

8.12 相对论中力的变换

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

逆变换

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x = \gamma(p'_x - u \frac{E'}{c^2}) \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \\ E = \gamma(E' + up'_x) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{aligned}$$

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{\frac{dp_x}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{\gamma \left(\frac{dp'_x}{dt'} + \frac{u}{c^2} \frac{dE'}{dt'} \right)}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)} = \frac{F'_x + \frac{\beta}{c} \frac{dE'}{dt'}}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x}$$

$$E' \frac{dE'}{dt'} = c^2 \bar{p}' \cdot \frac{d\bar{p}'}{dt'} = c^2 \bar{p}' \cdot \bar{F}' = c^2 m' \bar{v}' \cdot \bar{F}'$$

$$E' = m' c^2$$

$$\Rightarrow \frac{dE'}{dt'} = F' \cdot \bar{v}'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{F'_x + \frac{u}{c^2} \vec{F}' \cdot \vec{v}'}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \\ F_y = \frac{F'_y}{\gamma(1 + \frac{u}{c^2} v'_x)} \\ F_z = \frac{F'_z}{\gamma(1 + \frac{u}{c^2} v'_x)} \end{array} \right. \xrightarrow[\substack{\text{若} \\ \vec{v}' = 0 \\ (\vec{v} = \vec{u})}]{\text{}} \left\{ \begin{array}{l} F_x = F'_x \\ F_y = F'_y / \gamma \\ F_z = F'_z / \gamma \end{array} \right.$$

在洛伦兹变换的基础上建立相对论动力学理论有两条途径. 一条是把三维时间和一维空间看作统一的整体, 组成复四维时空, 洛伦兹变换是这个复四维时空的正交变换; 然后把已知的质量、速度、动量、力、电场、磁场等物理量表达成复四维时空的标量、矢量或张量, 从而找到相对论力学和经典电动力学的复四维形式. 它们在洛伦兹变换下是不变的. 另一种方法是从洛伦兹变换和力学基本定律出发, 通过简单的例子和形象的论证, 找出质量、动量等基本力学量的新形式, 建立相对论力学的三维形式. 前一种方法严格而普遍, 但理论性较强, 一般在电动力学课程中进行; 后一种方法简单易懂、物理概念清楚, 大学物理通常采用后一方法.

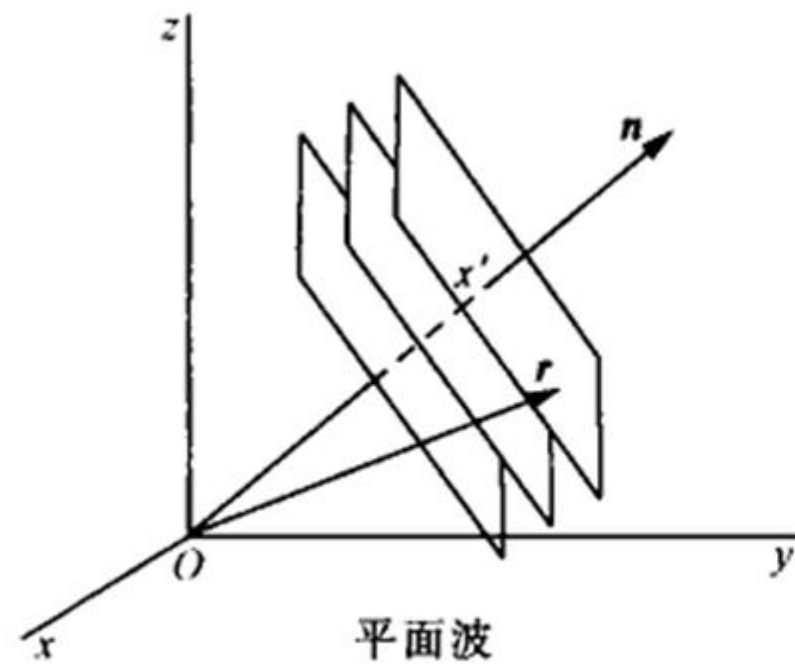
简谐波的数学表达式

一维简谐波的数学表达式为

$$U = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] = A \cos (\omega t - kx + \varphi)$$

式中 A 为振幅, 是常量, ω 为角频率, v 为波速, φ 为 $t=0$ 时刻坐标原点的初相位, U 为作简谐振动的量, 对于光波, U 为光矢量.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 称为波数. k 前面为负号, 或 kx 项与 ωt 项的符号相反, 表示的是向 x 正方向传播的波, 沿 x 正方向随着 x 增大, 相位逐次落后; 若 k 前面为正号, 或 kx 项与 ωt 项的符号相同, 则表示的是向 x 负方向传播的波, 沿 x 正方向随着 x 增大, 相位逐次超前.



一维简谐波的表达式容易推广到三维情形. 三维平面波的波面(等相面)是一组平行平面族, 它们垂直于波的传播方向, 如图所示. 设三维平面波沿 \boldsymbol{n} 方向传播, \boldsymbol{n} 为波传播方向的单位矢量. 设沿 \boldsymbol{n} 方向的坐标为 x' , 三维平面波的表达式可仿照一维简谐波写成

$$U = A \cos(\omega t - kx'),$$

式中 A 为振幅, 是常量, 而 $t=0$ 时刻坐标原点的初相位 φ 设为零. 由于 $kx' = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$, 其中 \boldsymbol{k} 称为波矢, 其大小等于波数, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, 其方向为波传播方向, 即 $\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \boldsymbol{n}$, 因此, $U = A \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})$

$$= A \cos[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]$$

$$\begin{aligned}U &= A \cos (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\&= A \cos [\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]\end{aligned}$$

式中 k_x, k_y, k_z 分别为波矢在 x, y, z 轴上的分量.

与一维简谐波情形一样, 当 \mathbf{k} 前面为负号, 或 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 项与 ωt 项的符号相反时, 上式表示向 \mathbf{n} 正方向传播的波; 当 \mathbf{k} 前面为正号, 或 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 项与 ωt 项的符号相同时, 则表示向 $-\mathbf{n}$ 方向传播的波.

因此, 只要给出平面波表达式的具体形式, 就不难看出波的传播方向和传播速度.

按照洛伦兹变换下的变换性质,物理量分为 3 类:洛伦兹标量、矢量、张量. 电磁波的相位因子 φ 是洛伦兹标量,即 $\varphi = \varphi'$

$$k \cdot x - \omega t = k' \cdot x' - \omega' t'$$

(x, ict) 构成四维矢量 —— 洛伦兹坐标, 则

$\left(k, i \frac{\omega}{c}\right)$ 合成另一个四维矢量 —— 4 波矢

$$k_{\mu} = \left(k, i \frac{\omega}{c}\right)$$

且

$$k_{\mu} x_{\mu} = k'_{\mu} x'_{\mu}$$

k_μ 在洛伦兹变换下的变换关系

$$k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$$

其中 $a_{\mu\nu}$ 为洛伦兹变换矩阵.

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} k'_1 = \gamma \left(k_1 - \frac{v}{c^2} \omega \right) \\ k'_2 = k_2 \\ k'_3 = k_3 \\ \omega' = \gamma (\omega - vk_1) \end{cases}$$

其中 ω' 为光源的静止参考系 S' 测得的光源的频率, 即固有频率 ω_0 , k_1 为 S 系的波矢量 k 的 1 分量, 设 k 与 x 轴夹角为 θ , 则 $k_1 = k \cos \theta$, 在 S 系测得光源的频率 ω 为

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)}$$

如果某个方程在洛伦兹变化下形式保持不变,则称它是洛伦兹协变的。

定理：任何一个方程，如果能表示成四维张量（0, 1, 2阶等）的形式，且各项的张量阶数相同，则此方程必具有洛伦兹协变性。

如何改写牛顿第二定律： $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$P = (\gamma m_0 \vec{v}, i \gamma m_0 c) = (\vec{p}, i \frac{E}{c})$$

关键是找一个四维力，它应是四维矢量。

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{i}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{i}{c} E \right) = \frac{d}{dt} P_4$$

$$\frac{i}{c} \gamma \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{i}{c} E \right) = \frac{d}{d\tau} P_4$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

$$\gamma F_i = \frac{dP_i}{d\tau} \quad (i=1, 2, 3)$$

引进四维力

$$F_\mu = \left(\gamma \vec{F}, \frac{i}{c} \gamma \vec{F} \cdot \vec{v} \right) = \left(\gamma \vec{F}, \frac{i}{c} \gamma N \right)$$

$N = \vec{F} \cdot \vec{v}$ **是功率**

($\mu=1, 2, 3, 4$)

相对论牛顿力学方程

$$F_{\mu} = \frac{dP_{\mu}}{d\tau} \quad (\mu=1, 2, 3, 4)$$

这是惯性系变换时的洛伦兹协变形式。其前三个分量在低速极限 $\gamma=1$ 时，就是经典牛顿第二定律，其第四分量是能量守恒。

麦克斯韦方程组的协变式

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mu_0 j_{\mu} \\ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \end{cases}$$

$$j_{\mu} = (\vec{j}, ic\rho)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -i\frac{E_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -i\frac{E_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -i\frac{E_3}{c} \\ i\frac{E_1}{c} & i\frac{E_2}{c} & i\frac{E_3}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

至此，电动力学、牛顿力学已经全部写成了洛伦兹协变式。爱因斯坦试图把万有引力定律也写成洛伦兹协变式，但遇到了困难。因此，1905年之后，他开始进行广义相对论的研究，到1915年完成，历时10年。





物质告诉时空如何弯曲，
时空告诉物质如何运动。

惠勒



两个球相互绕转引起的时空涟漪—引力波

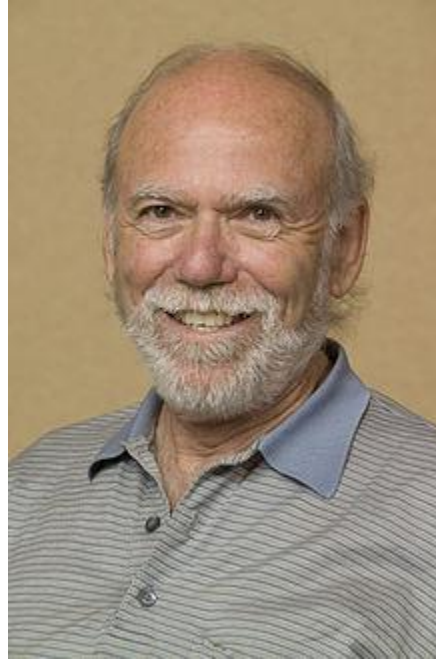
2015年9月14日，**激光干涉仪引力波天文台**（以下简称**LIGO**）首次观测到了黑洞系统合并产生的引力波现象，印证了爱因斯坦广义相对论的重要预言，从而也**打开了人类观察宇宙的新的窗口**。

2017年9月21日，雷纳·韦斯、基普·索恩和巴里·巴里什三人获得了第二届**复旦中植奖**，分享三百万人民币奖金。而仅仅两周后，三人共同获得了**2017年诺贝尔物理学奖**。

The Nobel Prize in Physics 2017



韦斯(1932-)



巴里什(1936-)



索恩(1940-)

The Nobel Prize in Physics 2017 was divided, one half awarded to **Rainer Weiss**, the other half jointly to **Barry C. Barish** and **Kip S. Thorne** "*for decisive contributions to the LIGO detector and the observation of gravitational waves*".



2017年12月17日，雷纳·韦斯（左三）、基普·索恩（左四）和巴里·巴里什（左五）在上海领取第二届“复旦-中植科学奖”。 慕梁 摄

该奖项设立于2015年，每年轮流表彰在数学、物理学和生物医学三个学科领域做出原创性杰出贡献的全球科学家，2017年奖项聚焦物理学领域。



德雷弗

索恩

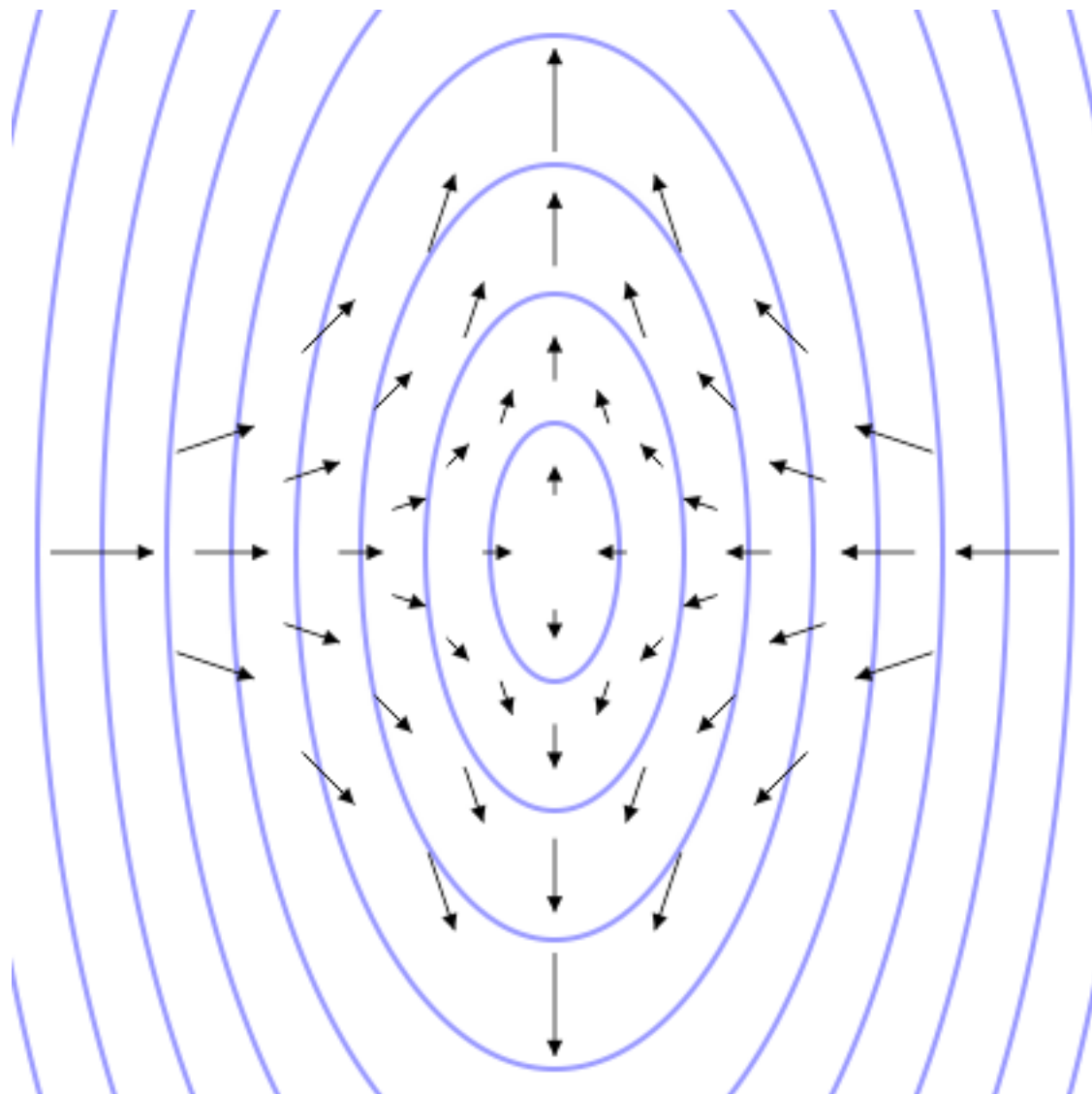
韦斯



黑洞双星合并的模拟动画

由于黑洞双星离我们如此遥远， 因此我们探测到的黑洞双星合并其实早在**十几亿年前**就已发生。 那时地球上的生物还处于**细胞层次**。 在引力波扫过浩瀚空间的十几亿年的时间里， 地球上的生物往着越来越复杂的方向进化着， 并终于进化成了被称为 “人” 的智慧生物。 当引力波扫过大麦哲伦云时， 地球上的人刚刚披上很原始的 “衣服”； 当引力波离地球还剩**100 光年时**， 地球上一位名叫**爱因斯坦**的人刚刚预言了引力波的存在； 当引力波离地球还剩 **50 光年时**， 爱因斯坦的追随者们刚刚开始**尝试引力波的探测**； 当引力波离地球还剩 **20 光年时**， **LIGO** 的两个观测台刚刚开始**建设**； 当引力波离地球只剩几 “**光日**” 时， **LIGO** 刚刚展开**高灵敏度的引力波探测**…… 最终， 当引力波经过十几亿年的漫长时光， 完成了十几亿光年的漫长跋涉抵达地球时， 恰好被 **LIGO** 探测到。

卢昌海



引力波
— 时空的涟漪



LIGO 汉福德观测台



LIGO 利文斯顿观测台

GW150914

GW151226

GW170104

GW170608

1916年： 爱因斯坦**预言引力波；**

1917年： 爱因斯坦为**激光**奠定基础；

2016年： 用**激光****发现了引力波。**

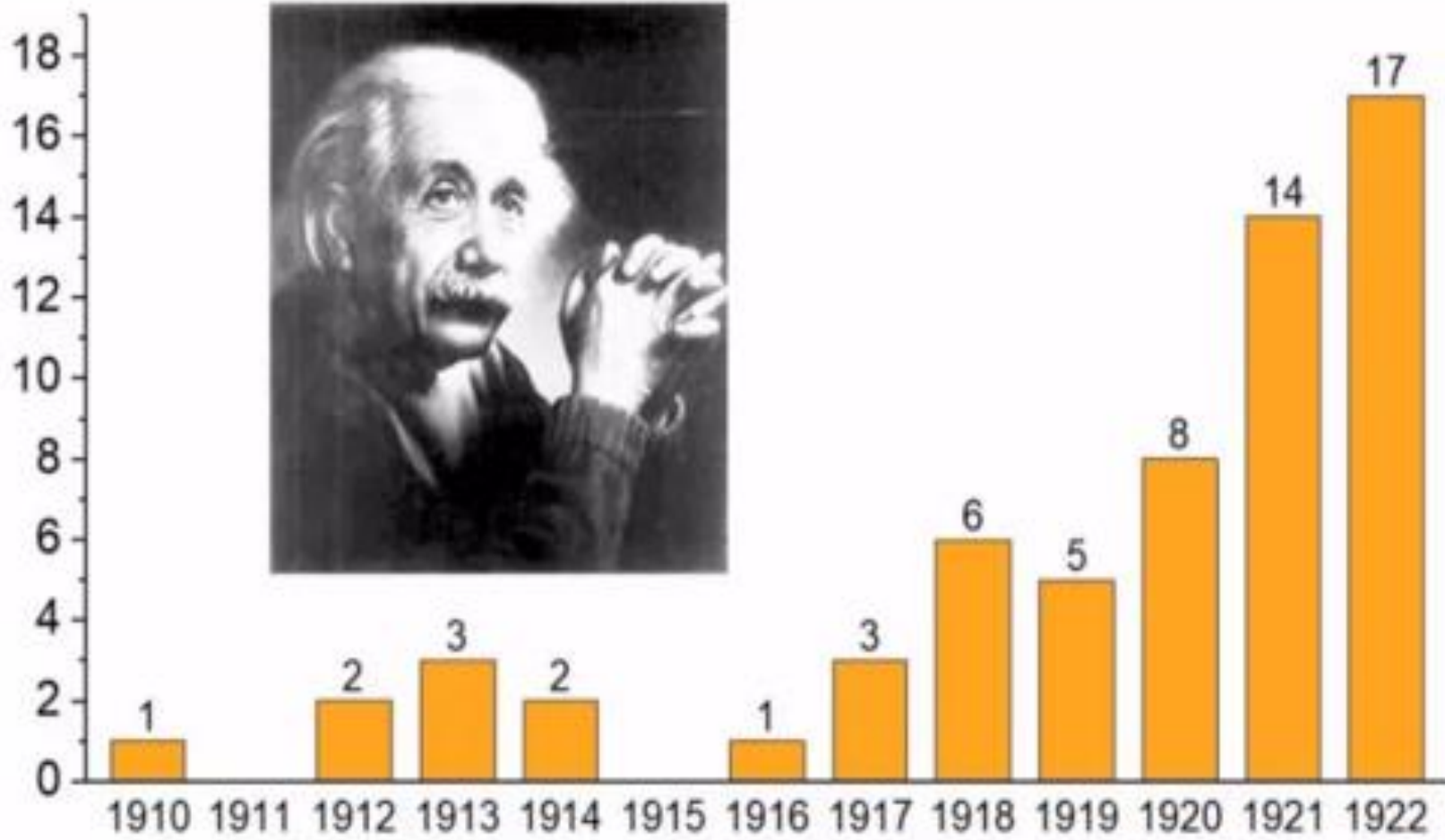


LIGO[lho]

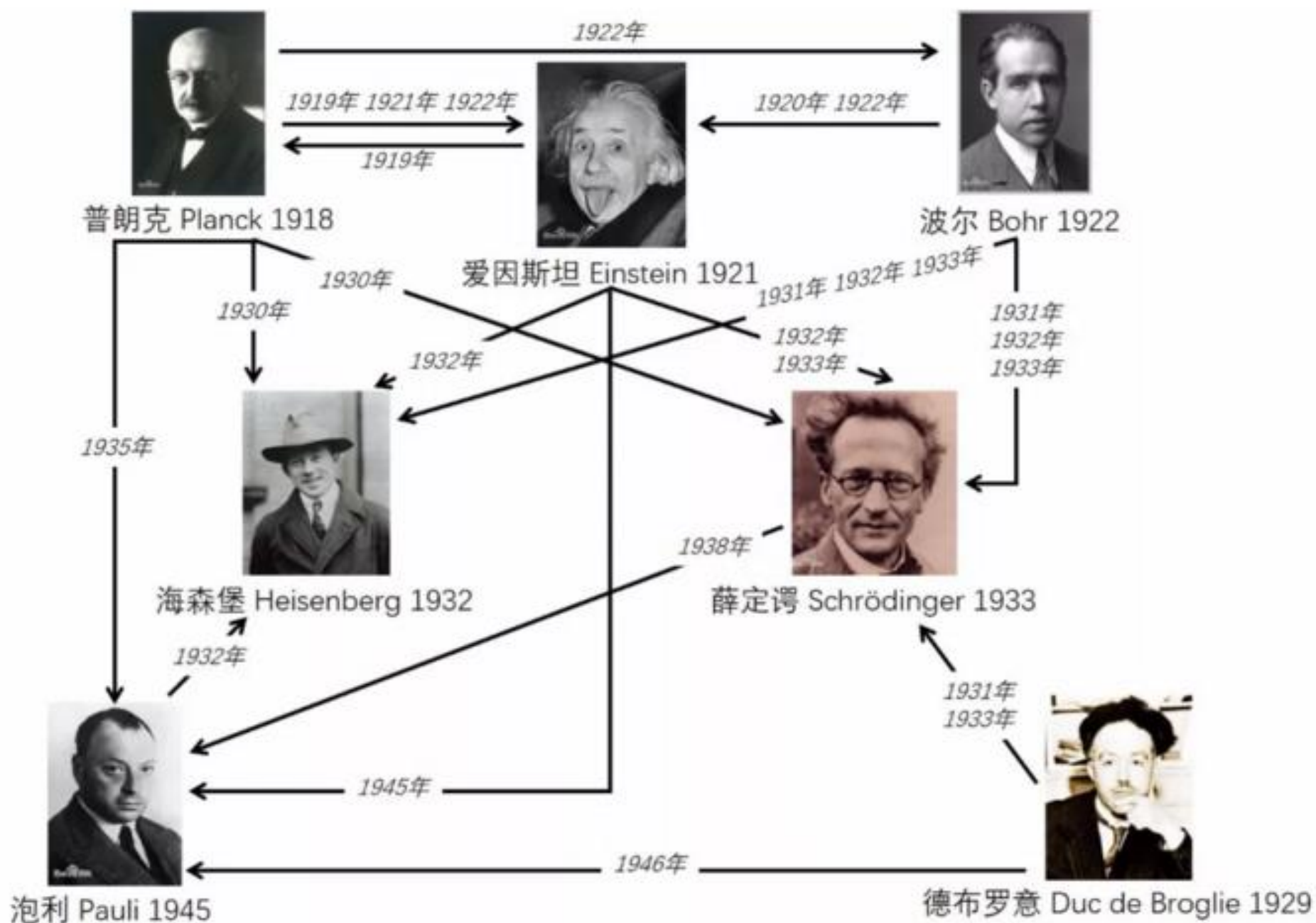


LIGO[lho]

爱因斯坦被提名的次数



年份





第五次索尔维会议与会者合影（布鲁塞尔，1927）

前排（左起）：郎缪、普朗克、居里夫人、洛伦兹、爱因斯坦、郎之万、盖伊、威尔逊、里查生
 第二排（左起）：德拜、库努森、布拉格、克拉末斯、狄拉克、康普顿、德布罗意、玻恩、玻尔
 第三排（左起）：皮卡德、亨利特、埃伦菲斯特、赫曾、德东代、薛定谔、费而夏费尔特、泡利、海森堡、否勒、布里渊



20 世纪物理学(全3卷)

Twentieth Century Physics

(美)布朗(Brown, L.M.)等编；刘寄星等 译

北京：科学出版社, 2014-2016



出版时间：2019年09月

牛顿啊！请原谅我。你所发现的道路，在你所处的那个年代，是一位具有最高思维能力和创造力的人所能发现的唯一道路。你所创造的概念，甚至今天仍然指导着我们的物理思想，虽然我们 now 知道，如果要更加深入地了解各种联系，那就必须用另外一些离直接经验领域较远的概念来代替这些概念。

—— 爱因斯坦在纪念牛顿诞生300周年纪念会上的讲话

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

of Lorentz



第八章结束