7.11 多普勒效应 （Doppler effect）

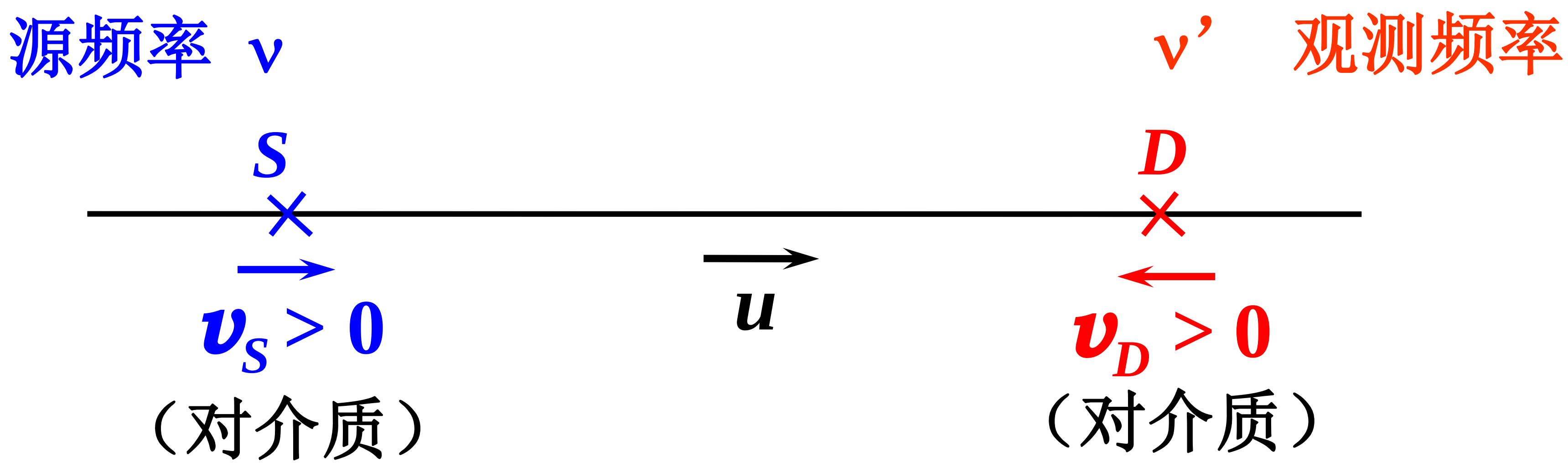
多普勒效应： 由于波源和观察者的运动，而使观测的频率不同于波源频率的现象。

1842，多普勒(Johann Christian Doppler, 1803 - 1853)提出了上述效应的声学理论。

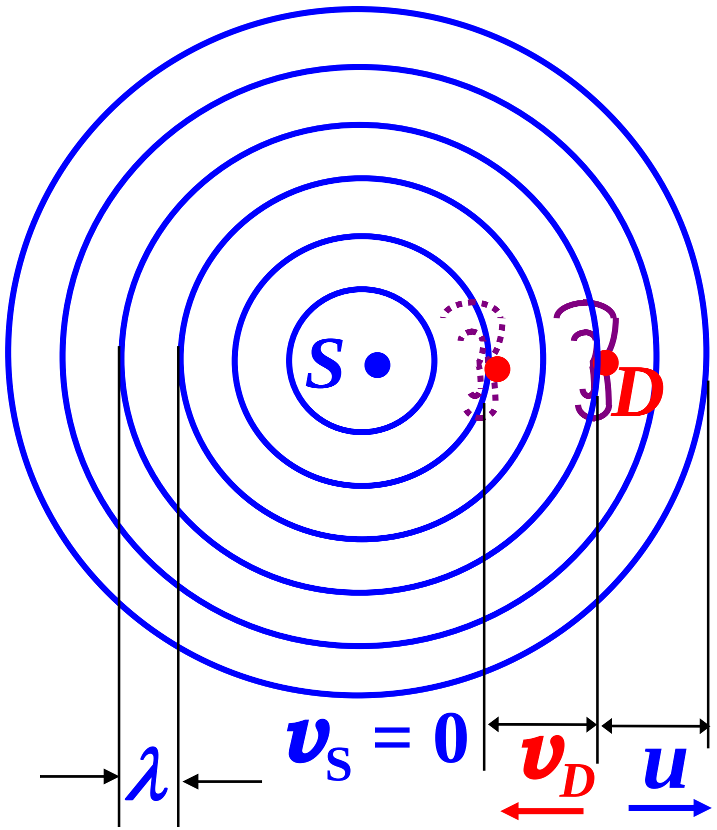
1845，巴罗特(Buys Ballot)在荷兰让一队小号手在行进的平板火车上奏乐，由一些训练有素的音乐家用自己的耳朵来判断音调的变化；然后音乐家和号手的位置对调，重做此实验。

一. 机械波的多普勒效应

设 运动在波源 S 和观测者D的连线方向上，以二者相向运动的方向为速度的正方向。



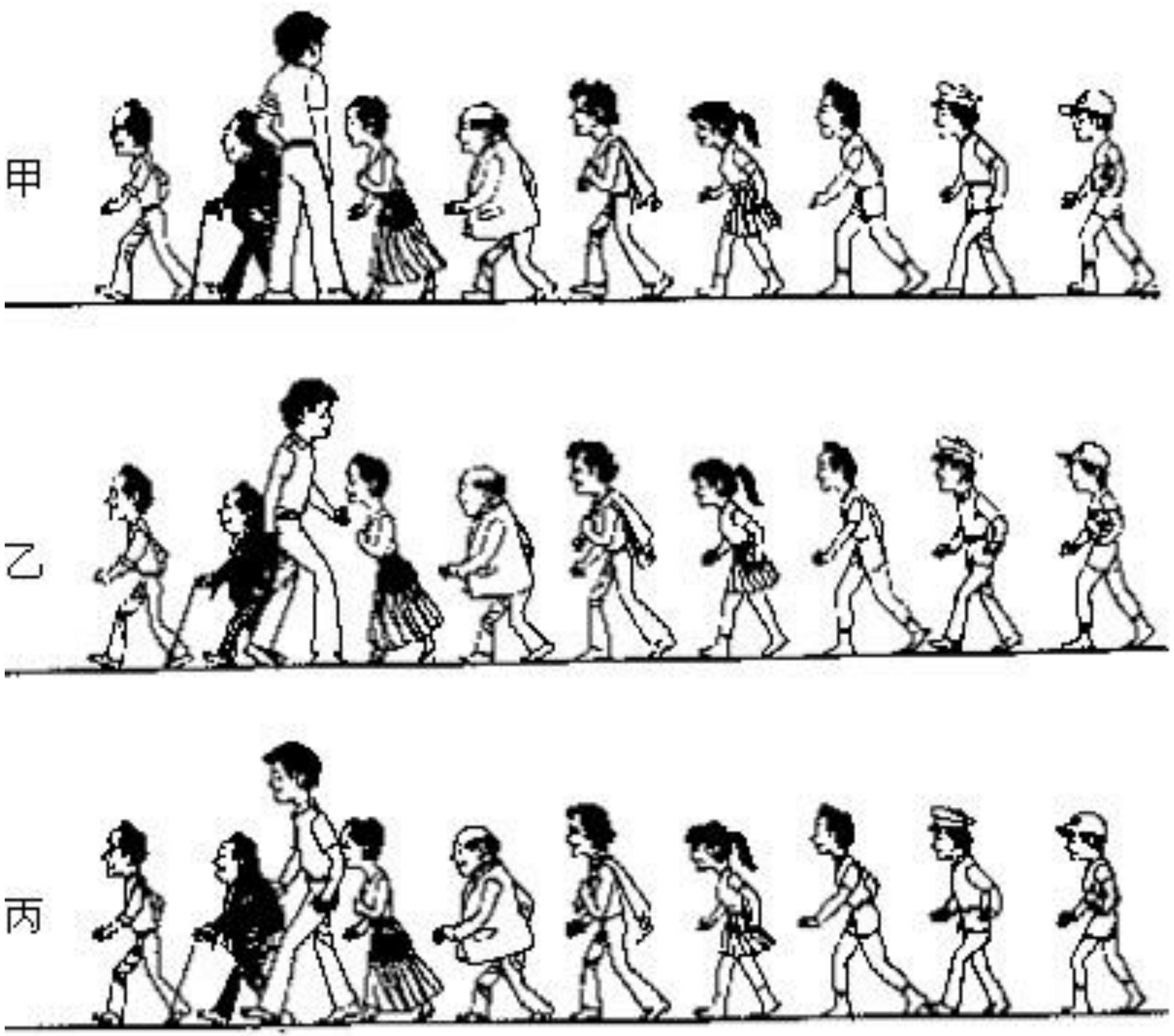
(1) $v_S = 0$， $v_D \neq 0$，



$$\nu' = \frac{u + v_D}{\lambda} = \frac{u + v_D}{u}\nu$$

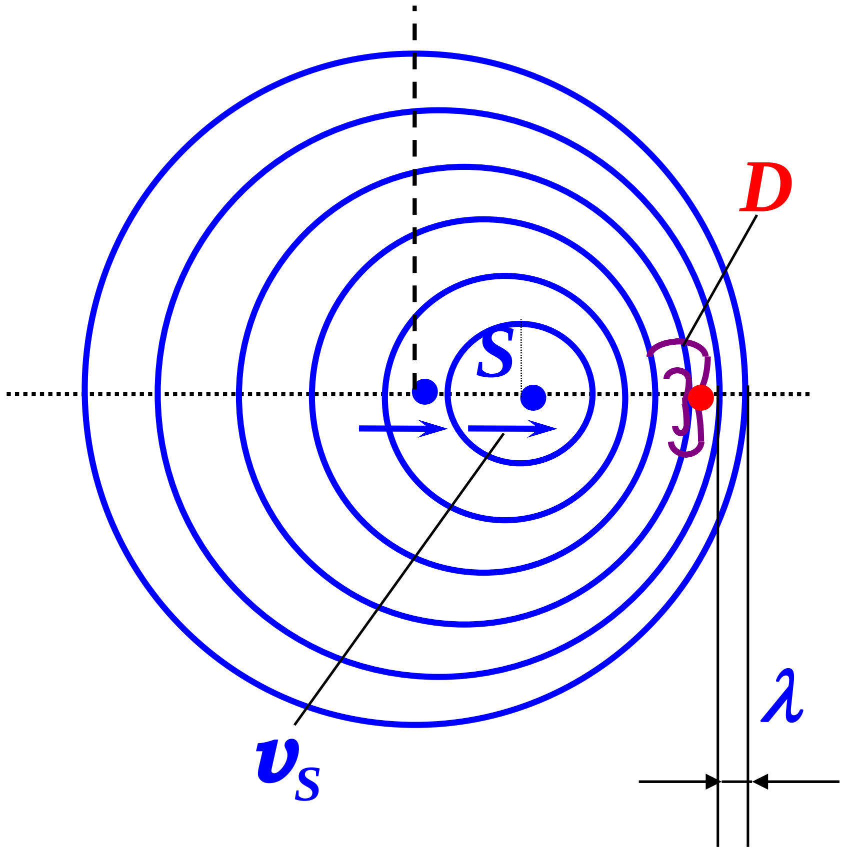
$v_D > 0$ （D接近S），$\nu' > \nu$

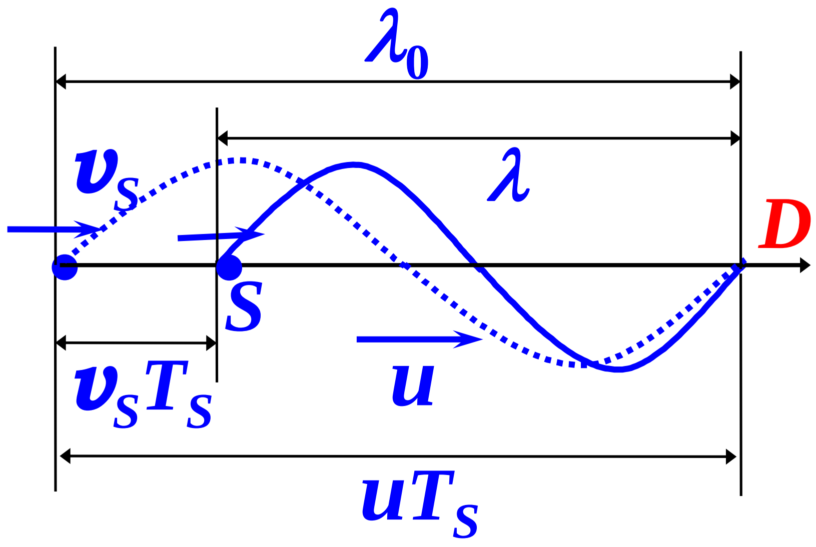
$v_D < 0$（D远离S），$\nu' < \nu$



为了了解多普勒效应，还可以做这样一个类比。让一队人沿街行走，观察者站在街旁不动，每秒有9个人从他身边通过（图甲）。这种情况下的“过人频率”是9人/秒。如果观察者逆着队伍行走，每秒和观察者相遇的人数增加，也就是频率增加（图乙）；反之，如果观察者顺着队伍行走，频率降低（图丙）。

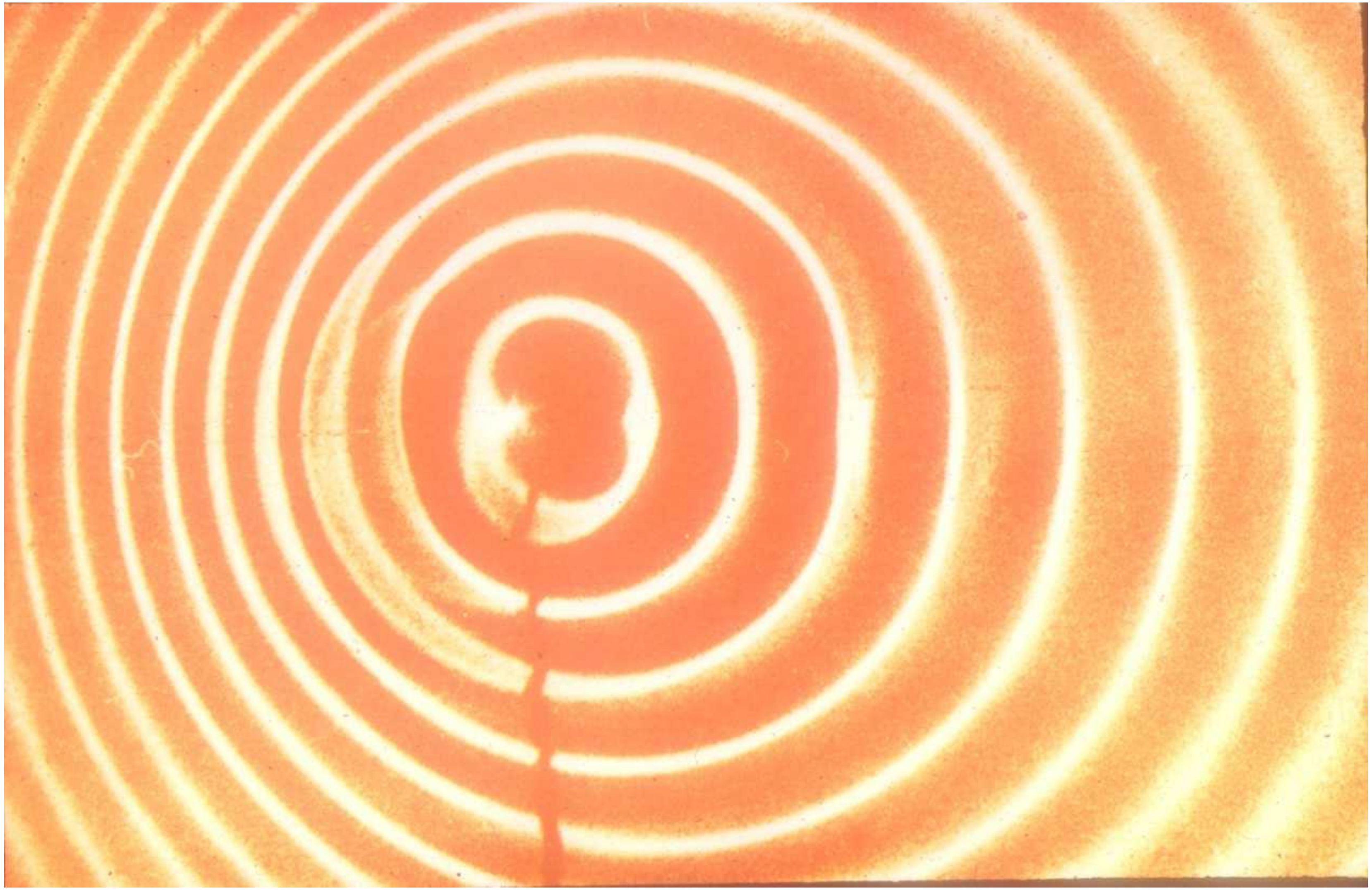
(2) $\boldsymbol{v}_D = 0$, $\boldsymbol{v}_S \neq 0$,



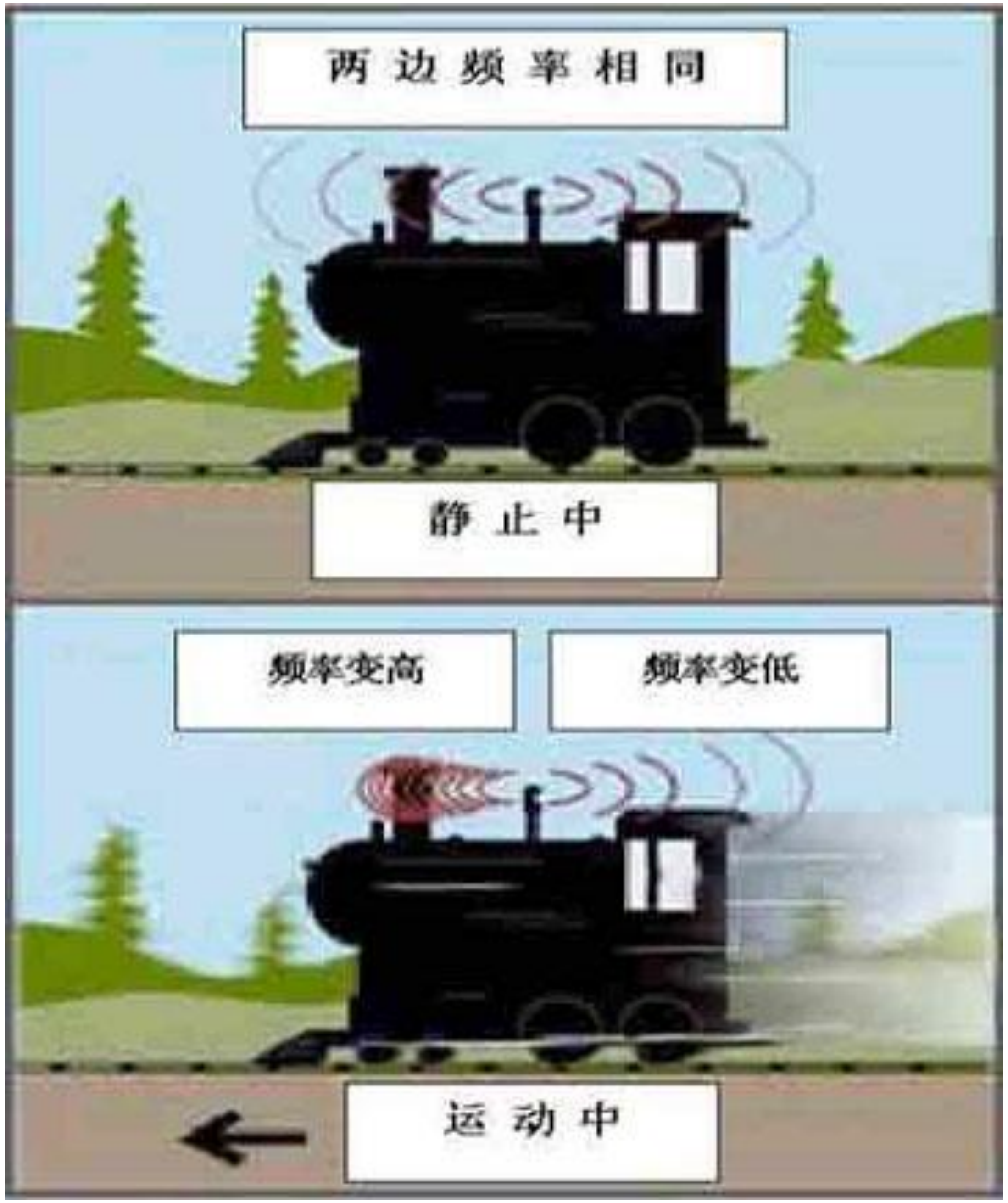


S 运动的前方波长缩短

$$\nu' = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{(u - v_S)T_S} = \frac{u}{u - v_S} \cdot \nu$$



水波的多普勒效应（波源向左运动）


两 边 频 率 相 同
静 止 中
频率变高
频率变低
运 动 中

(3) $v_D \neq 0$， $v_S \neq 0$,

加观

$$\nu' = \frac{u + v_D}{u - v_S}\nu$$

减源

$\nu_R \neq \nu_S$

当 $v_D = -v_S$ 时（无相对运动），$\nu' = \nu$

$\nu_R \neq \nu_S$

注意:

1. S 动 D 不动 $\longrightarrow \lambda \neq \lambda_0 \longrightarrow$ $\nu' \neq \nu$

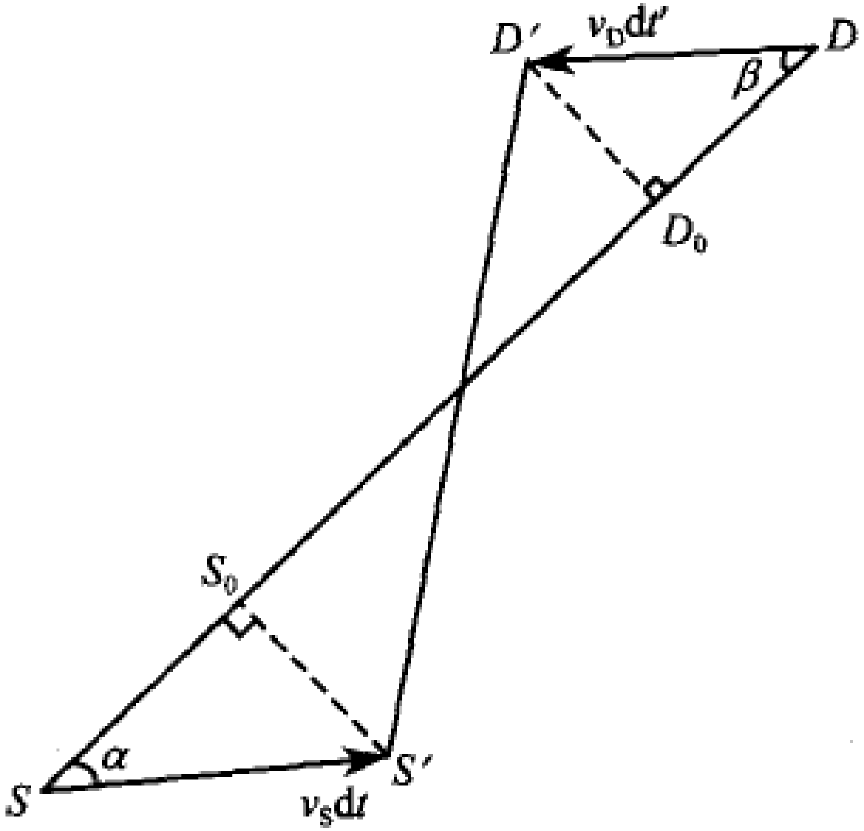
D 动 S 不动 $\xrightarrow[\lambda = \lambda_0]{}$ 波对 D 速度不是 u $\longrightarrow$ $\nu' \neq \nu$

机制不同

2. v_D、 v_S 是对介质而言，且以靠近为正。

(4) 普遍的公式

现在来考虑波的传播方向、波源速度、观察者速度三者不共线的一般情况。 如图所示， 这时从波源 S 到观察者 D 的传播方向随时在改变，我们必须讨论瞬时过程。设波源在时刻 $t=t_0$ 和 $t=t_0+\mathrm{d}t$ 的位置分别为 S 和 S'，相位分别为 φ 和 $\varphi+\mathrm{d}\varphi$，其中相位的增量为 $\mathrm{d}\varphi=2\pi\nu\mathrm{d}t$。相位 φ 由波源 S 传播到观察者时，它的位置在 D；相位 $\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 由波源 S' 传播到观察者时，它的位置在 D'。观察者从 D 走到 D' 所用的时间 $\mathrm{d}t'$ 和他感受到的频率 ν' 与 $\mathrm{d}t$ 和 ν 是不一样的，但相位增量 $\mathrm{d}\varphi$ 一样，即



$$\mathrm{d}\varphi=2\pi\nu\mathrm{d}t=2\pi\nu'\mathrm{d}t'$$

相位 φ 从波源 S 传播到观察

者的位置 D 的时刻为 $t=t_0+\frac{\overline{SD}}{u}$，相位 $\varphi+d\varphi$ 由波源 S' 传播到观察者的位置 D' 的时刻为 $t=t_0+dt+\frac{\overline{S'D'}}{u}$。二者之差即为 dt'：

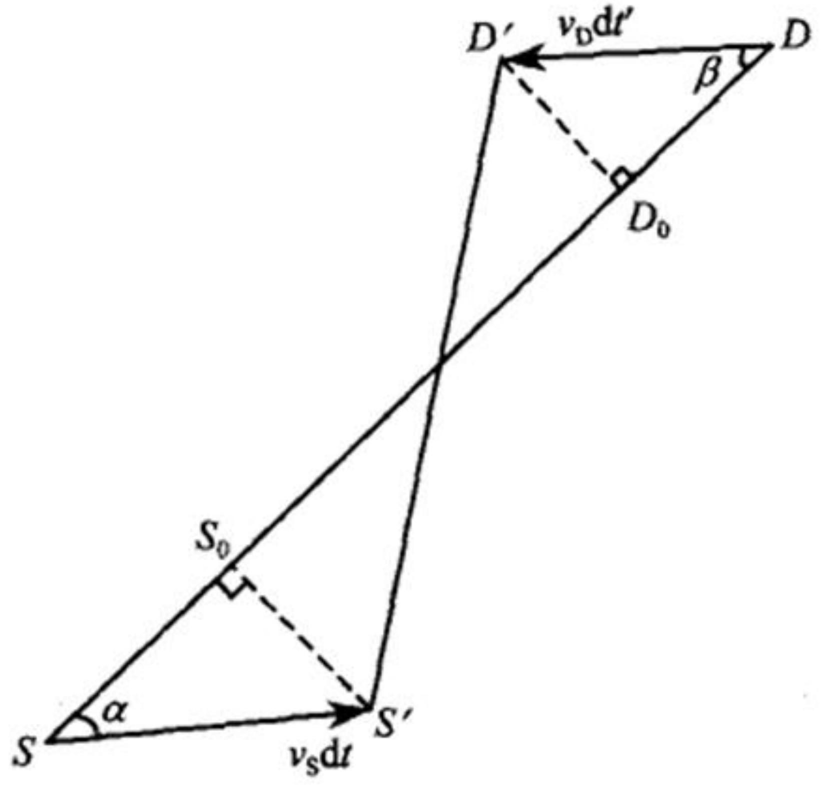
$$dt' = dt + \frac{\overline{S'D'} - \overline{SD}}{u}$$

如图所示， 分别从 S'，D' 作 SD 的垂线， 令相应的垂足分别为 S_0 和 D_0。$\overline{S_0D_0}$ 与 $\overline{S'D'}$ 的长度相差高阶无穷小量，可认为二者相等，于是

$$\overline{SD} - \overline{S'D'} = \overline{SD} - \overline{S_0D_0} = \overline{SS_0} + \overline{DD_0} = \overline{SS'}\cos\alpha + \overline{DD'}\cos\beta$$

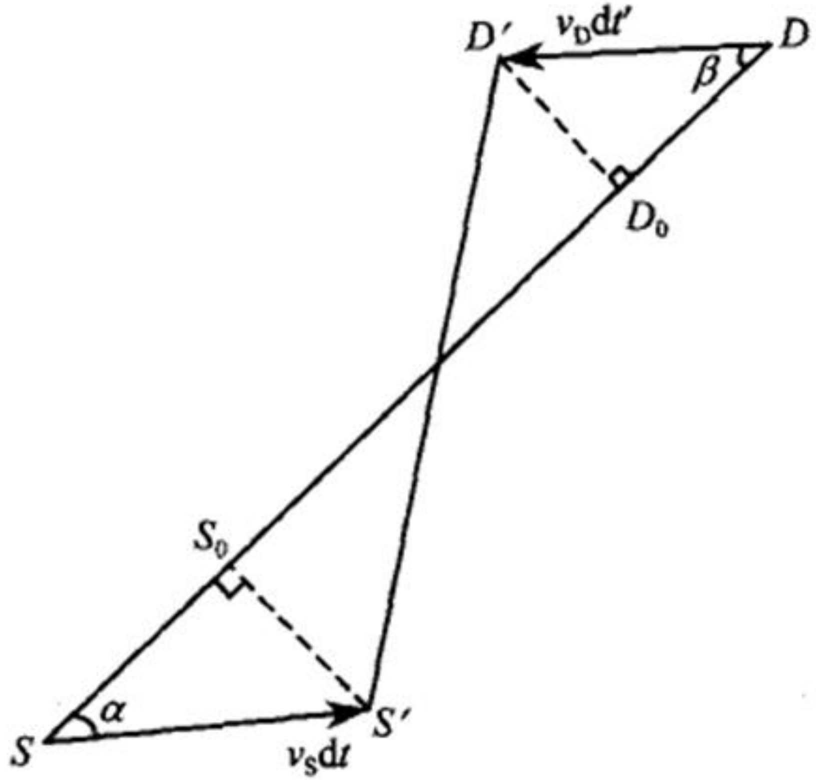
式中，α 是 $\overline{SS'}$ 与 $\overline{SD}$ 之间的夹角，β 是 $\overline{DD'}$ 与 $\overline{DS}$ 之间的夹角。因 $\overline{SS'}=v_S dt$，$\overline{DD'}=v_D dt'$，

$$dt' = dt - \frac{v_S\cos\alpha}{u}dt - \frac{v_D\cos\beta}{u}dt'$$



$$\Longrightarrow \quad \frac{v'}{v} = \frac{dt}{dt'} = \frac{u + v_D\cos\beta}{u - v_S\cos\alpha}$$

$$\frac{v'}{v}=\frac{dt}{dt'}=\frac{u+v_D\cos\beta}{u-v_S\cos\alpha}$$



这便是多普勒效应的普遍公式。不难看出，当 α 和 β 等于 0 或 π 时， 上式过渡到共线情形的公式。由上式可知，对于机械波，只有纵向运动（即平行于波源和观察者连线的运动）具有多普勒效应，横向运动没有多普勒效应。

例7.12 **A source of 1 - kilohertz sound is moving straight toward you at a speed 0.9 times the speed of sound. The frequency you receive is**

(A) 0.1 kHz **(B) 0.5 kHz** **(C) 1.1 kHz**

(D) 1.9 kHz **(E) 10 kHz**

解:

$$\nu' = \frac{u}{u - v_S}\nu$$

$$= \frac{1}{1-0.9} \times 1\text{kHz} = 10\text{kHz}$$

选(E)。

例7.13 一观察者在铁路旁，听到迎面开来的火车汽笛声频率为440 Hz (相当于钢琴的A音)。火车驶过身旁之后，他听到笛声降为392 Hz (G音)。空气中声速按330 m/s计算，求火车的速率。

解： 假设无风，观察者静止于介质（空气）中，火车对地面的速率等于对空气的速率，将此待求的速率记为v_s。

火车逼近观察者时 $\nu' = \dfrac{u}{u - v_s}\nu$

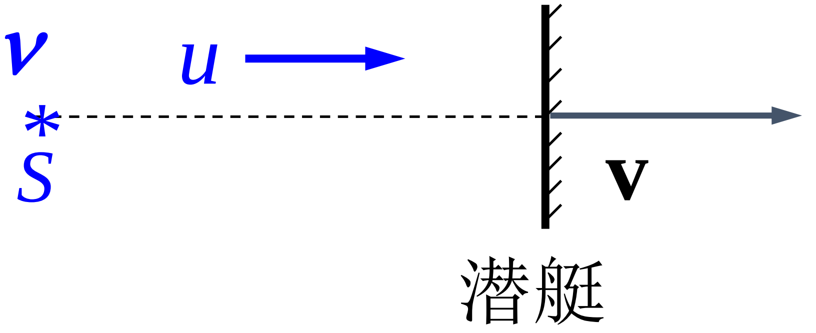
火车离开观察者时 $\nu'' = \dfrac{u}{u + v_s}\nu$

$$\left.\begin{aligned} \nu' &= \frac{u}{u - v_s}\nu \\ \nu'' &= \frac{u}{u + v_s}\nu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\nu'}{\nu''} = \frac{u + v_s}{u - v_s}$$

$$\Rightarrow \quad v_s = \frac{\nu' - \nu''}{\nu' + \nu''}u = \frac{440 - 392}{440 + 392} \cdot 330\,m/s = 19m/s$$

例7.14 一静止波源在海水中向前发射频率ν=30kHz的超声波，射在一艘向前运动的潜艇上反射回来。在波源处测得波源发射波与潜艇反射波合成后的拍频$\Delta\nu$=100Hz。已知海水中的声速$u=1.54\times10^{3}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求潜艇运动的速度v。

解： 潜艇接收到的声波频率



$$\nu' = \frac{u-v}{u}\nu$$

被潜艇（新波源）反射，在原波源处的频率

$$\nu'' = \frac{u}{u+v}\nu' = \frac{u}{u+v}\cdot\frac{u-v}{u}\nu = \frac{u-v}{u+v}\nu$$

波源发射波与潜艇反射波合成后的拍频

$$\Delta\nu = \nu - \nu'' = \left(1 - \frac{u - v}{u + v}\right)\nu = \frac{2v}{u + v}\nu$$

解出潜艇的速度

$$v = \frac{u\Delta\nu}{2\nu - \Delta\nu} = 2.6\,m/s$$

由拍频→反射壁的速度

例7.15 一声源的频率为1080Hz，相对地面以30m/s的速率向右运动。在其右方有一反射面相对地面以65m/s的速率向左运动。设空气中的声速为330m/s。求：（1）声源在空气中发出声音的波长；（2）反射面接收到的频率；（3）静止观测者接受到反射面反射回的声音的频率和波长。

解: (1) 由于声源运动，所以在声源运动的前方和后方，空气中声音的波长不同。在声源运动的前方，空气中声音的波长为

$$\lambda_1 = (u - v_S)T = \frac{u - v_S}{\nu_S} = \frac{330 - 30}{1080} = 0.278\text{m}$$

在声源运动的后方，空气中声音的波长为

$$\lambda_2 = \frac{330 + 30}{1080} = 0.333\text{m}$$

（2）反射面作为一个运动的观测者，接收到的频率为

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S = \frac{330 + 65}{330 - 30} \times 1080 = 1422\text{Hz}$$

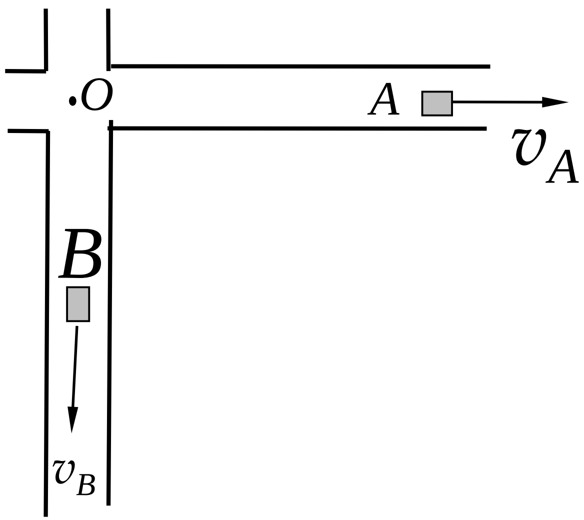
（3）静止观测者接受到反射面反射回的声音的频率为

$$\nu'_R = \frac{u}{u - v_R} \nu_R = \frac{330}{330 - 65} \times 1422 = 1771\text{Hz}$$

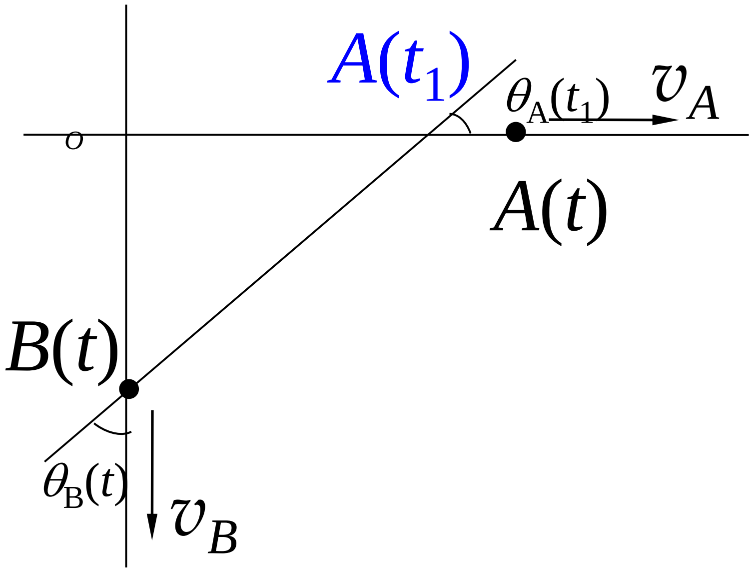
它的波长为 $\lambda' = \dfrac{u}{\nu'_R} = \dfrac{330}{1771} = 0.186\text{m}$

或 $\lambda' = \dfrac{u - v_R}{\nu_R} = \dfrac{330 - 65}{1422} = 0.186\text{m}$

例7.16 两辆汽车A与B，在t = 0时从十字路口O处分别以速度v_A和v_B沿水平的、相互正交的公路匀速前进，如图所示。汽车A持续地以固定的频率v_0鸣笛，求在任意时刻t汽车B的司机所检测到的笛声频率。已知声速为u，且当然有 $u > v_A$、v_B。



解： 如图所示，t时刻汽车B位于 $B(t)$ 处，距O点的距离为$v_B t$. 此时传播到汽车B的笛声不是t时刻而是较早时刻t_1由A车发出的. 汽车A发出此笛声时位于 $A(t_1)$ 处，距O点的距离为$v_A t_1$，



此笛声由发出点到接收点（t时刻B车所在点）所传播的路程为$u(t-t_1)$，由几何关系可知

$$(v_B t)^2 + (v_A t_1)^2 = [u(t - t_1)]^2 \qquad (1)$$

$$(u^2 - v_A^2)t_1^2 - 2u^2 t t_1 + (u^2 - v_B^2)t^2 = 0$$

这是以t_1为变量的一元二次方程，其解为

$$t_1 = \left(\frac{u^2 \pm \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} \right) t$$

由于 $u^2 > u^2 - v_A^2$ **，但$t_1 < t$，所以上式中只能取减号**

$$t_1 = \frac{u^2 - \sqrt{u^2(v_\mathrm{A}^2 + v_\mathrm{B}^2) - v_\mathrm{A}^2 v_\mathrm{B}^2}}{u^2 - v_\mathrm{A}^2} t \qquad \textbf{(2)}$$

$$t - t_1 = \frac{\sqrt{u^2(v_\mathrm{A}^2 + v_\mathrm{B}^2) - v_\mathrm{A}^2 v_\mathrm{B}^2} - v_\mathrm{A}^2}{u^2 - v_\mathrm{A}^2} t \qquad \textbf{(3)}$$

令 $$\sqrt{u^2(v_A^2+v_B^2)-v_A^2v_B^2}=k \tag{4}$$

有 $$t_1=\frac{u^2-k}{u^2-v_\mathrm{A}^2}t \quad , \qquad t-t_1=\frac{k-v_\mathrm{A}^2}{u^2-v_\mathrm{A}^2}t \tag{5}$$

在 t_1 时刻，位于 $A(t_1)$ 处的汽车A发出的笛声沿直线（即波线） $\overline{A(t_1)B(t)}$ 在 t 时刻传到 $B(t)$ 处，以 $\theta_{A(t_1)}$ 、$\theta_{B(t)}$ 分别表示车速与笛声传播方向的夹角，有

$$\cos\theta_{\mathrm{A}(t_1)}=\frac{v_\mathrm{A}t_1}{u(t-t_1)}=\frac{v_\mathrm{A}(u^2-k)}{u(k-v_\mathrm{A}^2)} \tag{6}$$

$$\cos\theta_{B(t)}=\frac{v_Bt}{u(t-t_1)}=\frac{v_B(u^2-v_A^2)}{u(k-v_A^2)} \tag{7}$$

令ν表示B车司机接收到的笛声的频率，由多普勒效应可知

$$\nu = \frac{u - v_B \cos\theta_{B(t)}}{u + v_A \cos\theta_{A(t_1)}} \nu_0 \qquad \textbf{(8)}$$

由(6)、(7)、(8)式，得

$$\nu = \frac{u^2\left(\sqrt{u^2\left(v_A^2 + v_B^2\right) - v_A^2 v_B^2} - v_A^2\right) - v_B^2\left(u^2 - v_A^2\right)}{\left(u^2 - v_A^2\right)\sqrt{u^2\left(v_A^2 + v_B^2\right) - v_A^2 v_B^2}} \nu_0 \qquad \textbf{(9)}$$

二. 电磁波的多普勒效应

机械波总是在一定的介质中传播，上面所说的静止和运动，都是相对于介质而言的。在这里，波源速度 v_S 和观察者速度 v_D 在公式里的地位不对称。多普勒效应不限于机械波，对于真空中的电磁波（光波），由于光速 c 与参考系无关，多普勒效应的公式中只出现观察者对波源的相对速度 v（设相互靠近时 v 为正，相互远离时 v 为负），按照（狭义）相对论，纵向多普勒效应的公式为

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

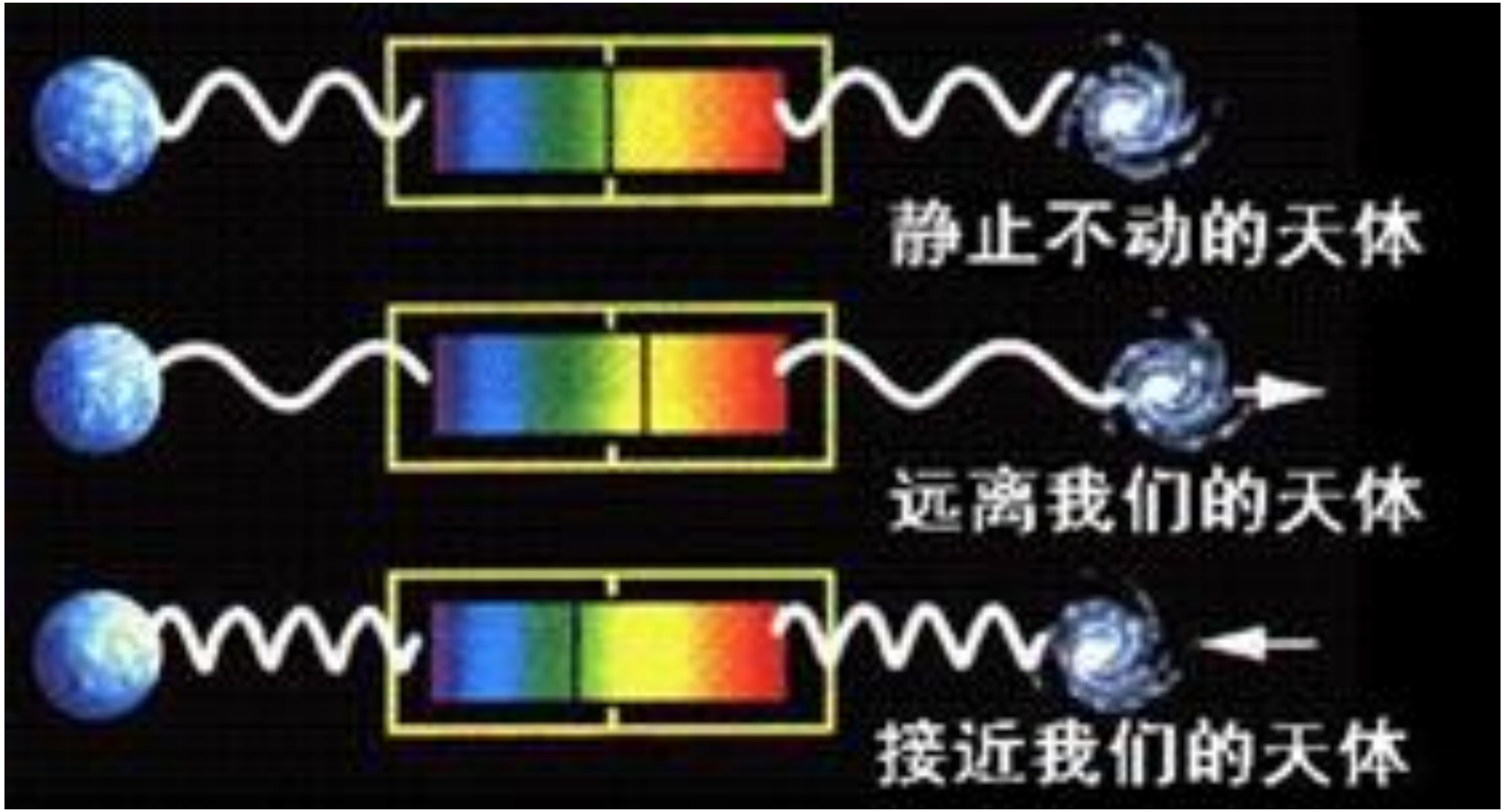
其中，$\beta=\dfrac{v}{c}$。不同于经典力学的是，横向运动也有多普勒效应，公式为

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{1-\beta^2}$$

通过天文观测，人们发现，来自遥远星系的光，其光谱可与地面光源的光谱相比，但前者显著地偏于红的方面，即偏于低频方面，这叫作**红移**。一般认为红移是一种多普勒效应，也就是说，这些遥远星系正在离我们而去，因而频率显得偏低。天文学观测还发现，越是远的星系，离开我们的速度越大，离开的速度 v 正比于它和我们之间的距离 r，即

$$v = ar$$

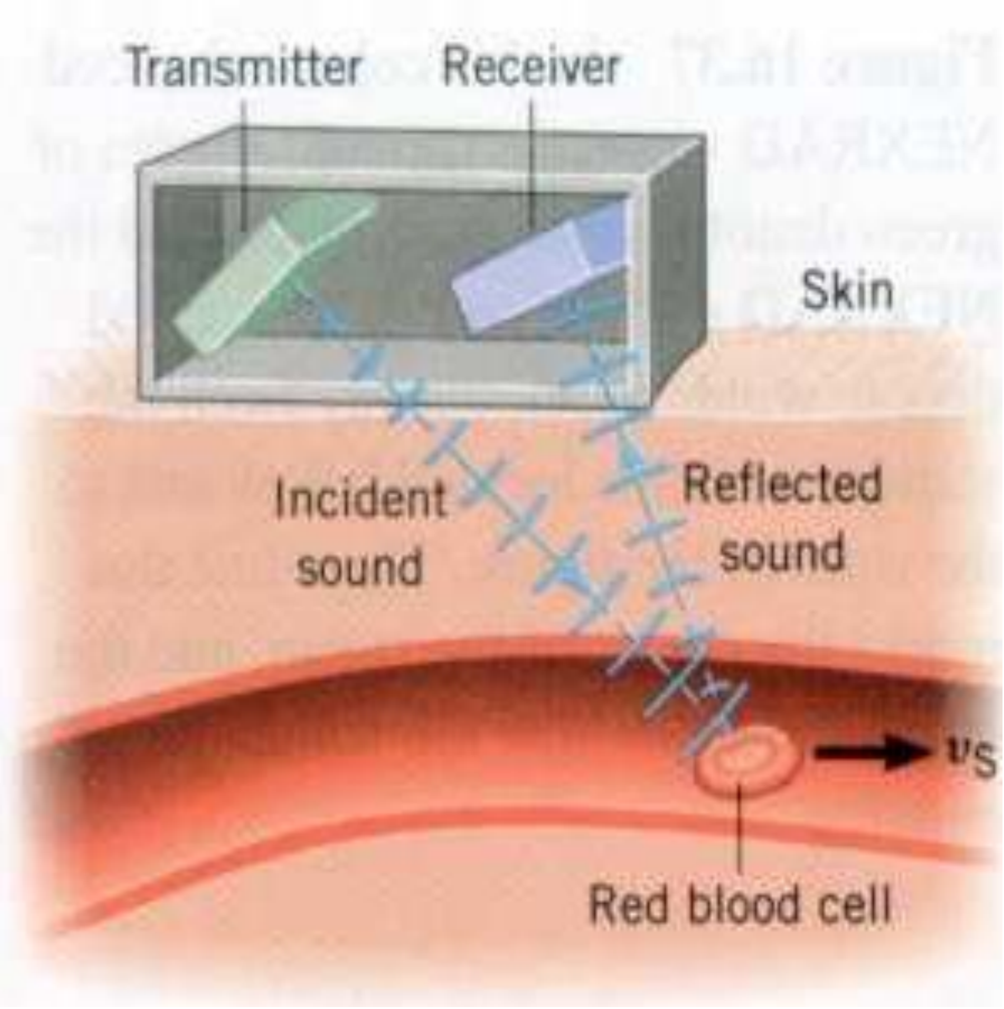
其中，$a^{-1} \approx 6 \times 10^{17}$ 秒 $\approx 2 \times 10^{10}$ 年。上式可用一种“大爆炸学说”来解释。这种学说认为，我们的宇宙是从一次“大爆炸”发展出来的，这次“大爆炸”大约发生在 2×10^{10} 年以前，速度为 v 的星系在这 2×10^{10} 年里共移动了 $r = a^{-1}v$ 的距离，这就是上面那个公式。


静止不动的天体
远离我们的天体
接近我们的天体

三. 多普勒效应的应用：

目前，多普勒效应已在科学研究、工程技术、交通管理、医疗诊断等各方面有着十分广泛的应用。例如，分子、原子和离子由于热运动产生的多普勒效应使其发射和吸收的谱线增宽，在天体物理和受控热核聚变实验装置中，谱线的多普勒增宽已成为一种分析恒星大气、等离子体物理状态的重要测量和诊断手段。基于反射波多普勒效应的原理，雷达系统已广泛地应用于车辆、导弹、人造卫星等运动目标速度的监测。在医学上所谓的“D 超”，是利用超声波的多普勒效应来检查人体内脏、血管的运动和血液的流速、流量等情况。在工矿企业中，则利用多普勒效应来测量管道中有悬浮物液体的流速。多普勒效应在各方面的应用，早已不胜枚举。

警察用多普勒测速仪测速



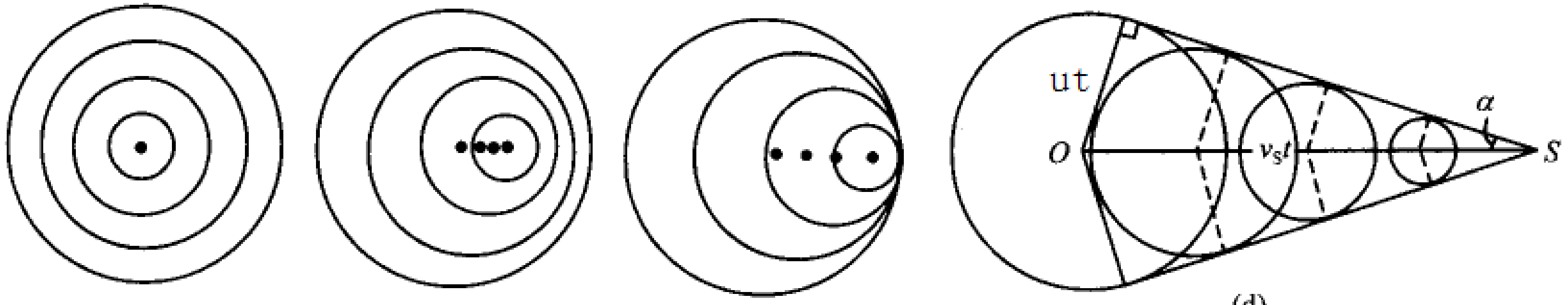
超声多普勒效应测血流速

四. 冲击波

下图是一系列运动点波源的波面图。在图(a)中，波源静止，波面是同心的。在图(b)中，波源在运动，但其速度小于波速，波面的中心错开了，产生多普勒效应。在图(c)中，波源的速度趋于波速，所有波面在一点相切，频率 $\nu' \to \infty$。在图(d)中，波源的速度超过了波速，波面的包络面呈圆锥状，称为**马赫锥**。由于在这种情况下波的传播不会超过运动物体本身，马赫锥面就是波的前缘，其外没有扰动波及。这种形式的波动，叫做**冲击波**。令马赫锥的半顶角为 α，由图中可以看出

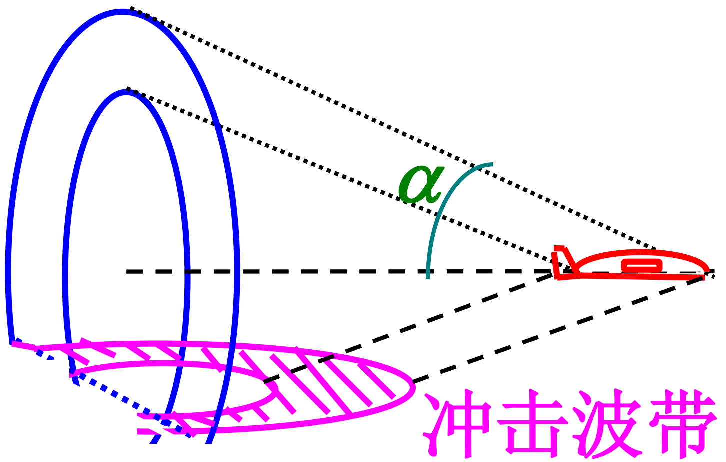
$$\sin\alpha = \frac{u}{v_S}$$

无量纲参数 $\frac{v_S}{u}$ 叫做**马赫数**，它是空气动力学中一个很有用的参数。



(a) (b) (c) (d)

冲击波的例子是很多的，子弹掠空而过发出的呼啸声，超音速飞机发出震耳的裂空之声，都是这种波。由于水波的传播速度较小，船速很容易超过它，因而这种现象在水面上很容易观察到。这时，由波前包迹所造成的波叫舷波。当带电粒子在介质中以大于介质中光速的速度运动时，相应的波前包迹所造成的波形成切仑柯夫辐射。利用切仑柯夫辐射原理制成的切仑柯夫计数器，可以探测高能粒子的速度，已广泛应用于实验高能物理学中。



对超音速飞机的最小飞行高度要有一定限制。

超音速的子弹在空气中形成的冲击波

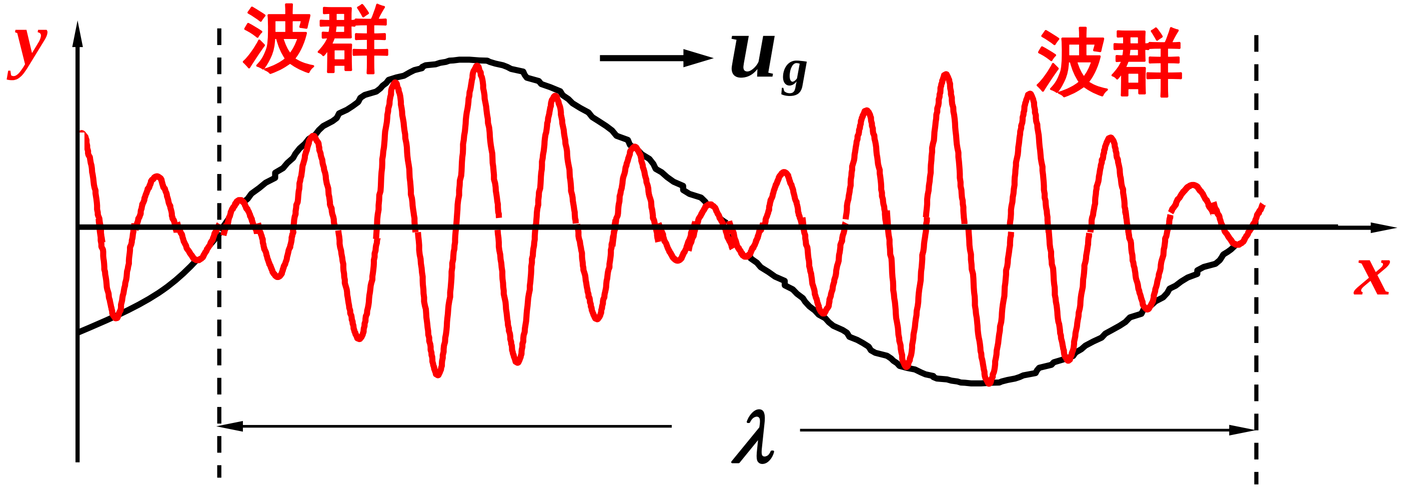
（马赫数为2 ）

7.12 复波　群速度

一、复波

若干不同频率的简谐波叠加而成的合成波，它是非简谐波。

例如，两个频率相近的简谐波合成的复波为



波群、波包或信号的传播速度u_g，称为群速度（group velocity）。

二、群速度

$$\boxed{u_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}}$$

相速度：$u = \dfrac{\omega}{k}$

由 $\omega = uk$, $\lambda = 2\pi/k$，得

$$\boxed{u_g = u - \lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda}}$$

对于无色散介质，相速为常数，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\lambda = 0$

因此，有

$$u_g = u$$

在无色散介质中，群速度等于相速度。

在色散介质中，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\lambda \neq 0$ ，复波的群速度不等于相速度

$$u_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = u - \lambda \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} \neq u$$

色散越严重，即 $\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda}\right|$ 越大， u_g 和 u 相差越大。

色散引起波包扩散。色散严重→波包扩散→消失，群速的概念将失去意义。

只有在 $\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda}\right|$ 较小的情况下，群速才意义，波包才稳定。

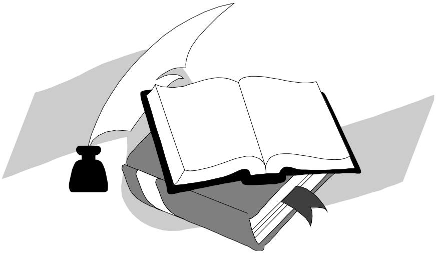
7.13 孤子（soliton）

在非线性介质中，相速度和振幅有关，

非线性效应可能使波包被挤压， 从而与色散引起的波包扩散相抵消， 形成形状不变的孤立波，又称做孤波、或孤子。

孤子在信号传播中有重要应用。

拉塞尔 (John Scott Russell, 1808~1882，注：曾有译为罗素，现根据周光坰先生所译，译为拉塞尔) 是苏格兰一位优秀的造船工程师，对船体的设计有独到的见解，作过重要的贡献. 1834 年 8 月为研究船舶在运动中所受到的阻力，他在爱丁堡格拉斯哥运河中，牵引船舶进行全尺寸的实验与观测. 最初，牵引船舶的动力是两匹马，以后改用滑轮和配重系统. 在实验中，他观察到一种他称作孤立行进波的现象. 当时他骑着马追踪观察一个孤立的水波在浅水窄河道中的持续前进，这个水波长久地保持着自己的形状和波速. 这一奇妙现象的发现，就是孤立波和现今关于孤立子研究的起始.



第七章结束