最优控制

本章内容

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

1. 基本概念
2. 泛函与变分
3. 变分法求解最优控制
4. 线性系统二次型指标的最优控制
5. 极小值原理简介
6. 二阶积分系统的时间最优控制※

基本概念

探月飞船软着陆

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

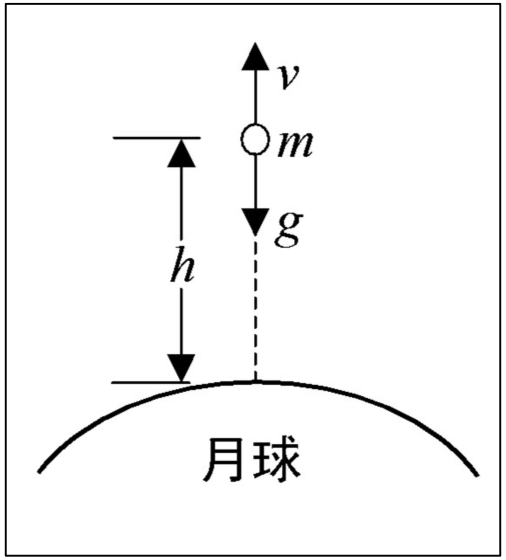
设飞船总质量为$\boldsymbol{m}$，自身质量及所带燃料质量分别为$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{F}$，高度和垂直速度分别为$\boldsymbol{h}$和$\boldsymbol{v}$，月球重力加速度为$\boldsymbol{g}$，自$\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$时刻进入着陆过程。其运动方程为：

$$\dot{h}(t)=v(t),\qquad h(0)=h_0$$

$$\dot{v}(t)=\frac{f(t)}{m(t)}-g,\quad v(0)=v_0$$

$$\dot{m}(t)=-kf(t),\ \ m(0)=M+F$$

其中 $\boldsymbol{f(t)}$是燃料燃烧产生的推力。



宇宙飞船软着陆

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

要求控制飞船于某一时刻 t_f 实现软着陆，即

$$h(t_f) = 0, \quad v(t_f) = 0$$

并且所消耗的燃料最少，即使性能指标

$$J[f(t)] = m(t_f)$$

达到最大,其中推力 $f(t)$ 受发动机最大推力的限制，即

$$0 \le f(t) \le f_{\max}$$

最优控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定义：给定受控系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{t}),\quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0$$

令$\boldsymbol{U}$为容许控制集。求一容许控制$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$，使系统由给定的初态转移到希望的末态或末态集合:

$$\boldsymbol{M} = \left\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f) \middle|\ \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f\right) = \mathbf{0}\right\}$$

并使如下性能指标最小

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f; \boldsymbol{u}), \boldsymbol{t}_f] + \int_{\boldsymbol{t}_0}^{\boldsymbol{t}_f} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

目标+约束描述

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

目标：以控制函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ 和状态轨迹 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ 为自变量的“函数”（泛函）

$$\min_{u(\cdot),x(\cdot)} J[u(\cdot),x(\cdot)] = \varphi[x(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t),u(t),t]\mathrm{d}t$$

约束:

1） $\dot{x}(t) = f[x(t),u(t),t],\quad x(t_0) = x_0$

2） $M = \{x(t_f) \mid g(x(t_f),t_f) = 0\}$

【类比： $\min\limits_{(x_1,x_2)} x_1 + x_2$, s.t., $x_1^2 + x_2^2 = 1$】

为什么要研究最优控制?

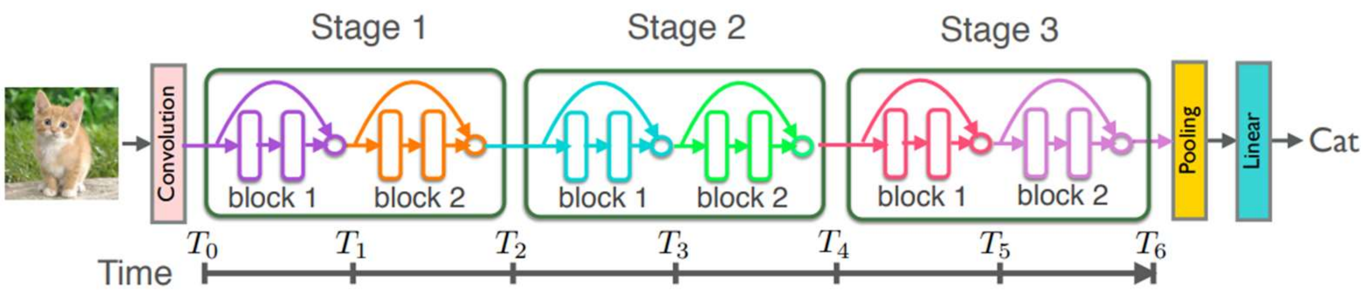
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- PID或极点配置方法多基于近似或经验，结果偏于保守;
- 可调节参数较少，且为简化设计常限制可选择方案，难以实现快速性、准确性和鲁棒性的平衡.
- 性能评价 (稳、准、快) 难以准确反映经济性、能耗等实际系统中关心的指标.
- 已有方法难以保证满足控制过程中必须满足的控制或状态约束。
- 某些应用场景下需要得到开环控制.

为什么要研究最优控制?

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 最优控制与深度学习基于同源的数学框架，它们的研究思想相互借鉴相互促进.



MACHINE LEARNING AND CONTROL THEORY, A. Bensoussan, *et al*., arXiv:2006.05604

泛函与变分

概念回顾：函数的微分

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

函数 $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的微分：$\mathbf{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x}$

函数 $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ 的微分

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_1}\mathbf{d}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_n}\mathbf{d}\boldsymbol{x}_n$$

函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$处取极值的必要（非充分）条件：

$$\left.\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_n}\right)\right|_{\boldsymbol{x}_0} = \mathbf{0}.$$

如何定义并计算泛函的“微分”和“导数”？

泛函 - “函数的函数”

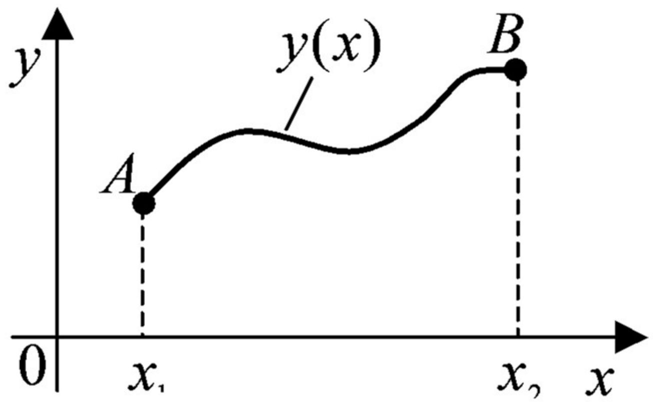
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

泛函 $\boldsymbol{J}: \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ 是(无穷维)函数集合$\mathbb{Y}$到实数集合的映射，其自变量称为“宗量”。

例1： $\boldsymbol{J}[\boldsymbol{y}(\cdot)] = \int_0^1 \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x}$

例2：平面上A、B两点之间曲线的弧长S是曲线函数$y(x)$的泛函。若$y(x)$连续可微，则S可表示为：

$$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})] = \int_{x_1}^{x_2} [1 + \dot{y}^2(x)]^{\frac{1}{2}} dx$$



线性泛函

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

线性泛函是满足以下条件的泛函：

1) $J[y_1(x)+y_2(x)]=J[y_1(x)]+J[y_2(x)]$,

2) $J[ay(x)]=aJ[y(x)]$, a为任意常数.

例： $J_f[y(\cdot)]=\int_0^1 f(x)y(x)\mathrm{d}x$

$J_f[y(\cdot)]=f(x_0)$

泛函的变分（← 微分）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

宗量函数的变分$\boldsymbol{\delta y(x)}$是$\boldsymbol{y(x)}$的无穷小微扰，是$\boldsymbol{x}$的函数.

宗量的变分$\boldsymbol{\delta y}$引起的泛函增量可以表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta J} &= \boldsymbol{J[y(x)+\delta y(x)]-J[y(x)]} \\ &= \boldsymbol{L_y[\delta y(x)]+\beta_y[\delta y(x)]}\end{aligned}$$

其中线性泛函 $\boldsymbol{L_y}$是关于$\boldsymbol{\delta y}$的线性部分，而$\boldsymbol{\beta_y}$是关于$\boldsymbol{\delta y}$的高阶无穷小.

线性泛函$\boldsymbol{L_y}$称为泛函的变分，简记为$\boldsymbol{\delta J[y(x)]}$，其概念与函数微分 $\boldsymbol{\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x}$对应.

泛函的极值

若泛函$\boldsymbol{J[y(x)]}$对于充分接近$\boldsymbol{y^*(x)}$的任何曲线$\boldsymbol{y(x)}$，都有

$$\boldsymbol{\Delta J = J[y(x)] - J[y^*(x)] \geq 0 \quad (\leq 0)}$$

则称泛函$\boldsymbol{J[y(x)]}$在曲线$\boldsymbol{y^*(x)}$上达到极小值（极大值）.

定理：泛函$\boldsymbol{J[y(x)]}$在$\boldsymbol{y^*(x)}$上取极值的必要(非充分)条件是

$$\boldsymbol{\delta J[y^*(x)] = 0}$$

类比：函数$\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{x_0}$取极值的必要条件是$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.

问题：如何计算泛函的变分$\boldsymbol{\delta J[y(x)]}$？

变分的计算

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理1：泛函$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})]$的变分可如下计算：

$$\boldsymbol{\delta J}=\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}}\boldsymbol{J}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a\delta y}(\boldsymbol{x})]\Big|_{\boldsymbol{a=0}}$$

证明：$\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}}\boldsymbol{J}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a\delta y}(\boldsymbol{x})]\Big|_{\boldsymbol{a=0}}$

$$=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\mathbf{1}}{\Delta a}\{\boldsymbol{J}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})+\Delta a\boldsymbol{\delta y}(\boldsymbol{x})]-\boldsymbol{J}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})]\}$$

$$=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\boldsymbol{L_y}[\Delta a\boldsymbol{\delta y}(\boldsymbol{x})]}{\Delta a}+\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\boldsymbol{\beta_y}[\Delta a\boldsymbol{\delta y}(\boldsymbol{x})]}{\Delta a}=\boldsymbol{\delta J}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})]$$

变分的计算

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理2 对于积分型泛函 $J=\int_{x_1}^{x_2} F[y(x)]\,\mathrm{d}x$，则

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)\mathrm{d}x$$

证明：

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial a}\int_{x_1}^{x_2} F\,[y(x)+a\delta y(x)]\mathrm{d}x\bigg|_{a=0}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F(y+a\delta y)}{\partial(y+a\delta y)}\cdot\frac{\partial(y+a\delta y)}{\partial a}\right]\bigg|_{a=0}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)\mathrm{d}x\,.$$

变分的计算

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

示例：泛函$J=\int_0^1 y^2(x)\mathrm{d}x$的变分

$$\delta J=\int_0^1 \frac{\partial[y^2]}{\partial y}\delta y(x)dx \;=2\int_0^1 y(x)\delta y(x)dx$$

推论：对于有多个宗量的泛函：

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F\left[y_1(x),\cdots,y_n(x),x\right]\mathrm{d}x$$

则

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1(x)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y_n}\delta y_n(x)\right]\mathrm{d}x$$

变分法基本引理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

假设$\boldsymbol{n}$维函数向量$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{x})]^{\top}$的每一个分量$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n})$均在区间$[\boldsymbol{x}_a,\ \boldsymbol{x}_b]$上连续。

若对于在区间$[\boldsymbol{x}_a,\ \boldsymbol{x}_b]$上各分量均连续且满足$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_a) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_b) = \mathbf{0}$的任意函数向量$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(\boldsymbol{x})]^{\top}$，都成立

$$\int_{x_a}^{x_b} \boldsymbol{f}^{\top}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \mathbf{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

则在区间$\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b]$上必有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \equiv \mathbf{0}$.

例： $\boldsymbol{\delta}\left[\int_0^1 \boldsymbol{y}^2(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x}\right] = \mathbf{2}\int_0^1 \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\delta y}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) \equiv \mathbf{0}$

不动边界的泛函极值问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设泛函为：

$$J[x(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} F[x(t), \dot{x}(t), t]\,\mathrm{d}t$$

起始时刻t_0和终端时刻t_f 固定，且初值$x(t_0)$和终值$x(t_f)$也固定，求使J 为极小的函数$x^*(t)$应满足的条件。

注1：运动系统中很多最优控制问题与此泛函有关.

注2：变分$\delta x(t)$作为t的函数满足所有求导法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x(t) = \delta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right], \qquad \int_0^T \delta x(t)\mathrm{d}t = \delta\left[\int_0^T x(t)dt\right]$$

不动边界的泛函极值问题

解：利用定理2推论可知

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right)\mathrm{d}t \qquad 【\mathrm{d}(\delta x)=\delta\dot{x}\mathrm{d}t】$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial F}{\partial x}\delta x\mathrm{d}t+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\bigg|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\bigg|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x\mathrm{d}t=0$$

欧拉-拉格朗日方程

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

由于$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0})$和$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_f})$固定，$\boldsymbol{\delta x}(\boldsymbol{t_f}) = \boldsymbol{\delta x}(\boldsymbol{t_0}) = \mathbf{0}$.

由$\boldsymbol{\delta J} = \mathbf{0}$得:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right] \delta x \, \mathrm{d}t = 0$$

由变分法基本引理，故得到如下欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考察以下泛函

$$\boldsymbol{J}=\int_{1}^{2}\left[\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})+\dot{\boldsymbol{x}}^{2}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}^{2}\right]\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

若固定 $\boldsymbol{x}(\mathbf{1})=\mathbf{1}$，$\boldsymbol{x}(\mathbf{2})=\mathbf{2}$，求 $\boldsymbol{x}^{*}(\boldsymbol{t})$使得 $\boldsymbol{J}$ 达到极值。

解：欧拉-拉格朗日方程为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right)=-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}}\left(\mathbf{1}+\mathbf{2}\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{t}^{2}\right)=\mathbf{0}\Rightarrow\ \boldsymbol{t}\ddot{\boldsymbol{x}}+\mathbf{2}\dot{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}$$

结合边界条件 $\boldsymbol{x}(\mathbf{1})=\mathbf{1}$，$\boldsymbol{x}(\mathbf{2})=\mathbf{2}$，可得其解为

$$\boldsymbol{x}^{*}(\boldsymbol{t})=-\mathbf{2}\boldsymbol{t}^{-\mathbf{1}}+\mathbf{3}.$$

。

变分法求解最优控制

1. 末时刻固定末状态自由问题
2. 各种末端情况下的最优控制问题
3. 哈密顿函数的性质

带约束的优化问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考察优化问题 $\min\limits_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$，其中$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ 约束 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=\mathbf{0}$.

思路1【降维】：从方程 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=\mathbf{0}$ 解出隐函数$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$，从而将原问题化为无约束问题

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}))$$

极值条件为

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathsf{T}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}}=\mathbf{0}.$$

一般无法用于最优控制（控制方程无解析解）。

带约束的优化问题

考察优化问题 $\min\limits_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$，其中$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ 约束 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$.

思路2【扩维】：若隐函数不可解，引入拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$，将原问题化为无约束问题：

$$\min_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$$

极值条件为

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\top} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)^{\top} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$$

末时刻固定末状态自由问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控对象：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}), \text{ 其中} \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}.$$

寻找$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$使性能指标：

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}(\cdot), \boldsymbol{x}(\cdot)] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f] + \int_{\boldsymbol{t}_0}^{\boldsymbol{t}_f} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

最小，其中$\boldsymbol{t}_0$和$\boldsymbol{t}_f$固定，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0$给定，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f)$自由。

对象方程可看作是对$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$的约束：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$$

拉格朗日法求极值

针对动态约束

$$\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \mathbf{0}$$

引入Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\lambda}(t) = [\,\lambda_1(t),\ \cdots,\ \lambda_n(t)]^\top$, 令

$$\begin{aligned} & J_1[\boldsymbol{u}(\cdot), \boldsymbol{x}(\cdot), \boldsymbol{\lambda}(\cdot), \boldsymbol{x}(t_f)] \\ & = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^\top[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) - \dot{\boldsymbol{x}}]\}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

则极值条件为

$$\begin{aligned} & \delta J_1\left[\boldsymbol{u}(\cdot), \boldsymbol{x}(\cdot), \boldsymbol{\lambda}(\cdot), \boldsymbol{x}(t_f)\right] \\ & = L_x(\delta \boldsymbol{x}) + L_u(\delta \boldsymbol{u}) + L_\lambda(\delta \boldsymbol{\lambda}) + L_f\left[\delta \boldsymbol{x}(t_f)\right] \equiv 0 \end{aligned}$$

极值条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

由泛函的原始形式

$$J_1[\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},,\boldsymbol{x}(t_f)]$$

$$=\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}\{L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\boldsymbol{\lambda}^\top[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)-\dot{\boldsymbol{x}}]\}\mathrm{d}t$$

关于$\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$部分的泛函变分条件：

$$L_\lambda(\delta\boldsymbol{\lambda})=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)-\dot{\boldsymbol{x}}]^\top\delta\boldsymbol{\lambda}\mathrm{d}t=0$$

对应于状态方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$，因此只需考察关于$\boldsymbol{u}(\cdot)$和$\boldsymbol{x}(\cdot)$部分的变分.

极值条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定义Hamilton函数

$$H(x,u,\lambda,t)=\lambda^{\top}f(x,u,t)+L(x,u,t)$$

则

$$J_1\left[u(\cdot),x(\cdot),\lambda(\cdot),x(t_f)\right]$$

$$=\varphi\left[x(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^{\top}\dot{x}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\varphi[x(t_f),t_f]+\lambda^{\top}(t_0)x(t_0)-\lambda^{\top}(t_f)x(t_f)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(x,u,\lambda,t)+\dot{\lambda}^{\top}x\right]\mathrm{d}t$$

极值条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

由于 $\boldsymbol{x}(t_0)$是固定的，故$\delta\boldsymbol{x}(t_0)=\mathbf{0}$。因此

$$0=\delta J_1=L_\lambda(\delta\lambda)+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}-\lambda(t_f)\right]^{\mathrm{T}}\delta x(t_f)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right)^{\mathrm{T}}\delta x(t)+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^{\mathrm{T}}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t$$

由变分$\delta\boldsymbol{x}(t_f),\delta\boldsymbol{u}(t)$的任意性，下列条件必须满足

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}，\ \lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}，\ \frac{\partial H}{\partial u}=0$$

变分法求最优控制总结

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：末时刻固定末状态自由的最优控制问题，其最优解应满足的必要条件为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{u}} = \mathbf{0},$$

其中$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})$，且满足正则方程(两点边值问题)：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t}_f) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f)}$$

注：还应满足二阶条件$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{u}^2} \geq \mathbf{0}$ (极小值问题).

求解最优控制问题步骤

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 根据状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$和性能指标

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \varphi[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f] + \int_{\boldsymbol{t}_0}^{\boldsymbol{t}_f} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})\mathrm{dt}$$

写出$\boldsymbol{H}$函数：$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$

- 从控制方程 $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$ 解出 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})$
- 根据正则方程及其边界条件解最优轨迹 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t})$:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}), & \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}), & \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t}_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f)} \end{cases}$$

- 计算最优控制 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{q}[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}]$.

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{x} = u，\ x(t_0) = x_0$$

求$u(t)$使下述性能指标最小（其中终端时刻t_f固定）：

$$J = \frac{1}{2}x^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t$$

解：这是t_f固定，$x(t_f)$自由的最优控制问题。

示例

- H函数： $H = L + \lambda f = (1/2)u^2 + \lambda u$
- 控制方程： $\partial H/\partial u = u + \lambda = 0$，即 $u = -\lambda$
- 正则方程： $\dot{x} = u = -\lambda$， $\dot{\lambda} = -\partial H/\partial x = 0$
- 边界条件： $x(t_0) = x_0$， $\lambda(t_f) = \partial\varphi/\partial x(t_f) = x(t_f)$
- 解方程得： $x(t) = -x(t_f)(t - t_0) + x_0$
- $u^*(t) = -\lambda(t) \equiv -x\left(t_f\right) = -\frac{x_0}{1+\left(t_f-t_0\right)}$
- $J^* = \frac{1}{2}x^{*2}\left(t_f\right) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[u^*(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{x_0^2}{1+\left(t_f-t_0\right)}$

变分法求解最优控制

1. 末时刻固定、末端状态自由
2. 各种末端情况下的最优控制问题
3. 哈密顿函数的性质

各种末端条件下的最优控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 根据末端情况的不同，有2*3=6类问题：

  - 末端时刻：$\boldsymbol{t_f}$固定 和 $\boldsymbol{t_f}$可变；

  - 末端状态：$\boldsymbol{x(t_f)}$自由、$\boldsymbol{x(t_f)}$固定和$\boldsymbol{x(t_f)}$受约束。

- 最优控制的推导过程类似，最优控制解的必要条件中包含相同的哈密顿函数、控制方程、正则方程和初始条件，仅末端条件不同。

最优控制必要条件（共同部分）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- H函数： $H(x,u,\lambda,t)=\lambda^{\top}f(x,u,t)+L(x,u,t)$
- 控制方程： $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0 \Rightarrow \quad u=q(x,\lambda,t)$
- 正则方程： $\begin{cases} \dot{x}=f(x,q(x,\lambda,t),t) & \text{状态方程} \\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial}{\partial x}H(x,q(x,\lambda,t),t) & \text{协态方程} \end{cases}$
- 初始条件： $x(t_0)=x_0\in\mathbb{R}^n$
- 还需要 n 个边界条件确定正则方程的解.

末端状态固定的情况

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- H函数： $H(x,u,\lambda,t)=\lambda^{\top}f(x,u,t)+L(x,u,t)$
- 控制方程： $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0\Rightarrow\ u=q(x,\lambda)$
- 正则方程： $\begin{cases}\dot{x}=f(x,q(x,\lambda),t) & \text{状态方程}\\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial}{\partial x}H(x,q(x,\lambda),t) & \text{协态方程}\end{cases}$
- 初始条件： $x(t_0)=x_0$
- 终端条件： $x(t_f)=x_f$

末端状态受约束的情况

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控对象：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$，$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

性能指标：

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\mathrm{d}t$$

边界条件：t_0和 t_f 固定，终端状态满足 p 个约束

$$\boldsymbol{g}\left[\boldsymbol{x}(t_f), t_f\right] = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{g}[\cdot] \in \mathbb{R}^p.$$

设计要求：寻找 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 使 $J[\boldsymbol{u}^*(\cdot)]$ 最小。

化为无条件极值问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

针对状态方程和终端状态约束分别引入Lagrange乘子：

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)]^\top, \quad \boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \cdots, \mu_p]^\top$$

令 $J_1[\boldsymbol{u}(\cdot), \boldsymbol{x}(\cdot), \boldsymbol{\lambda}(\cdot), \boldsymbol{\mu}]$

$$= \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \{L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^\top [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) - \dot{\boldsymbol{x}}]\} \mathrm{d}t$$

$$= \hat{\varphi}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - \boldsymbol{\lambda}^\top \dot{\boldsymbol{x}}] \mathrm{d}t$$

变分条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

进一步进行变换：

$$J_1[u(\cdot),x(\cdot),\lambda(\cdot),\mu]=\hat{\varphi}[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^{\top}\dot{x}]\mathrm{d}t$$

$$=\hat{\varphi}[x(t_f),\ t_f]+\lambda^{\top}(t_0)x(t_0)-\lambda^{\top}(t_f)x(t_f)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t)+\dot{\lambda}^{\top}x]\mathrm{d}t$$

其关于δx和δu的变分为：

$$0=\delta J_1=\left[\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x(t_f)}-\lambda(t_f)\right]^{\top}\delta x(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right]^{\top}\delta x(t)+\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]^{\top}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t$$

变分条件

$$\boldsymbol{0}=\delta J_1=\left[\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x(t_f)}-\lambda(t_f)\right]^{\top}\delta x(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right]^{\top}\delta x(t)+\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]^{\top}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t$$

根据变分的任意性，下列条件必须满足：

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \frac{\partial H}{\partial u}=0$$

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x(t_f)}=\frac{\partial\varphi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}+\left(\frac{\partial g[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)^{\top}\mu$$

终端状态受约束的情况

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- $\boldsymbol{H}$函数： $\boldsymbol{H(x,u,\lambda,t)=\lambda^{\top}f(x,u,t)+L(x,u,t)}$
- 控制方程： $\boldsymbol{\frac{\partial H}{\partial u}=0 \Rightarrow\ u=q(x,\lambda)}$
- 正则方程： $\begin{cases}\boldsymbol{\dot{x}=f(x,q(x,\lambda),t)} & \text{状态方程}\\ \boldsymbol{\dot{\lambda}=-\frac{\partial}{\partial x}H(x,q(x,\lambda),t)} & \text{协态方程}\end{cases}$
- 初始条件： $\boldsymbol{x(t_0)=x_0}$
- 终端条件： $\boldsymbol{\mathrm{g}[x(t_f),t_f]=0,\lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}+\left(\frac{\partial g[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)^{\top}\mu}$

示例： t_f固定，$x(t_f)$受约束

已知受控系统

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ x_1(0) = x_2(0) = 0$$

求$u(t)$使得$t_f = 1$时满足$x_1(1) + x_2(1) = 1$，且下述性能指标最小：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \mathrm{d}t$$

解： 写出 H 函数

$$H = L + \lambda^T f = (1/2)u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

示例： t_f固定，$x(t_f)$受约束

H函数：$H = L + \lambda^T f = (1/2)u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

控制方程：$\partial H/\partial u = u + \lambda_2 = 0$，即 $u = -\lambda_2$

正则方程：$\dot{x}_1 = x_2$，$\dot{x}_2 = -\lambda_2$，$\dot{\lambda}_1 = 0$，$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$

边界条件：$x_1(0) = 0$，$x_2(0) = 0$

根据终端状态约束 $g(x(1)) = x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$

$$\lambda(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(1)} + \frac{\partial g}{\partial x(1)}\mu = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}$$

示例：t_f固定，$x(t_f)$受约束

解协态方程：$\dot{\lambda}_1 = 0$，$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \lambda_1(1) = \lambda_2(1) = \mu$

易得：$\lambda_1(t) = \mu, \quad \lambda_2(t) = -\mu t + 2\mu$

控制律：$u(t) = -\lambda_2(t) = \mu t - 2\mu$

继续求解状态方程：

$$\dot{x}_1 = x_2\,,\ \ \dot{x}_2 = \mu t - 2\mu\,;\ \ x_1(0) = 0\,,\ \ x_2(0) = 0$$

解得：

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\mu t^2 - 2\mu t\,,\ \ x_1(t) = \frac{1}{6}\mu t^3 - \mu t^2.$$

示例： t_f固定，$x(t_f)$受约束

再利用边界条件：$g(x(1)) = x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$

$$\frac{1}{2}\mu - 2\mu + \frac{1}{6}\mu - \mu = 1 \Rightarrow \mu = -\frac{3}{7}$$

最后得： $u^*(t) = \mu t - 2\mu = -\frac{3}{7}t + \frac{6}{7}$

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{14}t^3 + \frac{3}{7}t^2$$

$$x_2^*(t) = -\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t$$

最优控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控对象：$\dot{x} = f(x, u, t)$，$x(t_0) = x_0$

设计要求：寻找 $u^*(t)$ 使如下性能指标最小：

$$J[u(\cdot)] = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t)\mathrm{d}t$$

- 根据末端情况的不同，有2*3=6类问题：

- 末端时刻：t_f 固定 和 t_f 可变；

- 末端状态：$x(t_f)$ 自由、$x(t_f)$ 固定和 $x(t_f)$ 受约束。

【思想：（1）对约束引入拉格朗日乘子；（2）“求导”】

最优控制必要条件（共同部分）

- H函数： $\boldsymbol{H(x,u,\lambda,t) = \lambda^{\top} f(x,u,t) + L(x,u,t)}$
- 控制方程： $\boldsymbol{\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \ u = q(x,\lambda,t)}$
- 正则方程： $\begin{cases} \boldsymbol{\dot{x} = f(x,q(x,\lambda,t),t)} & \text{状态方程} \\ \boldsymbol{\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial}{\partial x} H(x,q(x,\lambda,t),t)} & \text{协态方程} \end{cases}$
- 初始条件： $\boldsymbol{x(t_0) = x_0} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$
- $\boxed{\text{还需要 } \boldsymbol{n} \text{ 个边界条件确定正则方程的解.}}$

边界条件总结 (末端时间固定)

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

	t_f固定	t_f可变
$x(t_f)$自由	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}$	
$x(t_f)$固定	$x(t_f)=x_f$	
$x(t_f)$受约	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}+\dfrac{\partial g^T}{\partial x(t_f)}\mu$ $g[x(t_f),\ t_f]=0$	

末端时间自由最优控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控对象：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0$

性能指标：

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f] + \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

边界条件：$\boldsymbol{t}_f$ 自由，终端状态满足 $\boldsymbol{p}$ 个约束

$$\boldsymbol{g}\left[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f\right] = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{g}[\cdot] \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}.$$

设计要求：寻找 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$ 使 $\boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}^*(\cdot)]$ 最小。

化为无条件极值问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

针对状态方程和终端状态约束分别引入Lagrange乘子：

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)]^{\top}, \quad \boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \cdots, \mu_p]^{\top}$$

令 $$J_1[\boldsymbol{u}(\cdot), \boldsymbol{x}(\cdot), \boldsymbol{\lambda}(\cdot), \boldsymbol{\mu}, t_f] = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \boldsymbol{\mu}^{\top}\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} [H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - \boldsymbol{\lambda}^{\top}\dot{\boldsymbol{x}}]\mathrm{d}t$$

与之前推导过程一样，可以得到下列条件：

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\right)^{\top} \boldsymbol{\mu}$$

关于末端时间的变分条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

还有一个自由变量$\boldsymbol{t_f}$，可通过$\dfrac{\partial J_1}{\partial t_f}=\mathbf{0}$确定。

$$\mathbf{0}=\frac{\partial}{\partial t_f}\left\{\varphi[x(t_f),t_f]+\mu^\top g[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^\top\dot{x}]\mathrm{d}t\right\}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}\dot{x}(t_f)+\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}+\mu^\top\frac{\partial g}{\partial x(t_f)}\dot{x}(t_f)+\mu^\top\frac{\partial g}{\partial t_f}+H\big(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\big)-\lambda^\top(t_f)\dot{x}(t_f)$$

$$=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}+\mu^\top\frac{\partial g}{\partial x(t_f)}-\lambda^\top(t_f)\right]\dot{x}(t_f)+\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}+\mu^\top\frac{\partial g}{\partial t_f}+H\big(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\big)$$

第一项对应于$\boldsymbol{\lambda(t)}$满足的边界条件，因此：

$$H\big(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\big)=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}+\mu^\top\frac{\partial g}{\partial t_f}\right)$$

【若$\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$和$\boldsymbol{g}(\cdot)$均不依赖于$\boldsymbol{t_f}$，则$H\big(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\big)=\mathbf{0}$】

示例： 末端时间自由

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{x}=u,\quad x(0)=1$$

求$u(t)$使$x(t_f)=0$（t_f可变），且下述性能指标最小：

$$J=t_f+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}u^2\mathrm{d}t$$

解：哈密顿函数 $H=L+\lambda f=(1/2)u^2+\lambda u$

控制方程：$\partial H/\partial u=u+\lambda=0\ \Rightarrow\ u=-\lambda$

正则方程：$\dot{x}=u=-\lambda,\ \dot{\lambda}=-\partial H/\partial x=0$

示例： 末端时间自由

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

边界条件：$x(0)=1$，$x(t_f)=0$，

$$H(t_f)=\frac{1}{2}u^2(t_f)+\lambda(t_f)u(t_f)=-\frac{\partial\phi}{\partial t_f}=-1$$

$$\Rightarrow \lambda(t_f)=\pm\sqrt{2} \quad 【\lambda=-u】$$

解方程 $\dot{x}=-\lambda$，$\dot{\lambda}=0$ 得：

$$\lambda(t)=+\sqrt{2},\ u^*(t)=-\sqrt{2},\ x^*(t)=1-\sqrt{2}t,\ t_f^*=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

思考：由$H(t_f)=-1$可得$\lambda(t_f)=\pm\sqrt{2}$，为何舍去负值?

末端条件总结

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

	t_f固定	t_f可变
$x(t_f)$自由	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}$	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}$ $H(t_f)=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_f}$
$x(t_f)$固定	$x(t_f)=x_f$	$x(t_f)=x_f$ $H(t_f)=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_f}$
$x(t_f)$受约	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}+\dfrac{\partial g^T}{\partial x(t_f)}\mu$ $g[x(t_f),\ t_f]=0$	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}+\dfrac{\partial g^T}{\partial x(t_f)}\mu$ $g[x(t_f),\ t_f]=0$ $H(t_f)=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_f}-\dfrac{\partial g^{\mathrm{T}}}{\partial t_f}\mu$

变分法求解最优控制

1. 末时刻固定、末端状态自由
2. 各种末端情况下的最优控制问题
3. 哈密顿函数的性质

最优控制满足的必要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- Hamilton函数： $\boldsymbol{H(x,u,\lambda,t)=\lambda^{\top} f(x,u,t)+L(x,u,t)}$
- 控制方程： $\boldsymbol{\frac{\partial H}{\partial u}=0}$
- 正则方程： $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f(x,u,t)}=\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} & \text{状态方程} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{x}} & \text{协态方程} \end{cases}$

  - 状态方程和协态方程对偶
- 初始条件： $\boldsymbol{x(t_0)=x_0}$

哈密顿函数的性质

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

沿最优轨线：$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$，$\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$，$\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$

H 对时间的全导数与偏导数相等：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial x^{\mathrm{T}}}\dot{x}+\frac{\partial H}{\partial u^{\mathrm{T}}}\dot{u}+\frac{\partial H}{\partial \lambda^{\mathrm{T}}}\dot{\lambda}+\frac{\partial H}{\partial t} \\
&= \frac{\partial H}{\partial x^{\mathrm{T}}}\frac{\partial H}{\partial \lambda}+0\cdot\dot{u}+\frac{\partial H}{\partial \lambda^{\mathrm{T}}}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}
\end{aligned}
$$

- 对于定常系统，H不显含t，则沿最优轨线H为常数，这意味着系统能量守恒；

$$H\left(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\right)=-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_f}+\mu^{\mathrm{T}}\frac{\partial g}{\partial t_f}\right)$$

- 若t_f可变，φ和g中不显含t_f，则沿最优轨线H为零。

最优控制与分析力学

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

最优控制与分析力学密切相关：

1）拉格朗日力学：运动遵循使拉格朗日量最小的轨迹。

2）哈密顿力学：系统运动遵循哈密顿方程。

线性系统二次型指标的最优控制

1. 有限时间状态调节器
2. 无限时间状态调节器

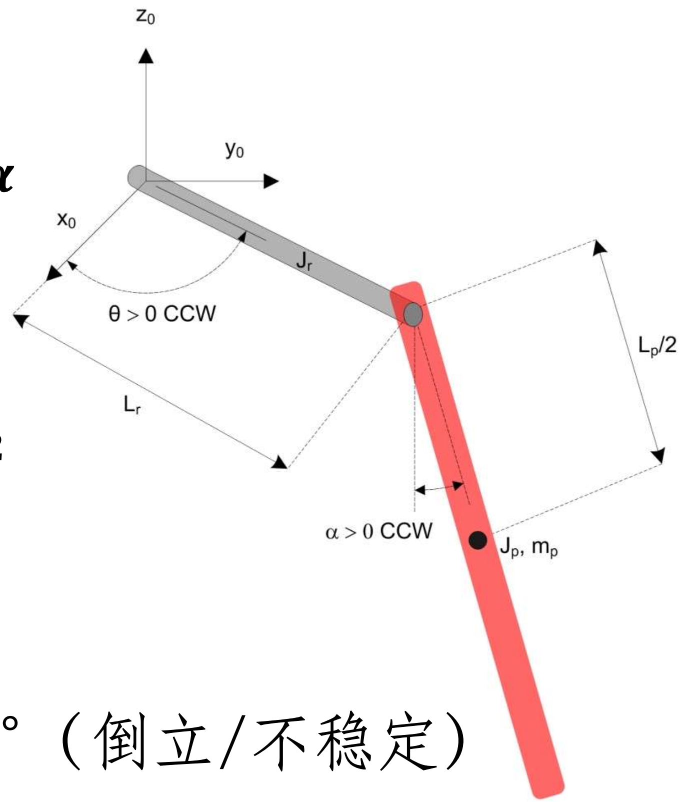
旋转倒立摆系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

运动自由度：横摆转角$\boldsymbol{\theta}$与竖摆转角$\boldsymbol{\alpha}$

$$\left(m_pL_r^2+\frac{1}{4}m_pL_p^2-\frac{1}{4}m_pL_p^2\cos^2\alpha+J_r\right)\ddot{\theta}$$
$$-\left(\frac{1}{2}m_pL_pL_r\cos\alpha\right)\ddot{\alpha}+\left(\frac{1}{2}m_pL_p^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\dot{\theta}\dot{\alpha}$$
$$+\left(\frac{1}{2}m_pL_pL_r\sin\alpha\right)\dot{\alpha}^2=\tau-D_r\dot{\theta}$$

$$\left(\frac{1}{2}m_pL_pL_r\cos\alpha\right)\ddot{\theta}-\left(\frac{1}{4}m_pL_p^2L_r\cos\alpha\sin\alpha\right)\dot{\theta}^2$$
$$+\left(J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2\right)\ddot{\alpha}+\frac{1}{2}m_pL_pg\sin\alpha=-D_p\dot{\alpha}$$



平衡点$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}^\circ$（下垂/稳定），$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{180}^\circ$（倒立/不稳定）

旋转倒立摆系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

在平衡点$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{180°}$附近进行微偏线性化：

$$\left(m_pL_r^2+J_r\right)\ddot{\theta}-\frac{1}{2}m_pL_pL_r\ddot{\alpha}+D_r\dot{\theta}\approx\tau$$

$$\frac{1}{2}m_pL_pL_r\ddot{\theta}+\left(J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2\right)\ddot{\alpha}+\frac{1}{2}m_pL_pg\alpha+D_p\dot{\alpha}\approx 0$$

状态变量：$x=\left[\theta,\alpha,\dot{\theta},\dot{\alpha}\right]^{\mathrm{T}}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & 0 & 0 & 1 & 0\\ & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 149.3 & -0.0104 & 0\\ 0 & 261.6 & -0.0103 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 49.7\\ 49.2\end{bmatrix}\tau,$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

性能指标

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 状态变量： $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}]^{\mathrm{T}}$
- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau}, \;\; \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

希望: (1) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}) \equiv \mathbf{0}$, (2) 控制幅度不要过大

$$\boldsymbol{J} = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} [|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t})|^{2} + \boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{t})|^{2}]\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

线性二次型最优调节器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

性能指标:

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{t}_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f) + \frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\boldsymbol{t}_f}[\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{u}^\top(\boldsymbol{t})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})]\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{Q}(t)$ 为非负定矩阵，$\boldsymbol{R}(t)$为正定矩阵.

$\boldsymbol{F}$反映了对末态的要求，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})$项反映了对过渡过程性能的要求，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t})$则反映了对控制能量的限制。

二次型指标

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

Linear Quadratic Regulator (LQR)

$$J=\frac{1}{2}x^{\top}(t_f)Fx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\top}(t)Q(t)x(t)+u^{\top}(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t$$

- F, Q, R的取值决定了各项之间的权衡。如何选择是个非平凡的问题，需要经验与试探，这里假定它们已知.
- 有限时间状态调节器问题是末端时间t_f固定、末端状态$x(t_f)$自由、控制$u(t)$不受限的最优控制问题。

基于变分法求解最优控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

Hamilton函数：

$$H = L + \lambda^\top f = \frac{1}{2}x^\top Qx + \frac{1}{2}u^\top Ru + \lambda^\top Ax + \lambda^\top Bu$$

控制方程：

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^\top\lambda = 0 \ \Rightarrow \ u = -R^{-1}B^\top\lambda$$

正则方程：

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^\top\lambda, \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - A^\top\lambda$$

边界条件：

$$x(t_0) = x_0\,, \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial}{\partial x(t_f)}\left[\frac{1}{2}x^\top(t_f)Fx(t_f)\right] = Fx(t_f)$$

基于变分法求解最优控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

由于正则方程是线性的，且$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)$也是线性的，不妨设：

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{F}$$

则

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}$$

由正则方程知 $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = (-\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}$，与上式比较得：

$$\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{F}$$

最优控制的充要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：线性系统有限时间状态调节器问题具有如下最优反馈控制解：

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t),$$

其中$\boldsymbol{P}(t)$是Riccati矩阵微分方程的解：

$$\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{F}$$

在最优控制作用下的性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0).$$

最优控制的充要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

证明：前面推导已经证明$\boldsymbol{u}^*(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$满足最优控制的必要条件，只需证明相应$\boldsymbol{J}^*$是最小值.

首先根据Riccati方程:

$$\dot{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{P}(t_f)=\boldsymbol{F}$$

可以证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}^\top+\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{B}^\top)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^\top\dot{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u})$$

$$=\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\dot{\boldsymbol{P}})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}$$

最优控制的充要条件

对所得方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}$$

两端积分得：

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\right)^\top \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_f} (\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{x}^\top(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{x}^\top(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

最优控制的充要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

重新整理得：

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\top}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\top}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})\mathrm{d}t$$

上式右边第二项非负，当且仅当$\boldsymbol{u}^*=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$时为零，此时指标最小值 $\mathrm{J}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$ 。证毕。

Riccati矩阵微分方程解的性质

为强调$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$依赖于末时刻$\boldsymbol{t_f}$和末值$\boldsymbol{F}$，记为$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{t},\boldsymbol{F},\boldsymbol{t_f}\right)$.

在$[\boldsymbol{t_0},\ \boldsymbol{t_f}]$上，若方程中所给矩阵的元均连续并有界，则$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$存在唯一解（通常无解析解），且是对称的、非负定的。

即使方程中相关矩阵均为定常，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$通常也是时变的，但 $\boldsymbol{t_f} \to \infty$时，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$趋于定常矩阵。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}，\ \boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\,,$$

求最优反馈控制使下述性能指标最小：

$$\boldsymbol{J} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^2(t) + u^2(t)\right]\mathrm{d}t$$

解：由题知 $\boldsymbol{A} = -1$， $\boldsymbol{B} = 1$， $\boldsymbol{Q} = 1$， $\boldsymbol{R} = 1$， $\boldsymbol{F} = 0$

根据定理得最优反馈控制 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$，其中$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})$

满足 Riccati方程： $\dot{\boldsymbol{p}} - \mathbf{2}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t_f}) = \mathbf{0}$

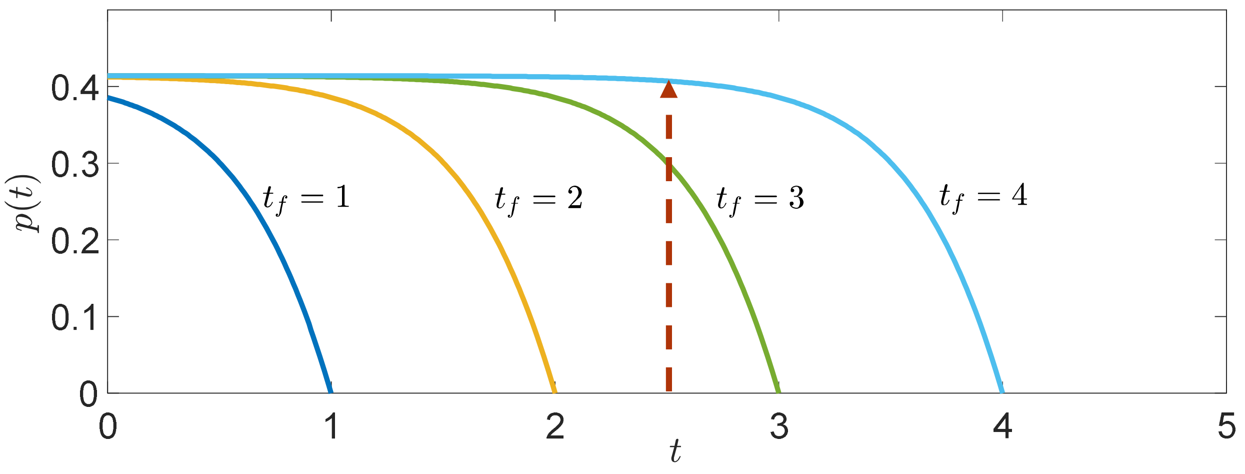
示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

Riccati方程： $\dot{p} - 2p - p^2 + 1 = 0$， $p(t_f) = 0$

$$p(t) = \frac{1 - e^{2\sqrt{2}(t-t_f)}}{\sqrt{2} + 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) e^{2\sqrt{2}(t-t_f)}} \xrightarrow{t_f \to \infty} \sqrt{2} - 1$$

注： $p(t)$曲线不仅依赖于t，而且依赖于t_f



线性系统二次型指标的最优控制

1. 有限时间状态调节器【系统阶段运行】
2. 无限时间状态调节器【系统持续运行】

无限时间状态调节器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控系统：$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$，　$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

性能指标（$\boldsymbol{Q}$非负定，$\boldsymbol{R}$正定）：

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [\boldsymbol{x}^\top(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^\top(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t$$

若最优输出调节器：$J = \int_0^{\infty}(\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$，其中 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 是系统输出，可转化为最优状态调节器问题：

$$J = \int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t\text{，其中 } \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}.$$

无限时间状态调节器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{u}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})]\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

- $\boldsymbol{t}\to\infty$时，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$需趋于零，否则$\boldsymbol{J}$会趋于无穷大.

有限时间调节器问题必存在最优解，但无限时间调节器有可能不存在最优解。

- 什么时候最优解存在?
- 如果存在，怎么求解?
- 得到的最优解是否能用?

解的存在性

定理：若线性定常系统系统完全可控，则其无限时间状态调节器问题必存在最优解。

证明：因系统完全可控，对任意初始状态$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0})$，必存在有界控制$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t})$，在有限时刻$\boldsymbol{t_1} > \boldsymbol{t_0}$使系统回到状态空间原点；在时刻$\boldsymbol{t_1}$之后置$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t})$为零，而状态将停留在原点。

在如此定义的$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t})$，$\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{t_0}, \infty)$作用下，性能指标$\boldsymbol{J}$一定是有界的，因而最优解存在。 证毕。

注：若系统不完全可控，但不可控模态渐近稳定，或不可控不渐稳模态在性能指标中不可观，问题亦有解。

LQR问题求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：若无限时间调节器有解，则Riccati 矩阵微分方程的解 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t},\mathbf{0},\infty)$存在，且为常数矩阵。【证明略】

由于$\boldsymbol{P}(t)$定常，故Riccati 矩阵微分方程变为Riccati 矩阵代数方程：

$$\dot{P}=\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\mathbf{0}$$

注：Riccati 矩阵微分方程的解是唯一的，但其对应的矩阵代数方程的解却不一定唯一。

LQR问题求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：对线性定常系统无限时间状态调节器问题，若问题有解，则最优反馈控制是：

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$$

其中$\boldsymbol{P}$是Riccati矩阵代数方程

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$$

的非负定解，且

$$J^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top(t_0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t_0)$$

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

先看一个例子：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u},\ \ J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}t$$

由性能指标直接看出最优解 $\boldsymbol{u}^*(t) \equiv \mathbf{0}$，但此时系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$ 显然是不稳定的。

这是因为开环系统的不稳定模态没有反映在性能指标中，如采取下列指标则可使闭环系统稳定：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}\right)\mathrm{d}t$$

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：设$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，若$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测，则由最优控制律构成的闭环系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{x}$ 渐近稳定。

证明：可以证明（见引理）若$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{D})$能观，则Riccati方程的解 $\boldsymbol{P}>0$. 选$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}>0$，则

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\dot{\boldsymbol{x}}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^{\top}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\leq 0$$

根据李雅普诺夫定理，系统渐近稳定需保证仅当$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\equiv 0$时有$\dot{V}(\boldsymbol{x})\equiv 0$. 这一点可以从后面引理证明过程中得到。

引理：设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，则$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测当且仅当 **Riccati** 矩阵代数方程的非负定解为正定矩阵。

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

注：

- $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$的分解不唯一，但不同$\boldsymbol{D}$矩阵间只相差一个正交变换，因此$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观性互相等价。
- $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$ 完全能观是保证闭环渐稳的充分条件。当系统 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$ 不完全能观时，只要不可观模态是渐近稳定的（可检测性），闭环系统就是渐近稳定的。

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

引理：设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，则$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测当且仅当Riccati矩阵代数方程的非负定解为正定矩阵。

证明：（充分性）设$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观但非负定解$\boldsymbol{P}$不是正定的，则存在非零$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$，使$\boldsymbol{J}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t}_0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)=\mathbf{0}$。

由于指标中$\boldsymbol{R}>\mathbf{0}$，故最优控制函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\equiv\mathbf{0}$，从而 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0)}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)\neq\mathbf{0}$，且

$$\boldsymbol{J}^*=\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\infty}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\infty}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$$

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

引理：设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，则$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测当且仅当Riccati矩阵代数方程的非负定解为正定矩阵。

证明：（续）上述积分为零意味着

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{D}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)\equiv 0$$

即非零状态$\boldsymbol{x}(t_0)$是$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$不可观的，与$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$能观矛盾。

（必要性）假设$\boldsymbol{P}$为正定矩阵，但$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$不可观。此时必存在非零状态$\boldsymbol{x}(t_0)$，使得 $\boldsymbol{D}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)\equiv 0$。

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

引理：设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，则$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测当且仅当Riccati 矩阵代数方程的非负定解为正定矩阵。

证明：（续）如果令 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\equiv 0$，则$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0)}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$$

显然$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\equiv 0$ 是最优解，故而

$$\boldsymbol{J}^{*}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t}_0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)=\mathbf{0}$$

但这与$\boldsymbol{P}$为正定矩阵的假设矛盾。必要性得证。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{x}_1 = x_2\,,\quad \dot{x}_2 = u$$

求最优反馈控制使下述性能指标最小:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x^{\top}x + u^2)\,\mathrm{d}t$$

解:相关矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q = I$, $R = 1$.

$(A,\ B)$完全可控;取$D = I$使$Q = D^{\top}D$,(A, D)完全可观.

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$，解Riccati矩阵方程：

$$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 1-p_{12}^2 & p_{11}-p_{22}p_{12} \\ p_{11}-p_{22}p_{12} & -p_{22}^2+2p_{12}+1 \end{bmatrix}=0$$

得唯一正定实数矩阵解 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

最优反馈控制：$\boldsymbol{u}^{*}(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)=-[1 \quad \sqrt{3}]\boldsymbol{x}(t)$

闭环系统 $\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$，渐近稳定。

应用示例：旋转倒立摆

旋转倒立摆系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

运动自由度：横摆转角$\boldsymbol{\theta}$与竖摆转角$\boldsymbol{\alpha}$

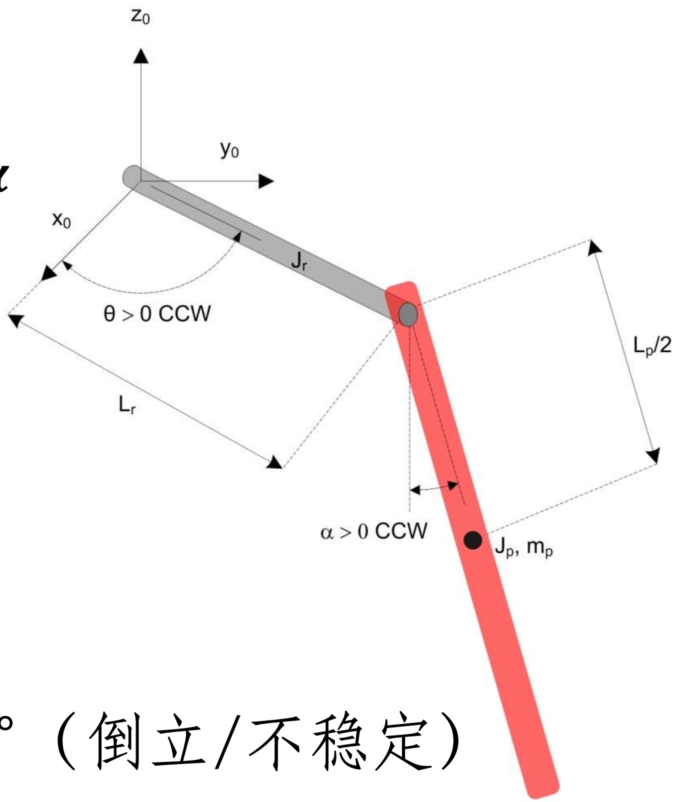
$$\left(m_pL_r^2+\frac{1}{4}m_pL_p^2-\frac{1}{4}m_pL_p^2\cos^2\alpha+J_r\right)\ddot{\theta}$$

$$-\left(\frac{1}{2}m_pL_pL_r\cos\alpha\right)\ddot{\alpha}+\left(\frac{1}{2}m_pL_p^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\dot{\theta}\dot{\alpha}$$

$$+\left(\frac{1}{2}m_pL_pL_r\sin\alpha\right)\dot{\alpha}^2=\tau-D_r\dot{\theta}$$

$$\left(\frac{1}{2}m_pL_pL_r\cos\alpha\right)\ddot{\theta}-\left(\frac{1}{4}m_pL_p^2L_r\cos\alpha\sin\alpha\right)\dot{\theta}^2$$

$$+\left(J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2\right)\ddot{\alpha}+\frac{1}{2}m_pL_pg\sin\alpha=-D_p\dot{\alpha}$$



平衡点$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}^\circ$（下垂/稳定），$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{180}^\circ$（倒立/不稳定）

旋转倒立摆系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

在平衡点$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{180^\circ}$附近进行微偏线性化：

$$\left(m_p L_r^2 + J_r\right)\ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\alpha} + D_r \dot{\theta} \approx \tau$$

$$\frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2\right)\ddot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha + D_p \dot{\alpha} \approx 0$$

状态变量：$\boldsymbol{x} = \left[\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}\right]^{\mathrm{T}}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 149.3 & -0.0104 & 0 \\ 0 & 261.6 & -0.0103 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 49.7 \\ 49.2 \end{bmatrix} \tau,$$

$$y = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]x$$

【系统完全能控】

MATLAB 仿真

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 求解Riccati 方程

$$[X,K,L] = \mathrm{icare}(A,B,Q,R,[\ ],[\ ],[\ ])$$

- 求解LQR问题

$$sys = ss(A,B,C,[\ ]);$$

$$[K,P] = \mathrm{lqr}(sys,Q,R,[\ ])$$

- 仿真闭环系统性能

$$sys\_cl = ss(A\text{-}B*K,B,C,[\ ]);$$

$$y = \mathrm{lsim}(sys\_cl,u,t)$$

MATLAB 仿真

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 求解Riccati 方程

$$[X,K,L] = \text{icare}(A,B,Q,R,[\ ],[\ ],[\ ])$$

- 求解LQR问题

$$\text{sys} = \text{ss}(A,B,C,[\ ]);$$

$$[K,P] = \text{lqr}(\text{sys},Q,R,[\ ])$$

- 仿真闭环系统性能

$$\text{sys\_cl} = \text{ss}(A\text{-}B*K,B,C,[\ ]);$$

$$y = \text{lsim}(\text{sys\_cl},u,t)$$

二次型最优调节器

如何 选取 LQR 指标?

- 为了限制控制幅度，取 $\boldsymbol{R} = \mathbf{1}$.
- 由于设计目标是抑制竖摆摆角$\boldsymbol{\alpha}$偏离，因此很自然考虑

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\top} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & \\ & \mathbf{1} & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

这样可以实现最优控制吗? 【考察 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ 能观性】

二次型最优调节器

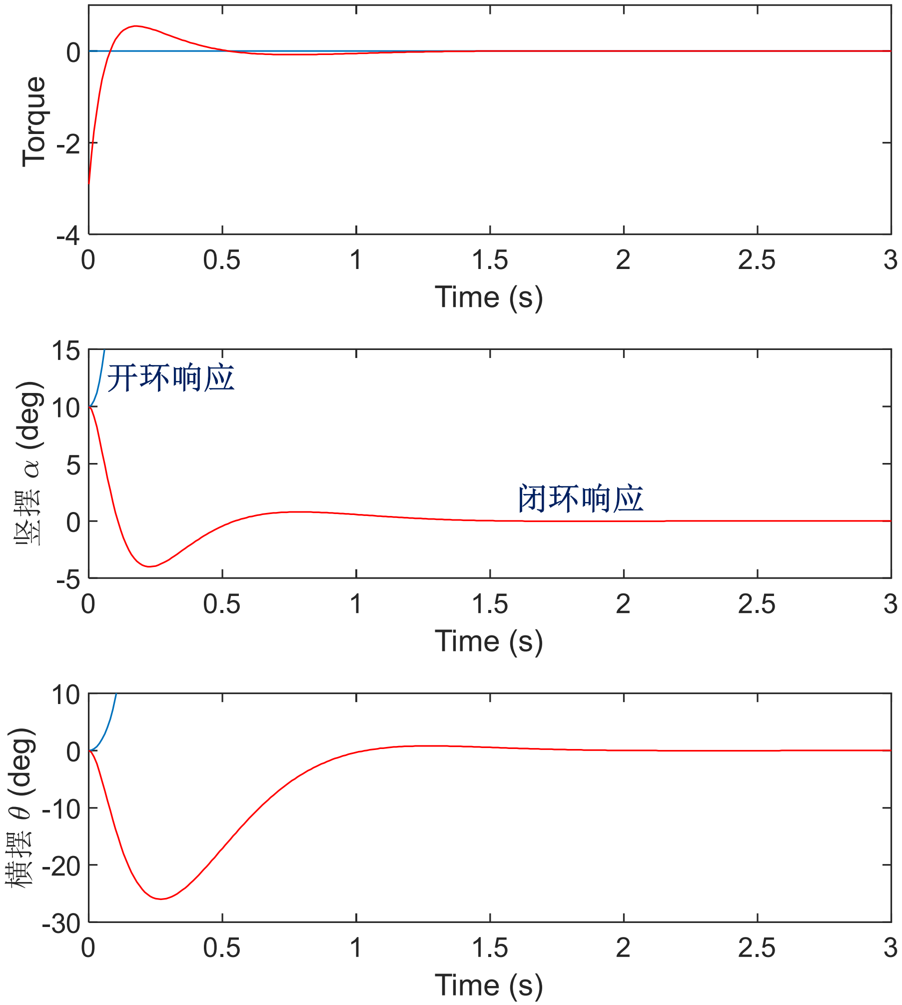
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

为使系统能观，将竖摆摆角$\boldsymbol{\theta}$ 也计入优化指标：

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

闭环系统渐近稳定.

还能进一步改善性能吗?



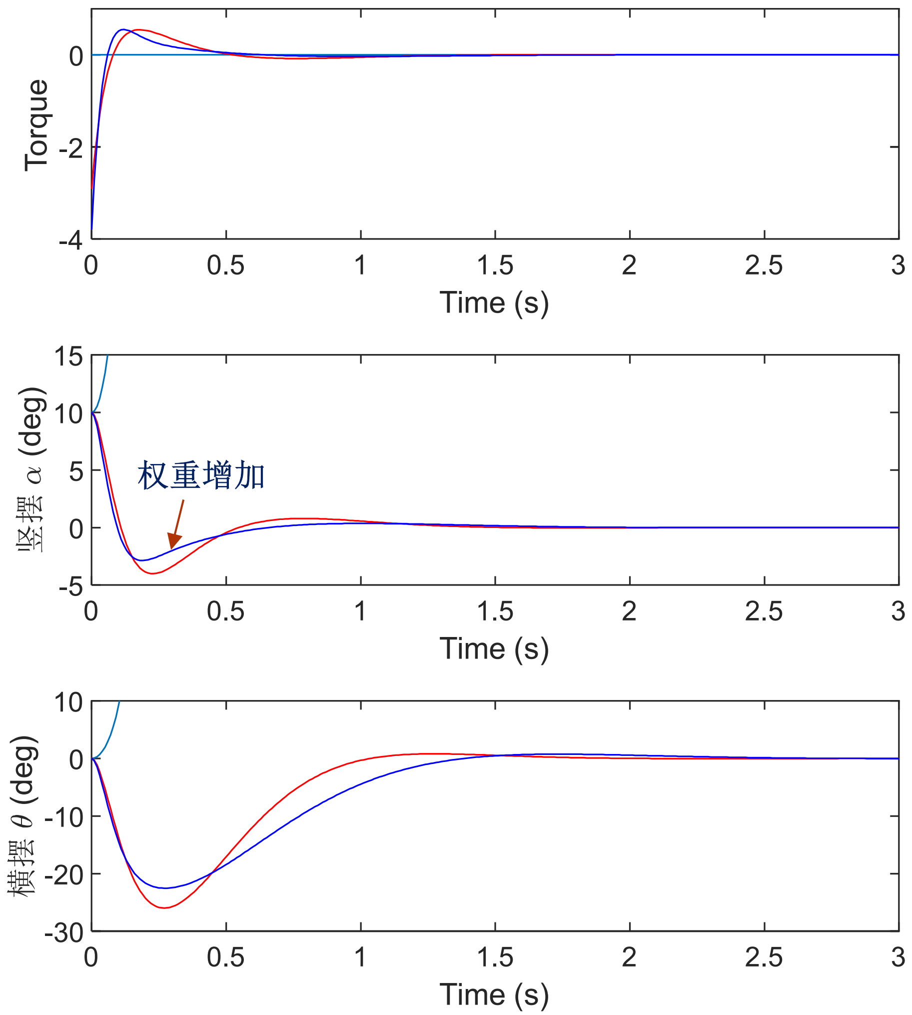
二次型最优调节器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

增加竖摆偏角权重：

$$Q = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & & & \\ & 100 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- 响应速度变快
- 超调减小



是否还能提升性能?

二次型最优调节器

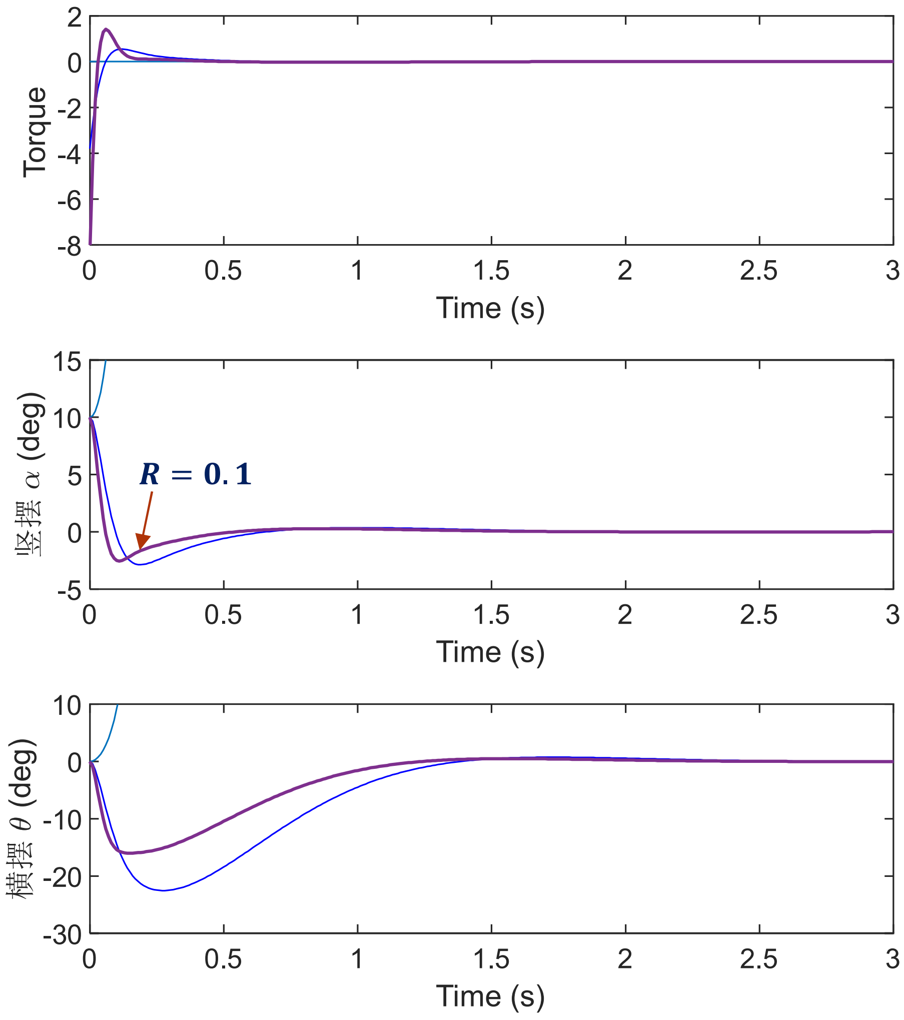
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

降低控制限幅 $\boldsymbol{R}=\mathbf{0.1}$：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & & & \\ & \mathbf{100} & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- 响应进一步变快
- 超调进一步减小

代价：控制转矩明显增加



极小值原理简介

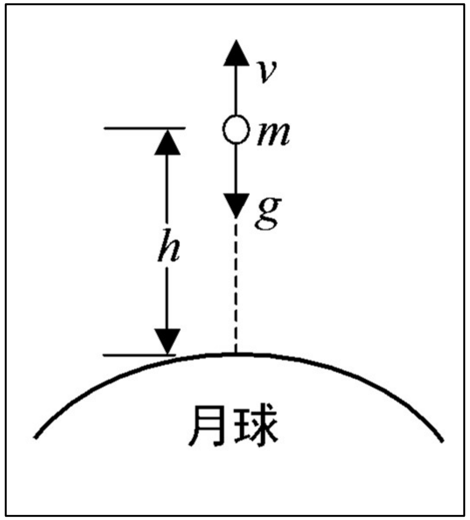
探月飞船软着陆

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\dot{h}(t) = v(t), \qquad h(0) = h_0$$

$$\dot{v}(t) = \frac{f(t)}{m(t)} - g, \quad v(0) = v_0$$

$$\dot{m}(t) = -kf(t), \quad m(0) = M + F$$



软着陆：$h(t_f) = 0$，$v(t_f) = 0$

消耗的燃料最少：$\min\limits_{0 \le f(t) \le f_{max}} J[f(t)] = m(t_f)$.

问题类型：末端时间自由/末端状态受约束

变分法的局限性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

要求哈密顿函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})$对 $\boldsymbol{u}$ 可偏导, 但是

1. 哈密顿函数可能是 $\boldsymbol{u}$ 的线性函数

   --- 奇异最优控制问题【本课程不讨论】

2. 哈密顿函数可能不是 $\boldsymbol{u}$ 的光滑函数

例：$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^{\top}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\cdot \mathbf{sgn}(\boldsymbol{u}))$

2. 哈密顿函数是$\boldsymbol{u}$的光滑函数，但$\boldsymbol{u}$的约束可能不是开集

例：$|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})| \le \mathbf{1}$ 【 $|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})| < \mathbf{1}$为开集约束 】

最优解可能在边界，但哈密顿函数在边界不可导.

Pontryagin 极小值原理

如果$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$是所给问题的最优控制，$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})$和$\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t})$是对应于$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$的最优轨线和最优协态变量，则

$$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}]=\min_{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\in\boldsymbol{U}}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}]$$

极小值原理的证明非常复杂，在此从略。

与变分法相比，利用极小值原理解决最优控制问题时，只需用上式替代控制方程$\boldsymbol{\partial H/\partial u=0}$ 即可。

极小值原理给出的仍然是最优控制应满足的必要条件。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{x} = -x + u,\quad x(0) = 1$$

终端时间 $t_f = 1$固定，$x(t_f)$自由，$|u(t)| \le 1$，求使下述性能指标最小的最优控制及相应的最优状态轨线。

$$J = \int_0^1 \left[x(t) - \frac{1}{2} u(t) \right] dt$$

解：Hamilton函数

$$H(x, u, \lambda) = x - \frac{1}{2} u + \lambda(-x + u) = x - \lambda x + u\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\boldsymbol{H(x,u,\lambda) = x - \lambda x + u\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)}$$

根据极小值原理

$$\boldsymbol{u^* = \arg\min_{u\in[-1,1]} H(x^*,u,\lambda^*) \Rightarrow\ u = -\operatorname{sgn}(\lambda^* - 1/2)}$$

正则方程：$\boldsymbol{\dot{x} = -x + u}$，$\boldsymbol{\dot{\lambda} = -\partial H/\partial x = -1 + \lambda}$

边界条件：$\boldsymbol{x(0) = 1}$，$\boldsymbol{\lambda(1) = 0}$

解协态方程得 $\boldsymbol{\lambda^*(t) = 1 - e^{t-1}}$.

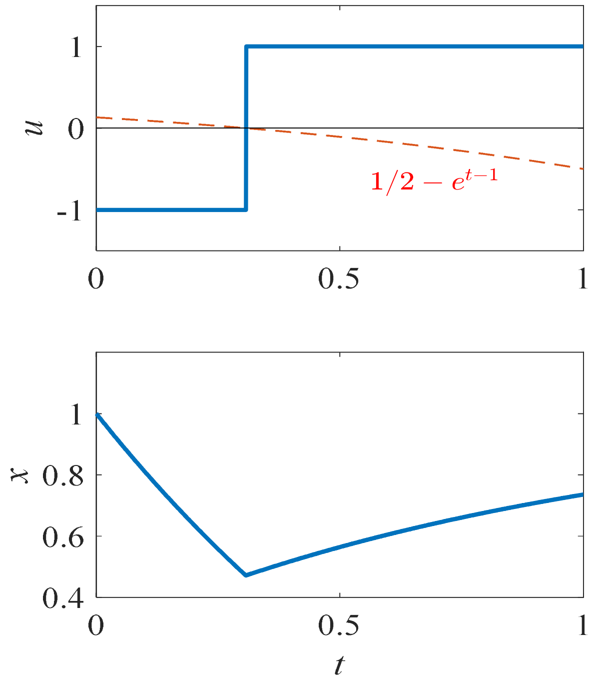
示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

因此最优控制为bang-bang形式

$$u^*(t) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - e^{t-1}\right)$$

$$= \begin{cases} -1, & 0 \le t \le t_s \\ +1, & t_s \le t \le 1 \end{cases}$$



其中$t_s = 1 - \ln 2 = 0.3069$.

根据$u^*(t)$和状态方程$\dot{x} = -x + u$可以解出状态轨迹

$$x^*(t) = \begin{cases} 2e^{-t} - 1, & 0 \le t \le t_s \\ 1 - \left(2 - 4e^{-1}\right)e^{-(t-t_s)}, & t_s \le t \le 1 \end{cases}$$

二阶积分系统的时间最优控制

时间最优控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考察二阶积分型受控系统：

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u$$

求最优控制$u^*(t)$，在约束$|u(t)| \le 1$下使系统在最短时间内自初态(x_{10}, x_{20})转移到状态空间的原点。

对应性能指标：

$$J = \int_0^{t_f} 1 \cdot \mathrm{d}t = t_f$$

这是终端时间 t_f 可变，$x(t_f)$固定的最优控制问题。

必要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$H(u,x,\lambda)=L+\lambda^{\top}f(x,u)=1+\lambda_1x_2+\lambda_2u$$

根据极小值原理，最优控制满足 $u=-\mathrm{sgn}(\lambda_2)$.

正则方程：

$$\dot{x}_1=x_2\text{，}\ \dot{x}_2=u\text{，}\ \dot{\lambda}_1=0\text{，}\ \dot{\lambda}_2=-\lambda_1$$

边界条件：

$$x_1(0)=x_{10}\text{，}\ x_2(0)=x_{20},\qquad x_1(t_f)=0\text{，}\ x_2(t_f)=0$$

从上可以解得 $\lambda_1(t)=c_1$，$\lambda_2(t)=c_2-c_1t$, 其中c_1和c_2为任意常数

Bang-bang 控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

根据边界条件

$$H(t_f)=1\cancel{+\lambda_1(t_f)x_2(t_f)}+\lambda_2(t_f)u(t_f)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}=0$$

$\lambda_2(t)=c_2-c_1t$ 中 c_1和c_2不能同时为零。

因此 $\lambda_2(t)$是一条不恒为零的直线，在区间$[0,\ t_f]$上至多变号一次。

相应的，最优控制 $u^*(t)=-\mathrm{sgn}[\lambda_2^*(t)]$是最多切换一次的Bang-Bang控制。

时间最优控制求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑到最优控制$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$的取值为$\pm\mathbf{1}$，由状态方程和初始条件可解得：

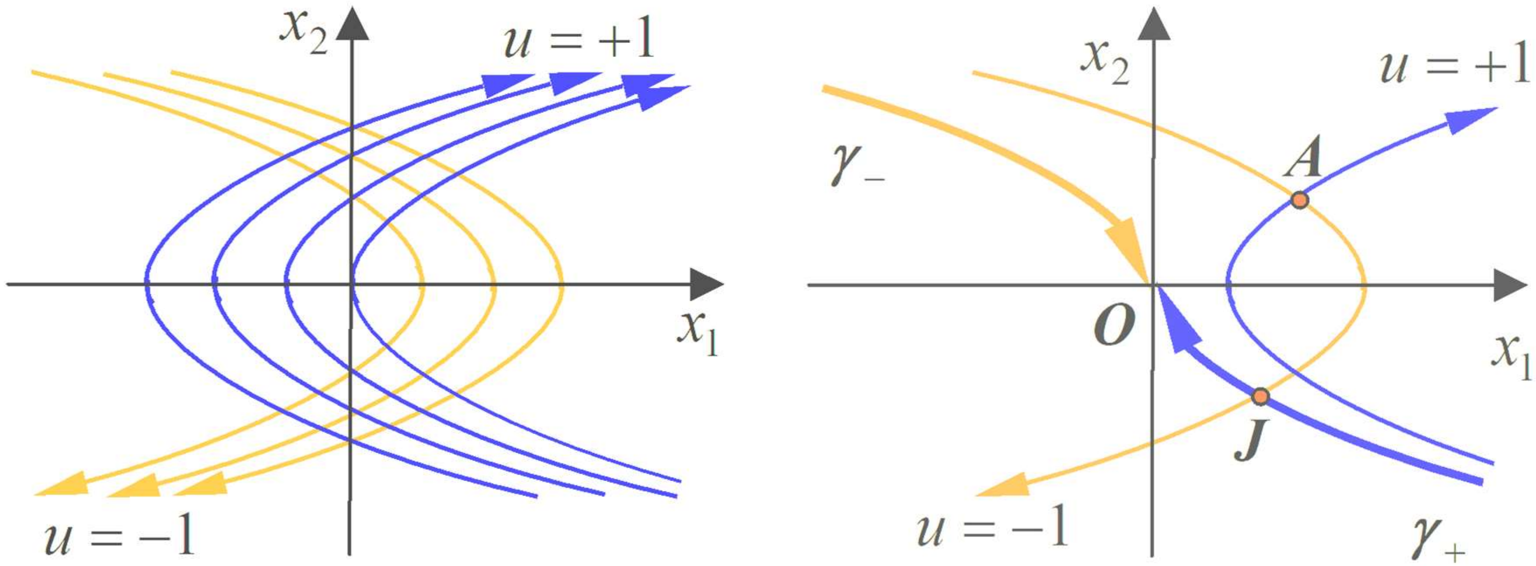
$$x_2(t) = x_{20} \pm t，\ x_1(t) = x_{10} + x_{20}t \pm \frac{1}{2}t^2$$

消去$\boldsymbol{t}$后，得到：

$$x_1(t) = \left(x_{10} \pm \frac{1}{2}x_{20}^2\right) \pm \frac{1}{2}x_2^2(t)$$

时间最优控制开关曲线

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



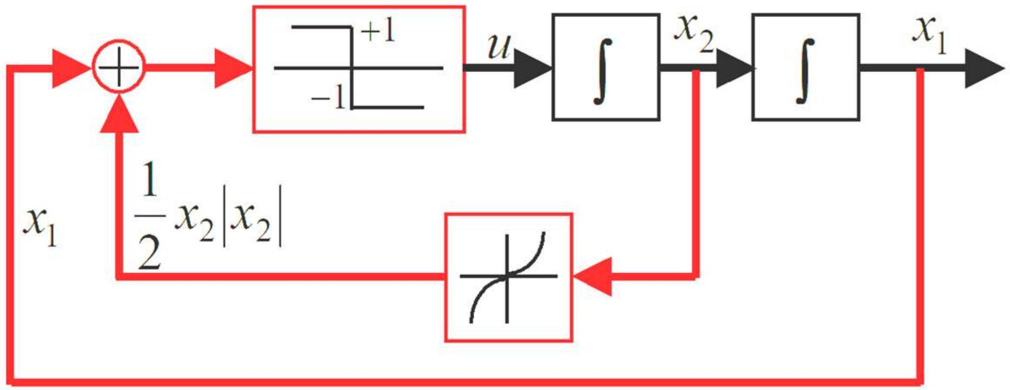
$$x_1(t)=\left(x_{10}\pm\frac{1}{2}x_{20}^2\right)\pm\frac{1}{2}x_2^2(t)$$

只有γ_+和γ_-两条轨线能到达原点，它们合成的曲线γ称为开关曲线：

$$\gamma=\gamma_+\cup\gamma_-=\left\{(x_1,x_2):x_1=-\frac{1}{2}x_2|x_2|\right\}$$

结论

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



二阶积分型受控系统的时间最优控制$u^*(t)$为

$$u^*(t)=\begin{cases}+1, & \gamma(x_1,x_2)<0\\ -1, & \gamma(x_1,x_2)>0\\ -\operatorname{sgn}(x_2), & \gamma(x_1,x_2)=0\end{cases}$$

其中 $\gamma(x_1,x_2)=x_1+\frac{1}{2}x_2|x_2|$ 为开关函数。

总结

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 变分法原理（根据驻点条件求极值）
- 最优控制必要条件（控制条件；正则方程；边界条件）
- 极小值原理（控制函数闭集约束）
- 有限时间 LQR（时变Riccati方程）
- 无限时间 LQR（代数Riccati方程；解的稳定性）