P95. 5.

$$P(X=k)=\left(\frac{6-k+1}{6}\right)^n-\left(\frac{6-k}{6}\right)^n$$

$$P(Y=k)=\left(\frac{k}{6}\right)^n-\left(\frac{k-1}{6}\right)^n$$

$P(X=2, Y=5)$ 即 n 颗骰子最小值为2,最大值为5

运用容斥原理

$$P(X=2, Y=5)=\frac{4^n-2\cdot 3^n+2^n}{6^n}$$

P96. 8.

两者期望皆为7

因为在总体的抽牌的过程中,每张牌被抽中的概率均为$\frac{1}{3}$
使用随机变量分解法知,总期望为$\frac{1}{3}$

P96 9.

使用随机变量分解法

放回: 分解为 k次试验

每次期望: $\frac{1}{n}(1+2\ldots+n)=\frac{n+1}{2}$
$\therefore$ 总期望:$\frac{k(n+1)}{2}$

不放回: 分解为每张牌是否被抽到

$$P(\text{被抽到})=1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k}{n-k+1}=\frac{k}{n}$$

$\therefore$ 和为 $\frac{k}{n}(1+2\ldots+n)=\frac{k(n+1)}{2}$

P96 19. (a)

$$Ex=\sum_{n=0}^{\infty} n\,P(X=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P(X=n)$$

$$=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{\infty}P(X=n)$$ 交换求和顺序

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geqslant n)$$

P97

22. $P(X_1=1)=\frac{1}{2}$ $P(X_1=0)=\frac{1}{2}$

$P(X_2=1)=\frac{1}{2}$ $P(X_2=0)=\frac{1}{2}$

$P(X_3=1)=\frac{1}{2}$ $P(X_3=0)=\frac{1}{2}$

$P(X_1X_2X_3)=0$ ∴不相互独立

但是它们两两独立

P97 23.

X\Y	0	1	2	3	P(X)
1	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
2	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{18}{27}$
3	0	$\frac{6}{27}$	0	0	$\frac{6}{27}$
P(Y)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	

(a) X、Y的边缘分布列如下

X	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

Y	0	1	2	3
P(Y)	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

(b) 由表格中的"0"项可以看出，这两个随机变量不独立

补充题：

使用随机变量分解法

设 X_i 为第i次不放回地摸球摸到白球的个数

摸N次，则

$E(X_1+X_2+\dots X_N)=E(X_1)+E(X_2)+\dots E(X_N)$

设白球个数为Y

则 $E(Y)=N\cdot p$

$\therefore p=\frac{n}{N}$