13. 电势（Electric Potential）

功、能的问题始终是物理学所关注的问题。

本章研究电场力作功的性质， 给出静电场的环路定理，揭示静电场有势性， 进而研究静电场的能量。

本章内容

13.1 静电场的环路定理

13.2 电势差和电势

13.3 电势叠加原理

13.4 电势梯度

13.5 点电荷在外电场中的电势能

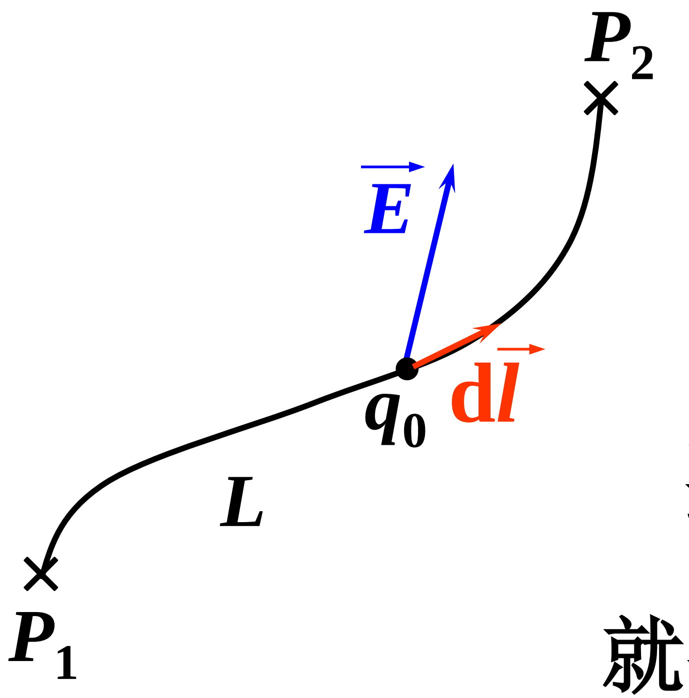
13.6 电荷系的静电能

13.7 静电场的能量

13.1 静电场的环路定理

(circuital theorem of electrostatic field)

一. 静电力作功的特点



移动 试探电荷q_0，

电场力作功：

$$A_{12}=\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

要搞清静电力作功的规律，

就要研究 $\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 的特点：

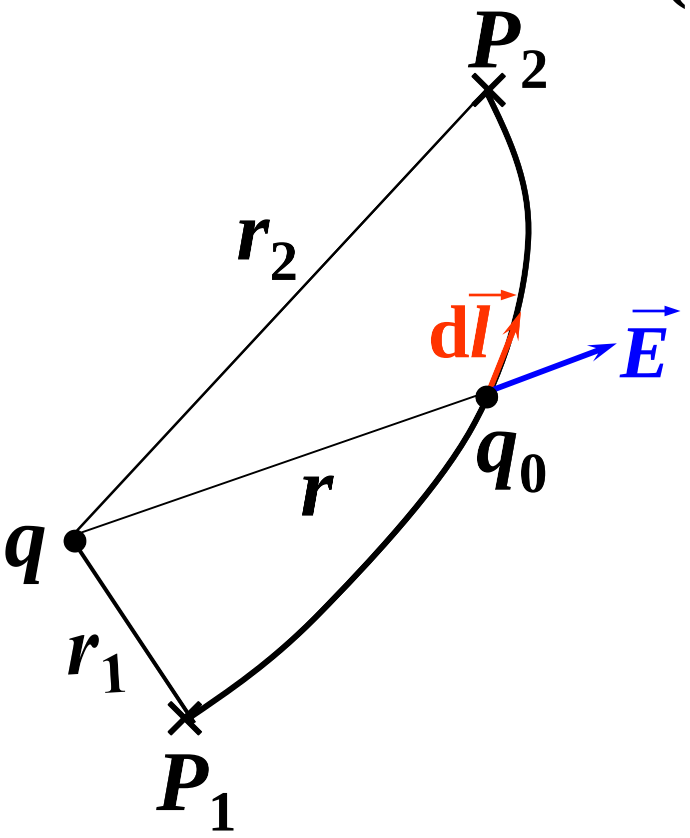
● 对点电荷：

$$\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} \frac{q\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}\vec{r}$

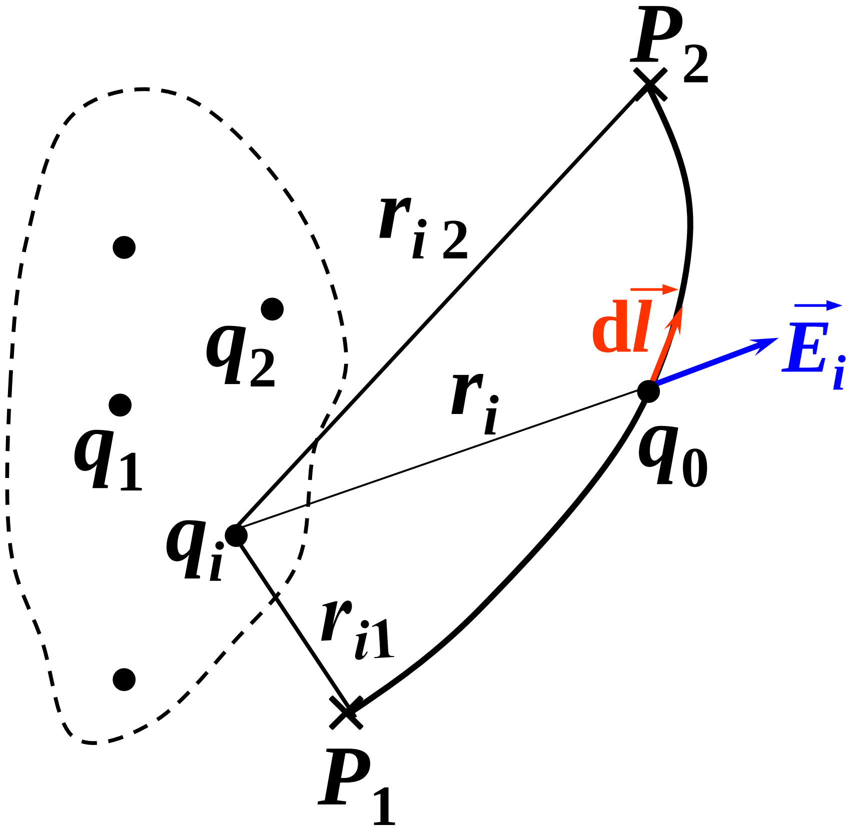
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$



——只与P_1、P_2位置有关，

而与L无关。

- 对点电荷系：



$$\underset{(L)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \underset{(L)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} (\sum_i \vec{E}_i)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

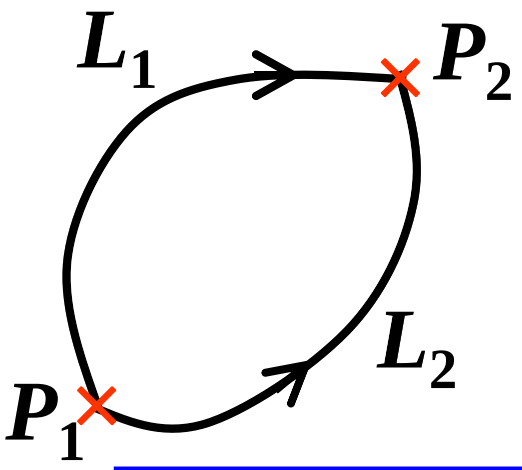
$$= \sum_i \underset{(L)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}}\right)$$

——只与P_1、P_2位置有关，而与L无关。

● 对任意电荷系：$\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 也应与L无关。

二. 环路定理（circuital theorem）



$$\int_{(P_1)\,(L_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(P_1)\,(L_2)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\int_{(P_2)\,(L_2)}^{(P_1)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \quad \boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$ — 静电场环路定理的积分形式

$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的环量(环流)

（circulation）

利用斯托克斯定理

$$\boxed{\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S}}$$

S是以闭合回路L为周界的任一曲面

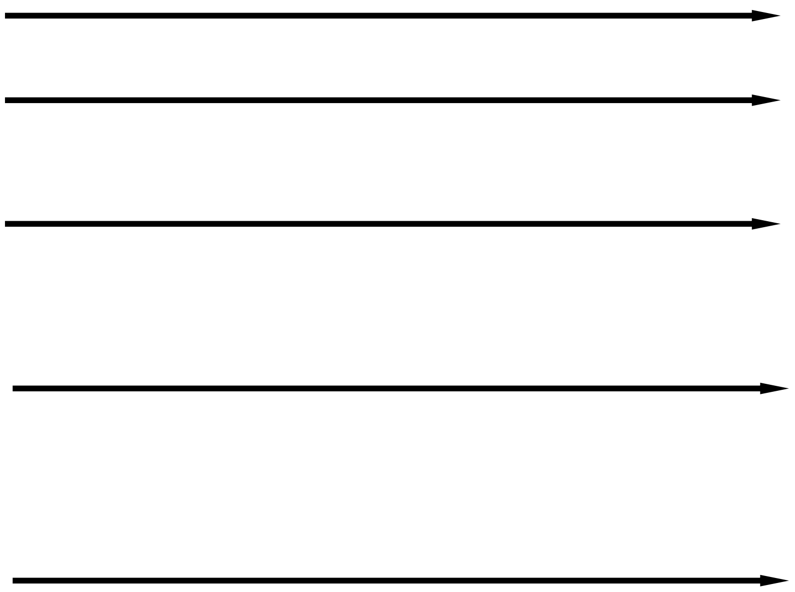
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot d\vec{S} = 0$$

对于任意取的回路L和曲面S,上式均成立,故必有

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$ ——静电场环路定理的微分形式

静电场的环路定理说明静电场为保守场，静电场的电场线不能闭合。

$\boxed{\text{思考}}$ 电场线平行但不均匀分布是否可能？



静电场的$\vec{E}$ 线？

13.2 电势差、电势

一. 电势差（electric potential difference）

由$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$与路径无关,可引入电势差的概念。

定义P_1对P_2的电势差： $\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

U_{12}为移动单位正电荷由$P_1 \to P_2$电场力作的功。

二. 电势（electric potential）

设P_0为电势参考点，即$\varphi_0 = 0$,

则任一点P_1处电势为： $\varphi_1 = U_{10} = \int_{(P_1)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$$\therefore \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{(P_2)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_{12}$$

这说明 P_0点的不同选择，不影响电势差。

P_0选择有任意性，习惯上如下选取电势零点：

理论中：对有限电荷分布，选 $\varphi_\infty = 0$ 。

对无限大电荷分布，选有限区域中的某适当点为电势零点。

实际中：选大地或机壳、公共线为电势零点。

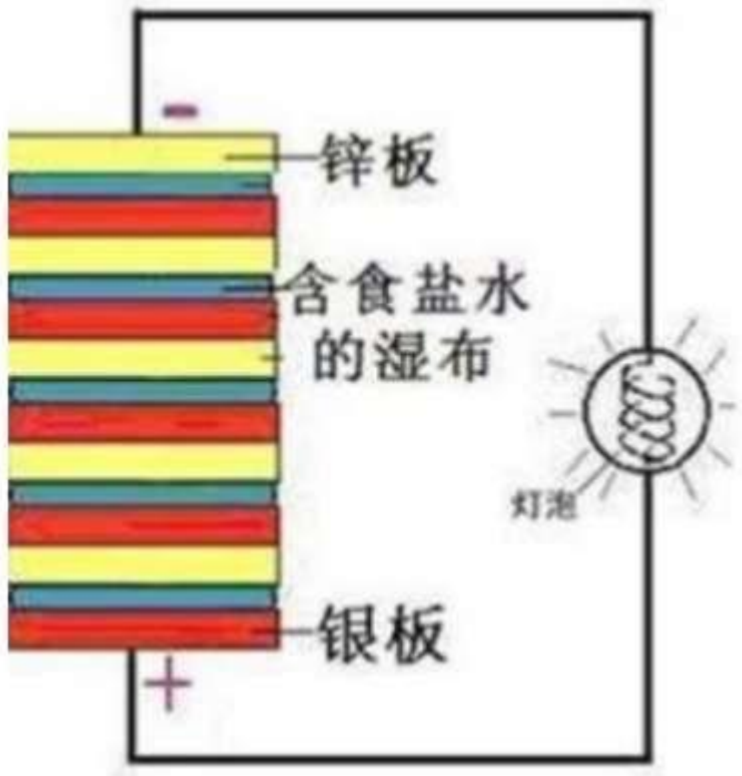
单位：伏（特），V或J/C

伏特

（Count Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta）

（1745～1827）

伏特亲手制作的电堆



伏特电堆原理图

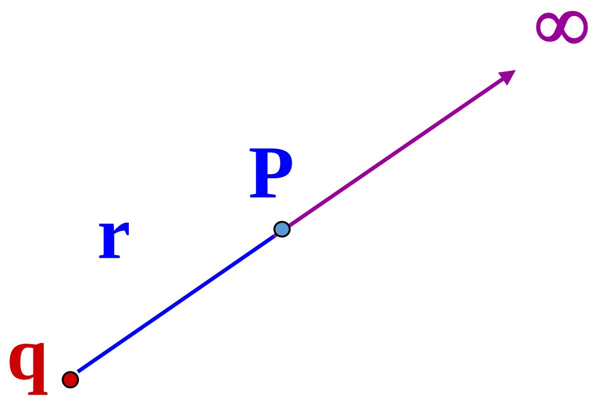
意大利物理学家

伏特为拿破仑演示伏特电堆

利用电势定义 $\varphi = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

可以求得如下结果：

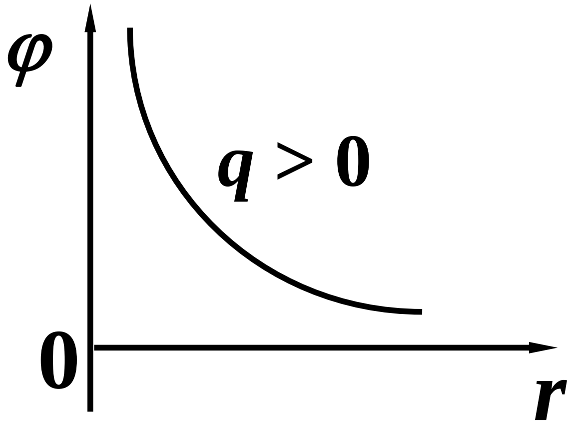
1）点电荷



$$\varphi = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

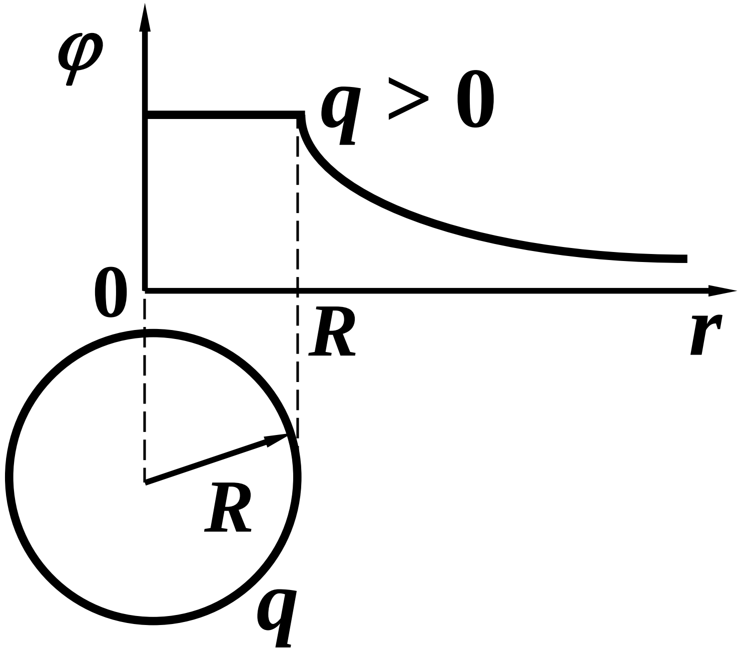
$$= \int_r^{\infty} E\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$



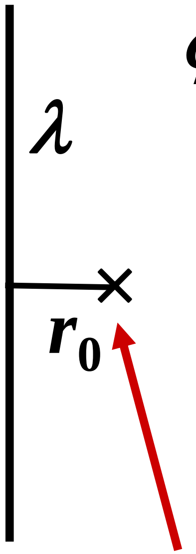
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}, \qquad \varphi_\infty = 0$$

2）均匀带电球壳

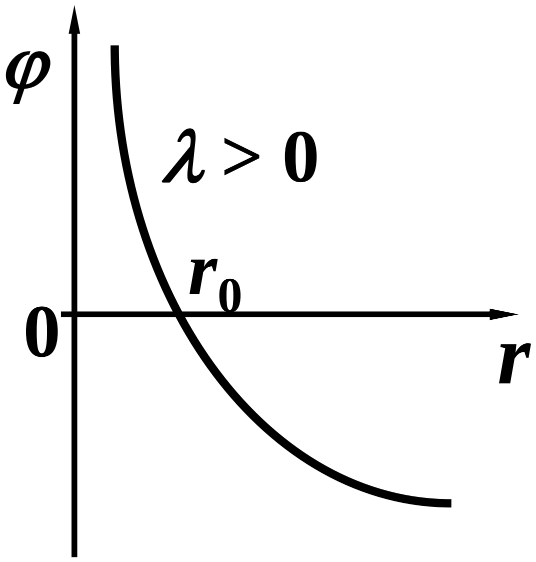


$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & （壳内）\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & （壳外）\end{cases}$$

3）无限长均匀带电直线



电势零点



$$\varphi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

13.3 电势叠加原理

由 $\varphi = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 及 $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$，得：

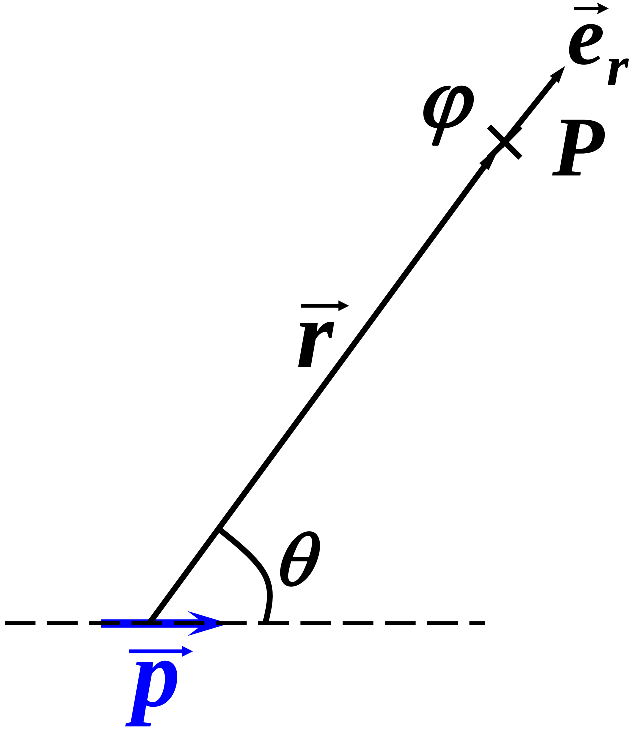
$$\varphi = \int_{(P)}^{(P_0)} \left(\sum_i \vec{E}_i\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \varphi_i$$

注意：电势零点P_0必须是共同的。

- 对点电荷系： $\varphi = \sum \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$， $\varphi_\infty = 0$

- 对连续电荷分布： $\varphi = \int_q \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$， $\varphi_\infty = 0$

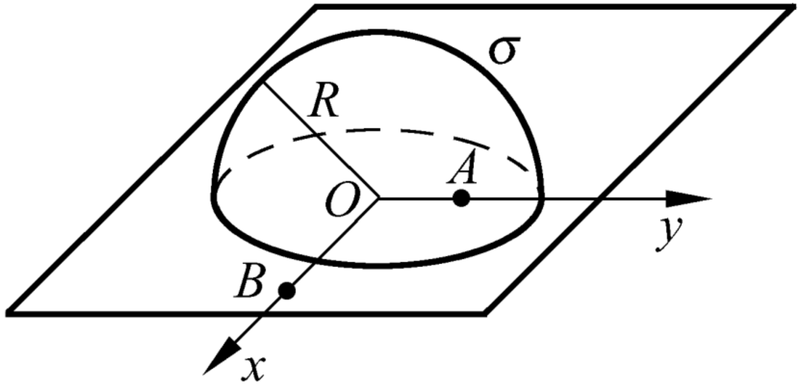
教材给出了电偶极子的电势：



$$\varphi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

例13.1 如图所示，在xy平面上倒扣着半径为R的半球面，半球面上电荷均匀分布，电荷面密度为σ，*A*点的坐标为 (0, R/2)，*B*点的坐标为 (3R/2, 0)，求*A*、*B*间的电势差。



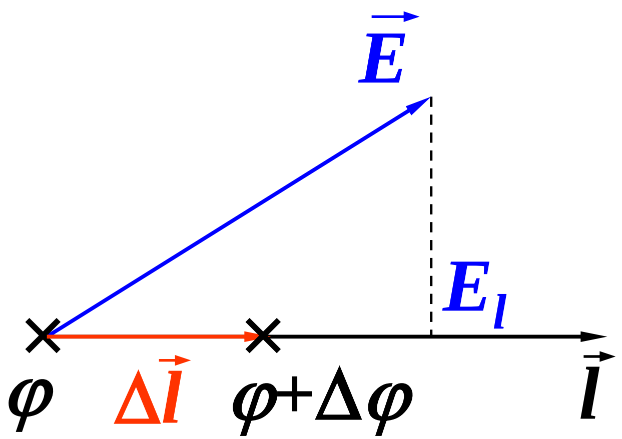
解： 假设把半球面扩展为电荷面密度σ相同的完整球面，此时*A*、*B*两点的电势分别为

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \qquad \varphi_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} = \frac{2\sigma R}{3\varepsilon_0}$$

按电势叠加原理，半球面在*A*、*B*两点的电势等于完整球面电势的一半。因此，半球面在*A*、*B*两点的电势差为

$$\varphi_{AB} = \frac{1}{2}(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{\sigma R}{6\varepsilon_0}$$

13.4 电势梯度（electric potential gradient）



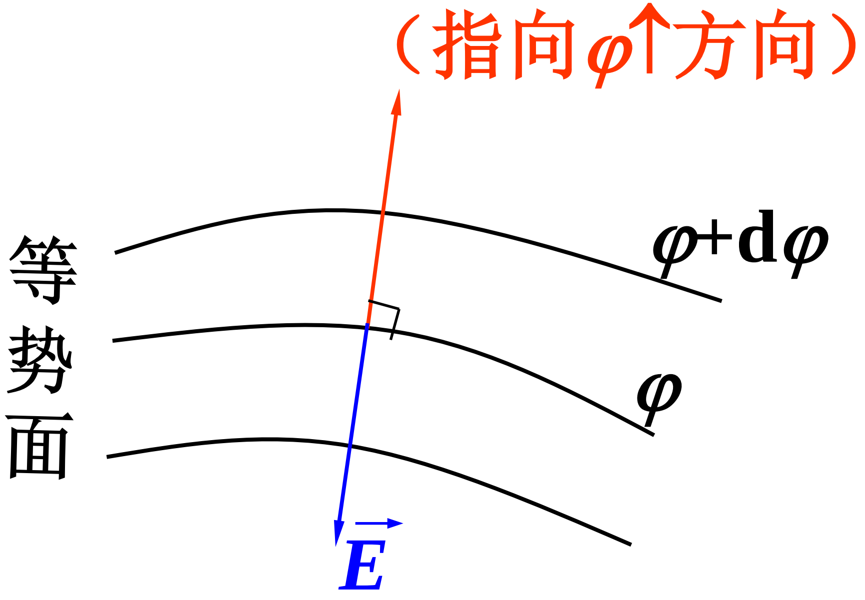
场强与电势的微分关系：

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}=-\Delta\varphi$$

$$E_l\cdot\Delta l=-\Delta\varphi$$

$$\boxed{E_l=-\frac{\partial\varphi}{\partial l}}$$

—— φ的**方向导数**



$$E_n=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

$$\vec{E}=E_n\vec{n}=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$$

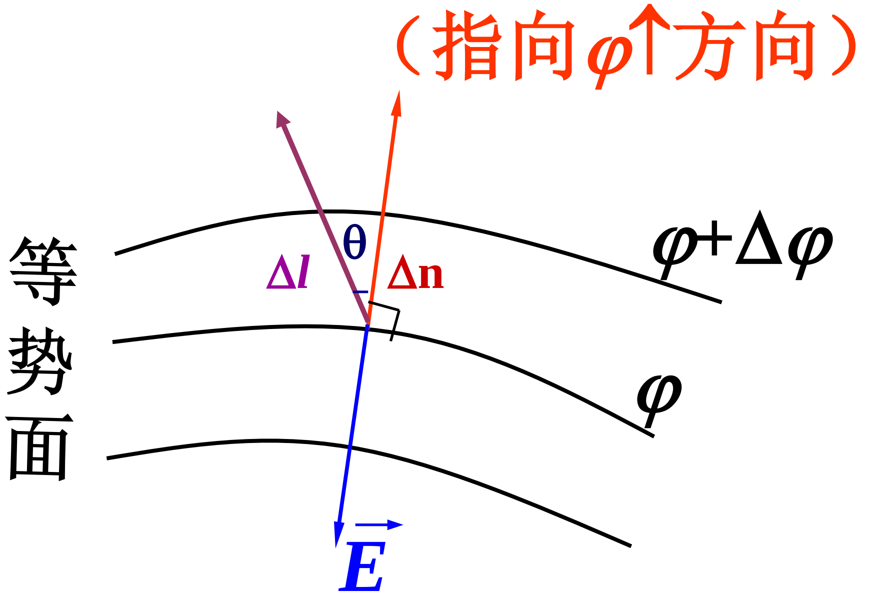
$$\Delta n = \Delta l\cdot\cos\theta$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial l}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\lim_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta l\cdot\cos\theta}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot\cos\theta$$



φ沿$\vec{n}$方向的微商最大，其余方向的微商等于它乘以cosθ。这正是一个矢量的投影和它的绝对值的关系。所以我们可以定义一个矢量，它沿着$\vec{n}$方向，大小等于∂φ/∂n，这个矢量叫做φ的**梯度**。

数学上，若某一标量函数对某一方向有最大变化率（方向导数最大），　　则定义此方向上的导数为该标量函数的梯度（ gradient）。

电势梯度：

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\vec{n}$$

$$\vec{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi \equiv -\nabla \varphi$$

标量场的梯度

场是描写时空点的函数，由每一点上的一个单纯数值就能完全确定的物理量就是标量场．它在空间各点的数值是空间位置的函数 $\varphi(x, y, z)$．电磁学中的电(位)势就是一种标量场．标量场中数值相同的点构成等(势)值面．

在标量场中，从某点 P 出发经过 $\mathrm{d}l$ 之后，φ 的变化

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

因 $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x\,\hat{i} + \mathrm{d}y\,\hat{j} + \mathrm{d}z\,\hat{k}$．若令 $A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{k}$，

则 $\mathrm{d}\varphi$ 正是 A 与 $\mathrm{d}l$ 的点积，矢量 A 称作标量场 φ 的梯度，

其分量是 φ 随坐标轴上距离的变化率，常记作 $A = \mathrm{grad}\,\varphi = \nabla \varphi$．

在直角坐标系内 $$\nabla\varphi = A = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}$$

标量场的梯度是个矢量场，算符 ∇ 是带有单位矢量的微分算符，只有作用右方函数时才有意义.在直角坐标系中

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$d\varphi = A \cdot dl = \nabla\varphi \cdot dl = |\nabla\varphi||dl|\cos\theta$$

当 dl 沿 $\nabla\varphi$ 方向时，$\theta = 0$，此时 $d\varphi$ 最大，因此 $\nabla\varphi$ 的数值和方向是 φ 在空间最大变化率的数值和方向，并指向函数 φ 增大的方向，亦即是等值面的法线方向，若以 $\hat{n}$ 表示法线单位矢量，φ 的梯度又可写成

$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi = \hat{n}\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

直角坐标系：

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

柱坐标系：

$$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

球坐标系：

$$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

δ 函数

有时电荷不是连续分布，而是离散分布的点电荷，

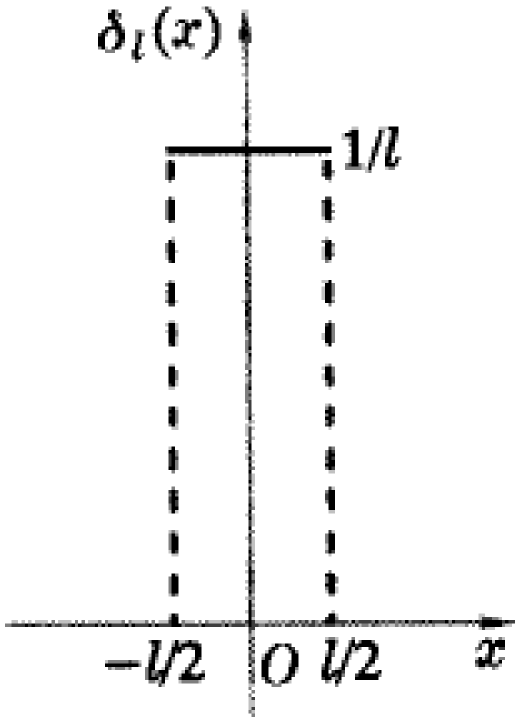
可用一个特殊的密度函数来描述： $\rho\left(\vec{r}\right)=\sum_{i=1}^{n} q_i\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_i{}'\right)$

δ函数是狄拉克于1926年引进的。

作为 δ 函数的物理背景，先讨论点源、例如点电荷的密度分布函数的数学表示．为简单起见，先讨论一维情形．

如图，设在无穷直线上 $-l/2 < x < l/2$ 区间内有均匀的电荷分布，总电量为 1 个单位，在区间外无电荷，则电荷密度函数为

$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0, & x < -l/2; \\ 1/l, & -l/2 < x < l/2; \\ 0, & x > l/2. \end{cases}$$



对于在 $-l/2<x<l/2$ 内连续的任意函数 $f(x)$，根据中值定理，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x = f(\theta l), \qquad -1/2 \le \theta \le 1/2.$$

实际上，积分限不一定是 $\pm\infty$．只要 $a < -l/2, b > l/2$，就有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(\theta l), \qquad -1/2 \le \theta \le 1/2.$$

作为极限情形，当 $l \to 0$ 时，就得到点电荷的密度函数，记为

$$\delta(x) = \lim_{l \to 0} \delta_l(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \infty, & x = 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

而且，对于任意一个在 $x = 0$ 点连续的函数 $f(x)$ ，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

这里的积分限也不一定是 $\pm\infty$ ．只要 $a < 0, b > 0$ ，就有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

这样定义的函数，并不是通常意义下的函数：它并没有给出函数与自变量之间的对应关系，或者说，它给出的对应关系

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

在通常意义下是没有意义的.

它所给出的“函数值”只是在积分运算中才有意义.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0),\qquad \text{特别是}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1.$$

而且，这个积分应该理解为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\lim_{l\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x$$

现在把 δ 函数推广到二维或三维的情形．显然，如果在平面上 (x_0, y_0) 点处有一个单位点电荷，它的密度分布函数就是 $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$．同样，在三维空间 (x_0, y_0, z_0) 处有一个单位点电荷，它的密度分布函数就是 $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$．

例13.2　证明 $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\boldsymbol{r})$

其中 $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$，称为拉普拉斯算符，

$r \equiv |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$．

证　正像前面指出的，凡是涉及 δ 函数的等式都应该从积分意义下去理解，这意味着本题即应该去证明

$$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & \text{当 } \boldsymbol{r}=0 \notin V; \\ -4\pi, & \text{当 } \boldsymbol{r}=0 \in V. \end{cases}$$

当 $r \neq 0$ 时，直接微商可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{3x^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}, \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{3y^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}, \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{3z^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

三式相加，即得

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0, \qquad r \neq 0.$$

这样就证得：当积分体积 V 内不包含原点 $r=0$ 时，积分恒为 0 .

当积分体积 V 内包含原点 $r=0$ 时，由于函数 $1/r$ 在 $r=0$ 点不可导，上面的结果不成立．这时不妨将 V 就取为整个 (三维) 空间．可以得到

$$\begin{aligned}\iiint \nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \lim_{a\to 0}\iiint \nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= -\lim_{a\to 0}\iiint \frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\ &= -12\pi\lim_{a\to 0}\int_0^\infty \frac{a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}r^2\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

令 $r=a\tan\theta$，即可证明上面的积分与 a 无关，且

$$\begin{aligned}\iiint \nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= -12\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta = -12\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\\ &= -12\pi\cdot\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\pi/2} = -4\pi.\end{aligned}$$

∇算符运算的常用公式

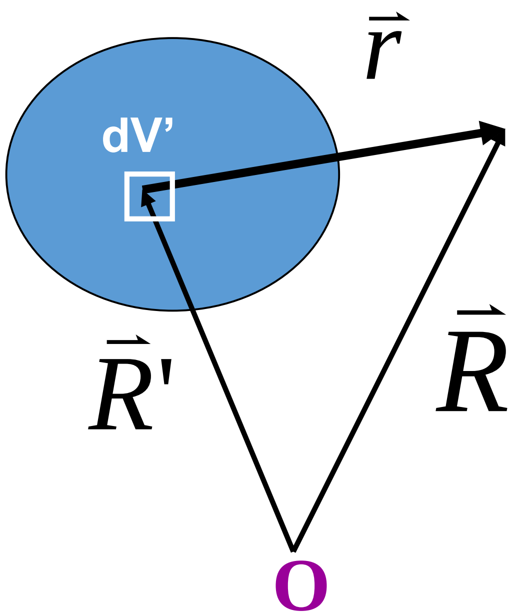
$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{R}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}'$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\vec{E} = \int \frac{\rho(\vec{r}')\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} dV'$$



场点劈形算符 $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

源点劈形算符 $\nabla' = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y'} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z'}$

有时电荷不是连续分布，而是离散分布的点电荷，

可用δ函数来描述其电荷密度：

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i')$$

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0 \\ \infty, & \vec{r} = 0 \end{cases}$$

$$\int \delta(\vec{r}) dV = 1$$

$$\int f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = f(\vec{r}_0)$$

根据这三条性质，对只包含第i个点电荷的区域 ΔV_i 有

$$\int_{\Delta V_i} \rho(\vec{r}) dV = \int_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i') dV = q_i$$

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla' \times \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\vec{r})$$

$$\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)=\vec{a}$$

$$\nabla\left(u\ v\right)=u\nabla v+v\nabla u$$

$$\nabla\cdot\left(\varphi\ \vec{f}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\cdot\vec{f}+\varphi\nabla\cdot\vec{f}$$

$$\nabla\times\left(\varphi\ \vec{f}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\times\vec{f}+\varphi\nabla\times\vec{f}$$

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$$

例13.3 由 $\vec{E}=\int\frac{\rho\left(\vec{R}'\right)\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}dV'$ 求静电场的散度和旋度。

解：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\int\nabla\cdot\left[\frac{\rho\left(\vec{R}'\right)\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right]dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{R}'\right)\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{R}'\right)\cdot 4\pi\delta\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)dV' \quad =\frac{\rho\left(\vec{R}\right)}{\varepsilon_0}$$

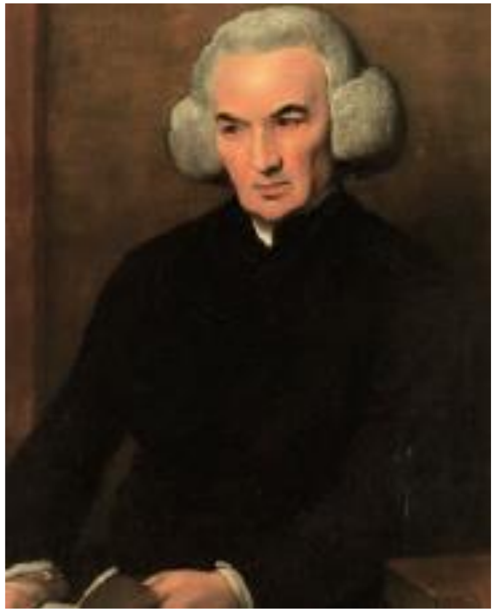
$$\nabla\times\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\nabla\times\left[\frac{\rho\left(\vec{R}'\right)\vec{r}}{r^3}\right]dV' \quad =\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{R}'\right)\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3}dV'=0$$

由 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 和 $\nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ 即得

1781-1840

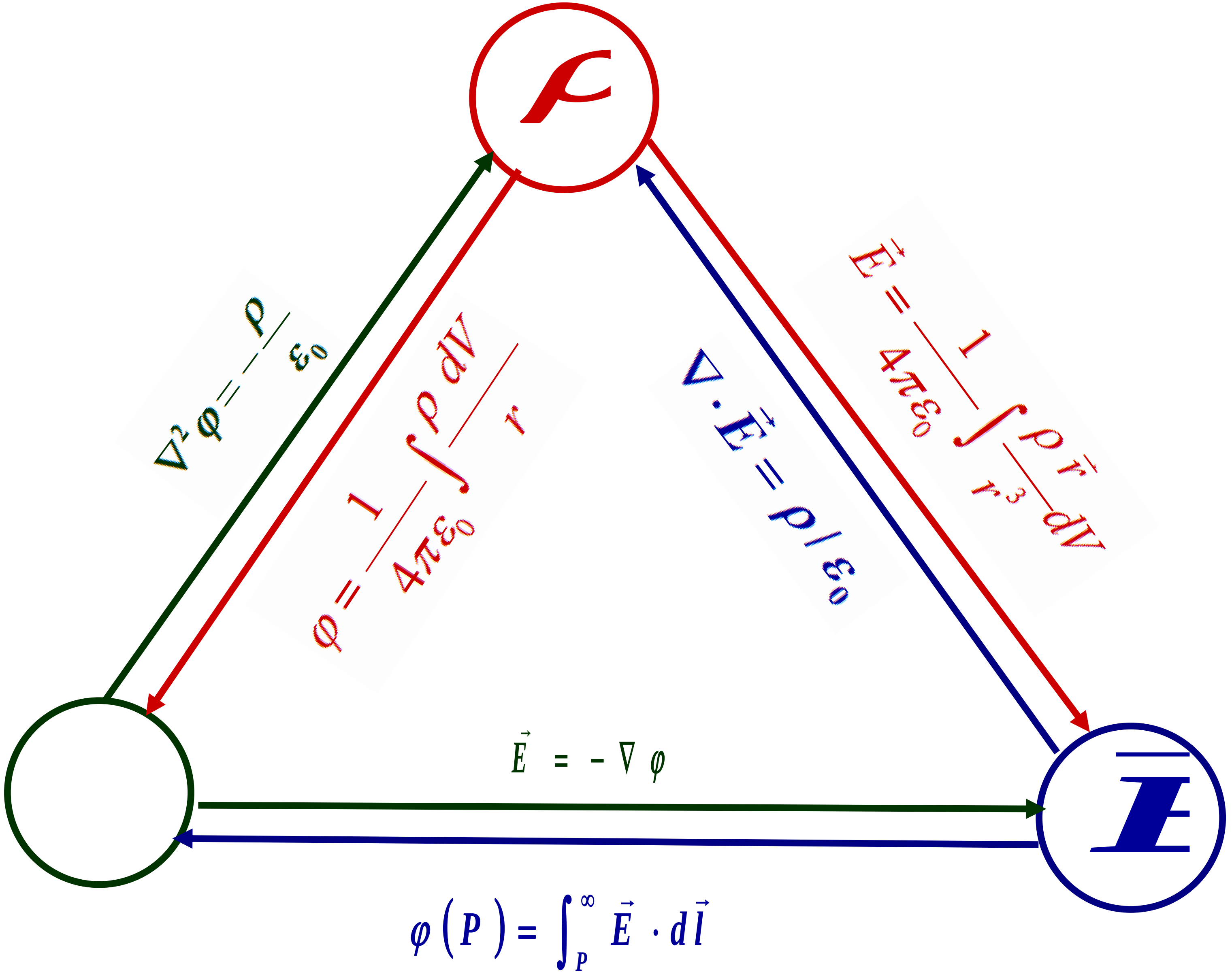
泊松方程 $\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

在没有电荷存在的空间，泊松方程化为



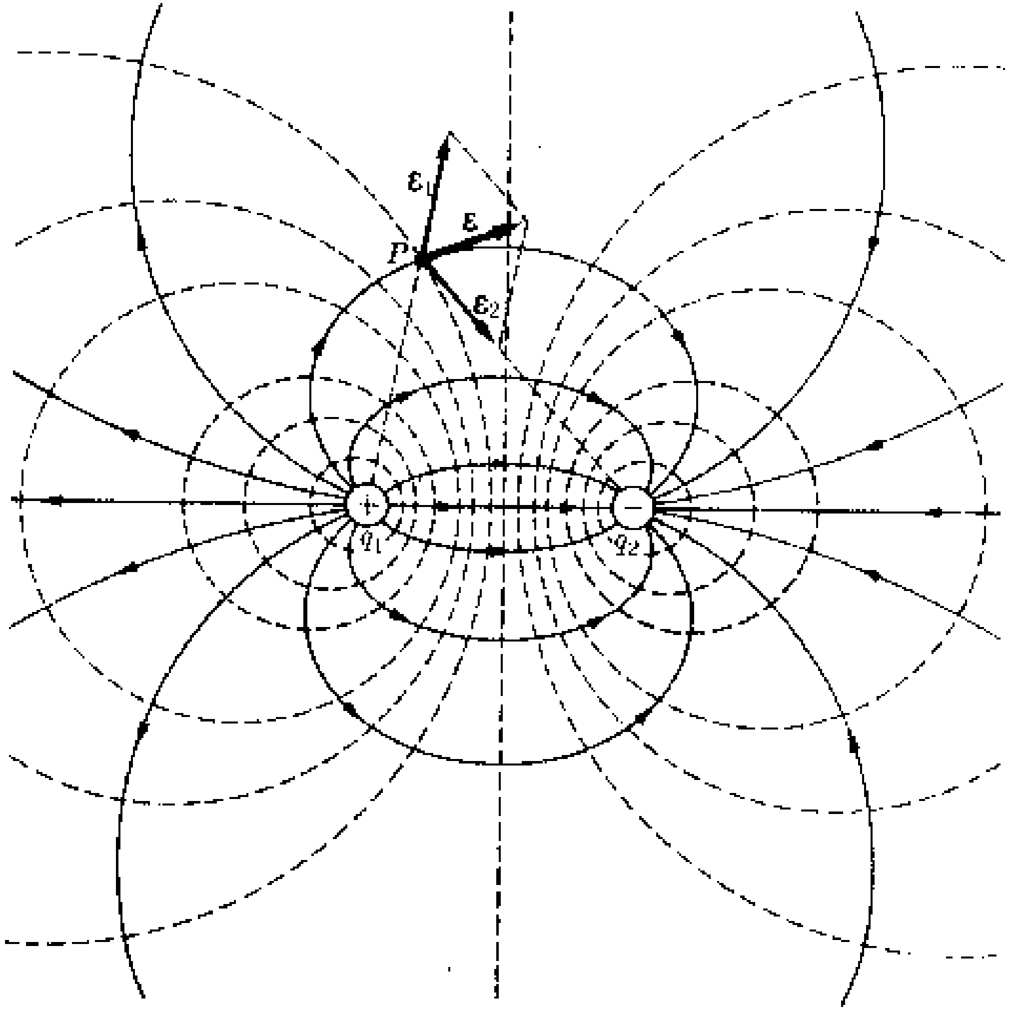
1749-1827

拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$

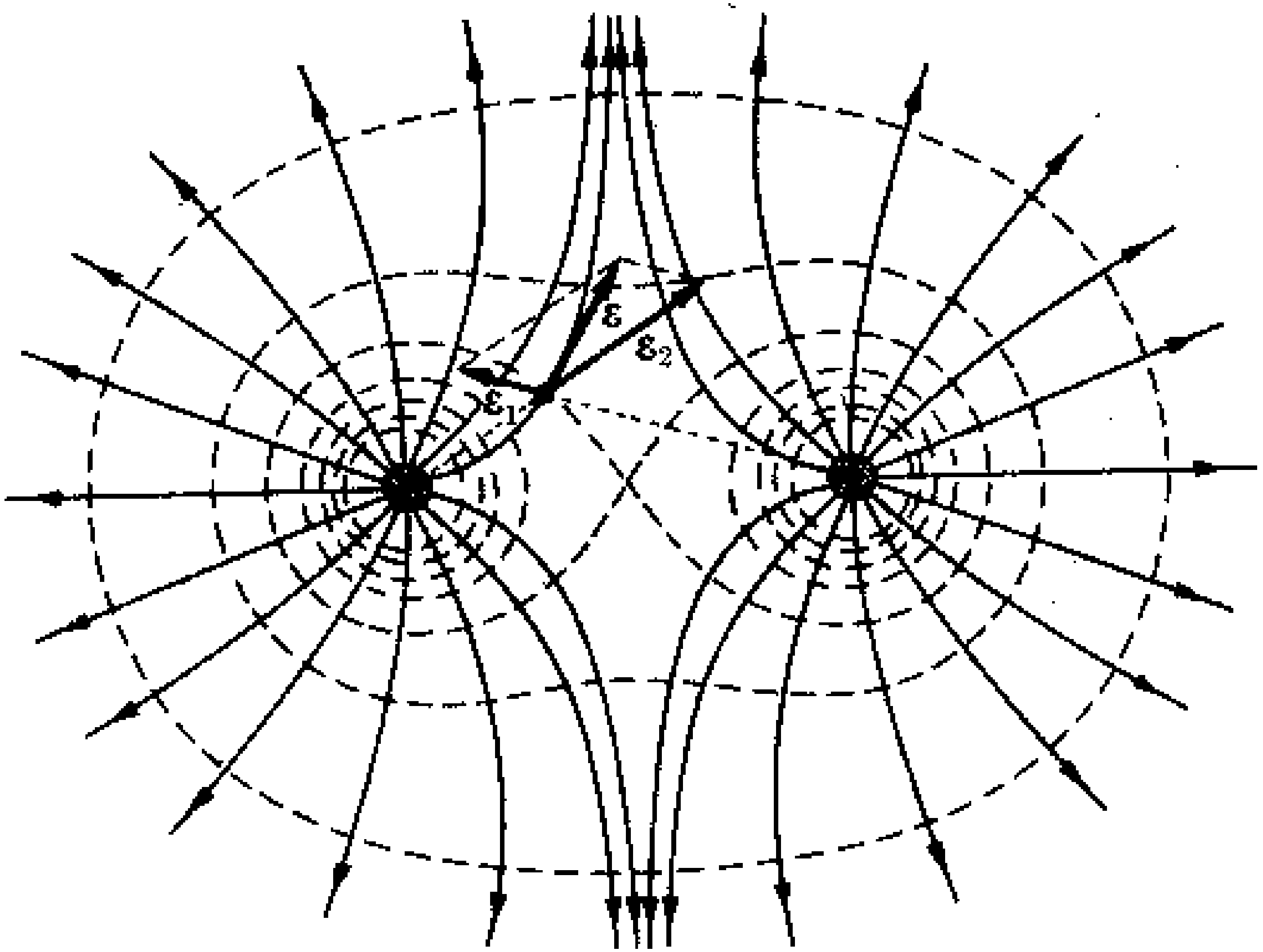


ρ
$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\, dV}{r}$
$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\vec{r}}{r^3}dV$
$\vec{E} = -\nabla\varphi$
$\varphi(P) = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$
$\overline{E}$

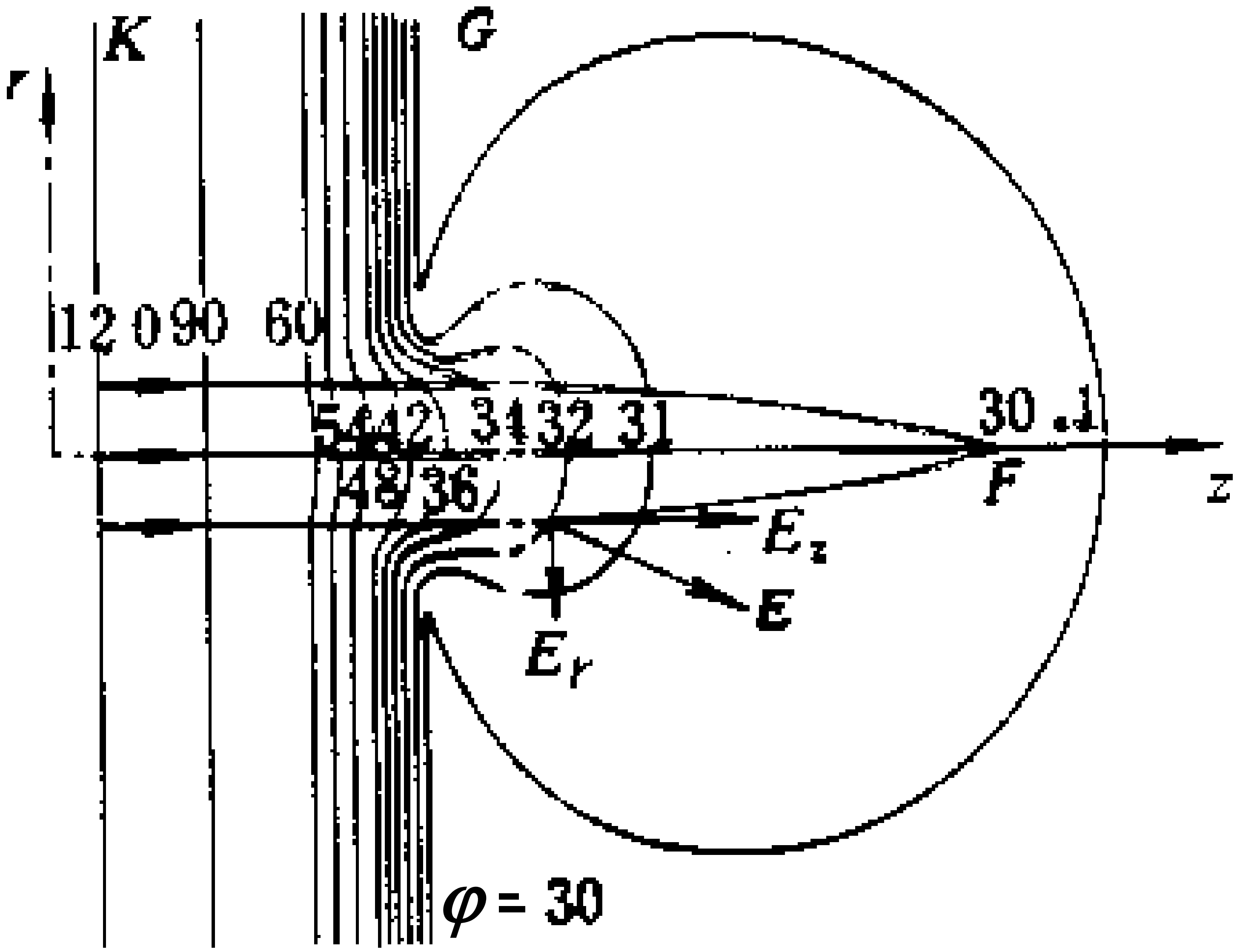
▲某些等势面：



电偶极子的电场线和等势面



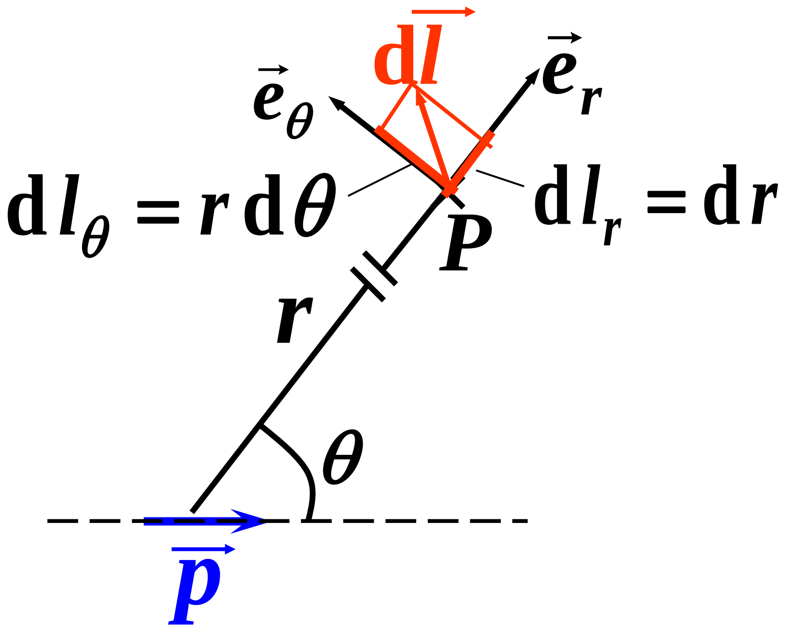
两个等量的正电荷的电场线和等势面



静电透镜的等势面

例13.4 由偶极子的电势求场强：

$$\varphi(\theta, r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



解：方法一

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_{//}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_\perp$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = 0$$

方法二：用直角坐标系求解,参考书中例题。

方法三：直接进行算符运算。

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \qquad \nabla(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}$$

$$\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left[\frac{1}{r^3}\cdot(\vec{p}\cdot\vec{r})\right] = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})\nabla\frac{1}{r^3}\right]$$

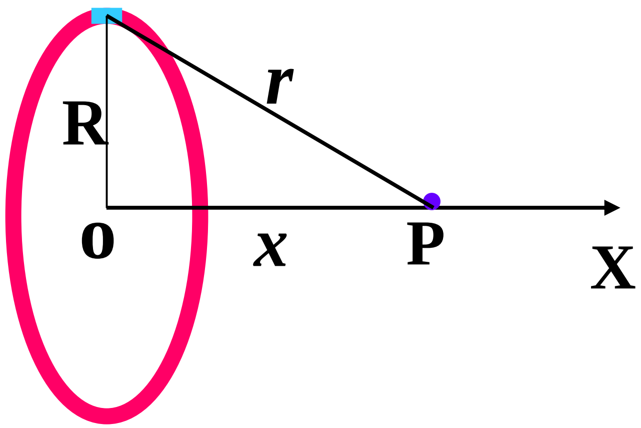
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3\vec{e}_r}{r^4}(\vec{p}\cdot\vec{r})\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}\right]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}\right]$$

请与第12章课件(12a-25)比较。

例13.5 一个均匀带电圆环，半径为R， 电量为Q。求其轴线上任意一点的场强。

解：根据点电荷电势叠加，P点的电势



$$\varphi = \int_q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

P点的电场： $\because \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$

$$\therefore \ E_P = E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_o\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

方向沿X轴正向

注：

1º $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 即：E 取决于φ 在该点的空间变化率而与该点φ 值的大小无关。

2º 电场强度的又一单位：V/m = N/C

3º 求电场强度的三种方法

点电荷电场叠加：$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$

用高斯定理求对称场：$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{S内} q_i$

电势梯度法：$\vec{E} = -\nabla\varphi$

例13.6 证明**Green**互易定理：设$\varphi_\infty=0$，给定ρ_1、ρ_2分布，它们单独存在时激发的场和势分别为$\vec{E}_1$、φ_1和$\vec{E}_2$、φ_2，则

$$\int \rho_1\varphi_2\,\mathrm{d}V=\int \rho_2\varphi_1\,\mathrm{d}V$$

证：

$$\nabla\cdot\left(\varphi\vec{E}\right)=\nabla\varphi\cdot\vec{E}+\varphi\nabla\cdot\vec{E}$$

$$\varphi\nabla\cdot\vec{E}=\nabla\cdot\left(\varphi\vec{E}\right)-\nabla\varphi\cdot\vec{E}$$

$$\rho_1=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}_1$$

$$\int \rho_1\varphi_2\,\mathrm{d}V=\varepsilon_0\int \varphi_2\nabla\cdot\vec{E}_1 = \varepsilon_0\int\left[\nabla\cdot\left(\varphi_2\vec{E}_1\right)-\nabla\varphi_2\cdot\vec{E}_1\right]\mathrm{d}V$$

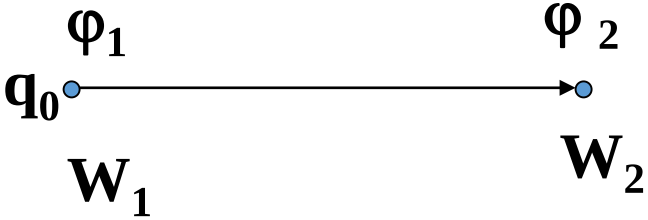
$$=\varepsilon_0\int \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\,\mathrm{d}V$$

13.5 点电荷在外电场中的静电势能

把电荷q_0从电场中的1点移到2点过程中，电场力作的功为

$$A_{12} = \int_1^2 q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= q_0 \left(\varphi_1 - \varphi_2 \right) = W_1 - W_2 = -\Delta W$$



$$A_{12}=q_0\int_{(1)}^{(2)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=W_1-W_2=-\Delta W$$

1、点1和点2之间的电势差，等于将单位正电荷从点1移动到点2 电场力所做的功。

2、在静电场中电场力作功与路径无关。

3、电势的零点就是电势能的零点。

4、电荷 q_0 在该电场中的电势能为 $W=q_0\varphi$

电势能与电势的关系为 $W=q_0\varphi$（点点对应）

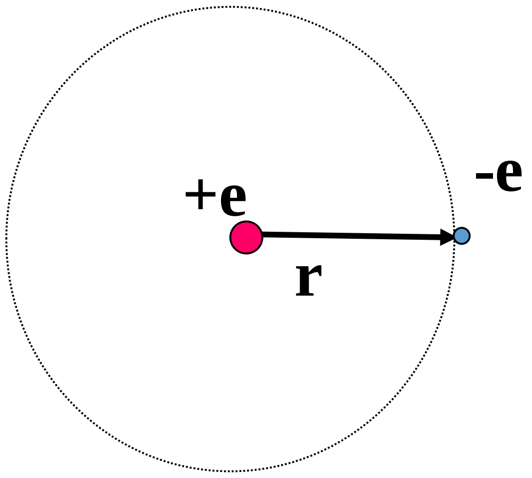
5、电势能是属于电荷q_0和场源所共有的（正像重力势能是属于物体和地球所共有的一样）也叫相互作用能。

例13.7 求氢原子中的电子在原子核电场中的电势能。

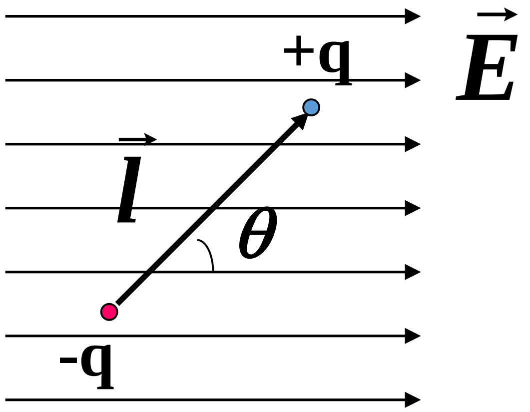
解:

$$W=(-e)\varphi=(-e)\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



例13.8　求一个电偶极子在均匀电场中的电势能。



解:

$$W = W_+ + W_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$$

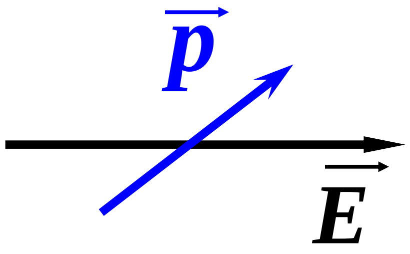
$$= q\int_{+q}^{-q} \vec{E}\cdot d\overleftarrow{l} = -q\int_{-q}^{+q} \vec{E}\cdot d\overleftarrow{l}$$

$$= -q\vec{E}\cdot\int_{-q}^{+q} d\overleftarrow{l} = -q\vec{E}\cdot\vec{l} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

点电荷的电势能：

$$\boxed{W = q\varphi}$$

电偶极子的电势能：



$$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

$\vec{p} \parallel \vec{E}$ 时电势能最低。

电偶极子在均匀电场中所受的力矩

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}}$$

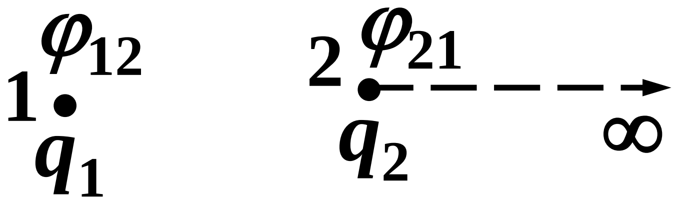
13.6 电荷系的静电能

一.点电荷系的相互作用能（电势能）

相互作用能$W_{互}$： 把各点电荷由现在的位置分散至相距无穷远的过程中，电场力作的功。

$$W_{互}=\int_{(2)}^{\infty} q_2\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}\ =q_2\cdot\underline{\varphi_{21}}$$

两个点电荷：



q_1的电场在q_2处的电势

同理： $W_{互}=q_1\cdot\varphi_{12}$

写成对称形式：$W_{互}=\dfrac{1}{2}(q_1\varphi_{12}+q_2\varphi_{21})$

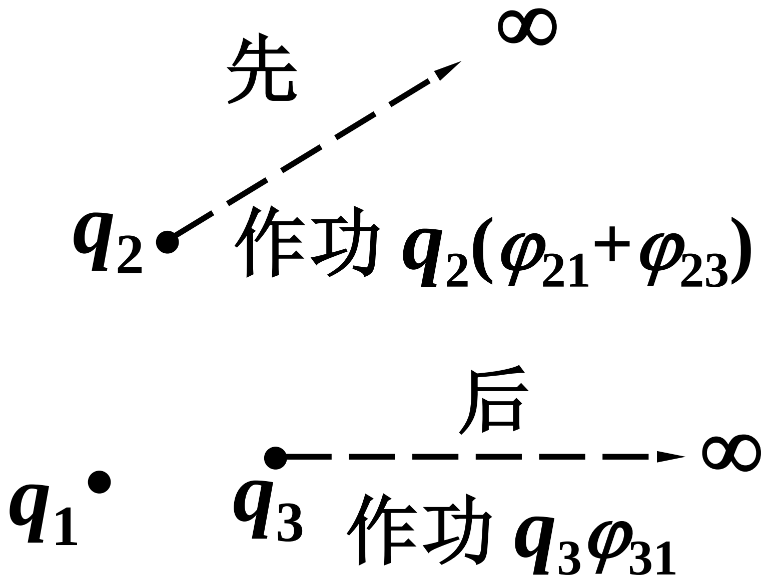
三个点电荷：

$$W_{互}=q_2(\varphi_{21}+\varphi_{23})+q_3\varphi_{31}$$

$$=\frac{1}{2}(q_2\varphi_{21}+q_1\varphi_{12})+$$

$$+\frac{1}{2}(q_2\varphi_{23}+q_3\varphi_{32})+$$

$$+\frac{1}{2}(q_3\varphi_{31}+q_1\varphi_{13})$$



$$=\frac{1}{2}q_1(\varphi_{12}+\varphi_{13})\ +\frac{1}{2}q_2(\varphi_{21}+\varphi_{23})+$$

$$+\frac{1}{2}q_3(\varphi_{31}+\varphi_{32})=\frac{1}{2}(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2+q_3\varphi_3)$$

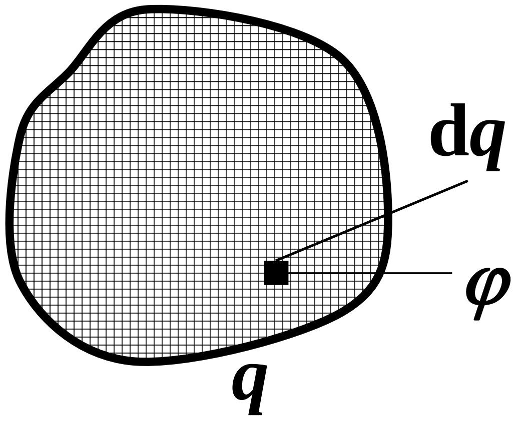
推广至一般点电荷系：

$$\boxed{W_{互}=\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i}$$

φ_i —— 除 q_i 外，其余点电荷在 q_i 所在处的电势。

二. 连续带电体的静电能（自能）

静电能W：把电荷无限分割，并分散到相距无穷远时， 电场力作的功。

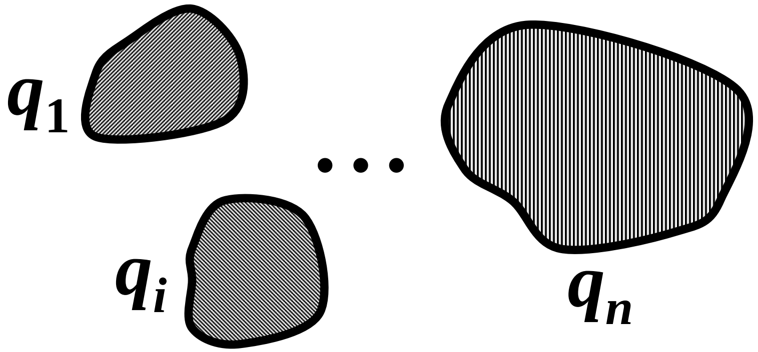


- 只有一个带电体：

$$W=W_{自}=\frac{1}{2}\int_q\varphi\,\mathrm{d}q$$

点电荷的自能无限大，所以是无意义的。

• 多个带电体：

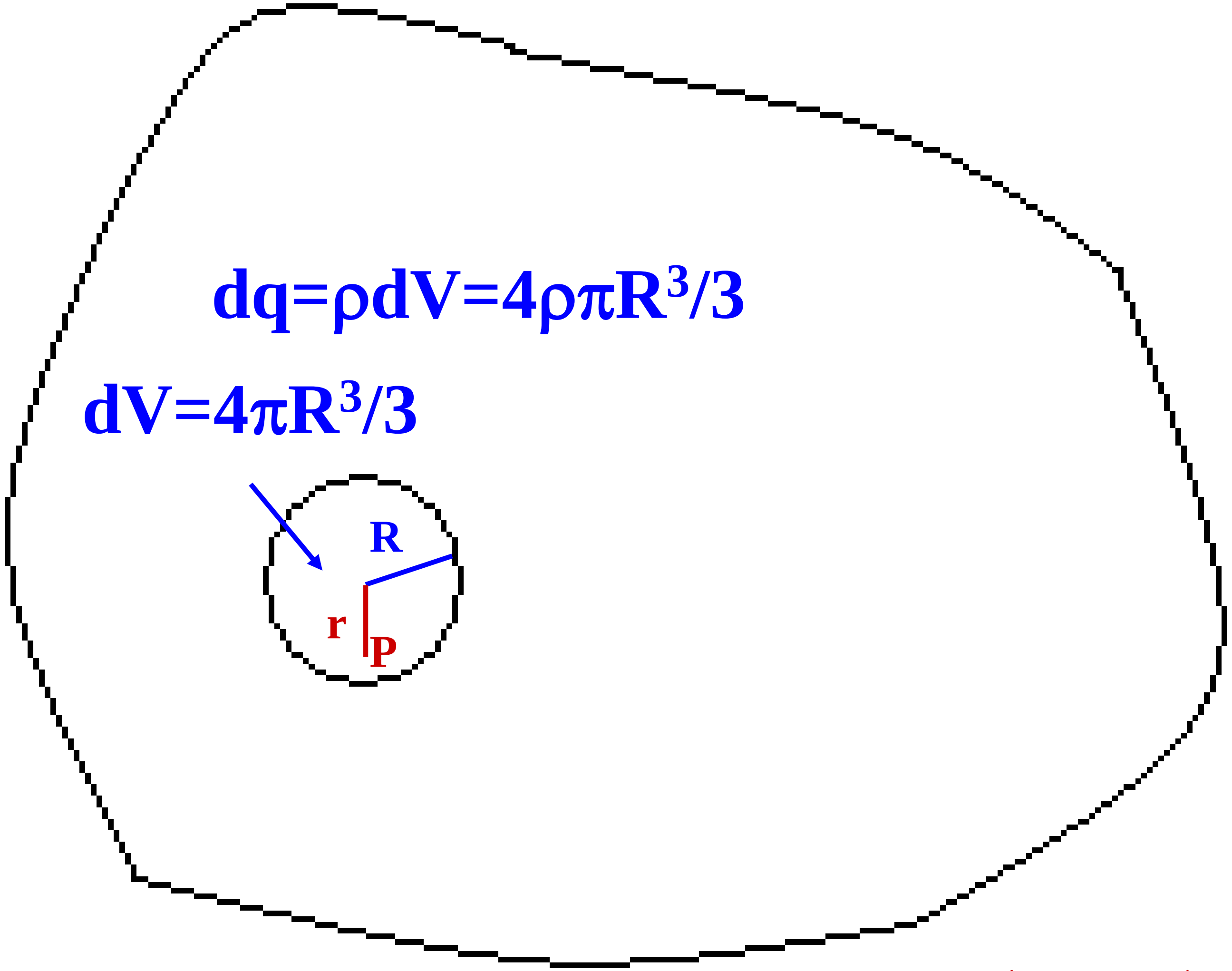


总静电能 $$W = \sum_i W_{自i} + \sum_{i<j} W_{互ij}$$

书中，$$W_{自} = \frac{1}{2}\int_q \varphi \, \mathrm{d}q$$

“由于电荷dq为无限小，所以上式积分号内的φ为带电体上所有电荷在电荷元dq所在处的电势。”

为什么电荷元dq自身的电势不必扣除?



dq在P点的电势为 $d\varphi = \dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{dq}{R}\left(3-\dfrac{r^2}{R^2}\right) = \dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}\left(3-\dfrac{r^2}{R^2}\right)$

(书中例题) $R \to 0,\quad d\varphi \to 0$

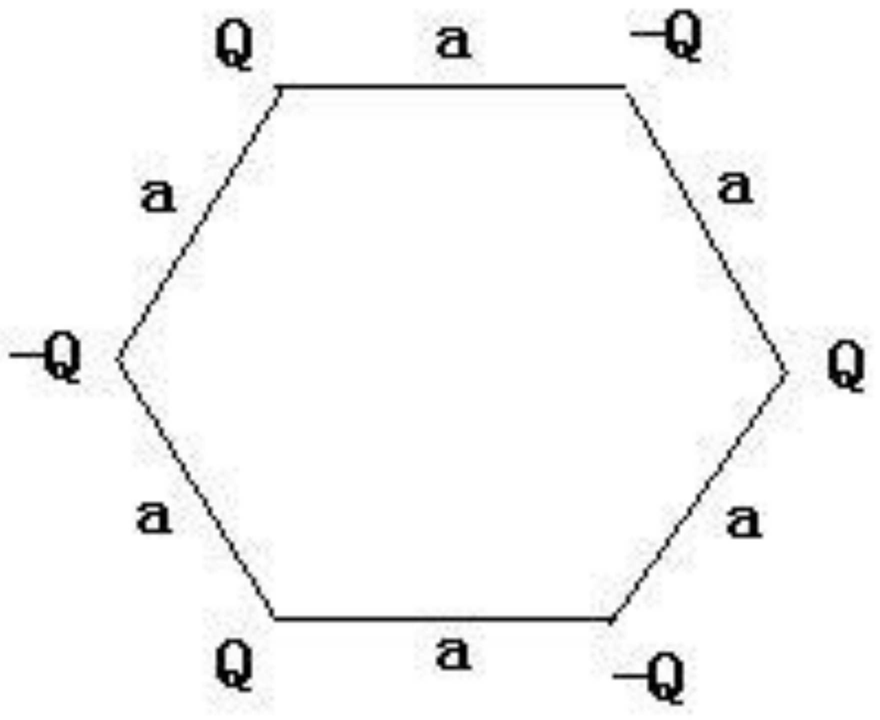
电荷元虽是理论上的点电荷，但只要ρ为有限值，其电量$dq = \rho dV$

就是三阶无穷小量，因而其伴存场在自身所在处的电势为二阶无穷小。因此，与整个带电体系的电势φ相比，电荷元自身的电势可不必扣除。

例13.9 边长为a的正六边形分别有固定的点电荷，它们的电量或为Q，或为 —Q，分布如图所示。

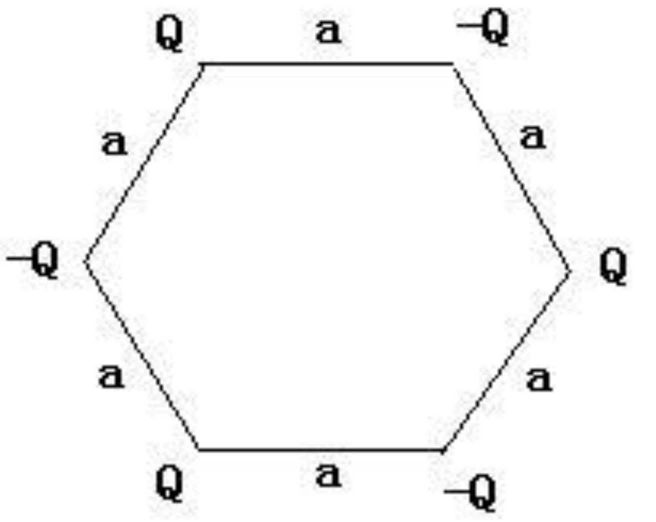
1. 试求因点电荷间相互的静电作用而使系统具有的电势能*W*;

2. 若用外力将相邻的一对正、负电荷一起（即始终保持其间距不变）缓慢地移到无穷远处，其余固定的点电荷位置保持不变，试求外力所作的功。



解：(1)

$$\boxed{W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i} q_i \varphi_i}$$



$$\varphi_- = -\varphi_+$$

$$\varphi_+ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(-2 + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{5}{2}\right)$$

$$W = \frac{3}{2}Q\varphi_+ - \frac{3}{2}Q\varphi_- = 3Q\varphi_+ = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{5}{2}\right)$$

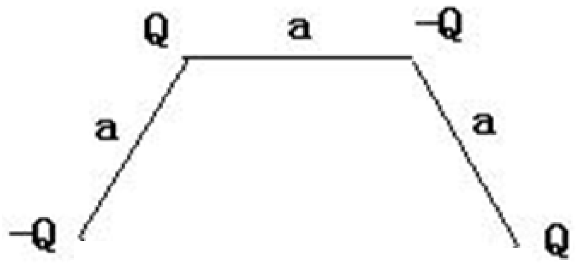
(2)

$$W_1 = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a} - \frac{Q}{\sqrt{3}a} + \frac{Q}{2a}\right) + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{a} - \frac{Q}{a} + \frac{Q}{\sqrt{3}a}\right)$$

$$-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a} + \frac{Q}{a} - \frac{Q}{\sqrt{3}a}\right) + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{2a} + \frac{Q}{\sqrt{3}a} - \frac{Q}{a}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\left[2\times\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) + 2\times\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{7}{2}\right)$$



$$W_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$A = W_1 + W_2 - W$$

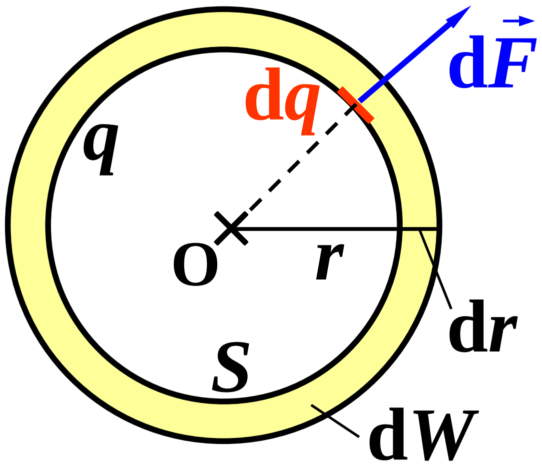
$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{7}{2} - 1 - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{15}{2}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

13.7 静电场的能量

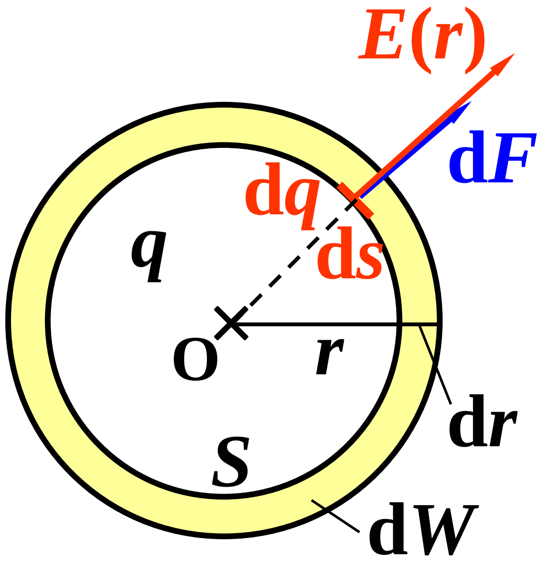
按上节给出的静电能表示式 $W=\frac{1}{2}\int_q \varphi \mathrm{d}q$

似乎能量集中在电荷上。但从场的角度来看，能量应该是储存在电场中。

设一个半径为 r 表面均匀带电 q 的气球膨胀，其半径增加dr。如果电场能量是储存在电场中，



则由于气球的膨胀，在增加的球壳体积内原有的电场能将消失。这部分消失的电场能dW，应该等于膨胀中静电斥力作的功 d A 。



$dq = (q/S)\,ds$所受的电场力dF是除去dq外球面上其余电荷所施与的。 这些电荷在ds面元处的场强应为$E(r)\times(1/2)$。

$$\therefore\ dA = \oint_S dF\cdot dr = \oint_S \frac{1}{2}E(r)\cdot\frac{q}{S}ds\cdot dr = \frac{E(r)}{2}\cdot\frac{q}{S}\cdot dr\cdot S$$

$$= \frac{1}{2}E\cdot\frac{q}{4\pi r^2}dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = dW \overset{令}{=} w_e\cdot dV$$

电场能量密度 $\boxed{w_e = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

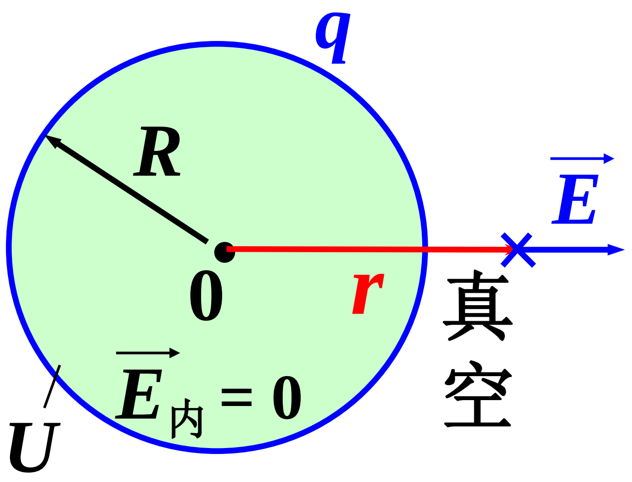
以上w_e的表示式也适用于静电场的一般情况。

在电场存在的空间V中，静电场能（静电能）：

$$W=\int_V w_e\,\mathrm{d}V=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,\mathrm{d}V$$

在静电学中，上式和 $W=\frac{1}{2}\int_q \varphi\,\mathrm{d}q$ 是等价的。

例如，对均匀带电球壳的电场能W：



在球壳外

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2$$

$$=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

$$W=\int_R^{\infty}\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

球面电势 $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$W=\frac{1}{2}\int_q\varphi\,\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\varphi\cdot q=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

一致

虽然如此，两种表示反映的却是两种不同观点。

在变化的电磁场中，电场储能的概念被证明为不仅必要， 而且是唯一客观的实在了。

真空中静电场小结

一. 线索（基本定律、定理）：

库仑定律

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0$$

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

$$\rightarrow \vec{E} = \sum_i \frac{q_i \vec{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \rightarrow$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

还有电荷守恒定律，它时刻都起作用。

静电场基本方程

积分形式

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q_{内}$$

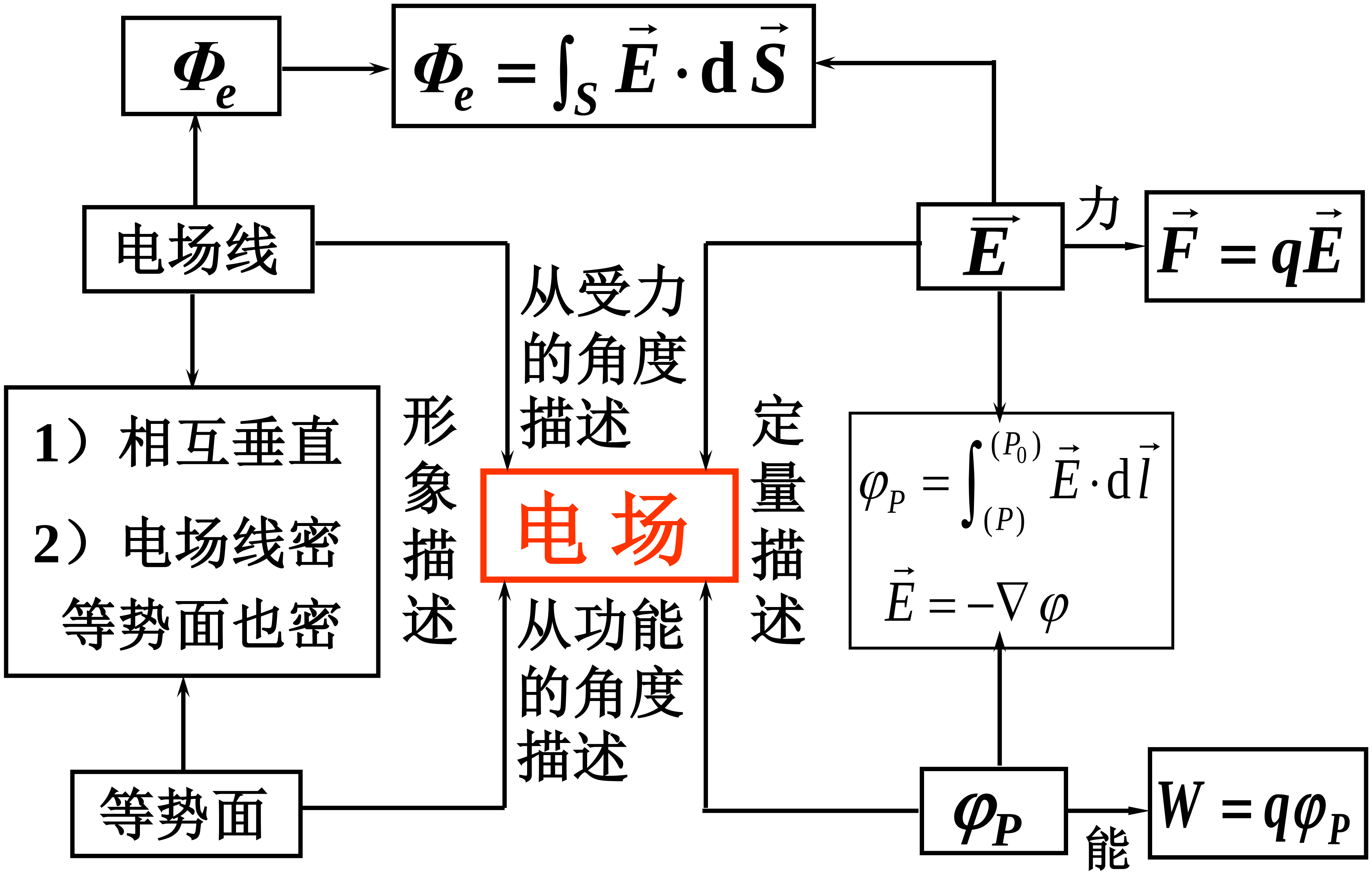
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

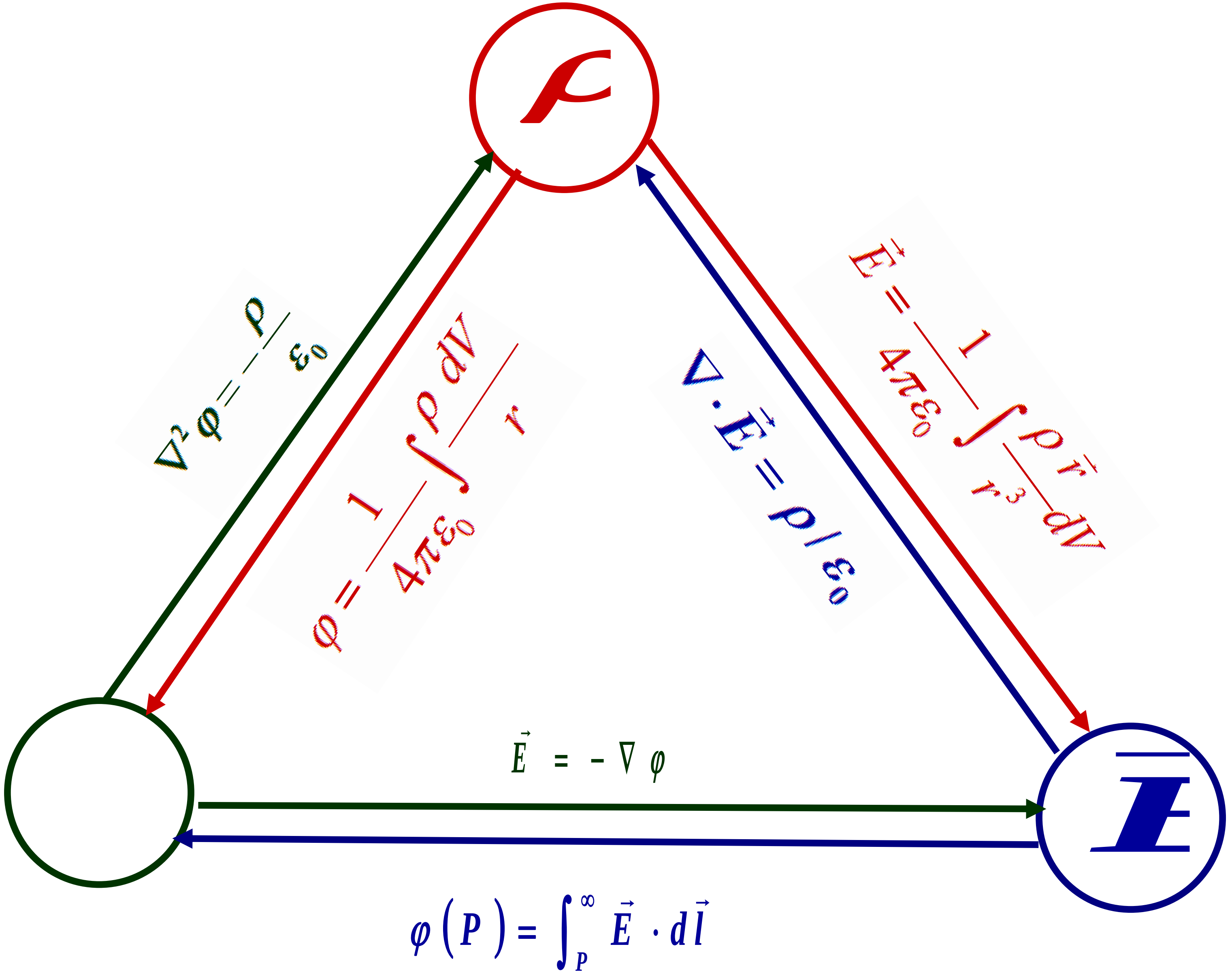
微分形式

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

二. 基本物理量之间的关系：




$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\,dV}{r}$
$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\,\vec{r}}{r^3}dV$
$\vec{E} = -\nabla\varphi$
$\varphi(P) = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$

三. 求场的方法：

1. 求$\vec{E}$

叠加法（补偿法）：$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$，

$$\vec{E}=\int_q \frac{\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}q\ ;$$

高斯定理法：$\oint_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$；

微分法：$\vec{E}=-\nabla\varphi$，$E_l=-\frac{\partial\varphi}{\partial l}$。

2.求φ

场强积分法：$\varphi_p = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$，

（$\vec{E}$分段，积分也要分段）；

叠加法（补偿法）：$\varphi = \sum_i \varphi_i$（零点要同）；

$$\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}，\quad （\varphi_\infty = 0）。$$

四.几种典型电荷分布的场强和电势:（自己总结）

点电荷；均匀带电薄球壳；　均匀带电大平板；

均匀带电长直线；　均匀带电长圆筒等。

矢量场的积分变换

高斯定理

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}dV$$

V是闭合曲面S包围的体积

斯托克斯定理

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S}$$

S是以闭合回路L为周界的曲面

第13章结束