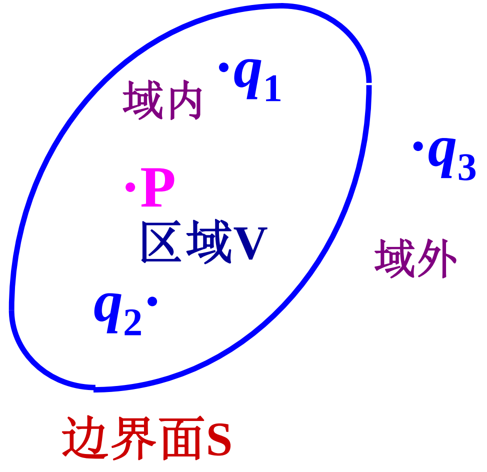
14.4 唯一性定理

一、区域求解问题

欲求一区域内某点P的电场，已知条件可有两种方法给出：



(1)已知全空间(域内、域外)的电荷分布；

(2)已知域内电荷分布及一定的边界条件

(域外电荷分布可以不知)

后者称区域求解问题。

二、静电场边值问题的唯一性定理

在区域V内只有若干导体的简单情况下，这一定理可表述为：当V的边界面S上的电势φ或电势的法向变化率$\partial\varphi/\partial n$ 已知，或S上部分区域φ已知、部分区域$\partial\varphi/\partial n$已知时，只要再给定下述三个条件之一，区域V内的电场分布就被唯一确定：

给定区域V内(1) 各导体的电量,

(2) 各导体的电势,

(3) 一些导体的电量及其余导体的电势。

证： 我们把除去导体以后的区域称为V’,其边界包括边界S和每个导体的表面S_i(法向指向导体内部)。

设在同样条件下得到了两个解φ’和φ”，

为证明它们只能是同一个解，构造如下的矢量函数：

$$\vec{Z}(\vec{r})=(\varphi'-\varphi'')(\vec{E}'-\vec{E}'') \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})=(\varphi'-\varphi'')(\nabla\cdot\vec{E}'-\nabla\cdot\vec{E}'')+(\nabla\varphi'-\nabla\varphi'')\cdot(\vec{E}'-\vec{E}'')$$

在V’内ρ=0，所以 $\nabla\cdot\vec{E}'=\nabla\cdot\vec{E}''=0$ ，于是

$$\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})=-(\vec{E}'-\vec{E}'')\cdot(\vec{E}'-\vec{E}'')=-\left|\vec{E}'-\vec{E}''\right|^2$$

在V’内对两端取体积分，得

$$\int_{V'}\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})dV=-\int_{V'}\left|\vec{E}'-\vec{E}''\right|^2 dV \qquad (2)$$

利用高斯散度定理，将(2)式左端的体积分化为面积分，并用(1) 式代入，得

$$\oint_S (\varphi'-\varphi'')(\vec{E}'-\vec{E}'')\cdot d\vec{S} + \sum_i \oint_{S_i} (\varphi'-\varphi'')(\vec{E}'-\vec{E}'')\cdot d\vec{S} = -\int_{V'} |\vec{E}'-\vec{E}''|^2 dV \quad (3)$$

因导体是等势体，所以φ’和φ”在各导体表面上分别为常量，记为 φ_i' 和 φ_i'' ，可将它们提到积分号外，使(3)式左端第2项变为

$$\sum_i (\varphi_i' - \varphi_i'') \oint_{S_i} (\vec{E}'-\vec{E}'')\cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i (\varphi_i' - \varphi_i'')(Q_i' - Q_i'') \quad (4)$$

若导体满足域内的三个条件之一，则(4)式为零。

当V的边界面S上的电势满足定理条件时，(3)式左端第一项为零。

故在定理条件成立时，有 $$\int_{V'} \left|\vec{E}' - \vec{E}''\right|^2 dV = 0$$

要使积分为零，只有 $\vec{E}' = \vec{E}''$

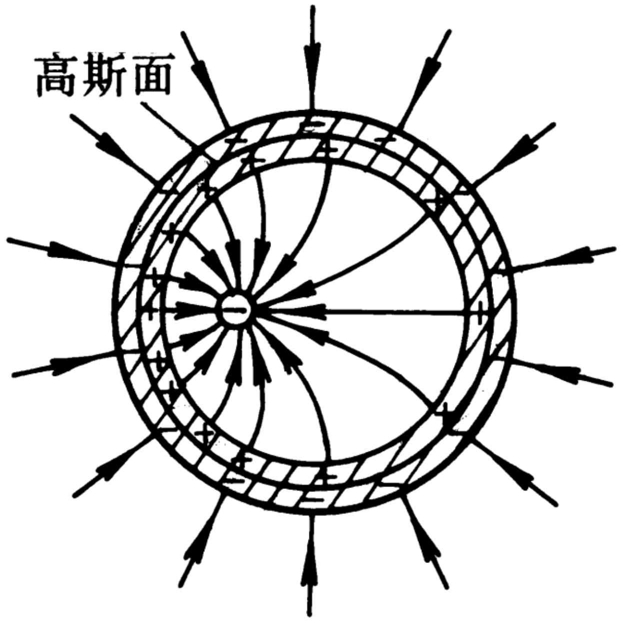
由 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 可知，φ′与φ″至多相差一个任意常量。

由于电势的叠加常量没有物理意义，这样就证明了φ′与φ″在物理上是同一个解。

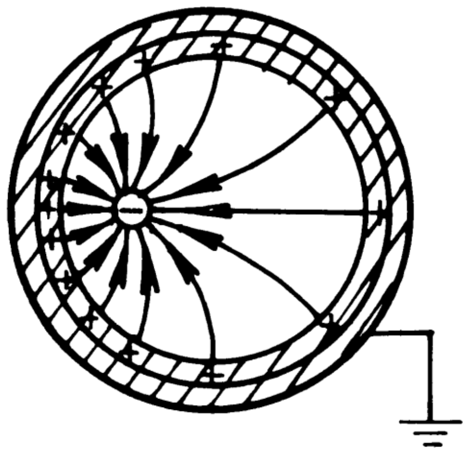
证毕。

14.5 静电屏蔽

导体壳(不论接地与否)内部电场不受壳外电荷的影响，接地导体壳外部电场不受壳内电荷的影响。这种现象称为静电屏蔽(electrostatic shielding)。



(a)



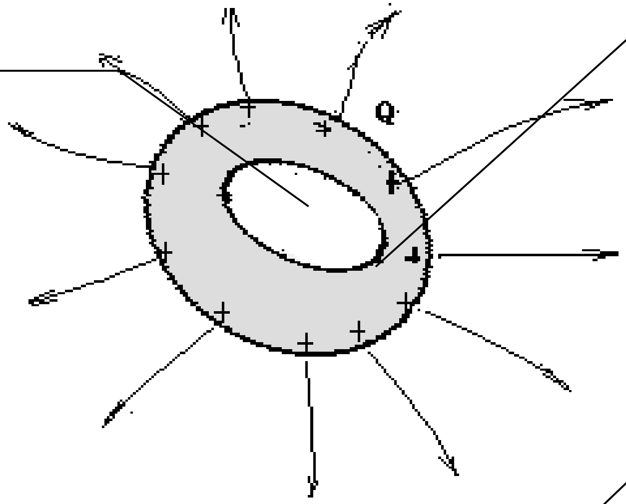
(b)

静电屏蔽

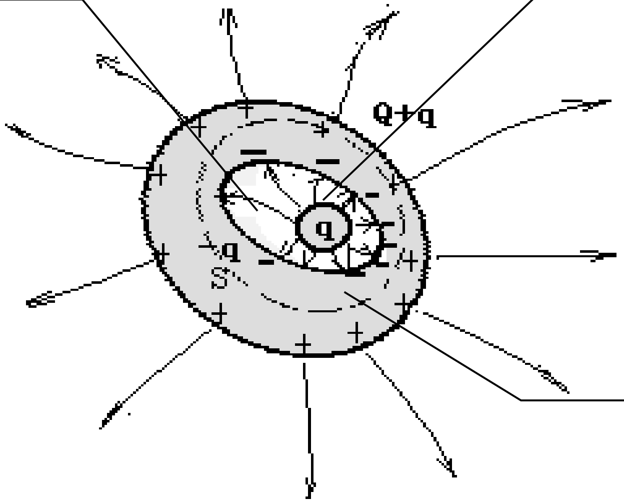
• 在静电平衡状态下

空腔提供了一个静电屏蔽的条件

不论导体壳本身是否带电，还是外界是否存在电场，腔内和导体壳上都无电场



不论导体壳本身是否带电，还是外界是否存在电场,都不影响腔内的场强分布



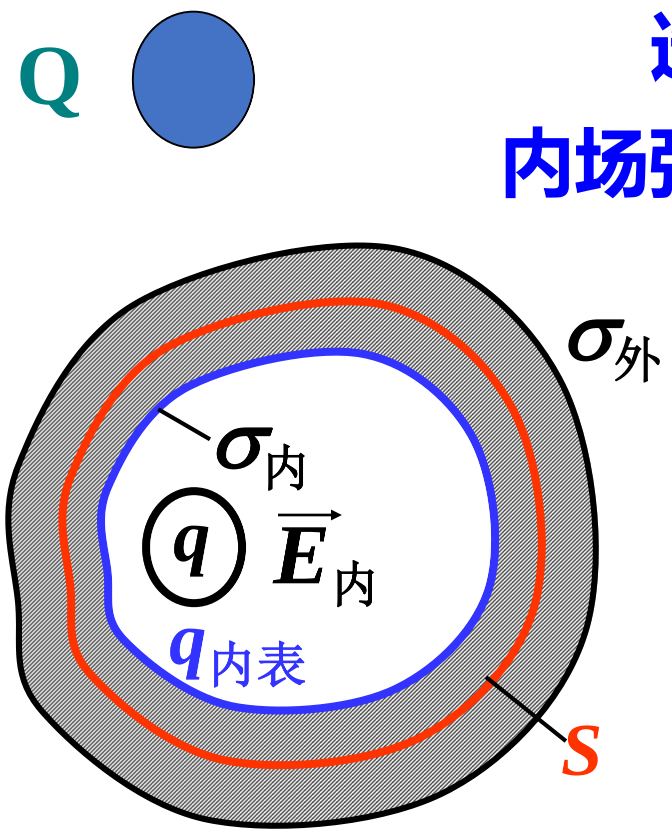
起到了保护所包围区域的作用，使其不受导体壳外表面上电荷分布以及外界电场的作用——静电屏蔽

$外 \xrightarrow{\text{无影响}} 内$

$外 \xleftarrow[\text{有影响}]{} 内$

若外壳接地，内、外均无影响

用唯一性定理解释静电屏蔽



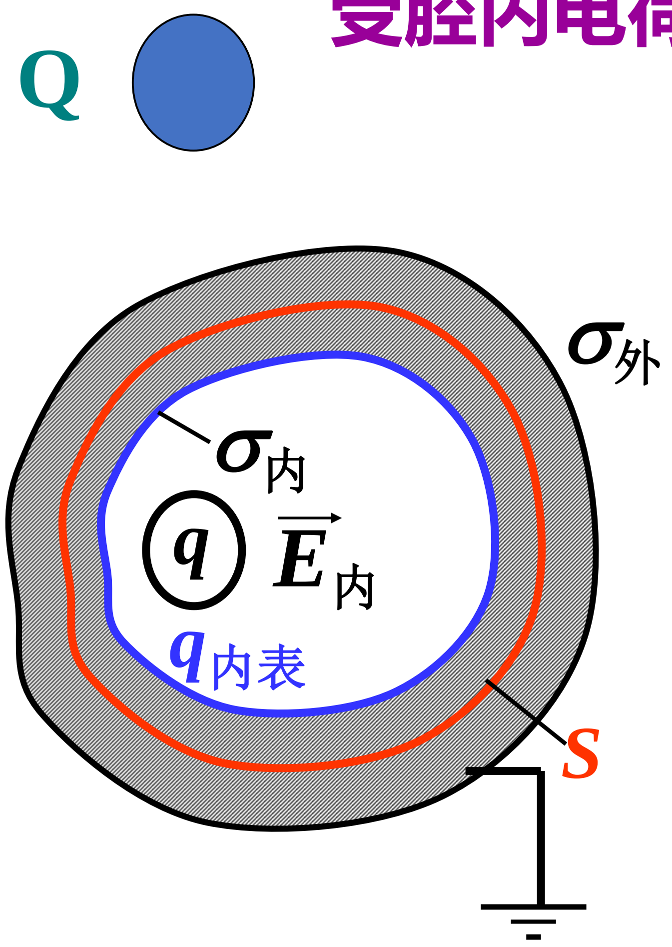
选区域的边界面S如图，因导体内场强处处为零，则在S面上 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$

1. 先解释腔内电场分布不受腔外的影响

如图， S面内一个导体的电荷为q，另一导体是带有感应电荷-q的空腔内表面，它们的电量都是给定的，因此S面内区域满足域内条件(1)。

根据唯一性定理，腔内空间的电场分布被唯一确定，不受腔外电荷的电场的影响。实际上，是空腔外表面上的感应电荷q抵消了腔外电荷Q在腔内产生的电场。

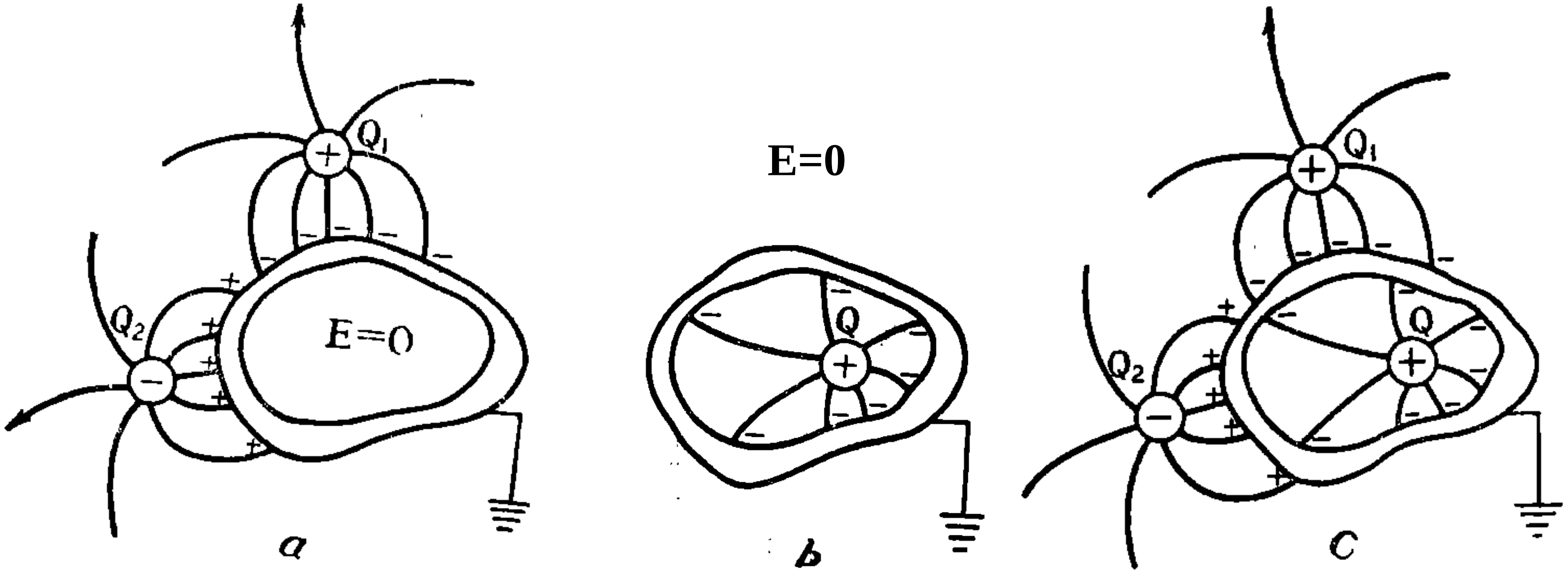
2. 再解释接地导体空腔外部的电场分布不受腔内电荷的电场的影响



如图， 空腔的电势φ = 0，所考虑的区域为S外，因域内（腔外）导体的电量Q已经给定，则S面外区域满足域内条件(3)。

根据唯一性定理，腔外空间的电场分布被唯一确定，不受腔内电荷的电场的影响。

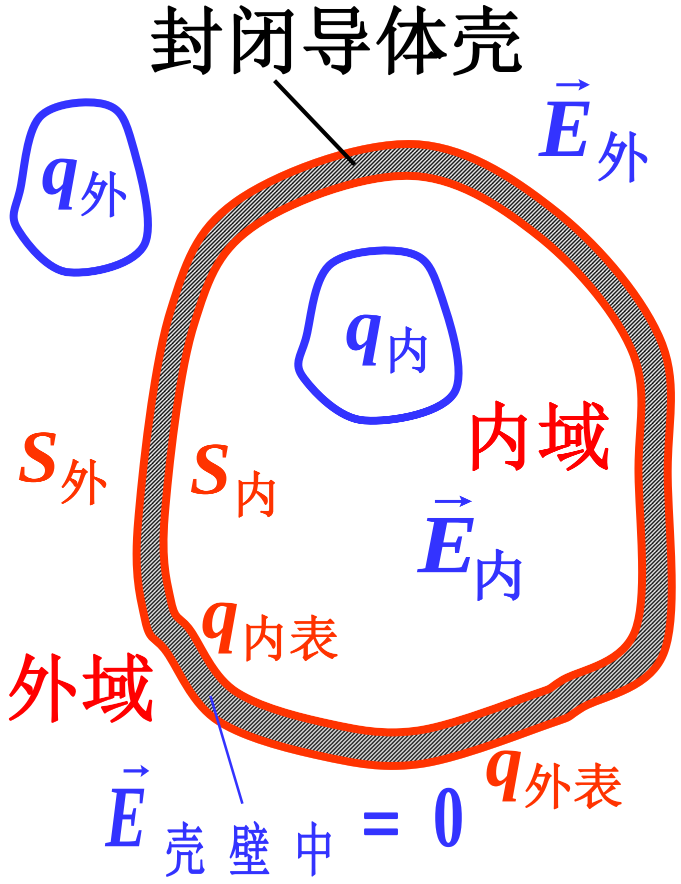
不论是否接地，空腔内表面上的感应电荷-q都会抵消腔内电荷q在腔外产生的电场。



唯一性定理确保合理的尝试解就是唯一的平衡分布，别无其他。接地的导体空腔可以有效地消除内、外电荷产生的电场的相互影响，实现静电屏蔽。

由唯一性定理和静电屏蔽的结论可还推知

在图示情形中，应有：



$$\begin{cases} [\vec{E}_{q_{内}} + \vec{E}_{q_{内表}}]_{在S_{内}以外} = 0 \\ [\vec{E}_{q_{外}} + \vec{E}_{q_{外表}}]_{在S_{外}以内} = 0 \end{cases}$$

外带电系统（$q_{外}$，$\sigma_{外表面}$）激发场强被外表面屏蔽；

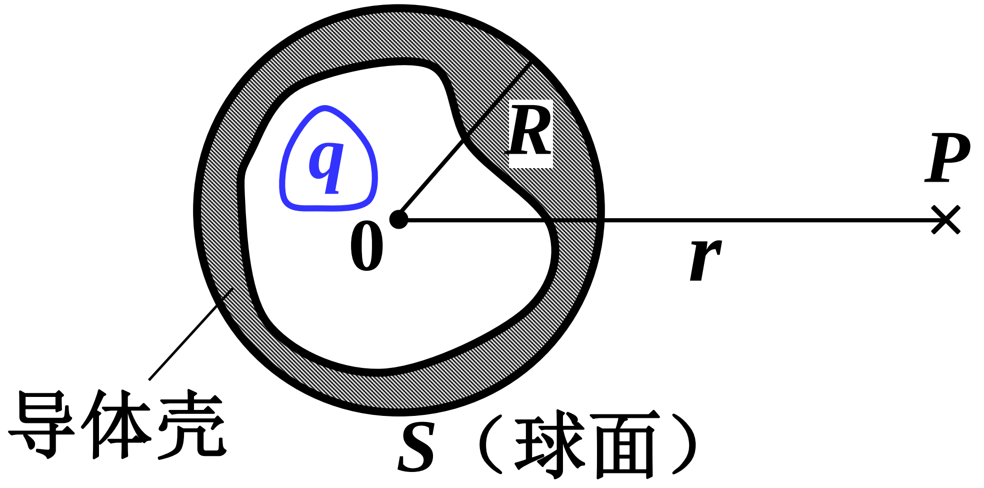
外挡外

内带电系统（$q_{内}$，$\sigma_{内表面}$）激发场强被内表面屏蔽。

内挡内

思考

在 $r>R$ 处， $\vec{E}=?$



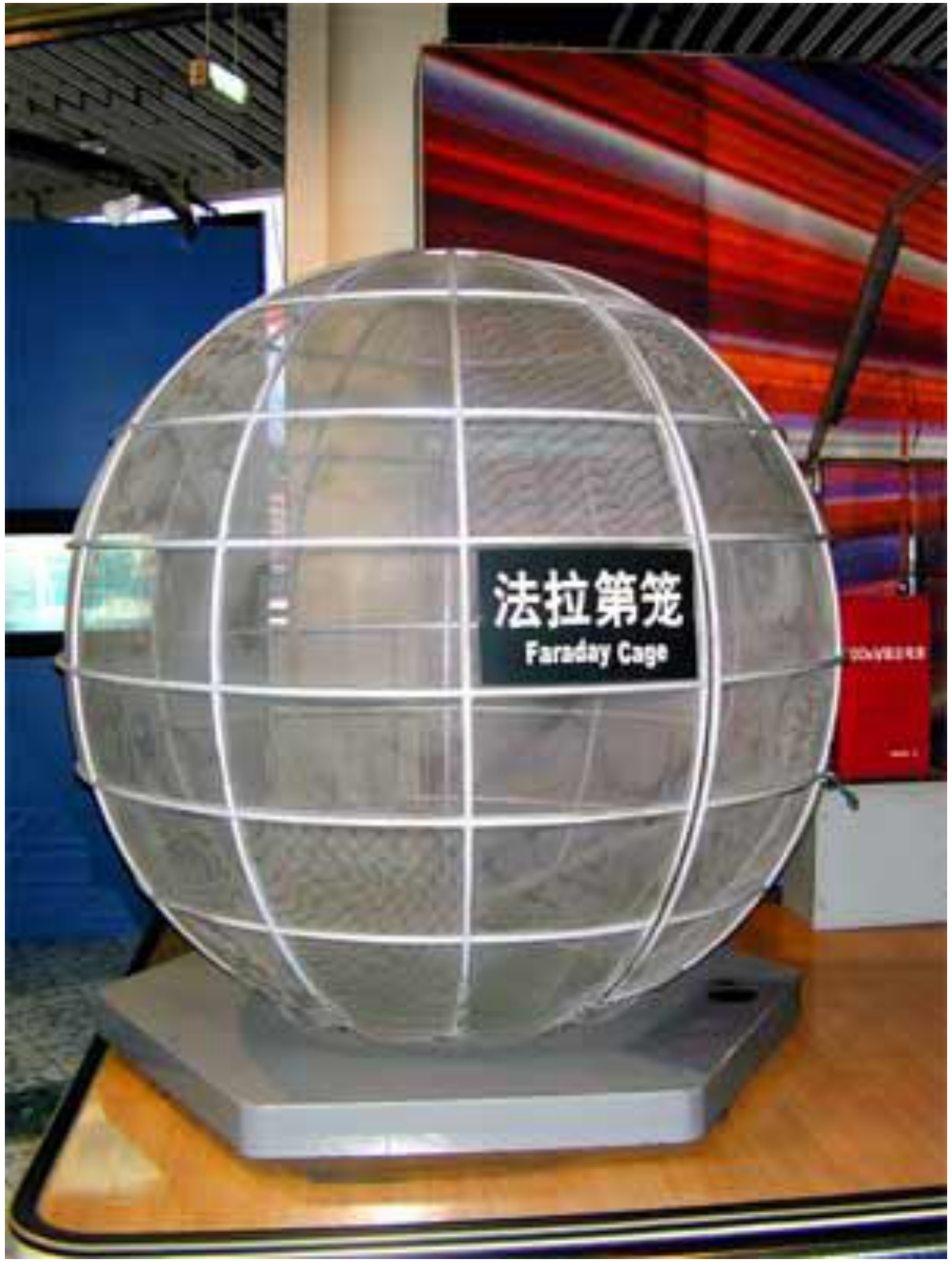
静电屏蔽在实际中有重要的应用。

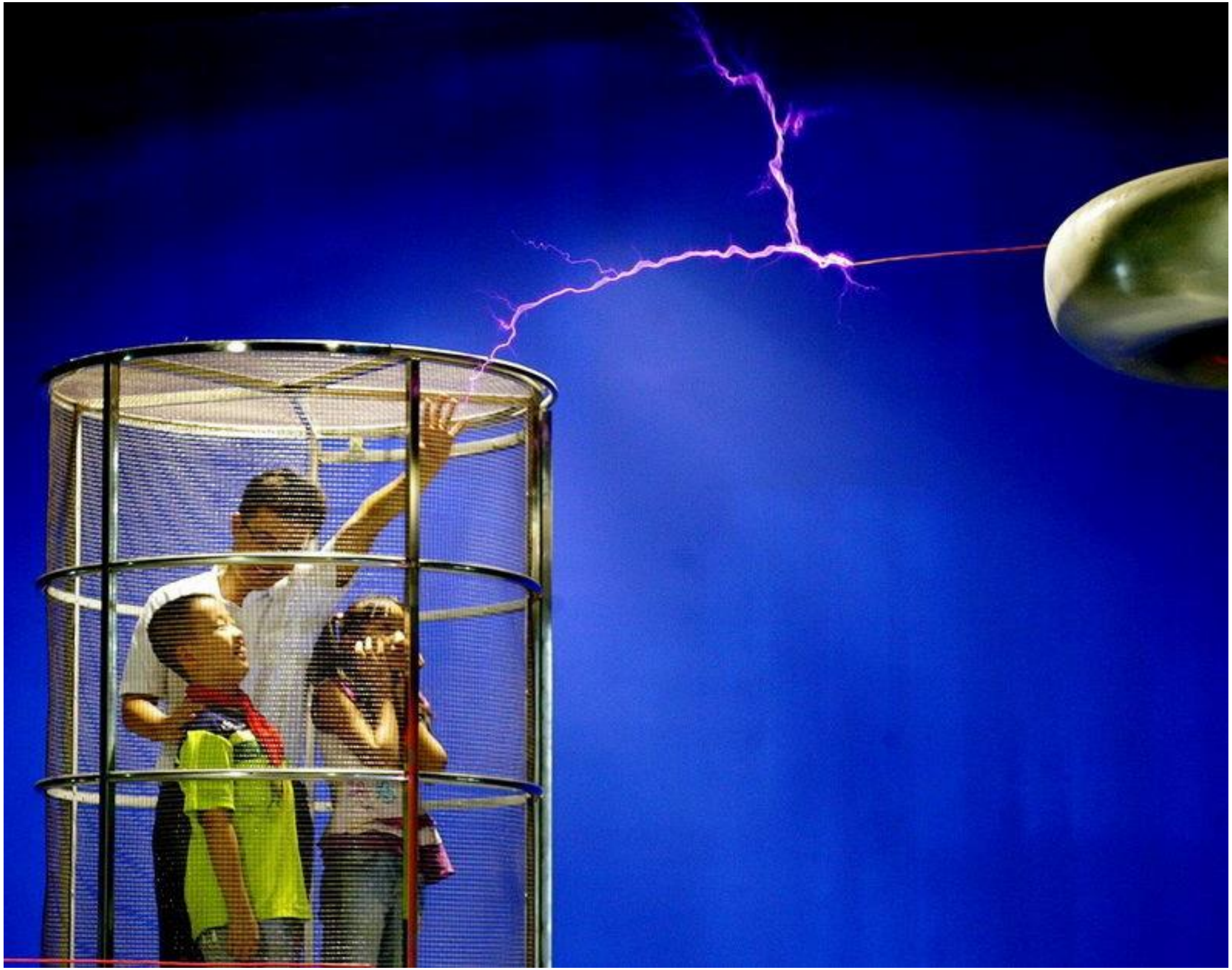
防止外界干扰：1) 保护精密的电学测量仪器

2) 屏蔽导线

3) 高压带电操作

防止对外界干扰：高压实验室


法拉第笼
Faraday Cage



汽车是个静电屏蔽室

14.6 电像法

在某些问题中，为求区域内的电场，可在区域外放置一定的假想电荷(电像)，由域内电荷及电像即可求出域内的电场。

理论依据：唯一性定理。

放置电像的原则：

(1)不破坏域内电荷分布(电像必须放在域外)；

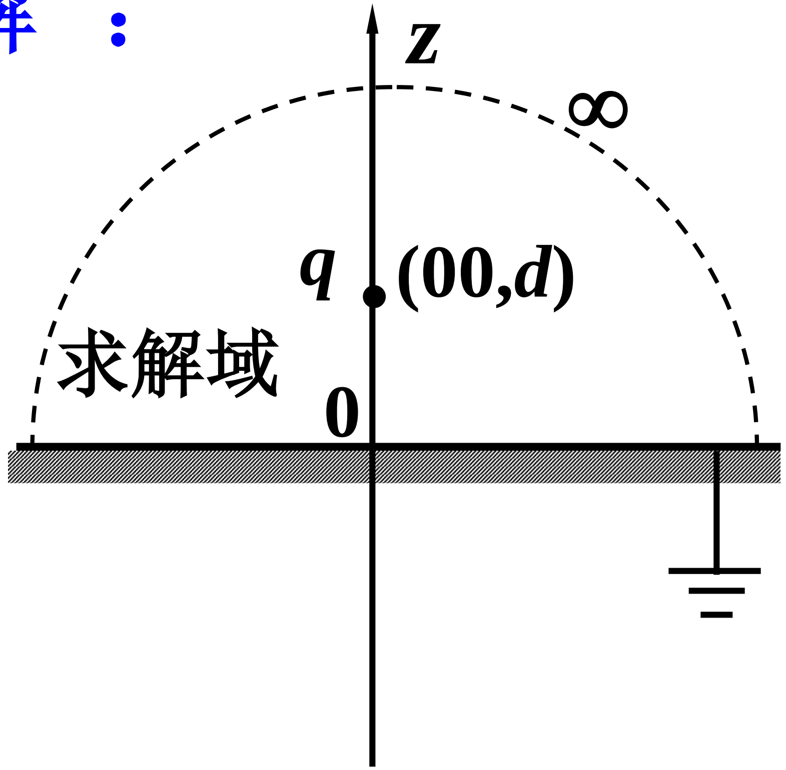
(2)保持边界条件不变。

根据唯一性定理，由电像及域内电荷求出的域内电场，就是域内原来的电场。

例14.6 已知： 点电荷q处于（$0,0,d$）点，$z=0$的平面为无限大导体平面，$\varphi_{z=0}=0$。

求： $z>0$区域的$\vec{E}$、导体面上的 σ、导体上的总感应电荷及电荷q受到的作用力。

解：



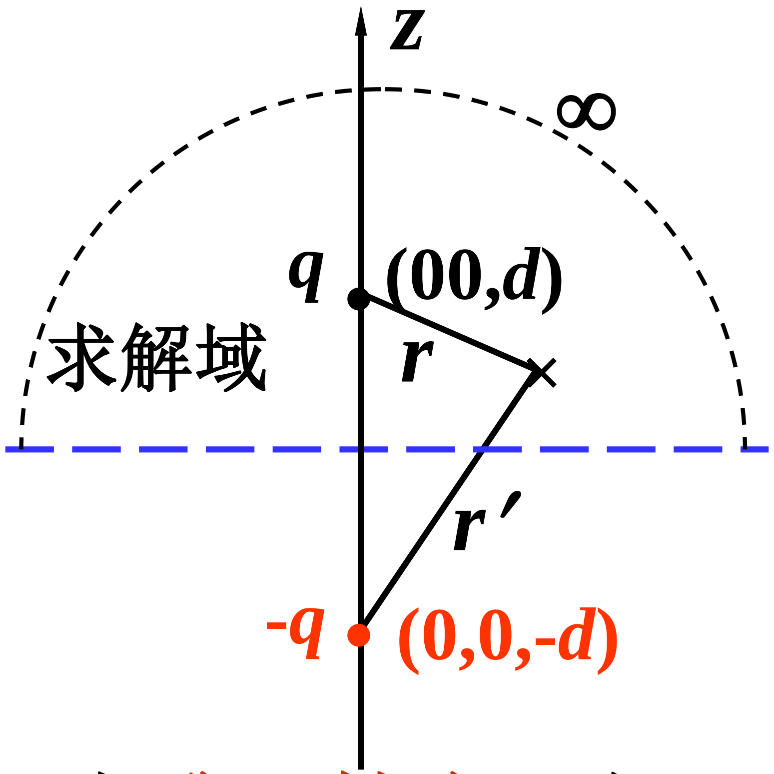
定解条件：

$$\text{边界}\begin{cases}\varphi_{z=0}=0\\ \varphi_{\infty}=0\end{cases}$$

域内q已知，位置确定，符合**第(1)类域内条件**，

$z>0$的区域内解唯一。

(1) 去掉无限大导体平面，而试探在（0,0,-*d*）处放一点电荷-*q*，来代替导体面上感应电荷对 $z>0$ 区域内的影响。则边界条件为：

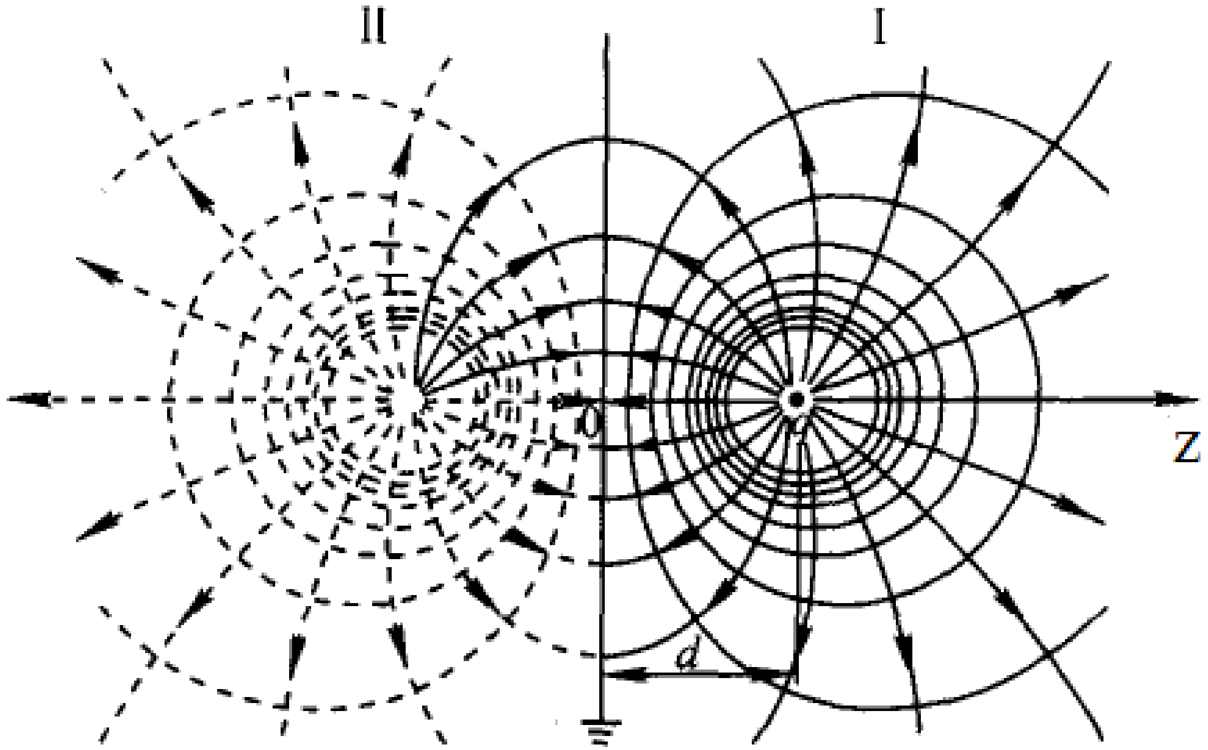


$$\begin{cases}\varphi_{z=0}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r'}\right)\Big|_{z=0}=0\\ \varphi_{\infty}=0\end{cases}$$

符合原定解条件。解为：

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{r}}{r^2}-\frac{\hat{r}'}{r'^2}\right)$$

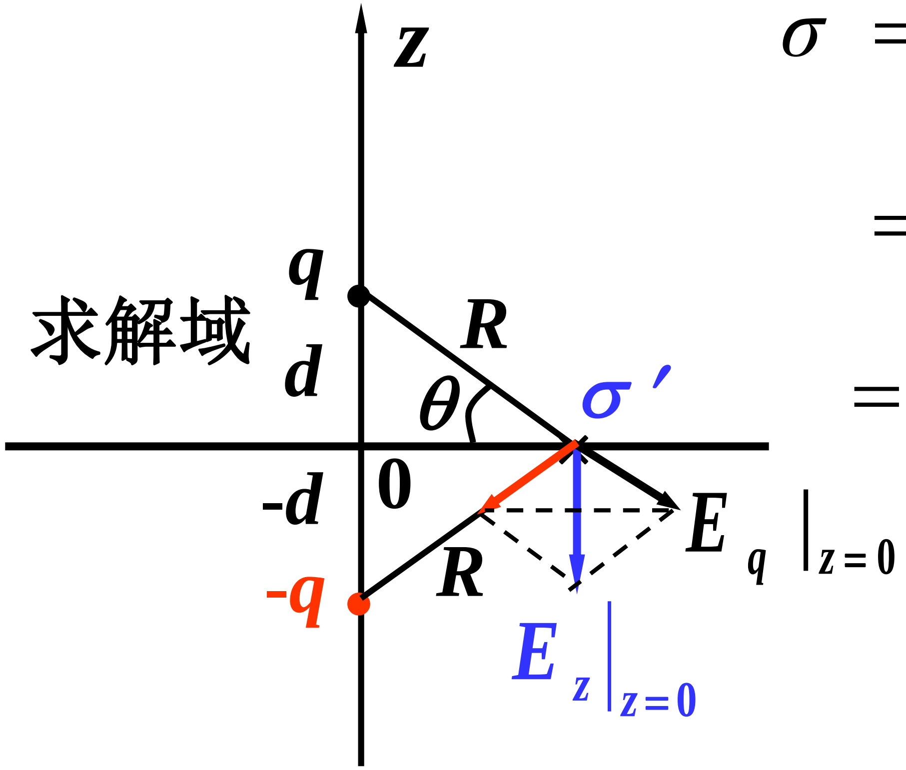
由唯一性定理知，*q*和*q*′(-*q*)在域内的合场强即为 $z>0$ 域内该命题的解。



电像法是解静电边值问题的一种特殊解法，这种解法的基本精神是将静电问题中边界对场的影响用边界外部虚设的像电荷代替．像电荷放在边界的外部，它的存在并不改变所研究区域内电荷的分布，只要调整像电荷的位置和大小，使它产生的场和原电荷分布所产生的场满足所给的边界条件，那么我们便找到了问题的解．这种解法的正确性可由唯一性定理保证．

(2) 该题中的点电荷q'，即为点电荷q在$z>0$区域中对导体面的“电镜像”(简称“电像”)。

导体平面上的感应电荷面密度为：



$$\sigma = \varepsilon_0 E_z \big/_{z=0}$$

$$= \varepsilon_0 \cdot 2E_q \big/_{z=0} \cdot (-\sin\theta)$$

$$= \varepsilon_0 \cdot \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{d}{R} = \frac{-qd}{2\pi R^3},$$

$$R = (x^2 + y^2 + d^2)^{1/2}。$$

(3) 导体上的总感应电荷

$$q' = \int \sigma dS = \int_0^\infty 2\pi r\sigma dr = -q$$

可见像电荷的大小正是面上感应的总电荷。

(4) 要计算电荷q受到的作用力，可以直接计算导体板面上的总力。

作用在单位面积元上的力为 $\vec{f} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{k}$ **(习题14.7)**

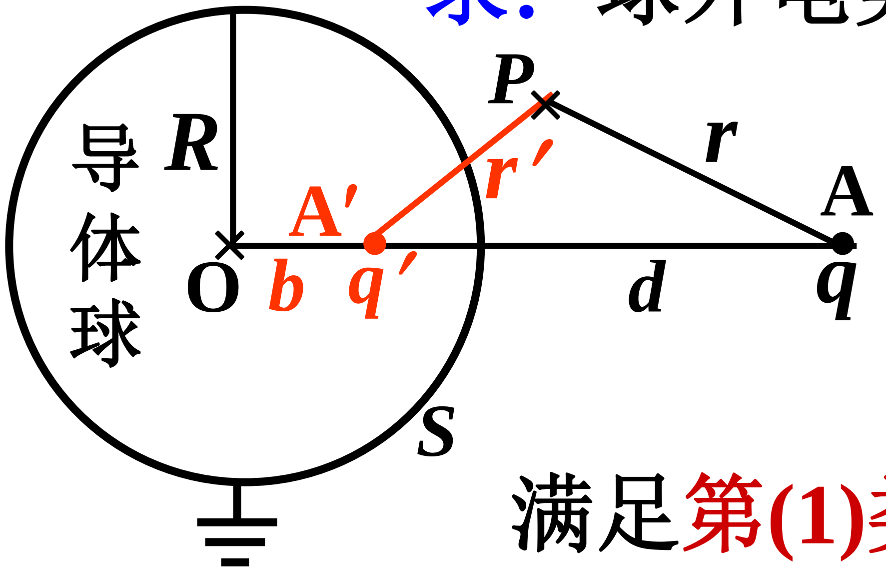
所以总力为 $$\vec{F} = \int \vec{f} dS = \frac{\vec{k}}{2\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{(qd)^2 2\pi r dr}{(2\pi)^2 (d^2 + r^2)^3}$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2}\vec{k}$$

这个结果正好是源电荷和像电荷之间的库仑力。所以，导体面和点电荷之间的作用力，可通过直接计算像电荷和源电荷之间的库仑力得到，这种力称为镜像力。

例14.7 已知： 半径为R的接地导体球外距球心d的A点有一点电荷q。

求： 球外电势φ。



解： 边界条件为：

$$\varphi_S = 0 \quad , \quad \varphi_\infty = 0$$

域内（球外）电荷给定，

满足第(1)类域内条件，故解唯一。

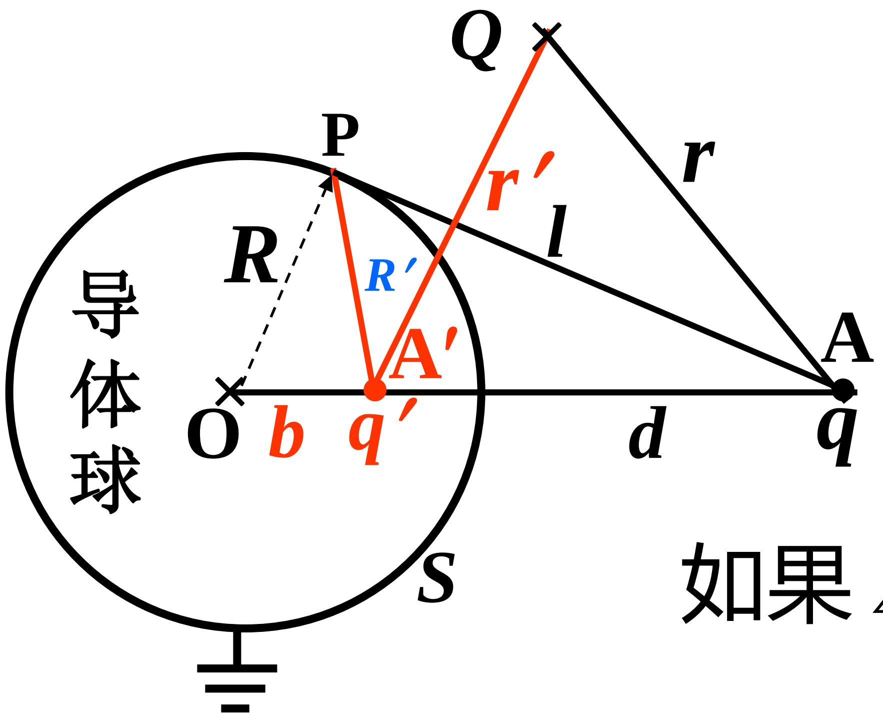
试探在$\overline{OA}$线上距O为$b(< d)$的A′点放电像q'。

则球外电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}\right)$$

此解自动满足无限远的边界条件$\varphi_\infty=0$。

为了满足球面上的边界条件，在边界上应处处有：



$$\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)\Bigg|_s=\frac{q}{l}+\frac{q'}{R'}=0$$

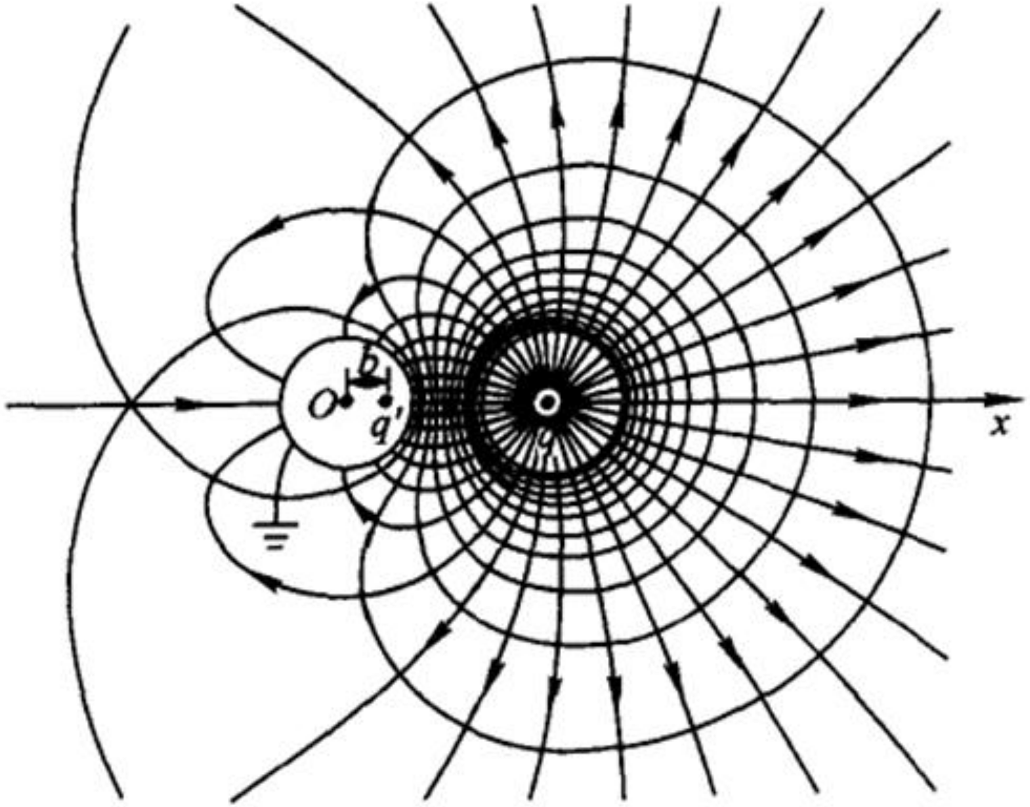
$$\boxed{\therefore\ \frac{R'}{l}=-\frac{q'}{q}=\text{常数}}$$

如果 $\Delta POq'$ 与 ΔqOP 相似，则

$$\frac{R'}{l}=\frac{R}{d}=\frac{b}{R}$$

$$\begin{cases} b=\dfrac{R^2}{d} \\ q'=-\dfrac{R}{d}q \end{cases}$$

$\therefore$ 球外电势 $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{R}{d}\cdot\dfrac{1}{r'}\right)$



其中

$$r = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' = \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}$$

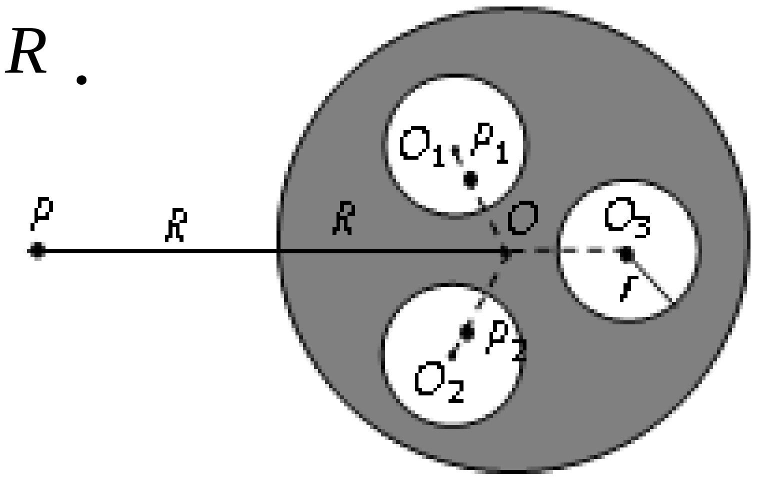
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \dfrac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{\left(x-\frac{R^2}{d}\right)^2+y^2+z^2}} & (r > R) \\ 0 \quad (r < R). \end{cases}$$

例14.8 如图所示，O为半径等于R的原来不带电的导体球的球心，O_1、O_2、O_3为位于球内的三个半径皆为r的球形空腔的球心，它们与O共面，已知

$\overline{OO_1}=\overline{OO_2}=\overline{OO_3}=\frac{R}{2}$．在$OO_1$、$OO_2$的连线上距$O_1$、$O_2$为$\frac{r}{2}$

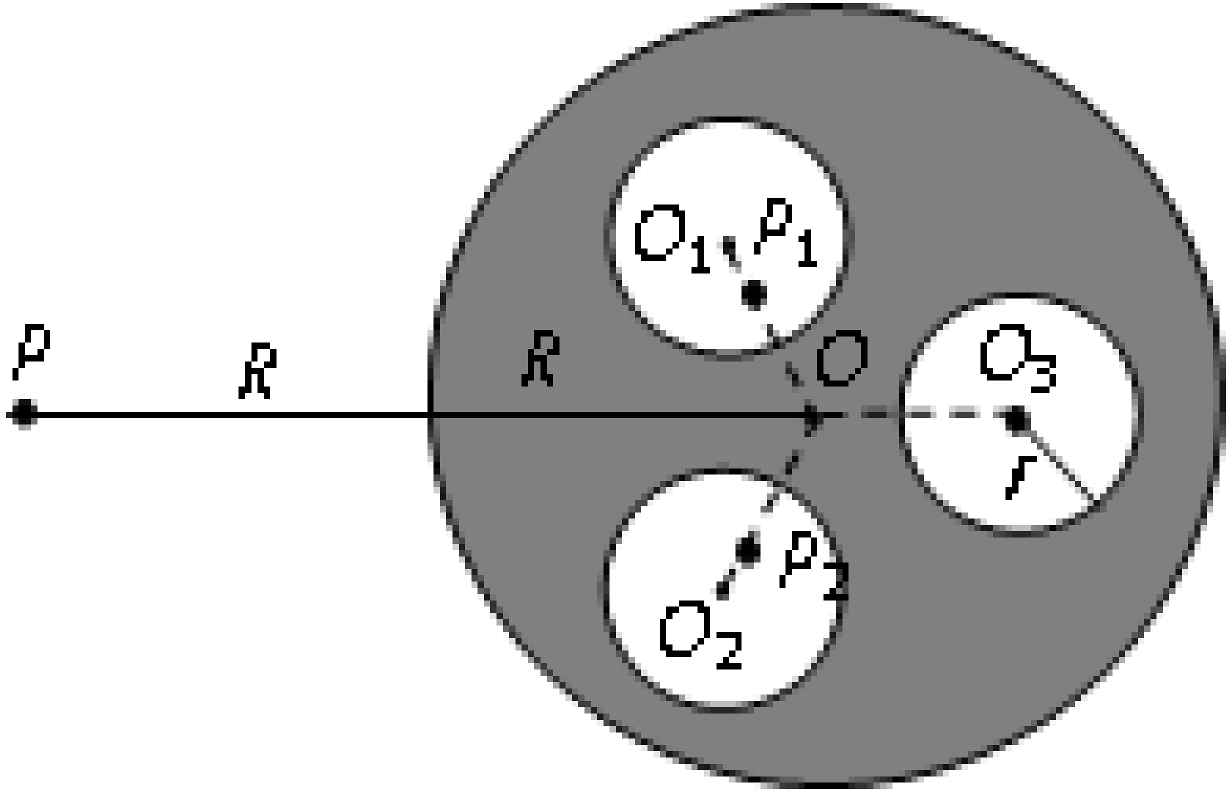
的P_1、P_2点处分别放置带电量为q_1和q_2的线度很小的导体（视为点电荷），在O_3处放置一带电量为q_3的点电荷，设法使q_1、q_2和q_3固定不动．在导体球外的P点放一个电量为Q的点电荷，P点与O_1、O_2、O_3共面，位于$\overline{O_3O}$

的延长线上，到O的距离$\overline{OP}=2R$．



1．求q_3的电势能．

2．将带有电量q_1、q_2的小导体释放，当重新达到静电平衡时，各表面上的电荷分布有何变化？ 此时q_3的电势能为多少？



第22届全国中学生物理竞赛复赛题 (2005)

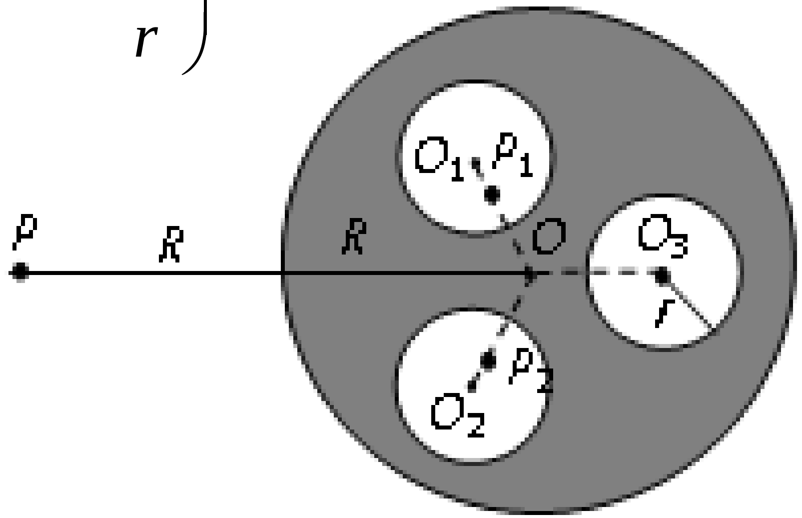
解：1.

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 + q_2 + q_3}{R} + \frac{Q}{2R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3}{2R}\right) \quad \textbf{(1)}$$

$$\varphi'' = -\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \textbf{(2)}$$

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3}{2R} - \frac{q_3}{r}\right) \quad \textbf{(3)}$$

$$W = q_3\varphi = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3}{2R} - \frac{q_3}{r}\right) \quad \textbf{(4)}$$



2. q_1最后到达空腔1表面，与感应电荷$-q_1$ 中和．

q_2也将在空腔表面感应电荷$-q_2$ 的静电力作用下到达空腔

2的表面与感应电荷 $-q_2$ 中和．达到平衡后，腔1、2表面

上无电荷分布，腔3表面和导体球外表面的电荷分布没有变化．O_3的电势仍由球外的电荷Q和导体球外表面的电量

$(q_1+q_2+q_3)$ 及空腔3内壁的电荷 $-q_3$ 共同产生，故O_3处的

电势与q_3的电势能仍如(3)式与(4)式所示．

$$\varphi=\varphi'+\varphi''=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q+2q_1+2q_2+2q_3}{2R}-\frac{q_3}{r}\right)$$

$$W=q_3\varphi=\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q+2q_1+2q_2+2q_3}{2R}-\frac{q_3}{r}\right)$$

第14章结束