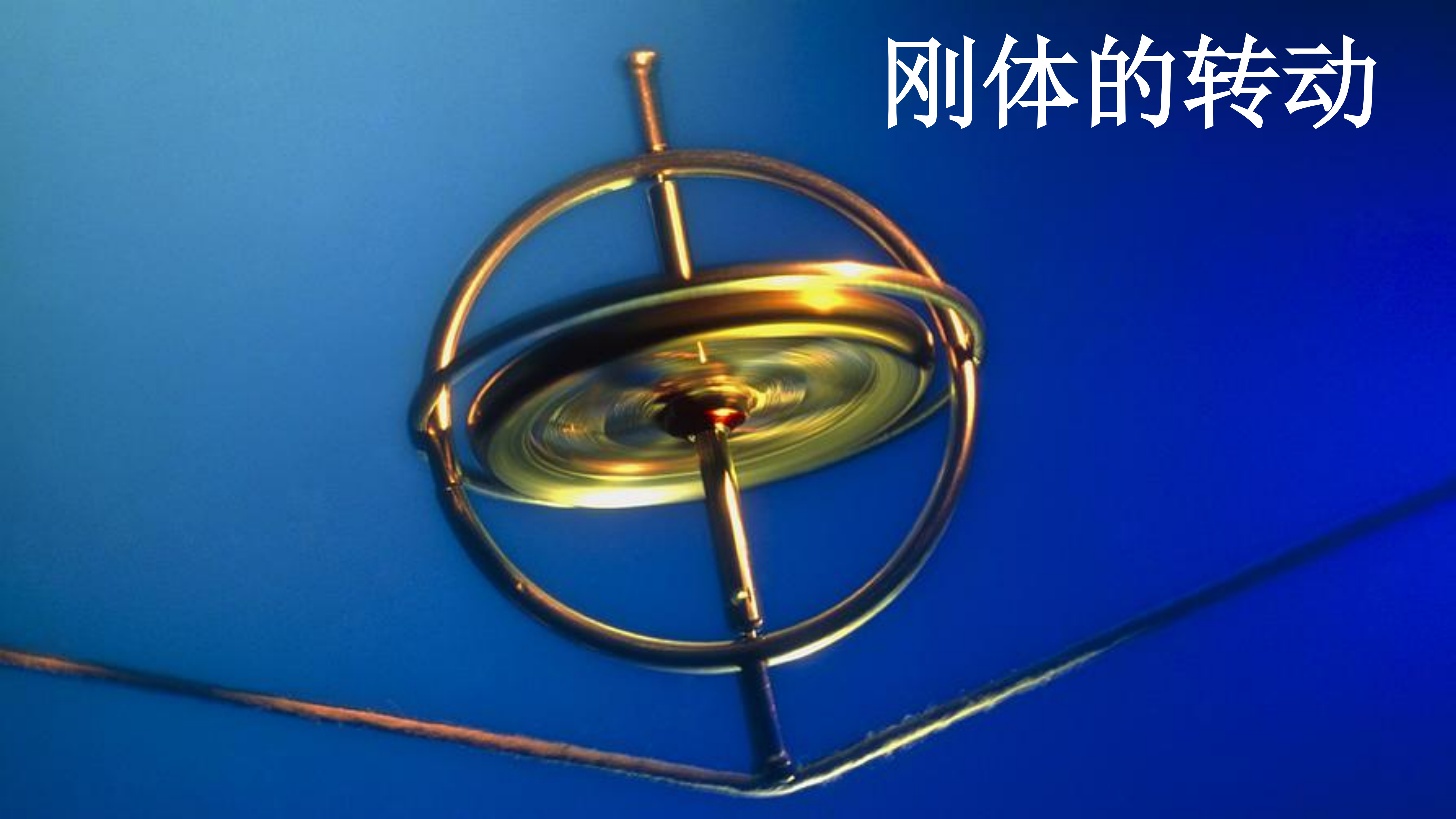
刚体的转动



第五章 刚体的转动

§ 5.1 刚体的运动

§ 5.2 刚体的定轴转动定律

§ 5.3 转动惯量的计算

§ 5.4 转动定律应用举例

§ 5.5 定轴转动中的功能关系

§ 5.6 刚体定轴转动的角动量定理

§ 5.7 进动

§ 5.8 刚体平面运动简介

§ 5.1 刚体的运动

一. 刚体的概念

刚体是抽象化的模型，其形状和体积在受力时不发生变化。

刚体的质点系中，每个质点的相对位置不变，质点系的规律都适用。

二. 刚体运动形式

1. 平动 — 基本的运动形式之一

体内任两点连线在任意时刻保持平行。

常用质心运动代表整体平动。

2. 转动 — 基本的运动形式之二

定点转动：刚体只有一点固定不动，整体绕通过该点的瞬时轴转动。

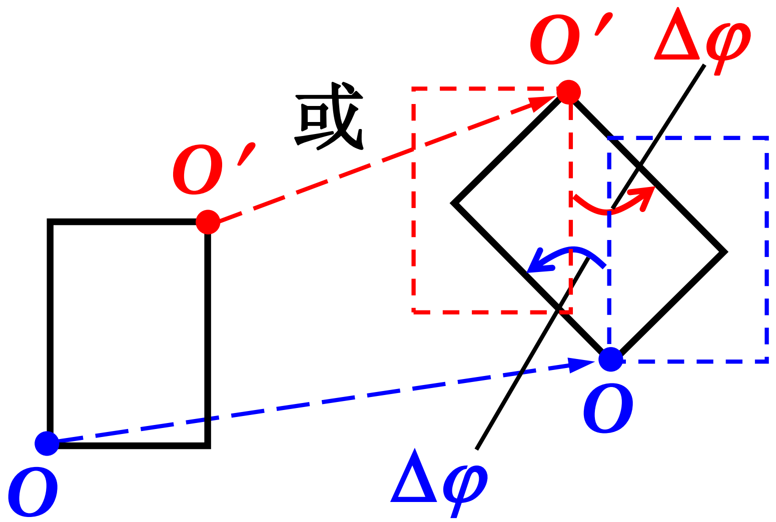
定轴转动：定点转动的瞬时轴成固定轴。

3. 平面运动：刚体各点运动都平行于某固定平面，各点轨道面平行或重合。

4. 一般运动：不受任何限制的自由运动，是下面两种运动的组合：

- 随基点 *O*（可任选）的平动
- 绕通过基点 *O* 的瞬时轴的定点转动

例如：



基点不同，平动可不同，转动却相同。

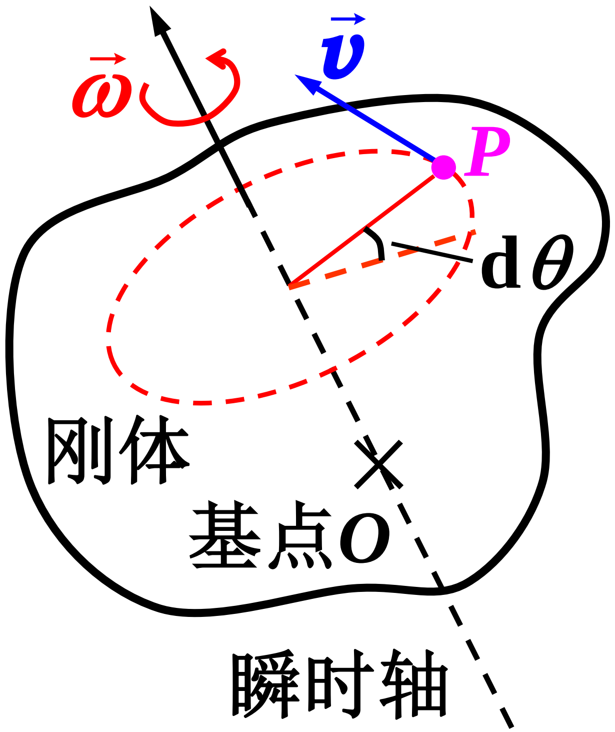
转动与基点选取无关。

三. 定点转动及其运动学量

1. 角速度 $\vec{\omega}$

反映瞬时轴方向及刚体转动的快慢。

$\vec{\omega}$具有唯一性：与基点选择无关。



$$|\vec{\omega}| = \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

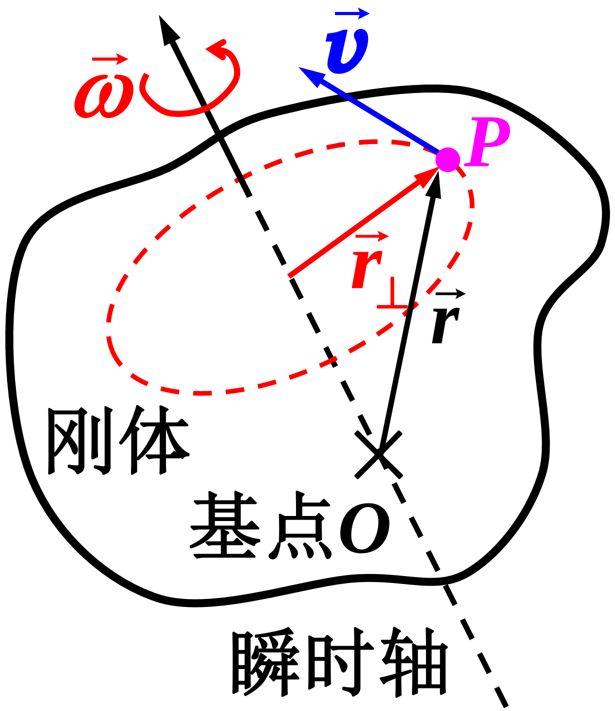
$\vec{\omega}$的方向沿瞬时轴。

2. 角加速度 $\vec{\alpha}$： 反映 $\vec{\omega}$ 的变化情况

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

$\vec{\alpha}$方向不一定与$\vec{\omega}$ 一致，不一定沿瞬时轴。

3. 角量和线量的关系



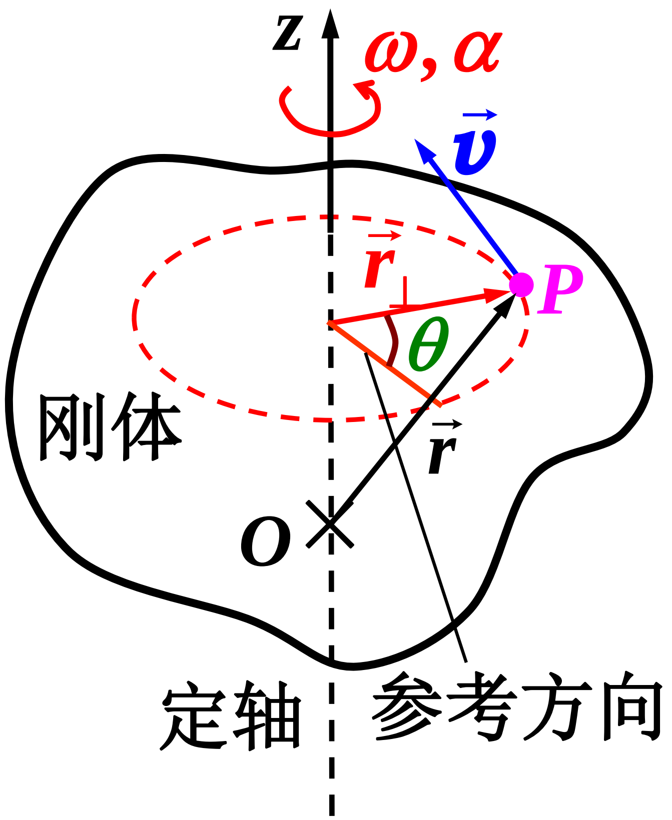
$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}_\perp=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\text{旋转加速度}}+\underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\text{向轴加速度}}$$

四. 定轴转动

对定轴转动，$\vec{\omega}$ 和 $\vec{\alpha}$ 都沿定轴，但两者方向不一定相同，都退化为**代数量**。



$$\boxed{v = r_{\perp}\omega}$$

$$\boxed{a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r_{\perp}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r_{\perp}\alpha}$$

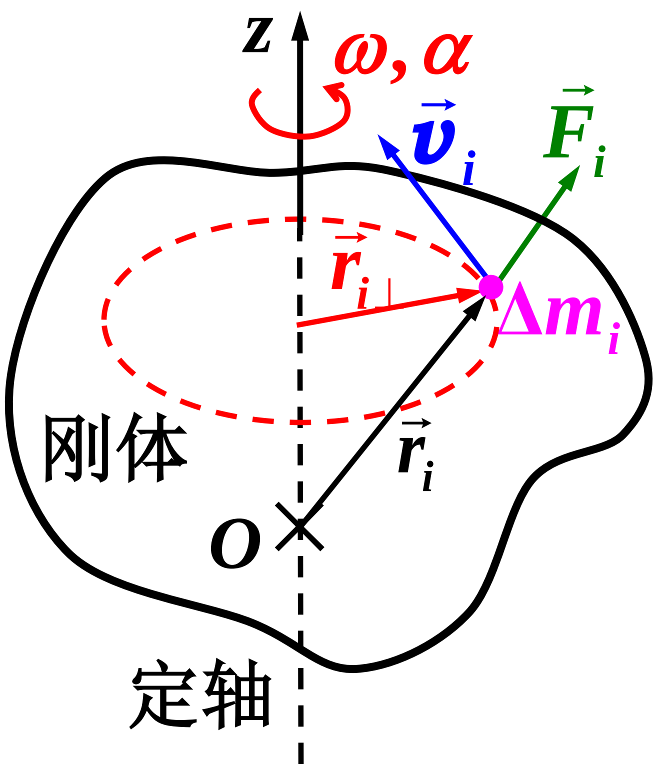
$$\boxed{a_n = r_{\perp}\omega^2}$$

匀加速转动（α恒定）

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ (\theta - \theta_0) = \omega t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

§ 5.2 刚体的定轴转动定律

观点：把刚体看作无限多质元构成的质点系。



$$\vec{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \quad (对\ O\ 点)$$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} \quad (对\ z\ 轴)$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta m_i v_i r_{i\perp}$$

$$= (\sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2) \cdot \omega$$

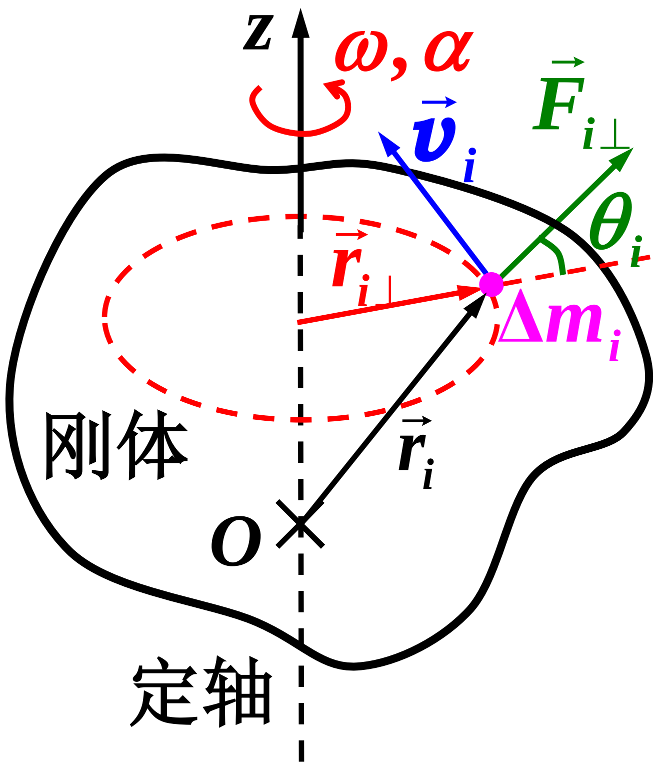
定义对 z 轴的转动惯量 $\boxed{J_z = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2}$

$$\boxed{L_z = J_z \cdot \omega}$$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z\alpha$$

$$M_{外z} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)\cdot\hat{z} = \sum_i (\vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp})\cdot\hat{z}$$

$$M_{外z} = \sum_i F_{i\perp} r_{i\perp} \cdot \sin\theta_i$$



对定轴，略去下标 z：

$\boxed{M = J\alpha}$ —— 刚体定轴转动定律

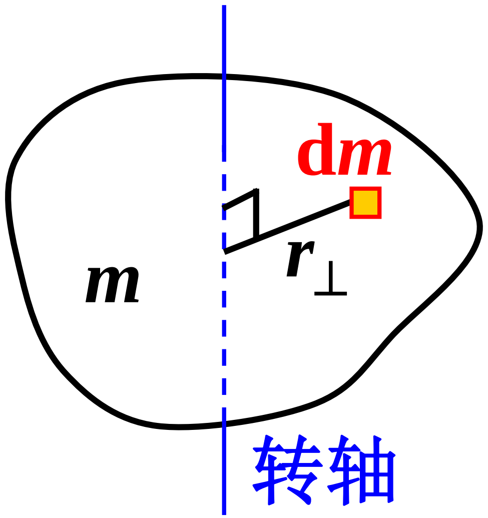
与牛顿第二定律相比：$M \sim F$，$J \sim m$，$\alpha \sim a$

J 反映刚体转动的惯性

§ 5.3 转动惯量的计算

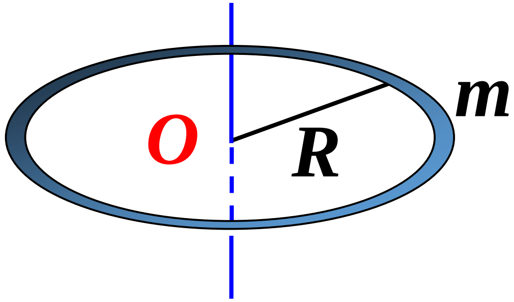
质点系 $J=\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

连续体 $J=\int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}m$



J 由质量对轴的分布决定。

一. 常用的几种转动惯量表示式



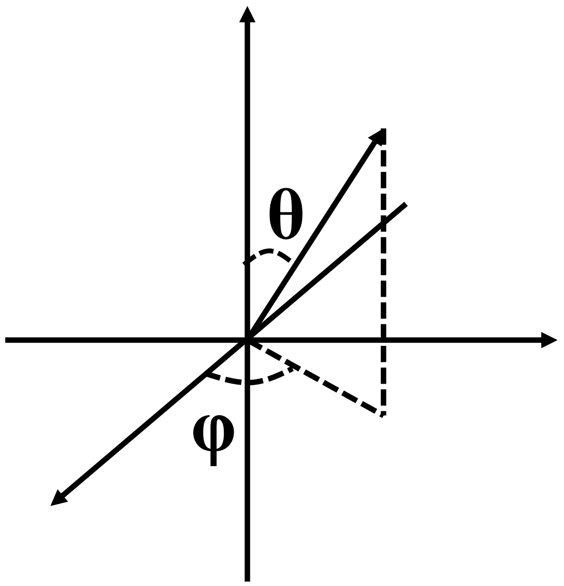
细圆环：$\boxed{J_O=mR^2}$

球体绕通过球心轴的转动惯量

$$J=\int r_{\perp}^{2}\cdot\rho dV=\int\left(r\sin(\theta)\right)^{2}\cdot\rho r^{2}\sin(\theta)drd\theta d\varphi$$

$$J=\int\rho r^{4}\sin(\theta)^{3}drd\theta d\varphi$$

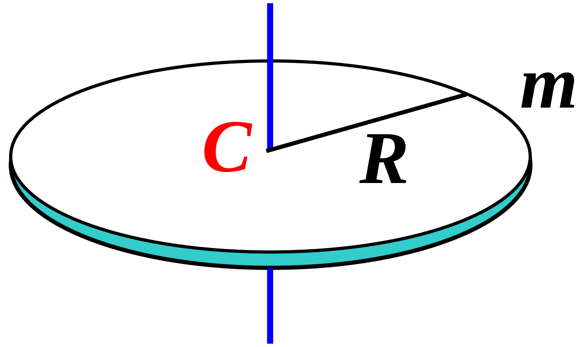
$$J=\int\rho r^{4}dr(\cos(\theta)^{2}-1)d\cos(\theta)d\varphi$$



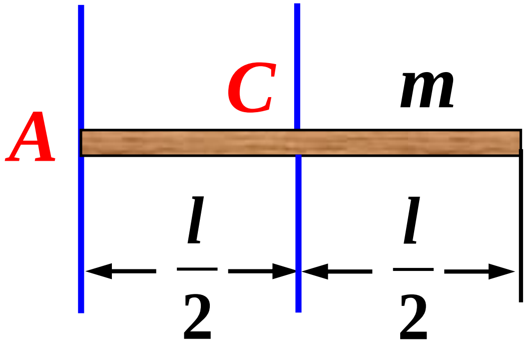
$$J=\rho\left.\frac{r^{5}}{5}\right|_{0}^{R}\left.\left(\frac{\cos(\theta)^{3}}{3}-\cos(\theta)\right)\right|_{0}^{\pi}\cdot 2\pi$$

$$J=\frac{2}{5}R^{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^{3}\rho$$

$$J=\frac{2}{5}MR^{2}$$



均匀圆盘：$\boxed{J_C = \frac{1}{2} mR^2}$



均匀细杆：

$\boxed{J_C = \frac{1}{12} ml^2}$ $\boxed{J_A = \frac{1}{3} ml^2}$

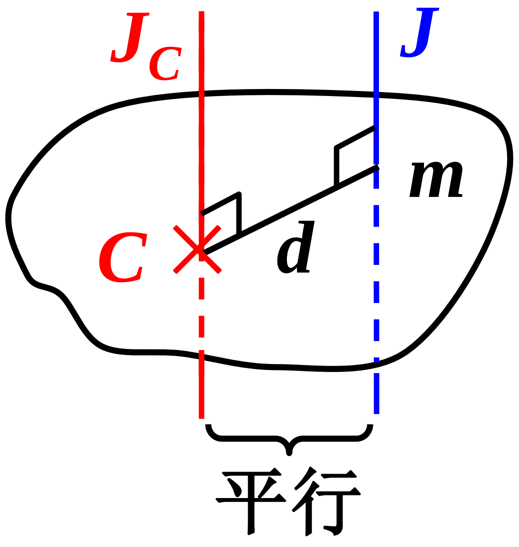
二. 计算转动惯量的几条规律

1. 对同一轴 J 具有可叠加性

$$\boxed{J = \sum J_i}$$

2. 平行轴定理

$$\boxed{J = J_C + md^2}$$



$$\therefore \quad J_C = J_{\min}$$

$$J = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\sum_i \Delta m_i x_i^2 = \sum_i \Delta m_i (x_i' + x_c)^2$$

$$= \sum_i \Delta m_i x_i'^2 + 2x_c \sum_i \Delta m_i x_i' + x_c^2 \sum_i \Delta m_i$$

$$J = \sum_i \Delta m_i x_i'^2 + m x_c^2 + \sum_i \Delta m_i y_i'^2 + m y_c^2$$

$$J = \sum_i \Delta m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + m(x_c^2 + y_c^2)$$

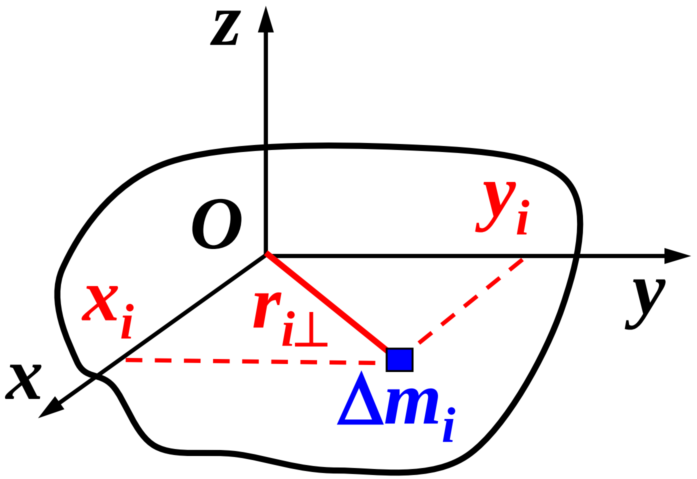
$$J = J_c + md^2$$

3. 对薄平板的正交轴定理

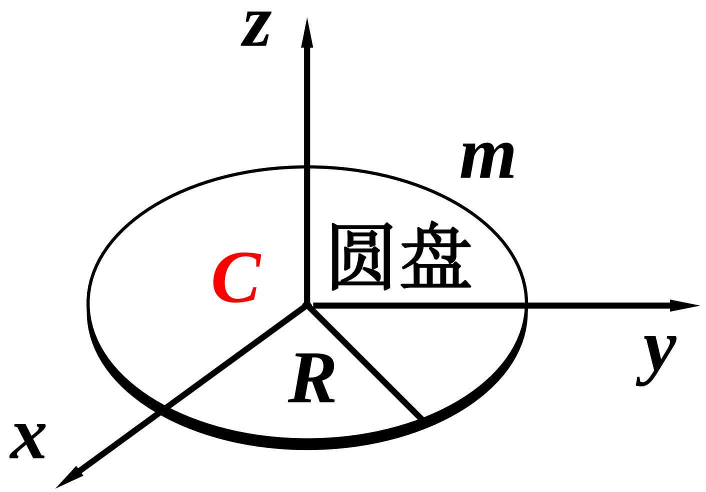
$$J_z = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$$

$$= \sum \Delta m_i x_i^2 + \sum \Delta m_i y_i^2$$

$$\boxed{J_z = J_x + J_y}$$



【例】求对薄圆盘的一条直径的转动惯量。

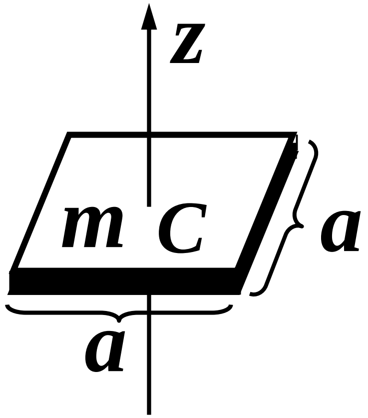


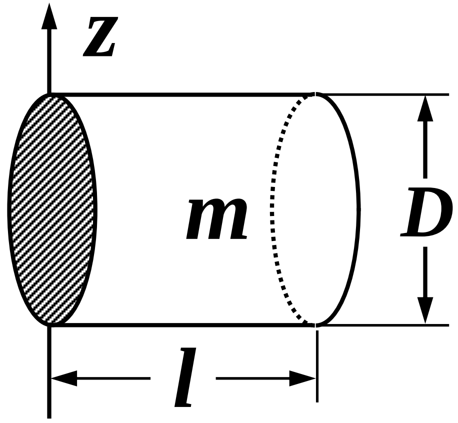
已知圆盘 $J_z = \frac{1}{2} mR^2$

解：$J_x + J_y = J_z = \frac{1}{2} mR^2$

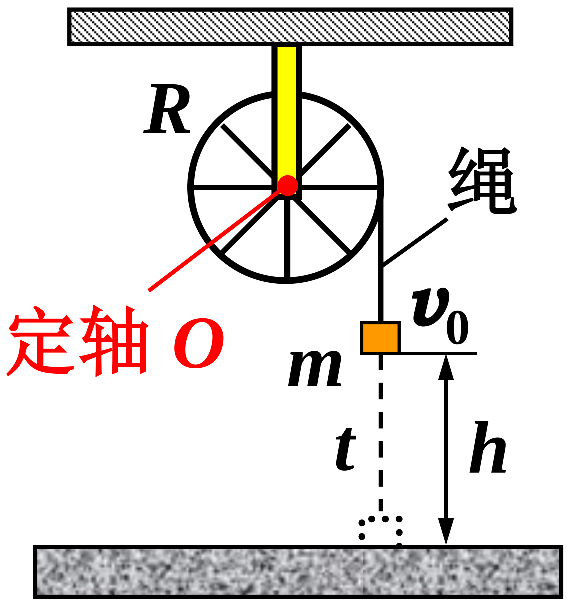
$\therefore \; J_x = J_y = \frac{1}{4} mR^2$

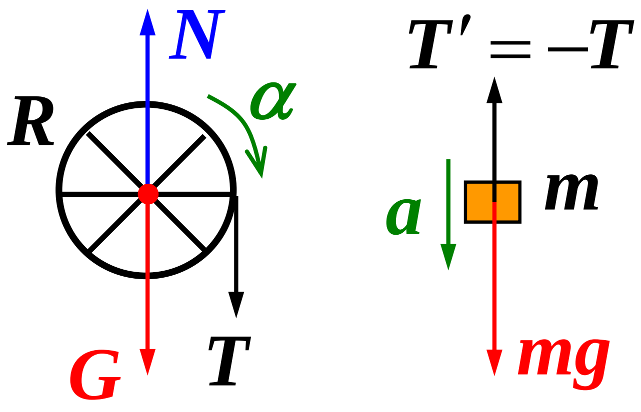
【思考】下图中的 J_z 如何求？





§ 5.4 转动定律应用举例





已知：R, m, h, $v_0 = 0$, 下落时间 t，绳轮之间无相对滑动，绳不可伸长。

求：轮对 O 轴的 J

解：动力学关系：

对轮： $T \cdot R = J \cdot \alpha$ (1)

对 m： $mg - T = ma$ (2)

运动学关系： $a = \alpha \cdot R$ (3)

$$h = \frac{1}{2}at^2 \quad (4)$$

(1)一(4) 联立解得：$J=(\frac{gt^2}{2h}-1)mR^2$

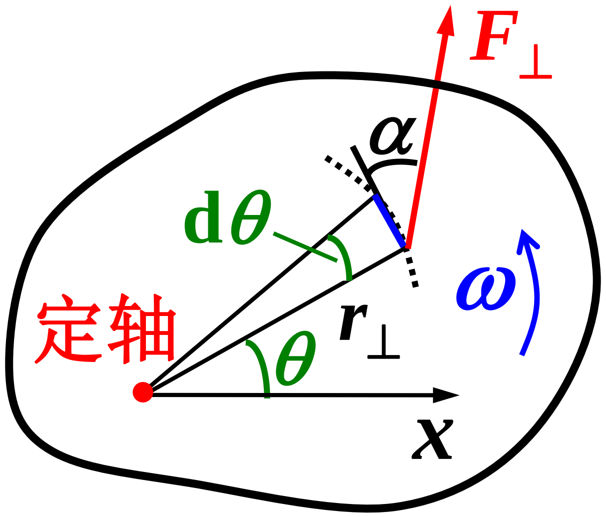
分析结果：

- 量纲对；
- h、m 一定，$J\uparrow \rightarrow t\uparrow$，合理；
- 若 $J=0$，得 $h=\frac{1}{2}gt^2$，正确。

这是一种用实验测定转动惯量的方法。

§ 5.5 定轴转动中的功能关系

一. 力矩的功



力矩的空间积累效应：

$$\mathrm{d}W_{力矩} = F_\perp \cos\alpha (r_\perp d\theta)$$

$$= (F_\perp \cos\alpha \; r_\perp)\mathrm{d}\theta$$

$$= Md\theta$$

力矩的功

$$\boxed{W_{力矩} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta}$$

二. 定轴转动动能定理

$$W_{力矩}=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

定义转动动能 $\boxed{E_k^{转动}=\frac{1}{2}J\omega^2}$

$$\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2\omega^2=\frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i \upsilon_i^2$$

$\boxed{W_{力矩}=\Delta E_k^{转动}}$ —— 刚体定轴转动动能定理

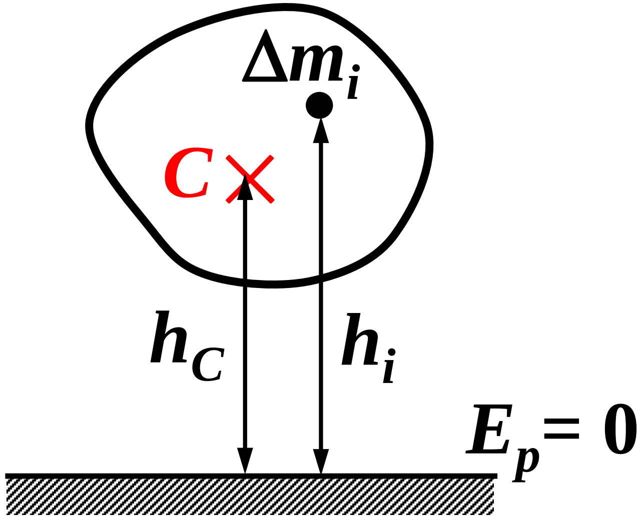
三. 定轴转动的功能原理

质点系功能原理对刚体仍成立：

$$W_{外} + \underbrace{W_{内非}}_{\to 0} = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})$$

刚体重力势能：　　若 $W_{外} = 0$，

则 $E_k + E_p =$ 常量



$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i$$

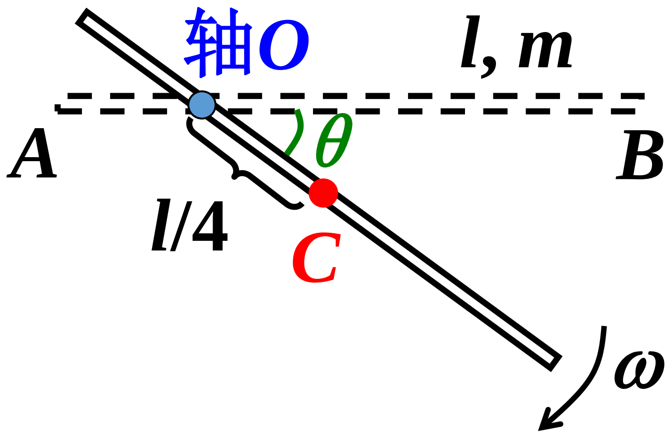
$$= mg \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

$$= mgh_c$$

四. 应用举例

对于包括刚体的系统，功能原理和机械能守恒定律仍成立。

例：均匀直杆质量为 m，长为 l，初始水平静止。轴光滑，$\overline{AO}=l/4$。



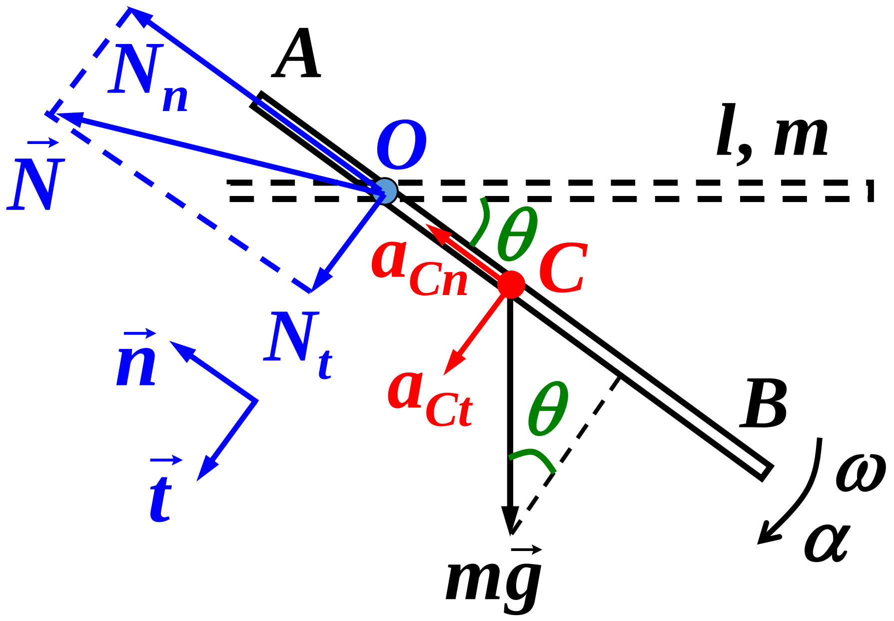
求：杆下摆到 θ 角时的角速度 ω 和轴对杆的作用力 $\vec{N}$。

解：（杆+地球）系统，只重力作功，E守恒：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}J_O\omega^2-mg\frac{l}{4}\sin\theta=0\\&J_O=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2=\frac{7}{48}ml^2\end{aligned}\right\}\quad\omega=2\sqrt{\frac{6g\sin\theta}{7l}}$$

应用质心运动定理

求轴力：



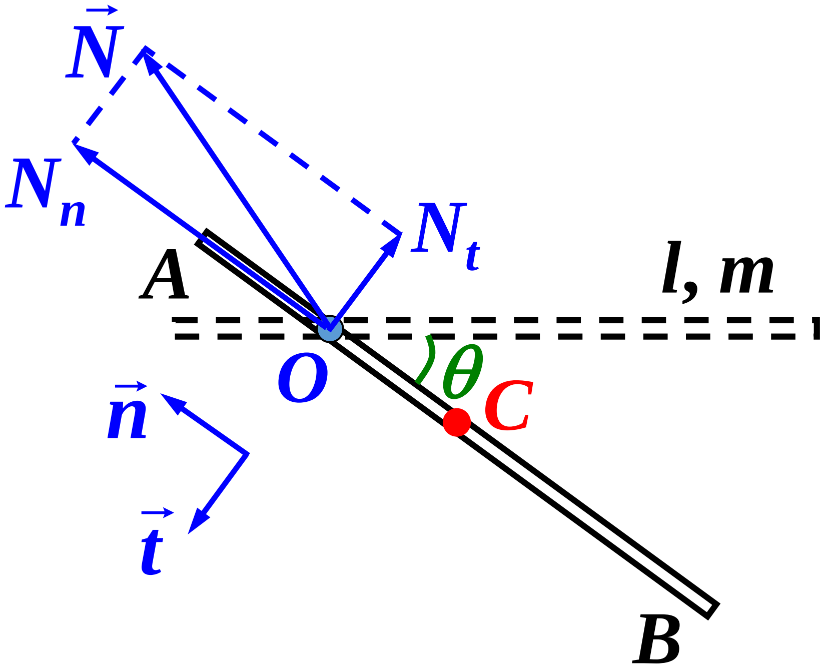
$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_C$$

$$\vec{n}: \quad -mg\sin\theta + N_n = ma_{Cn} \qquad (3)$$

$$\vec{t}: \quad mg\cos\theta + N_t = ma_{Ct} \qquad (4)$$

$$a_{Cn} = \frac{l}{4}\omega^2 = \frac{6}{7}g\sin\theta \qquad (5)$$

$$a_{Ct} = \frac{l}{4}\alpha = \frac{l}{4}\cdot\frac{\frac{l}{4}mg\cos\theta}{J_O} = \frac{3g\cos\theta}{7} \qquad (6)$$



由(3)(4)(5)(6)解得：

$$N_n = \frac{13}{7} mg \sin\theta$$

$$N_t = -\frac{4}{7} mg \cos\theta$$

$$\vec{N} = \frac{13}{7} mg \sin\theta \cdot \vec{e}_n - \frac{4}{7} mg \cos\theta \cdot \vec{e}_t$$

$$N = \frac{mg}{7} \cdot \sqrt{153 \sin^2\theta + 16}$$

§ 5.6 刚体定轴转动的角动量定理

质点系 $\begin{cases} \text{对点} & \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\, \mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \\ \text{对轴} & \int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\, \mathrm{d}t = L_{2z} - L_{1z} \end{cases}$

刚体 $L_z = J_z \omega$

所以 $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\, \mathrm{d}t = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$

或 $\boxed{M_{外z}\, \mathrm{d}t = J_z \mathrm{d}\omega}$

—— 刚体定轴转动的角动量定理

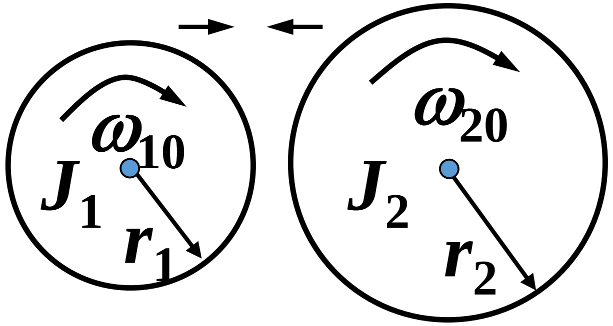
$$\boxed{\text{若 } M_{外z}=0\text{，则 } L_z=J_z\omega=\text{常矢量}}$$

—刚体定轴转动的角动量守恒定律

对刚体系，$M_{外z}=0$ 时，$\sum J_{iz}\omega_i=\text{const.}$

角动量可在系统内各刚体间传递，而刚体系对转轴总角动量不变（必须是同一轴）。

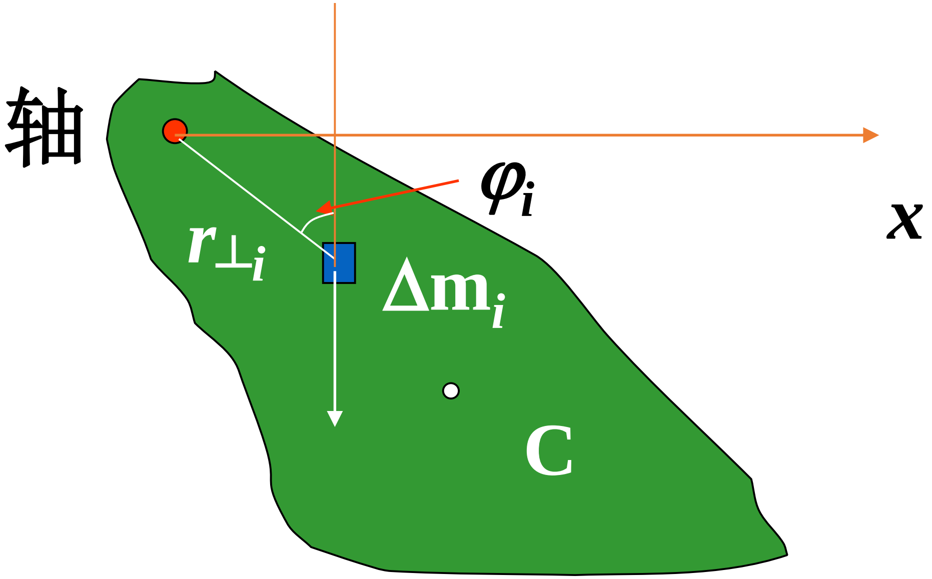
【思考】 两轮磨合问题



两匀速转动的轮子接触后，讨论摩擦力、运动状态变化，能否用对轴的角动量守恒？

重力力矩

$$M = \sum M_i = \sum r_{\perp i} \Delta m_i g \sin \phi_i$$



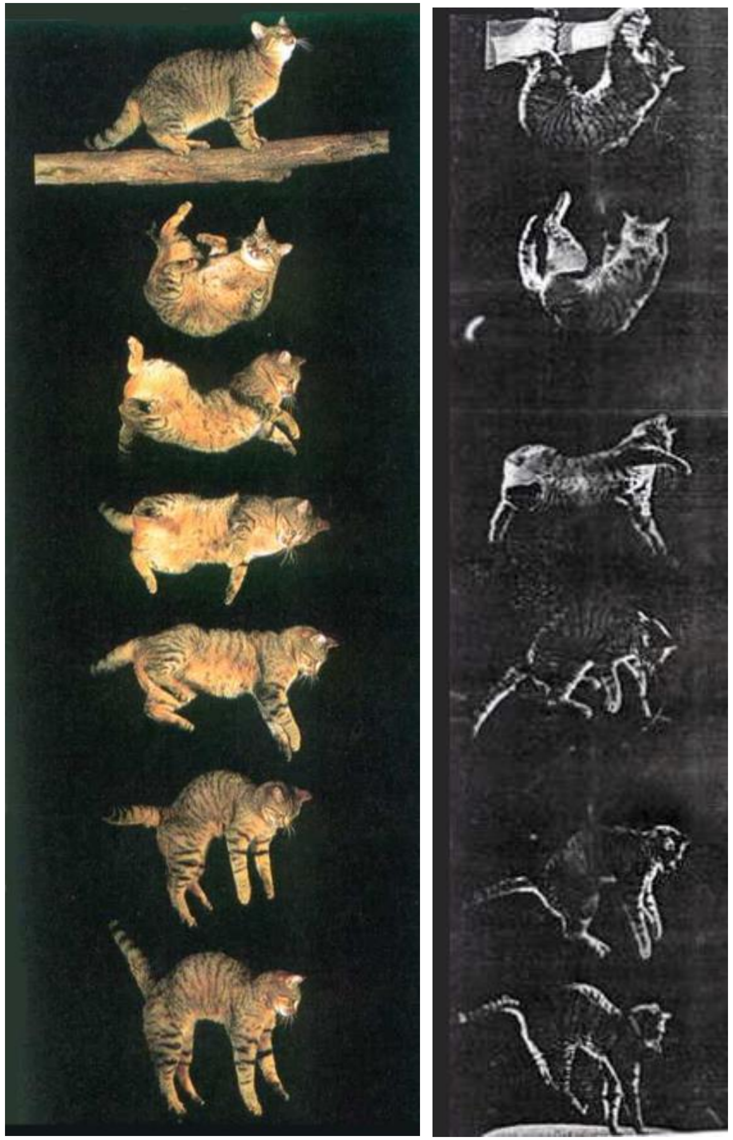
$$M = \sum x_i \Delta m_i g = x_c m g$$

好像所有物质集中于质心

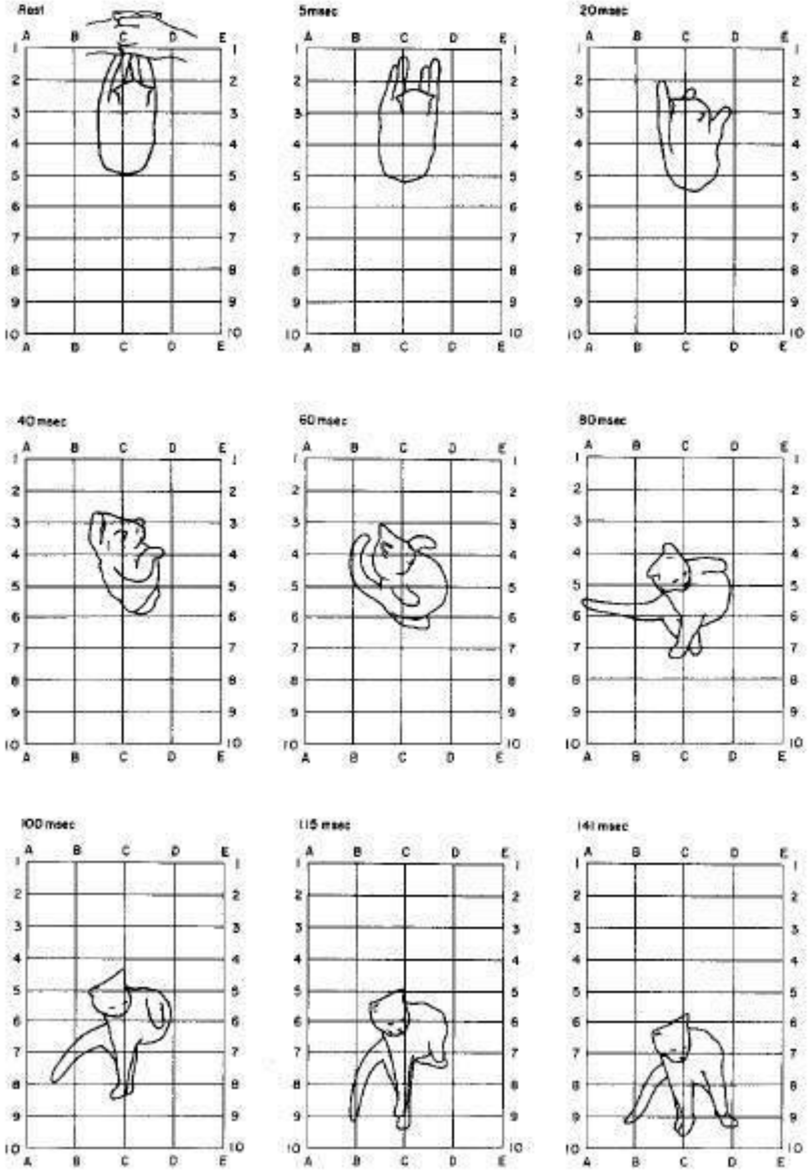
克服直升飞机机身反转的措施

尾浆推动大气，
产生的力矩阻
止机身反转。

双翼反向转动，
产生反向力矩，
相互抵消。



猫从树枝和手的下落



Rest
5msec
20msec
40 msec
60 msec
80 msec
100 msec
115 msec
141 msec

演示 角动量守恒：

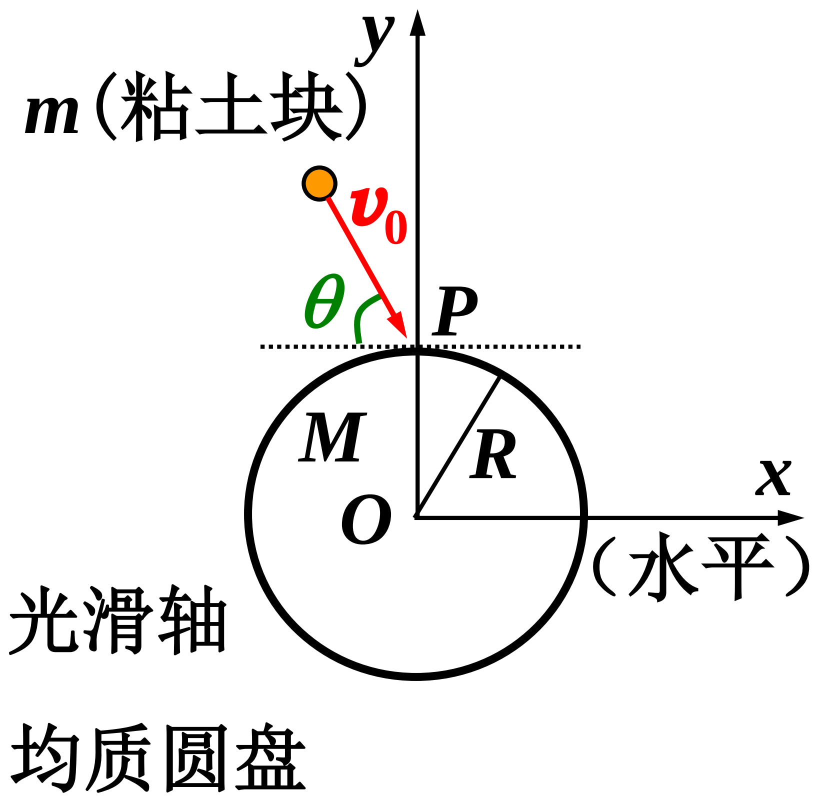
茹科夫斯基转椅

转台车轮

视频

刚体定轴角动量守恒

【例】粘土块斜射到匀质圆盘顶点 P 后与圆盘粘合，已知：v_0，R，$M = 2m$，$\theta = 60^\circ$。

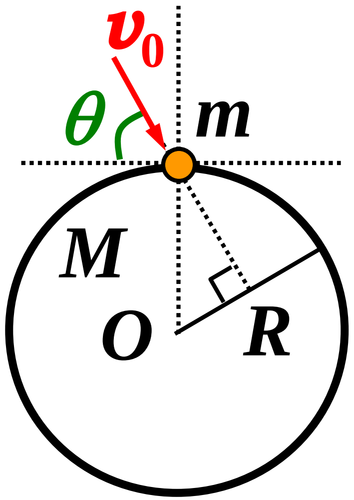


求：当 P 转到 x 轴时盘的 ω, α, 轴对盘的作用力 $\vec{N}$。

解：（1）求ω、α，过程分 2 步：

碰撞过程：

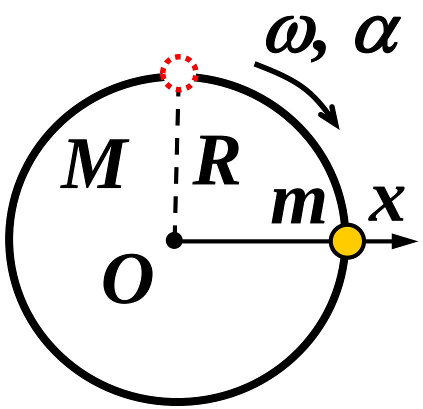
对 $m+M$ 系统，碰撞瞬间，外力（重力和轴力）对 O 轴的力矩 = 0，$\vec{L}$ 守恒，



设碰后瞬间盘角速度为ω_0，有：

$$Rmv_0\cos\theta = \frac{1}{2}MR^2\omega_0 + mR^2\omega_0 \quad (1)$$

定轴转动过程：



$m + M$ 形成刚体，转动惯量为：

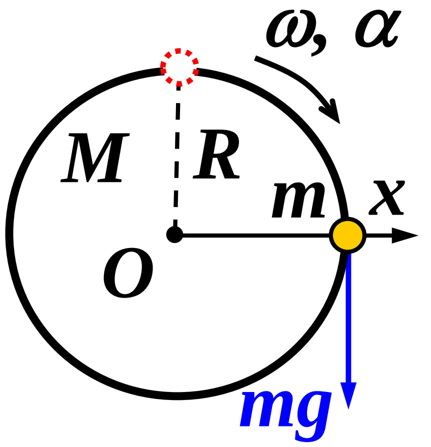
$$J = MR^2/2 + mR^2 = 2mR^2 \quad (2)$$

对 m +M+地球系统，E 守恒，

令m、x 重合时 $E_P = 0$，有：

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (3)$$

(1)(2)(3)解得 $\omega = \sqrt{v_0^2 + 16gR}/4R$

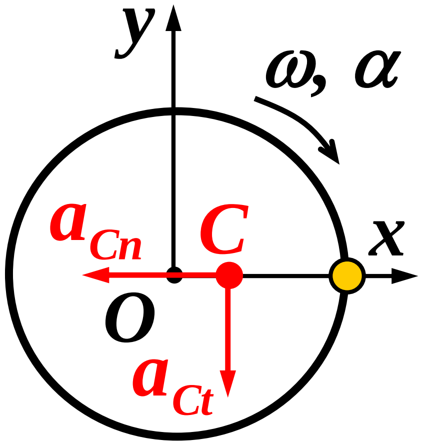


m、x重合时 $m+M$ 系统所受力矩：

$$M = mgR$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{M}{J} = \frac{mgR}{2mR^2} = \frac{g}{2R}$$

（2）求轴力$\vec{N}$ — 用质心运动定理求

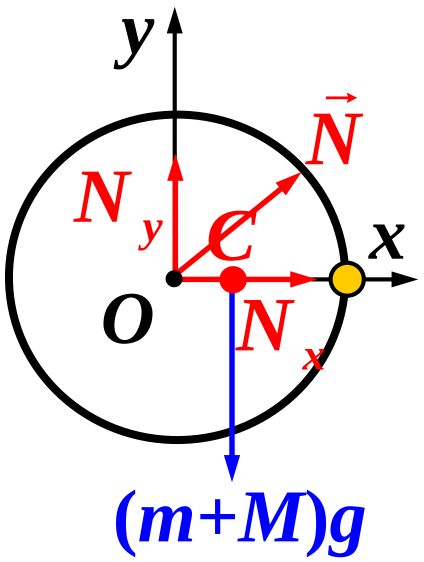


$m+M$ 的质心 C 在距 O 的 $R/3$ 处，

质心加速度：

$$a_{Ct} = \alpha \frac{R}{3}, \quad -y \text{ 方向}$$

$$a_{Cn} = \omega^2 \frac{R}{3}, \quad -x \text{ 方向}$$



设轴力 $\vec{N}$ 的方向如图，

由质心运动定理有：

$$N_x = -(m+M)a_{Cn}$$

$$N_y - (m+M)g = -(m+M)a_{Ct}$$

代入 a_{Cn}，a_{Ct} 的值得：

$$N_x = -m\left(\frac{v_0^2}{16R} + g\right),\quad N_y = \frac{5}{2}mg$$

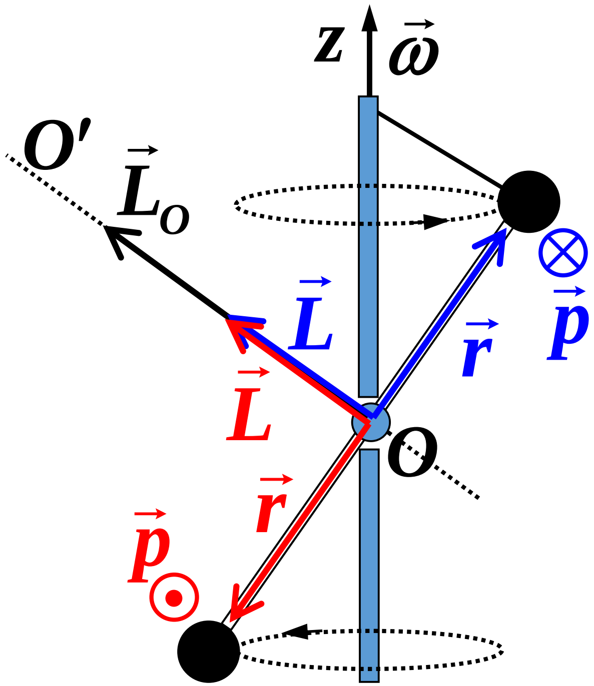
$N_x < 0$ 表明 $\vec{N}$ 的 x 分量与假设方向相反。

【思考】如何用牛顿定律分别对 m 和圆盘作隔离体分析，求出轴力 $\vec{N}$？

§ 5.7 进动

一. 刚体角动量和角速度的关系

刚体的角动量 $\vec{L}$ 和角速度 $\vec{\omega}$ 方向一定相同吗？

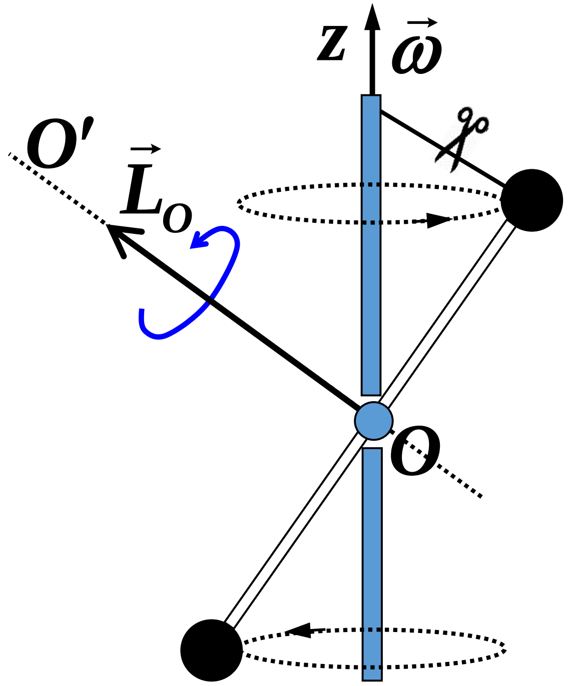


例：如图由于绳的约束，固连球的轻杆只能绕 Oz 轴转动，O 是杆的中点，但是：

$$\vec{L}_O \not\parallel \vec{\omega}$$

∴ 一般情况下，刚体的角动量 $\vec{L}$ 和角速度 $\vec{\omega}$ 的方向不一定相同。

质量均匀、几何对称的刚体，绕几何对称轴自转时，自转角动量 $\vec{L}$ // 自转角速度 $\vec{\omega}$ 。



【思考】

剪断绳瞬间如何运动？

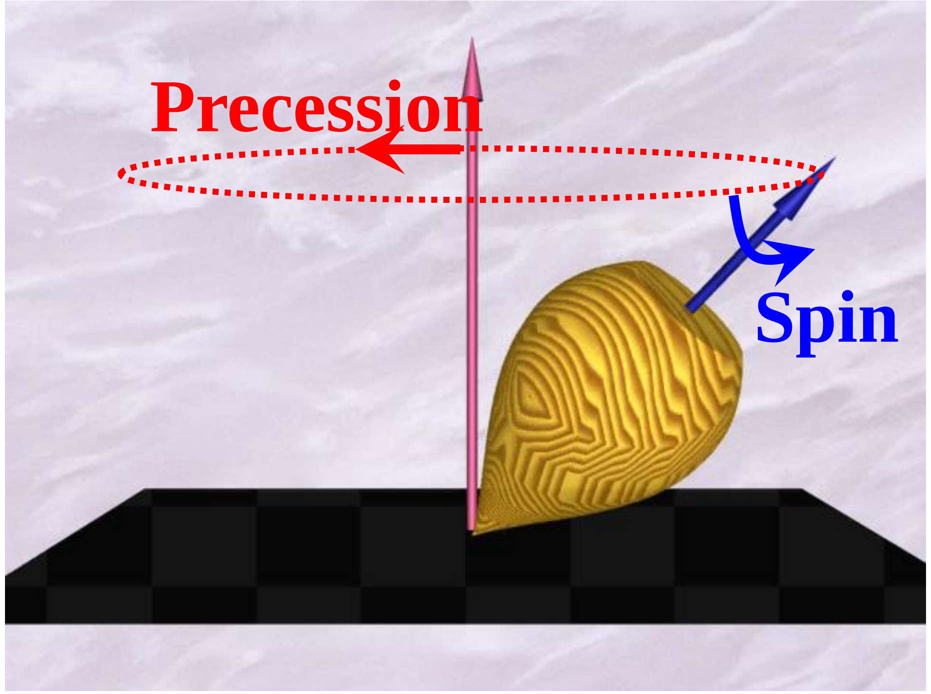
答：绕 OO' 轴转，

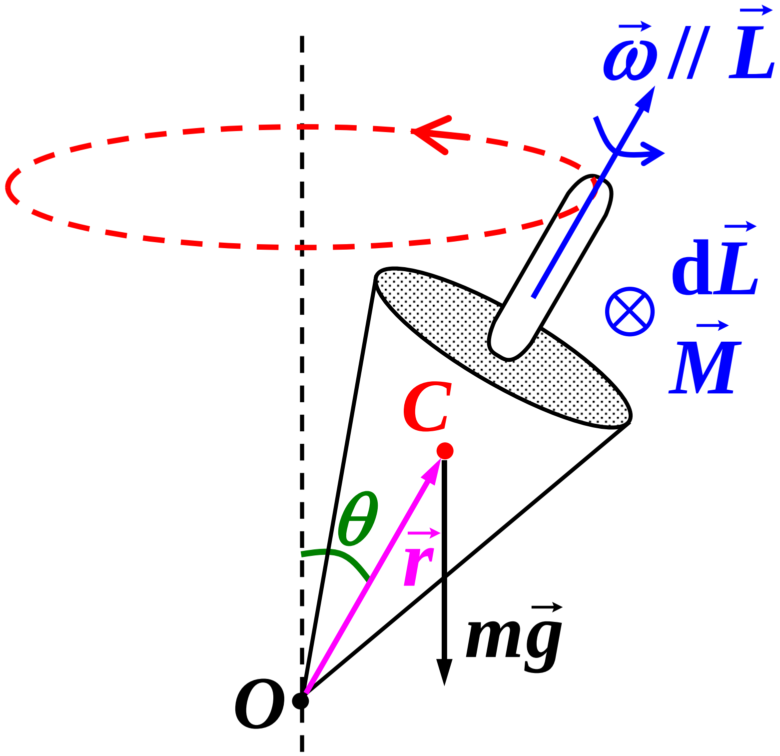
因为此时 $\vec{L}_O$ 守恒。

演示　力矩突变

二. 进动

高速自转物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象，如玩具陀螺：





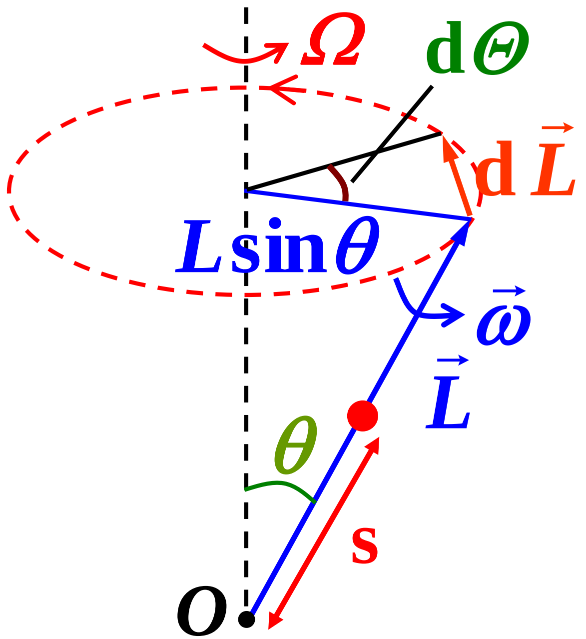
对O点，分析对称陀螺**自转角动量 $\vec{L}$** 的变化：

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} // \vec{M}$$

$$\vec{M} \perp \vec{L} \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} \perp \vec{L}$$

每一瞬时，角动量 $\vec{L}$ 只改变方向而不改变大小，而同时，使角动量 $\vec{L}$ 产生变化的力矩 $\vec{M}$ 也随之改变方向，使上面关系在每一瞬间总保持成立，这就意味着刚体在作进动。

进动角速度： $\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$



$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta = M\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad \boxed{\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{J\omega\sin\theta}}$$

$$M = mgs\sin\theta$$

$$\Omega = \frac{mgs}{J\omega}$$

合重力矩为零，无进动

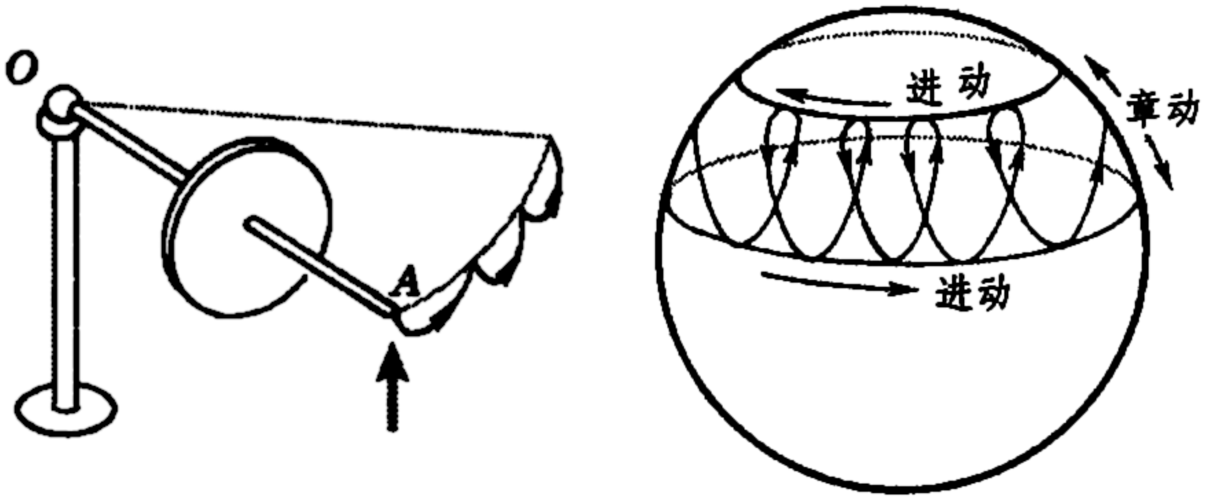
重力矩反向，则进动反向

演示　车轮进动，对称陀螺的定轴性　　TV　进动防止炮弹翻转

进动稳定后，总角速度： $\vec{\omega}_{总} = \vec{\omega} + \vec{\Omega}$

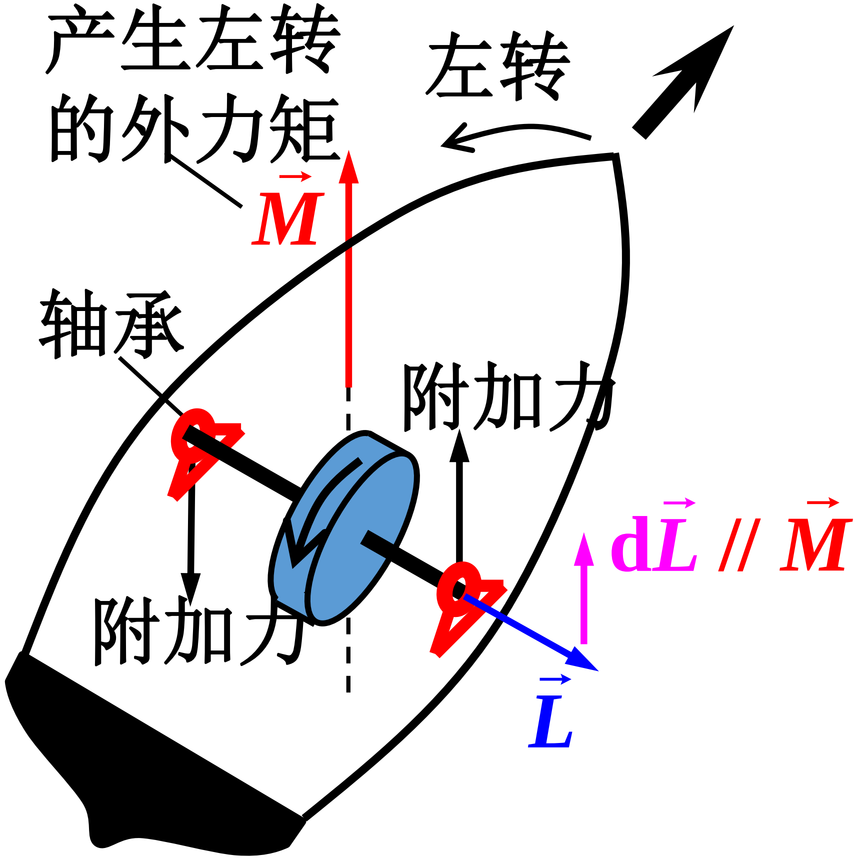
当刚体高速自转时有： $\vec{\omega}_{总} \approx \vec{\omega}$

对非对称刚体或转速较小时，自转轴在进动中会出现微小的上下周期性的摆动 — 章动。



讨论 回转效应的利弊

▲ 轮船转弯时，涡轮机轴承要承受附加力。



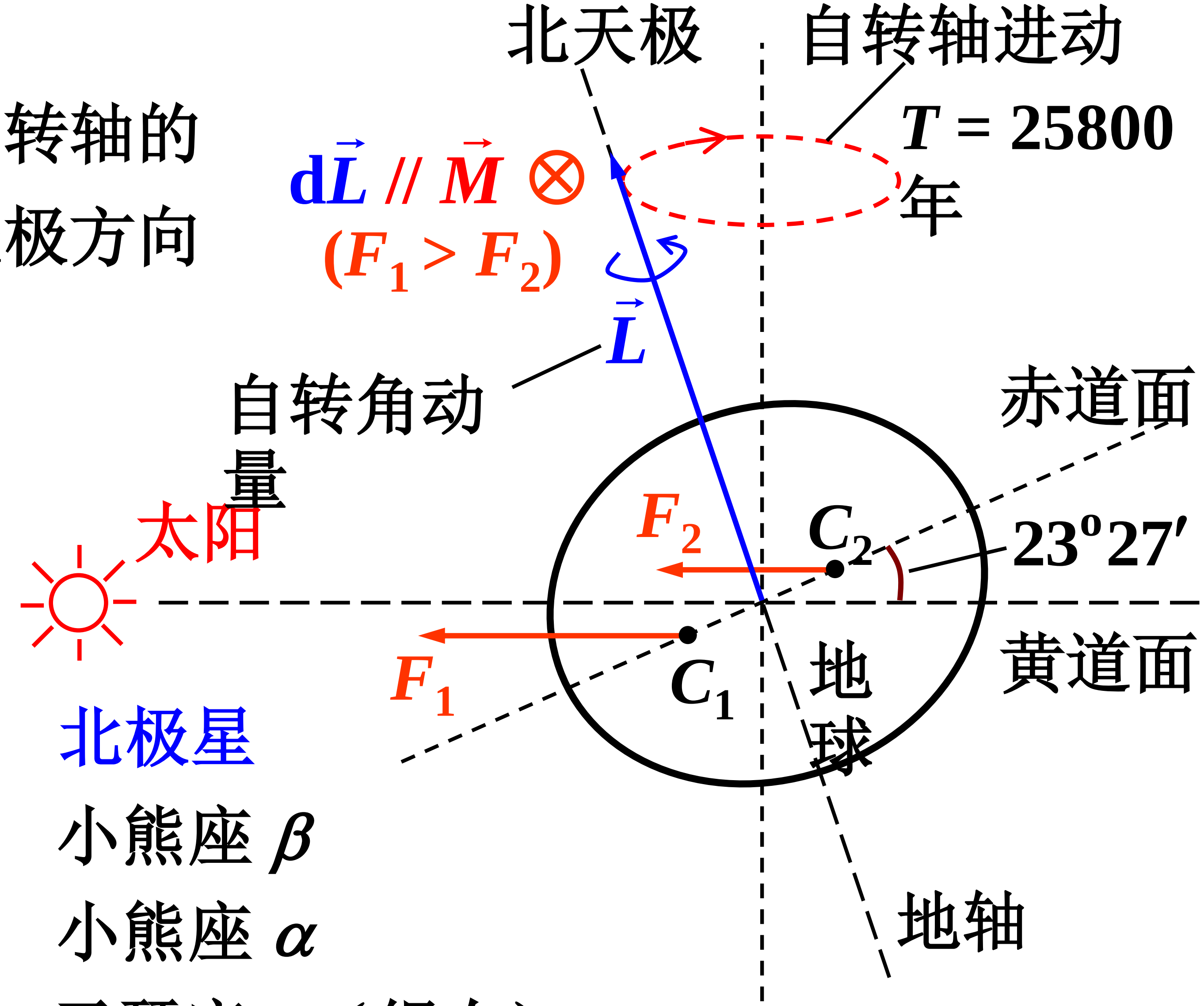
附加力会损坏轴承，甚至翻船。

对海浪，回转效应则可使船体保持平衡、稳定。

▲ 三轮车拐弯时易翻车

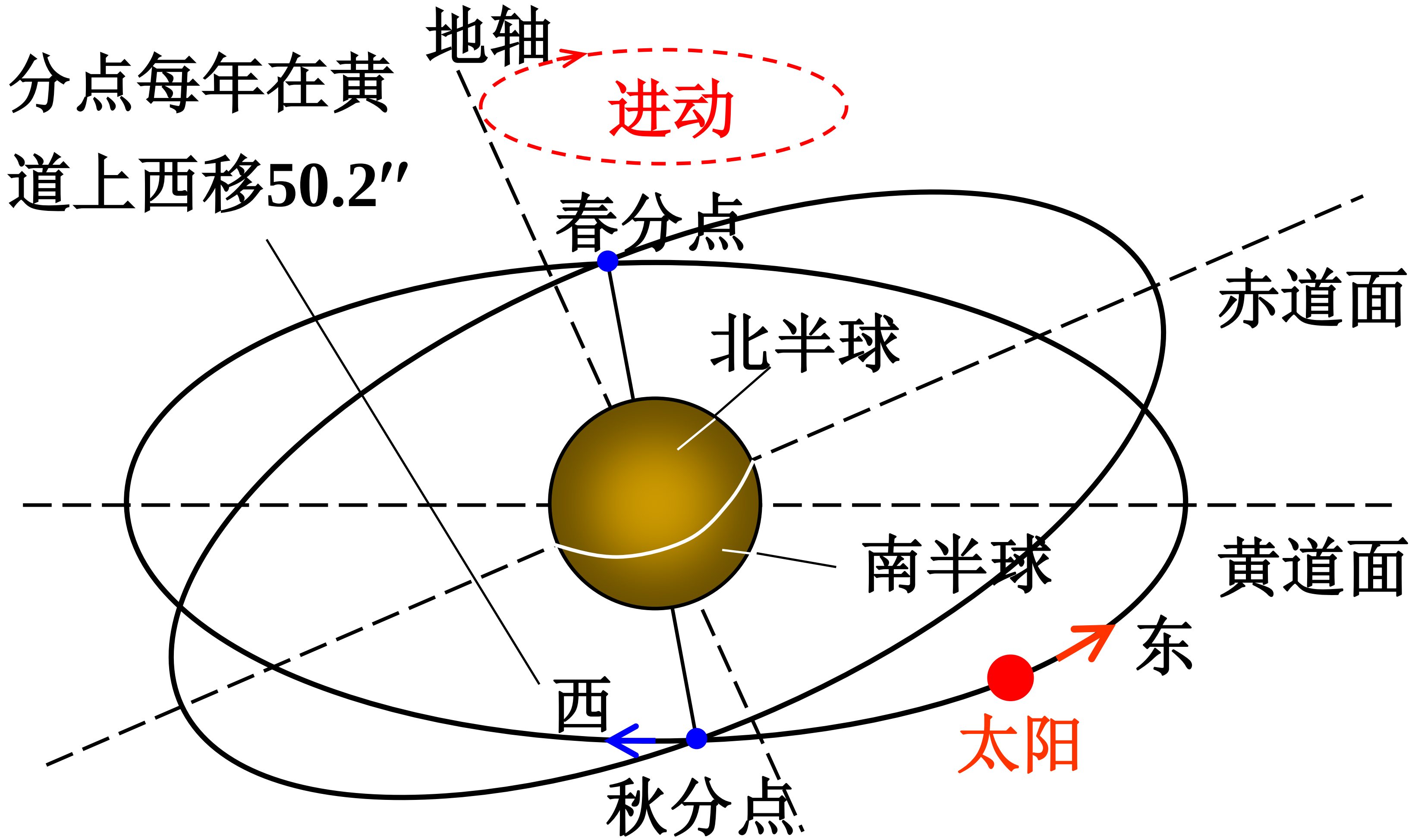
讨论 地球进动与岁差

随着地球自转轴的进动，北天极方向不断改变。



北极星

3000年前	小熊座 β
现在	小熊座 α
12000年后	天琴座 α（织女）



太阳年（回归年）：太阳由春分 → 秋分 → 春分

恒星年：地球绕太阳一周的时间

岁差 = 恒星年 －太阳年 = 20分23秒

三. 自由度

自由度是确定力学体系空间几何位形所需的**独立坐标数，与几何约束条件直接相关。**

1. 质点的自由度

- 不受约束（自由）的质点，自由度为 3，
  x, y, z 相互独立；
- 约束在曲面上运动的质点， 自由度为 2，
  x, y, z 中有1个不独立，如 $z = z(x, y)$；
- 约束在曲线上运动的质点， 自由度为 1，
  x, y, z 有2个不独立，如 $z = z(x)$，$y = y(x)$

2. 刚体的自由度

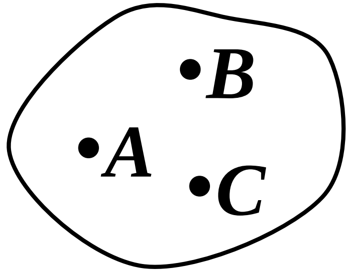
自由刚体的自由度最大，等于6 。

解释： 3 点可固定（完全约束）刚体：

A 点固定，$\overline{BC}$ 仍可绕 A 转动，

B 点固定，C 点仍可绕 $\overline{AB}$ 转动，

C 点固定，则刚体固定。



3 个点总坐标数是 9，但 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 距离不变，这 3 个条件使独立坐标数减少 3 个。

所以刚体最大自由度是 6 。

刚体最大自由度：

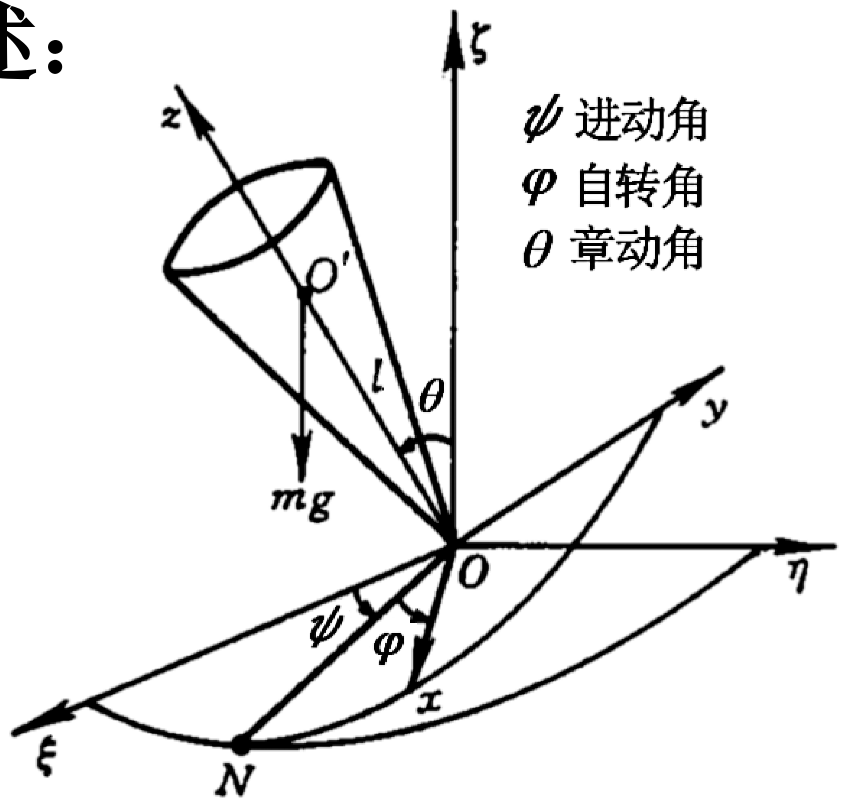
6 = 3（基点平动）+ 3（绕基点转动）

转动用 3 个欧勒角描述：

ψ — 进动角

θ — 章动角

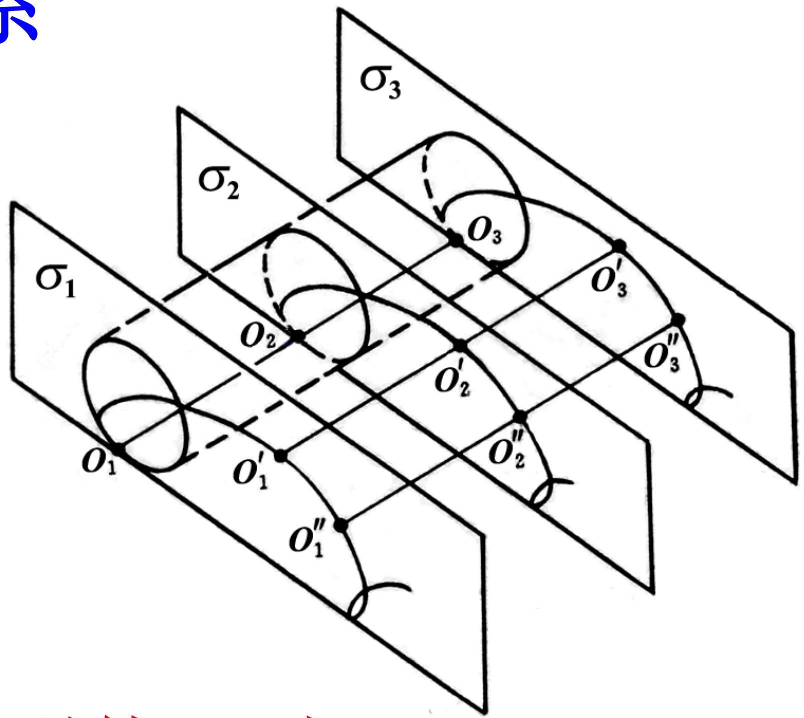
φ — 自转角



§ 5.8 刚体平面运动简介

一. 基本概念和运动学关系

1. 基面、基点、基轴



- 可任选一轨道平面作为基面，如 σ_1 面。

  与基面垂直的任意直线上的各点运动相同。

  ∴ 基面各点运动可代表刚体运动。

- 在基面上可任选一点为参考基点，如 O_1 点。
- 过基点垂直基面的直线为基轴，如 O_1O_3 轴。

基面各点运动为下列组合：

基点平动 (自由度2) ＋ 绕基点转动 (自由度1)

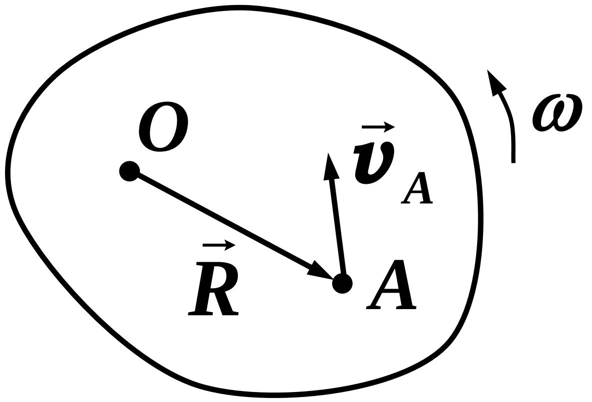
刚体平面运动为下列组合：

基轴平动 ＋ 绕基轴的转动

选质心为基点，有利于动力学问题分析。

2. 基面上各点速度关系

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{R}}$$



$\vec{v}_O$是基点 O 的速度，$\vec{R} = \overrightarrow{OA}$

注意： $\vec{\omega}$是唯一的，与基点选择无关。

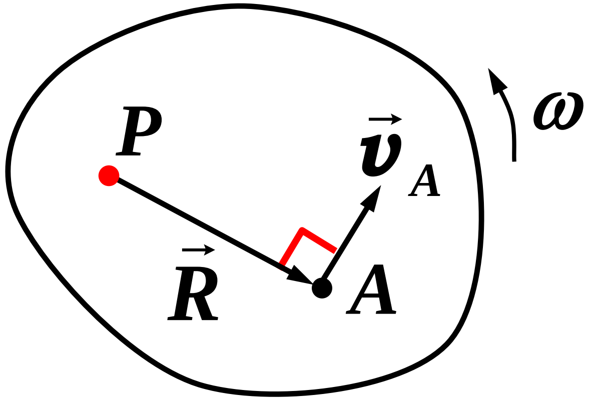
3. 瞬心（瞬时转动中心）、瞬轴（瞬时转轴）

- 基面上必存在一个瞬时速度为零的点 P

  — 瞬心

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{\omega}\times\vec{R}, \quad \vec{v}_A \perp \vec{R}}$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{PA}$$

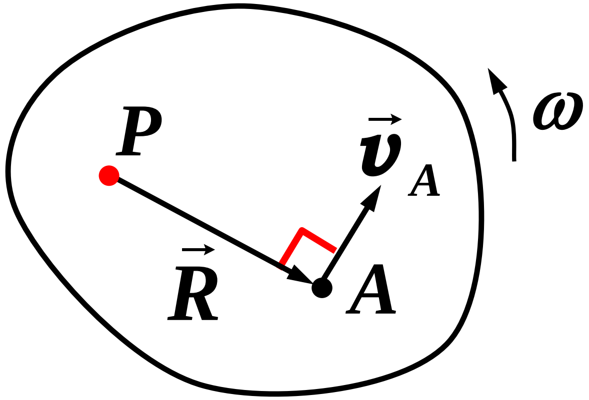


- 选瞬心为基点，有利于运动学问题分析。
- 瞬心位置一般随时间变化。
- 瞬心速度为零，但加速度不一定为零。
- 过瞬心垂直基面的直线为瞬轴。

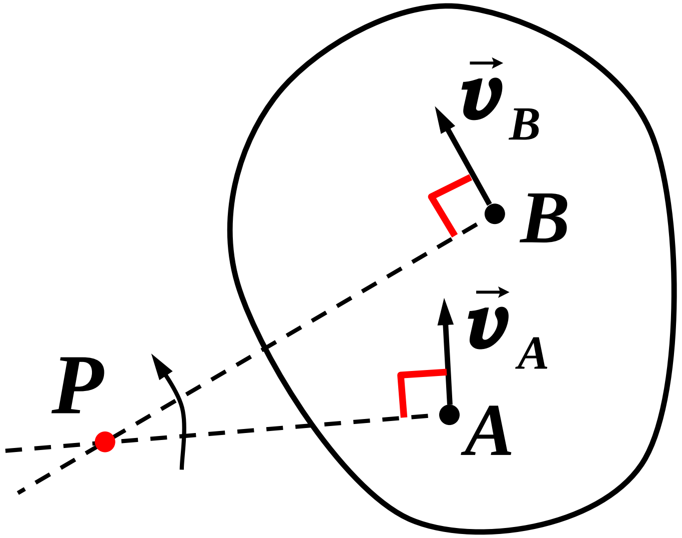
- 瞬心位置可能在刚体内，也可能在刚体外。

求瞬心位置的 2 个简便方法：

1. 已知 1 点速度和 $\vec{\omega}$　　2. 已知 2 点速度方向



$$\begin{cases} |\vec{R}| = \overline{PA} = v_A/\omega \\ \vec{R} \text{ 方向沿 } \vec{v}_A \times \vec{\omega} \text{ 的方向} \end{cases}$$



4. 均匀圆柱（盘、环、球）等在曲面上作纯滚动的运动学条件

纯滚动： 接触点 P 是瞬心，无相对滑动 。

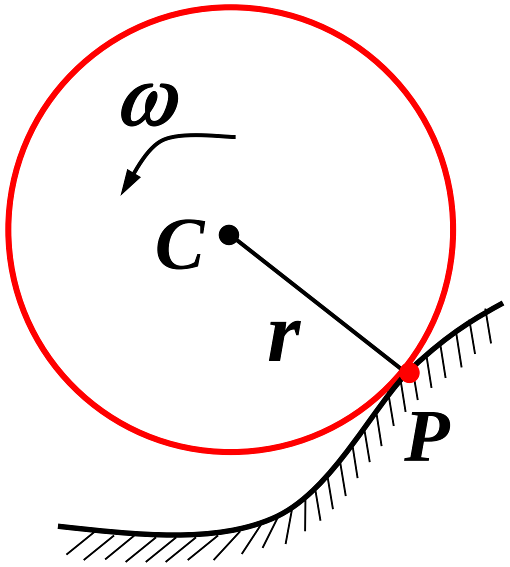
质心 C 的速度：

$$\boxed{v_C = \omega \cdot r}$$

质心 C 的切向加速度：

$$\boxed{a_C = \alpha \cdot r}$$（为何？）

（在平面上就是质心 C 的加速度）



二. 动力学关系

1. 质心运动定理

$$\boxed{\vec{F}_{外} = m\vec{a}_C}$$

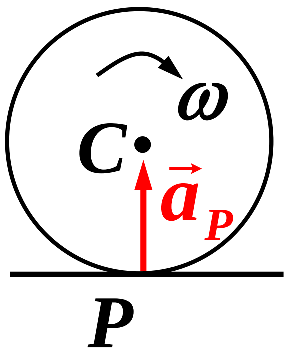
2. 对通过质心的基轴的转动定律

$$\boxed{M_{外_{C轴}} = J_{C轴}\alpha}$$

若瞬心加速度方向与瞬心—质心连线平行，则惯性力对瞬心的力矩为零，对瞬轴也有：

$$\boxed{M_{外_{瞬轴}} = J_{瞬轴}\alpha}$$

如均匀圆柱体的纯滚动



3. 对通过质心的基轴的角动量定理

$$\boxed{M_{外C轴} = \frac{\mathrm{d}L_{C轴}}{\mathrm{d}t}}$$

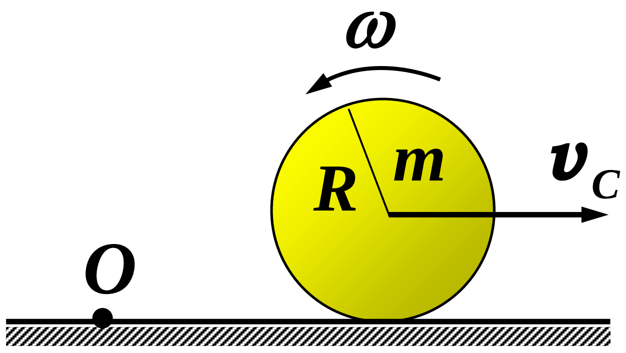
角动量关系 $\boxed{\vec{L}_{O轴} = J_{C轴}\vec{\omega} + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C}$

O轴 ： 刚体所在空间中平行于C 轴的固定轴

$\vec{r}_C$ ： 质心 C 相对 O 轴的垂直位矢

$\vec{v}_C$ ： 质心速度

如图，均匀圆球对 O 轴角动量是多少？守恒否？



4. 能量关系

▲ 动能关系 — 科尼希定理

$$\boxed{E_k = \underline{\frac{1}{2} m v_C^2} + \underline{\frac{1}{2} J_{C轴} \omega^2}}$$

质心平动能（刚体平动能）　绕过质心的基轴的转动能（刚体转动能）

▲ 功能原理

$$\boxed{\Delta E_k = W_{外} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_{外} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{外_{C轴}} \mathrm{d}\theta}$$

质心平动能改变 ＝ 外力对质心作的功：

$$\boxed{\Delta(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_C{}^2)=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_C}$$

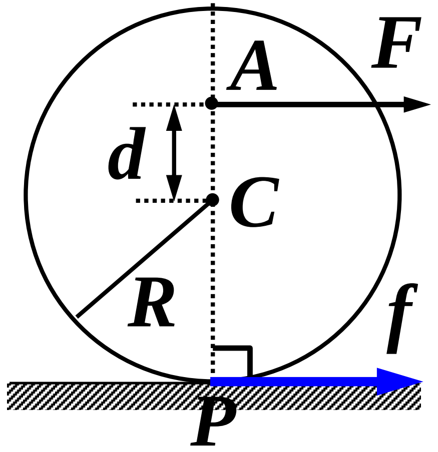
绕过质心的基轴的转动能改变 ＝ 外力矩对过质心的基轴作的功：

$$\boxed{\Delta(\frac{1}{2}J_{C轴}\omega^2)=\int_{\theta_0}^{\theta}M_{外_{C轴}}\mathrm{d}\theta}$$

刚体动能改变 ＝ 外力对质心作的功

＋ 外力矩对过质心的基轴作的功

【例1】质量 m、半径 R 的圆球在水平力 F 作用下在水平面上作纯滚动，作用点 A 在接触点 P 与质心 C 的连线上，$AC = d$。



求：接触点 P 处的静摩擦力 f 。

解：设摩擦力向右，由质心运动定理得：

$$F + f = ma_C \qquad (1)$$

设顺时针方向为正，对质心轴的转动定律：

$$Fd - fR = J_C\alpha = 2mR^2\alpha/5 \qquad (2)$$

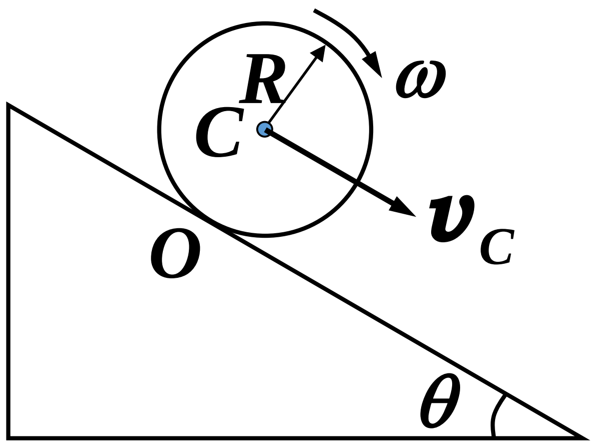
纯滚动条件：$a_C = R\alpha$ (3)

(1)(2)(3) 解出： $f=\frac{5d-2R}{7R}F$

$$\begin{cases} 当\ d>\frac{2}{5}R\ 时，\ f\ 与\ F\ 同向； \\ 当\ d=\frac{2}{5}R\ 时，\ f=0\ ； \\ 当\ d<\frac{2}{5}R\ 时，\ f\ 与\ F\ 反向。 \end{cases}$$

$$a_C=\frac{5d+5R}{7R}\cdot\frac{F}{m}>0, \qquad \alpha=\frac{5d+5R}{7R^2}\cdot\frac{F}{m}>0$$

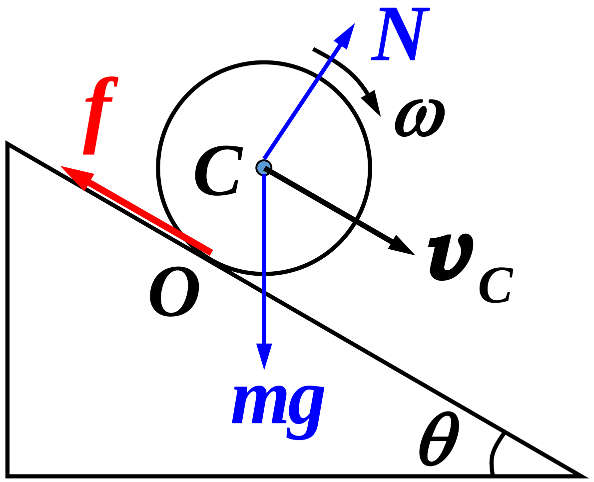
∴ 球沿顺时针方向加速转动、加速前进。



【例2】在固定斜面上的圆柱体从静止开始作纯滚动，圆柱体质量 m，半径 R，转动惯量 J，斜面倾角 θ。

求（1）接触点 O 是否存在摩擦力？若有，其作用是什么？做功否？

（2）圆柱体下落高度 h 时，质心 C 的速度 v_C，转动角速度 ω，摩擦力 f 分别是多少？



（1）讨论摩擦力

斜面参考系：不易判断！

以质心 C 为基点的参考系：

圆柱体作定轴转动,重力、

斜面压力力矩 = 0， 可断定必存在静摩擦力（纯滚），方向与质心运动相反， 力矩 ≠ 0。

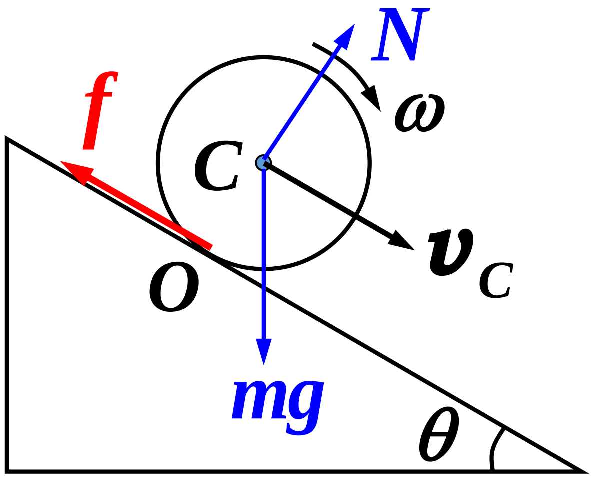
对斜面系，静摩擦力 f 做功否？ 不做功。

证： $$\mathrm{d}W_f = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{O对面} = \vec{f}\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_{O对C} + \mathrm{d}\vec{r}_{C对面})$$

$$= \vec{f}\cdot(\vec{v}_{O对C} + \vec{v}_{C对面})\mathrm{d}t = f\cdot(\underbrace{\omega R - v_{C对面}}_{=0\text{（纯滚）}})\mathrm{d}t = 0$$

$$f\cdot(\omega R - v_{C对面})\mathrm{d}t = 0 \quad \Rightarrow \quad fR\mathrm{d}\theta = f v_{C对面}\mathrm{d}t$$

$\left.\begin{array}{l} f\ 对质心作负功，平动能\downarrow \\ f\ 力矩对质心轴作正功，转动能\uparrow \end{array}\right\}\begin{array}{l}二者相等 \\ 总功 = 0\end{array}$



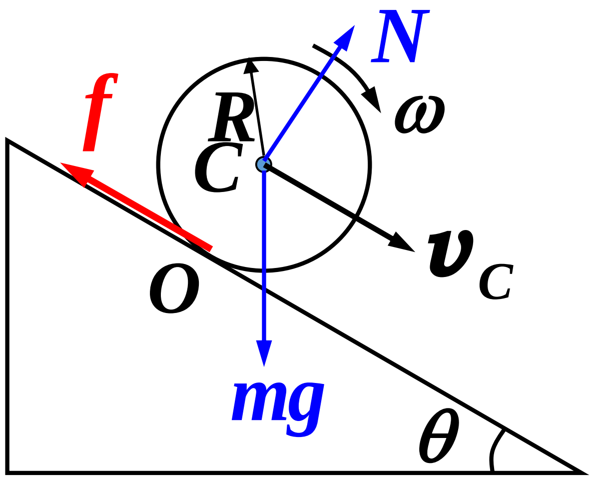
（2）计算 v_C，ω，f

解： 机械能守恒

＋ 质心运动定理

＋ 质心运动学

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh \qquad (1)$$



$$mg\sin\theta - f = ma_C \qquad (2)$$

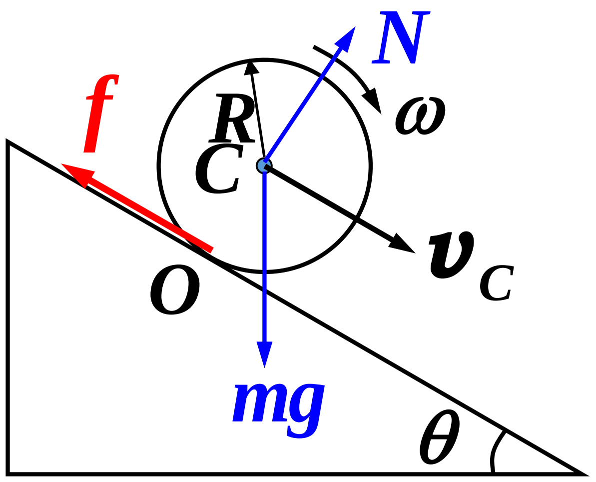
$$v_C^2 = 2a_C h/\sin\theta \qquad (3)$$

$$v_C = R\omega \qquad (4)$$

(1—4) 解出：

$$v_C = \sqrt{\frac{2gh}{1 + J/mR^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2gh}{R^2 + J/m}} \qquad f = \frac{mg\sin\theta}{1 + mR^2/J}$$



求摩擦力另法：

质心运动定理

$$mg\sin\theta - f = ma_C \qquad (5)$$

$$a_C = R\alpha \qquad (6)$$

＋ 对过质心基轴的转动定律

$$fR = J\alpha \qquad (7)$$

或者 ＋ 对瞬轴 O 的转动定律

$$mg(R\sin\theta) = J_O\alpha \quad (J_O = J + mR^2) \qquad (8)$$

用 (5)(6)(7) 或 (5)(6)(8) 都可解出 f 。

刚体的定轴转动定理

$$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\alpha}$$

刚体的转动惯量

质点系 $J = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

连续体 $J = \int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}m$

平行轴定理 $J = J_C + md^2$

刚体的转动动能 $E_k^{\text{转动}} = \dfrac{1}{2} J\omega^2$

刚体的角动量定理 $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$

刚体的功能定理 $W_{力矩} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$

刚体的角动量守恒

$\boxed{\text{若 } M_{外z} = 0\text{，则 } L_z = J_z\omega = \text{常矢量}}$