

第二章 抗外扰控制

理想的控制系统应接受参考输入指令并引导系统输出以尽量小的误差跟随参考输入运动，但实际系统往往会受到未知的外扰影响，因此同时希望设计控制律，抑制外扰对受控系统的状态或输出的影响。输出调节问题可以转换为抗外扰控制来处理。本章讨论确定性（非随机）外扰的抑制问题。

§1 基本概念

1.1 外扰模型和参考输入模型

对一些常见的确定性外扰 $d(t)$ ，可以建立如下模型：

$$\dot{d}(t) = \Psi d(t) \quad (1-1)$$

例如：

阶跃函数： $\Psi = 0 \quad d(t) = d(0)$

斜坡函数： $\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} d_1(t) = d_1(0) + d_2(0)t \\ d_2(t) = d_2(0) \end{cases}$

正余弦： $\Psi = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} d_1(t) = d_1(0) \cos \omega t + d_2(0) \sin \omega t \\ d_2(t) = d_2(0) \cos \omega t - d_1(0) \sin \omega t \end{cases}$

注意外扰模型仅仅描述的信号的特征，但是由于初值一般未知，所以信号是不确定的。

在输出跟踪问题中，假设参考输入（或称指令信号、设定值） $v(t)$ 由如下模型产生

$$\dot{v}(t) = T v(t) \quad (1-2)$$

选取不同的矩阵 T ，该模型能产生不同类型的参考输入。

后面将看到，可测量外扰和参考输入信号在数学上可以统一处理，因此将外扰 $d(t)$ 和参考输入 $v(t)$ 合称为外部信号，用 $w(t)$ 表示，则如下系统称为外模型：

$$\dot{w}(t) = M w(t) \quad (1-3)$$

其中

$$w = \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

在下面的讨论中，外模型中的矩阵 M 可不局限于对角块矩阵。

1.2 对外扰的不变性

本章讨论如下系统的抗外扰控制问题:

$$\Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = Mw \\ y = Cx + Dw \end{cases} \quad (1-5)$$

这里, x, u, w, y 分别是 n, l, p, m 维向量; x 是状态, u 是控制输入, w 是外扰, y 是输出, 矩阵有适当的维数。

状态 (或输出) (在 $u = 0$ 时) 对外扰 $w(t)$ 的不变性可分为:

静态不变性: 状态 (或输出) 稳态不受扰动影响, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \text{ 或 } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

完全不变性: 状态 (或输出) 动态和稳态均不受扰动影响, 即除满足上述静态不变性条件以外, 还满足动态不变性条件, 即当 $x(0) = 0$ 时, $x(t) \equiv 0$ 或 $y(t) \equiv 0$ 。

对于变量和矩阵赋予不同的含义, 可以描述 (单纯的) 抗外扰控制问题、(无外扰情况下的) 调节器问题和存在外扰情况下的调节器问题。

抗外扰控制问题:

对于单纯的抗干扰问题, $N = [N_1 \ 0], D = [D_1 \ 0], Nw = N_1 d, y = Cx + D_1 d$, 即问题描述为

$$\Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + N_1 d \\ \dot{d} = \Psi d \\ y = Cx + D_1 d \end{cases}$$

此时干扰信号有外模型 $\dot{d} = \Psi d$ 产生, 输出 y 是实际系统输出。

调节器问题(无外扰情况):

对于不存在外扰的调节器问题, $N = 0, C = -\tilde{C}, D = [0 \ I], Nw = 0, y = v - \tilde{C}x$, 即问题描述为

$$\Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{v} = Tv \\ y = v - \tilde{C}x \end{cases}$$

此时参考输入 v 由外模型 $\dot{v} = Tv$ 产生, 输出 y 是参考输入 v 与实际系统输出 $\tilde{C}x$ 的差。

调节器问题(有外扰情况):

对于存在外扰的调节器问题, $N = [N_1 \ 0], C = -\tilde{C}, D = [-D_1 \ I]$, 即 $Nw = N_1 d, y = v - \tilde{C}x - D_1 d$, 问题描述为

$$\Sigma_o: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + N_1 d \\ \dot{w} = Mw \\ y = v - \tilde{C}x - D_1 d \end{cases}$$

其中 w, M 如式(1-4)所定义。

因此对于外扰 $d(t)$ 的不变性问题对于参考输入 $v(t)$ 的调节器问题可统一地归结为对于外部信号 $w(t)$ 的不变性问题,抗外扰控制器和调节器设计问题可以在系统(1-5)描述的抗外扰控制器设计问题这个统一的框架下处理。

§ 2 对外扰的完全不变性问题

2.1 状态对外扰的完全不变性问题

讨论状态对外扰的不变性问题,只需涉及系统的状态方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} &= Mw \end{aligned} \quad (2-1)$$

当 $u = 0$ 且 $x(0)=0$ 时,外扰对状态的影响可以由下式描述

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}N(sI - M)^{-1}]w(0)$$

可知,状态 x 完全不受扰动 w 影响的充要条件为: A 稳定, 且

$$(sI - A)^{-1}N(sI - M)^{-1} = 0, \text{ 即 } N = 0 \quad (2-2)$$

这个条件容易理解,即外扰影响状态演化的通道被阻断,但通常情况下这个条件是不成立的。当 $N \neq 0$ 时,如果外扰可以测量,可通过顺馈将扰动馈送到输入端,并结合状态反馈以抵消它在扰动端的作用,即采用控制律

$$u = -F_x x - F_w w \quad (2-3)$$

此时闭环系统描述为

$$\Sigma_L: \quad \dot{x} = A_L x + N_L w \quad (2-4)$$

其中

$$A_L = A - BF_x, \quad N_L = N - BF_w$$

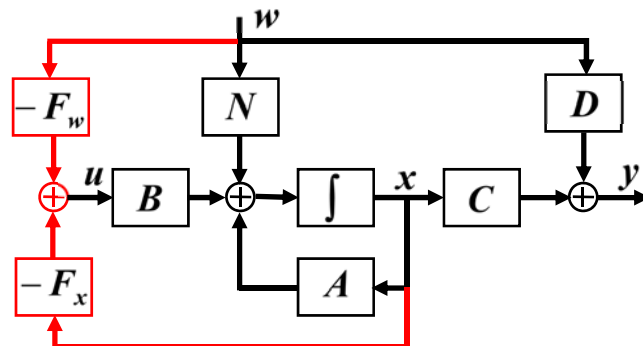


图 2-1 外扰顺馈补偿

✚ 状态反馈 $-F_x x$ 将 A 改造成 $A_L = A - BF_x$ ，以保证闭环稳定。

✚ 扰动顺馈 $-F_w w$ 将 N 改造成 $N_L = N - BF_w$ ，期望 $N_L = 0$ 。

[定理 2-1] 对于式 (2-1) 描述的系统，采用控制律 (2-3) 实现状态对外扰完全不变性的**充要条件**是：(A, B)可镇定，且

$$\text{rank } B = \text{rank } [B \ N] \quad (\text{匹配条件}) \quad (2-5)$$

注：匹配条件 (2-5) 意味着 N 的列可以用 B 的列的线性组合来表示。

2.2 输出对外扰的完全不变性问题

通常，我们更关心输出是否受外扰影响。考虑如下系统

$$\Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = Mw \\ y = Cx + Dw \end{cases} \quad (2-6)$$

当 $u = 0$ 且 $x(0)=0$ 时

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[(C(sI - A)^{-1}N + D)(sI - M)^{-1}]w(0)$$

可见，输出 y 完全不受扰动 w 影响的**充要条件**为： A 稳定，且

$$C(sI - A)^{-1}N + D = 0$$

即

$$C[N \ AN \ \cdots \ A^{n-1}N] = 0, \quad D = 0 \quad (2-7)$$

这意味着：由扰动 w 可控的状态子空间是由输出 y 不可观测的。（**注：**可利用 6.3 节中介绍的 Fedeeva 算法中的结果证明式 (2-7) 中的后一等式）

当上述条件不成立时，可利用状态反馈加扰动顺馈，“改造”系统的 A 和 N ，即采用控制律

$$u = -F_x x - F_w w \quad (2-8)$$

则闭环系统描述为

$$\Sigma_L: \begin{cases} \dot{x} = A_L x + N_L w \\ \dot{w} = M w \\ y = Cx + Dw \end{cases} \quad (2-9)$$

其中: $A_L = A - BF_x$, $N_L = N - BF_w$

[定理 2-2] 对于系统 Σ_0 , 采用控制律 (2-8) 可实现输出对外扰完全不变性的充要条件是: 存在 F_x 和 F_w 使得 $A_L = A - BF_x$ 为 Hurwitz 矩阵, 且

$$C[N_L \ A_L N_L \ \cdots \ A_L^{n-1} N_L] = 0, \quad D = 0 \quad (2-10)$$

其中 $N_L = N - BF_w$.

两种特殊情形:

✚ $F_x = 0, F_w \neq 0$. 意味着 $C[N_L \ A_L N_L \ \cdots \ A_L^{n-1} N_L] = 0$ 和 $D = 0$, 此时仅靠扰动顺馈实现了输出对外扰的完全不变性; 特别地, 若 $N_L = 0$, 则实现了状态对外扰的完全不变性。

✚ $F_x \neq 0, F_w = 0$. 意味着 $C[N \ A_L N \ \cdots \ A_L^{n-1} N] = 0$ 和 $D = 0$, 此时仅靠状态反馈就实现了输出对外扰的完全不变性, 这是很理想的, 但必要条件是原系统满足 $CN = 0$ 。

[例 2-1] 有外扰作用的受控系统如下, 欲寻找适当的控制律, 实现输出对外扰的完全不变性。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} w \\ y = [2 \ 1] x \end{cases}$$

解: (1) 检验能否实现状态对外扰的完全不变性。参见 [定理 2-1]

$$\text{rank } B \neq \text{rank} [B \ N], \quad BF_w = N \text{ 无解。}$$

(2) 检验能否实现输出对外扰的完全不变性。参见 [定理 2-2]

$CN = 0$, 而 $CAN \neq 0$, 有希望仅靠状态反馈将 A 改造成 A_L , 使得 A_L 为稳定阵, 且 $CA_L N = 0$ 。设状态反馈矩阵 $F_x = [f_1 \ f_2]$, 则需成立:

$$C(A - BF_x)N = 150 + 5f_1 - 10f_2 = 0 \quad (a)$$

为保证闭环稳定, 由闭环特征多项式

$$\det(sI - A + BF_x) = s^2 + (3 + f_2)s + (20 + 5f_1 + 3f_2)$$

需满足:

$$3 + f_2 > 0, \text{ 及 } 20 + 5f_1 + 3f_2 > 0 \quad (b)$$

由式 (a) (b) 选: $f_1 = 0, f_2 = 15$, 即 $F_x = [0 \ 15]$ 。

结论：通过 $u = -F_x x$ 可实现输出对外扰的完全不变性。

§ 3 输出对外扰的静态不变性问题

3.1 问题描述

以上讨论了状态和输出对外扰的完全不变性问题。它们均采用了状态反馈和扰动顺馈相结合的解决方案，要求扰动和/或状态能直接测量，但不需要知道外扰模型。

下面讨论输出对外扰的静态不变性问题。此时，必须知道外扰的模型。要讨论的受控系统描述如下

$$\Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = Mw \\ y = Cx + Dw \end{cases} \quad (3-1)$$

分析：外扰 w 有两个作用点，一是作用于状态方程，间接影响输出；二是作用于输出方程，直接影响输出。如果能在稳态时将二者影响抵消，则在稳态时输出不受外扰 w 的影响。

3.2 外扰引起的强制解

[定理 3-1] 当输入 $u = 0$ 时，系统 (3-1) 由外扰 w 引起的稳态强制解为

$$\tilde{x}(t) = -Pw(t) \quad (3-2)$$

即成立 $\{x(t) \rightarrow -Pw(t), \quad t \rightarrow \infty\}$ 的充要条件是 A 为稳定矩阵，且如下矩阵方程有解 P ：

$$AP - PM = N \quad (3-3)$$

证明：（充分性）当 $u = 0$ 且式 (3-3) 成立时，有

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Nw(\tau) d\tau \\ &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} (AP - PM)w(\tau) d\tau \\ &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} APw(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} PMw(\tau) d\tau \end{aligned}$$

因 $Mw(t) = \dot{w}(t)$ ，所以有

$$x(t) = -Pw(t) + e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{A(t-t_0)}Pw(t_0) \quad (3-4)$$

因 A 渐近稳定, 故

$$x(t) \rightarrow -Pw(t), \quad t \rightarrow \infty$$

即状态的稳态强制解为 $\tilde{x}(t) = -Pw(t)$.

(必要性)假设 $u = 0$, 并假设由外扰 w 引起的状态的稳态强制解为 $\tilde{x}(t) = -Pw(t)$, 则其代入状态方程(3-1), 得:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Nw = -APw + Nw \\ &= -P\dot{w}(t) = -PMw \end{aligned}$$

即式(3-3)成立。再由(3-4), 可知 A 渐近稳定。

[引理 3-1] 矩阵方程 $AP - PM = N$ 有唯一解矩阵 P 的充要条件是: 矩阵 A 和 M 没有相同特征值。

证明提示:

(1) 原方程等价于: $(I_p \otimes A - M^T \otimes I_n)c(P) = c(N)$, 其中 Kronecker 积 \otimes 和 $c(\cdot)$ 定义为

$$G_{m \times n} \otimes H_{p \times q} \triangleq \begin{bmatrix} g_{11}H & \cdots & g_{1n}H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}H & \cdots & g_{mn}H \end{bmatrix}_{mp \times nq}, \quad c(N_{n \times p}) \triangleq \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_p \end{bmatrix}_{np \times 1}$$

设 λ_i 和 μ_j 分别是 $A_{n \times n}$ 和 $M_{p \times p}^T$ 的特征值, x_i 和 y_j 分别是它们对应的特征向量, 则 $(I_p \otimes A - M^T \otimes I_n)$ 的特征值是 $\lambda_i - \mu_j$, 对应的特征向量是 $y_j \otimes x_i$ 。

[例 3-1] 已知系统和外扰模型及初态如下, 求外扰的稳态分量 $\tilde{x}(t)$ 。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} w \\ \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} w; \quad w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

解: A 的特征值 $(-1, -2)$ 和 M^T 的特征值 $(\pm j)$ 相异,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} P - P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

有唯一解: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 因此

$$\tilde{x}(t) = -Pw(t) = -Pe^{Mt}w(0) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}$$

3.3 实现静态不变性的条件

现在回到系统 (3-1), 考虑 $u = 0$ 的情形。希望稳态时输出不受外扰 w 的影响, 即 $\tilde{y} \triangleq C\tilde{x} + Dw = 0$ 。考虑到当 $u = 0$ 时, $\tilde{x} = -Pw$, 得 $CP = D$ 。

[定理 3-2] 当 $u = 0$ 时系统 (3-1) 具有输出对外扰静态不变性的充要条件是: A 是渐近稳定的, 且下述矩阵方程组联立有解

$$\begin{cases} AP - PM = N \\ CP = D \end{cases} \quad (3-5)$$

这里可以认为外模型 M 没有负实部特征值, 因此, 如果 A 是渐近稳定的, 则 $AP - PM = N$ 有唯一解。

若 $AP - PM = N$ 的解不满足 $CP = D$, 则需要“改造” A 和 N , 以调整前者的解满足后者。

■ **思考:** 讨论静态不变性时, 为何可以认为 M 没有负实部特征值?

§ 4 状态和外扰可直接测量时的抗干扰问题

考虑系统 (3-1), 如何设计控制律使得输出稳态无差, 即 $t \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$ 。显然, 这与前面讨论的输出对外扰的静态不变性问题是一回事。根据 [定理 3-2], 采用控制律:

$$u = -F_x x - F_w w \quad (4-1)$$

此时闭环系统描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF_x)x + (N - BF_w)w \\ \dot{w} = Mw \\ y = Cx + Dw \end{cases}$$

因此, 实现输出稳态无差的充要条件是: 闭环稳定, 且存在矩阵 P 满足方程组:

$$\begin{cases} (A - BF_x)P - PM = N - BF_w \\ CP = D \end{cases} \quad (4-2)$$

[定理 4-1] 对于系统 (3-1) 采用控制律 (4-1) 实现闭环输出稳态无差的充要条件是: (A, B) 可镇定, 且存在 P, Q 矩阵满足:

$$\begin{cases} AP - PM + BQ = N \\ CP = D \end{cases} \quad (4-3)$$

当式 (4-3) 有解 P, Q 时, 如下选取控制律 (4-1) 中的增益矩阵可实现闭环输出稳态无差: 选取 F_x 使得 $A - BF_x$ 为稳定矩阵, 且令

$$F_w = Q + F_x P \quad (4-4)$$

[例 4-1] 有外扰的受控系统如下, 设计控制律 $u = -F_x x - F_w w$, 使闭环极点为

-1, -1, 且实现输出稳态无差。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ \dot{w} = 0 \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

解: (1) (A, B) 完全可控, 因而可镇定;

(2) 设计状态反馈矩阵使闭环极点为 -1, -1;

$$\text{由 } A - BF_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 得到 } F_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(3) 由式 (4-3) 的方程组求解 P, Q 矩阵

$$\text{由 } CP = D, \quad C = I, \text{ 得到 } P = D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由 $AP - PM + BQ = N$, 得到:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P - 0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P + Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4) 由式 (4-4) 求出顺馈补偿阵

$$F_w = Q + F_x P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

§ 5 带观测器的抗干扰问题※

当外扰和状态不可量测时, 一个很自然的想法便是构造观测器。问题是, 按照外扰和状态的实际值设计好的抗干扰控制器, 用重构值代替后还能保证对外扰输出无静差吗?

直观地看, 如果控制律 $u = -F_x x - F_w w$ 实现了输出静态无差, 且 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\hat{x} = x, \hat{w} = w$, 则控制律 $u = -F_x \hat{x} - F_w \hat{w}$ 也应该能实现输出静态无差。下面分两个步骤证明这一点。

一、证明分离设计的观测器满足内模原理

(1) 将外扰和状态合并为增广状态:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & N \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-1)$$

(2) 针对增广状态, 设计观测器

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - H_1 C & N - H_1 D \\ -H_2 C & M - H_2 D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} y \quad (5-2)$$

取 $u = -F_x \hat{x} - F_w \hat{w}$, 得到:

$$\dot{x}_C = A_C x_C + Hy \quad (5-3)$$

其中

$$x_C = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix} A - H_1 C - B F_x & N - H_1 D - B F_w \\ -H_2 C & M - H_2 D \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

这里假设存在观测器增益矩阵 H 使得 A_C 为稳定矩阵。

(3) 计算 $A_C S - SM$

注意, F_x 和 F_w 满足[定理 4-1]的条件, 即:

$$\begin{cases} AP - PM - B F_C S = N \\ CP = D \end{cases}, \quad F_C = [F_x \quad F_w], \quad S = \begin{bmatrix} P \\ -I \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

$$\begin{aligned} A_C S - SM &= \begin{bmatrix} A - H_1 C - B F_x & N - H_1 D - B F_w \\ -H_2 C & M - H_2 D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ -I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ -I \end{bmatrix} M \\ &= \begin{bmatrix} AP - H_1 CP - B F_x P - N + H_1 D + B F_w - PM \\ -H_2 CP - M + H_2 D + M \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

综上可知, 系统的设计参数满足如下三个联立方程:

$$\begin{cases} AP - PM - B F_C S = N & \text{【装置条件】} \\ A_C S - SM = 0 & \text{【内模条件】} \\ CP = D & \text{【输出条件】} \end{cases} \quad (5-5)$$

二、证明闭环系统(原系统+观测器+反馈控制律)输出静态无差。

[定理 5-1] 对有外扰受控系统

$$\Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = Mw \\ y = Cx + Dw \end{cases}$$

采用如下反馈控制律:

$$\begin{cases} \dot{x}_C = A_C x_C + Hy \\ u = -F_C x_C \end{cases}$$

其中 H 使得 A_C 为稳定阵, 若矩阵 P, S 满足式 (5-5) 且如定理 4-1 选取 F_C , 则闭环系统输出静态无差。

证明: 将控制律代入原系统, 得到闭环系统:

$$\Sigma_L: \begin{cases} \dot{x}_L = A_L x_L + N_L w \\ \dot{w} = Mw \\ y = C_L x_L + D_L w \end{cases}$$

$$x_L = \begin{bmatrix} x \\ x_C \end{bmatrix}, A_L = \begin{bmatrix} A & -BF_C \\ HC & A_C \end{bmatrix}, N_L = \begin{bmatrix} N \\ HD \end{bmatrix}, C_L = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, D_L = D$$

容易证明, A_L 为稳定矩阵。

$$\text{令 } E = \begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix}, \text{ 得到: } C_L E = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix} = CP = D = D_L$$

$$\begin{aligned} A_L E - EM &= \begin{bmatrix} A & -BF_C \\ HC & A_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix} M \\ &= \begin{bmatrix} AP - PM - BF_C S \\ HCP + A_C S - SM \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ HD \end{bmatrix} = N_L \end{aligned}$$

以上结果说明: 若存在 P, S 矩阵满足式 (5-5), 则对于闭环系统 Σ_L 而言, 存在矩阵 E 使得 $C_L E = D_L$ 和 $A_L E - EM = N_L$ 同时成立, 因而能实现输出静态无差。证毕。

§ 6 常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器

鲁棒 (Robust) 性是指系统的某些性能对系统及其环境的某些变化所具有的保持能力。比如: 当线性系统参数变化时, 只要极点仍在左半平面, 系统将保持稳定。因而, 系统的稳定性对系统参数的变化具有鲁棒性。

前述抗干扰控制器设计中, 静态无差是靠控制器和受控系统参数之间的“精确配合”(矩阵方程组有解, 或者是信号恰好正负抵消) 实现的, 因此, 对系统参数的变化不具有鲁棒性。下面介绍一种鲁棒抗干扰控制器的设计方法。

6.1 仿单变量 PI 抗干扰控制器

在经典的单变量控制理论中, 为使闭环系统对常值扰动输出静态无差, 通常采用 PI 控制, $u(t) = K_P y(t) + K_I \int y(t) dt$, 如下图:

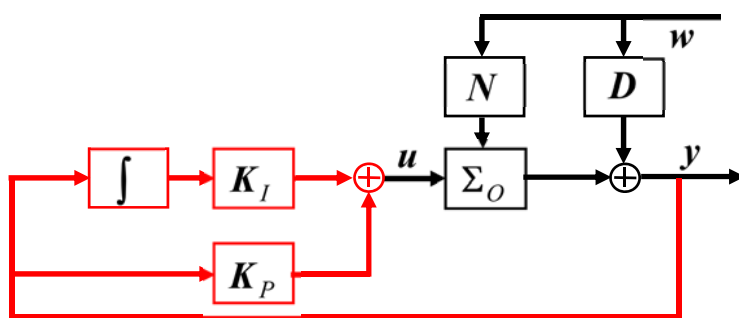


图 6-1

- ✚ 只要 y 不为零, 积分器输出就不断增长 (或减少), 直到将 y “拉回零”, 此时, 积分器输出保持不变, 以抵消常值扰动。
- ✚ 即使系统参数发生变化, 只要系统仍然稳定, 积分环节将保证系统输出静

态无差，从而使后者对系统的参数变化具有鲁棒性。

对于存在常值扰动的多变量系统，仿照上述单变量 PI 抗干扰控制器思想，在每一个输出分量后面串入一个积分器，共 m 个积分器（见图 6-2）。

$$\text{受控系统: } \Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = Mw \quad (M = 0) \\ y = Cx + Dw \end{cases} \quad (6-1)$$

$$\text{鲁棒抗干扰控制器: } \begin{cases} \dot{q} = y \\ u = -F_x x - F_q q \end{cases} \quad (6-2)$$

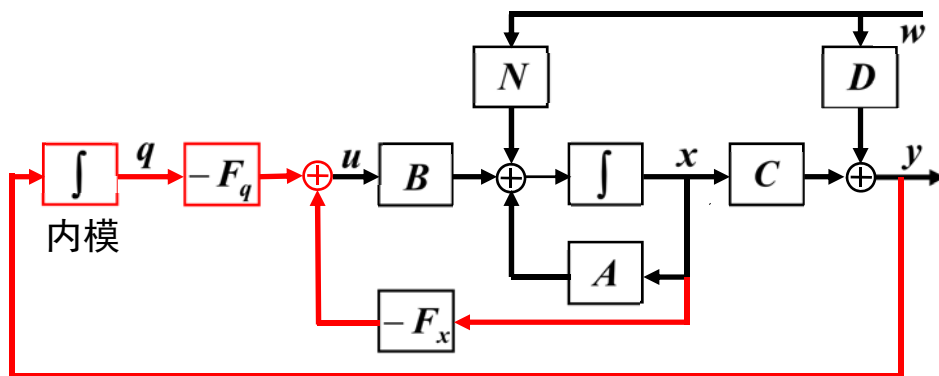


图 6-2

■ 思考：请比较控制律 $u = -F_x x - F_q q$ 和 $u = -F_x x - F_w w$ 的异同。

由式 (6-1) 及 (6-2) 的第一式，得增广系统 $\tilde{\Sigma}$ 的方程：

$$\tilde{\Sigma}: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} w \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + Dw \end{cases} \quad (6-3)$$

代入 $u = -F_x x - F_q q$ ，得到闭环系统 Σ_L 的方程：

$$\Sigma_L: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BF_x & -BF_q \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} w \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + Dw \end{cases} \quad (6-4)$$

6.2 闭环实现静态无差的条件

由于 $M = 0$ ，根据 [定理 3-2]， Σ_L 实现静态无差的充要条件是： A_L 渐稳，且存在矩阵 P 使得方程 $A_L P = N_L$ 和 $C_L P = D$ 同时成立。

从式 (6-4) 可以看出： $A_L P = N_L$ 的第二行就是 $C_L P = D$ 。也就是说，前者

蕴涵了后者。而当 A_L 渐稳时, 方程 $A_L P = N_L$ 必有解。

[定理 6-1] 式(6-1)描述的系统, 采用抗干扰控制器(6-2)实现静态无差的充要条件是: 闭环系统(6-4)渐稳。

闭环系统 Σ_L 可以任意配置极点, 当且仅当增广系统 $\tilde{\Sigma}$ 完全可控。由式(6-3)可知, $\tilde{\Sigma}$ 的可控性矩阵为:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_c &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n+m-1}B \\ 0 & CB & CAB & \cdots & CA^{n+m-2}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B & AQ \\ 0 & CQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中 $Q = [B \ AB \ \cdots \ A^{n+m-2}B]$, 不难证明(请自行思考),

$\text{rank} \tilde{Q}_c = n + m$, 当且仅当:

$$\text{rank } Q = n, \text{ 且 } \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad (6-5)$$

[定理 6-2] 式(6-1)描述的系统存在鲁棒抗干扰控制器(6-2)且可任意配置极点的充要条件是: (A, B) 完全可控, 且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad (6-6)$$

✚ 不难看出, 式(6-6)成立的一个必要条件是: 矩阵 B 的列数 l 不少于矩阵 C 的行数 m , 即控制量个数不少于输出的个数。

■ **思考:** 欲使式(6-6)成立, 矩阵 B 和 C 的秩至少应满足什么要求? 其物理意义是什么?

[例 6-1] 受控系统如下, 扰动 w 是常值, 设计鲁棒抗干扰控制器, 使闭环极点为 $-1, -1, -2, -2$ 。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

解: (1) 根据[定理 6-2], 判断是否存在鲁棒抗干扰控制器

$$(A, B) \text{ 完全可控, } \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 4 = n + m$$

存在鲁棒抗干扰控制器。

(2) 设计鲁棒抗干扰控制器: $\dot{q} = y$, 确定控制律 $u = -F_x x - F_q q$

$$A_L = \begin{bmatrix} A - BF_x & -BF_q \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

根据希望的闭环极点可得（解不唯一）:

$$F_x = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad F_q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

✚ 常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器的关键是采用积分器作补偿器，而积分器恰好是常值扰动的模型，即：当 $M = 0$ 时， $(sI - M)^{-1} = s^{-1}I$ 。

§ 7 一般扰动下的鲁棒抗干扰控制器的结构✖

7.1 鲁棒抗干扰控制器的频域讨论

对于一般扰动下的鲁棒抗干扰控制器问题，很自然的想法是，将式(6-2)中的积分器（常值扰动的内模）换成相应扰动的内模。受控系统和鲁棒抗干扰控制器的描述如下：

$$\text{受控系统: } \Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = Mw \\ y = Cx + Dw \end{cases} \quad (7-1)$$

$$\text{鲁棒抗干扰控制器: } \begin{cases} q = G_c(s)y \\ u = -F_x x - F_q q \end{cases}$$

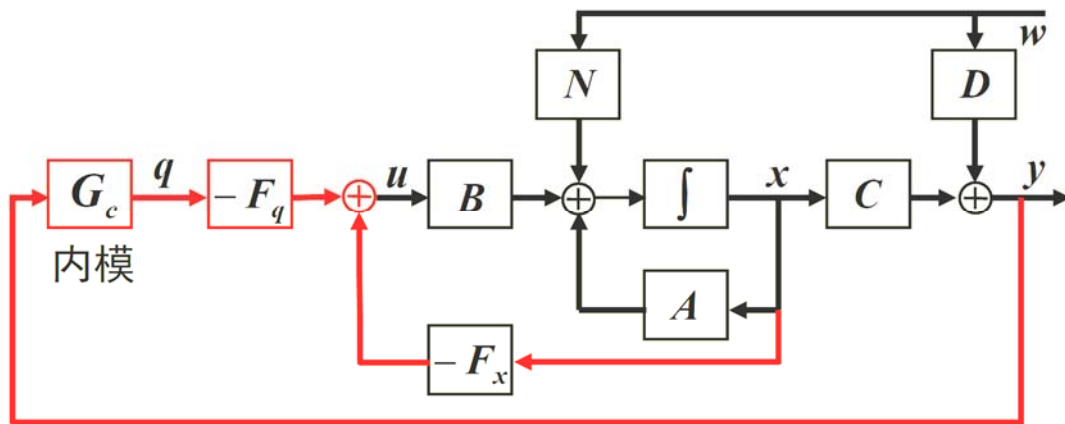


图 7-1

因

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + NW(s) + B(-F_x X(s) - F_q q) \\ (sI - A + BF_x)X(s) &= NW(s) + B(-F_q q) \\ CX(s) &= C(sI - A + BF_x)^{-1} (NW(s) + B(-F_q q)) \end{aligned}$$

若令

$$G_1(s) = C(sI - A + BF_x)^{-1} = \frac{R(s)}{\psi(s)}$$

则结构图 7-1 可改绘为下图:

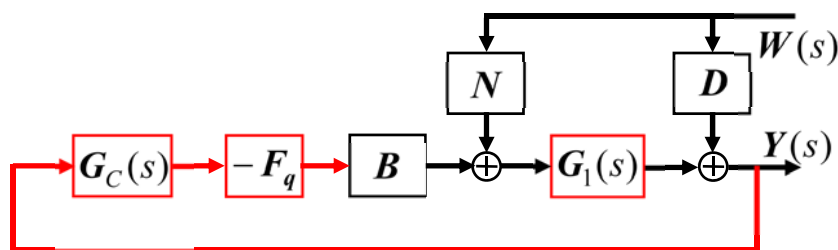


图 7-2

设

$$(sI - M)^{-1} = \frac{P(s)}{\varphi(s)}$$

选

$$G_C(s) = \frac{Q(s)}{\varphi(s)} \quad (\text{内模原理})$$

令

$$G_2(s) = [I + G_1(s)BF_qG_C(s)]^{-1} = \psi(s)\varphi(s)\frac{T(s)}{\gamma(s)}$$

其中

$$\frac{T(s)}{\gamma(s)} = [\psi(s)\varphi(s)I + R(s)BF_qQ(s)]^{-1}$$

则

$$Y(s) = G_2(s)[D + G_1(s)N]W(s) = \varphi(s)\frac{T(s)}{\gamma(s)}[D\psi(s) + R(s)N]\frac{P(s)}{\varphi(s)}w(0)$$

注意, 由外模产生的零点多项式 $\varphi(s)$ (上式第一项), 与实际的外扰极点多项式 $\varphi(s)$ (倒数第二项分母) 对消, 而 $\gamma(s)$ 是大闭环 (被设计成渐稳) 的特征多项式, 从而保证了 $Y(s)$ 是渐稳的, 根据终值定理有: $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 0$ 。

- ✚ 和外模型有相同极点的动力学模型都可作为外模 (外模型模态)。
- ✚ 外模嵌在 $w \rightarrow y$ 的反馈通道里, 使得它的极点多项式 $\varphi(s)$ 变成闭环的零点多项式, 从而与外扰极点多项式 $\varphi(s)$ 对消。
- ✚ 所得闭环系统的稳态无差性能对于系统的参数变化具有鲁棒性, 但对内模极点多项式的系数而言, 不具有鲁棒性。

[定理 7-1] 在外扰至输出传递的反馈通道中，对每个输出分量都串入外扰的内模，只要闭环系统渐近稳定，则闭环系统可实现稳态无差。

7.2 鲁棒抗干扰控制器的设计

假设鲁棒抗干扰控制器的状态空间描述为

$$\text{鲁棒抗干扰控制器: } \begin{cases} \dot{q} = A_c q + B_c y \\ u = -F_x x - F_q q \end{cases} \quad (7-2)$$

设 M 的最小多项式为: $\varphi(s) = s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \cdots + \alpha_r \quad r \leq p$

根据[定理 7-1]，在每一个输出分量的后面各串入一个外模。为简单计，可采用单输入可控规范型 (R, S) 如下:

$$\dot{q}_i = R q_i + S y_i, \quad R = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\alpha_r & -\alpha_{r-1} & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7-3)$$

在此设计下，式(7-2)鲁棒抗干扰控制器的系数矩阵为:

$$A_c = \begin{bmatrix} R & & \\ & \ddots & \\ & & R \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} S & & \\ & \ddots & \\ & & S \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

考察增广系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} N \\ B_c D \end{bmatrix} w \quad (7-5)$$

根据模态判据，该增广系统完全可控的充要条件是：对于矩阵 A 和 A_c 的所有特征值 λ ，满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & 0 & B \\ B_c C & A_c - \lambda I & 0 \end{bmatrix} = n + mr \quad (7-6)$$

对于属于 A 但不属于 A_c 的特征值 λ ，不难看出，上式等价于 (A, B) 完全可控。对于 A_c 的特征值 λ ，由式(7-3)和(7-4)得:

$$A_c - \lambda I = \begin{bmatrix} R - \lambda I & & \\ & \ddots & \\ & & R - \lambda I \end{bmatrix} \quad B_c C = \begin{bmatrix} S C_1^T \\ \vdots \\ S C_m^T \end{bmatrix} \quad (7-7)$$

矩阵 $A_c - \lambda I$ 有 m 个相同的对角分块 $R - \lambda I$ ，由于 (R, S) 是可控规范型， $R - \lambda I$ 的前 $r-1$ 行线性独立，第 r 行(最后一行)可经行变换化为零；矩阵 $B_c C$ 也有 m 个分块，每个相应分块的前 $r-1$ 行为零，第 r 行(最后一行)则是 C 矩阵的相应行。

因此，式(7-6)等价于

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad (7-8)$$

[定理 7-2] 式 (7-1) 描述的系统存在鲁棒抗干扰控制器 (7-2) 且可任意配置极点的充要条件是: (A, B) 完全可控, 且外模型 M 的所有特征值 λ 均满足式 (7-8)。

✚ 常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器 [定理 6-2] 是上述定理在 $M = 0$ 时的特殊情形。

[例 7-1] 受控系统和外扰 w 的模型如下, 设计鲁棒抗干扰控制器。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} w \\ \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w \\ y = [1 \quad 0]x + [0 \quad 1 \quad 2]w \end{cases}$$

解: (1) 求外模型 M 的特征值和最小多项式 $\varphi(s)$

$$\det(sI - M) = s(s^2 + 1)。特征值: 0, \pm j; \varphi(s): s^3 + s$$

(2) 根据 [定理 7-2], 判断是否存在鲁棒抗干扰控制器

(A, B) 完全可控, 且对 M 的所有特征值 λ 均满足:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = n + m = 3$$

存在鲁棒抗干扰控制器。

(3) 根据 $\varphi(s)$ 和公式 (7-4) 构造补偿器

$$\dot{q} = A_c q + B_c y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y$$

(4) 确定控制律 $u = -F_x x - F_q q$, 使闭环极点满足要求

$$A_L = \begin{bmatrix} A - BF_x & -BF_q \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \psi(s) = \det(sI - A_L)$$

令 $F_x = [a_1 \quad a_2]$, $F_q = [a_3 \quad a_4 \quad a_5]$, 可得:

$$\begin{aligned} \psi(s) &= s^5 - (1 - a_2)s^4 + a_1 s^3 - (1 - a_2 - a_5)s^2 \\ &\quad - (1 - a_1 - a_4)s + a_3 \end{aligned}$$

设希望的极点分别是 $-1, -0.5 \pm j, -2 \pm j$ 。即:

$$\psi^*(s) = s^5 + 6s^4 + \frac{61}{4}s^3 + \frac{81}{4}s^2 + \frac{65}{4}s + \frac{25}{4}$$

由上可得: $F_x = \left[\frac{61}{4} \quad 7 \right], F_q = \left[\frac{25}{4} \quad 2 \quad \frac{57}{4} \right]$