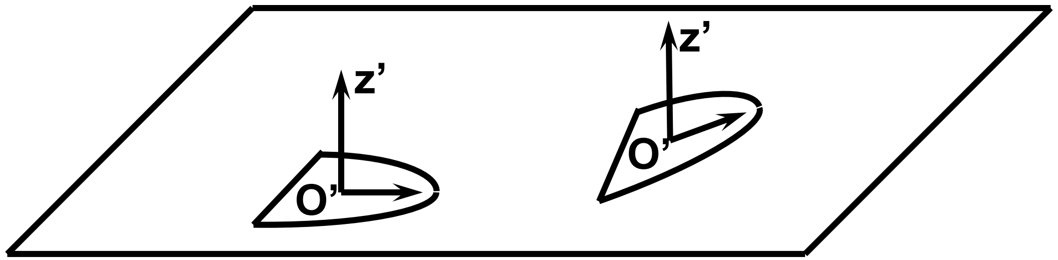
5.7 刚体的平面平行运动

二维. 如曲柄连杆运动，平底刚体在平面上的滑动……

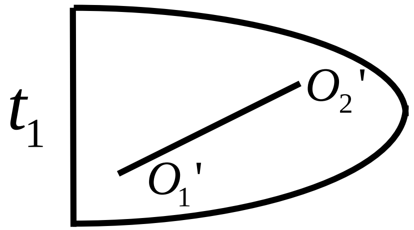
(1) 刚体做平面平行运动时，刚体上所有质点的运动都平行于某平面。通常我们以包含质心的剖面来代表刚体。

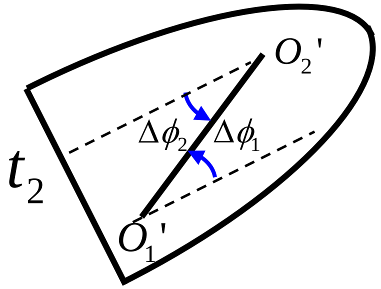
(2) 刚体的平面平行运动→(分解)随基点O’的平动(平动参考系) + 绕过O’垂直轴的转动



平面运动性质: $\Delta\phi$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ 与基点无关

证明：两个基点O_1'和O_2' 。两点联线作为计算角位移的基线





由图可知：$\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2$ ——转动方向相同；大小相等

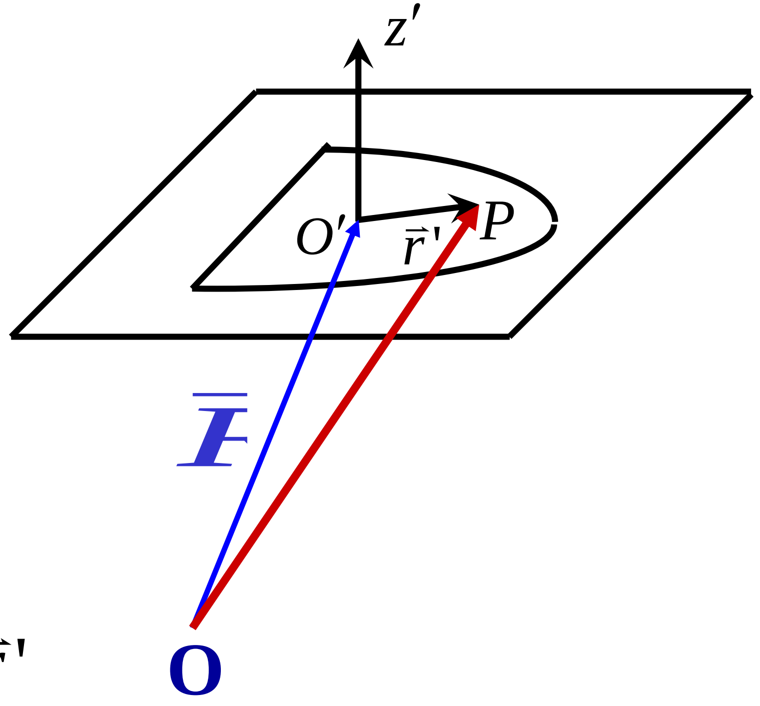
由此可知：刚体$\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ 与基点的选择无关

(3)刚体平面平行运动的分解

随刚体上某一基点的平动和绕该基点的转动的组合

以基点O’为原点建平动坐标系

则对任意点P有：



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}'$$

纯滚动、瞬心

在平面平行运动中，有一种重要的运动形式：纯滚动

(1) 纯滚动

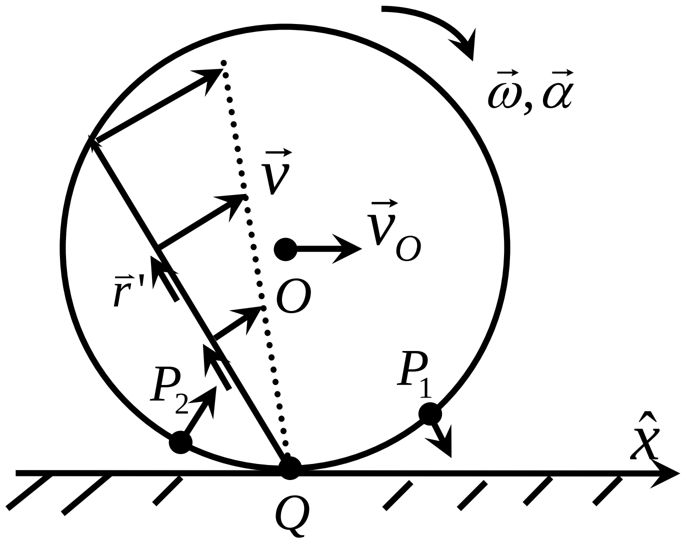
$\vec{v}=\vec{v}_{0'}+\vec{v}'=\vec{v}_{0'}+\vec{\omega}\times\vec{r}'$

接触点Q相对支撑面无滑动，$v_Q=0$

以Q为基点，则此刻刚体运动相当于单纯转动

纯滚动

$$\boxed{\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}'}$$



(2) 瞬心

Q称为瞬心（瞬时转动中心）

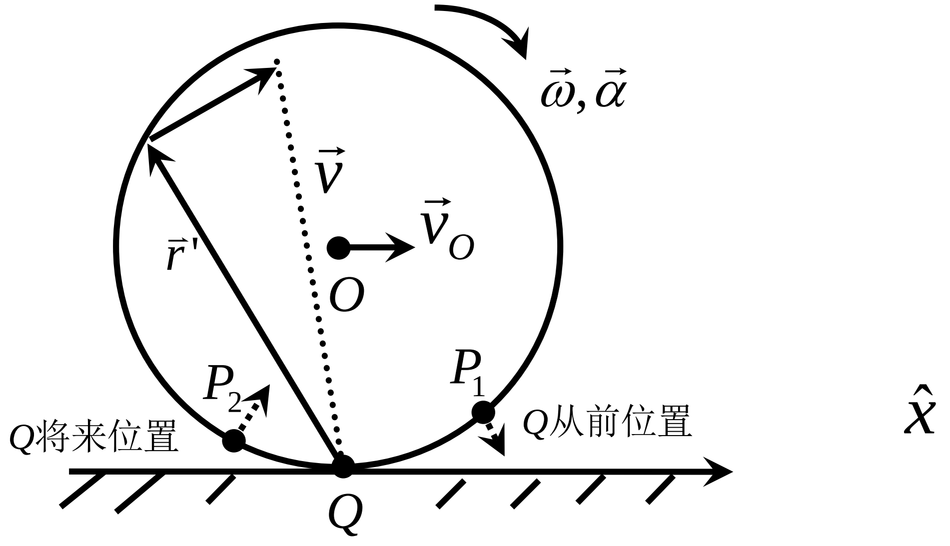
瞬时轴过Q，与转动面垂直

$\vec{a}_Q\neq 0$

∴它是瞬时轴，而非定轴

(3) 纯滚动特点

半径为r的圆周在平面上纯滚动，则 $a_O = \alpha r$ **(圆心O)。**



证： $\vec{v}_O = \omega r\hat{x}$， r和$\hat{x}$不变，

$$\therefore \vec{a}_O = d\vec{v}_O/dt = \alpha r\hat{x}$$

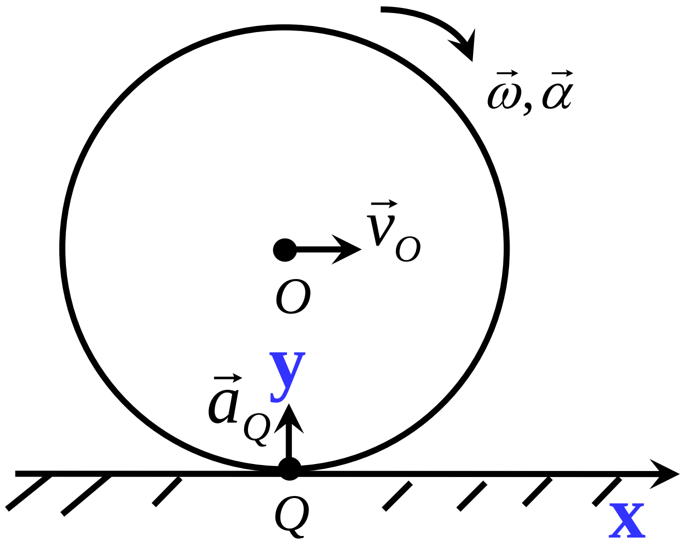
如何确定瞬心Q的加速度?

可以证明： $\vec{a}_Q \perp$ 支撑平面。

$\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{a}_{O'}$

以O为平动参考系， 则$\vec{a}_Q = \vec{a}' + \vec{a}_O$



$\vec{a}' = -\alpha r\hat{x} + \omega^2 r\hat{y}$，而$\vec{a}_O = \alpha r\hat{x}$

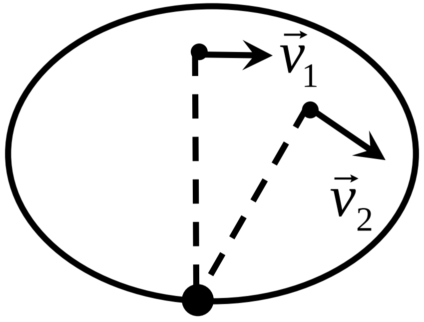
$\therefore \vec{a}_Q = \omega^2 r\hat{y}$

纯滚动：静摩擦力

$\therefore$ 摩擦力的合功=0

一般刚体平面平行运动都有瞬心

如图两速度垂线交点即为瞬心



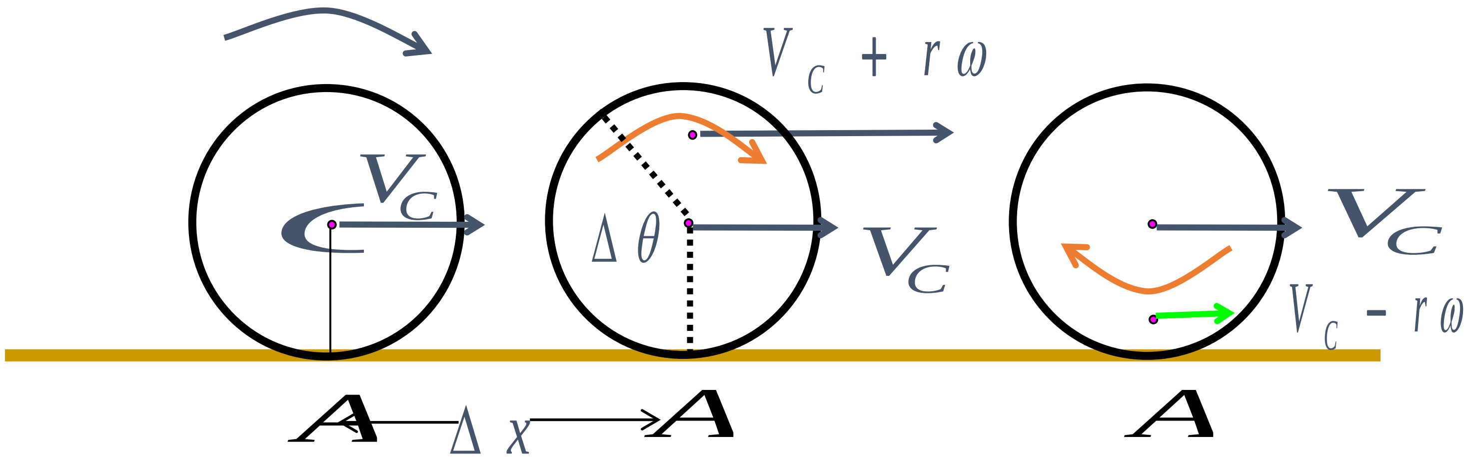
例5.18 有一半径为r_0的车轮，在地面上沿直线作无滑动的滚动，若已知车轮中心C点的速度为V_C，求在车轮上垂直于地面的直径上各点的速度。

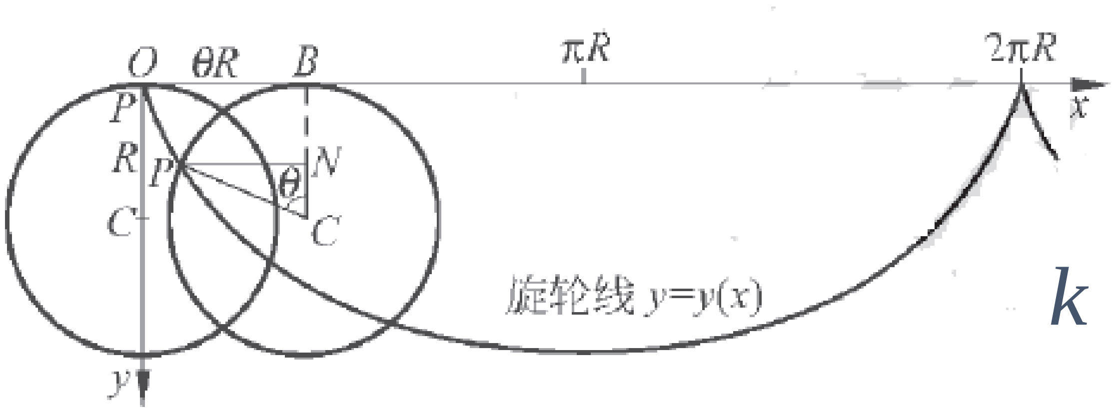
解： 无滑动的滚动称为纯滚动，车轮与地面接触点是个瞬时不动点A。

$$\Delta x = r_0 \cdot \Delta \theta \qquad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma_0 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \therefore V_C = r_0 \omega$$

$$\omega = \frac{v_C}{r_0}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}\,' = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$





$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$x = R(\theta - \sin\theta)$$

$$y = R(1 - \cos\theta)$$

$$= \cot\frac{\theta}{2}$$

刚体作平面平行运动时有三个自由度，需要三个独立的动力学方程。刚体平面平行运动可分解为以质心为代表的平面运动，和绕通过质心垂直于质心运动平面的轴的转动两部分组成。前者为平动，后者为质心系中刚体的定轴转动。描述质心的平面运动，质心定理提供两个独立的动力学方程。描述质心系中刚体的定轴转动既可以采用质心系转动定理，也可以用动能定理。因此，可以有多种方法或途径去分析刚体的平面平行运动。

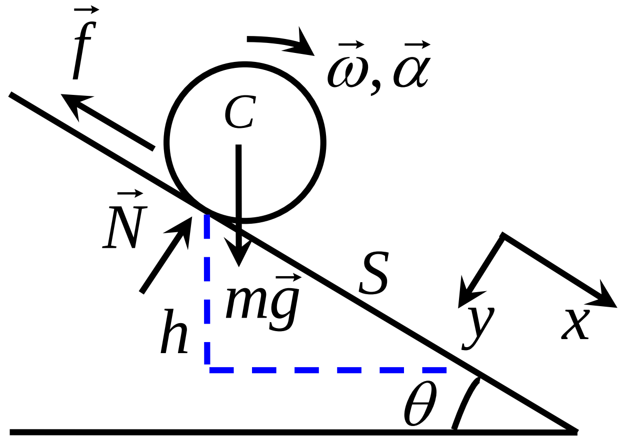
质心定理的分量方程为

$$\sum F_x = m\frac{dv_{cx}}{dt}, \qquad \sum F_y = m\frac{dv_{cy}}{dt}.$$

式中$\sum F_x$和$\sum F_y$分别为合外力沿x轴和y轴的分量。v_{cx}和v_{cy}分别为质心速度的x分量和y分量。m为刚体质量。

在质心系中，质点组角动量定理与惯性系中的形式相同，因此，刚体绕通过质心的转轴的转动定理也与惯性系中的形式相同。

例5.19 均匀圆球(m,r)沿斜面从静止开始纯滚下降高度h. 求: v_C的大小



解: **(1) 方法一**　纯滚动　$a_C = r\alpha$

X方向:　$mg\sin\theta - f = ma_C$

对过质心z'轴　$fr = J_C\alpha = \left(2mr^2/5\right)\alpha = 2mra_C/5$

得: $a_C = 5g\sin\theta/7,\quad f = 2mg\sin\theta/7$

$v_C = \left(2a_C S\right)^{1/2} = \left(10gh/7\right)^{1/2},\quad (S = h/\sin\theta)$

要保证无滑滚动，静摩擦力f不能大于最大静摩擦力μN，即

$f \leq \mu N$,　$\frac{2}{7}mg\sin\theta \leq \mu mg\cos\theta$

$\Rightarrow \mu \geq \frac{2}{7}\tan\theta$

(2) 方法二

m、地系统E守恒。取下降后位置为势能0点

$$mgh = mv_C^2/2 + J_C\omega^2/2$$

代入 $v_C = \omega r$ 得解

$$v_C = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

注意应用了科尼希定理

说明:

(1) 本例中f为静摩擦力, 具有确定值。

(2) 若m平动且无摩擦，则末态 $v_{平} = \sqrt{2gh}$

题中 $v_C = \sqrt{10gh/7} < v_{平} = \sqrt{2gh},$

平动能减少，增加转动能。

(3) f不做功，但使平动动能减少，转动动能增加

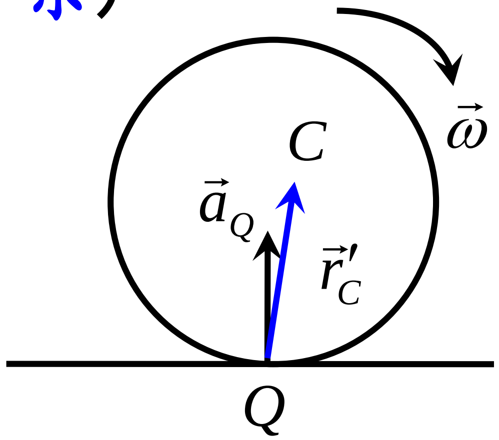
$$0 = P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \left(\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right) = -f v_C + f\omega r', \quad (\omega r' = v_C)$$

能否对瞬时轴应用转动定律来避免未知力f的影响?

即能否在瞬心参考系应用转动定律?

讨论

在瞬心参考系（原点建立在瞬心的平动参考系）中应用转动定律。



$\vec{a}_Q \neq 0$　为非惯性系，要考虑惯性力矩

$$\vec{M}_{惯} = \sum \vec{r}_i{}' \times \left(-m_i \vec{a}_Q\right) = -M\vec{r}'_C \times \vec{a}_Q \quad (*)$$

定性分析:

m_i所受惯性力类似重力　　(1) $\propto m_i$ ，(2) 方向相同

∴ 以Q为参考系时，刚体上各质点所受惯性力对Q的惯性力矩，相当于将惯性力集中在质心对Q之矩。

计算:　由(*)式，若$\vec{r}'_C \,//\, \vec{a}_Q$　则$\vec{M}_{惯} = 0$

$\therefore$对均匀圆(C与圆心重合)在平面(或曲面)上纯滚动

$$\vec{M}_{惯}=0$$

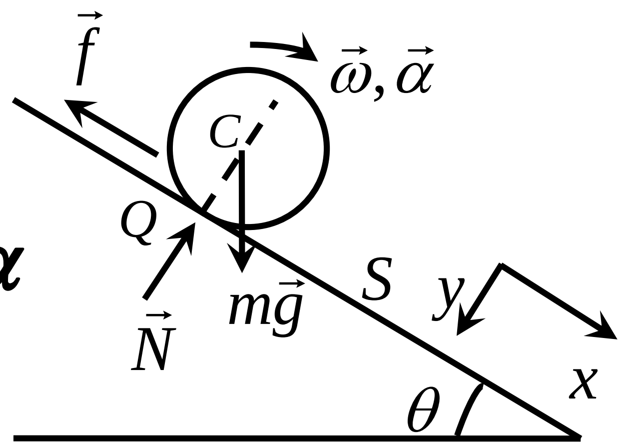
应用转动定律时不受惯性力矩影响。此时可在瞬心参考系中应用转动定律。

选瞬心系的优点：**瞬心Q处未知力在针对过Q点瞬时轴的转动方程中不出现。**

如例5.19，选瞬心系，Q点为瞬心

对过Q点Z'轴：

$$mgr\sin\theta=J_Q\alpha=\left(2mr^2/5+mr^2\right)\alpha$$



得： $\alpha=5g\sin\theta/(7r)$

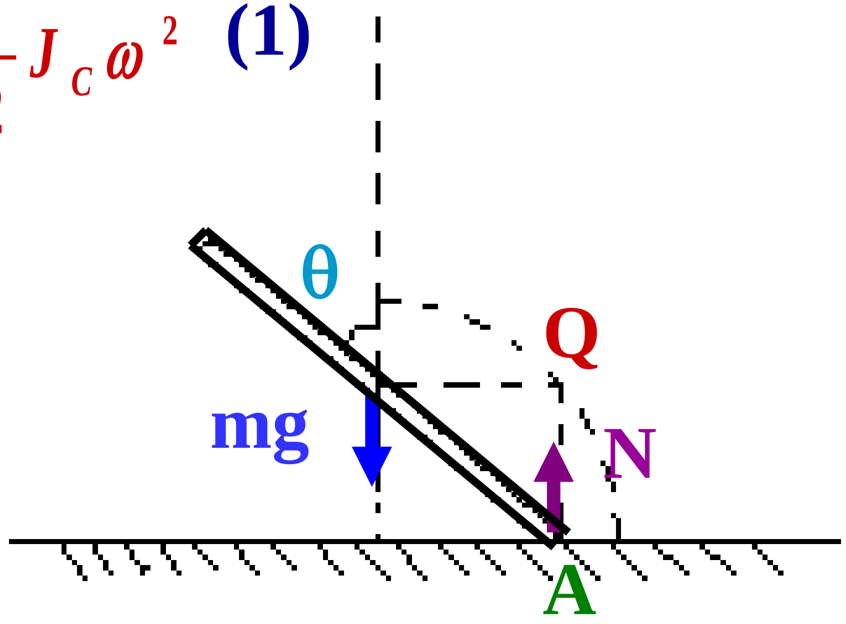
例5.20 一质量为m，长为l的均匀细杆，铅直地放置在光滑的水平面上。当杆自静止倒下时，求地面对杆端的支撑力。

解： 方法一：

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2 \quad (1)$$

$$J_C=\frac{1}{12}ml^2$$

$$v_C=\frac{l}{2}\omega\sin\theta \quad (2)$$



于是(1)式可以写成

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}m\left(1+\frac{1}{3\sin^2\theta}\right)v_C^2$$

$$v_C^2 = \frac{3gl(1-\cos\theta)\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta}$$

对t求导

$$2v_C\frac{dv_C}{dt} = \frac{3gl\sin\theta\left(\sin^2\theta+3\sin^4\theta+2\cos\theta-2\cos^2\theta\right)}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2}\omega$$

质心加速度

$$v_C = \frac{l}{2}\omega\sin\theta$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{3gl\sin\theta\left(\sin^2\theta+3\sin^4\theta+2\cos\theta-2\cos^2\theta\right)}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2}\frac{\omega}{2v_C}$$

$$= \frac{3g\left(\sin^2\theta+3\sin^4\theta+2\cos\theta-2\cos^2\theta\right)}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2}$$

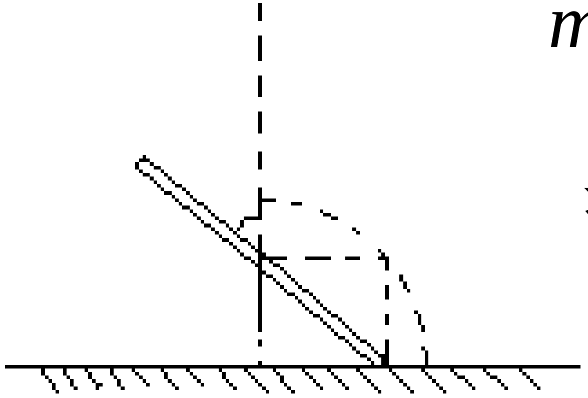
A端受地面的支撑力为

$$N = m(g - a_C) = mg\left[1 - \frac{3\left(\sin^2\theta + 3\sin^4\theta + 2\cos\theta - 2\cos^2\theta\right)}{\left(1 + 3\sin^2\theta\right)^2}\right]$$

$$= mg\,\frac{4 - 6\cos\theta + 3\cos^2\theta}{\left(1 + 3\sin^2\theta\right)^2}$$

当θ = π/2时，N = mg/4

方法二： 用N代表地面对杆的作用力，按质心运动定理



$$mg - N = ma_C \qquad a_C = g - \frac{N}{m} \qquad ①$$

按绕质心轴的转动定理 $$\frac{1}{2}Nl\sin\theta = J_C\alpha$$

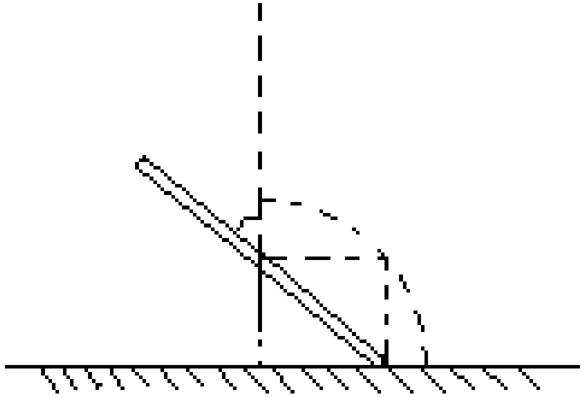
把杆绕质心的转动惯量 $J_c = \frac{1}{12}ml^2$ 代入，并整理为

$$N\sin\theta = \frac{1}{6}ml\alpha \qquad \alpha = \frac{6N\sin\theta}{ml} \qquad ②$$

按机械能守恒定律 $$\frac{1}{2}lmg = \frac{1}{24}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}lmg\cos\theta$$

$$lg = \frac{1}{12}l^2\omega^2 + v_C^2 + lg\cos\theta \qquad ③$$

以初始时刻杆的顶端为坐标原点，则在图示位置质心坐标为



$$y_c = l - \frac{l}{2}\cos\theta$$

，因此质心的速度和加速度为

$$v_C = \frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} l\omega \sin\theta \qquad ④$$

$$a_c = \dot{v}_c = \frac{1}{2} l\omega^2 \cos\theta + \frac{1}{2} l\alpha \sin\theta \qquad ⑤$$

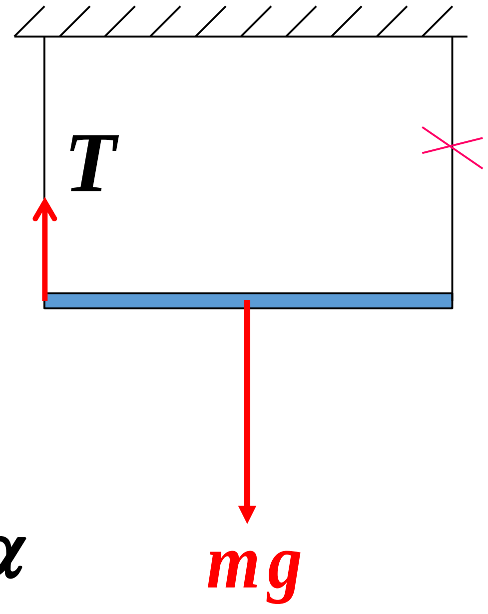
把④式代入③式，可得

$$\omega^2 = \frac{12(1-\cos\theta)}{(1+3\sin^2\theta)l} g \qquad ⑥$$

把①、②、⑥三式代入⑤式，可得地面对杆的作用力：

$$N = \frac{4-6\cos\theta+3\cos^2\theta}{(1+3\sin^2\theta)^2} mg$$

例5.21 将一根质量为m的长杆用细绳从两端水平地挂起来，其中一根绳子突然断了，另一根绳子在断的瞬间，张力是多少？



解：受力如图，设杆长为l，在绳子断的一刹那，质心运动和转动满足：

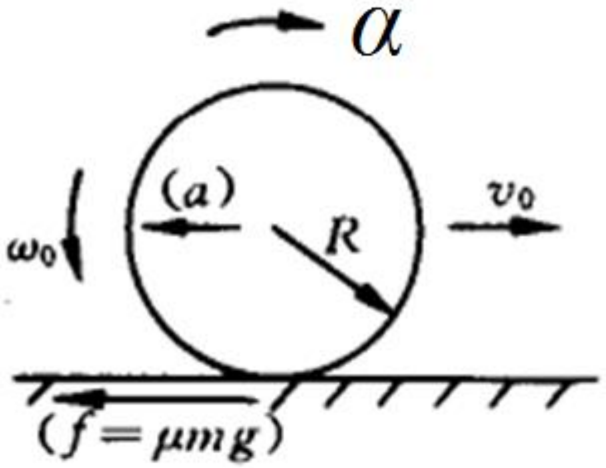
$$mg - T = ma_c \quad ; \quad T\frac{l}{2} = \frac{1}{12}ml^2\alpha$$

此时，悬绳未断的一端加速度为零，从而质心加速度和角加速度满足：

$$a_c = \alpha\frac{l}{2}$$

$$\therefore T = \frac{1}{4}mg$$

例5.22 在水平地面上用手按动半径为 R 的乒乓球，使其获得向右的初速 v_0 和逆时针方向转动角速度 ω_0，如图所示. 乒乓球可处理成匀质薄球壳，球壳与地面间的摩擦因数为常量 μ，试求乒乓球最后达到的稳定运动状态.



解： 参考图中括号内引入的参量，m 是乒乓球的质量. 初始阶段地面摩擦力朝左，使质心获得左向加速度，球壳获得绕质心轴顺时针方向角加速度. 据质心运动定理和质心轴转动定理，有

$$f = ma, \qquad fR = J\alpha, \qquad f = \mu mg, \qquad J = \frac{2}{3}mR^2,$$

即得 $$a = \mu g, \qquad \alpha = 3\mu g/2R.$$

经时间 t，右行速度 v 和逆时针方向速度 ω 分别为

$$v = v_0 - at = v_0 - \mu g t,$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - (3\mu g/2R)t.$$

分三种情况进行讨论.

(1) 经某段时间(记为 t_1)，同时达到 $v=0,\omega=0$，即

$$v_0 - \mu g t_1 = 0, \qquad \omega_0 - (3\mu g/2R)t_1 = 0,$$

这要求 v_0,ω_0 间满足关系： $$v_0 = \frac{2}{3}\omega_0 R,$$

此后乒乓球处于静止状态.

(2) 经某段时间(仍记为 t_1)，仍有 $v>0$，但恰有 $\omega=0$，即

$$v_0 - \mu g t_1 > 0, \qquad \omega_0 - (3\mu g/2R)t_1 = 0,$$

这要求 v_0, ω_0 间满足关系： $$v_0 > \frac{2}{3}\omega_0 R,$$

该阶段的末态为 $$v_1 = v_0 - \frac{2}{3}\omega_0 R, \qquad \omega = 0.$$

此后，摩擦力仍朝左，平动加速度和转动角加速度与前同。再经时间 t，右行速度 v_2 和顺时针方向角速度 ω_2 分别为

$$v_2 = v_1 - at = v_1 - \mu g t, \qquad \omega_2 = \alpha t = (3\mu g/2R)t.$$

设 $t=t_2$ 时，恰有 $$v_2 = \omega_2 R,$$

摩擦力随即消失，便将进入稳定的右行纯滚运动的状态。据

$$v_1 - \mu g t_2 = (3\mu g/2R)t_2 R$$

可得 $$t_2 = 2v_1/5\mu g,$$

$$v_2 = v_1 - \mu g t_2 = \frac{3}{5}v_1 = \frac{3}{5}\left(v_0 - \frac{2}{3}\omega_0 R\right),$$

$$\omega_2 = v_2/R = \frac{3}{5R}\left(v_0 - \frac{2}{3}\omega_0 R\right).$$

(3) 经某段时间(仍记为 t_1),恰有 $v=0$,但仍有 $\omega>0$,即

$$v_0-\mu g t_1=0, \qquad \omega_0-(3\mu g/2R)t_1>0,$$

这要求 v_0,ω_0 间满足关系:

$$v_0<\frac{2}{3}\omega_0 R,$$

此阶段的末态为

$$v_1=0, \qquad \omega_1=\omega_0-\frac{3v_0}{2R}.$$

此后,摩擦力仍朝左,平动加速度和转动角加速度与前同,这将使乒乓球进入朝左加速平动,且逆时针方向继续减速转动的运动状态. 经时间 t,左行速度 v_2 和逆时针方向角速度 ω_2 分别为 $v_2=at=\mu g t$,

$$\omega_2=\omega_1-\alpha t=\omega_1-(3\mu g/2R)t,$$

设 $t=t_2$ 时，恰有 $\quad v_2 = \omega_2 R$,

摩擦力随即消失，便将进入稳定的左行纯滚运动状态. 据

$\mu g t_2 = [\omega_1 - (3\mu g/2R)t_2]R$, 可得

$$t_2 = 2\omega_1 R/5\mu g,$$

$$v_2 = \mu g t_2 = \frac{2}{5}\omega_1 R = \frac{2}{5}\left(\omega_0 R - \frac{3}{2}v_0\right),$$

$$\omega_2 = v_2/R = \frac{2}{5R}\left(\omega_0 R - \frac{3}{2}v_0\right).$$

综上所述，乒乓球最后达到的稳定运动状态为：

若 $v_0=\frac{2}{3}\omega_0 R$，则乒乓球最后停下；

若 $v_0>\frac{2}{3}\omega_0 R$，则乒乓球最后达右行纯滚状态；

若 $v_0<\frac{2}{3}\omega_0 R$，则乒乓球最后达左行纯滚状态．

例5.23 半径为R，质量为m的匀质乒乓球，可处理为厚度可略的球壳。开始时以角速度ω_0围绕它的一条水平直径轴旋转，球心无水平方向速度，今将其轻放在水平地面上，乒乓球与地面之间的滑动摩擦处处相同。

(1) 试求乒乓球达到稳定运动状态时，它的转动角速度ω；

(2) 计算从开始到最后达到稳定运动状态的全过程中，乒乓球动能的损失量E'。

（已知半径为R，质量为m的匀质球壳相对其直径转轴的转动惯量为$\frac{2}{3}mR^2$ ）

解： (1) 方法一

根据上题结论质心速度 $v = \mu g t$

$$\omega = \omega_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu g}{R} t$$

乒乓球达到稳定运动状态时 $v = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{5}\omega_0$

方法二

$$\begin{cases} -\mu m g R t = J\omega - J\omega_0 \\ \mu m g t = m\omega R \\ J = \frac{2}{3} m R^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{5}\omega_0$$

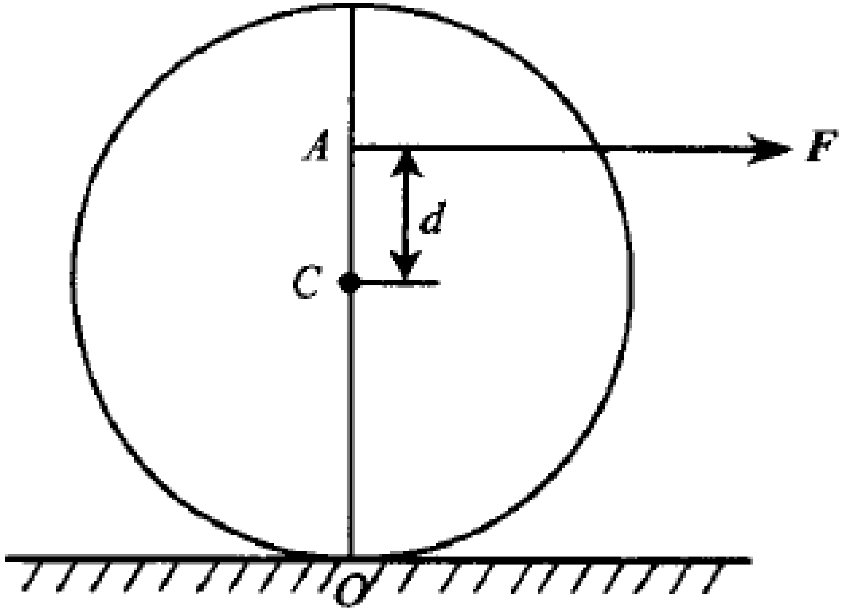
(2) $$E' = \frac{1}{2} J\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2\right) = \frac{1}{5} m\omega_0^2 R^2$$

关于静摩擦力的方向

教材第4版，p.163，例5.14

摩擦力f应与拉力F方向相反。

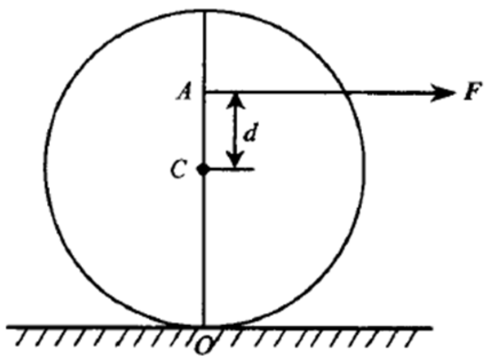
2. 设小球在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下在平直地面上作纯滚动，$\boldsymbol{F}$ 不是作用在质心 C 上，而是作用在 A 上，A 是接触点 O 与质心 C 连线上的一点，$CA=d$，如图所示。设小球半径为 r，质量为 m。试判断接触点 O 处静摩擦力的方向。



解： 在处理理想刚体（即无形变，可以不考虑滚动摩擦）的纯滚动问题时，滚动物与其他物体的接触点处相对速度为零，在此点若有摩擦力存在，即为静摩擦力。判断该静摩擦力的方向需要十分小心。这里有一个一般可用的原则：设想此物体与接触点脱离，使摩擦不复存在，此时触点切向加速度的反方向即为静摩擦力的方向。即摩擦力与物体在接触点的运动趋势方向相反。

设 O 点没有摩擦力，则绕质心的转动公式为

$$Fd = J_C\alpha \qquad J_c = \frac{2}{5}mr^2$$



质心的运动方程为 $a_c = \dfrac{F}{m}$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{0'} = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{a}_{0'}$$

触点 O 对地面的切向加速度 a 的大小为

$$a = a_C - \alpha r = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{5d}{2r}\right)$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_C - \alpha\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{m}}\left(1 - \frac{5\boldsymbol{d}}{2\boldsymbol{r}}\right)$$

由此可得以下判断：

（1）当 $d<\frac{2}{5}r$ 时，$a>0$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 同向，所以静摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 反向。

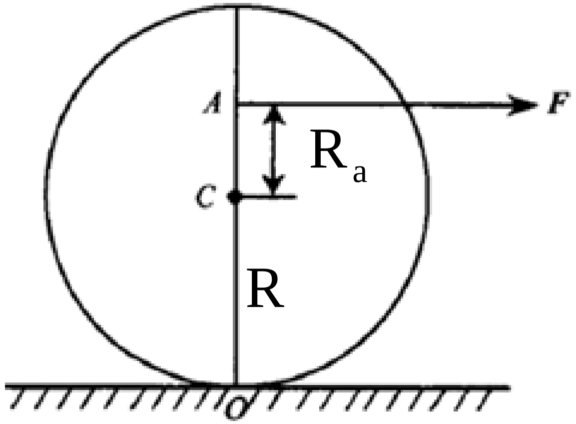
（2）当 $d>\frac{2}{5}r$ 时，$a<0$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 反向，$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 同向。

（3）当 $d=\frac{2}{5}r$ 时，$a=0$，此时 O 点无运动的趋向，则 $\boldsymbol{f}=0$。

（4）特别地，当外力 $\boldsymbol{F}=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 恒为零，$\boldsymbol{f}$ 恒为零，小球将保持匀速纯滚动。

教材第4版p.163，例5.14

设O点无摩擦力



$$FR_a = J_C\alpha \qquad J_c = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\boldsymbol{a_c} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{m}}$$

$$a_t = a_c - \alpha R = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{2R_a}{R}\right)$$

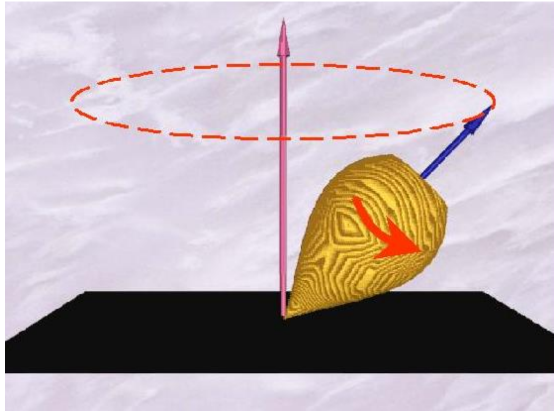
$$\frac{2R_a}{R} = \frac{2\times 5}{30} = \frac{1}{3} \Longrightarrow a_t > 0$$

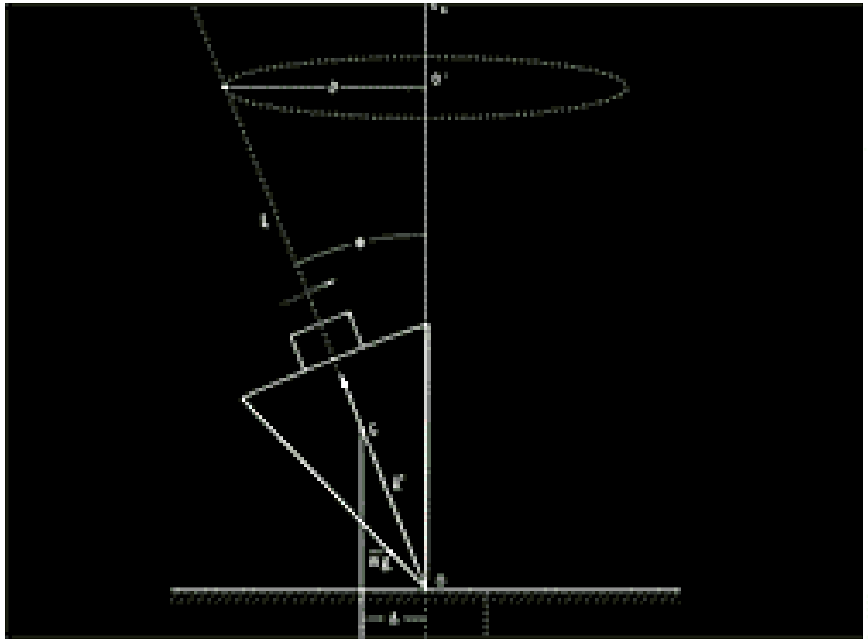
摩擦力*f*应与拉力*F* 方向相反。

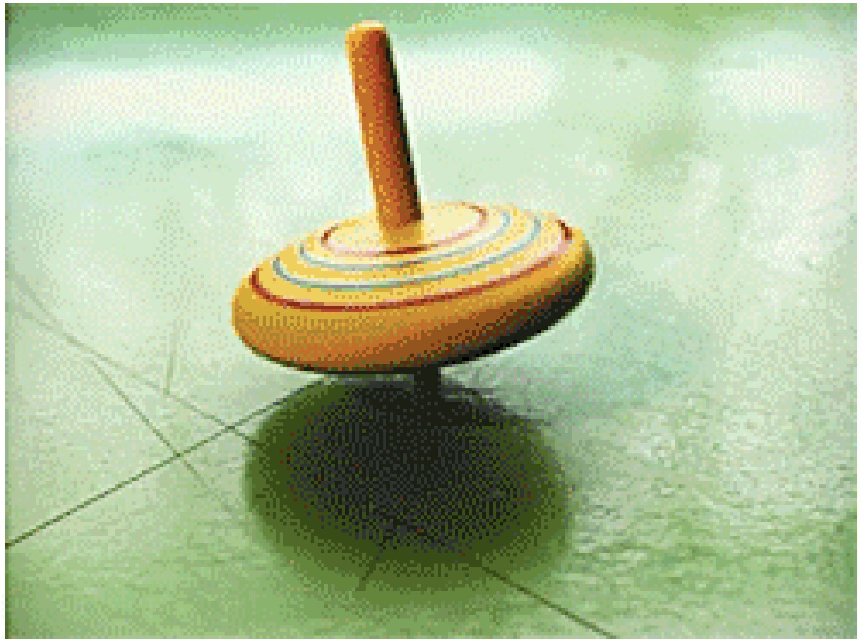
5.8 进动

高速旋转的物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象。

如玩具陀螺的运动：







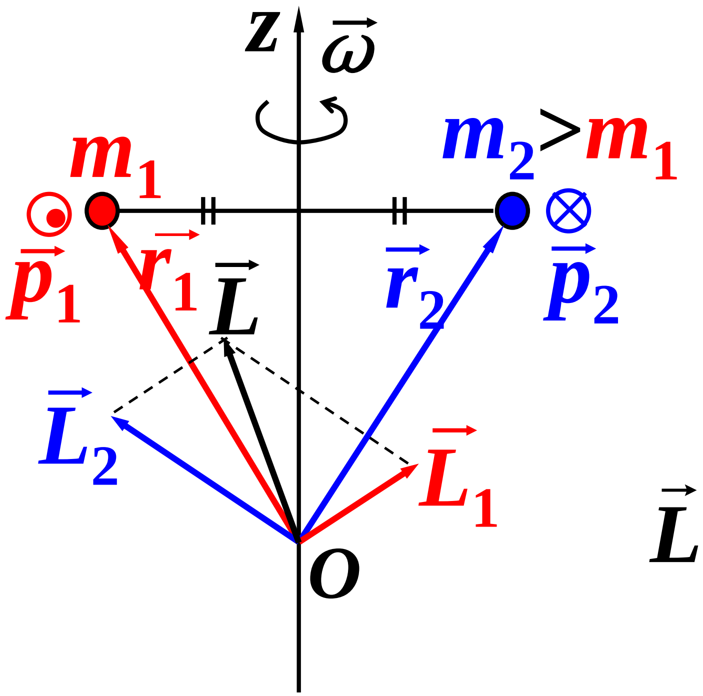
陀螺：绕固定点作高速转动的刚体。

(对称)陀螺：质量均匀分布的轴对称刚体，且以其几何对称轴为自转轴。

陀螺仪：运用陀螺的力学特性制成的陀螺装置。

质量对转轴不对称，则对

轴上O点的 $\vec{L}$ 不平行于 $\vec{\omega}$ 。



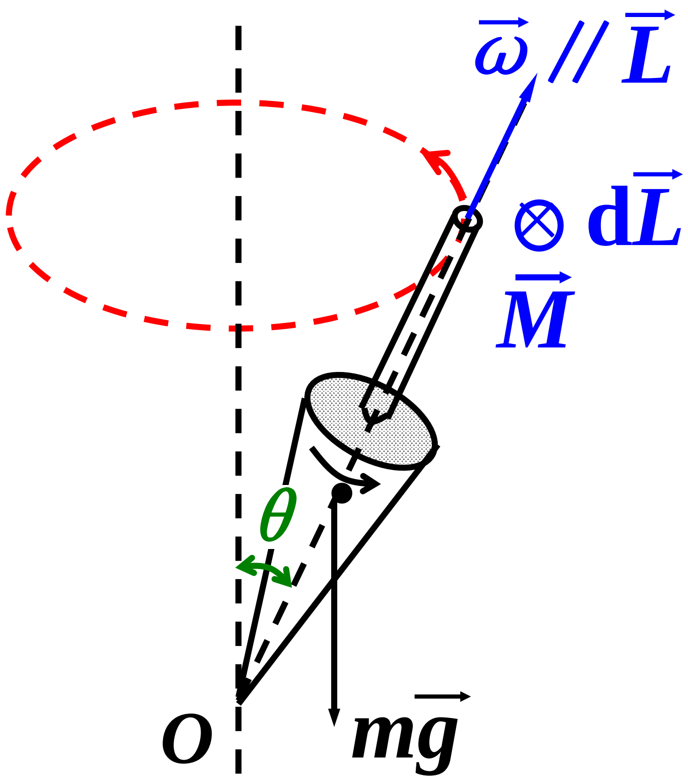
若质量对转轴分布对称，
则：

$$\vec{L} \,//\, \vec{\omega} \,//\, \text{轴}$$

$$\vec{L}\text{（对点）} = L_z \vec{k}\text{（对轴）} = J_z \vec{\omega}$$

下面我们就讨论这种质量对转轴分布对称的刚体的进动问题。

一、陀螺的进动



玩具陀螺的旋进：

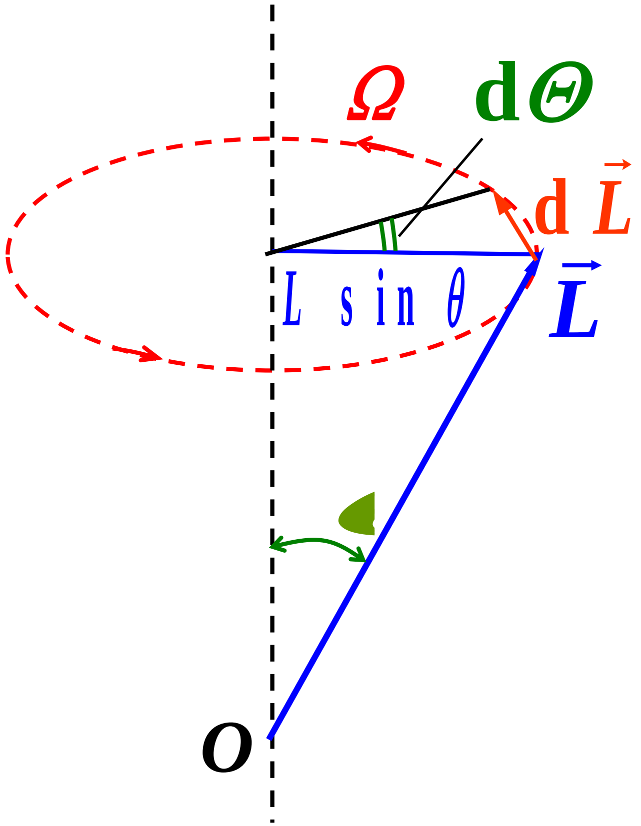
$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\longrightarrow$$

$$\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\,\mathrm{d}t\,//\,\vec{M}\ 。$$

$$\vec{M}\perp\vec{L}\longrightarrow\mathrm{d}\vec{L}\perp\vec{L}$$

$\longrightarrow$ $\vec{L}$ 只改变方向而不改变大小，

从而产生旋进运动。



进动角速度：$\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$

$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta$$

$$M = \frac{\left|\mathrm{d}\vec{L}\right|}{\mathrm{d}t} = \frac{L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$$

$$= L\sin\theta \cdot \Omega$$

$$\boxed{\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgr_C}{J\omega}} \quad \propto \frac{1}{\omega},\ \omega\uparrow \to \Omega\downarrow$$

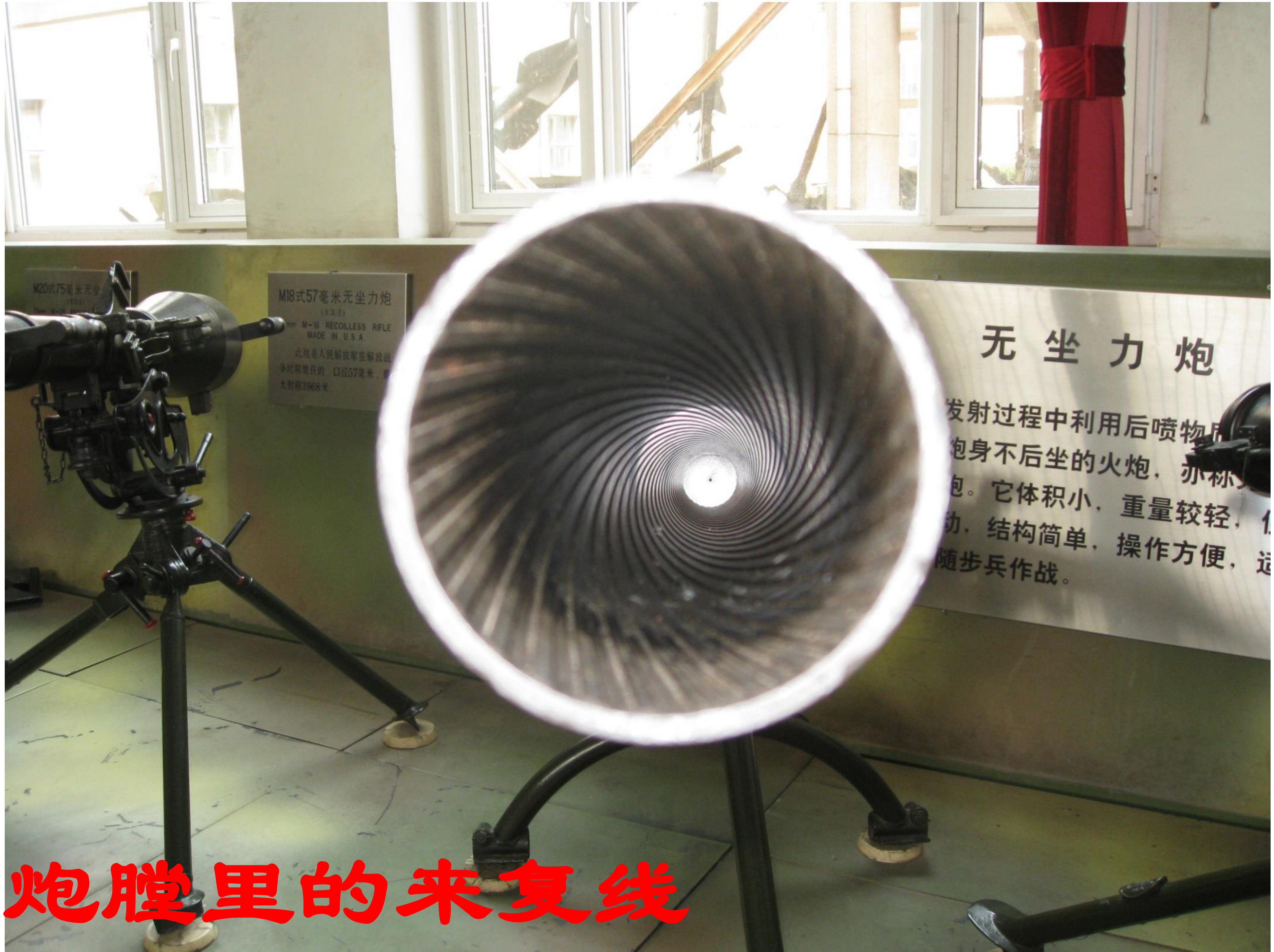
$$\boxed{\text{当}\ \theta = 90°\ \text{时，}\ \Omega = \frac{M}{J\omega}}$$

陀螺的进动角速度Ω随着其自转角速度ω的增大而减小，与角度θ无关。

$$\Omega = \frac{mgr_C}{J\omega}$$

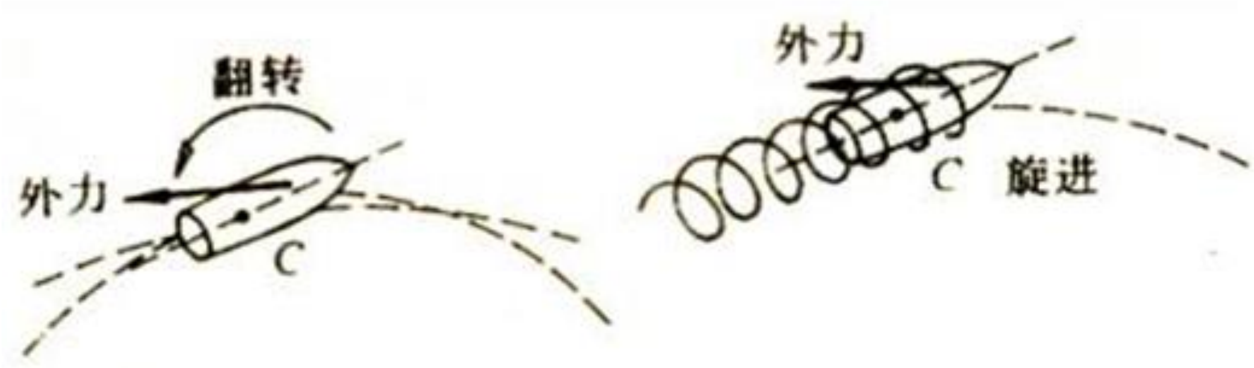
当陀螺的自转角速度ω不够大时，则除了自转和进动外，陀螺的对称轴还会在铅垂面内上下摆动，即θ角会有大小波动，称为**章动**。

利用炮膛或枪膛中的**来复线**，可使炮弹或子弹绕自身的对称轴高速旋转。这样，炮弹或子弹在前进中将绕自己的行进方向进动，不至因受到的空气阻力矩而翻转。

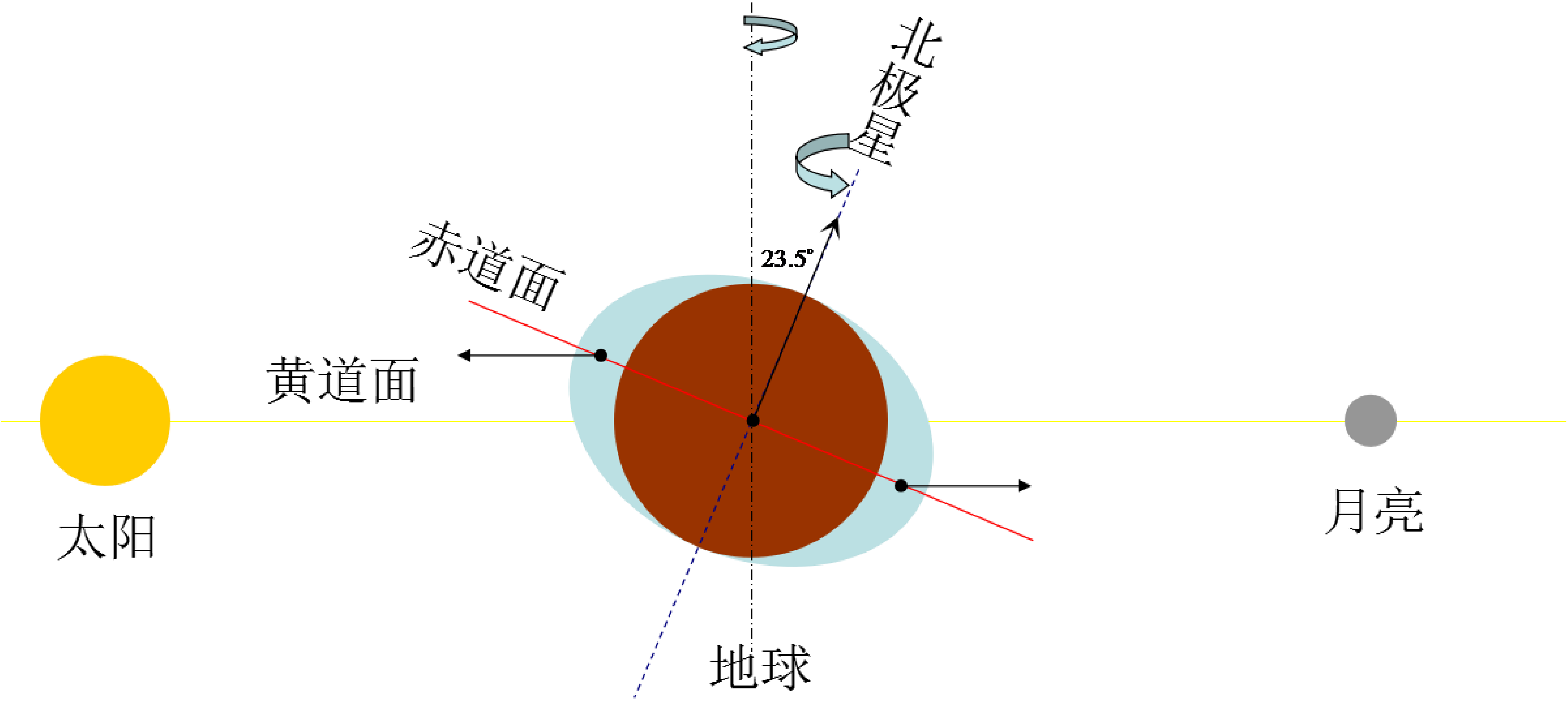


炮膛里的来复线

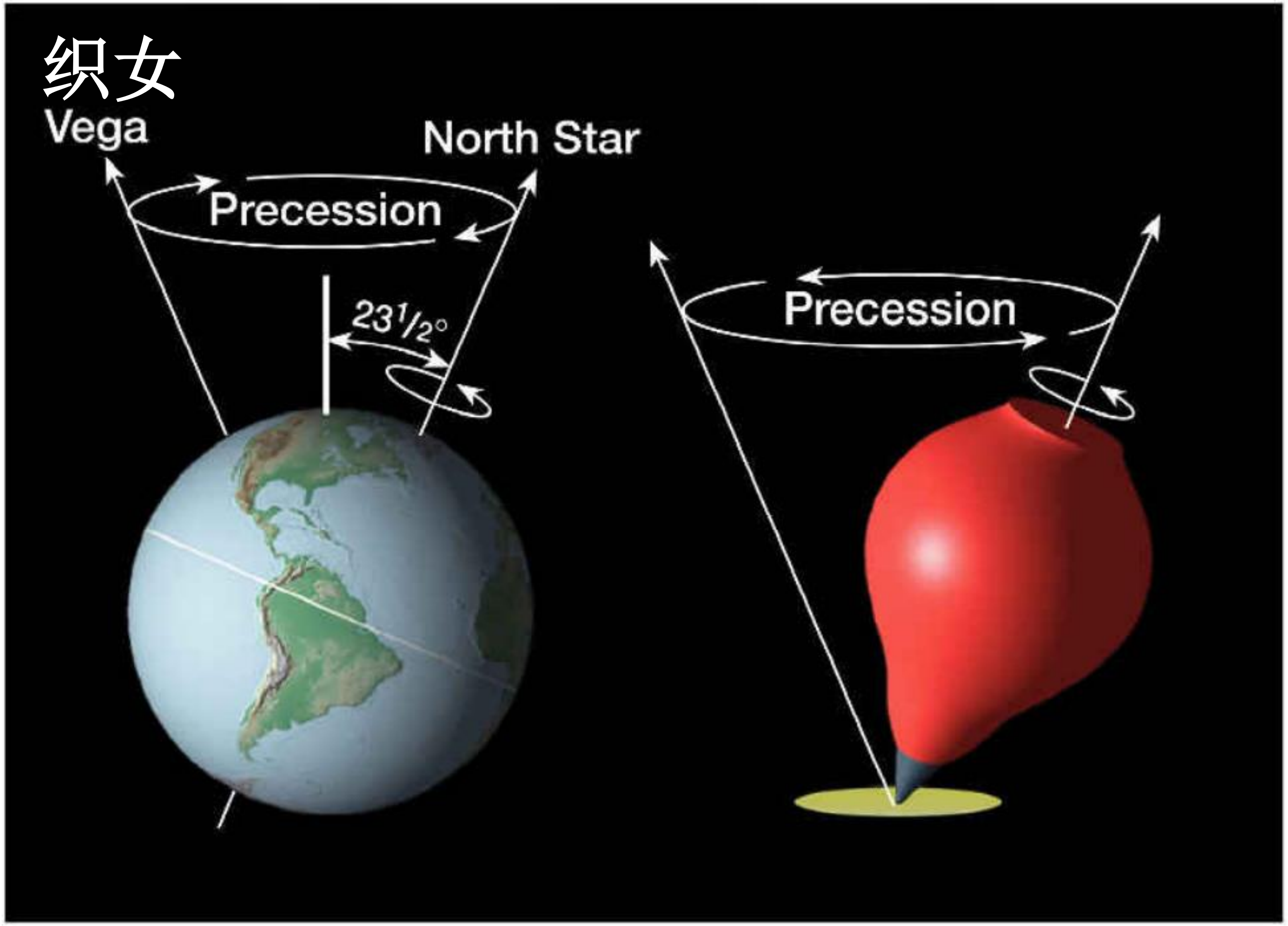
炮弹的运动：
平动+自旋+进动



地球的进动与章动



地球不是一个理想的圆球，赤道部分稍有隆起
(潮汐在这里也起了一定作用)

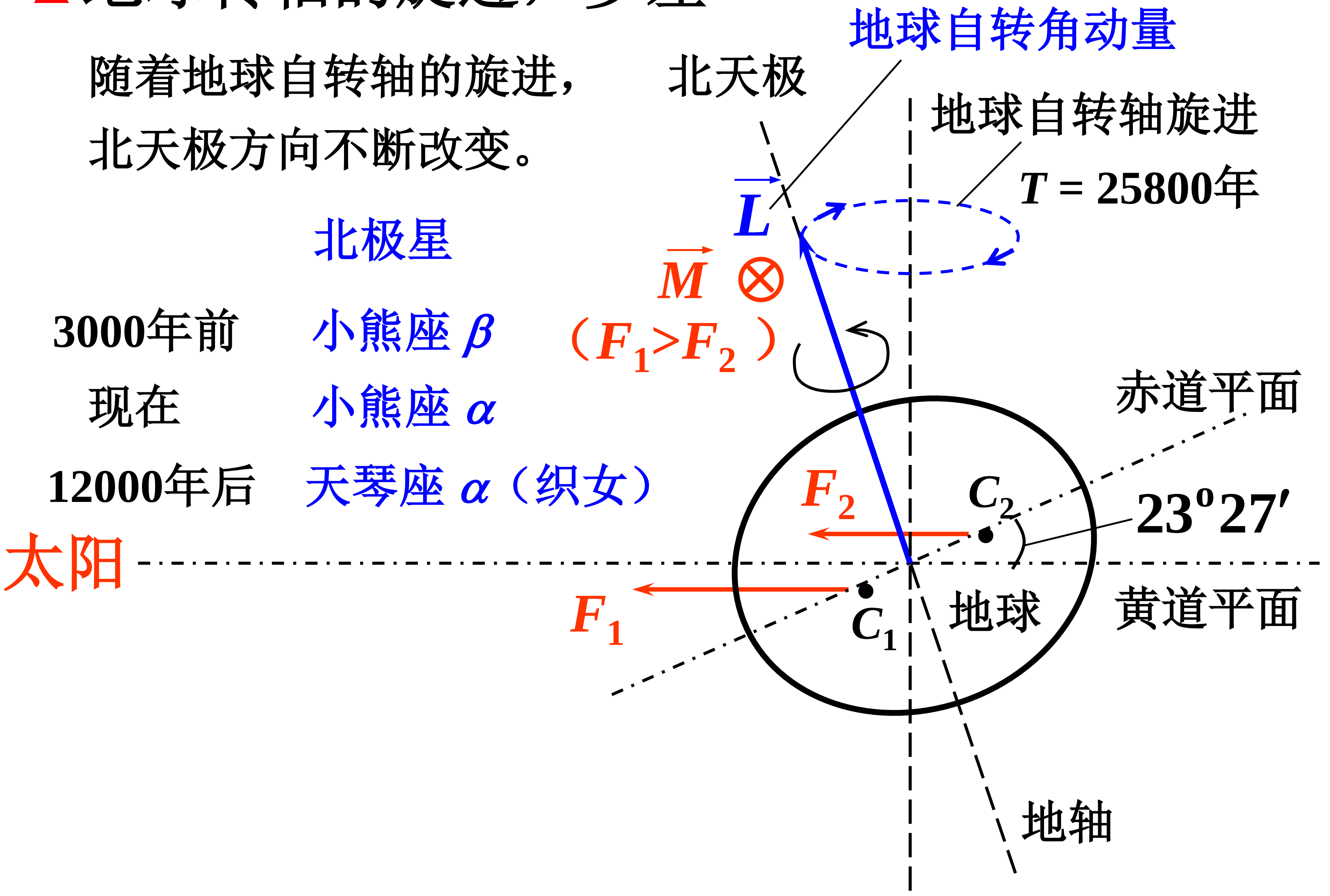


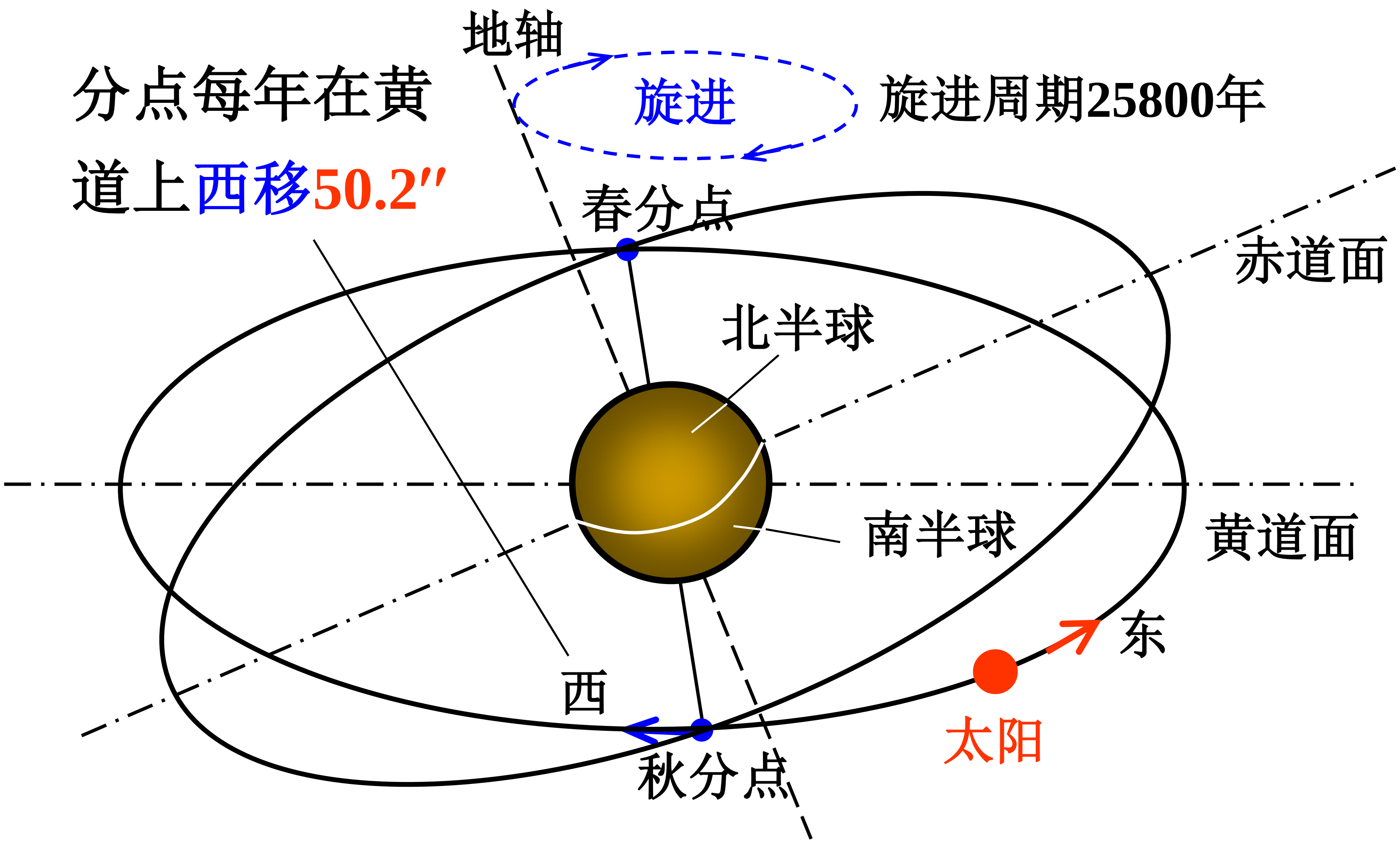
地球进动周期 = 25770年 ≈ 26000年

▲地球转轴的旋进，岁差

随着地球自转轴的旋进，
北天极方向不断改变。

	北极星
3000年前	小熊座 β
现在	小熊座 α
12000年后	天琴座 α（织女）





太阳年（回归年）：太阳由春分→秋分→春分
恒星年（时间长）：　地球绕太阳一周的时间

岁差（precession）

岁差 = 恒星年 -太阳年 = 20分23秒钟

希腊天文学家喜帕恰斯(Hipparchus)大约在公元前130年报道，二分点的进动每年约36角秒。

我国古代的发现：

▲西汉末年的刘歆与后汉的贾逵也发现了二分点的进动。

▲晋朝虞喜确定了岁差：

每50年差1度（约72″/年）（精确值为50.2″/年）

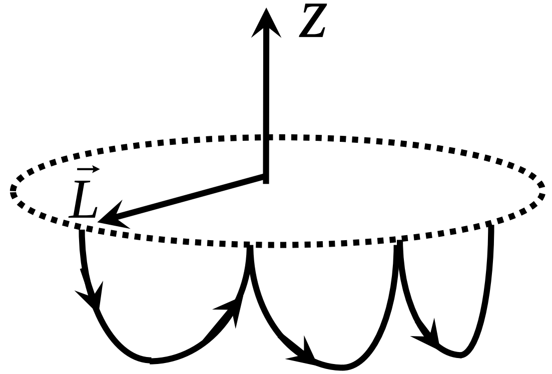
▲祖冲之（公元429 — 500）编《大明历》最先将岁差引入历法：391年有144个闰月。

当旋进发生后，总角速度 $\vec{\omega}_{总} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} \neq \vec{\omega}$ 。

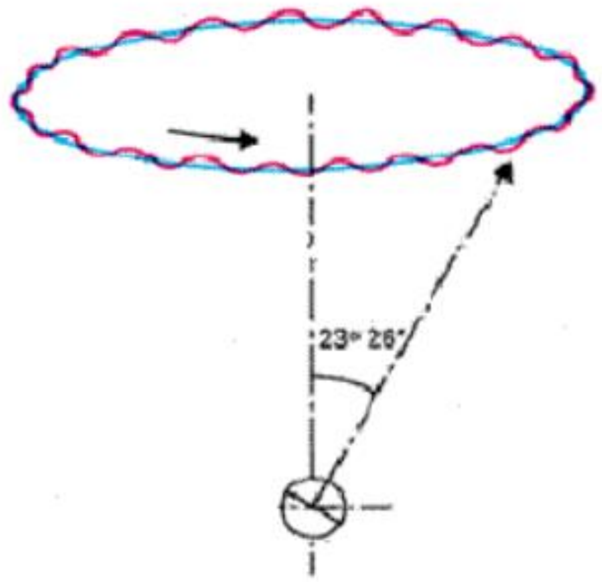
只有刚体高速自转时，才有 $\vec{\omega}_{总} \doteq \vec{\omega}$ ，

这时也才有 $\vec{L} \doteq J\vec{\omega}$ 和以上 $\boldsymbol{\Omega}$ 的表示式。

当考虑到 $\vec{\Omega}$ 对 $\vec{\omega}_{总}$ 的贡献时，自转轴在旋进中还会出现微小的上下的周期性摆动，这种运动叫章动（**nutation**），拉丁语中是“点头”的意思。



地轴除进动外，也有章动。地轴的章动是英国天文学家布拉得雷（J. Bradley）于1748年分析了20年的观测资料后发现的。地轴章动的周期为18.6年，近似地说，就是19年。在我国古代历法中把19年称为一“章”，这便是中译名“章动”的来源。



二、绕质心运动刚体的角动量守恒和陀螺仪

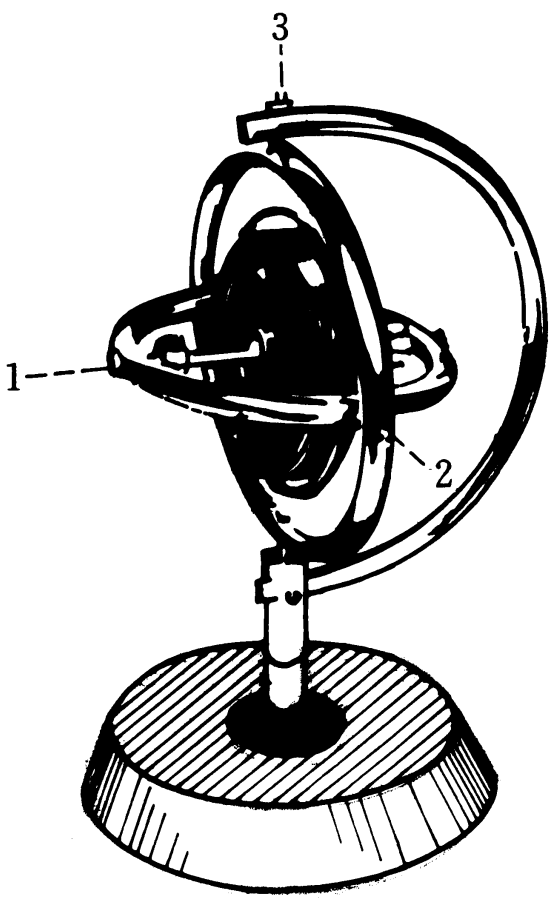
$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}}{\mathrm{d}t}=\vec{\mathbf{M}}$$

表明，在无外力矩的情况下，刚体的角动量保持恒定。

这时若使物体绕其自转轴转动，则该物体将以恒定的角速度绕其自转轴持续地转动，保持角动量

$L=\vec{J}\omega$ **守恒。**

常平架陀螺仪：一个边缘厚重的轴对称物体(称为转子)可绕其对称轴转动，转轴装在一常平架上。



转子、内环和外环的三个转轴两两正交，其交点与转子的质心重合。这样，转子既不受重力矩的作用，又能在空间任意取向，因此又称为三自由度陀螺。若不考虑轴承的摩擦和空气阻力，则由于对质心来说外力矩等于零，转子的角动量守恒。**一旦转子绕其对称轴高速转动起来，不管如何移动或转动陀螺仪，回转轴将总是指向空间某一确定的方向。**

在外力矩的作用下，转子的自转角速度越大，所产生的进动角速度就越小。因此，高速转动的三自由度陀螺，即使受到了有限的冲击力矩的作用，转轴也只会在短时间内发生微小的偏转而进行微幅的高频章动。所以，高速自转的陀螺具有极大的反抗外力矩的作用，以力图保持其转轴在空间的方向不变。

这一特性使其广泛应用于航海、航空、导弹和火箭等系统的定向、导航和自动驾驶等，它们的转子转速高达每分钟数万转。若高速转动的转子稍不对称，就会对各个支撑轴承产生巨大的作用力而使其损坏，因此在设计和制造转子时的精度要求极高。

总结

定轴转动 角速度和线速度：$v=\omega R$

角加速度和线加速度：

切向 $a_t=\alpha R$ 法向 $a_n=\omega^2 R$

转动角加速度和力矩(对轴)：$M=J\alpha$

力矩和角动量沿轴分量：$\Delta L=L_2-L_1=\int_{t1}^{t2}M\mathrm{d}t$

力矩做功：$W=\int_{\theta 1}^{\theta 2}M\mathrm{d}\theta$

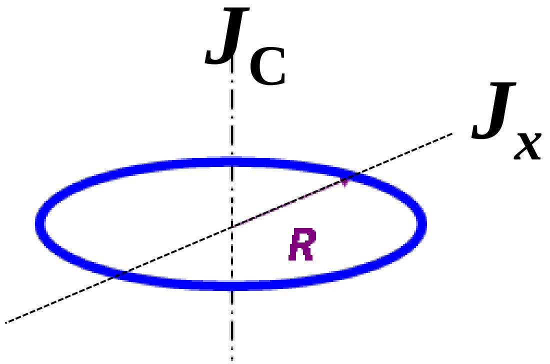
定轴转动动能：$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$

对z轴的转动惯量： $J_z=\sum_i \Delta m_i r_i^2$

转动惯量的平行轴定理： $J_d=J_C+md^2$

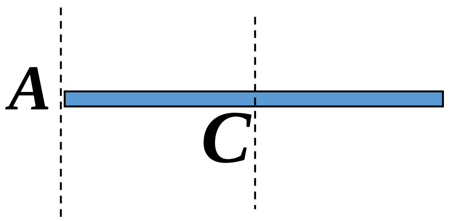
对平行xy平面的薄板垂直轴定理： $J_z=J_x+J_y$

常见刚体的转动惯量：



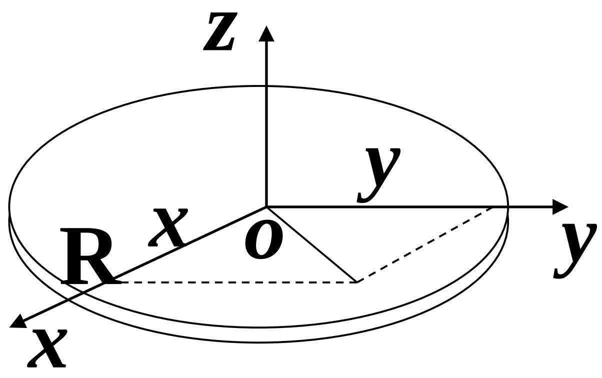
$$J_C=mR^2$$

$$J_x=\frac{1}{2}mR^2$$



$$J_C = \frac{1}{12} ml^2$$

$$J_A = \frac{1}{3} ml^2$$



$$J_C = \frac{1}{2} mR^2$$

$$J_x = \frac{1}{4} mR^2$$

刚体的平面平行运动

刚体的平面平行运动

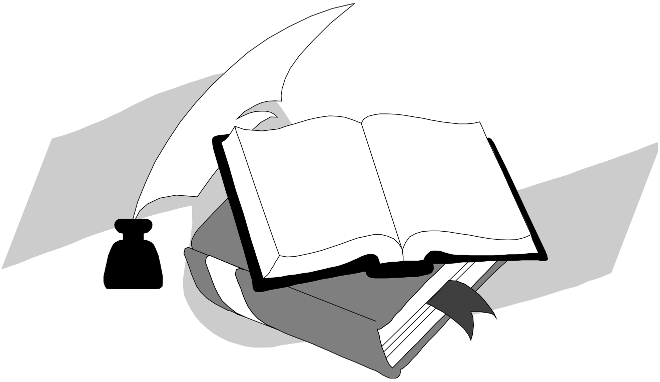
随质心的平动

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}$$

绕过质心的轴的转动
(轴垂直运动平面)

$$M_{外C}=\frac{\mathrm{d}L_C}{\mathrm{d}t}$$

知道了质心的运动和绕过质心轴的转动，
整个刚体的运动就全部确定了。



第五章结束