第二章 解耦控制

2.1 求一个串联补偿器使下述系统解耦，并使得解耦后的两个子系统的极点分别是 -1，-1和 -2，0。

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s}\end{bmatrix}$$

解:

解耦系统极点分别为-1，-1 和-2，0，则有:

$$\boldsymbol{G}_L(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s(s+2)}\end{bmatrix}$$

而

$$\boldsymbol{G}^{-1}(s)=\frac{1}{\dfrac{1}{s(s+1)}-\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{-1}{s+2}\\ \dfrac{-1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+2 & -s\\ \dfrac{-(s+2)}{(s+1)} & \dfrac{s(s+2)}{s+1}\end{bmatrix}$$

于是串联补偿器设计为:

$$\boldsymbol{G}_C(s)=\boldsymbol{G}^{-1}(s)\boldsymbol{G}_L(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{(s+1)^2} & \dfrac{-1}{s+2}\\ \dfrac{-(s+2)}{(s+1)^3} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

2.2 对上题给定的$\boldsymbol{G}(s)$，计算解耦阶常数α_i和可解耦性矩阵$\boldsymbol{D}_0$，从而判断$\boldsymbol{G}(s)$的最小实现$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$是否可$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$解耦?

解:

根据课件定理 3-2，将$\boldsymbol{G}(s)$稍加整理:

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s(s+1) & s(s+1)\\ (s+2) & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}$$

此时，易得$\alpha_1=3-2=1$，$\alpha_2=3-2=1$

$$D_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{bmatrix}$$

此时，$\mathrm{rank}(D_0)=2$, D_0非奇异，系统最小实现$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$可$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$解耦

2.3 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，求一个$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换，使闭环为积分型解耦系统；判断该闭环系统是否产生零极相消?

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 0 & 7\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

解:

（1） 设计:

$c_1{}^{\tau}B=[2\ \ 24]\neq 0,\alpha_1=1$， $c_2{}^{\tau}B=[10\ \ 20]\neq 0,\alpha_2=1$

$$D_0=\begin{bmatrix}2 & 24\\ 10 & 20\end{bmatrix},\quad \mathrm{rank}(D_0)=2, \text{因此可解耦。}$$

$$L=\begin{bmatrix}c_1{}^{\tau}A\\ c_2{}^{\tau}A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -6\\ -4 & 0 & -10\end{bmatrix}$$

$$R=D_0{}^{-1}=\begin{bmatrix}-0.1 & 0.12\\ 0.05 & -0.01\end{bmatrix}$$

$$F=D_0{}^{-1}L=\begin{bmatrix}-0.68 & 0.2 & -0.6\\ 0.14 & -0.1 & -0.2\end{bmatrix}$$

（2） 校验略

反馈 $u=Rv-Fx$, 此时解耦阶常数之和为 2 ，而状态个数为 3， 因此存在零极点相消。

2.4 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，检查是否存在$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使系统解耦? 若存在，解耦后的系统可配置几个极点? 是否产生零极点相消?

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

解:

$$c_1{}^{\tau}B=[0\ \ 0],\ c_1{}^{\tau}AB=[1\ \ 1]\neq 0,\ \alpha_1=2$$

$$c_2{}^{\tau}B=[1\ \ 0],\ \alpha_2=1$$

$D_0=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$rank(D_0)=2$, 且系统能控且能观，可解耦，系统可以配置

三个极点，不会产生零极点相消。

2.5 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，求$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使系统解耦，且保持所有极点不变。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-3&-3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

解:

$$Det(sI-A)=\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\1&3&s+3\end{vmatrix}=(s+1)^3=0$$

$$s_1=-1,s_2=-1,s_3=-1$$

$$c_1{}^{\tau}B=[1\ \ 0]\ ,\ \ \alpha_1=1$$

$$c_2{}^{\tau}B=[0\ \ 0]\ ,\ \ c_2{}^{\tau}AB=[0\ \ 1]\ ,\alpha_2=2$$

$$D_0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, rank(D_0)=2,\ 可解耦。$$

设

$$\psi_1^*(s)=s+1,\ \psi_2^*(s)=s^2+2s+1$$

$$L=\begin{bmatrix}c_1^{\tau}\psi_1^*(A)\\c_2^{\tau}\psi_2^*(A)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1^{\tau}(A+I)\\c_2^{\tau}(A^2+2A+I)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$R_0=D_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad F=D_0^{-1}L=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&-1\end{bmatrix}$$

核验:

$$A-BF=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&-1&2\end{bmatrix},\ BR=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}&0\\0&\frac{1}{s^2+2s+1}\end{bmatrix}$$

2.6 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，设计$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使系统解耦，且每个子系统的极点都配置在$-1$上。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\3&0&0&2\\0&0&0&1\\0&-2&0&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

解：

$$c_1{}^{\tau}B=[0\ \ 0]\ ,\ \ c_1{}^{\tau}AB=[1\ \ 0],\alpha_1=2$$

$$c_2{}^{\tau}B=[0\ \ 0]\ ,\ \ c_2{}^{\tau}AB=[0\ \ 1],\alpha_2=2$$

$$D_0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, rank(D_0)=2,\ \text{可解耦。}$$

四个极点都配置到-1 上，设 $\psi_1^*(s)=\psi_2^*(s)=s^2+2s+1$

$$L=\begin{bmatrix}c_1^{\tau}\psi_1^*(A)\\c_2^{\tau}\psi_2^*(A)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1^{\tau}(A^2+2A+I)\\c_2^{\tau}(A^2+2A+I)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&0&2\\0&-2&1&2\end{bmatrix}$$

$$R=D_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ F=D_0^{-1}L=\begin{bmatrix}4&2&0&2\\0&-2&1&2\end{bmatrix}$$

校验:

$$G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s^2+2s+1}&0\\0&\dfrac{1}{s^2+2s+1}\end{bmatrix}$$

2.7 给定系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Bu}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}$，其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{1<m<n}$,

（a）在什么条件下，存在$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换，即 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Rv}-\boldsymbol{Fx}$，使得$\boldsymbol{v}$到$\boldsymbol{y}$解耦?

（b）若条件满足，设计$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使闭环传递函数的极点均为$-1$;

（c）写出变换后闭环系统的方程，验证$\boldsymbol{v}$到$\boldsymbol{y}$的传递函数阵。

解：

(a)

$$A=I$$

对于$y^{(\alpha_i)}$,如果$c_i^TB=0$,则$c_i^TA^{\alpha_i-1}B=0$，此时无法寻找到α_i

那么首先需要满足$c_i^TB\neq0$， 即$\alpha_i=1$。

此时$D_0 = CB$, 若要使系统存在{F,R}变换，则D_0可逆。

(b)

对于所满足的条件，设 $\psi_i^*(s) = s+1$,

$$\mathrm{L} = 2\mathrm{C}, \qquad \mathrm{F} = D_0^{-1}L = 2(CB)^{-1}C\,, \quad R = D_0^{-1} = (CB)^{-1}$$

(c)略

2.8 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，问：是否存在$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使系统解耦或静态解耦?

如存在，求该变换。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$c_1{}^{\tau}B = [1\ \ 0]\,,\ \ \alpha_1 = 1$$

$$c_2{}^{\tau}B = [0\ \ 0]\,,\ \ c_2{}^{\tau}AB = [1\ \ 0]\,, \alpha_2 = 2$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \ rank(D_0) = 1, \text{不存在}\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}\text{变换使系统动态解耦}$$

系统能控矩阵$U_c = [B\ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{rank}(U_c) = 3$, 因此系统可镇定。

但$det\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0$, 因此也不可以被静态解耦。

第三章 抗外扰控制

3.1 如下带外扰的**受控**系统能否实现状态对外扰的完全不变性？能否实现输出对外扰的完全不变性？若能实现，请给出控制策略。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y} = [6 \quad 3] \boldsymbol{x}$$

解：

① 状态对外扰的完全不变性的判断：

（$\text{rank}(B, AB) = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$），由于系统受控，故$(A, B)$可镇定；

$\text{rank}B \neq \text{rank}(B, N)$，$BF_w = N$无解，故带外扰的受控系统不能实现状态对外扰的完全不变性。

② 输出对外扰的完全不变性的判断：

$CN = 0$，而$CAN \neq 0$，有希望仅靠状态反馈将A改造成A_L，使得A_L为稳定阵，且$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{N} = 0$。设状态反馈矩阵$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}} = [f_1 \quad f_2]$，则需成立：

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{N} = -12 - 3f_1 + 6f_2 = 0 \quad \text{（a）}$$

为保证闭环稳定，由闭环特征多项式

$$det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}) = s^2 + f_2 s + f_1 \quad \text{（b）}$$

需满足： $f_1 > 0$，$f_2 > 0$

由式（a）（b）选：$f_1 = 2$，$f_2 = 3$，即 $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}} = [2 \quad 3]$。

结论：通过 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$可实现输出对外扰的完全不变性。

3.2 求下列系统在输入f_1和f_2分别为阶跃函数$1(t)$和斜坡函数 t时状态$\boldsymbol{x}$的强制解。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + f_2 \end{cases}$$

解：

系统：$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Nw \\ \dot{w} = Mw \end{cases}$，$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

因f_1和f_2分别为阶跃函数$1(t)$和斜坡函数，$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A对应的特征值为:$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$,所以矩阵A为稳定矩阵；

$AP-PM=N$的解为$P=\begin{bmatrix}-25/36 & -1/6\\ 5/6 & 0\end{bmatrix}$,又$A$的特征值与$M$矩阵的特征值相异，

所以有唯一解，状态的强制解为:
$$\tilde{x}(t)=\text{-}Pw(t)=\begin{bmatrix}\frac{25}{36}+\frac{1}{6}t\\ -\frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

3.3 有外扰作用的受控系统如下。当外扰 $\boldsymbol{w}$ 为常值时，判断输出$\boldsymbol{y}(t)$的静态值是否为零。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

解:

$\boldsymbol{A}$=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$渐进稳定，外扰 $\boldsymbol{w}$ 为常值，即$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$，方程$\begin{cases}\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}\end{cases}$有解$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，即输出对外扰具有静态不变性。

3.4 有外扰作用的受控系统如下。判断输出$\boldsymbol{y}(t)$的静态值是否为零。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\dot{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-6 & -5\\ 0 & 6\end{bmatrix}\ \boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

解:

$\boldsymbol{A}$=$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}$, 特征值为-2, -3，即$\boldsymbol{A}$渐进稳定。$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, 方程$\begin{cases}\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}\end{cases}$应有解。

由$\boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}$，得$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1/6 & -25/36\\ 0 & 5/6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{N}$. 输出$\boldsymbol{y}(t)$的静态值为零。

3.5 有外扰作用的受控系统如下。设计控制器 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$ 使得闭环极点为-2和-3，且使得输出$\boldsymbol{y}(t)$的静态值为零。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

解：参考例 4-1

（1）$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$完全可控，因而可镇定；

（2）设计状态反馈矩阵使闭环极点为 $-2,\ -3$；令$\boldsymbol{F_x} = [f_{x1} \quad f_{x2}]$

由 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BF_x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -f_{x1} & -f_{x2} \end{bmatrix}$,

特征值方程$D = s^2 + f_{x2}s + f_{x1} = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$,

得到 $\boldsymbol{F_x} = [6 \quad 5]$.

（3）由$\begin{cases} \boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} + \boldsymbol{BQ} = \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{CP} = \boldsymbol{D} \end{cases}$求解$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$矩阵

由 $\boldsymbol{CP} = \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$，得到 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1/6 & -25/36 \\ 0 & 5/6 \end{bmatrix}$

由 $\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} + \boldsymbol{BQ} = \boldsymbol{N}$，令$\boldsymbol{Q} = [q_1 \quad q_2]$

得到:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{Q} = [0 \quad -2]$$

（4）求出顺馈补偿阵

$$\boldsymbol{F_w} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{F_x P} = [0 \quad -2] + [6 \quad 5] \begin{bmatrix} -1/6 & -25/36 \\ 0 & 5/6 \end{bmatrix} = [-1 \quad -2]$$

3.6 有外扰作用的受控系统如下。外扰 $\boldsymbol{w}$ 为常值，求该系统的鲁棒抗干扰控制器，使得闭环极点为-1，-1，-2，-2。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

解：参考例 6-1

（1）根据[定理 6−2]，判断是否存在鲁棒抗干扰控制器

$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$完全可控，$rank \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = 4 = n + m$

存在鲁棒抗干扰控制器。

（2）设计鲁棒抗干扰控制器：$\dot{\boldsymbol{q}} = y$，确定控制律$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F_x x} - \boldsymbol{F_q q}$

$$\boldsymbol{A}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BF_x} & -\boldsymbol{BF_q} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}$$

令$\boldsymbol{F_x}=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{F_q}=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix}$，

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_L|=\begin{vmatrix} s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F_x}) & \boldsymbol{B}\boldsymbol{F_q} \\ -\boldsymbol{C} & s\boldsymbol{I} \end{vmatrix}=(s+1)^2(s+2)^2$$

$$\begin{cases} f_2+2f_3+f_1-3=6 \\ q_1-4f_3+q_2+2q_3+2-f_1-f_2-2f_1f_4+2f_2f_3=13 \\ 2f_2q_3-2f_1q_4-q_1-q_2-4q_3+2f_3q_2-2f_4q_1=12 \\ 2q_2q_3-2q_1q_4=4 \end{cases}$$

（解不唯一）

3.7 有外扰作用的受控系统如下。问：该系统存在鲁棒抗干扰控制器吗？如存在，请设计之，使得闭环极点均为-1。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\dot{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

解：参考例 7-1

（1）求外模型$\boldsymbol{M}$的特征值和最小多项式$\varphi(s)$

$det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})=s^2+1$。特征值：$\pm j$；$\varphi(s)$：$s^2+1$

（2）根据[定理 7-2]，判断是否存在鲁棒抗干扰控制器

$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$完全可控，且对$\boldsymbol{M}$的所有特征值$\lambda$均满足：

$$\text{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=n+m=3$$

存在鲁棒抗干扰控制器。

（3）根据$\varphi(s)$和公式（7-4）构造补偿器

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{A}_C\boldsymbol{q}+\boldsymbol{B}_C y=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{q}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}y$$

（4）确定控制律$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F_x}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F_q}\boldsymbol{q}$，使闭环极点满足要求

$$\boldsymbol{A}_L=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F_x} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F_q} \\ \boldsymbol{B}_C\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_C \end{bmatrix}，\psi(s)=det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_L)$$

令 $\boldsymbol{F_x}=[a_1 \quad a_2]$，$\boldsymbol{F_q}=[a_3 \quad a_4]$，可得：

$$\psi(s)=s^4+(a_1-3)s^3+(a_2+a_4+1)s^2+(a_1+a_3-3)s+a_2$$

希望的极点是 -1，即：

$$\psi^*(s)=s^4+4s^3+6s^2+4s+1$$

由上可得： $\boldsymbol{F_x}=[7 \quad 1]$，$\boldsymbol{F_q}=[0 \quad 4]$

3.8 有外扰作用的受控系统如下：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bw}$，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Dw}$。其中，$\boldsymbol{x}$是 n 维状态，$\boldsymbol{w}$是 p 维常值外扰。试证明：$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{w}$可观测的充分必要条件是$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C})$可观测，且

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}$$

解：

把系统状态$\boldsymbol{x}$和外扰$\boldsymbol{w}$合并为一个向量，可以得出增广矩阵的形式，即为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{D}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \end{cases}，记\boldsymbol{A_c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{C_c} = [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{D}].$$

系统可观测应满足$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_c} \\ \boldsymbol{C_c A_c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C_c A_c}^{\boldsymbol{n+p-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{CA} & \boldsymbol{CB} \\ \boldsymbol{CA}^2 & \boldsymbol{CAB} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{\boldsymbol{n+p-1}} & \boldsymbol{CA}^{\boldsymbol{n+p-2}}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$

记 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{\boldsymbol{n+p-2}} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{QA} & \boldsymbol{QB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$能观，即 $\mathbf{rank}\,\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{n}$，$\mathbf{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}.$

第三章 最优控制

3.1 求下列泛函的变分:

(1) $J=\int_0^1 y^3(x)\sin(x)\mathrm{d}x$

(2) $J=\int_0^1 y^3(t)x^2(t)\mathrm{d}t$

解 :

（1）

$F(y(x),x)=y^3(x)sin(x)$, $\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2(x)sin(x)$

$$\delta J=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)dx=\int_0^1 3y^2(x)sin(x)\delta y(x)dx$$

（2）

$F(x(t),y(t))=y^3(t)x^2(t)$,

$$\begin{aligned}\delta J&=\int_0^1[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial x}\delta x]dt\\&=\int_0^1[3y^2(t)x^2(t)\delta y+2y^3(t)x(t)\delta x]dt\end{aligned}$$

3.2 设受控系统为 $\dot{x}(t)=-x(t)+u(t)$, $x(0)=x_0$,求$u(t)$使下述性能指标最小:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1[3x^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t$$

解:

$$f=\ -x+u,\qquad \varphi=0,\qquad L=3x^2+u^2$$

H 函数: $H=\ L+\lambda f=3x^2+u^2+\lambda(-x+u)$

控制方程: $\frac{\partial H}{\partial u}=2u+\lambda=0\rightarrow u=\ -\frac{1}{2}\lambda$

正则方程: $\dot{x}=\ -x+u=\ -x-\frac{1}{2}\lambda\rightarrow\ \lambda=\ -2x-2\dot{x}$

$\dot{\lambda}=\ -\frac{\partial H}{\partial x}=\ -(6x-\lambda)\rightarrow\ \ddot{x}-\ 8x=0$

边界条件: $x(0)=x_0$, $\lambda(t_f)=0=\ \lambda(1)$

通过正则方程可以解得: $x^*(t)=C_1e^{-2t}-C_2e^{2t}$, $\lambda^*(t)=6C_2e^{2t}+2C_1e^{-2t}$

带入边界条件:

$$x(0)=C_1-C_2=x_0,\ \lambda(1)=6C_2e^2+2C_1e^{-2}=0$$

于是

$$C_1=\frac{3e^4}{3e^4+1}x_0,\quad C_2=-\frac{x_0}{3e^4+1}$$

而

$$u^*(t)=\frac{3x_0}{3e^4+1}e^{2t}-\frac{3e^4}{3e^4+1}x_0e^{-2t}$$

3.3 已知受控系统$\dot{x}(t)=4u(t)$, $x(0)=x_0$, 求$u(t)$使系统状态在T时刻转移到x_T，且使下述性能指标最小：

$$J=\int_0^T[x^2(t)+4u^2(t)]\mathrm{d}t$$

解：

控制函数，

$$f(x,u)=4u(t)$$

Hamilton 函数，

$$H(x,u,\lambda)=x^2(t)+4u^2(t)+\lambda(t)4u(t)$$

控制方程，

$$\frac{\partial H}{\partial u}=8u(t)+4\lambda(t)=0$$

得，

$$u(t)=-\frac{1}{2}\lambda(t)$$

正则方程，

$$\dot{x}=4u(t)=-2\lambda(t)$$

$$\dot{\lambda(t)}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-2x(t)$$

边界条件，$x(0)=x_0$, $x(T)=x_T$

$$\lambda(T)=\frac{\partial\varphi}{\partial x(T)}=0$$

令 $W=\begin{pmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{pmatrix}$，有

$$\dot{W}(t)=\begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix}W(t)=AW(t)$$

双边进行 Laplace 变换，

$$W(s)=(sI-A)^{-1}W_0$$

计算得,

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+2)(s-2)}\begin{pmatrix} s & -2 \\ -2 & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2} & -\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2} \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

得到,

$$W(t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$$

即,

$$\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}(x_0-\lambda_0)e^{2t}+\frac{1}{2}(x_0+\lambda_0)e^{-2t} \\ \lambda(t)=\frac{1}{2}(\lambda_0-x_0)e^{2t}+\frac{1}{2}(x_0+\lambda_0)e^{-2t} \end{cases}$$

由, $x(T)=x_T, x(0)=x_0, \lambda(T)=0$, 得到,

$$\lambda_0=\frac{(e^{2T}+e^{-2T})x_0-2x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}$$

故,

$$\begin{cases} x(t)=\frac{-e^{-2T}x_0+x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}e^{2t}+\frac{e^{2T}x_0-x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}e^{-2t} \\ \lambda(t)=\frac{e^{-2T}x_0-x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}e^{2t}+\frac{e^{2T}x_0-x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}e^{-2t} \end{cases}$$

故,

$$u(t)=-\frac{1}{2}\lambda(t)=-\frac{1}{2}\frac{e^{-2T}x_0-x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}e^{2t}-\frac{1}{2}\frac{e^{2T}x_0-x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}e^{-2t}$$

令 $F(x,\dot{x})=x^2+\frac{1}{4}\dot{x}^2$ 带入 Euler-Lagrange 方程,

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

检验得, $\ddot{x}-4x=0$, 带入以上结果, 符合该方程。

又 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=8\geq 0$, 故该解为最小值点。

3.4 已知受控系统 $\dot{x}(t)=u(t)$, $x(0)=1$, 求$u(t)$和t_f使系统状态在t_f时刻转移到坐标原点，且使下述性能指标最小:

$$J=t_f^2+\int_0^{t_f}u^2(t)\mathrm{d}t$$

解:

控制函数,

$$f(x,u)=u(t)$$

Hamilton 函数,

$$H(x,u,\lambda)=u^2(t)+\lambda(t)u(t)$$

控制方程，

$$\frac{\partial H}{\partial u}=2u(t)+\lambda(t)=0$$

得，

$$u(t)=-\frac{1}{2}\lambda(t)$$

正则方程，

$$\begin{cases}\dot{x}=u(t)=-\frac{1}{2}\lambda(t)\\ \dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=0\end{cases}$$

边界条件，$x(0)=1,\ x(t_f)=0$

$$H(t_f)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}$$

即

$$\lambda^2(t_f)=8t_f$$

又，$x(t)$ 应该递减，所以 $\lambda(t_f)>0$，解得，

$$\lambda(t)=2\sqrt{2t_f}$$
$$x(t)=-\sqrt{2t_f}t+1$$

又 $x(t_f)=0$, 解得，$t_f=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

故，

$$x(t)=-4^{\frac{1}{6}}t+1$$
$$u(t)=-4^{\frac{1}{6}}=-\sqrt[6]{4}$$

即

$$\begin{cases}u(t)=-4^{\frac{1}{6}}\\ t_f=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{3}}\end{cases}$$

又 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=2\geq 0$, 该解为最小值对应解。

3.5 已知受控系统

$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$，$\dot{x}_2(t)=x_3(t)$，$\dot{x}_3(t)=u(t)$，$x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=0$,

求$u(t)$和t_f，其中$|u(t)|\leq 1$，使系统状态在t_f时刻转移到目标集

$$x_1^2(t_f)=t_f^2，x_2(t_f)=x_3^2(t_f),$$

且使下述性能指标最小（仅列出必要条件）

$$J=x_2(t_f)t_f+\int_0^{t_f}u^2(t)\mathrm{d}t.$$

解：

定义 Hamilton 函数：

$$H = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 u = (u^2 + \lambda_3 u) + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3$$

定义

$$\hat{\phi}\left[x(t_f), t_f\right] = x_2(t_f) + \mu_1\left[x_1^2(t_f) - t_f^2\right] + \mu_2\left[x_2(t_f) - x_3^2(t_f)\right]$$

根据极小值原理：

$$u^* = argmin_u H = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_3}{2} & |\lambda_3| \le 2 \\ -sign(\lambda_3) & |\lambda_3| > 2 \end{cases}$$

正则方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_2 \end{cases}$$

边界条件：

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$$

$$\lambda_1(t_f^*) = 2\mu_1 x_1(t_f^*),\ \ \lambda_2(t_f^*) = t_f^* + \mu_2,\ \ \lambda_3(t_f^*) = -2\mu_2 x_3(t_f^*)$$

终端条件：

$$H(t_f^*) = -\left[x_2(t_f^*) - 2\mu_1 t_f^*\right] = 0$$

3.6 已知受控系统$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = u(t)$， $x_1(0) = x_2(0) = 2$。性能指标为：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty [4x_1^2(t) + u^2(t)]\mathrm{d}t$$

求使J最小的反馈控制律 $u^*(\boldsymbol{x})$，以及相应的最小值 J^*。

解：

Condition:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [4x_1^2(t) + u^2(t)]dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [x(t)^T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + u^T(t) I u(t)]dt$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = 1, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，故有 Riccati 方程，

$$PA + A^T P - PBB^T P + Q = 0$$

得，

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{12}p_{21} & p_{12}p_{22} \\ p_{22}p_{21} & p_{22}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

即，

$$\begin{cases} p_{21}p_{21} = 4 \\ p_{11} - p_{12}p_{22} = 0 \\ p_{11} - p_{22}p_{21} = 0 \\ p_{21} + p_{12} - p_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

解得，

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

故，

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P x(t) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} x(t)$$

$$J^* = \frac{1}{2} x^T(t_0) P x(t_0) = 20$$

又解得

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x(t)$$

求得：

$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)X_0] = \begin{bmatrix} 2e^{-t}(\cos(t) + 2\sin(t)) \\ 2e^{-t}(\cos(t) - 3\sin(t)) \end{bmatrix}$$

$$u^*(t) = 4e^{-t}(-2\cos(t) + \sin(t))$$

3.7 已知受控系统 $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$, $x(t_0) = x_0$，性能指标为：

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [x^2(t) + \rho u^2(t)]\mathrm{d}t$$

求使J最小的反馈控制律 $u^*(\boldsymbol{x})$，并分析闭环系统响应与权重ρ的关系。

解：

$A=1, B=1, Q=1, R=\rho$, Riccati 方程，

$$p+p-\rho p^2+1=0$$

$$(p-\frac{1}{\rho})^2=\frac{1+\rho}{\rho^2}$$

由 $p\geq 0$, 解得，$p=\frac{1+\sqrt{1+\rho}}{\rho}$ 故，$u^*(t)=-\frac{1+\sqrt{1+\rho}}{\rho^2}x(t)$, $J^*=\frac{1+\sqrt{1+\rho}}{2\rho}x_0^2$

进而，

$$\dot{x}(t)=\frac{\rho^2-1-\sqrt{1+\rho}}{\rho^2}x(t)$$

得，

$$x(t)=x_0e^{\frac{\rho^2-1-\sqrt{1+\rho}}{\rho^2}t}$$

当 $\rho>0$ 时，由 $\rho^2-1-\sqrt{1+\rho}$ 对 ρ 的导数单增，其先减后增，存在 $\hat{\rho}>0$, $\hat{\rho}^2-1-\sqrt{1+\hat{\rho}}=0$, 当 $\rho>\hat{\rho}$ 时，$x(t)$ 不稳定；当 $-1<\rho<\hat{\rho}$ 时, 系统稳定；当 $\rho=\hat{\rho}$ 时，$x(t)=x_0$; 当 $\rho\leq 0$ 时，系统不存在最优解。

第四章 离散时间控制系统

4.1 某国家有一亿人口，其中城市人口有一千万。假定城市每年有其前一年人口的 4% 迁到农村，而农村又有前一年人口的 2% 迁到城市，城市人口的自然增长率为 0.8%，农村人口的自然增长率为 1%.

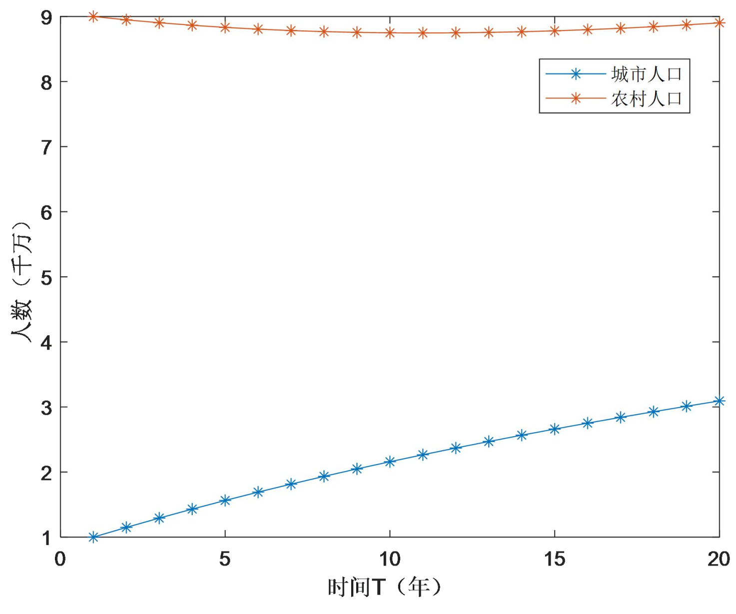
1） 设$x_1(k)$和$x_2(k)$为第k年城市和农村人口数，试建立城乡人口变化的状态方程（简化起见，人口变化按照先增长后迁移的方式计算）。

2） 利用 MATLAB 计算 20 年内的城乡人口数量的逐年变化，并绘制曲线.

解：由题意可得系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.96 \times 1.008x_1(k) + 0.02 \times 1.01x_2(k) \\ 0.04 \times 1.008x_1(k) + 0.98 \times 1.01x_2(k) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.9677 & 0.0202 \\ 0.0403 & 0.9898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

初始条件：$X_1(0) = 1 \quad X_2(0) = 9$（单位：千万）



4.2 设连续系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

设采样周期为 T，将系统方程离散化，导出离散时间状态方程，并求解$x(k)$.

解：采用预解矩阵法定义

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s^2}\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

拉普拉斯变换得

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$G=e^{AT}=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}, H=\int_0^T e^{A\tau}Bd\tau=\int_0^T\begin{bmatrix}1 & \tau\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}T^2\\ T\end{bmatrix}$$

由$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$，得

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}T^2\\ T\end{bmatrix}u(k)$$

由迭代法求解，$x(k)=G^{\mathrm{k}}x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}G^{k-j+1}Hu(j)=\begin{bmatrix}1 & kT\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}G^{k-j+1}Hu(j)$

4.3 设连续系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

设采样周期为 T，试分析离散化后系统的能控性.

解：用预解矩阵法定义

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1}\\ -\frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1}\end{bmatrix}$$

拉普拉斯变换得

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}$$

$$G=e^{AT}=\begin{bmatrix}\cos(T) & \sin(T)\\ -\sin(T) & \cos(T)\end{bmatrix},$$

$$H=\int_0^T e^{A\tau}Bd\tau=\int_0^T\begin{bmatrix}\cos(\tau) & \sin(\tau)\\ -\sin(\tau) & \cos(\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}1-\cos(T)\\ \sin(T)\end{bmatrix}$$

由$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$，得

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(T) & \sin(T)\\ -\sin(T) & \cos(T)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-\cos(T)\\ \sin(T)\end{bmatrix}u(k)$$

$$Q_c=[H\quad GH]=\begin{bmatrix}1-\cos(T) & 2\sin^2(T)\\ \sin(T) & -\sin(T)+\sin(2T)\end{bmatrix}$$

$$[G^2\quad Q_c]=\begin{bmatrix}\cos(2T) & \sin(2T) & 1-\cos(T) & 2\sin^2(T)\\ -\sin(2T) & \cos(2T) & \sin(T) & -\sin(T)+\sin(2T)\end{bmatrix}$$

由可控性充要条件$T>0$，$\mathrm{rank}Q_c=\mathrm{rank}[G^2\quad Q_c]=2$，系统能控。

4.4 设离散时间系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k),\ \begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

1) 设计最优控制律使下列指标最小

$$\mathrm{J}=x_1^2(4)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{4}u^2(k)$$

2) 设计最优控制律在 N 个采样周期内将系统状态转移到原点，且使控制能量

$$\mathrm{J}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}u^2(k)$$

最小，其中 $\mathrm{N}=2,3,4$.

解：

1) 引入拉格朗日乘子：

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{N}),\ \boldsymbol{N}]-\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})+\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})$$

其中 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}]+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{k}]$

$$= \frac{1}{2}u^2(k) + \lambda_1(k+1)[x_1(k) + x_2(k) + u(k)] + \lambda_2(k+1)[x_1(k) + u(k)]$$

规范方程:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = x_1(k) + u(k)$$

协态方程:

$$\lambda_1(k) = \frac{\partial H}{\partial x_1(k)} = \lambda_1(k+1) + \lambda_2(k+1)$$
$$\lambda_2(k) = \frac{\partial H}{\partial x_2(k)} = \lambda_1(k+1)$$

边值条件:

$$\lambda_1(4) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_1(4)} = 2x_1(4)$$
$$\lambda_2(4) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_2(4)} = 0$$

极值条件:

$$\frac{\partial H}{\partial u(k)} = u(k) + \lambda_1(k+1) + \lambda_2(k+1) = 0$$

2) 由题意知终态($\mathrm{N} = 2,3,4$)有

$$\begin{bmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H(k) = L[x(k), u(k), k] + \lambda^{\top}(k+1) f\big[x(k),\ u(k),\ k\big]}$$

$$= \frac{1}{2}u^2(k) + \lambda_1(k+1)[x_1(k) + x_2(k) + u(k)] + \lambda_2(k+1)[x_1(k) + u(k)]$$

规范方程:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = x_1(k) + u(k)$$

协态方程:

$$\lambda_1(k) = \frac{\partial H}{\partial x_1(k)} = \lambda_1(k+1) + \lambda_2(k+1)$$
$$\lambda_2(k) = \frac{\partial H}{\partial x_2(k)} = \lambda_1(k+1)$$

边值条件:

$$x_1(0) = 1; x_2(0) = 1;$$
$$x_1(N) = 0; x_2(N) = 0;$$

极值条件：

$$\frac{\partial H}{\partial u(k)} = u(k) + \lambda_1(k+1) + \lambda_2(k+1) = 0$$