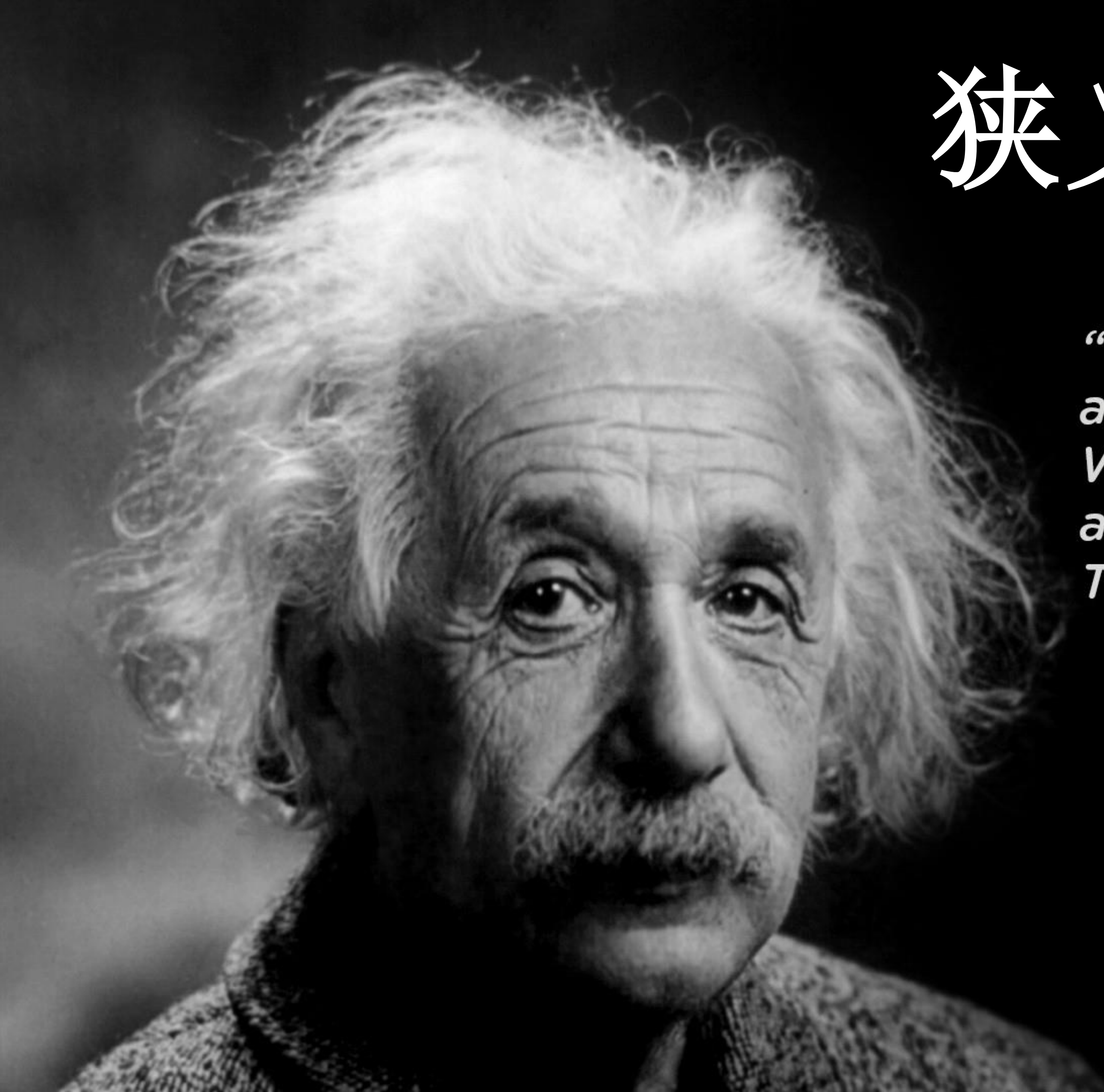


狭义相对论基础

*"When you are courting a nice girl
an hour seems like a second.
When you sit on a red-hot cinder
a second seems like an hour.
That's relativity."*

Albert Einstein

爱因斯坦（1879 – 1955）

Albert Einstein

- 美籍德国人
- 1921年诺贝尔物理学奖获得者
- 对光电效应的理论解释和对理论物理学的贡献
- 1905年提出狭义相对论

19世纪末，经典物理已经相当成熟

"物理学的大厦已基本建成，后辈物理学家只要做些修补工作就行了"。（著名的英国物理学家 J.J.汤姆孙）

"往后无非在已知规律的小数点后面加上几个数字而已"

在经典物理晴空中飘浮着两朵乌云，令人不安

--- W.汤姆孙 (开尔文勋爵)　　1900 新千年的祝词

第一朵乌云：测量地球相对"以太"运动的否定结果与存在静止的"以太"参考系相矛盾——导致相对论诞生。

第二朵乌云：黑体辐射实验规律与经典物理理论中的能量均分定理相矛盾——导致量子力学诞生

相对论和量子力学是近代物理学的基础，深刻改变了人们对物质世界认识。

时间和空间，简称时空。物质的存在和运动与时空的性质紧密相关，空间是自然界演化的“背景”和“舞台”

物理学对时空的认识：牛顿力学、狭义相对论、广义相对论。

牛顿力学、狭义相对论：只限于惯性系。

万有引力——没有严格的惯性系，只有在远离各大星体（引力场足够弱）的区域，牛顿力学和狭义相对论才近似成立，而牛顿力学仅适用于低速情况。

关于时空和引力的严格理论是广义相对论

狭义相对论包括相对论运动学和相对论动力学，相对论运动学只涉及时空的变换，相对论动力学则研究高速运动物体的质量、动量和能量等物理量在相互作用下的变化规律。

相对论运动学

§1 狭义相对论的建立

§2 洛伦兹变换

§3 时间延缓和长度收缩

§4 洛伦兹协变矢量和洛伦兹变换不变量

§5 相对论速度合成

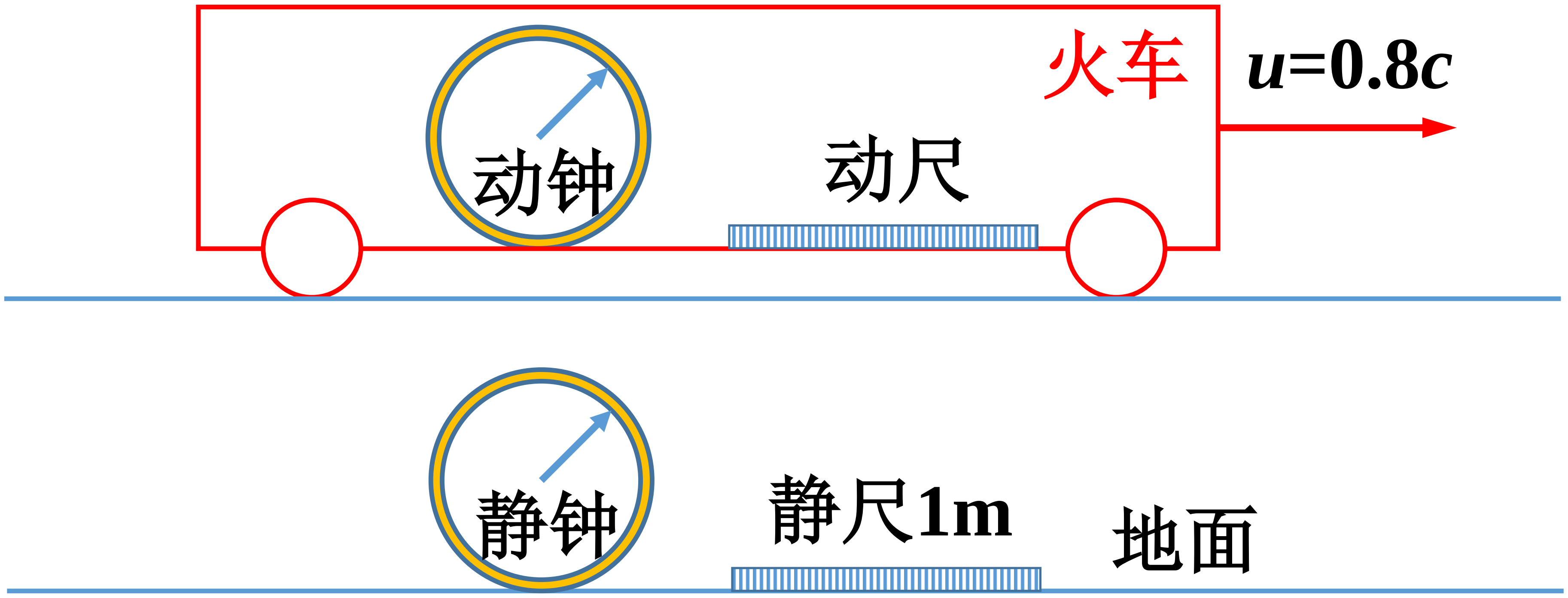
§1 狭义相对论的建立

1.1 时空变换

1.2 绝对时空观和伽利略变换

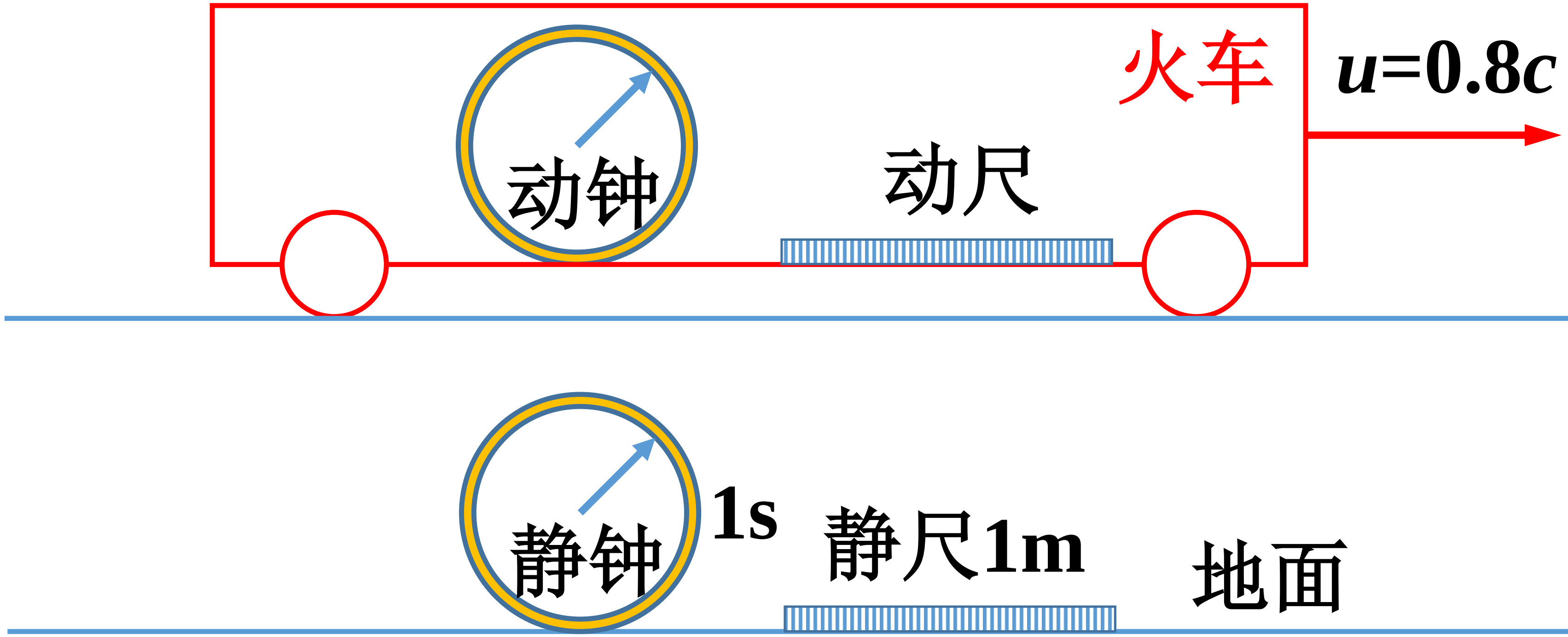
1.3 狭义相对论的基本假设

1.1 时空变换



设有一列火车在地面上作匀速直线运动，有两个结构完全相同的钟和两把完全相同的尺子。

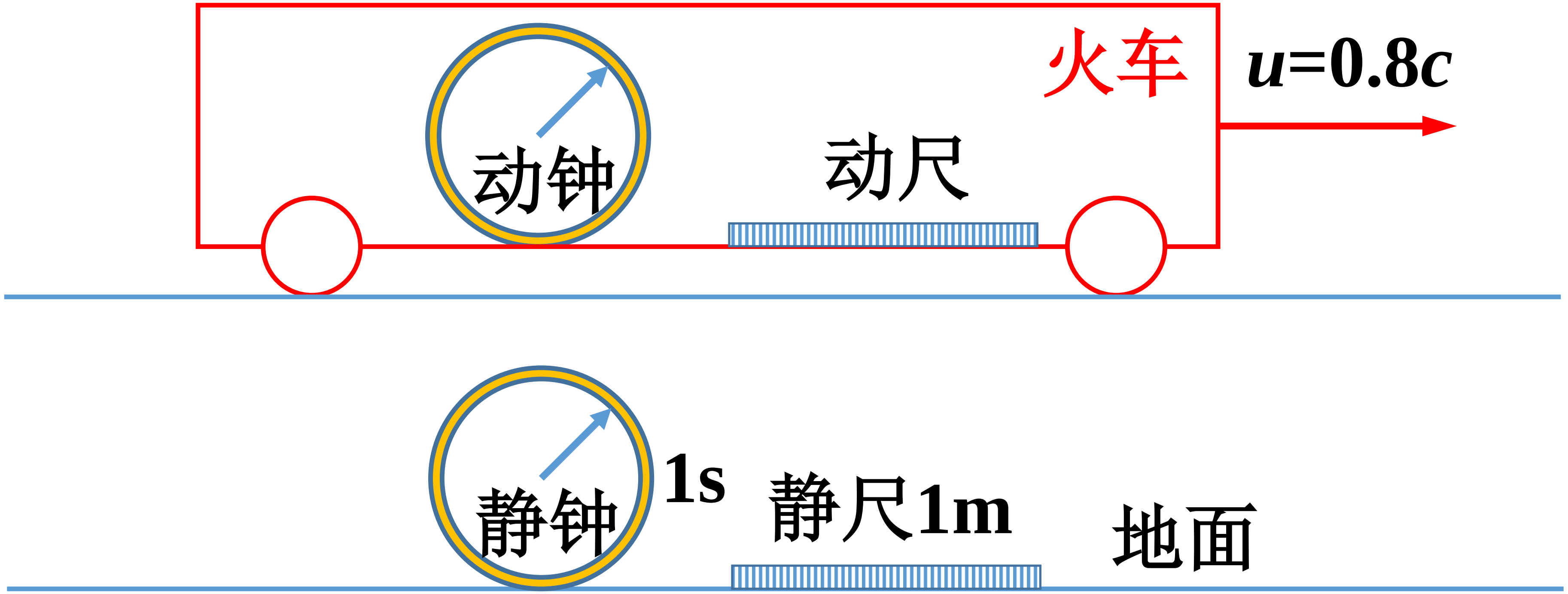
在同一个参考系中，这两个钟走得一样快，这两把尺子的长度严格相同。



现在把其中的一个钟和一把尺放在火车上（动钟、动尺）

把另一个钟和另一把尺留在地面（静钟、静尺）

两把尺沿火车运动的方向放置



问：动钟和静钟哪个走得快？动尺和静尺哪个短？

牛顿力学：动钟和静钟一样快，动尺和静尺一样长。

相对论：动钟比静钟慢（1.67s），动尺比静尺短（0.6m）。

——时间、长度的量度与参考系的关系问题

事件和时空变换

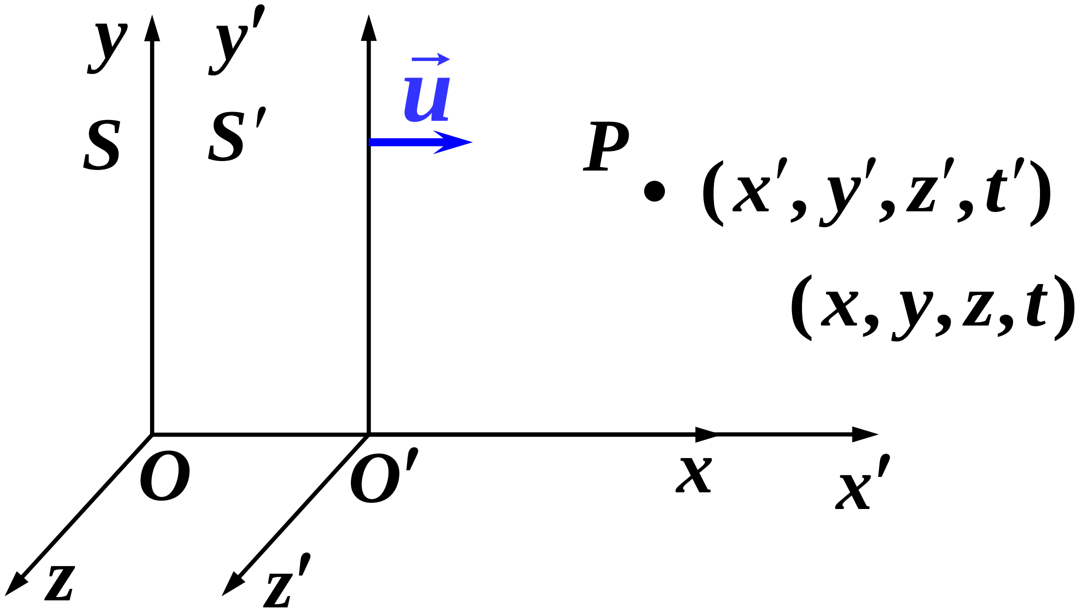
定义事件：具有确定的发生时间和发生地点的物理现象。

一个事件发生的时间和地点称为该事件的时空坐标或时空点。

例：一个闪光在某一时刻t，到达某一地点(x, y, z)就是一个事件，其中时空坐标为(x, y, z, t)

例：一个粒子在t时刻出现在（x, y, z），其时空坐标为（x, y, z, t）

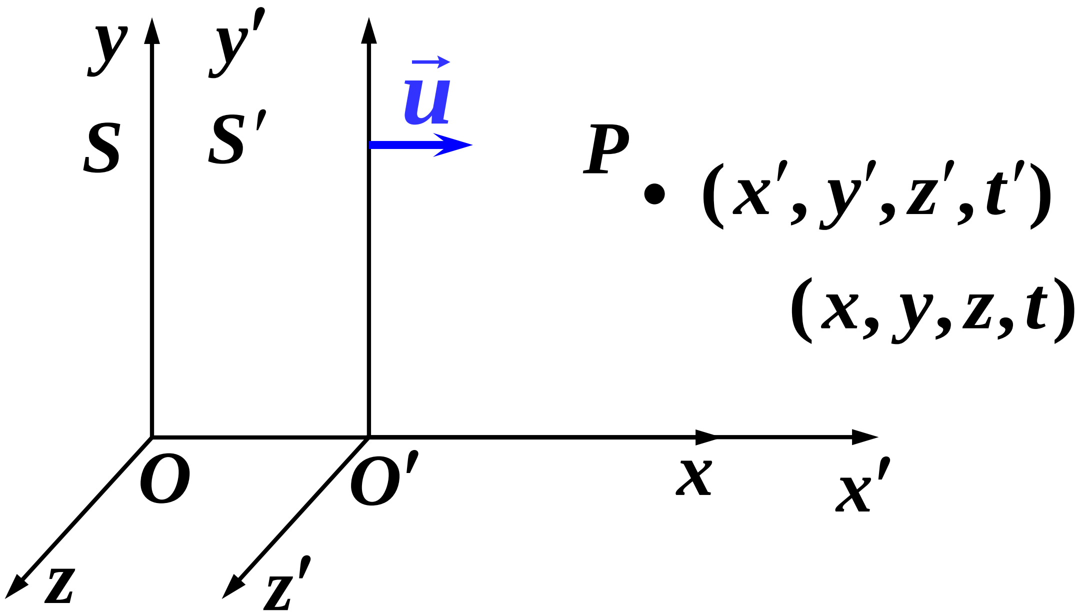
注意：讨论时空的性质时，关心的是事件的时空坐标或时空点，来代表事件，而不关心引入事件概念的具体物理现象。



时间如何表示？

定义时间的零点：

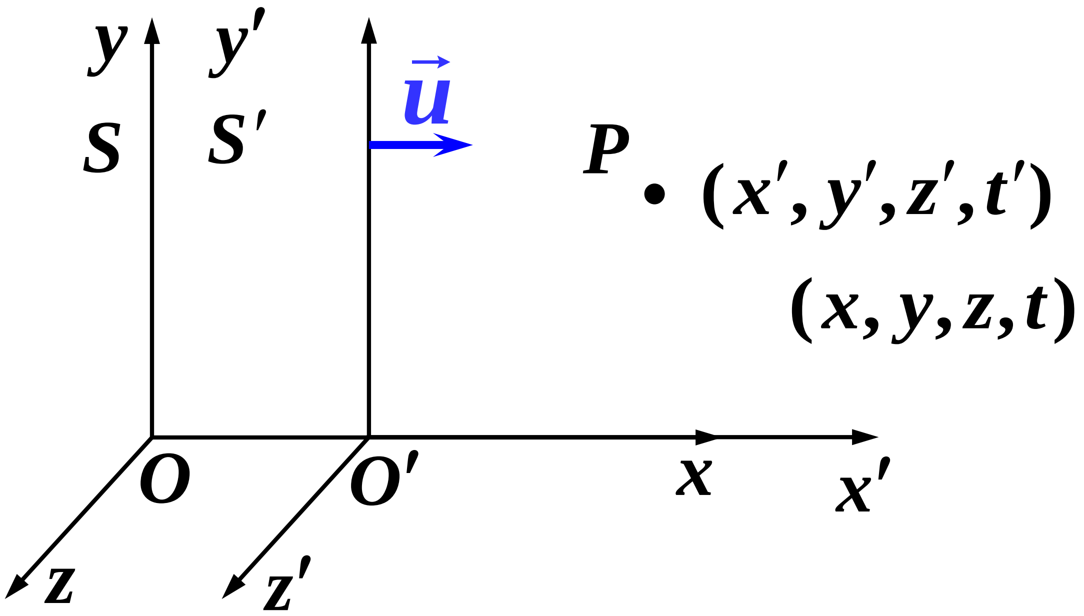
当O'和O重合时：$t'=t=0$



(0,0,0,0):事件“O’和O重合”的时空坐标

(x',y',z',t')
(x,y,z,t) ⇒ 分别为在S’系和S系中事件P与“O’和O重合”的时空坐标之差

——S’系和S系中的时间间隔，长度的测量值



定义时空变换：同一事件P在两个惯性系中的时空坐标(x,y,z,t)与(x',y',z',t')之间的变换关系。

时空坐标代表时间、长度的测量值

时空变换反映了时间、空间与参考系的关系。

1.2 绝对时空观和伽利略变换

牛顿力学认为：时间和空间是绝对的，且相互独立，即在两个作相对运动的惯性系中测量，时间间隔和长度都是相同的，与参考系的选择无关

——动钟和静钟走得一样快，动尺和静尺的长度相同。

这称为绝对时空观（低速下成立）

伽利略变换：

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

伽利略速度合成：

$$v'_x = v_x - u$$

$$v'_y = v_y$$

$$v'_z = v_z$$

在不同的惯性系S’和S中，同一质点的牛顿方程的形式是否相同？

$$\vec{f} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

质量是一个恒量，而只要是惯性系，力就与参考系无关，因此伽利略变换下，牛顿方程形式不变。

这常被表述为：牛顿方程具有伽利略变换协变性。

——对伽利略相对性原理的数学表达

1.3 狭义相对论的基本假设

1 历史背景

1864年，麦克斯韦预言光是电磁波，根据电磁学理论，光在真空中的传播速度：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\ 792\ 468\ \mathrm{m/s}$$

ε_0，μ_0：真空介电常量、真空磁导率，与参考系无关

——在任何惯性系中，光沿各个方向的传播速度都等于c。

或者说：对于描述电磁波的传播来说，所有的惯性系都是平等的。

光速不变与伽利略相对性原理相矛盾：

按照伽利略速度合成，如果在某一惯性系S中沿各个方向的光速都为*c*, 则在以速度*u*运动的惯性系S’中观测，沿运动方向的光速为*c-u*，沿反向的光速为*c+u*。

——对于描述电磁波的传播来说，S系和S’系是不平等的。

解决这一矛盾有三种可能的选择：

（1）修改电磁学，服从伽利略相对性原理。

电磁学的正确性已被实验验证，而涉及电磁波传播的高速运动，伽利略变换从未被实验检验过。

——没有理由修改电磁学

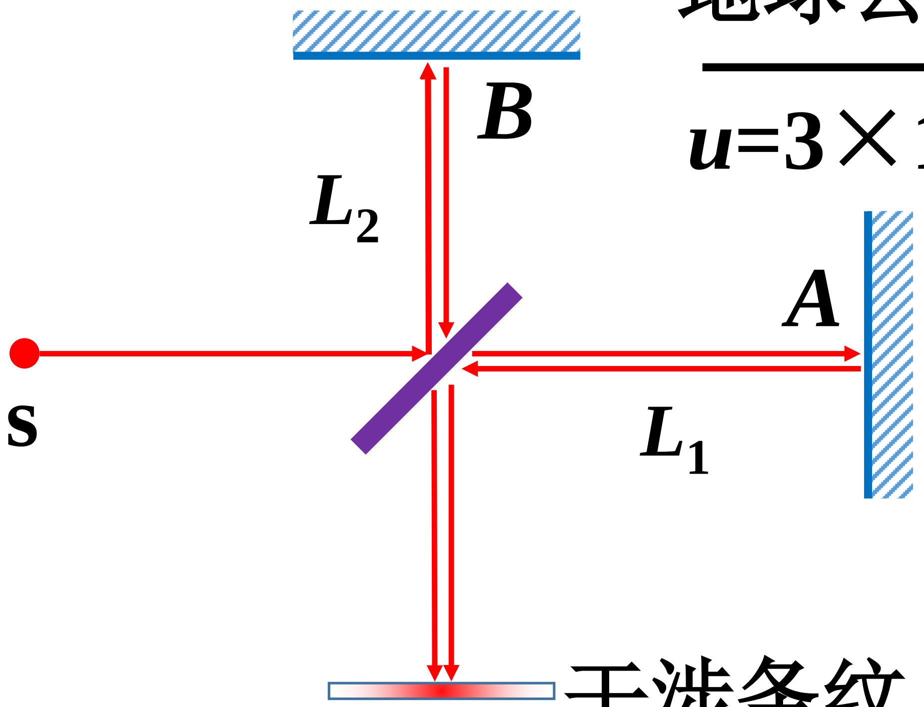
（2）放弃伽利略相对性原理，要求电磁学理论只在绝对空间（“以太”参考系）中成立。

光的“以太”假说：“以太”充满整个宇宙空间，是绝对静止的惯性系；光波是“以太”的弹性振动，在“以太”参考系中，光沿各个方向的传播速度都是c。

如果“以太”真的存在，地球要相对于“以太”运动，在地面上沿不同方向的光速就应该有差别。

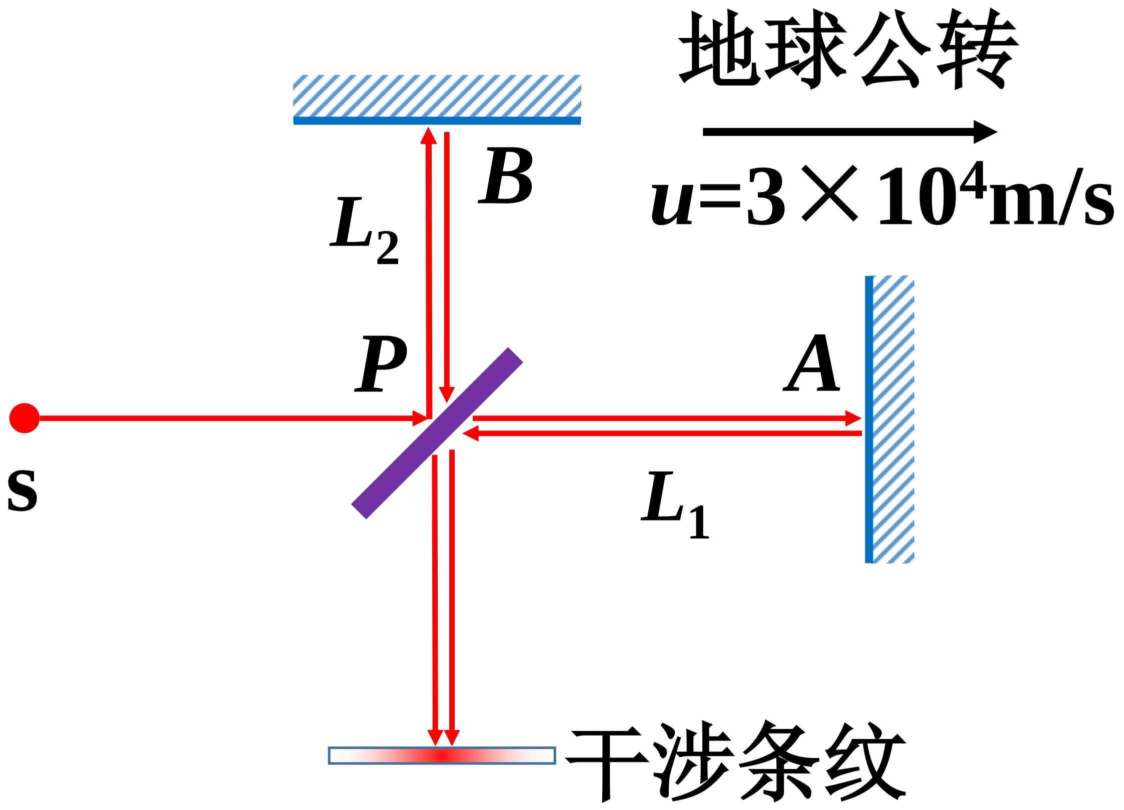
实验表明：“以太”参考系不存在。

1881-1887年，迈克耳孙和莫雷用迈克耳孙干涉仪，试图通过测量不同方向光速的差别测量地球相对“以太”的运动。



实验装置照片

干涉仪器转90°，观测干涉条纹是否移动？



按照伽利略速度合成：

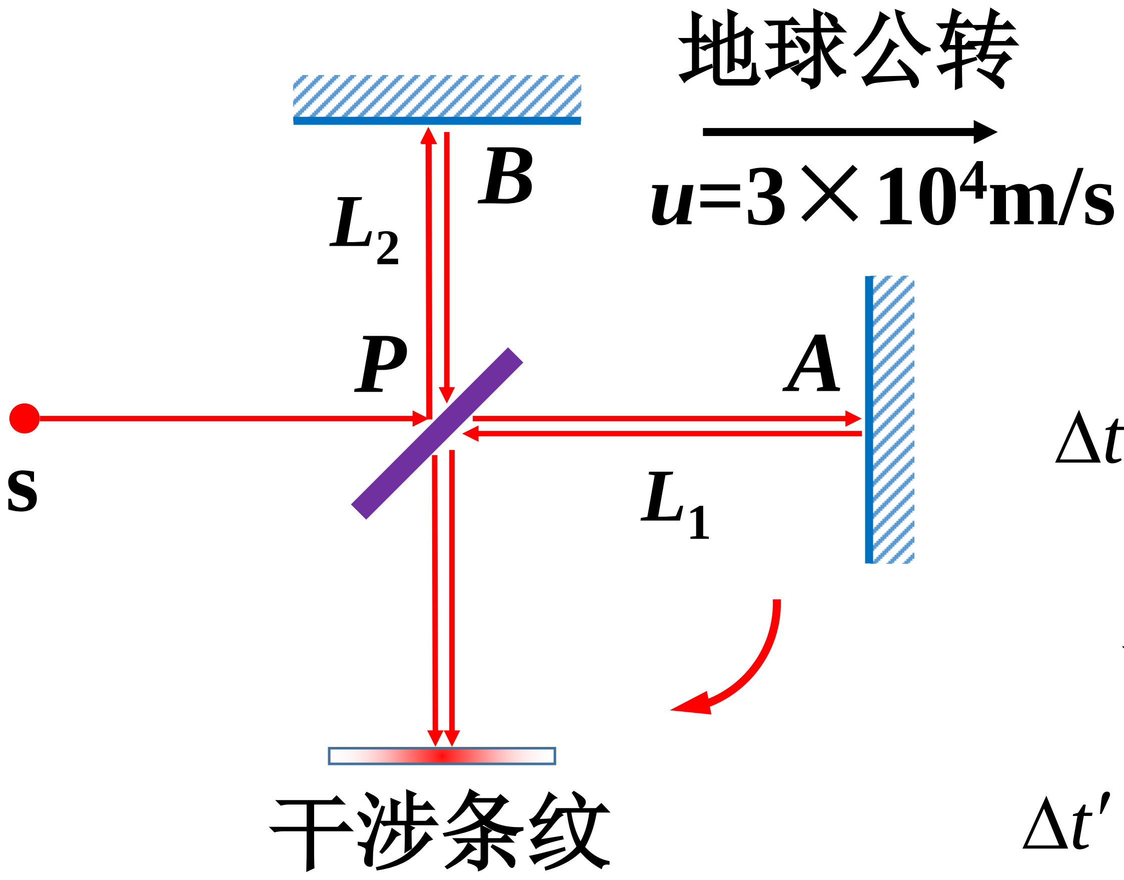
$$t_{PAP}=\frac{L_1}{c-u}+\frac{L_1}{c+u}=\frac{2L_1}{c(1-u^2/c^2)}$$

$$v_\perp=\sqrt{c^2-u^2}$$

$$t_{PBP}=\frac{2L_2}{\sqrt{c^2-u^2}}=\frac{2L_2}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Delta t=t_{PBP}-t_{PAP}=\frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-\frac{L_1}{1-u^2/c^2}\right)$$

干涉仪转90°，如果Δt发生变化，干涉条纹移动



两条相干光的时间差：

$$\Delta t = t_{PBP} - t_{PAP} = \frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{L_1}{1-u^2/c^2}\right)$$

干涉仪转90°，时间差变为：

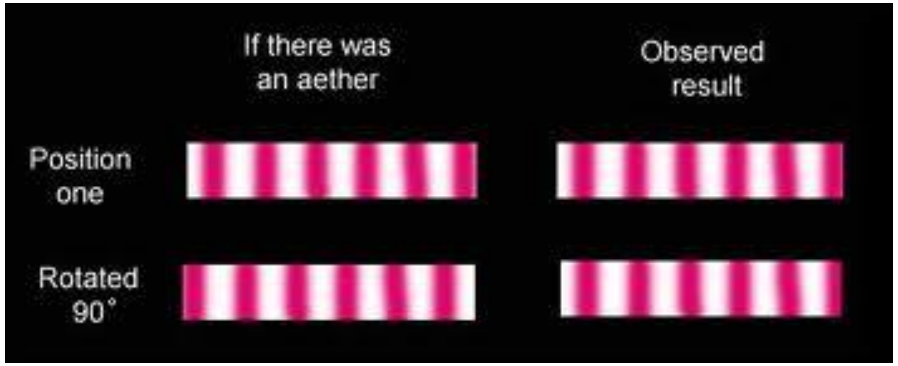
$$\Delta t' = t'_{PBP} - t'_{PAP} = \frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{1-u^2/c^2} - \frac{L_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

干涉仪转90°，时间差的变化： $\Delta t-\Delta t'\approx\dfrac{L_1+L_2}{c}\dfrac{u^2}{c^2}$

引起干涉条纹的移动数： $\Delta N=\dfrac{c\left(\Delta t-\Delta t'\right)}{\lambda}=\dfrac{L_1+L_2}{\lambda}\dfrac{u^2}{c^2}$

带入数据：$L_1+L_2=22$ m, $u=3\times10^4$ m/s, $\lambda=589$ nm

$\Delta N=0.40$



实验结果：条纹无移动

这表明：在地面上沿不同方向的光速相等，“以太”参考系不存在。

1964 年，对速度为 0.99975*c* 的 π^0衰变发射γ射线进行测量：

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

沿 π^0 介子（光源）向运动前方和后方发射光子的速度，都与光速 c 极其一致！

(Phys. Lett., T. Alvager at al., 12, 260(1964))

历史上大量的实验结果表明：

光速与光源的运动无关。

(3)爱因斯坦的作法：

把伽利略相对性原理加以推广，让电磁学理论服从推广后的相对性原理。

他坚信相对性原理是自然界普遍规律的表现——揭示了同时性具有相对性。

在1905年发表的题为《论动体的电动力学》的论文中，提出狭义相对论的两条基本假设：爱因斯坦相对性原理、光速不变原理，创建了狭义相对论。

2. 爱因斯坦相对性原理

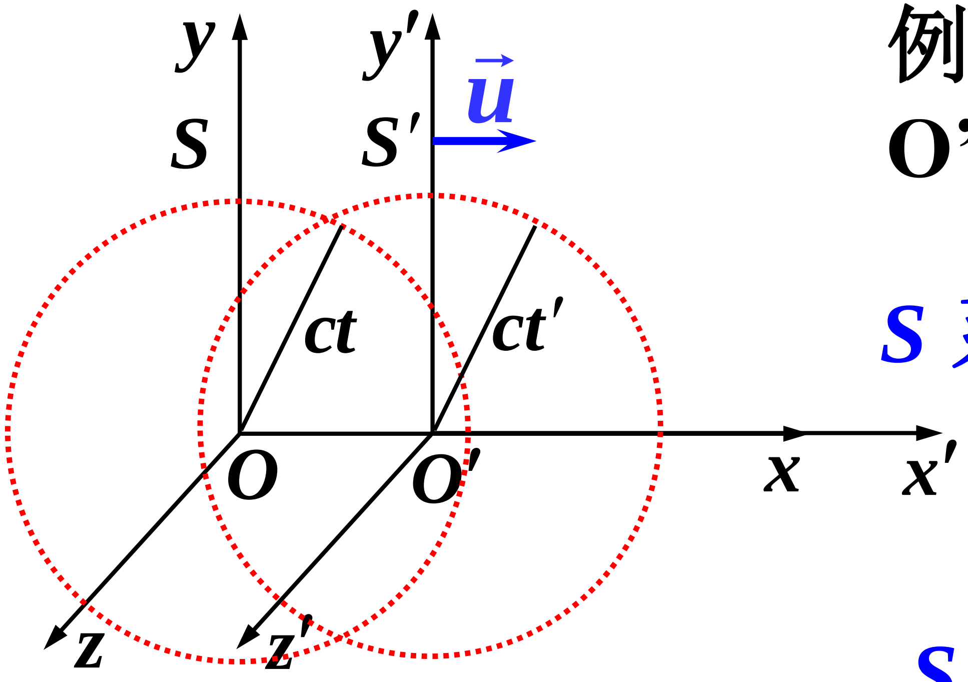
对于描述物理定律（包括力学定律）来说，所有的惯性参考系都是平等的，不存在特殊的绝对惯性系。或者说物理规律（包括力学规律）在所有惯性系中具有相同形式。

实际上，1904年法国物理学家庞加莱（L.H.Poincare）就提出了相对性原理。

但是他下不了决心放弃光的“以太”假说，认为运动物体长度的收缩是实际的收缩，而没有认识到这是不同惯性系之间进行时间测量的结果。

3. 光速不变原理

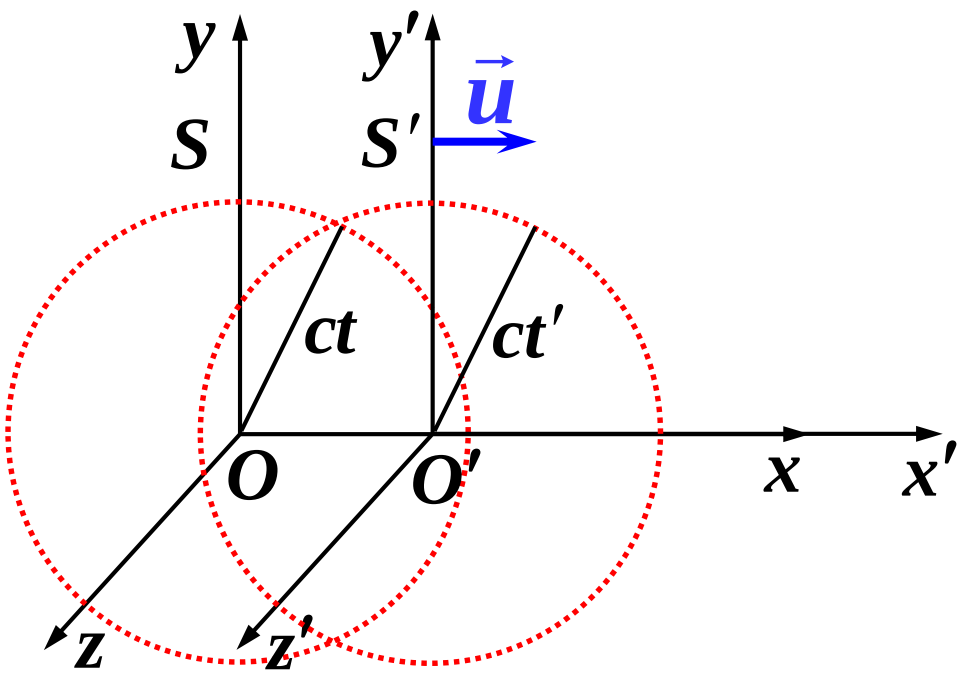
在所有惯性系中，光在真空中传播的速度都等于 c。或者说，无论光源和观察者如何运动，观察者测得的光速都等于c。



例如，设想当原点O’和O重合时，由O’(O)点发出一个闪光：

S 系： 光速与光源运动无关，闪光的波前是球面，球心是 O 点，半径为 ct 。

S′系: 闪光的波前是球面，球心是 O'点，半径为 ct'。



描述闪光波前的方程：

$$S:\quad x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

$$S':\quad x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

— 体现光速不变原理

1983年，国际上规定：

光速： c=299 792 458 m/s

1米：光在真空中1/299 792 458秒内所经距离。

引导爱因斯坦提出光速不变原理和创建狭义相对论的基本线索是电磁学，而迈克耳孙-莫雷实验的否定结果不占主导地位。

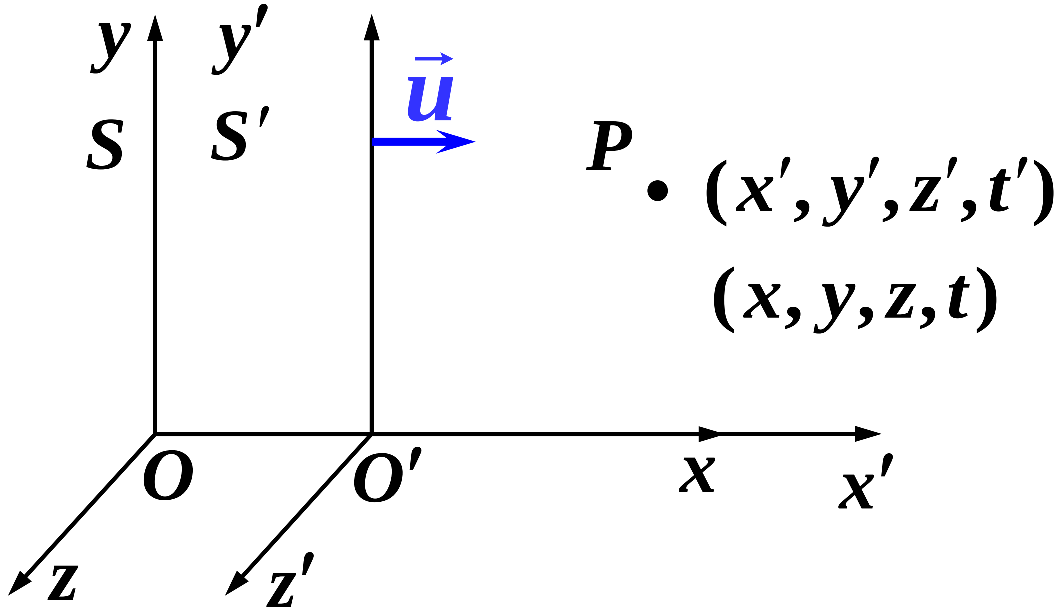
但是爱因斯坦高度评价了迈克耳孙-莫雷实验的科学意义：“还在学生时代，我就在想这个问题了。我知道迈克耳逊实验的奇怪结果。我很快得出结论：如果我们承认麦克尔逊的零结果是事实，那么地球相对以太运动的想法就是错误的。这是引导我走向狭义相对论的最早的想法。”

参考《物理学史（第二版）》郭亦玲、沈慧君，清华大学出版社。

2 洛伦兹变换

1904年，洛伦兹以在“以太”为前提，得到：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$



$u/c \to 0$ ——回到伽利略变换

从爱因斯坦提出的两条基本原理出发，可以简单推导出洛伦兹变换：

伽利略变换：

$x' = x - ut$ ？

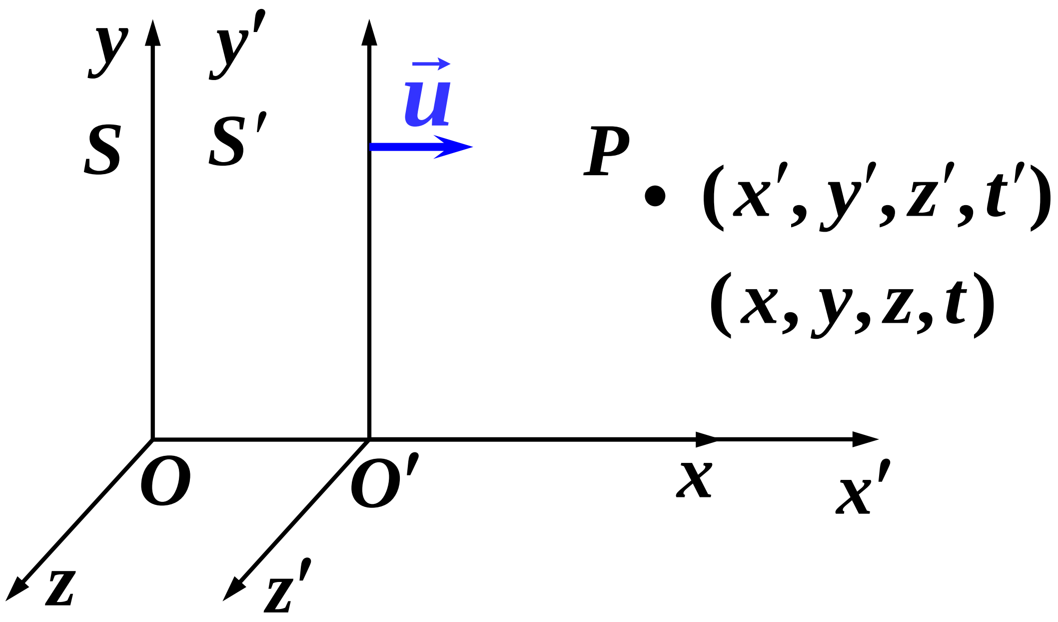
$y' = y$ √

$z' = z$ √

$t' = t$ ？

只需要推导：

（**x, t**）与（**x', t'**）之间的变换关系



伽利略变换

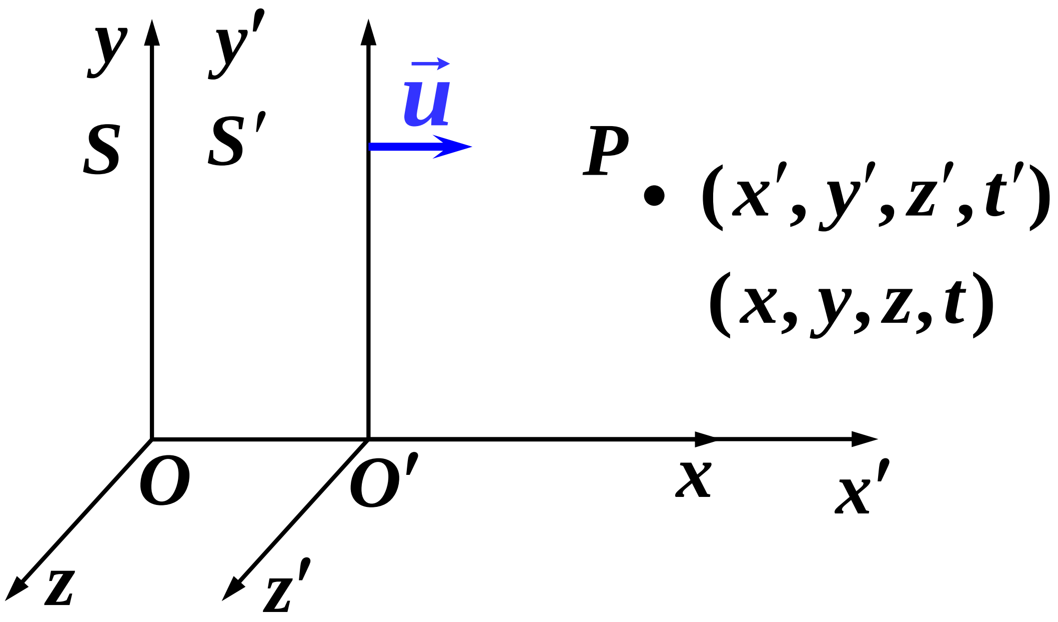
$$x' = x - ut$$

注意：（*x-ut*）是同一参考系*S*中长度的合成，只能整体地随*u*变化，所以新变换可以表示为：

$$x' = \gamma'(x - ut)$$

$$x = \gamma(x' + ut')$$

γ', γ ——待定参量



根据爱因斯坦相对性原理： $\gamma' = \gamma$

新的变换可简单地写成：

$$x' = \gamma(x - ut)$$

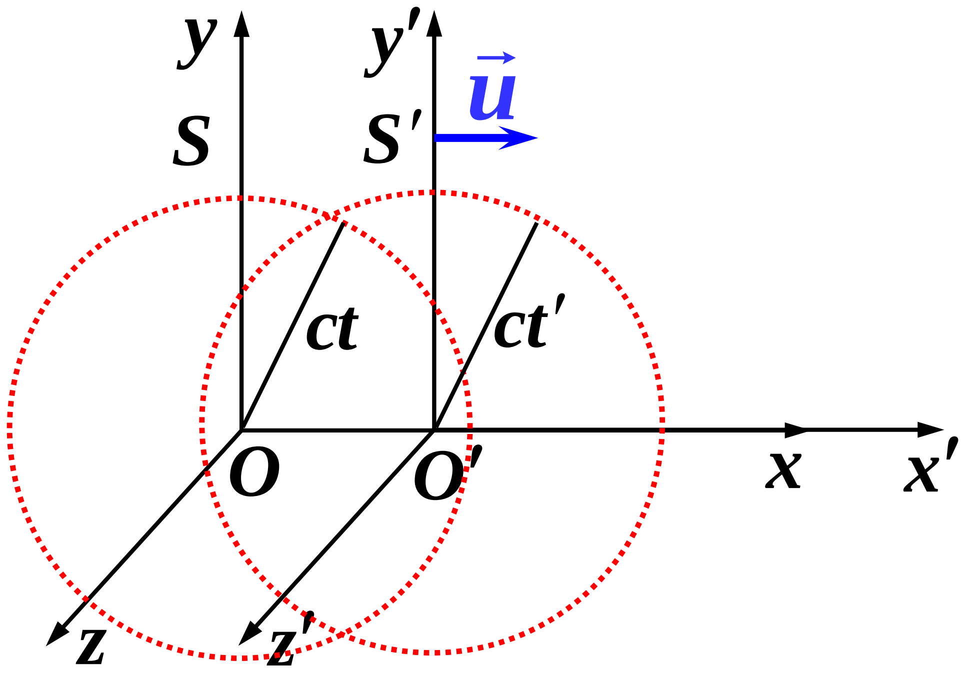
$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$x = \gamma(x' + ut')$$

参数 γ 可以用光速不变原理确定：

设想当原点O’和O重合时，由O’（O）点发出一个闪光。在O’， O系中，闪光到达地点的x’(x)轴坐标：



$$x' = ct'$$

$$x = ct$$

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$x = \gamma(x' + ut')$$

把 $x' = ct'$，$x = ct$，带入，得

$$ct' = \gamma(\mathrm{c} - u)t$$

$$ct = \gamma(c + u)t'$$

可得：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

思考：为什么只取正值？

为使γ有意义，***u***不能达到光速，即实际物体不能达到光速。

推导时间t’与t之间的变换关系：

$$x=\gamma(x'+ut') \Rightarrow t'=\frac{1}{u}(\frac{x}{\gamma}-x')$$

把 $x'=\gamma(x-ut)$ 代入，得

$$t'=\frac{1}{u}(\frac{x}{\gamma}-\gamma(x-ut))=\frac{\gamma}{u}((\frac{1}{\gamma^2}-1)x+ut)$$

$1/\gamma^2=(1-u^2/c^2)$ 代入，得：

$$t'=\gamma(t-\frac{u}{c^2}x)$$

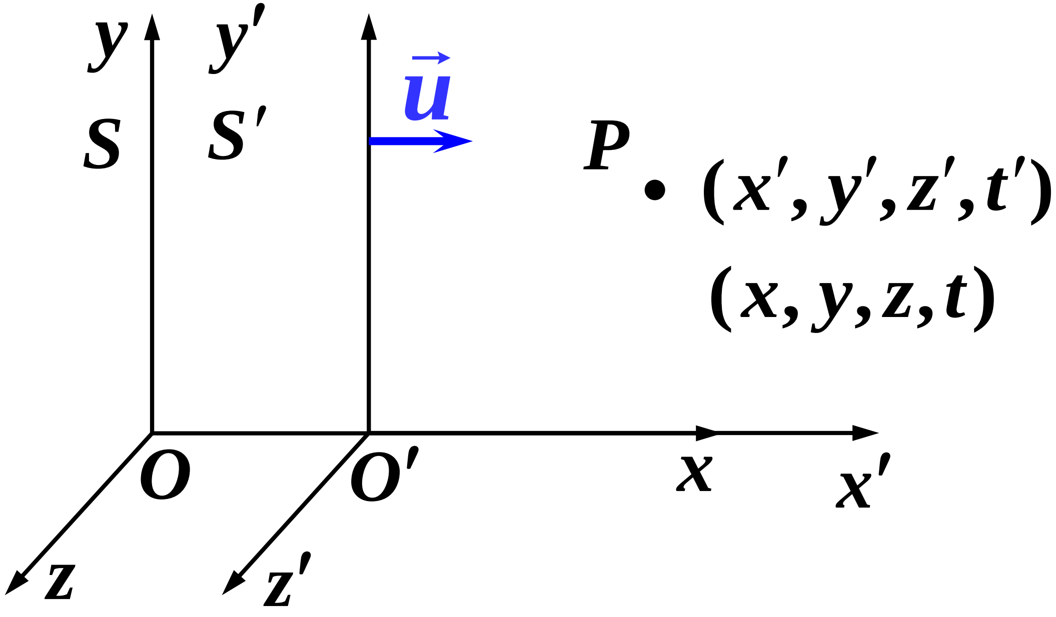
洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$



思考：对任意两个事件如何表达？

逆变换

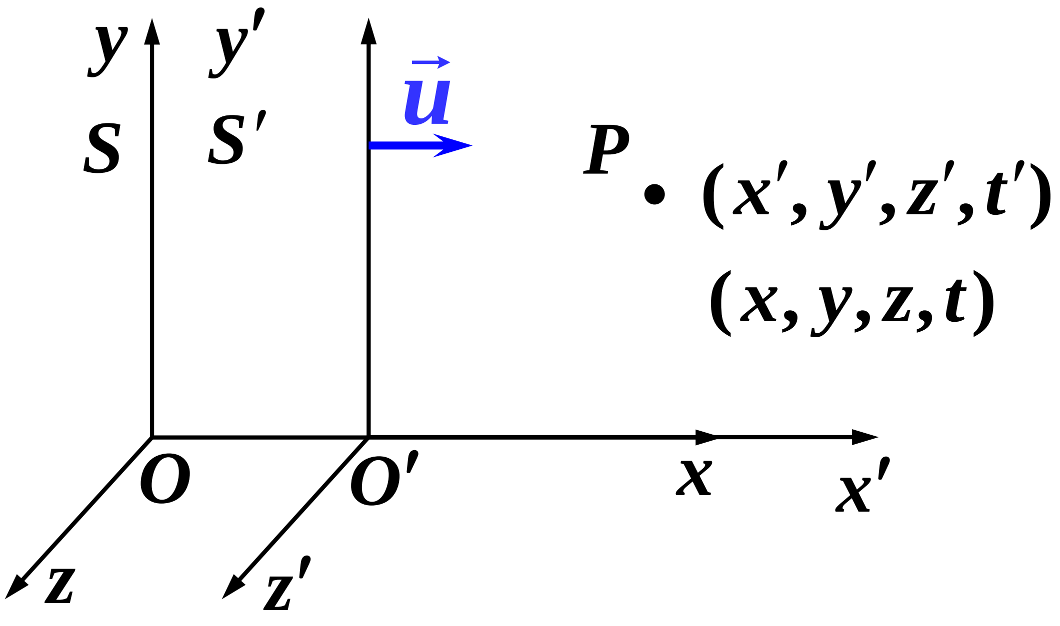
$$u \rightarrow -u$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$



例题：一宇宙飞船从地面以0.8c的速度飞行，飞船上的观测者测得飞船的长度为100m。一光脉冲从船尾传到船头，求地面上的观察者测量，光脉冲“从船尾发出”和“到达船头”这两个事件的空间间隔是多少？

解 只涉及时空变换的问题称为运动学问题，一般按以下步骤求解：

（1）设定参考系

飞船：S’系；地面：S系。

（2）定义事件及其时空坐标

事件1：光脉冲从船尾出发。在S’系、S系中时空坐标记为：

$$(x_1', t_1') \quad (x_1, t_1)$$

事件2：光脉冲到达船头。在S’系、S系中时空坐标记为：

$$(x_2', t_2') \quad (x_2, t_2)$$

（3）洛伦兹变换，求两事件在S系中的空间间隔

已知：$x_2' - x_1' = 100\text{m} \qquad t_2' - t_1' = (x_2' - x_1') / c$

$$x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + u(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = \frac{100 + 0.8 \times 100}{\sqrt{1 - 0.8^2}}\text{m=300m}$$

§3 时间延缓和长度收缩

3.1 同时性的相对性

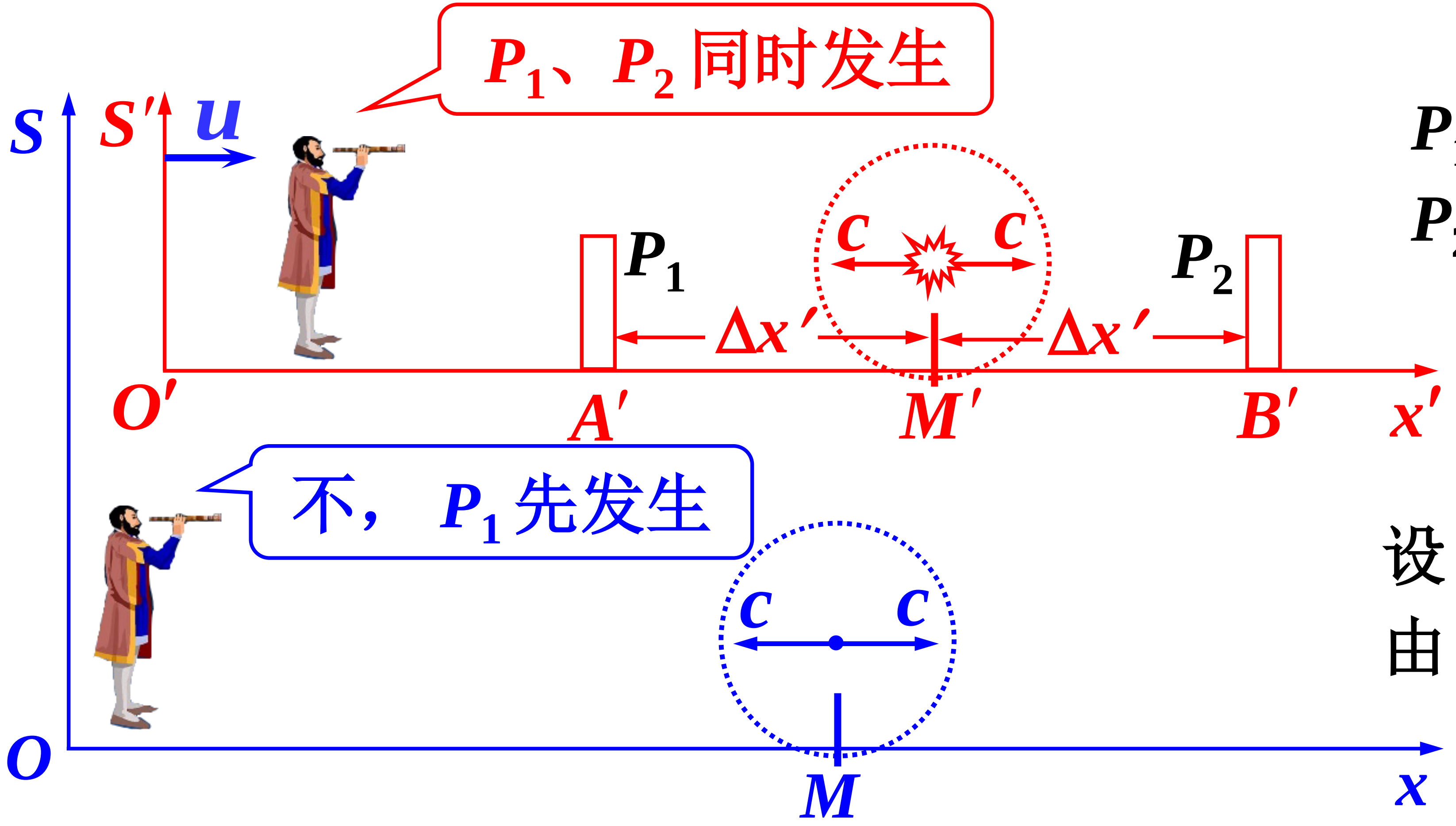
3.2 时间延缓

3.3 长度收缩

3.1 同时性的相对性

如果两个事件在某一惯性系中同时发生，那么在任何其它作相对运动的惯性系中观测，这两个事件还能同时发生吗？

或者问：同时性是绝对的，还是相对的？



P_1：光到达 A'

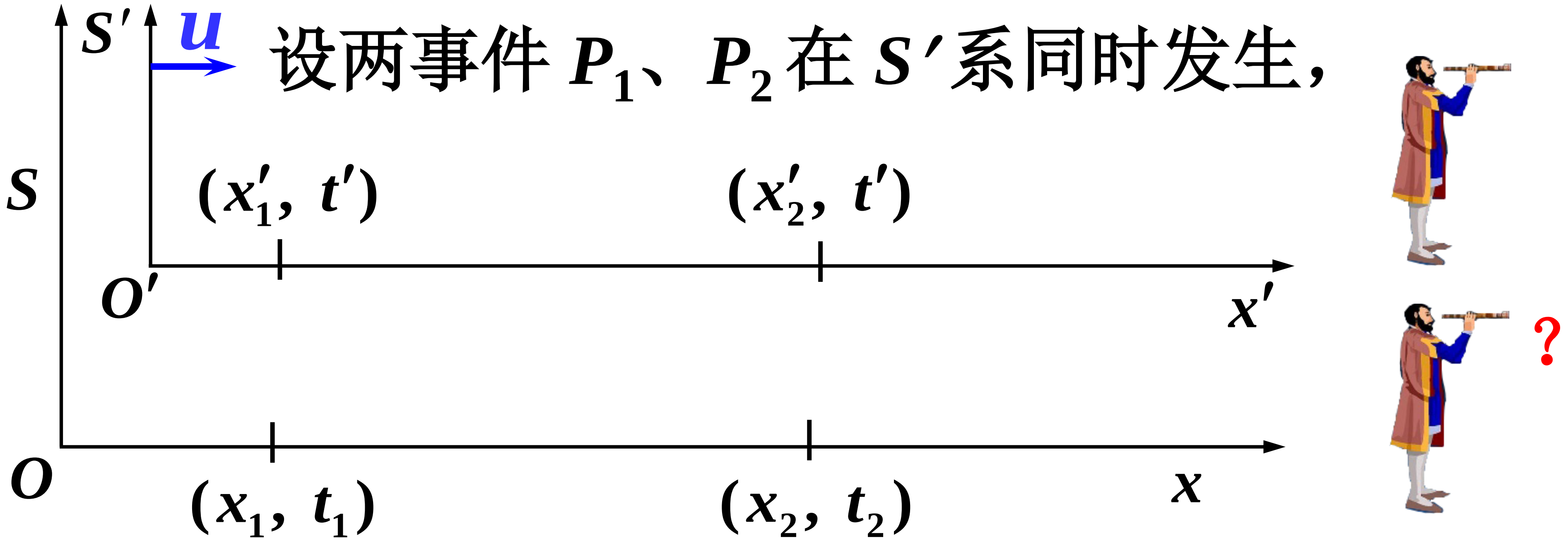
P_2：光到达 B'

设 M'、M 重合时

由 M' 发出闪光

用洛伦兹变换证明同时性的相对性：

设两事件 P_1、P_2 在 S' 系同时发生，



在 S 系中观测，还能同时发生吗？ $t_1 = t_2$ 吗？

$$t_2 - t_1 = \frac{(t' - t') + \dfrac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = \frac{\dfrac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

在S'系运动后方的事件先发生。

同时性的相对性

在两个惯性系相对运动的方向上发生的两个事件，若在一个惯性系中这两个事件同时发生，则在另一惯性系中观测，总是处于前一惯性系运动后方的事件先发生。

当 $u \ll c$ 时：

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \approx 0$$

——牛顿力学认为同时性是“绝对”的。

同时性的相对性是相对论中关键性、革命性的思想。洛伦兹首先导出洛伦兹变换，相对性原理也是由庞加莱首先提出的，但是他们都没有认识同时性是相对的。

他们都走近了相对论，却没有创立相对论。只有26岁的爱因斯坦敢于质疑人们关于时间的原始观念，坚持同时性是相对的，才能完成这一历史重任。

——参考杨振宁先生的讲演：“爱因斯坦：机遇与眼光”

3.2 时间延缓

同时性是相对的，对两个相对运动的惯性系来说，沿相对运动方向发生的两个事件之间的时间间隔不同

——时间的度量是相对的

S'系：同一地点 x'处，先后发生的两个事件 (x',t_1') 和 (x',t_2') 的时间间隔：

$$\Delta t' = t_2' - t_1' > 0$$

S 系：一定不同地发生，观测的时间间隔：

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \dfrac{u}{c^2}(x' - x')}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} > \Delta t'$$

——时间延缓效应

时间延缓效应

在一个惯性系中观测，在另一个作匀速直线运动的惯性系中同地发生的两个事件的时间间隔变大。

原时（固有时）：在某一参考系中，同一地点先后发生的两个事件的时间间隔，用$\Delta\tau$代表。

在其他任何运动惯性系观测，这两个事件的时间间隔：

$$\Delta t=\frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow \Delta t>\Delta\tau\text{（原时）}$$

“原时最短”——对时间延缓的另一种说法

“原时最短”：可以同地发生的两个事件的时间间隔，在它们同地发生的惯性系中最短。

在涉及某个参考系中两个同地发生的事件的问题中，一般应先确定哪个是原时。

例：设有静止的许多已经校准的同步钟（静钟），他们的指针走一格所用的时间都为1s。如果让其中的一个钟以 $u = 0.8c$ 的速度相对静止的观测者运动，那么在静止的观测者看来这个运动的钟（动钟）的指针走一格用多少时间？

解 事件1：　钟的秒针刚开始转一个格

事件2：　秒针转完一个格

在相对钟静止的参考系中，事件1,2同地发生，时间间隔1s为原时。

静止观察者观测，时间间隔：

$$\Delta t = 1\text{s} / \sqrt{1-0.8^2} = 1.67\text{s}$$

在静止观测者看来，动钟的指针转一个格所用的时间，比本参考系中静钟指针转一个格所用的时间要长**0.67s**。

或者说：“动钟比静钟走得慢”

这纯属时空的性质，而不是钟的结构发生了变化。动钟和静钟的结构完全相同，放在一起时它们走得一样快。

在一个惯性系中观测，在另一个运动惯性系中同一地点发生的任何过程（包括物理、化学和生命的过程）的节奏要变慢。

孪生子佯谬

有一对孪生兄弟，哥哥告别弟弟乘宇宙飞船去太空旅行。根据时间延缓效应，地球上的弟弟认为哥哥比自己年轻，飞船上的哥哥认为弟弟比自己年轻。

假如飞船返回地球兄弟相见，到底谁年轻就成难以回答的问题。

问题关键：时间延缓效应是狭义相对论结果，要求飞船和地球同为惯性系。

要想保持飞船和地球同为惯性系，兄弟就只能永别，不可能再见面比较谁年轻，这就是孪生子佯谬。

孪生子效应

若飞船返回地球，在往返过程中有加速度，飞船就不是惯性系。这一问题的严格求解要用广义相对论，计算结果：兄弟相见时哥哥比弟弟年轻。这种现象被称为孪生子效应。

1971年美国空军用两组 Cs（铯）原子钟绕地球一周做实验，发现运动钟变慢 203±10ns，而广义相对论预言变慢 184±23ns，二者在误差范围内一致，验证了孪生子效应。

例：在大气上层存在大量的称为μ子的基本粒子，μ子不稳定，在相对其静止的参考系中平均经过2.2×10^{-6}s就自发地衰变成电子和中微子，这一时间称为μ子的固有寿命。尽管μ子的速率高达0.998c，但按其固有寿命计算它从产生到衰变只能平均走650m的路程。一般产生μ子的高空离地面8000m左右，为什么地面上可以检测到μ子？

解：两个事件：μ子的产生和衰变

在μ子参考系中，这两个事件同地发生

固有寿命 $\tau = 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ ——原时

在地面上观测，**μ**子的寿命：

$$t=\frac{\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{2.2\times10^{-6}\mathrm{s}}{\sqrt{1-0.998^2}}=3.4\times10^{-5}\mathrm{s}$$

为固有寿命的**16**倍，**μ**子衰变前平均走得路程：

$$\Delta l=0.998c\times3.4\times10^{-5}\mathrm{s}\approx10000\mathrm{m}>8000\mathrm{m}$$

因此，**μ**子可以达到地面

3.3 长度收缩

测量静止物体长度（S'系）：测出物体两端坐标，差值$\Delta x'$就是物体的长度（静长度）

——对测量的先后次序没有要求，可以不同时测量物体两端坐标，t_1' 可以不等于t_2' 。

测量运动物体长度（S 系）：只有同时测定两端坐标，$t_1 = t_2$ 差值 Δx 就是物体的长度（测长）

把测量物体的两端坐标，定义为两个事件：

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow \Delta x < \Delta x'$$

（测长）（静长）

——长度收缩效应（尺缩效应）

长度收缩效应

在惯性系中观测，运动物体在其运动方向上的长度要缩短。

测量物体两端坐标这两个事件

⇨ 推广到任意两个可以同时发生的事件

测长：在某一惯性系中同时发生的两个事件的空间间隔，记为 Δl（测长）。

由同时性的相对性可知，在其他任何沿测长方向作相对运动的惯性系中，这两个事件一定不能同时发生，空间间隔记为$\Delta l'$。

洛伦兹变换：$\Delta l = \Delta l' \sqrt{1-u^2/c^2}$ ⇨ Δl (测长) $< \Delta l'$

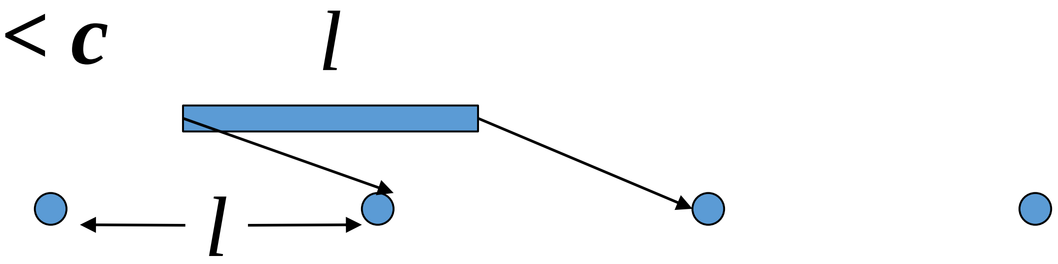
“测长最短”——对长度收缩的更普遍的说法

"测长最短"：可以同时发生的两个事件的空间间隔，在它们同时发生的惯性系中最短。

在涉及某个参考系中两个同时发生的事件的问题中，一般应先确定哪个是测长。

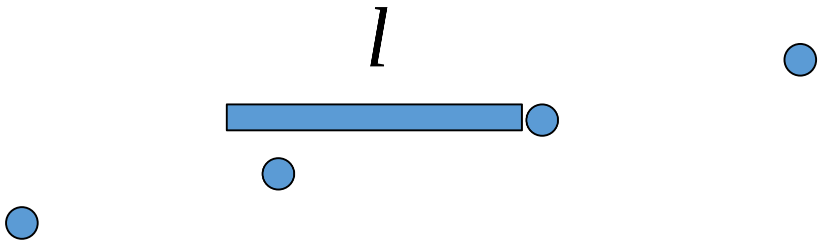
- 长度收缩与同时性的相对性有关，是不同惯性系之间进行时间测量的结果。
- 长度收缩只发生在物体运动的方向上，在垂直方向上不收缩。——纵向收缩，横向不收缩。
- 长度收缩纯属时空性质，与在热胀冷缩现象中所发生的实际的收缩和膨胀是完全不同的。

思考题：$v_y << c$



问高速运动的刚性杆能否穿过？

如何在杆子所在的参考系看？



**4 洛伦兹协变矢量和洛伦兹变换不变量

4.1 洛伦兹协变矢量

设 $\beta = \dfrac{u}{c}$ ，则 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x-\beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned}}$$

把时间乘上常数ic，洛伦兹变换：

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - \beta ct) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - \beta ct) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
\mathrm{i}ct' &= \gamma(\mathrm{i}ct - \mathrm{i}\beta x)
\end{aligned}
$$

简洁形式：

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \mathrm{i}ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathrm{i}ct \end{bmatrix}
$$

洛伦兹变换矩阵

洛伦兹变换矩阵是正交矩阵

证明：

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = I$$

转置矩阵

洛伦兹协变矢量：

在两个相对作匀速直线运动的惯性参考系之间，满足洛伦兹变换的矢量，称为洛伦兹协变矢量，或称为四维矢量、四矢量。

洛伦兹协变矢量满足：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

S'系　　　　　　　　　　S 系

例如，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathrm{i}ct \end{bmatrix}$ 就是一个洛伦兹协变矢量。

4.2 洛伦兹变换不变量

在洛伦兹变换下不改变，称为洛伦兹变换不变量，简称不变量。

洛伦兹协变矢量（四矢量）的分量的平方和，是洛伦兹换不变量。

例如：事件时空坐标的分量的平方和，是洛伦兹变换不变量：

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

S' 系　　　　S 系

证明：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

S'系　　　　　　　　S 系

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = [x_1', x_2', x_3', x_4'][x_1', x_2', x_3', x_4']^T$$

$$= [x_1, x_2, x_3, x_4] \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}}_{\text{“1”}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

两个事件的“间隔”是不变量

事件1: (x_1, y_1, z_1, ict_1)， 事件2: (x_2, y_2, z_2, ict_2)。

事件1、2的“间隔”：

$$\Delta S^2 = -\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (\mathrm{i}ct_1 - \mathrm{i}ct_2)^2\right]$$

$$= c^2(t_1 - t_2)^2 - \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right]$$

$$= c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$$

S'系　S系

“间隔”： $\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$　“间隔”是不变量： $\Delta S'^2 = \Delta S^2$

两个事件的“间隔”为什么是不变量？

因为 $\left[(x_1 - x_2), (y_1 - y_2), (y_1 - y_2), (\mathrm{i}ct - \mathrm{i}ct)\right]$

是一个洛伦兹协变量。

几种特殊情况下的间隔

（1）同地相继发生的两事件的间隔：

$$\Delta S^2 = c^2\Delta\tau^2 - \Delta r^2 = c^2\Delta\tau^2$$

$\boxed{\text{原时}\,\Delta\tau\,\text{是不变量}}$

（2）异地同时发生的两事件的间隔：

$$\Delta S^2 = -(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = -\Delta r^2$$

（3）用光信号联系的两事件的间隔等于零

$$\Delta S^2 = 0$$

8.5 相对论速度合成

速度的定义：

$$v'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}, v'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}, v'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

对洛伦兹变换关于 t' 和 t 求导，可得速度合成。

相对论速度合成

（课下推导）

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}$$

$$v_y' = \frac{v_y}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}\sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

$$v_z' = \frac{v_z}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}\sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

如果在 S 系中物体的横向速度为零，沿 x 轴方向的速度为 v，则在 S' 系中观测，物体横向的速度也为零，而沿轴方向的速度：

$$\boxed{v' = \frac{v-u}{1-\dfrac{uv}{c^2}}}$$

伽利略速度合成：

$$v' = v - u$$

$$u \Rightarrow -u$$

逆变换

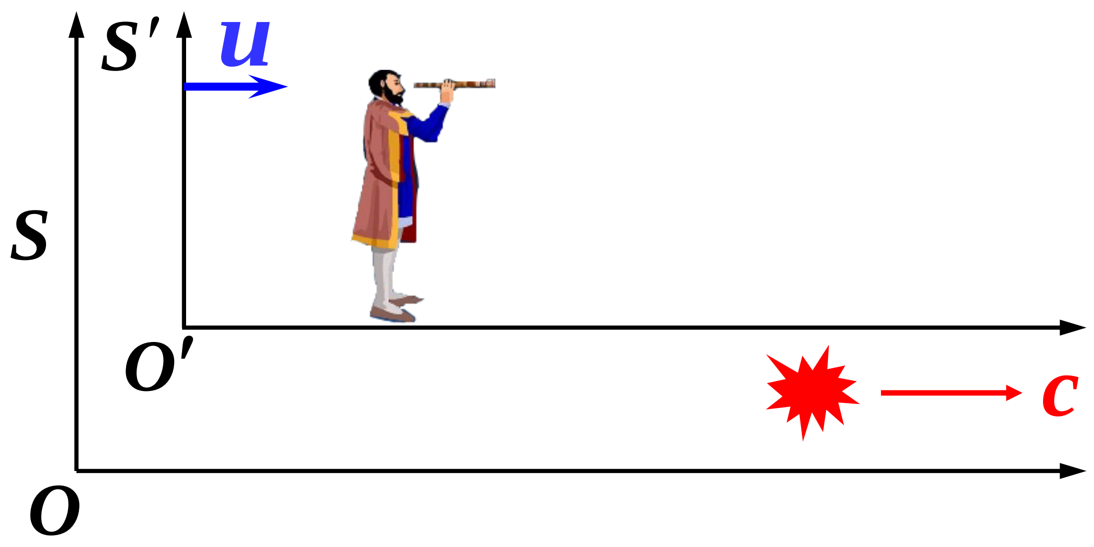
$$\boxed{v = \frac{v'+u}{1+\dfrac{uv'}{c^2}}}$$

伽利略速度合成：

$$v = v' + u$$

例：“追光实验”：乘一列以速度 u 运动的火车追赶一个向前运动的闪光。在火车上观测，闪光的速度多大？

解：以火车为 S' 系，
地面为 S 系。



在火车上观测，闪光的速度：

$$v' = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}} = \frac{c-u}{1-\frac{uc}{c^2}} = c$$

——仍等于光速 c，与参考系的运动无关。

例：一艘宇宙飞船以**0.9*c***的速度离开地球，在飞船上向前发射一枚导弹。若导弹相对飞船的速度也为**0.9*c***，求该导弹相对地球的速度。

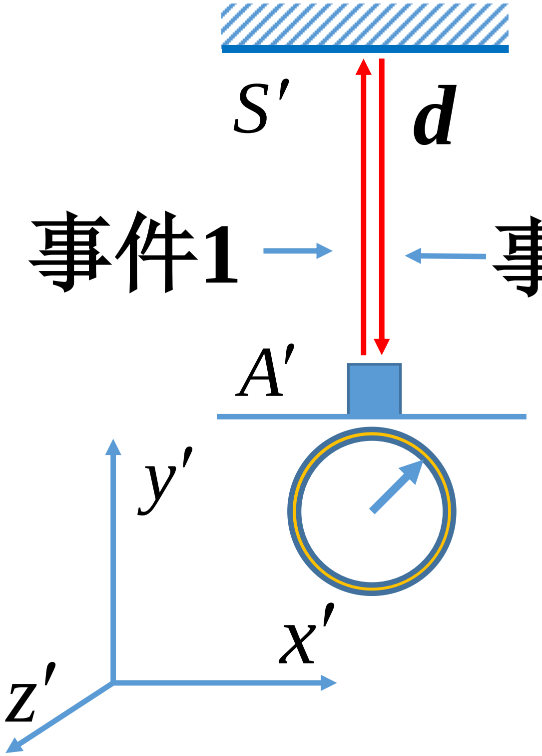
解 以地球为S系，飞船为 S'系。

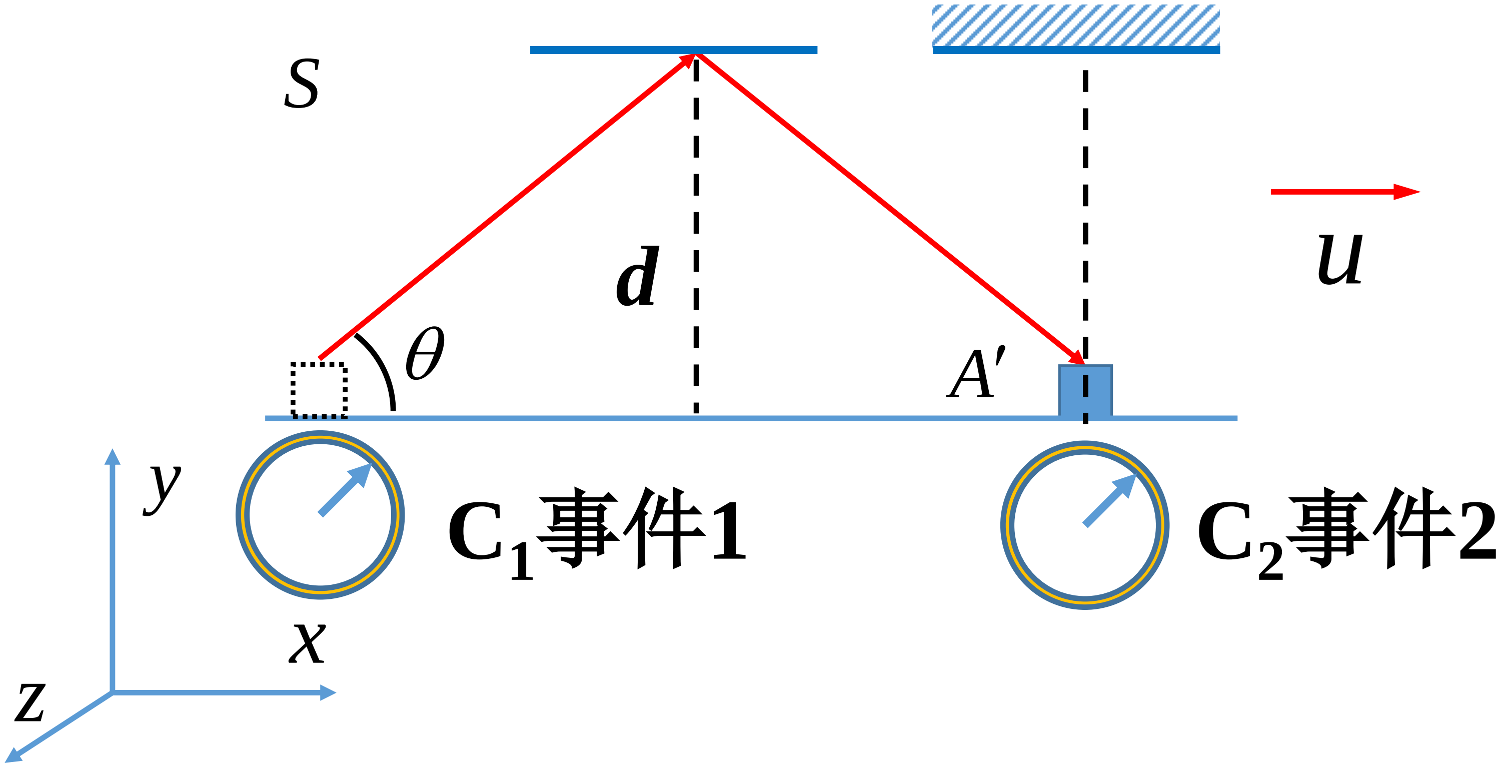
导弹相对地球的速度：

$$v=\frac{v'+u}{1+\dfrac{uv'}{c^2}}=\frac{0.9c+0.9c}{1+\dfrac{0.9c\times0.9c}{c^2}}=0.994c$$

——通过速度的合成也不能实现超光速！

例：求S系中光的传播速率和传播方向。





S' 系中的光速

$$v'_x = 0, v'_y = c, v'_z = 0$$

求 S 系中的光速

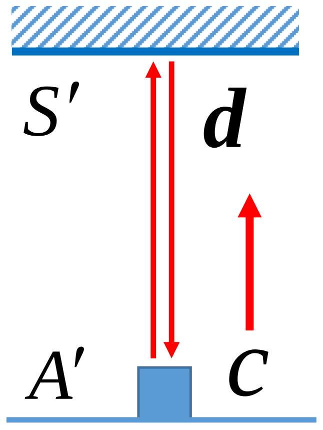
（速率、方向）

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} = \frac{0 + u}{1 + \frac{u \cdot 0}{c^2}} = u$$

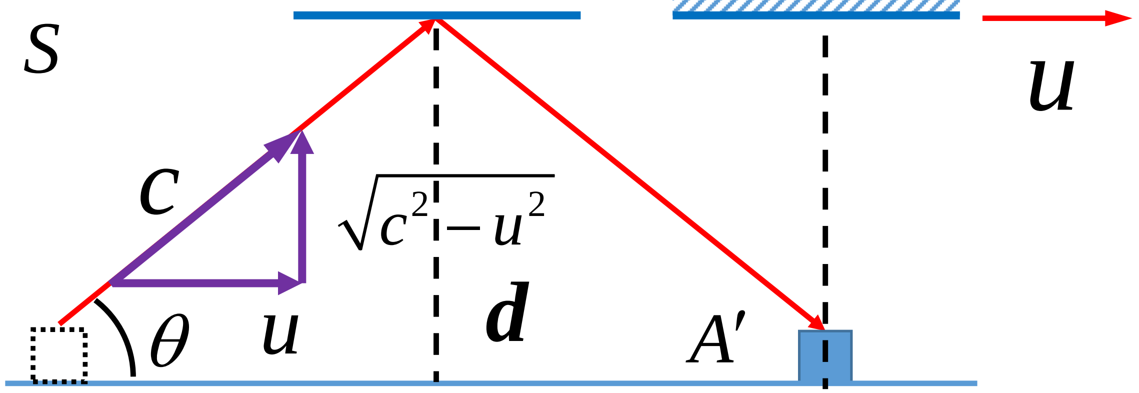
$$v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \sqrt{1 - u^2 / c^2} = \frac{c}{1 + \frac{u \cdot 0}{c^2}} \sqrt{1 - u^2 / c^2} = \sqrt{c^2 - u^2}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \sqrt{1 - u^2 / c^2} = \frac{0}{1 + \frac{u \cdot 0}{c^2}} \sqrt{1 - u^2 / c^2} = 0$$

S 系中光速：$v_x = u, v_y = \sqrt{c^2 - u^2}, v_z = 0$



$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$



$$\Delta t$$

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{\sqrt{c^2-u^2}}{u} = \frac{c}{u}\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2} = \frac{c\Delta t'}{u\Delta t} = \frac{d}{u\Delta t/2}$$

光速不变是指光的传播的速率不变，并非光的传播方向不变！

说明：

1. $u << c$ 时过渡到伽利略速度变换：

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

2. 不可能通过参考系变换达到超光速。

由速度变换可得到：

$$v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = c^2\left[1 - \frac{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})}{(1-\frac{uv_x}{c^2})^2}\right]$$

$v = c$ 则 $v' = c$，　$v < c$ 则 $v' < c$

6. 相对论动力学基础

6.1 动量和质量
6.2 力和加速度的关系
6.3 相对论动能、质能关系
6.4 能量和动量的关系
6.5 相对论动量和能量的变换
6.6 相对论力的变换

相对论动力学：根据新的实验事实，重新定义动量、质量和能量等物理量，确定它们在相互作用过程中的变化规律。

在低速情况下牛顿力学是正确的，所以新定义的物理量，在 $v << c$ 时必须趋于牛顿力学中的相应量。

作为一般性的原则，这些物理量的变化规律还应该遵守能量守恒和动量守恒定律。

6.1 动量和质量

仍按下式定义动量：$\vec{p}=m\vec{v}$

仍假设：$\vec{f}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$

形式上，与牛顿力学没什么区别。

但在牛顿力学中，物体的质量是一个与运动速度无关的恒量。如果保留这一观念，就会有

$$\vec{f}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m_0\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

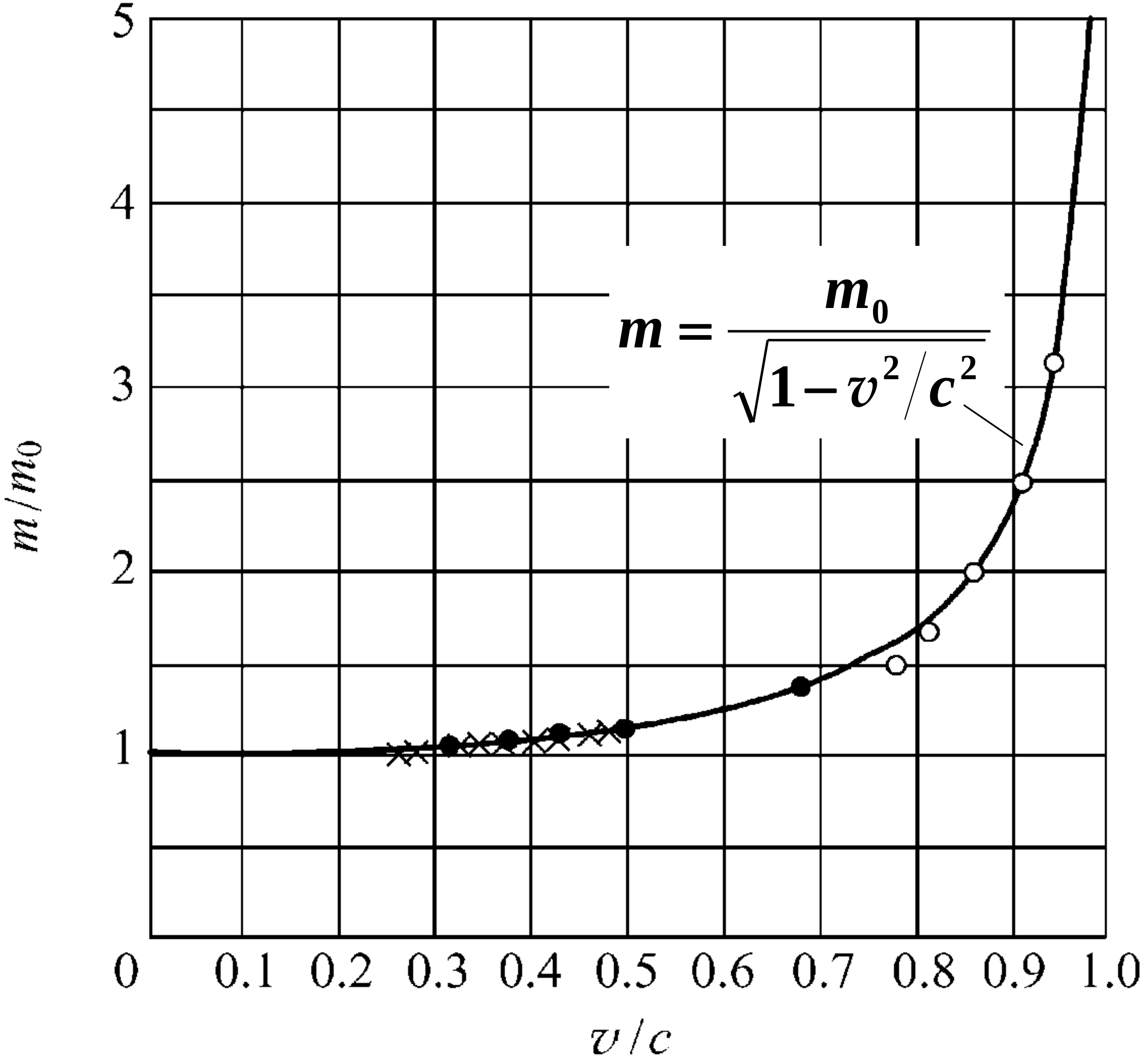
$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt}$$

——在恒力作用下物体以恒定的加速度被加速，时间足够长→超光速，违背相对论。在高速情况下不能再把质量看成是与速度无关的恒量。

实验表明，物体的质量m与物体的运动速度v之间的关系——质速关系：

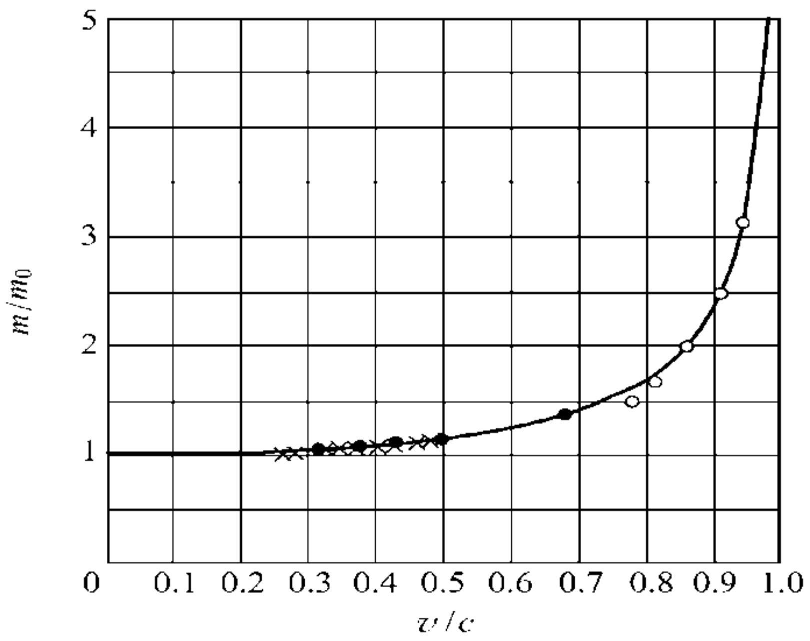
$$\boxed{m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

m_0：静质量；m：相对论质量，动质量



图中×、●和○代表实验数据

速度很大时，质量随之急剧增大，对实物粒子（静质量不等于零）的加速变得十分困难，加速器设计和运行必须考虑到这一点。



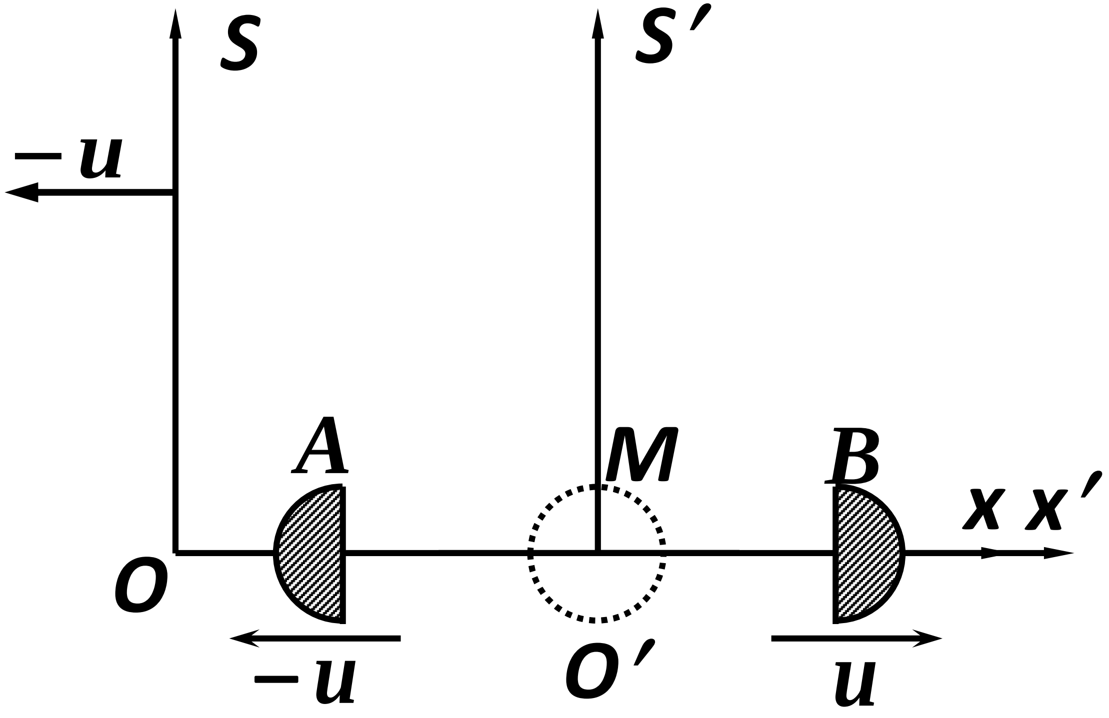
$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

当 $v=c$ 时，质量无意义——实物粒子的运动速度不能达到光速。

粒子的动量：

$$\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

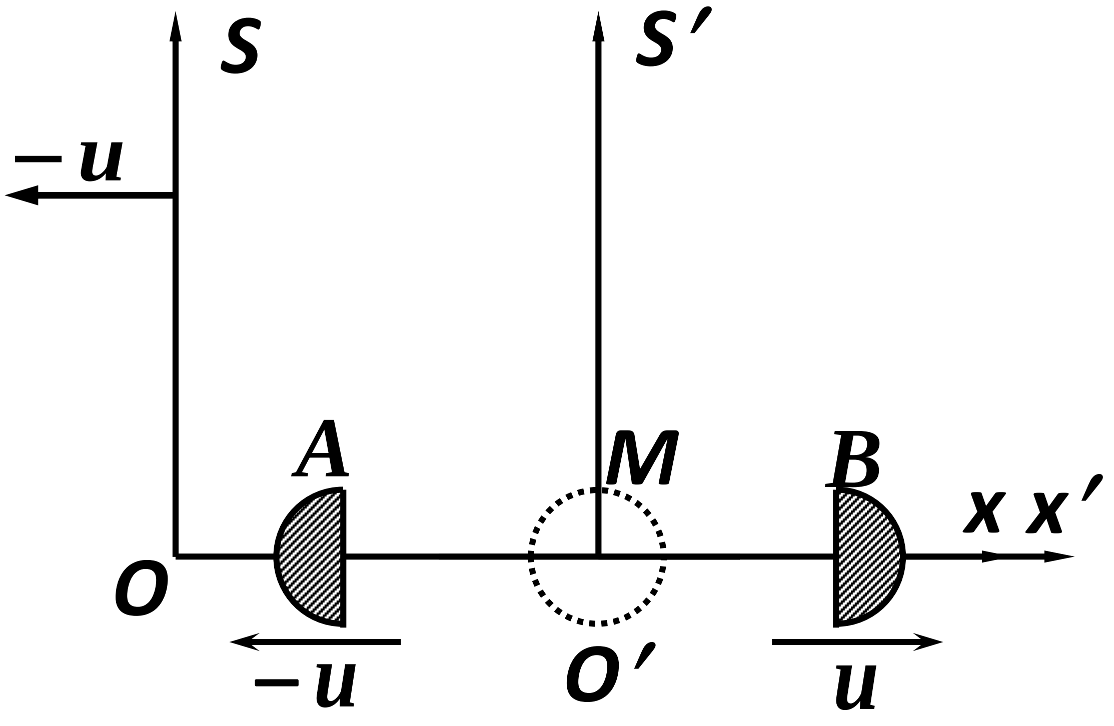
用特例得到质速关系：



在S′系中：静止的粒子M分裂为相同的两块A和B，分别沿 +x′ 和 −x′方向运动。

在S 系中：

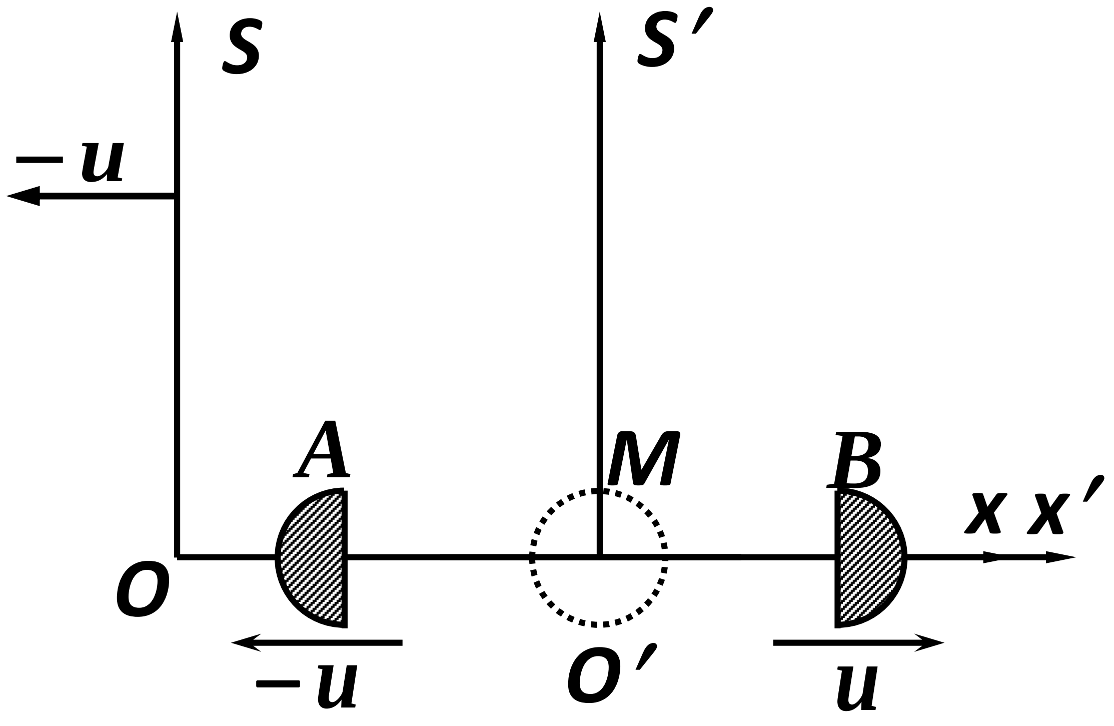
$$\vec{v}_A = 0\ ,\quad v_B = \frac{v'_B + u}{1 + \dfrac{u v'_B}{c^2}} = \frac{2u}{1 + \dfrac{u^2}{c^2}} \quad \textbf{(1)}$$



在S 系中：　动量守恒：$Mu = m_B v_B$ (2)

假设质量守恒：$M = m_A + m_B$ (3)

(1)、(2)、(3)消去 u 得：$m_B = m_A \Big/ \sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}$



在S 系中：　令 $v_B = v$ ；　$m_B = m$ ，相对论质量

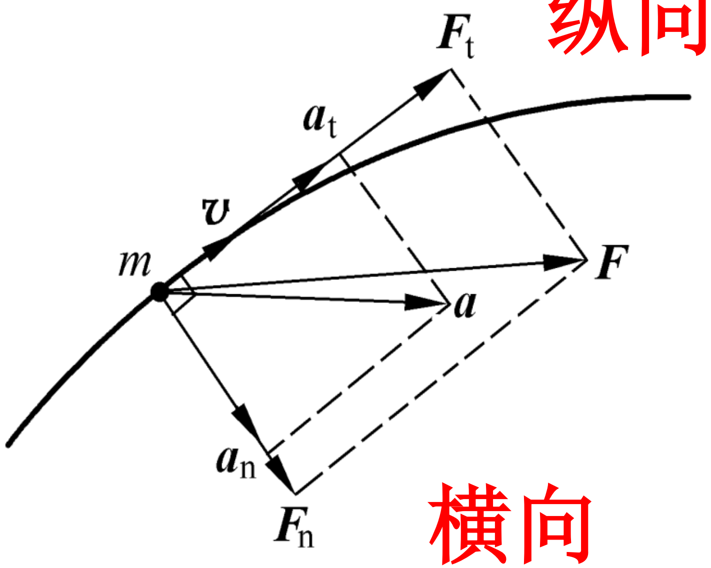
$m_A = m_0$ ：静质量

$$m_B = m_A \Big/ \sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}} \rightarrow m = m_0 \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

6.2 力和加速度的关系

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$=m(a_n\vec{e}_n+a_t\vec{e}_t)+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v\vec{e}_t$$



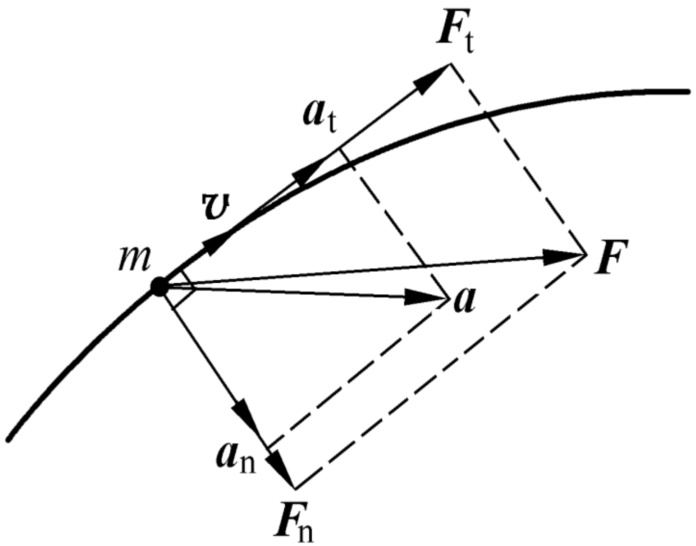
$$F_n=ma_n=\frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}}a_n$$

$$F_t=ma_t+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}a_t$$

$$\boxed{F_n = m a_n = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} a_n}$$

$$\boxed{F_t = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}} a_t}$$



（1）$\vec{a}$并不平行于 $\vec{F}$ 。

（2）速度越大，加速越困难。

（3）纵向（切向）比横向（法向）加速困难。

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\ m &= \gamma m_0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{F})}{mc^2}}$$

6.3 相对论动能　质能关系

相对论仍保留牛顿力学中的动能变化定理：合力对粒子所做的功等于粒子动能的增量

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

1、相对论的动能

设静质量为m_0的粒子在沿 x 轴方向的力 f 作用下从静止开始运动，当速度达到 v 时粒子的动能为

$$E_{\mathrm{k}} = \int_{v=0}^{v} f \mathrm{d}x$$

$$E_k=\int_{v=0}^{v}\frac{d(mv)}{dt}dx=\int_{v=0}^{v}v\,d(mv)=\int_{v=0}^{v}v\,d\left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

$$=\left.\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right|_0^v-\int_{v=0}^{v}\frac{m_0v\,dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$ （分部积分）

$$=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+m_0c^2\left.\sqrt{1-v^2/c^2}\right|_0^v$$

$$=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}-m_0c^2$$

$$=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0c^2=mc^2-m_0c^2$$

$$\boxed{E_k=mc^2-m_0c^2}$$

$$E_k = (m - m_0)c^2 = mc^2 - m_0c^2$$

动能　质量增量　能量　静质能

粒子的动能，与运动所引起的粒子质量的增量成正比，比例系数为 c^2。

2、质能关系

$$\boxed{E = mc^2}$$

有能量就有质量，能量和质量通过c^2联系起来：

粒子的能量等于它的质量乘以c^2，而粒子的动能等于它的能量减去它的静质能 m_0c^2。

【例】粒子的运动速度多大时，它的动能才等于它的静质能？

解

$$E_{\mathrm{k}}=\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0\right)c^2=m_0c^2$$

$$\sqrt{1-v^2/c^2}=\frac{1}{2}$$

$$v=\sqrt{\frac{3}{4}}c=0.866c$$

3、质量亏损

在核反应和化学反应过程中，物质的静质量都要减少，所减少的静质量 称为质量亏损。记为 Δm_0

Δm_0 转化成能量 $\Delta m_0\, c^2$ 释放出来。

能够释放的能量只占静质能的很小一部分。核反应（核裂变、核聚变）所释放的能量（核能），约占参加反应的核燃料的静质能的千分之一。而化学反应，例如汽油燃烧，所释放的化学能仅占其静质能10^{-10}左右。

化学反应只涉及电磁作用，而核反应是强相互作用过程，强度比电磁作用大两个量级。

重核裂变

$$X \rightarrow Y + Z$$

质量亏损

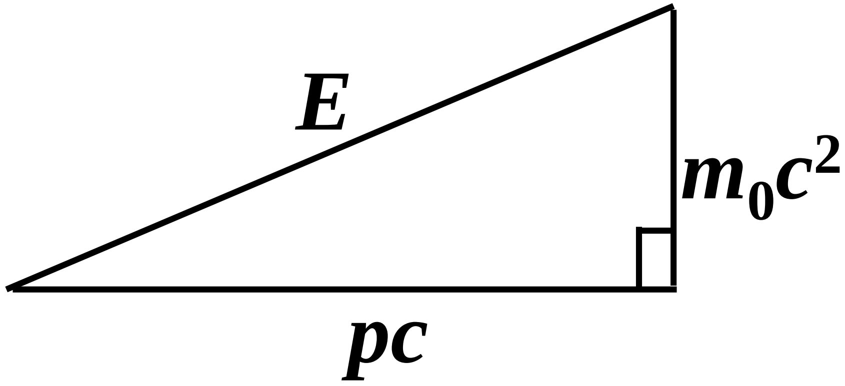
$$\Delta m_0 = m_{X0} - (m_{Y0} + m_{Z0})$$

裂变能：

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2$$

*6.4 能量和动量的关系

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ p &= \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$$



对于静质量 $m_0=0$ 的粒子： $\boxed{E = pc}$

$$mc^2 = mvc \rightarrow v = c$$

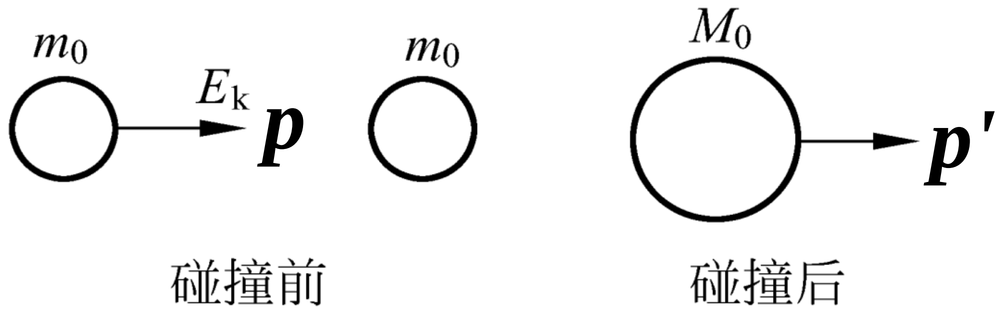
只有当粒子的静质量等于零时它才能以光速运动，否则它的运动速度必定小于光速。

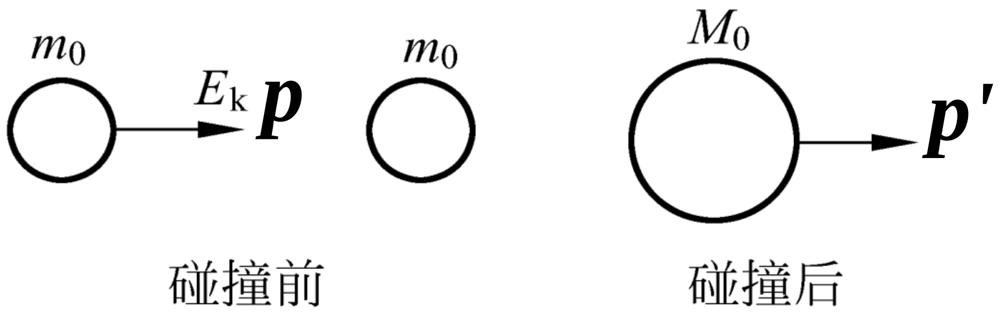
目前实验结果：光子静质量上限为10^{-62} kg

动量和能量守恒：

相对论的研究对象主要是那些不受外界影响的粒子系统。实验表明：在这些系统所经历的过程中，系统的动量和能量守恒。

【例】静质量为 m_0、动能为 E_k 的高能粒子撞击一个静质量也为 m_0 的静止靶粒子，并形成复合粒子。求复合粒子的静质量M_0。





解　碰撞过程粒子发生强烈相互作用，可以忽略重力等外界影响，系统的能量和动量守恒。

动量守恒：　$p' = p$

$$p^2c^2 = (E_k + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4 = E_k^2 + 2m_0c^2E_k$$

$$p'^2c^2 = p^2c^2 = E_k^2 + 2m_0c^2E_k$$

$$E' = \sqrt{p'^2c^2 + M_0^2c^4} = \sqrt{E_k^2 + 2m_0c^2E_k + M_0^2c^4}$$

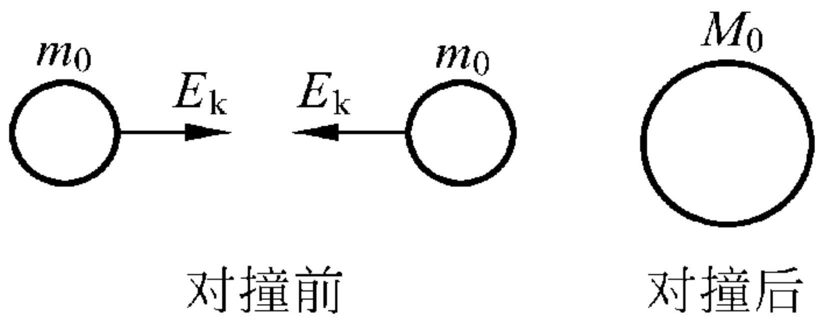
能量守恒： $E = E'$

$$E_k + 2m_0c^2 = \sqrt{E_k^2 + 2m_0c^2E_k + M_0^2c^4}$$

$$M_0 = \sqrt{4m_0^2 + \frac{2m_0E_k}{c^2}} = 2m_0\sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0c^2}}$$

在靶粒子静止的碰撞中，入射粒子的动能只有一部分转化成复合粒子的静质能，另一部分变成复合粒子的动能被“浪费”掉了。

对撞可使参加反应的粒子的动能全部转化成复合粒子的静质能。

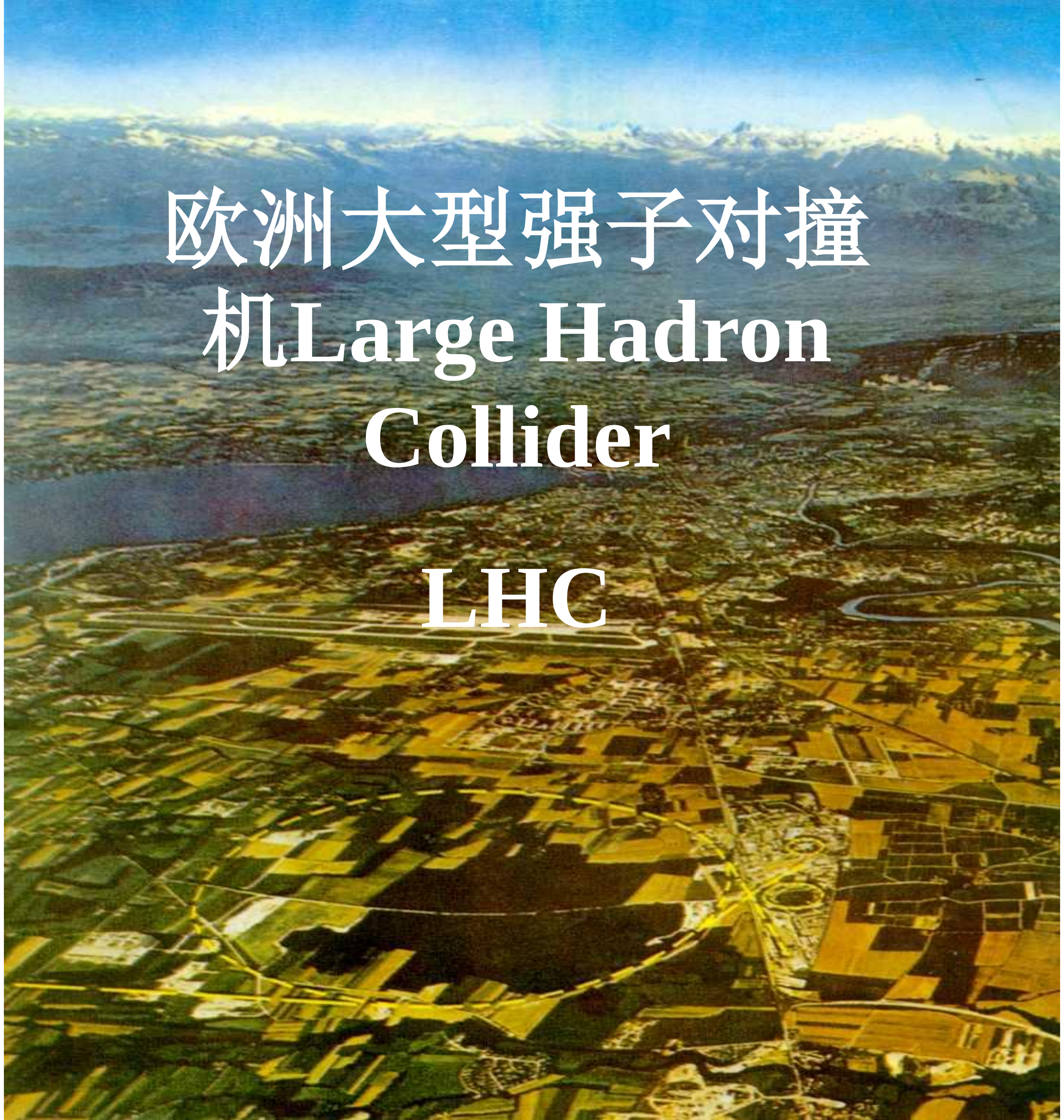


$$M_0 = 2m_0 + \frac{2E_k}{c^2}$$

对于通过高能粒子碰撞产生新粒子的实验研究来说，对撞比靶粒子静止的碰撞更为有效。

欧洲大型强子对撞机Large Hadron Collider

LHC



*6.5 相对论动量和能量的变换

$$\left.\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ E &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &\text{相对论速度合成}\end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} p'_x &= \gamma\left(p_x - u\frac{E}{c^2}\right) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma(E - up_x)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ \mathrm{i}E'/c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \mathrm{i}E/c \end{bmatrix}$$

*6.6 相对论力的变换

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} \\ F_y &= \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} \\ F_z &= \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} F_x' &= \frac{F_x - \dfrac{u}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{v}}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x} \\ F_y' &= \frac{F_y}{\gamma(1-\dfrac{u}{c^2}v_x)} \\ F_z' &= \frac{F_z}{\gamma(1-\dfrac{u}{c^2}v_x)} \end{aligned}$$

一个重要情况：

粒子在 S' 系中静止（$v'=0$），受力为 $\vec{F}'$

这时粒子在S系中受力为

$$F_x = F'_x$$
$$F_y = F'_y/\gamma$$
$$F_z = F'_z/\gamma$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

——纵向力不变，横向力减小到1/γ.