

人工智能基础 作业 2

1. 一个 n 阶幻方是 $n \times n$ 方阵：该方阵每一行、每一列和两条对角线上的整数的和都等于同一个数且数字各不相同。现在得到了一个残缺的 4 阶幻方, 如图所示。

		2	13
		11	8
9		7	12
		14	1

x_{11}	x_{12}	2	13
x_{21}		11	8
9		7	12
x_{41}		14	1

(a) 将该问题进行要素化表示, 描述为约束满足问题, 给出约束关系。

(1) 变量:

$n \times n$ 方阵中每个元素的取值 (此处 $n=4$), 即

$$X = (x_{ij}) = \{x_{ij}, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4\}$$

值域

$$D = \{1, 2, 3, \dots, 16\}, x_{ij} \in D$$

(2) 约束:

1) 一元约束:

已经填入幻方的数:

$$C_1 = \{x_{13} = 2, x_{14} = 13, \dots, x_{43} = 14, x_{44} = 1\}$$

2) 全局约束:

每行、列和对角线上的整数和等于 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ (此处为 34):

$$C_2 = \left\{ \sum_i x_{ij} = 34, \sum_j x_{ij} = 34, \sum_i x_{ii} = 34, \sum_i x_{i,5-i} = 34 \right\}$$

所有数各不相同:

$$C_3 = ((x_{ij}, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4), alldiff) \Leftrightarrow \{x_{ij}\} = \{1, 2, \dots, 16\}$$

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

(b) 按照约束传播策略和回溯搜索过程求解该问题, 补全给出的 4 阶幻方。

选用最少剩余值, 时序回溯, 简单前向检查求解:

1) 最少剩余值: $x_{32} = 34 - x_{31} - x_{33} - x_{34} = 6$

前向检查 (边相容): $\{x_{ij}(\text{剩余})\} = \{3, 4, 5, 10, 15, 16\}, x_{41} = 34 - x_{14} - x_{23} - x_{32} = 4$

2) 最少剩余值: $x_{41} = 4$

前向检查: $x_{ij}(\text{剩余}) \in \{3, 5, 10, 15, 16\}, x_{42} = 34 - x_{41} - x_{43} - x_{44} = 15$

3) 最少剩余值: $x_{42} = 15$

前向检查: $\{x_{ij}(\text{剩余})\} = \{3, 5, 10, 16\}$

4)最少剩余值：此时剩余四个元素取值范围相同，考虑最多约束项，对 x_{22} 赋值： $x_{22} = 16$

前向检查： $\{x_{ij}(\text{剩余})\} = \{3, 5, 10\}$

$$x_{11} = 34 - x_{22} - x_{33} - x_{44} = 10$$

$$x_{12} = 34 - x_{22} - x_{32} - x_{42} = -3$$

$$x_{21} = 34 - x_{22} - x_{23} - x_{24} = -1$$

x_{12}, x_{21} 取值为空集，矛盾，回溯到 x_{22} ， $x_{22} = 10$

前向检查： $\{x_{ij}(\text{剩余})\} = \{3, 5, 16\}$

$$x_{11} = 34 - x_{22} - x_{33} - x_{44} = 16$$

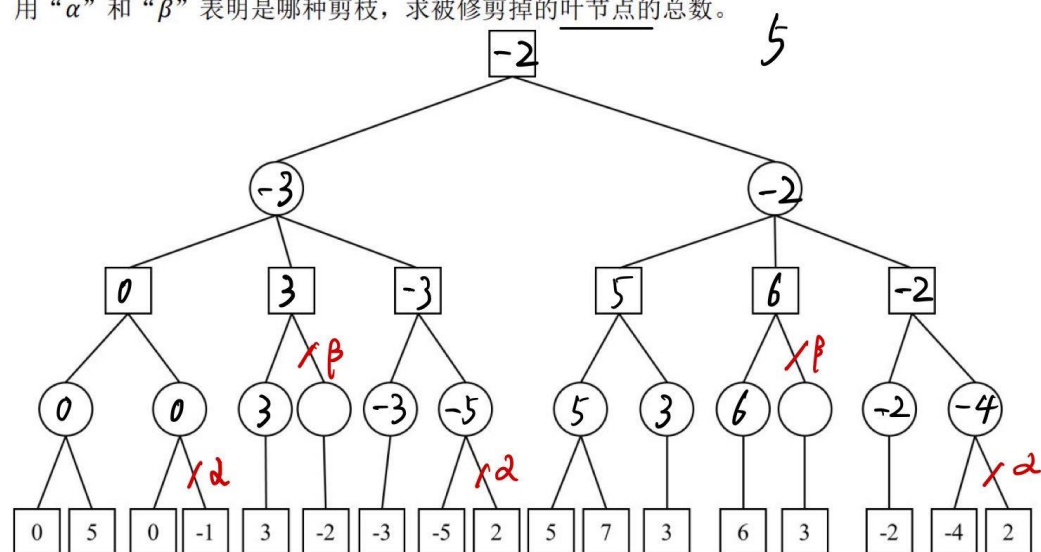
$$x_{12} = 34 - x_{22} - x_{32} - x_{42} = 3$$

$$x_{21} = 34 - x_{22} - x_{23} - x_{24} = 5$$

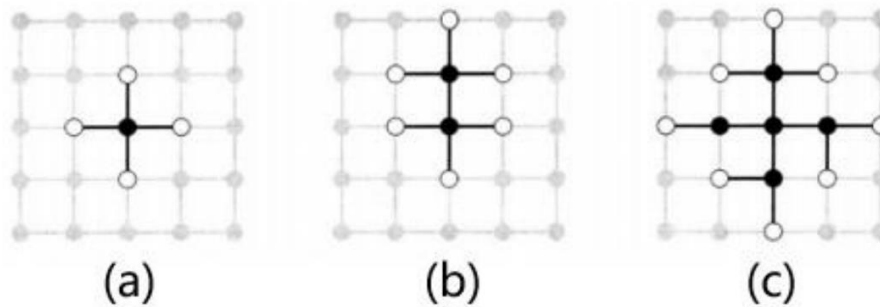
由于所有变量值域大小=1，已经找到解，如下图所示（右下角标代表搜索过程）：

16 (5)	3 (5)	2	13
5 (5)	16 10 (4)	11	8
9	6 (1)	7	12
4 (2)	15 (3)	14	1

3. 请对如下与或树，以优先生成左边节点顺序来进行 $\alpha - \beta$ 剪枝，在未被剪枝的方形节点（MAX 节点）和圆形节点（MIN 节点）内填入节点的最终估值，用“/”标记剪枝处，并用“ α ”和“ β ”表明是哪种剪枝，求被修剪掉的叶节点的总数。



4. (兔子吃胡萝卜) 在一个没有边界的 2D 方格图中, 一只兔子想要吃到胡萝卜, 边缘 (白色节点) 总是将已探索区域 (黑色节点) 和未探索区域 (灰色节点) 隔开。已知兔子初始位置为 $(0, 0)$, 胡萝卜位置为 (x, y) 。



a) 状态空间的分支因子是多少?

每个节点有 4 个相邻节点, 最多有 4 个后继, 因此分支因子 $b=4$ 。(如果增加一个子节点不能与父节点相同的简单检查, 则 $b=3$)

b) 若兔子初始位置上深度为 0, 则在深度 k ($k>0$) 上有多少个状态?

由归纳法易得深度 k 的状态满足

$$\{(x, y) | |x| + |y| = k\}$$

共有 $4k$ 个状态。

c) 若胡萝卜位置在当前搜索深度的最后一个, 则宽度优先搜索扩展的节点数是多少?

扩展了深度不超过 k 的所有节点, 同一个节点只会被扩展一次, 即

$$0 + 4 + 8 + \dots + 4k = 2k(k + 1)$$

共扩展 $2k(k + 1)$ 个节点。

(因此本题中如果使用图搜索剪枝, 有效分支因子 $b^* \rightarrow 1$, 远小于 a) 中的 $b=4$)

d) 若目前兔子的位置在 (u, v) , 请设计一个可采纳的启发函数。

$$h(u, v) = |u - x| + |v - y|$$

从 (u, v) 移到 (x, y) , 至少要在横轴上平移 $|u - x|$, 纵轴上平移 $|v - y|$ 因此

$$h(u, v) = |u - x| + |v - y| \leq c(u, v)$$

e) 对于 d) 中设计的启发函数 h , 如果删除一些连线, 还会是可采纳的吗?

是。删除连线, $c(u, v)$ 只会增大或者不变, 仍然有

$$h(u, v) \leq c(u, v)$$

f) 对于 d) 如果在一些非近邻状态间增加一些连线, 还会是可采纳的吗?

不是。设目标 $(x, y) = (2, 2)$

如下图所示, 若在非近邻状态间增加了斜的连线, $h(0, 0) = 4$, 但 $c(0, 0) = 2 > h(0, 0) = 4$

