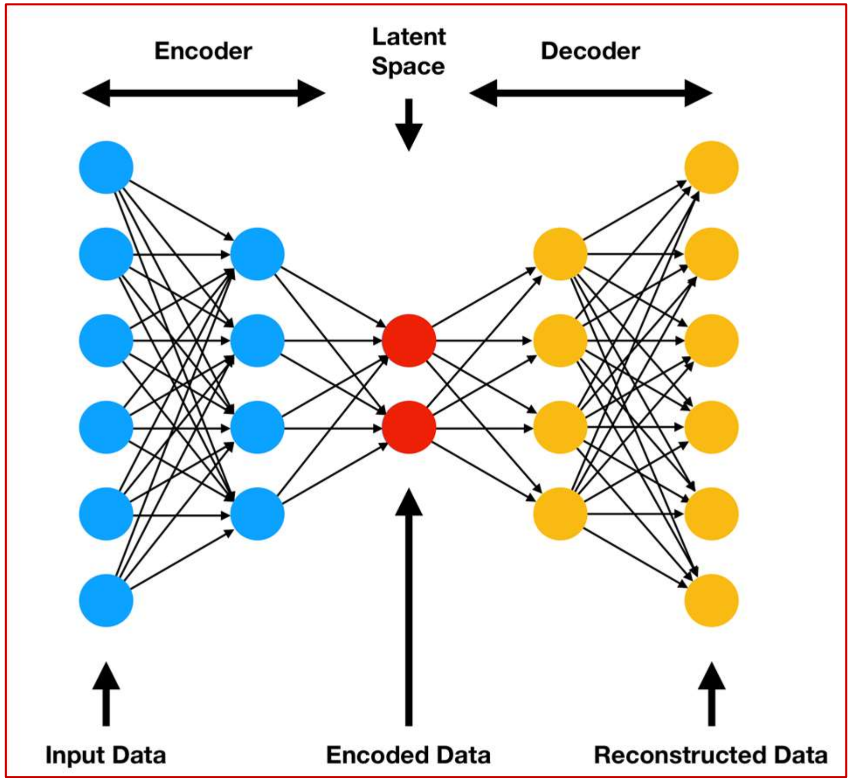
$$\boldsymbol{G}_L(\boldsymbol{s})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) = \mathbb{I}_m$$

则称系统$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$是左可逆的，$\boldsymbol{G}_L(\boldsymbol{s})$称为左逆系统.



可用于恢复未知输入信号（$\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{m}$）

（又称函数可观性）

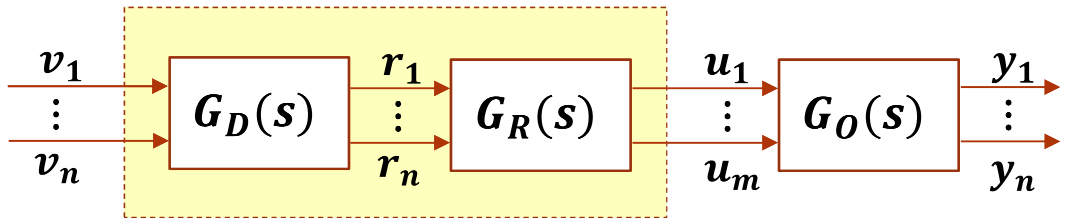


自编码器（Auto-encoder）

串联补偿解耦

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

对于给定的多输入多输出系统 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G_O}(s)\boldsymbol{u}$,



若$G_O(s)$右可逆，则可以通过串联补偿器：

$$G_C(s) = G_R(s)G_D(s), \text{ 其中 } G_D(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{s^{\alpha_1}}, \cdots, \frac{1}{s^{\alpha_m}}\right]$$

将系统补偿为积分型解耦系统 $y(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{s^{\alpha_1}}, \cdots, \frac{1}{s^{\alpha_m}}\right] v(s)$：

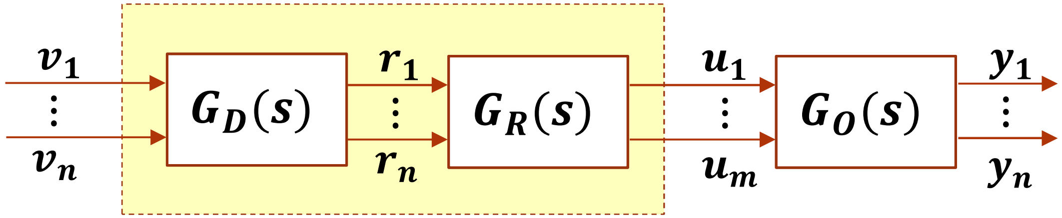
$$y_i(s) = \frac{1}{s^{\alpha_i}} v_i(s), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

—— 解铃还须系铃人

串联补偿器方法

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

基本性质：系统$G_O(s)$可解耦与系统（右）可逆是等价的.



- 若$G_O(s)$右可逆，则系统一定可解耦.

- 若$G_O(s)$可解耦，则系统一定右可逆.

证明：此时存在控制器 $G_C(s)$，使得$G_D(s) = G_C(s)G_O(s)$是解耦系统，故$G_D^{-1}(s)G_C(s)$是系统的右逆系统.

推论：若系统可解耦，则输入个数一定不小于输出个数

示例

求一个串联补偿器使下述系统实现积分型解耦控制。

$$G_O(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{-1}{s+1}\\ \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

解：可构造如下补偿器实现积分型解耦

$$G_C(s)=G_O^{-1}(s)G_D(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2}\\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s^{\alpha_1}} & \\ & \frac{1}{s^{\alpha_2}}\end{bmatrix}$$

问题：α_1和α_2应该如何选取？

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

如下形式的 $\boldsymbol{G_D}(s)$ 是否可以实现解耦?

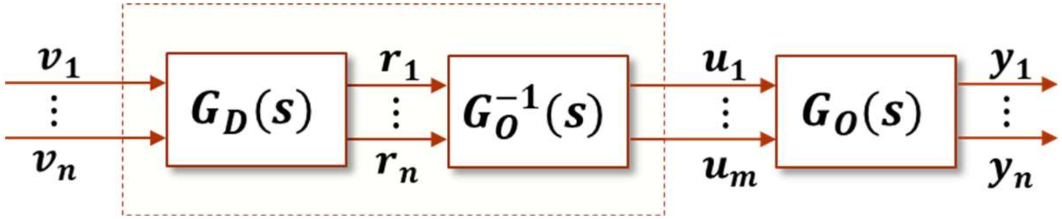
- $\boldsymbol{G_D}(s) = \mathrm{diag}\left[1\ ,\quad \frac{1}{s}\right]$
- $\boldsymbol{G_D}(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{s}\ ,\quad \frac{1}{s^2}\right]$
- $\boldsymbol{G_D}(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{s+1}\ ,\quad \frac{1}{s+2}\right]$
- $\boldsymbol{G_D}(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{s+4}{s^2+3s+2}\ ,\quad \frac{s-1}{s^2+8s+100}\right]$

$$\boldsymbol{G_C(s)} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s} \end{bmatrix} \boldsymbol{G_D(s)}$$

为保证物理可实现性，$\boldsymbol{\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1}$（$\Rightarrow$ 解耦阶常数）

串联型补偿的优缺点

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



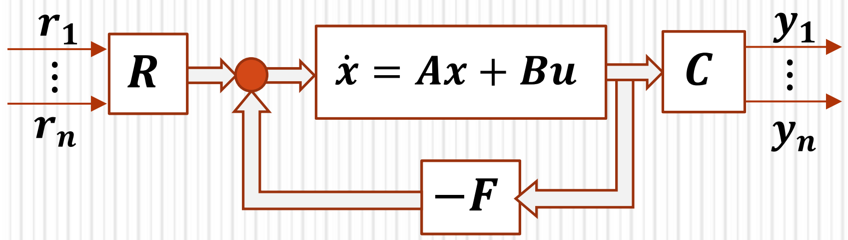
（1）结构简单，无需对输出或者状态进行量测;

（2）动态补偿器包含内部模态，动力学复杂;

（3）可能存在不稳定零极相消：$G_O(s)G_O^{-1}(s)G_L(s)$;

（4）未考虑初值的影响.

状态反馈 + 输入变换

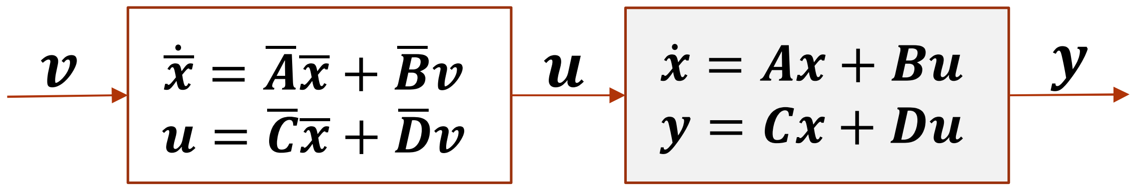


状态空间模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

待解耦系统 $\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases}$，其中$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^m$.

能否也能够采用串联逆系统的方法解耦?



假如D是可逆矩阵，则从状态方程可以得到逆系统方程：

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}} = (A - BD^{-1}C)\bar{x} + BD^{-1}v \\ u = D^{-1}v - D^{-1}C\bar{x}\end{cases} \quad 【\bar{x}(0) = x(0)】$$

状态空间模型

$$\boldsymbol{v} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} &= \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u} &= \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{v}\end{aligned}} \xrightarrow{\ \boldsymbol{u}\ } \boxed{\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned}} \xrightarrow{\ \boldsymbol{y}\ }$$

逆系统： $\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}\end{cases}$

若 $\bar{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}(0)$，则状态轨迹$\boldsymbol{x}(t)$和$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$应该重合。

故尝试反馈替代，得到控制律：

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

优点：结构简化；解决了初值问题；可以通过反馈镇定.

问题：若矩阵 $\boldsymbol{D}$ 不可逆怎么办?

状态空间模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑如下待解耦的系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$，其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$. 尝试采用“状态反馈+输入变换”：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ 是参考输入. 变换后的闭环系统如下:

$$\Sigma_L: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

若闭环系统 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ 为解耦系统，即闭环传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}$为非奇异对角矩阵, 则称系统 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$可 $\{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{R}\}$解耦.

分析思路

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

方程 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 里不显含输入$\boldsymbol{u}$, 说明$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$与$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$无关吗？否.

控制输入 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ 通过状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

影响 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ 的变化，从而可能影响 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$的变化，即$\dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$, $\ddot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$, ⋯等.

思路：分析每个 $\boldsymbol{y}_i(\boldsymbol{t})$ 及其各阶导数与$\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{t})$的依赖关系.

解耦阶常数

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考察待解耦系统，将第$\boldsymbol{i}$个输出$\boldsymbol{y_i = c_i^\top x}$对$\boldsymbol{t}$求导：

$$\boldsymbol{y_i^{(1)} = c_i^\top \dot{x} = c_i^\top Ax + c_i^\top Bu}$$

$$\boldsymbol{y = Cx = \begin{bmatrix} c_1^\top x \\ \vdots \\ c_m^\top x \end{bmatrix}}$$

若$\boldsymbol{c_i^\top B = 0}$，则$\boldsymbol{y_i^{(1)}}$不显含$\boldsymbol{u}$，可继续求导

$$\boldsymbol{y_i^{(2)} = c_i^\top A\dot{x} = c_i^\top A^2 x + c_i^\top ABu}$$

若$\boldsymbol{c_i^\top AB = 0}$，则$\boldsymbol{y_i^{(2)}}$不显含$\boldsymbol{u}$，仍可继续求导⋯

设求导$\boldsymbol{\alpha_i}$次后有：

$$\boldsymbol{y_i^{(\alpha_i)} = c_i^\top A^{\alpha_i} x + c_i^\top A^{\alpha_i - 1} Bu，\ c_i^\top A^{\alpha_i - 1} B \neq 0}$$

解耦阶常数

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定义：输入 $\boldsymbol{u}$ 可以直接影响 $\boldsymbol{y_i}$ 对时间导数的最小阶，即：

$$\alpha_i \triangleq \min\{k|c_i^\top A^{k-1}B \neq 0, 1 \leq k \leq n\}, \qquad i = 1, \cdots, m.$$

是否有可能 $c_i^\top A^{k-1}B = 0$ 对所有 $1 \leq k \leq n$均成立？

如果 m 个 α_i已求出，则下式成立：

$$y^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} y_1^{(\alpha_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(\alpha_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1} \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1 - 1}B \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m - 1}B \end{bmatrix} u \triangleq Lx + D_0 u$$

其中 $D_0 \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 称为可解耦矩阵.

解耦控制律设计

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

引入反馈 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$，则对于新的参考输入：

$$\boldsymbol{y}^{(\alpha)}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{F})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$$

显然，若 $\det \boldsymbol{D}_0\neq \boldsymbol{0}$，则可以选择反馈系数：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{D}_0^{-1},\quad \boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_0^{-1}\boldsymbol{L}$$

使得 $\boldsymbol{y}^{(\alpha)}=\boldsymbol{v}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 阶积分型解耦：

$$y_i^{(\alpha_i)}=v_i,\ i=1,\cdots,m.$$

注：$\boldsymbol{r}>\boldsymbol{m}$时，需 $\boldsymbol{D}_0$行满秩（右可逆），控制律不唯一

。

可解耦条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$可$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$解耦，当且仅当可解耦矩阵

$$\boldsymbol{D_0}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^\top\boldsymbol{A}^{\alpha_1-1}\boldsymbol{B}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_m^\top\boldsymbol{A}^{\alpha_m-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

为非奇异矩阵。【充分性显然，必要性怎么证明？】

此时闭环传递函数阵为：$\boldsymbol{G}(\mathbf{s})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{1/s^{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{1/s^{\alpha_m}}\end{bmatrix}.$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

给定受控系统$\boldsymbol{\Sigma_O}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，设计$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$解耦。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\-\mathbf{1}&-\mathbf{2}&-\mathbf{3}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$$

解：计算解耦阶常数

$$\boldsymbol{c}_1^{\top}\boldsymbol{B}=[1\quad 0]\neq 0\Rightarrow \alpha_1=1;$$

$$\boldsymbol{c}_2^{\top}\boldsymbol{B}=[0\quad 1]\neq 0\Rightarrow \alpha_2=1.$$

$$\boldsymbol{D}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{\top}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{c}_2^{\top}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{可解耦}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{\top}\boldsymbol{A}^{\alpha_1}\\\boldsymbol{c}_2^{\top}\boldsymbol{A}^{\alpha_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

计算$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$反馈系数矩阵：

- $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{D}_0^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_0^{-1}\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$

校验反馈后闭环传递函数矩阵：

$$\boldsymbol{G}_L(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF})^{-1}\boldsymbol{BR}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & 0\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

可以看出，闭环系统确是积分型解耦系统.

飞机垂面运动控制

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$$

其中状态分量

$\boldsymbol{x_1}(\boldsymbol{t})$为高度，

$\boldsymbol{x_2}(\boldsymbol{t})$为前向速度，

$\boldsymbol{x_3}(\boldsymbol{t})$为俯仰角，

$\boldsymbol{x_4}(\boldsymbol{t})$为俯仰角速度，

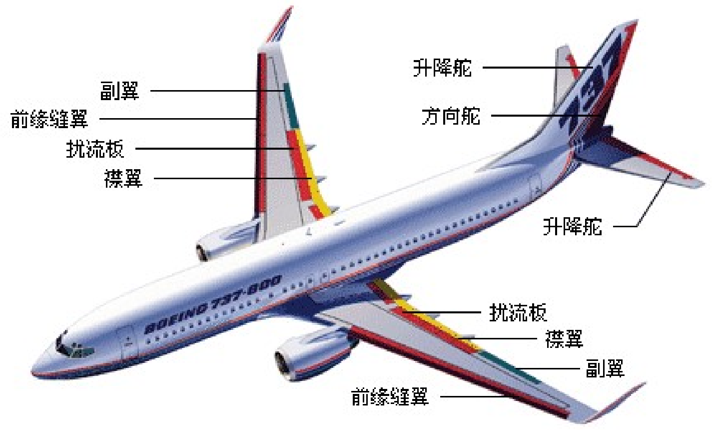
$\boldsymbol{x_5}(\boldsymbol{t})$为垂直速度；

控制分量

$\boldsymbol{u_1}(\boldsymbol{t})$为扰流板角度，

$\boldsymbol{u_2}(\boldsymbol{t})$为前向加速度，

$\boldsymbol{u_3}(\boldsymbol{t})$为升降舵角度。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\boldsymbol{CB}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\-\mathbf{0.12}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha_2}=\mathbf{1};\ \boldsymbol{CAB}=\begin{bmatrix}-1.575&\mathbf{0}&0.732\\0.125&-0.054&-0.055\\4.419&\mathbf{0}&-1.665\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha_1}=\boldsymbol{\alpha_3}=\mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{D_0}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{c}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.575&\mathbf{0}&0.732\\-0.120&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\4.419&\mathbf{0}&-1.665\end{bmatrix}$$

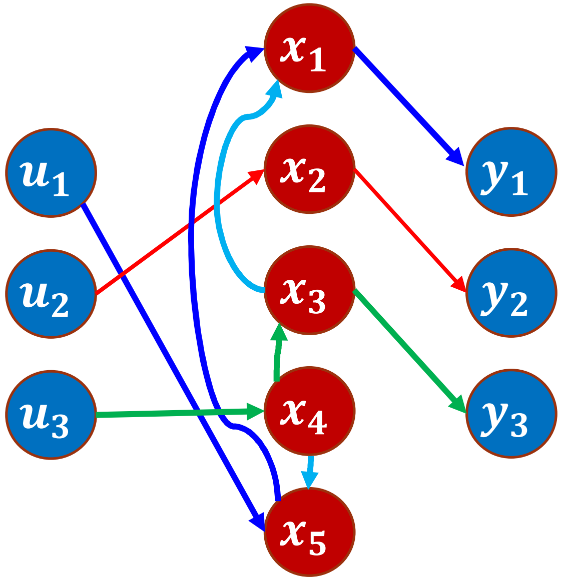
$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\\\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{c}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&0.291&\mathbf{0}&0.079&0.686\\\mathbf{0}&-0.054&-0.172&\mathbf{0}&0.075\\\mathbf{0}&0.049&\mathbf{0}&-0.856&-1.013\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{D}_0^{-1}=\begin{bmatrix}2.719&\mathbf{0}&1.195\\0.326&\mathbf{1}&0.144\\7.217&\mathbf{0}&2.572\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_0^{-1}\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&0.849&\mathbf{0}&-0.809&0.654\\\mathbf{0}&0.048&-0.172&-0.097&0.154\\\mathbf{0}&2.224&\mathbf{0}&-1.632&2.344\end{bmatrix}$$

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

闭环系统状态方程与传递函数矩阵：



$$A-BF=\begin{bmatrix}0&0&1.132&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1.132&0\end{bmatrix}$$

$$BR=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

容易计算验证： $G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2}&&\\&\frac{1}{s}&\\&&\frac{1}{s^2}\end{bmatrix}$

解耦阶常数的性质

解耦阶常数的不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：系统 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})$ 经任意 $\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$ $(\det \boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0})$变换为闭环系统 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF},\ \boldsymbol{BR},\ \boldsymbol{C})$，则变换后解耦阶常数不变.

证：计算$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$变换后系统的解耦阶常数：

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{c}_i^{\top}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF})^k\boldsymbol{BR} && (\boldsymbol{k} < \boldsymbol{\alpha}_i) \\
= \; & \boldsymbol{c}_i^{\top}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF})^{k-1}\boldsymbol{BR} && 【\because \boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}】 \\
= \; & \boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF})^{k-2}\boldsymbol{BR} && 【\because \boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}】 \\
& \vdots \\
= \; & \boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{BR}
\end{aligned}
$$

上述关系对$\boldsymbol{k} < \boldsymbol{\alpha}_i$都成立，由$\det \boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0}$，系统变换前后解耦阶常数$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$不变.

解耦阶常数与可解耦矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

待解耦系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$，其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^r, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$

经过 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{R})$ 变换 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$ 后：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

- 解耦阶常数不变
- 可解耦矩阵 $\boldsymbol{D}_0 \rightarrow \boldsymbol{D}_0\boldsymbol{R}$
- 思考：相似变换 $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 下，是否不变？

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

回顾前述串联补偿解耦的例子：$\boldsymbol{G_O(s)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{-1}{s+1}\\ \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$

构造如下补偿器实现积分型解耦：$\boldsymbol{y_i^{(\alpha_i)}=v_i}$

$$\boldsymbol{G_C(s)=G_O^{-1}(s)G_D(s)}=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2}\\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s^{\alpha_1}} & \\ & \frac{1}{s^{\alpha_2}}\end{bmatrix}$$

问题：$\boldsymbol{\alpha_1}$和$\boldsymbol{\alpha_2}$ 应该如何选取？

与解耦阶常数什么关系？是否能直接从$\boldsymbol{G_O(s)}$观察得出？

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：记 $G_O(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 为线性定常系统(A,B,C)的传递函数阵，其第i行为$g_i^{\mathrm{T}}(s)$，则解耦阶常数

$$\alpha_i=d_i-n_i,$$

其中d_i是$g_i^{\mathrm{T}}(s)$各元素通分后分母多项式的阶次，n_i为各元素分子多项式的最大阶次。可解耦矩阵 D_0 第i行的各元素等于 $g_i^{\mathrm{T}}(s)$ 对应分子多项式 n_i 次幂项的系数.

例： $G_O(s)=\frac{1}{s^3+3s^2+2s}\begin{bmatrix}2s^2+3s & s^2\\ -s & s^2\end{bmatrix}\xRightarrow[\alpha_2=3-2=1]{\alpha_1=3-2=1} D_0=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

解耦阶常数与传递函数矩阵

证：根据Fedeeva算法可知

$$g_i^{\top}(s) = c_i^{\top}(sI - A)^{-1}B = c_i^{\top}\frac{P(s)}{\psi(s)}B,$$

其中 $\psi(s) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}s + \beta_n$,

$$P(s) = p_0(s)A^{n-1} + p_1(s)A^{n-2} + \cdots + p_{n-2}(s)A + p_{n-1}(s)I$$

其中 $p_i(s)$是幂次为i的首一多项式。

根据解耦阶常数定义：$c_i^{\top}A^k B = 0$，$0 \le k < \alpha_i - 1$，故

$$\begin{aligned} g_i^{\top}(s) &= \frac{1}{\psi(s)}\left[p_0(s)c_i^{\top}A^{n-1}B + \cdots + p_{n-1}(s)c_i^{\top}B\right] \\ &= \frac{1}{\psi(s)}\left[p_0(s)c_i^{\top}A^{n-1}B + \cdots + p_{n-\alpha_i}(s)c_i^{\top}A^{\alpha_i-1}B\right] \end{aligned}$$

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\boldsymbol{g}_i^{\top}(s)=\frac{1}{\psi(s)}\left[p_0(s)\boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}+\cdots+p_{n-\alpha_i}(s)\boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{A}^{\alpha_i-1}\boldsymbol{B}\right]$$

可见 $\boldsymbol{g}_i^{\top}(s)$ 分母多项式和最高阶分子多项式的阶数为

$$d_i=n,\ \ n_i=n-\alpha_i\ \ \Rightarrow\ \ d_i-n_i=\alpha_i$$

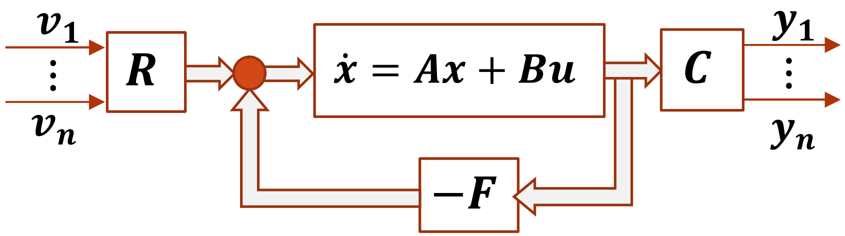
且 n_i 次幂项的系数 $\boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{A}^{\alpha_i-1}\boldsymbol{B}$ 恰为可解耦矩阵 $\boldsymbol{D}_0$的第i行。证毕。

注：解耦阶常数 α_i 等于 $\boldsymbol{g}_i^{\top}(s)$各元素的最小相对阶.

闭环极点配置

解耦系统的稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



通过 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Rv} - \boldsymbol{Fx}$ 得到的闭环系统，虽然是解耦的，但所有极点都配置在原点，不是渐近稳定的：

$$\boldsymbol{y}_i(s) = \frac{1}{s^{\alpha_i}}\boldsymbol{v}_i(s), \quad i = 1, \cdots, m$$

因此，需要通过改变反馈策略将极点配置到左半开平面.

期望闭环系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

希望通过极点配置改造闭环系统的传递函数:

$$G_i(s) = \frac{1}{\psi_i^*(s)}$$

其中 $\psi_i^*(s)$是一个同阶Hurwitz多项式:

$$\psi_i^*(s) = s^{\alpha_i} + \beta_{i1}s^{\alpha_i-1} + \cdots + \beta_{i\alpha_i}$$

即期望第i个子系统满足微分方程:

$$y_i^{(\alpha_i)}(t) + \beta_{i1}y_i^{(\alpha_i-1)}(t) + \cdots + \beta_{i\alpha_i}y_i(t) = v_i(t)$$

期望闭环系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

若已通过$\{F,R\}$变换实现解耦： $y_i^{(\alpha_i)}(t)=v_i(t)$

可以在此基础上进一步通过反馈

$$v_i(t)=\bar{v}_i(t)-\beta_{i1}y_i^{(\alpha_i-1)}(t)-\cdots-\beta_{i\alpha_i}y_i(t)$$

实现极点配置：

$$y_i^{(\alpha_i)}(t)+\beta_{i1}y_i^{(\alpha_i-1)}(t)+\cdots+\beta_{i\alpha_i}y_i(t)=\bar{v}_i(t)$$

两重反馈可以合并为一个$\{F,R\}$变换.

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_i(t) \\ \vdots \\ y_i^{(\alpha_i-1)}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_i^{\top} \\ \vdots \\ c_i^{\top}A^{\alpha_i-1} \end{bmatrix}x}$$

解耦控制律

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

将已知关系 $\boldsymbol{y}_i^{(k)}=\begin{cases}\boldsymbol{c}_i^\top\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}, & k<\alpha_i\\ \boldsymbol{c}_i^\top\boldsymbol{A}^{\alpha_i}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i^\top\boldsymbol{A}^{\alpha_i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, & k=\alpha_i\end{cases}$

代入

$$\boldsymbol{y}_i{}^{(\alpha_i)}(t)+\beta_{i1}\boldsymbol{y}_i^{(\alpha_i-1)}(t)+\cdots+\beta_{i\alpha_i}\boldsymbol{y}_i(t)=\boldsymbol{v}_i(t)$$

得

$$\boldsymbol{c}_i^\top\boldsymbol{\psi}_i^*(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{c}_i^\top\boldsymbol{A}^{\alpha_i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{v}_i(t)$$

其中 $\boldsymbol{\psi}_i^*(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{\alpha_i}+\beta_{i1}\boldsymbol{A}^{\alpha_i-1}+\cdots+\beta_{i\alpha_i}\boldsymbol{I}$

解耦控制律

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理　系统$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})$可通过反馈$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$解耦，并使闭环传递函数为对角阵【注：不能配置零点.】

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})=\mathbf{diag}\left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{s})},\cdots,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{s})}\right]$$

的充要条件是可解耦矩阵$\boldsymbol{D}_{\mathbf{0}}$非奇异，所需的矩阵解为：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{D}_{\mathbf{0}}^{-\mathbf{1}},\quad \boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_{\mathbf{0}}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{L}$$

其中 $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{\mathbf{1}}^{\top}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{1}}^{*}(\boldsymbol{A})\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{m}}^{\top}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{m}}^{*}(\boldsymbol{A})\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{\mathbf{1}}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{m}}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$.

示例：飞机控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$为高度，

$x_2(t)$为前向速度，

$x_3(t)$为俯仰角，

$x_4(t)$为俯仰角速度，

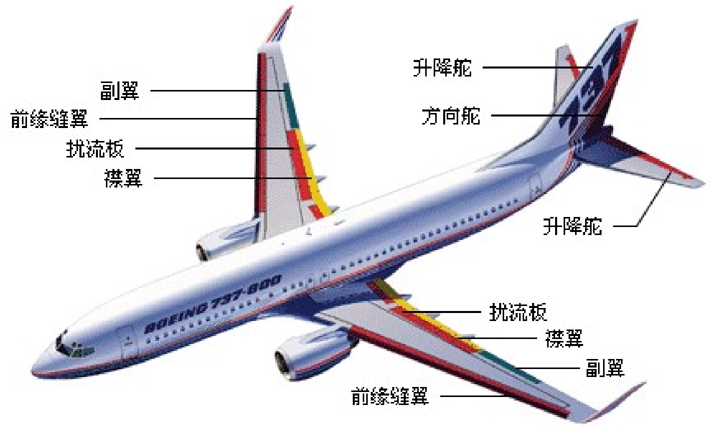
$x_5(t)$为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$为扰流板角度，

$u_2(t)$为前向加速度，

$u_3(t)$为升降舵角度。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

示例：飞机控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

选择期望的闭环传递函数（$\boldsymbol{\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2}$）：

$$\boldsymbol{\psi_1^*(s) = s^2 + 18s + 80},\ \boldsymbol{\psi_2^*(s) = s + 1},\ \boldsymbol{\psi_3^*(s) = s^2 + 30s + 200}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_1^\top(A^2 + 18A + 80I)} \\ \boldsymbol{c_2^\top(A + I)} \\ \boldsymbol{c_3^\top(A^2 + 30A + 200I)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 0.291 & 20.376 & 0.079 & -17.314 \\ 0 & 0.946 & -0.172 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0.049 & 200 & 29.144 & -1.013 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_1^\top AB} \\ \boldsymbol{c_2^\top B} \\ \boldsymbol{c_3^\top AB} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.719 & \mathbf{0} & 1.195 \\ 0.326 & \mathbf{1} & 0.144 \\ 7.217 & \mathbf{0} & 2.572 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{RL} = \begin{bmatrix} 217.529 & 0.849 & 294.490 & 35.054 & -48.290 \\ 26.103 & 1.048 & 35.167 & 4.207 & -5.720 \\ 577.333 & 2.224 & 661.473 & 75.532 & -127.556 \end{bmatrix}$$

示例：飞机控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

为保持静态时单位传输关系，调整矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}2.719 & \mathbf{0} & 1.195\\ 0.326 & \mathbf{1} & 0.144\\ 7.217 & \mathbf{0} & 2.572\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}80 & & \\ & \mathbf{1} & \\ & & 200\end{bmatrix}$$

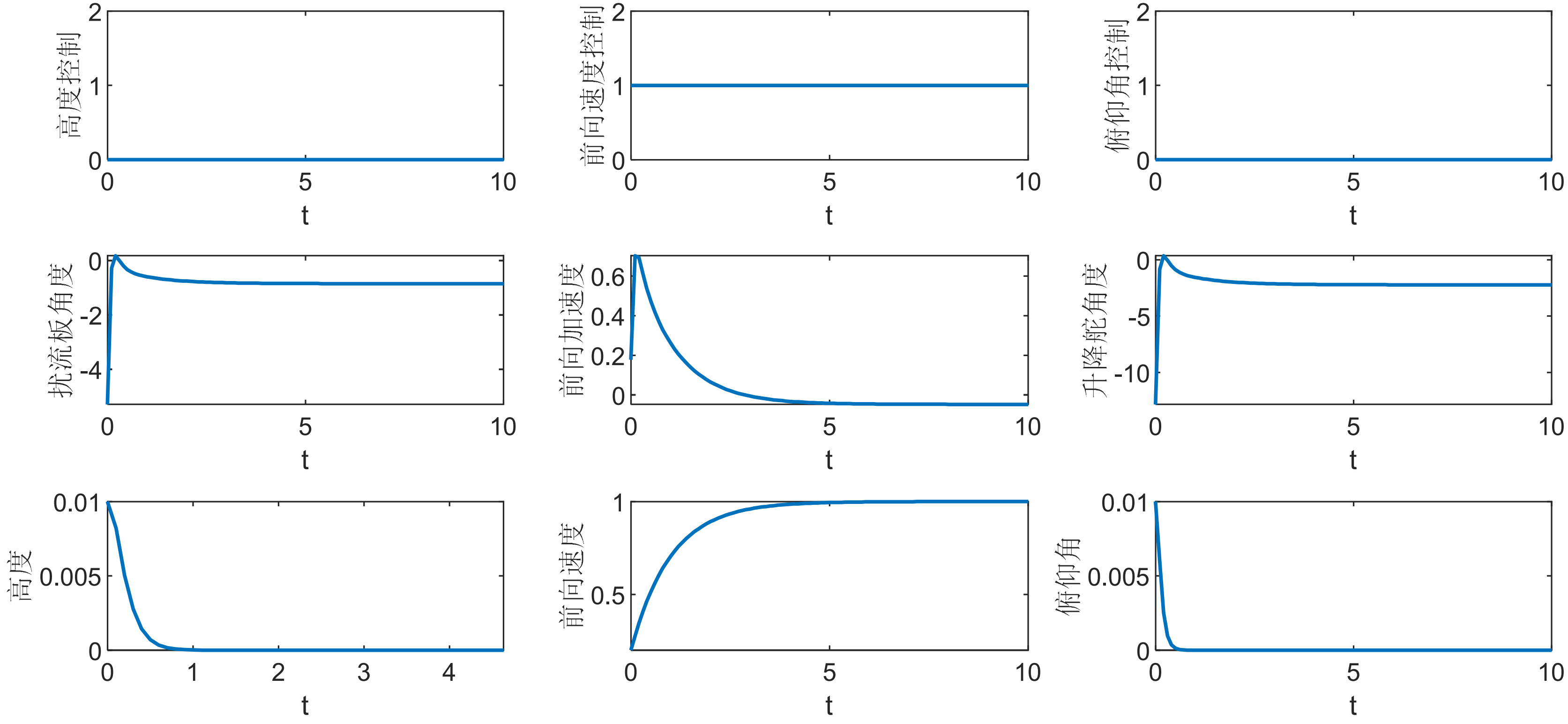
变换后的系统传递函数为：

$$\boldsymbol{G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2+18s+80}} & & \\ & \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s+1}} & \\ & & \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2+30s+200}}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\dfrac{\mathbf{80}}{\boldsymbol{s^2+18s+80}} & & \\ & \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s+1}} & \\ & & \dfrac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{s^2+30s+200}}\end{bmatrix}$$

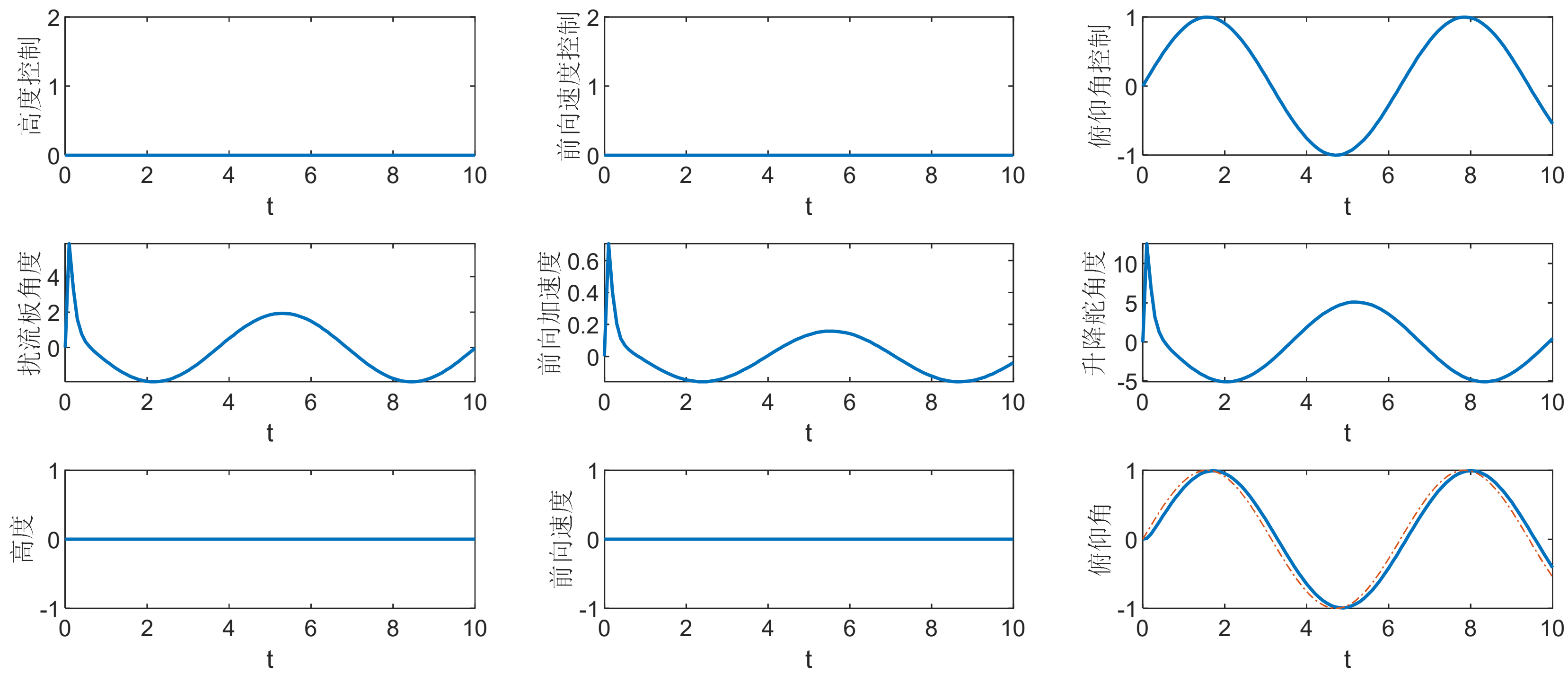
仿真效果

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



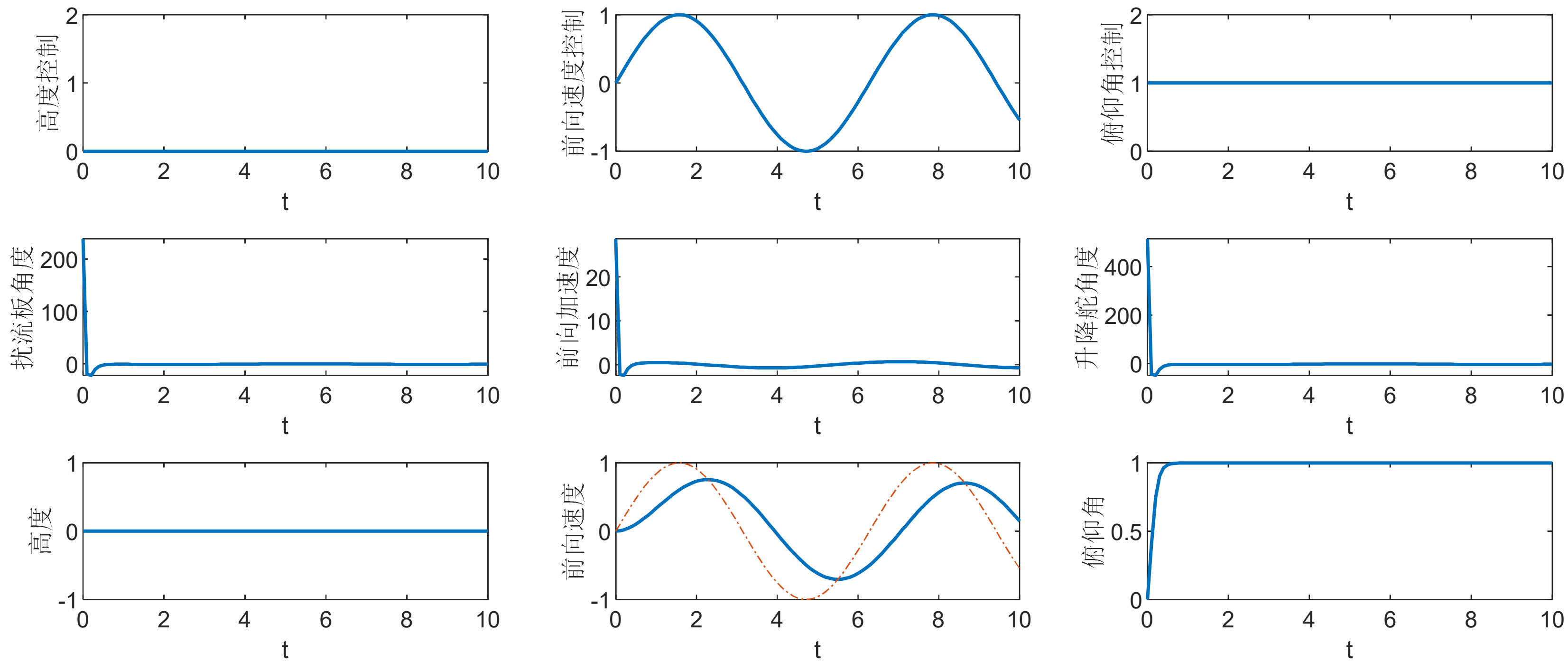
仿真效果

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



仿真效果

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

为下列系统 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$设计 $\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$ 解耦并配置极点：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解：根据之前计算$\boldsymbol{\alpha_1}=\boldsymbol{\alpha_2}=\mathbf{1}$，故 $\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}<\mathbf{3}$.

$$\boldsymbol{Q_c}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-3}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-3}&\mathbf{3}&\mathbf{7}\end{bmatrix},\boldsymbol{Q_O}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-2}&\mathbf{-3}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-2}&\mathbf{-3}\\\mathbf{3}&\mathbf{6}&\mathbf{7}\end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

解：根据之前计算$\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_2 = 1}$. 设目标特征多项式为：

$$\psi_1^*(s) = s + \beta_1, \qquad \psi_2^*(s) = s + \beta_2$$

因此得到

$$D_0 = \begin{bmatrix} c_1^\top B \\ c_2^\top B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} c_1^\top \psi_1^*(A) \\ c_2^\top \psi_2^*(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 & 1 \\ -1 & -2 & \beta_2 - 3 \end{bmatrix}$$

$$R = D_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = D_0^{-1} L = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 & 1 \\ -1 & -2 & \beta_2 - 3 \end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

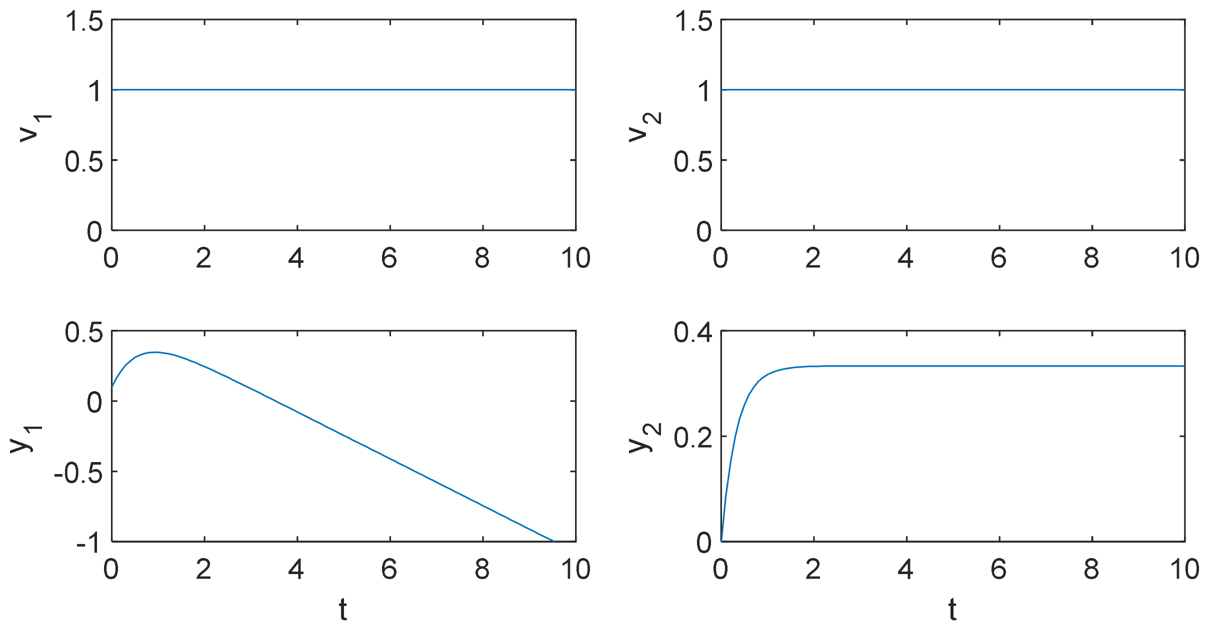
校核闭环系统：

$$A-BF=\begin{bmatrix}-\beta_1 & -\beta_1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\beta_2\end{bmatrix}$$

$$BR=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+\beta_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+\beta_2}\end{bmatrix}$$

示例



取 $\boldsymbol{\beta_1 = -2, \beta_2 = -3}$，闭环系统应该动态解耦且渐进稳定，但为什么第一个输出没有跟踪第一个输入?

解耦零点

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

若闭环解耦系统积分环节个数小于状态个数，即

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\alpha}_i < \boldsymbol{n}$$

则意味着传递函数矩阵存在一个 $\boldsymbol{\alpha}$ 维状态空间实现，即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF},\boldsymbol{BR},\boldsymbol{C})$不是一个最小实现.

反馈改变了系统的能观性，从而产生零极相消，并且相消的极点可能是不稳定的.

问题*：能否通过反馈实现解耦控制，并配置这些极点?

静态解耦控制

静态解耦系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

前述解耦问题又称动态解耦，希望在整个动态演化过程中，每个输入只影响相应的输出.

很多应用场景中不需要暂态过程互不影响，但当参考输入是阶跃型信号，系统达到稳态后每个输入只影响相应的输出，满足这个条件的系统称为静态解耦系统.

问题：能否设计反馈控制律 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$ 使闭环系统 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ 静态解耦？

静态解耦条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

动态解耦要求传递函数矩阵渐近稳定，且 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$为非奇异对角矩阵.

静态解耦不要求 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$ 是对角矩阵，但要求其静态增益矩阵 $\boldsymbol{G}(\mathbf{0})$为非奇异对角阵.

定理： 系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$可$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$静态解耦的充要条件是$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可镇定且

$$\mathbf{det}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\neq 0.$$

设计分工：$\boldsymbol{F}$ 使系统镇定，$\boldsymbol{R}$ 使系统静态解耦.

静态解耦条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

证明：在反馈控制律 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Rv} - \boldsymbol{Fx}$ 下，闭环系统

$$\boldsymbol{G}_L(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_L)^{-1}\boldsymbol{BR}$$

其中$\boldsymbol{A}_L = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BF}$. 易见静态解耦条件为:

(1) 闭环系统可镇定，即存在 $\boldsymbol{F}$ 使 $\boldsymbol{A}_L$为Hurwitz矩阵;

(2) $\boldsymbol{G}_L(0) = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{BR}$为非奇异对角阵.

由于$\boldsymbol{R}$是非奇异的，而矩阵$\boldsymbol{G}_L(\mathbf{0})$的非奇异性由下式可见:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_L^{-1} & \boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{B} \\ 0 & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

若希望静态时 $\boldsymbol{G}_L(\mathbf{0}) = \boldsymbol{G}_D$, 则可以设置 $\boldsymbol{R} = -(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{G}_D$.

示例

设计反馈控制$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$使受控系统$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})$静态解耦。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解： $\boldsymbol{CB}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{bmatrix}\Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha_1=1,\alpha_2=1}.$

$\boldsymbol{D_0=CB}$ 奇异 $\Rightarrow$ 系统不可动态解耦.

$\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{AB}\ \ \boldsymbol{A^2B}]=\mathbf{3}$

$\mathbf{det}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{1}$ $\Rightarrow$ 系统可静态输出解耦.

示例

(1) 选择反馈阵 $\boldsymbol{F}$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为：$-1,-2,+1$，通过反馈$u_2=-4x_3$将不稳定极点配置到-3，得到：

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&1\\1&0&-3\end{bmatrix}$$

(2) 计算输入变换阵$\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{A}_L^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0&0\\1&3&1\\2&0&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{B}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&2\\2&-2\end{bmatrix}$$

选择期望的$\boldsymbol{G}_L(0)=\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{R}=-(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{bmatrix}2&2\\2&-1\end{bmatrix}$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(3) 校验闭环传递函数

$$G_L(s) = C(sI - A_L)^{-1}BR$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} 2(s^2+3s+3) & -s(s+3) \\ -2s(s+2) & (s+2)(s+3) \end{bmatrix}$$

可知闭环系统渐稳，且 $G_L(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$是对角的.

- 可实现静态解耦的系统未必能实现动态解耦
- 可实现动态解耦的系统一定能实现静态解耦

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

某飞机垂面运动线性化模型:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$为高度,

$x_2(t)$为前向速度,

$x_3(t)$为俯仰角,

$x_4(t)$为俯仰角速度,

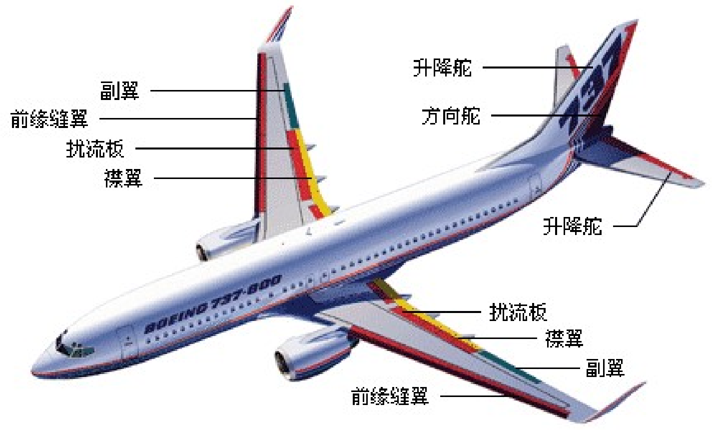
$x_5(t)$为垂直速度;

控制分量

$u_1(t)$为扰流板角度,

$u_2(t)$为前向加速度,

$u_3(t)$为升降舵角度。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(1) 可静态解耦性分析

- $\mathbf{det}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0.6123 \neq \mathbf{0}$
- $\text{Rank}\ \boldsymbol{Q}_{c1} = \text{Rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{b}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{5}$

可知$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}_1)$是可控对，因此该系统是可静态解耦的。

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(2) 设计镇定反馈律 $\boldsymbol{F}$

因为$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}_1)$是可控对，故可只利用$\boldsymbol{u}_1$反馈，通过反馈

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -1598.7 & -10676.9 & -4744.1 & -1466.6 & 3309.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将闭环极点配置在$\{-1, -2, -3, -4, -5\}$.

MATLAB 命令： p = [-1,-2,-3,-4,-5]; F = place(A,B(:,1),p)

飞机垂面运动控制

(3) 计算输入变换矩阵$\boldsymbol{R}$

根据已经确定的反馈矩阵$\boldsymbol{F}$

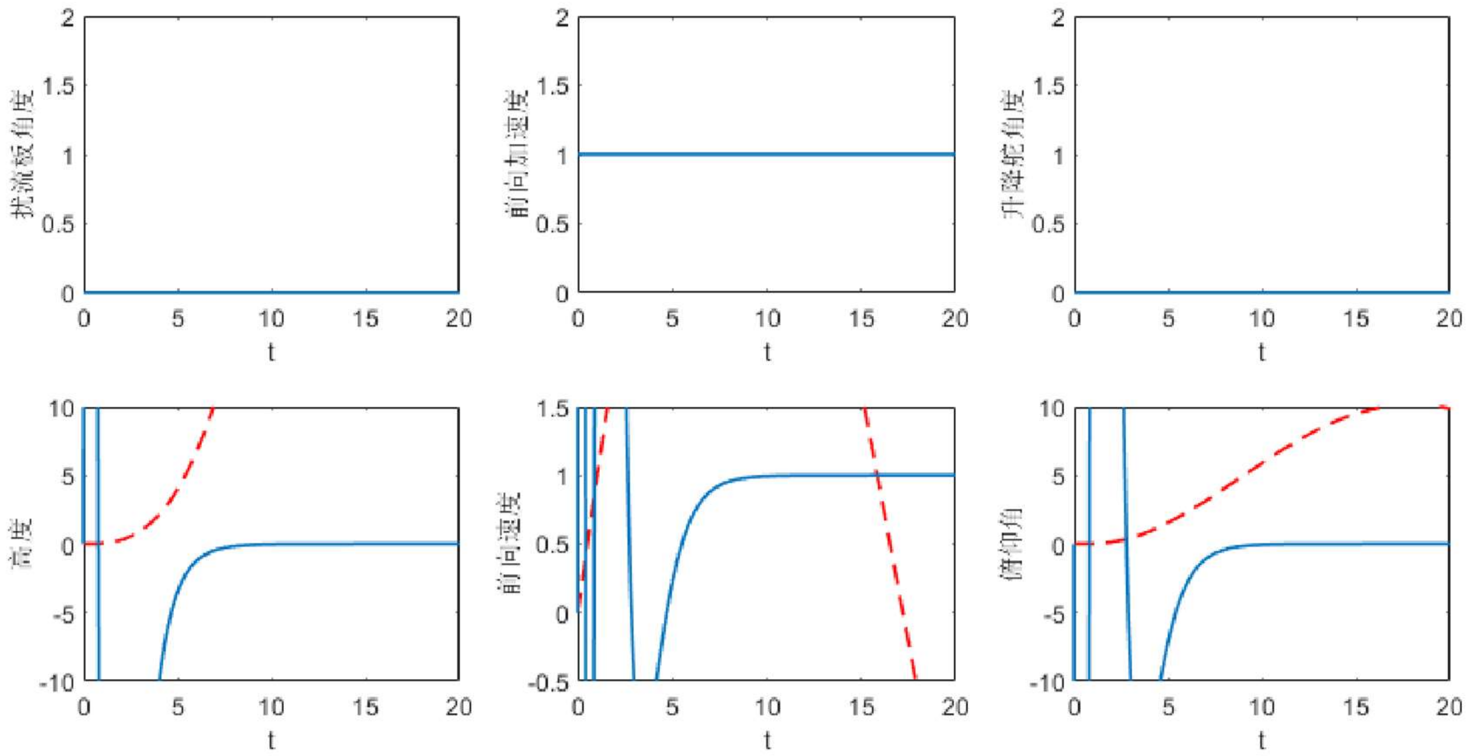
$$\boldsymbol{A_L} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BF} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.1 & 0.0 & -1.0 \\ -191.8 & -1281.3 & -569.5 & -176.0 & 397.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 7064.6 & 47181.5 & 20964.2 & 6480.1 & -14627.7 \\ 2517.9 & 16815.9 & 7472.0 & 2311.0 & -5213.8 \end{bmatrix}$$

选择静态传递函数矩阵 $\boldsymbol{G_D} = \boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{R} = -\left[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A_L})^{-1}\boldsymbol{B}\right]^{-1}\boldsymbol{G_D} = \begin{bmatrix} -1598.7 & -10677.8 & -998.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.2 & -2.7 \end{bmatrix}$$

仿真检验

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



本章总结

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

1. 基本概念
2. 串联补偿器方法
3. $\{F,R\}$解耦及其可解耦条件【$\boldsymbol{\alpha, D_0}$】
4. 解耦阶常数的性质
5. 闭环极点配置
6. 静态解耦控制