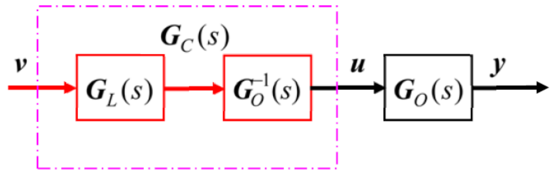
第一章 解耦控制

1. 串联补偿器



解耦公式：$G_C(s) = G_O^{-1}(s)G_L(s)$

特点：

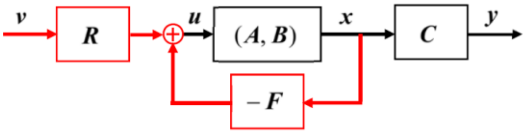
(1) 系统结构简单：无需对输出或者状态进行量测;

(2) 需要被补偿系统的传递函数矩阵$\boldsymbol{G}_O(s)$可逆;

(3) 动态补偿器 $\boldsymbol{G}_C(s)$ 引入了新的模态，控制律复杂;

(4) 可能存在不稳定零极相消：$\boldsymbol{G_O(s)G_O^{-1}(s)G_L(s)}$.

2. 状态反馈+输入变换



$$y^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} y_1^{(\alpha_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(\alpha_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1} \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m - 1} B \end{bmatrix} u \triangleq Lx + D_0 u$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m - 1} B \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1} \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m} \end{bmatrix}$$

可$\{F, R\}$解耦条件要求D_0可逆

**解耦阶常数定义：（就是求D_0要保证每一行都非零，常数就是指 A 乘了多少次进去）

[定义 2-2] 解耦阶常数定义为输入u可以直接影响的输出y_i对时间导数的最小阶 α_i，即:

$$\alpha_i \triangleq \min\{k \mid c_i^\top A^{k-1} B \neq 0,\ k \geq 1\},\ i = 1, \cdots, m. \qquad (2\text{-}4)$$

$R = D_0^{-1}, \quad F = D_0^{-1}L$

3. 解耦阶常数的性质

[定理 3-1]　设系统$\Sigma_O(A,\ B,\ C)$的解耦阶常数为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，可解耦矩阵为D_0，经任意$\{F,\ R\}$ $(\det R \neq 0)$变换后的闭环系统$\Sigma_L(A-BF,\ BR,\ C)$，其解耦阶常数仍为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，可解耦矩阵为D_0R。

就是说解耦之后解耦阶常数是不会改变的

定理：记 $\boldsymbol{G_O(s) = C(sI-A)^{-1}B}$ 为线性定常系统$(\boldsymbol{A,B,C})$的传递函数阵，其第$\boldsymbol{i}$行为$\boldsymbol{g_i^{\top}(s)}$，则解耦阶常数

$$\boldsymbol{\alpha_i = d_i - n_i},$$

其中$\boldsymbol{d_i}$是$\boldsymbol{g_i^{\top}(s)}$各元素通分后分母多项式的阶次，$\boldsymbol{n_i}$为各元素分子多项式的最大阶次。可解耦矩阵 $\boldsymbol{D_0}$ 第$\boldsymbol{i}$行的各元素等于 $\boldsymbol{g_i^{\top}(s)}$ 对应分子多项式 $\boldsymbol{n_i}$ 次幂项的系数.

例：$\boldsymbol{G_O(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+2s}\begin{bmatrix} 2s^2+3s & s^2 \\ -s & s^2 \end{bmatrix} \xRightarrow[\alpha_2=3-2=1]{\alpha_1=3-2=1} D_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

意思就是你每一行去看下面的阶数减上面的阶数，这个减出来最小的就是解耦阶常数

解耦阶常数还有作用就是看会不会发生零极相消，如果解耦阶常数的和等于状态个数就不存在零极点相消，反之就存在零极点相消

4. 闭环极点配置

定理　系统$(\boldsymbol{A,\ B,\ C})$可通过反馈$\boldsymbol{u = Rv - Fx}$解耦，并使闭环传递函数为对角阵【注：不能配置零点.】

$$\boldsymbol{G(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{\psi_1(s)},\cdots,\frac{1}{\psi_m(s)}\right]}$$

的充要条件是可解耦矩阵$\boldsymbol{D_0}$非奇异，所需的矩阵解为：

$$\boldsymbol{R = D_0^{-1}, \quad F = D_0^{-1}L}$$

其中 $\boldsymbol{L = \begin{bmatrix} c_1^{\top}\psi_1^*(A) \\ \vdots \\ c_m^{\top}\psi_m^*(A) \end{bmatrix},\ D_0 = \begin{bmatrix} c_1^{\top}AB \\ \vdots \\ c_m^{\top}AB \end{bmatrix}}$.

意思是指如果你想要配置什么极点，你就在算 L 的时候把那个 A 带到多项式里面去乘那个相应的 C 的行就可以

另外如果考察能够配置几个极点就是考察系统的能控性与能观性

5. 静态解耦问题

可实现静态解耦的系统未必能实现动态解耦

可实现动态解耦的系统一定能实现静态解耦

静态解耦的条件：

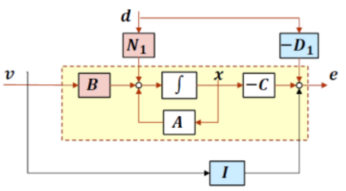
定理 系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$可$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$静态解耦的充要条件是$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可镇定且

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

静态解耦先选反馈阵F让你的系统可以成功稳定（指$A-BF$这个矩阵全部极点都在左半平面），$A-BF$得到A_L，然后通过计算$-(CA_L^{-1}B)^{-1}G_D$得到R，其中，G_D就是你要的最终形态，控制律是$u=Rv-Fx$

第二章 抗外扰控制

1. 带外扰系统



$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_1 & \\ & \boldsymbol{B} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=-\widetilde{\boldsymbol{C}},\ \boldsymbol{D}=[-\boldsymbol{D}_1 \ \ \boldsymbol{I}]$$

设计系统使系统Σ_O:$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{e}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{w} \end{cases}$, 其中 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$干扰抑制问题就是输入 v=0，跟随问题就是 d=0

对外扰的不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

完全不变性:

状态（或输出）强迫响应完全为零，不受扰动影响

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}\quad(\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{0})，且\ \widetilde{\boldsymbol{x}}(t)\equiv\boldsymbol{0}\ (\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\equiv\boldsymbol{0})$$

静态不变性:

状态（或输出）响应的稳态部分为零，不受扰动影响

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}\quad(\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{0})$$

抗外扰控制的基本设计原理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

双通道原理：

基于误差的反馈与基于扰动的顺馈相互配合，通过相互抵消消除扰动对输出的影响.

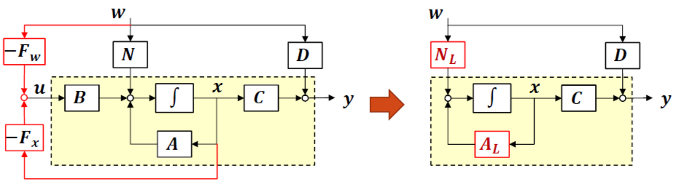
内模原理：

将扰动的动态运动特征嵌入控制器结构设计中，消除不稳定扰动模态（包括常值、正弦等信号）对输出的影响.

2. 状态对外扰完全不变

状态对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



采用控制律 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$，得到闭环系统

$$\boldsymbol{\Sigma}_L:\quad \dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w)\boldsymbol{w}$$

- 状态反馈 $\boldsymbol{F}_x$ 改造 $\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x$，保证闭环稳定;
- 扰动顺馈 $\boldsymbol{F}_w$改造 $\boldsymbol{N}\rightarrow\boldsymbol{N}_L=\boldsymbol{N}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w$，阻断扰动影响.

充要条件是(A,B)可镇定（这样就能设计出F_x保证闭环稳定），$rank(B)=rank(B\ N)$，这样就能保证能设计出F_w保证最终N_L为 0，不干扰系统状态

3. 输出对外扰完全不变

系统：$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}+\mathbf{Nw}\\ \mathbf{y}=\mathbf{Cx}\end{cases}$

控制律：$\mathbf{u}=-\mathbf{F_x x}-\mathbf{F_w w}$

目标：$\mathbf{A}_L=\mathbf{A}-\mathbf{BF_x}$ 渐稳，$\mathbf{N_L}=\mathbf{N}-\mathbf{BF_w}$

$$\mathbf{C}[\mathbf{N}_L\quad \mathbf{A}_L\mathbf{N}_L\quad \cdots\quad \mathbf{A}_L^{n-1}\mathbf{N}_L]=0$$

有时仅靠状态反馈就能满足上式，必要条件是：$\mathbf{CN}=0$。

和上面一样，有时候只需要靠设计一个A_L就能够满足条件，作业里面就是，代入两个方程解出状态反馈的那个控制律就行

4. 输出对外扰静态不变

系统：$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Nw} \\ \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{Mw} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Dw} \end{cases}$

外扰引起的状态的强制解：

$\tilde{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{Pw}(t)$，其中$\mathbf{P}$满足 $\mathbf{AP} - \mathbf{PM} = \mathbf{N}$

控制律：$\mathbf{u} = -\mathbf{F_x x} - \mathbf{F_w w}$

目标：$\mathbf{A}_L = \mathbf{A} - \mathbf{BF_x}$ 渐稳，$\mathbf{N}_L = \mathbf{N} - \mathbf{BF_w}$

$\begin{cases} \mathbf{A}_L\mathbf{P} - \mathbf{PM} = \mathbf{N}_L \\ \mathbf{CP} = \mathbf{D} \end{cases}$ 联立有解

解法：令$\mathbf{F_w} - \mathbf{F_x P} = \mathbf{Q}$，上述方程组变为：

$\begin{cases} \mathbf{AP} - \mathbf{PM} + \mathbf{BQ} = \mathbf{N} \\ \mathbf{CP} = \mathbf{D} \end{cases}$

（1）根据上面的方程组求解 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 矩阵；

（2）设计状态反馈阵$\mathbf{F_x}$，使$\mathbf{A} - \mathbf{BF_x}$渐稳；

（3）求出顺馈补偿阵$\mathbf{F_w} = \mathbf{Q} + \mathbf{F_x P}$。

这里为什么多出来一个 Q，是因为前面为了解$A_L P - PM = N_L$出来的时候要用的，所以干脆就分几步来：

第一步是由 CP=D 得到 P

第二步是由 AP-PM+BQ=N 得到 Q

第三步是由稳定条件得到F_x来得到稳定的A_L

第四步是由$F_w = F_x P + Q$得到F_w

5. 常值扰动下的鲁棒控制器设置

推论：系统存在鲁棒抗干扰控制器且可任意配置极点的充要条件是$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$完全可控，且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = n + m.$$

- 不难看出，上述条件要求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数不少于矩阵$\boldsymbol{C}$的行数，即控制量个数不少于被调量个数。

第三章 最优控制

1. 泛函相关

[定理 2-3] 若 $J=\int_{x_1}^{x_2}F[y(x)]\,d\,x$，则:

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)\mathrm{d}x$$

[定理 2-4] 若 $J=\int_{x_1}^{x_2}F\,[y_1(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ x]\mathrm{d}x$，则:

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1(x)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y_n}\delta y_n(x)\right]\mathrm{d}x$$

2. 变分法求解最优控制

这部分纯恶心人，就是要硬记住每种情况怎么搞

L 是积分的那个部分，f 是自控 1 里面那个稳定性里面的 f，$\dot{x}=f$

[定理 3-1] 末时刻固定末状态自由的最优控制问题（3-1），其最优解应满足的必要条件如下:

H 函数: $H(x,\ u,\ \lambda,t)=\lambda^T f(x,\ u,\ t)+L(x,\ u,\ t)$

控制方程: $\frac{\partial H}{\partial u}=0$

正则方程: $\begin{cases}\dot{x}=f(x,u,t) & \textit{状态方程}\\ \dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x} & \textit{协态方程}\end{cases}$

边界条件: $\begin{cases}x(t_0)=x_0 & \textit{初始条件}\\ \lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)} & \textit{末端条件}\end{cases}$

第一步，根据给定的系统和优化条件去给出各个方程

[定理 3-2] 各种末端情况下的最优控制问题，其最优解的必要条件具有相同的哈密顿函数、控制方程、正则方程和初始条件，仅末端条件不同（参见[定理 3-1]）。

表 3-1 各种情形下应满足的末端条件

	t_f固定、可变	t_f可变
$x(t_f)$自由	$\lambda(t_f)=\frac{\partial\ \varphi}{\partial x(t_f)}$	$H(t_f)=-\frac{\partial\ \varphi}{\partial t_f}$
$x(t_f)$固定	$x(t_f)=x_f$	$H(t_f)=-\frac{\partial\ \varphi}{\partial t_f}$
$x(t_f)$受约	$\lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}+\frac{\partial g^T}{\partial x(t_f)}\mu$ $g[x(t_f),\ t_f]=0$	$H(t_f)=-\frac{\partial\ \varphi}{\partial t_f}-\frac{\partial g^T}{\partial t_f}\mu$

第二步，根据各个情况的不同去更改末端条件

第三步，求解

四．线性系统有限时间调节器问题

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u},\quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(t)\mathbf{u}]\,d\,t$$

最优控制可表达成状态的线性反馈，但反馈阵通常是时变的：

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)，J^* = (1/2)\,\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

其中$\mathbf{P}(t)$是下述 Riccati 矩阵微分方程的解：

$$\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0，\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{F}$$

五．线性定常系统无限时间调节器问题

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),\quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]\,d\,t$$

最优控制可表达成状态的线性反馈，且反馈阵是定常的：

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t)，J^* = (1/2)\,\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}\mathbf{x}(t_0)$$

其中，$\mathbf{P}$是下述 Riccati 矩阵代数方程的解：

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

$\mathbf{P}$有解时，通常不唯一，应取非负定解。

$\mathbf{P}$有解的充分条件是：$(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$完全可控。

闭环渐稳的充分条件是：$(\mathbf{A},\ \mathbf{D})$完全能观，$\mathbf{Q} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}$。

这个是用上面的方法总结出来的比较快速的方法，就要记住 A，B，P，Q，R，F 分别对应什么东西就行