12. 静电场

静电场 — 相对观测者静止的电荷产生的电场

本章内容：

12.1 电荷

12.2 库仑定律

12.3 电场和电场强度

12.4 叠加法求场强

12.5 电场线和电通量

12.6 高斯定理

12.7 高斯定理应用举例

12.1 电荷

在很早的时候，人们就发现了用毛皮摩擦过的琥珀能够吸引羽毛、头发等轻小物体。

物体有了这种吸引轻小物体的性质，就说它带了电，或有了**电荷**。带电的物体叫**带电体**。使物体带电叫做**起电**。用摩擦方法使物体带电叫做摩擦起电。

物体所带电荷数量的多少，叫做电荷量，简称**电量**。

1. 电荷的种类

用绸子摩擦过的玻璃棒

所带的电荷—正电荷

用毛皮摩擦过的硬橡胶棒

所带的电荷—负电荷

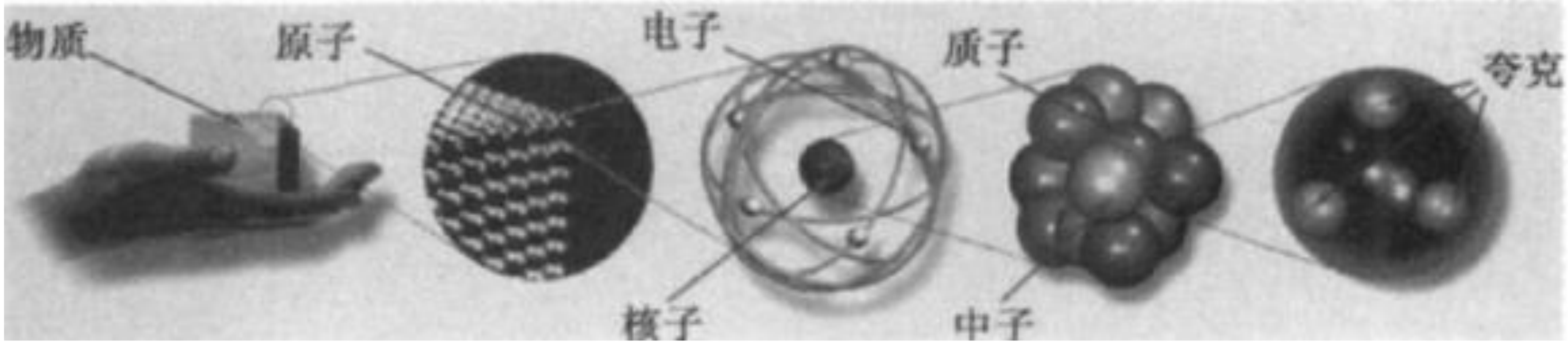
富兰克林

(Benjamin Franklin, 1706 - 1790)

2. 电荷的量子性

$$e = 1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C}$$

点电荷 — 一个相对的概念



3. 电荷守恒

一个孤立系统中正、负电荷的代数和是不变的。

4. 电荷的相对论不变性

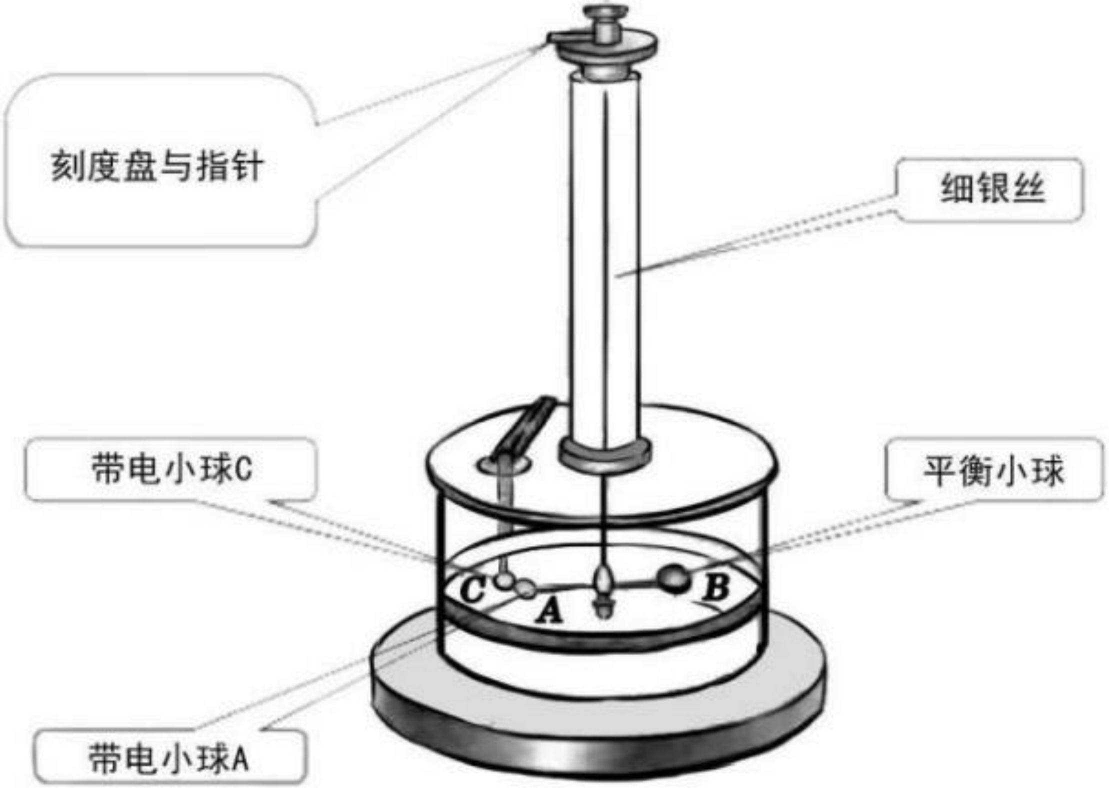
电量不依赖于参照系。

12.2 库仑定律与叠加原理

库仑

（1736 — 1806）

Charles Auguste de Coulomb

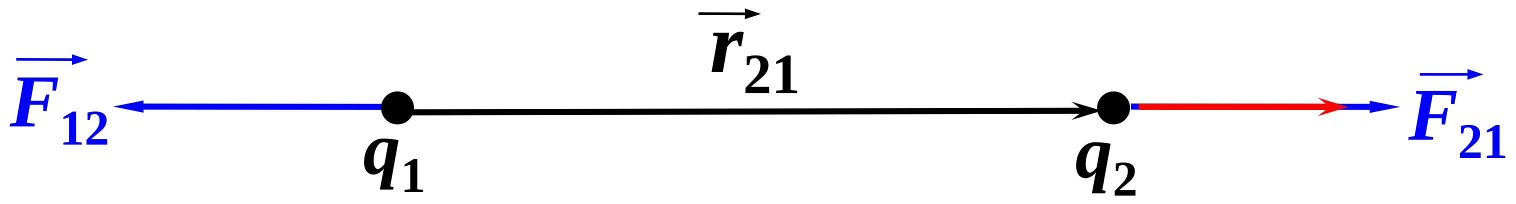


法国物理学家

1785

库仑扭秤及其结构示意图

$$\boxed{\vec{F}_{21} = k\,\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\,\vec{e}_{r_{21}} = -\vec{F}_{12}}$$



电量的单位

上式中k为比例系数，它的数值和单位取决于式中各量所采用的单位。在静电学中沿用较久的一种单位制是**绝对静电单位制（CGSE制）**。在这种单位制中，令k=1，若r=1 cm，F=1 dyn，则规定$q_1=q_2=1$绝对静电单位电量（通常以**CGSE**或**e.s.u.**表示）。

目前在国际上推行的统一单位制是国际单位制，简称SI（源自法语的Système Internationale）。

在这种单位制中，电流的单位—安培（A）是基本单位，电量的单位叫库仑（C），是导出的单位。库仑的定义是：当导线中通有1A的稳恒电流时，1s内通过导线横截面的电量为1C，即 $1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A \cdot s}$

$$1\ \mathrm{C} = 3.00 \times 10^{9}\ \text{e.s.u.电量}$$

F—牛顿（N），　r—米（m）

实验定出：　$k = 8.9880 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

1881年的国际电学大会上，电量的单位被定义为库仑。

国际单位制中的7个基本单位

量的名称	单位名称	单位符号
长度	米	m
质量	千克（公斤）	kg
时间	秒	s
电流	安[培]	A
热力学温度	开[尔文]	K
物质的量	摩[尔]	mol
发光强度	坎[德拉]	cd

国际单位制中安培的定义也先后发生过几次改变。1908年在伦敦举行的国际电学大会上，定义1秒时间间隔内从硝酸银溶液中能电解出1.118毫克银的恒定电流为1安培。1948年，国际计量委员会给出安培的定义为：在真空中，截面积可忽略的两根相距1米的平行且无限长的圆直导线内，通以等量恒定电流，导线间相互作用力在1米长度上为2×10^{-7}牛时，则每根导线中的电流为1安培。2018年11月16日，第26届国际计量大会通过“修订国际单位制”决议，将1安培定义为“1s内（1/1.602176634）$\times10^{19}$个电荷移动所产生的电流强度”。此定义于2019年5月20日世界计量日起正式生效。

▲ 库仑定律适用的条件：

- 点电荷—理想模型
- 施力电荷对观测者静止（受力电荷可运动）

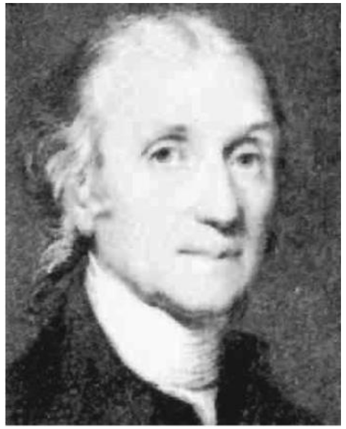
▲ 有理化： 引入常量ε_0， 令 $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

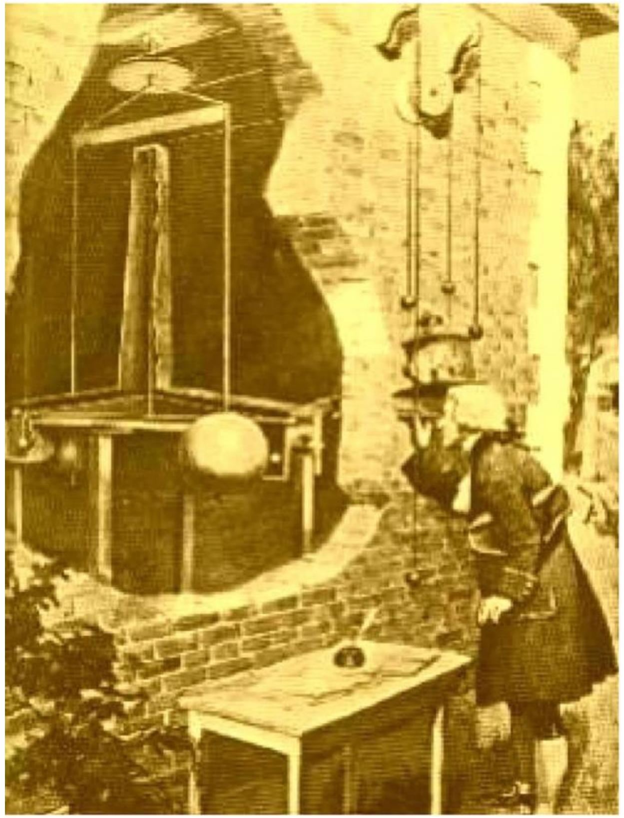
有：$\varepsilon_o=\dfrac{1}{4\pi k}=8.85\times 10^{-12}C^2/N\cdot m^2$

$$=\frac{10^{-9}}{36\pi}C^2/N\cdot m^2$$

ε_0—真空介电常量

有理化后的库仑定律：$\boxed{\vec{F}_{21}=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^2}\vec{e}_{r_{21}}=-\vec{F}_{12}}$





卡文迪什
(Henry Cavendish)
(1731-1810)

卡文迪什在做纽秤实验

1771~1773年，卡文迪什完成了一系列静电实验，证明空腔金属容器内表面不带电荷，据此推断电力与距离的平方成反比关系。但是，在他去世之前，这些成果没有公开发表，直到1879年，才由麦克斯韦整理、注释出版了他生前的手稿。

电力叠加原理

实验表明：如果一个点电荷q同时受许多点电荷q_1、q_2、… 的作用，则q所受的总力就是各个点电荷单独与它作用时的力之和。

$$\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i}$$

12.3 电场和电场强度

一. 电场

电荷周围存在电场

1. 静电场

相对于观察者静止的电荷产生的电场

是电磁场的一种特殊形式

2. 电场的基本性质

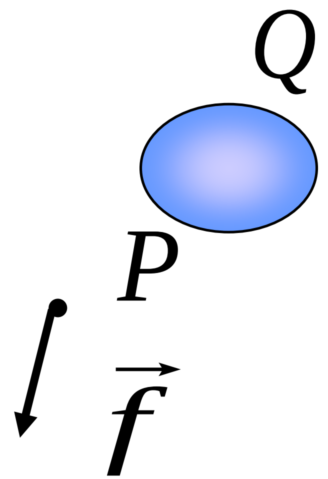
对放在其内的任何电荷都有作用力

电场力对移动电荷作功

二. 电场强度（electric field strength）

空间带电体

电量为 Q



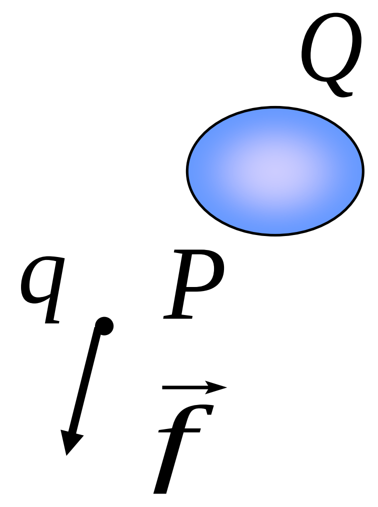
描述场中各点电场的强弱的物理量是电场强度

$\boxed{\text{试探电荷}}$

条件 { 电量充分地小 **使它的引进几乎不影响原来的电场分布。**

线度足够地小 **以保证能反映电场中某一点的性质。**

根据**库仑定律**可以知道，当把试探电荷q放置在电场中任一固定点P时，由于构成带电体Q的任一带电小块施于q的力都与电量q成正比，又根据电力叠加原理，可知整个带电体Q施于q的电场力



$\vec{f}$也必定与q成正比。即对于电场中任一固定点P，

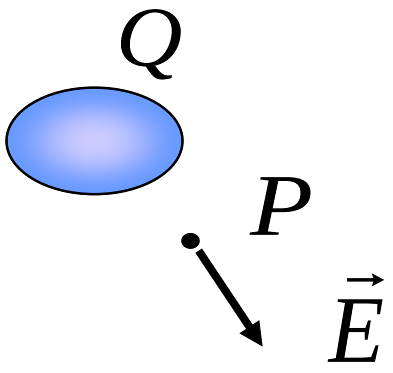
$\vec{f}/q$ 的大小和方向都与q无关，反映了**电场在P点的性质。**

电场强度定义 $\boxed{\vec{E}=\dfrac{\vec{f}}{q}}$ 与试探电荷无关

讨论

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}(r) = \vec{E}(x\ y\ z)}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q}}$$



矢量场

量纲

国际单位制 $\left[\vec{E}\right] = \dfrac{\left[\vec{f}\right]}{[q]}$

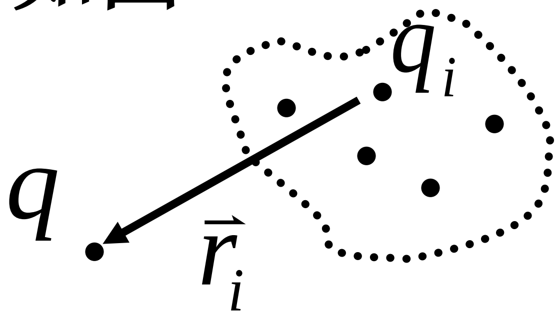
单位 N/C 或 V/m

点电荷在外场中受的电场力 $\boxed{\vec{f} = q\vec{E}}$

12.4 叠加法求场强

一. 场强叠加原理

如果带电体由 n 个点电荷组成，如图



由电力叠加原理

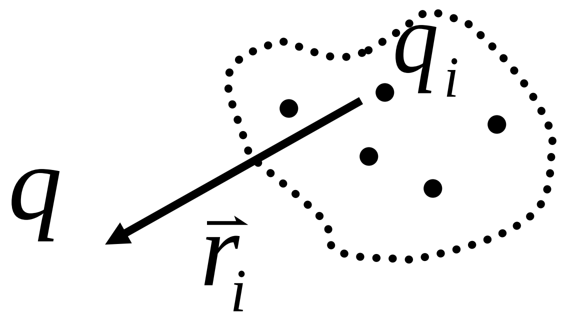
$$\boxed{\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i}$$

由场强定义

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{f}_i}{q}$$

整理后得

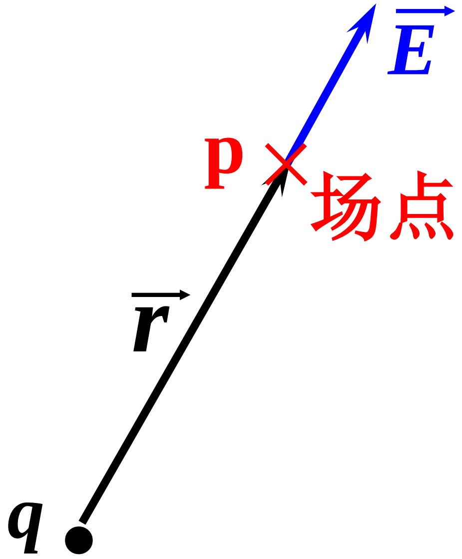
$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i} \vec{E}_i}$$



点电荷系的总场强 $$\boxed{\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i}$$

$\vec{E}_i$—第i个电荷单独存在时，在场点的电场强度

二. 点电荷的场强（intensity of point charge）



"源" 点电荷

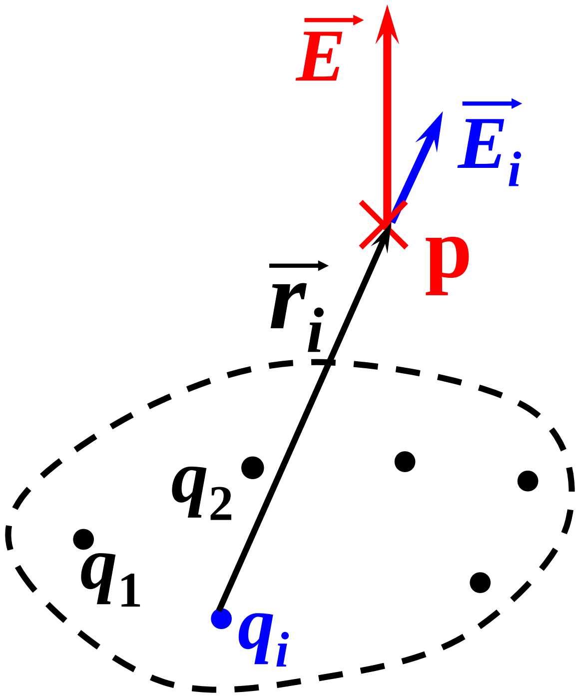
（相对观测者静止）

由库仑定律和电场强度定义给出：

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q\,\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_o r^2}}$$

点电荷E分布特点：$E \propto \dfrac{1}{r^2}$

三. 点电荷系的场强



电荷q_i 的场强：

$$\vec{E}_i = \frac{q_i \vec{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_o r_i^2}$$

由叠加原理，总场强：

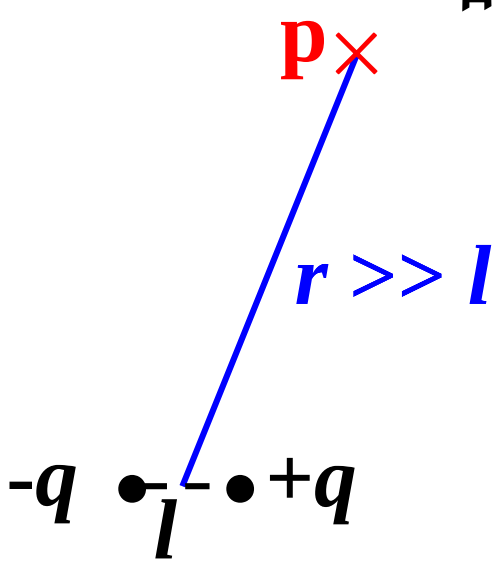
$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i \vec{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_o r_i^2}$$

电偶极子 (electric dipole)的场强

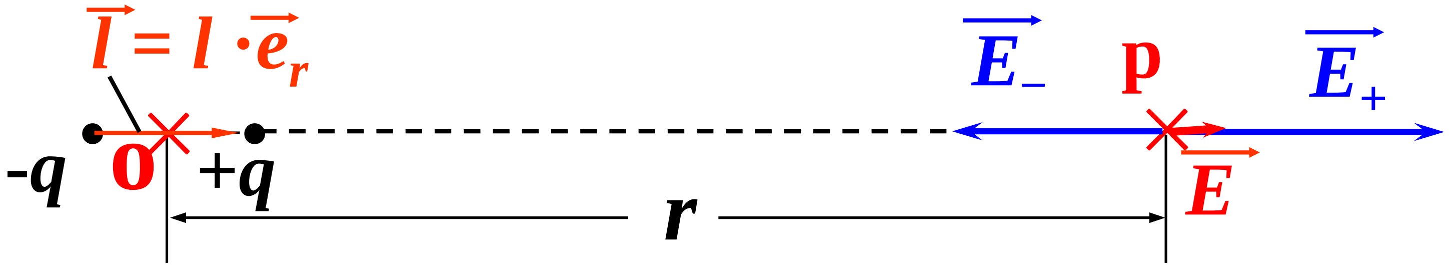
电偶极子： 一对靠得很近的等量异号点电荷

它是个相对的概念，也是一种实际

的物理模型（如有极分子）。



(1) 轴线上场强

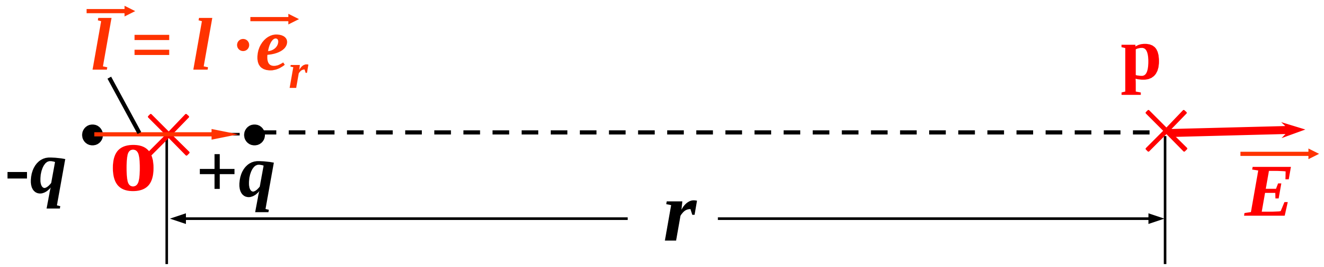


$$\vec{E}=\vec{E}_{+}+\vec{E}_{-}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q\vec{e}_r}{(r-\frac{l}{2})^2}+\frac{-q\vec{e}_r}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

$r >> l$ 时：

$$(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x \qquad |x|\ll 1$$

$$\frac{1}{(r\mp\frac{l}{2})^2}=\frac{1}{r^2}(1\mp\frac{l}{2r})^{-2}\approx\frac{1}{r^2}(1\pm\frac{l}{r})$$

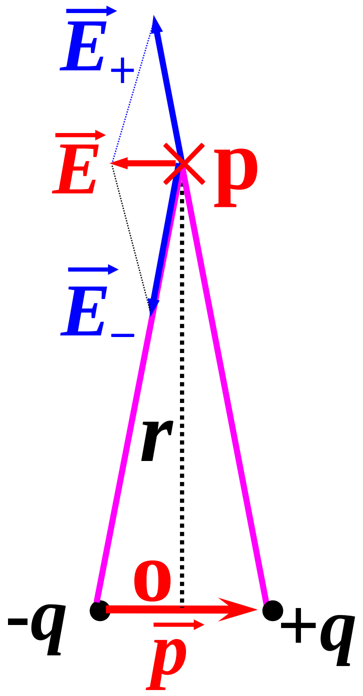


$$\therefore \quad \vec{E} = \frac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\left[\left(1+\frac{l}{r}\right)-\left(1-\frac{l}{r}\right)\right] = \frac{2q\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

电偶极矩 $\quad \vec{p} = q\vec{l}$，$\vec{l}: -q \rightarrow +q$

$$\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

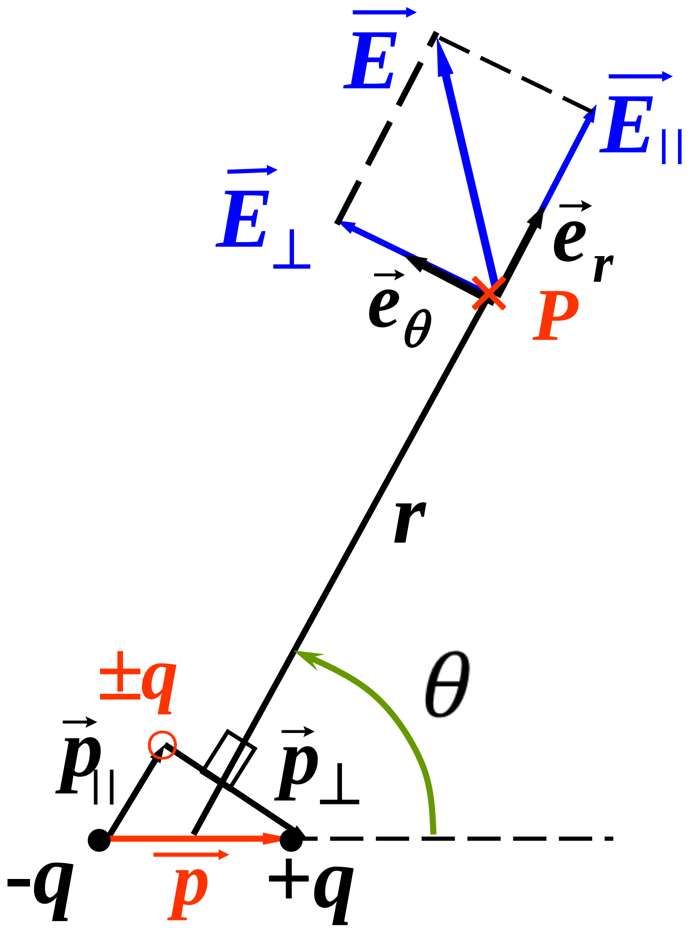
(2) 中垂线上场强（书例12.3）：



$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

电偶极子E分布的的特点： $E \propto \frac{1}{r^3}$

(3) 一般情况：

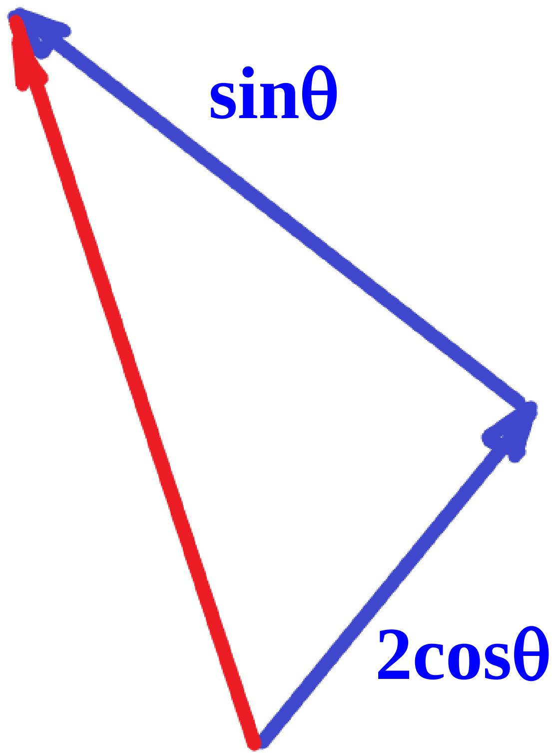


$$\vec{E} = \vec{E}_{/\!/} + \vec{E}_{\perp}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[2\vec{p}_{/\!/} - \vec{p}_{\perp}]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3\vec{p}_{/\!/} - \vec{p}_{/\!/} - \vec{p}_{\perp}]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\left(\vec{e}_r \cdot \vec{p}\right)\vec{e}_r - \vec{p}\right]$$



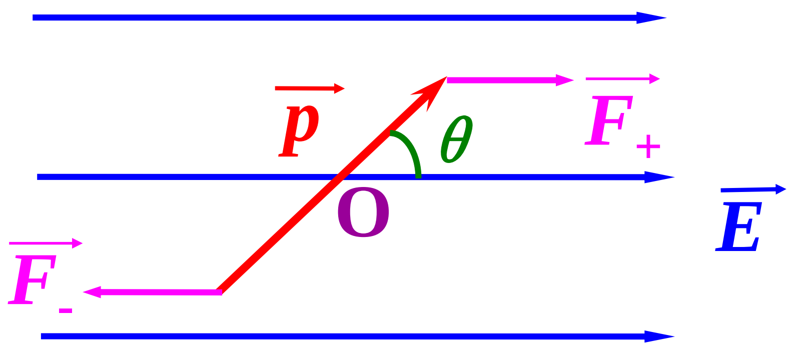
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\vec{p}_\parallel - \vec{p}_\perp\right)$$

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$

$$4\cos^2\theta + \sin^2\theta = 3\cos^2\theta + 1$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\cdot\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

（4）电偶极子在均匀电场中所受的力矩



相对于电偶极子中点

$$F_+ = qE \text{，}$$

$$F_- = -qE \text{，}$$

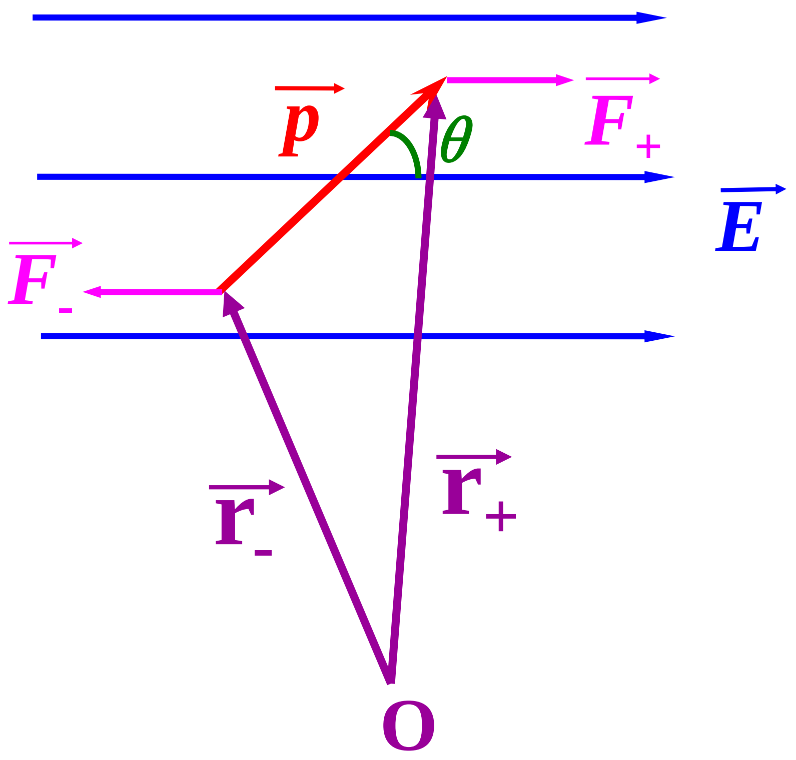
$$M = M_+ + M_- = qE\frac{l}{2}\sin\theta \times 2$$

$$= qlE\sin\theta = pE\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

与参考点的选择无关！

一对力偶的力矩与参考点的选择无关



$$F_+ = qE \ ,$$

$$F_- = -qE \ ,$$

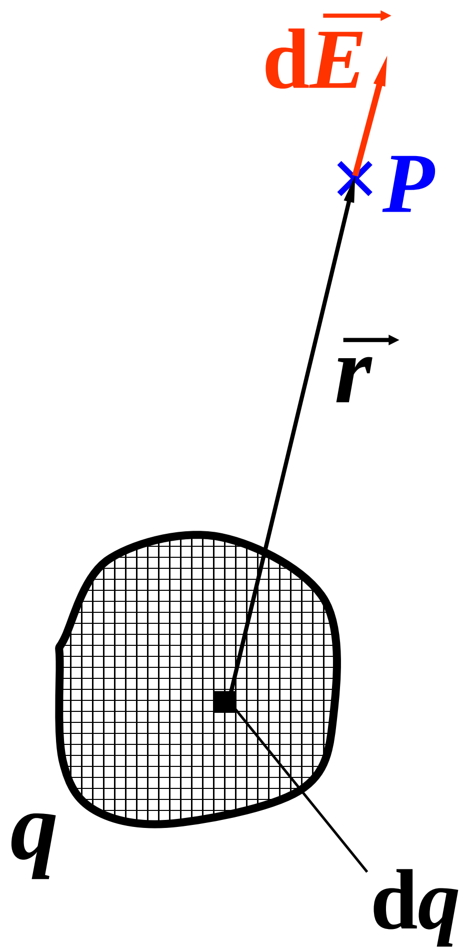
$$\vec{M} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F}_+$$

$$= \vec{l} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

四. 连续带电体的场强

将带电体分割成无限多块无限小的带电体



$$\boxed{\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int_q \frac{\mathrm{d}q \cdot \vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

体电荷 $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}v$,

ρ : 体电荷密度

面电荷 $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}s$,

σ : 面电荷密度

线电荷 $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}l$,

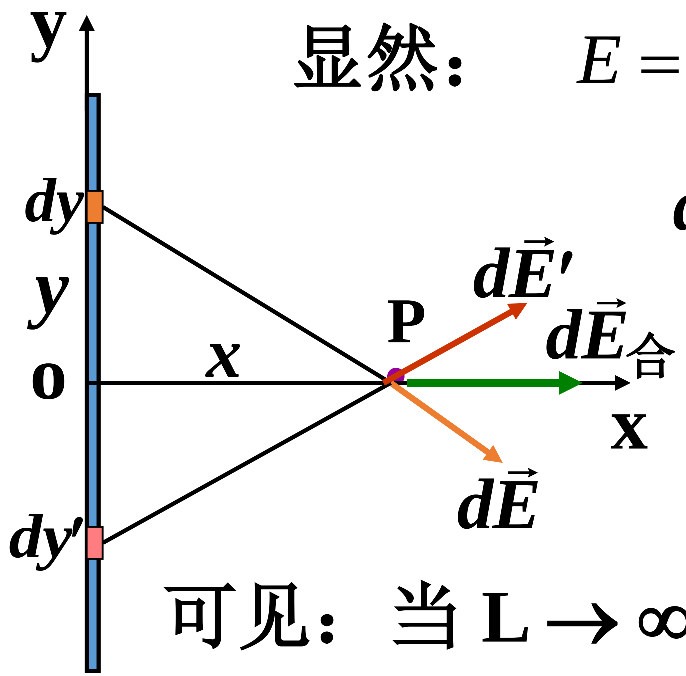
λ : 线电荷密度

例12.1 求均匀带电细棒中垂面上电场分布。

已知：棒长L，电荷线密度λ。

$$\boxed{\vec{E}=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

解：设坐标系，考虑对称性将细棒分成一对对线元 $\begin{cases} dy \\ dy' \end{cases}$



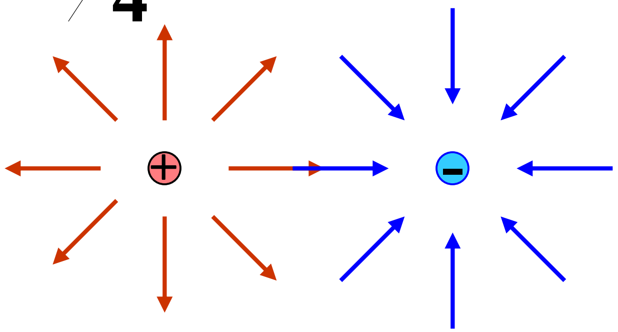
显然： $E=\int dE_x=\int \cos\alpha\, dE$

$$dE=\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2\right)} \qquad \cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$E=\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{x^2+L^2/4}}$$ 方向沿X轴

可见：当 $L\to\infty$ (或L>>X)，则：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\xrightarrow{x=r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



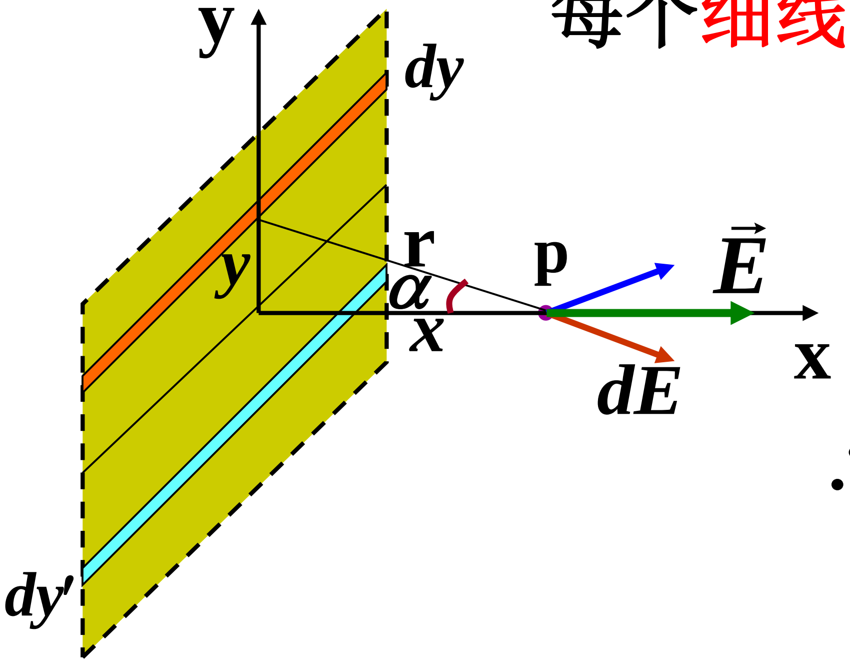
方向沿径向向外（或向内） $\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$ **柱对称电场**

例12.2 一无限大带电平面，电荷面密度σ，求其电场分布。

解：平面可看成无数条宽为dy 的细线组成

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r}}$$

每个细线 在P点产生的场为：



$$dE=\frac{\sigma\,dy}{2\pi\varepsilon_o r}$$

由对称性：

$$E_y=\int dE_y=0$$

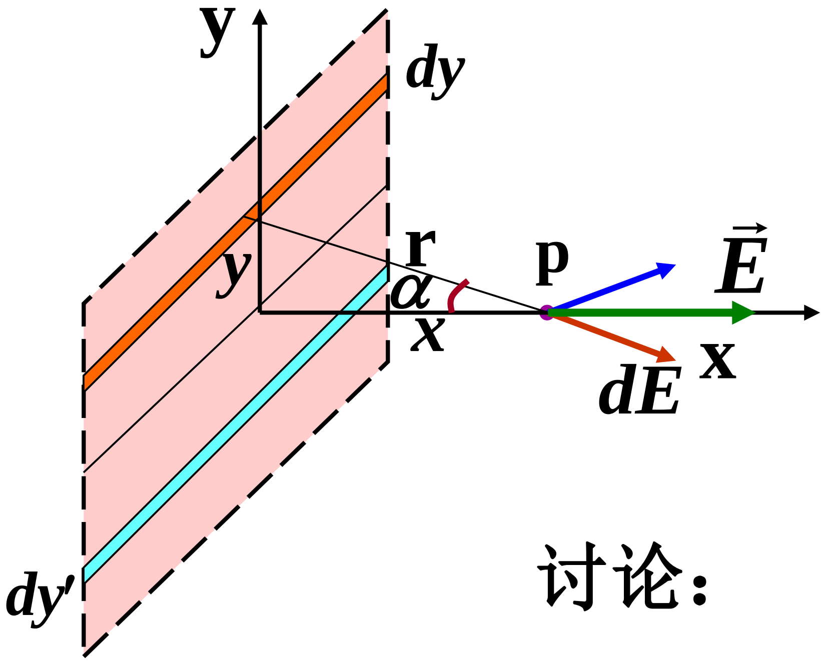
$$\therefore\ E=\int dE_x=\int dE\cos\alpha$$

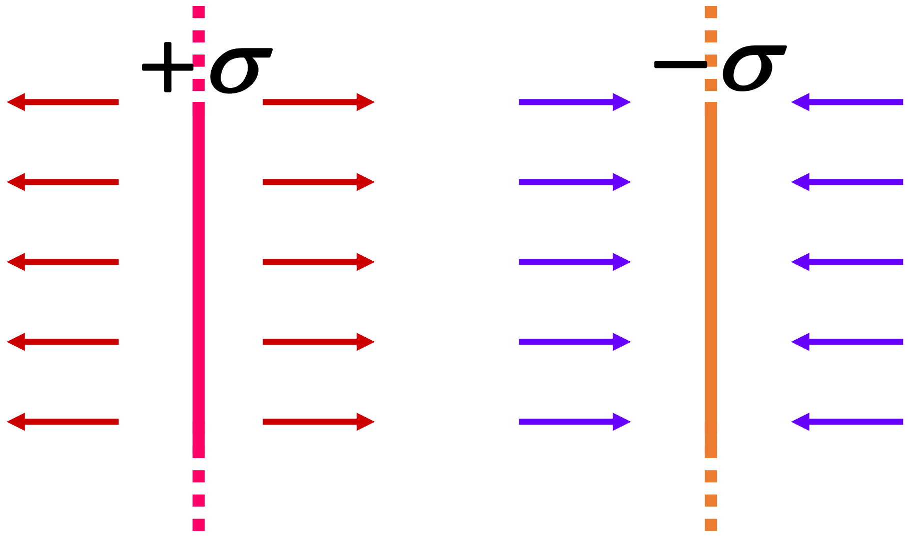
$$r=\sqrt{x^2+y^2}\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sigma\,dy}{2\pi\varepsilon_o\left(x^2+y^2\right)}=\frac{x\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{x}arctg\left.\frac{y}{x}\right|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

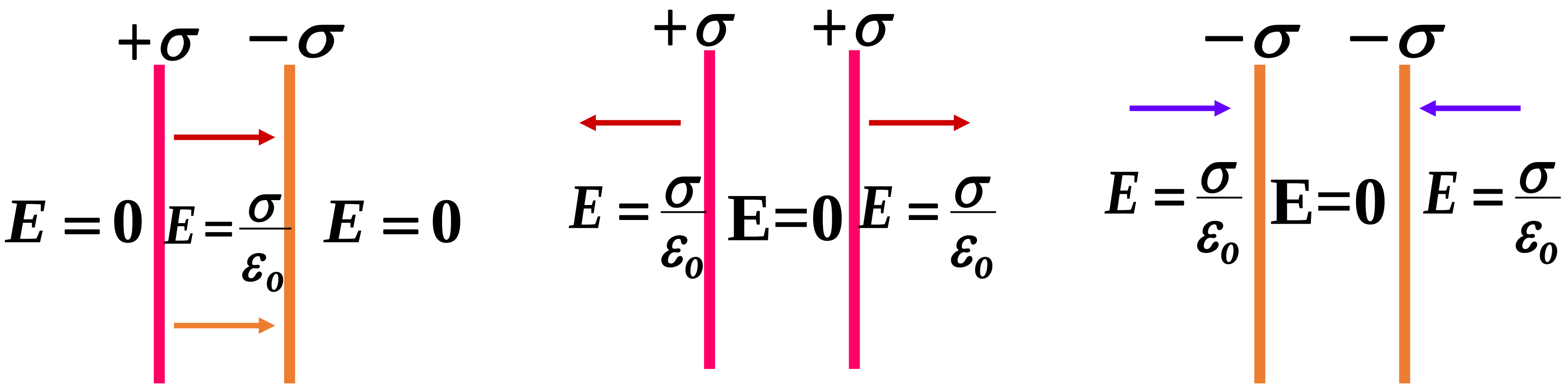
方向垂直平面！

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ → 均匀场





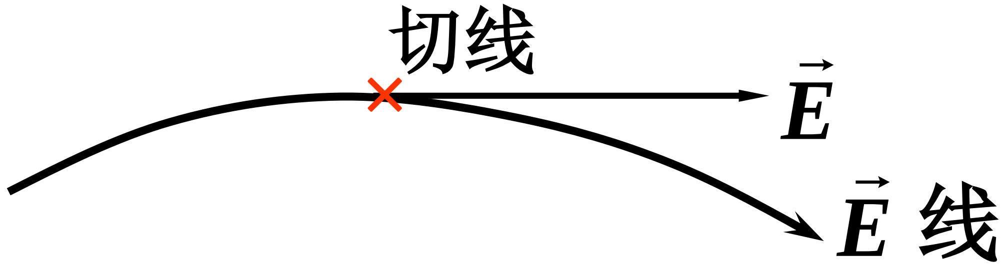
讨论：



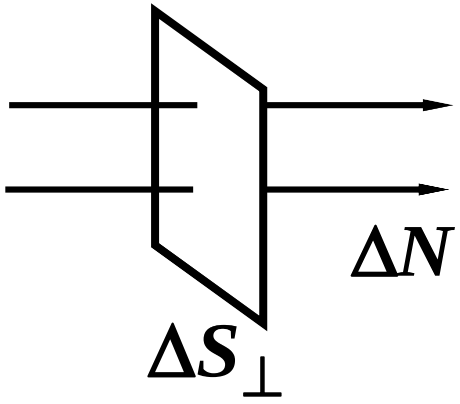
12.5 电场线和电通量

一.电场线（$\vec{E}$线）

1. 线上某点的切向即为该点$\vec{E}$的方向；

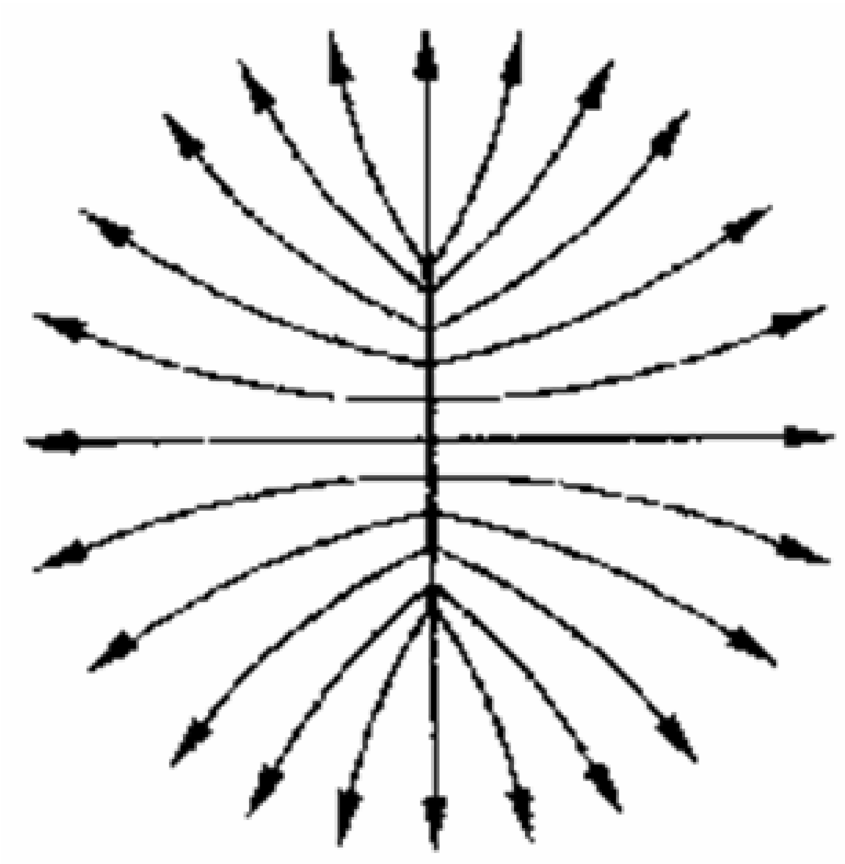


2. $\vec{E}$线的密度给出$\vec{E}$的大小。



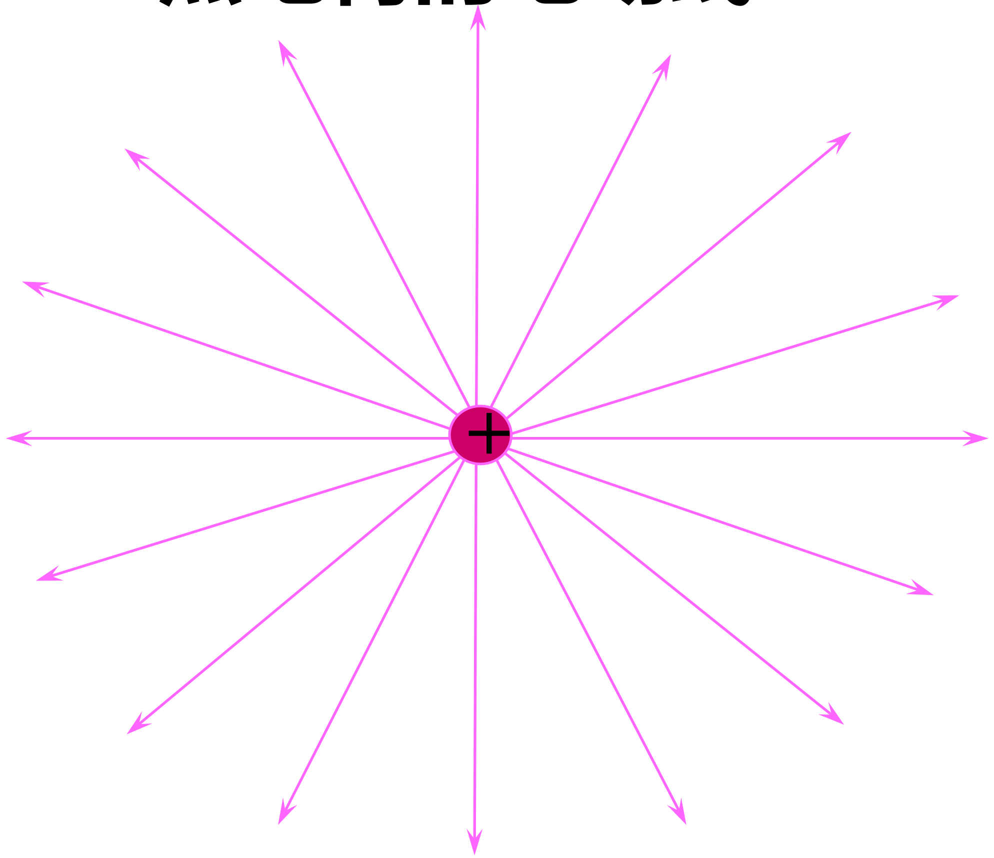
$$E = \lim_{\Delta S_\perp \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S_\perp} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_\perp}$$

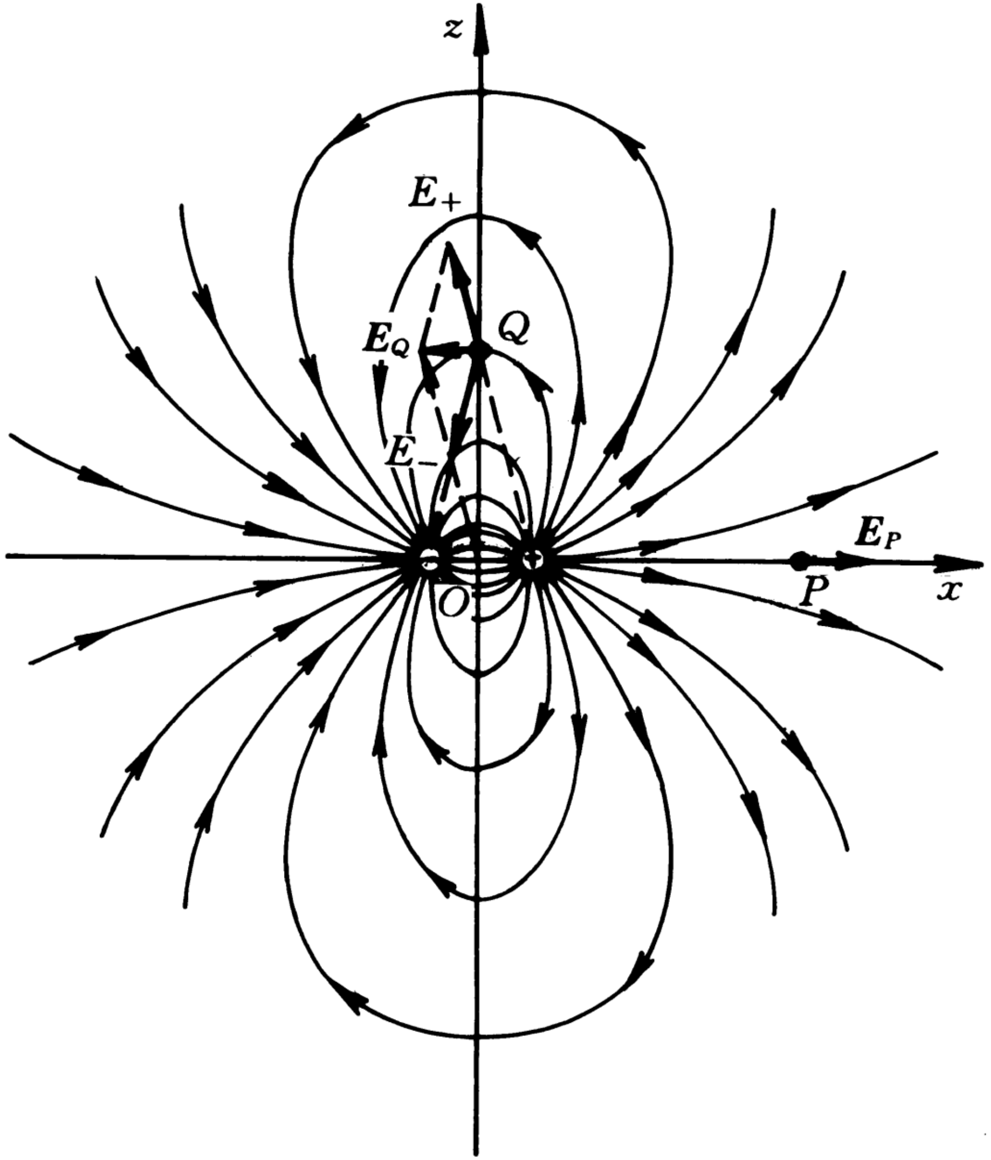
几种电荷的电场线分布



均匀带电的直线段

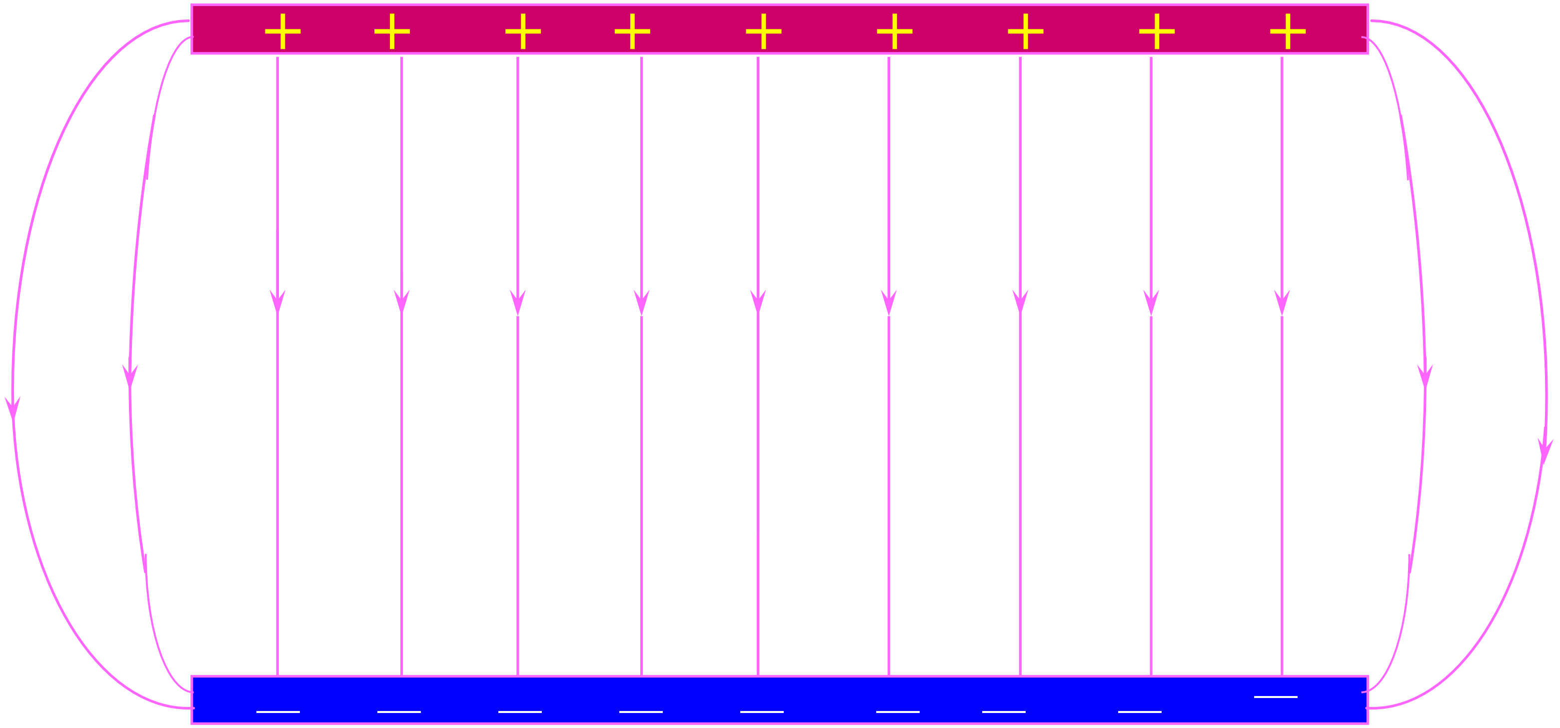
点电荷的电场线



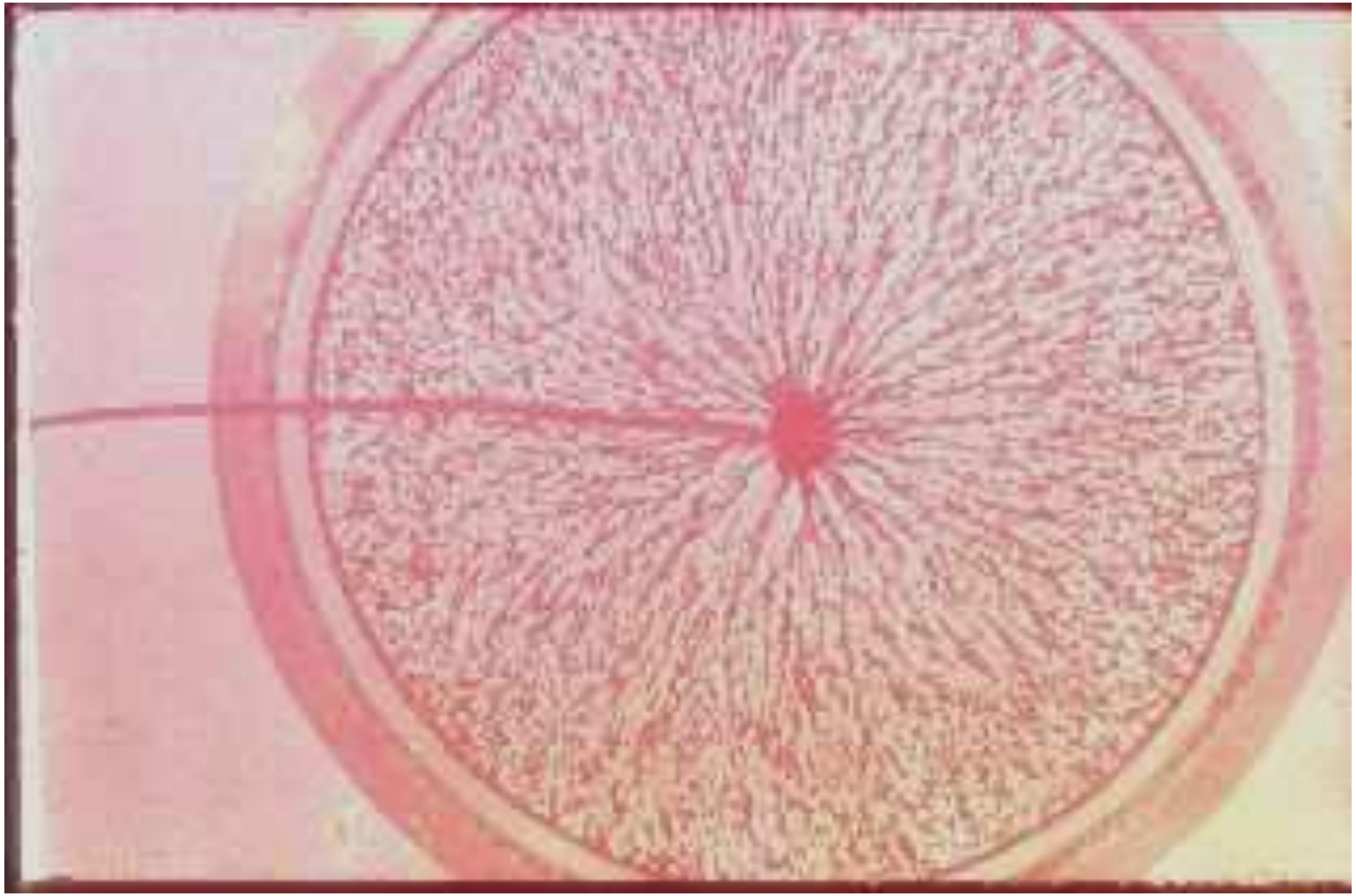


电偶极子的场强分布

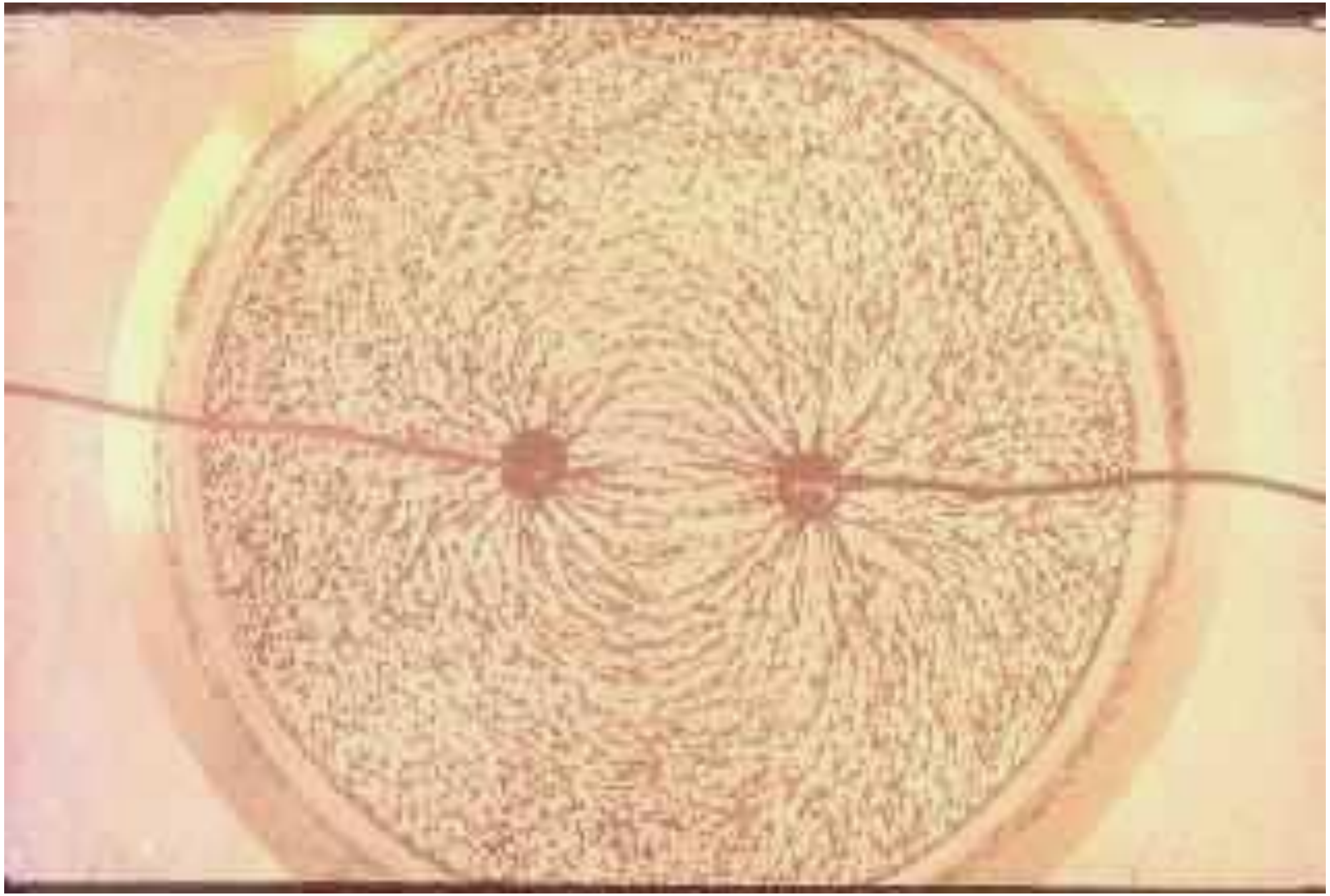
平行板电容器的电场线



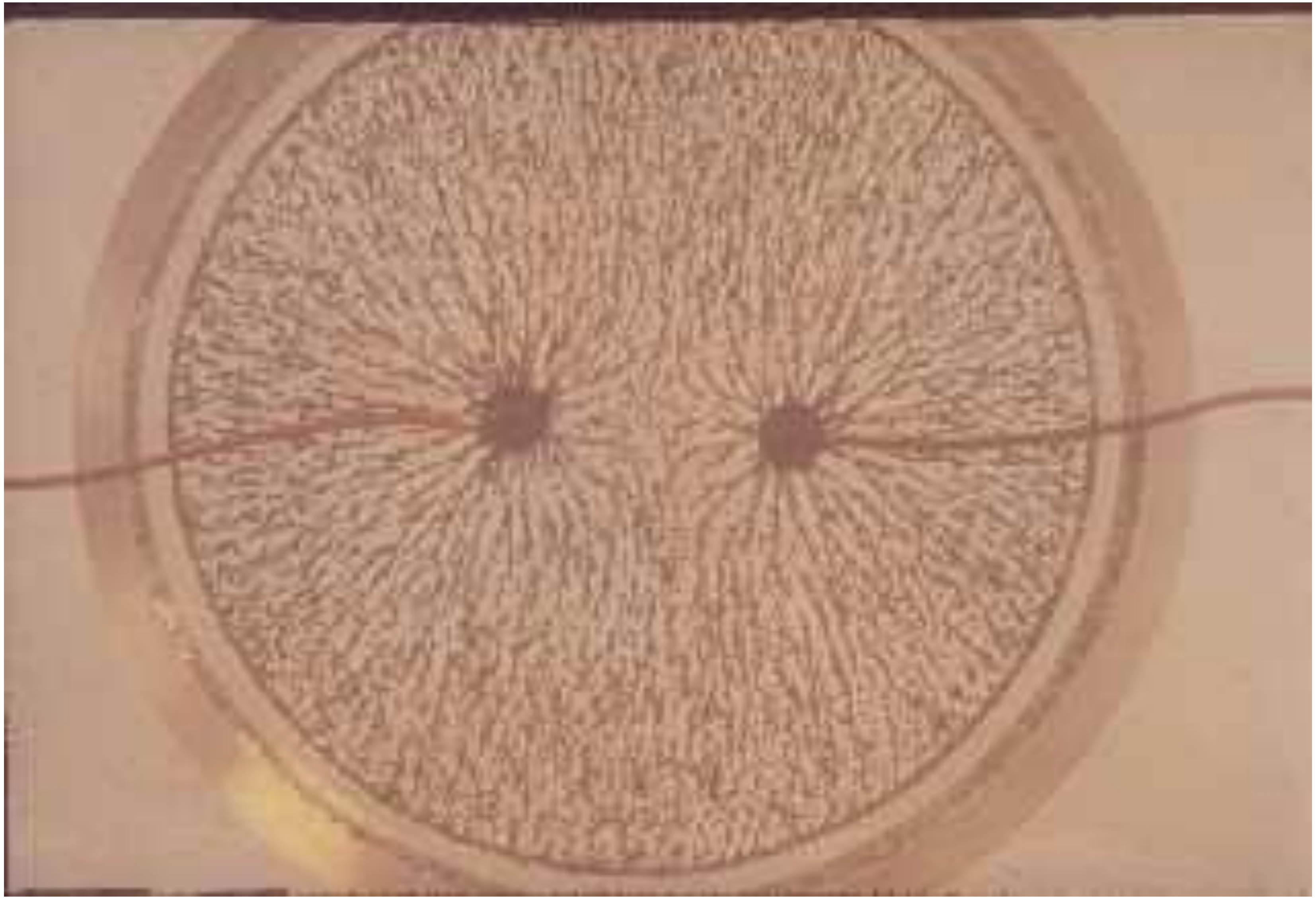
几种电荷的　线分布的实验现象



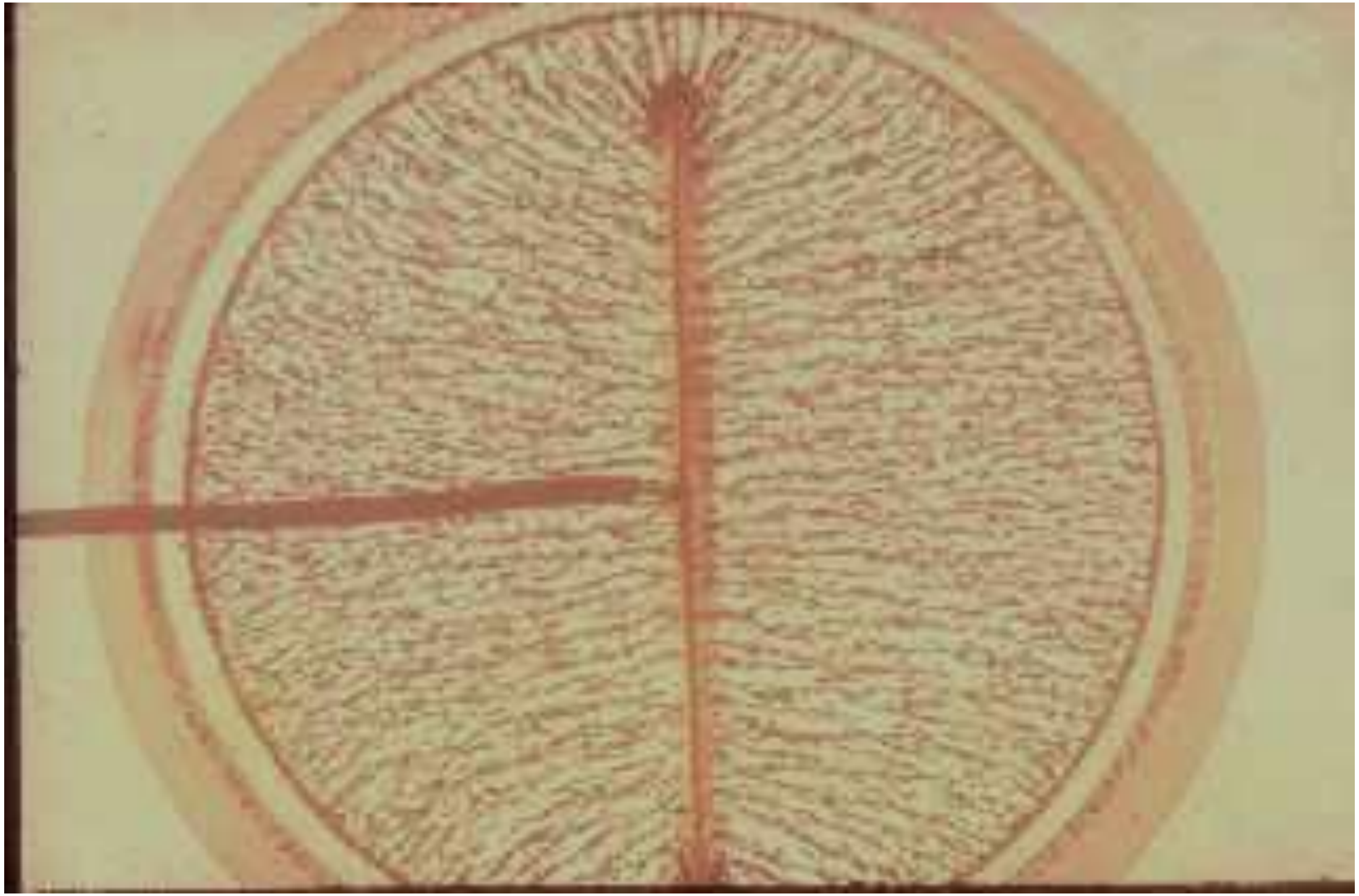
单个点 电 极



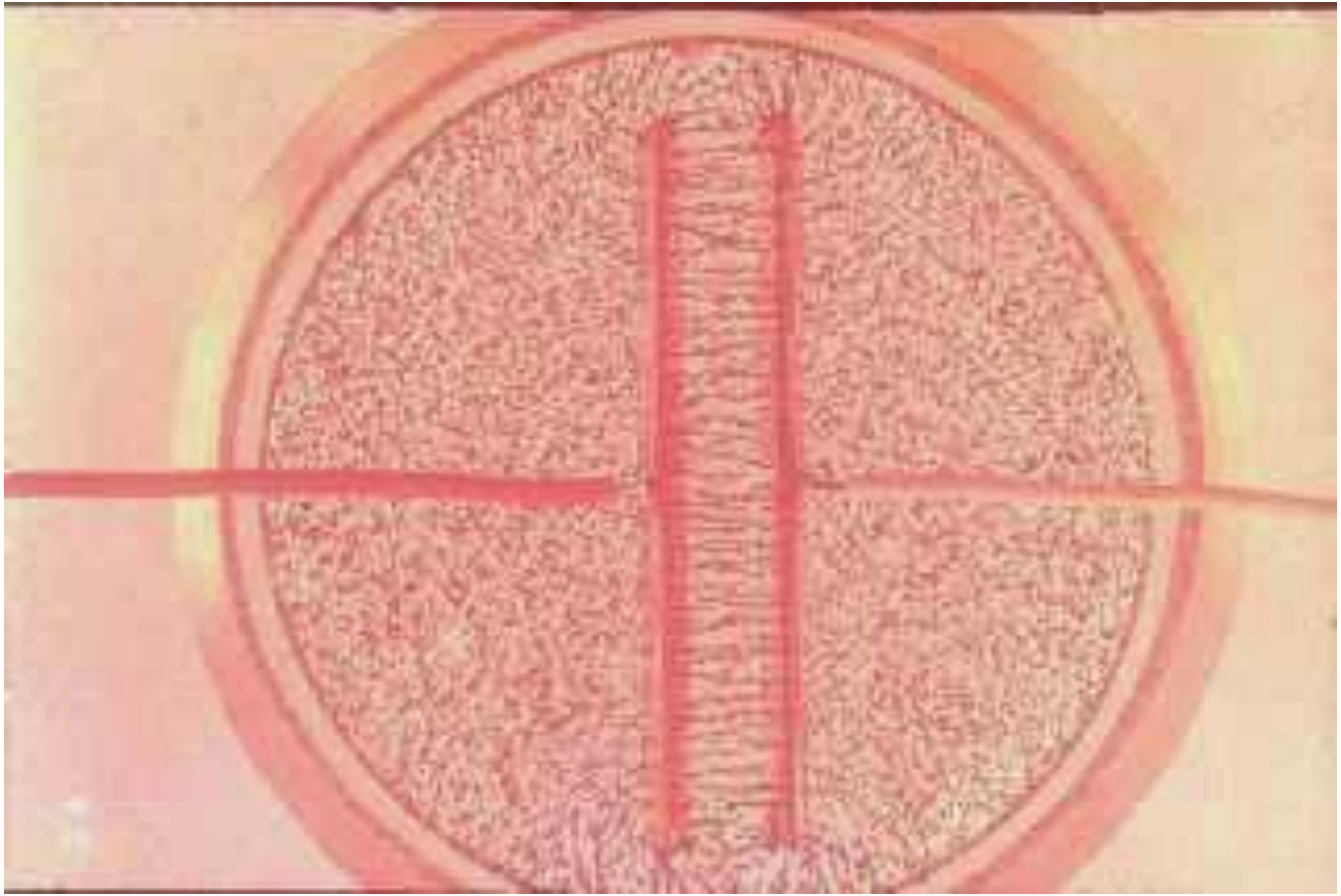
正 负 点 电 极



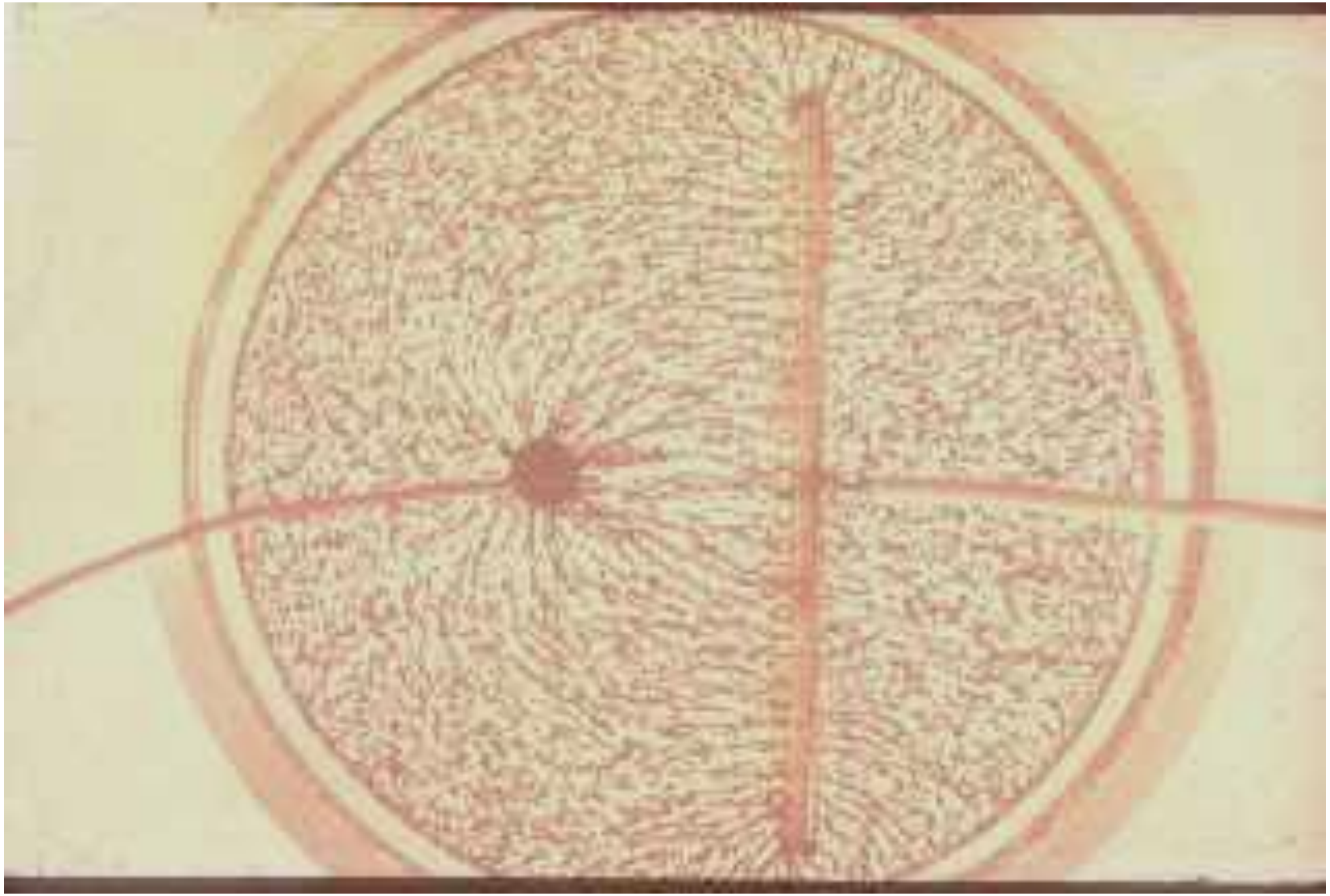
两个同号的点电极



单个带电平板电极

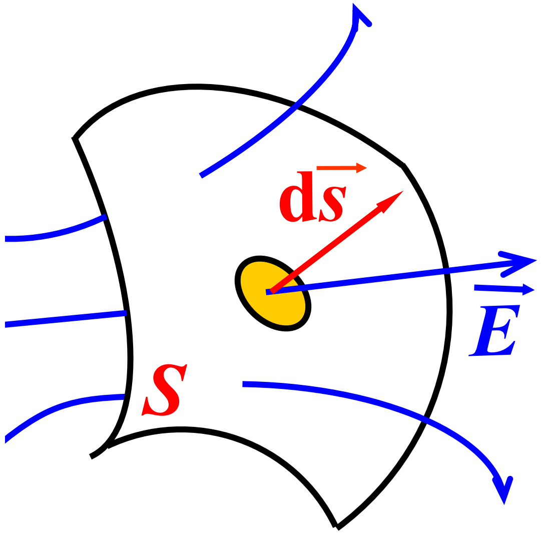


正负带电平行平板电极



正 点 电 极 和 负 平 板 电 极

二. 电通量Φ_e

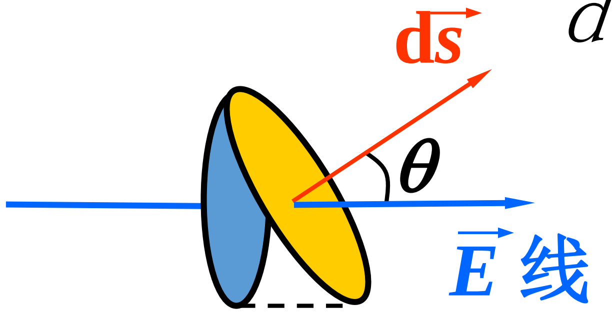


定义： $$\boxed{\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

1.Φ是对面而言，不是点函数。

2.Φ 是代数量，有正、负。

Φ的几何意义：



$\cos\theta\, ds = ds_{\perp}$

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cos\theta\cdot ds$$

$$= E\cdot ds_{\perp} = dN$$

$\therefore |\Phi| = N$ (穿过S的$\vec{E}$线条数)

对闭合曲面， $$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

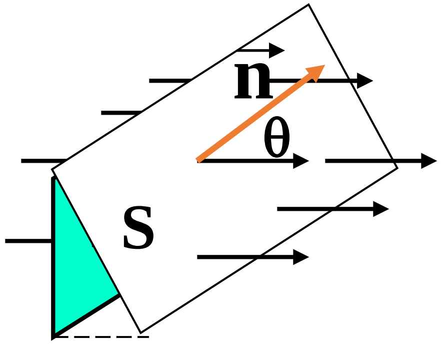
约定：闭合曲面以向外为曲面法线正方向。

(1) $\vec{E}$为均匀场

1) 设场中有一平面S， $S\perp\vec{E}$ 或其面法线 $\vec{n}\parallel\vec{E}$

该面的电通量： $\Phi = S\cdot E$

2) 若$\vec{n}$ 与$\vec{E}$ 成 θ 角



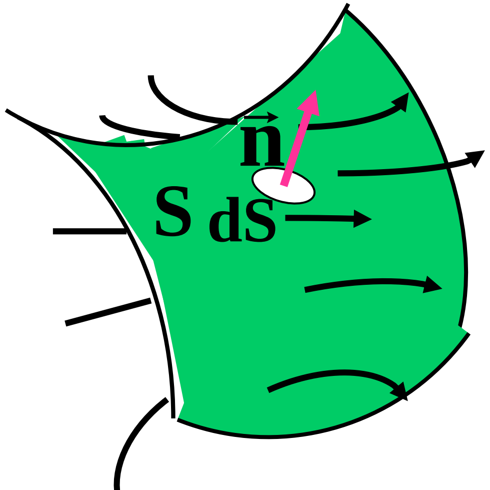
$$\Phi = SE\cos\theta \begin{cases} \theta < 90^o & \Phi_E > 0 \\ \theta > 90^o & \Phi_E < 0 \end{cases}$$

(2) $\vec{E}$ 为非均匀场

曲面S上,各点的E大小方向均不同

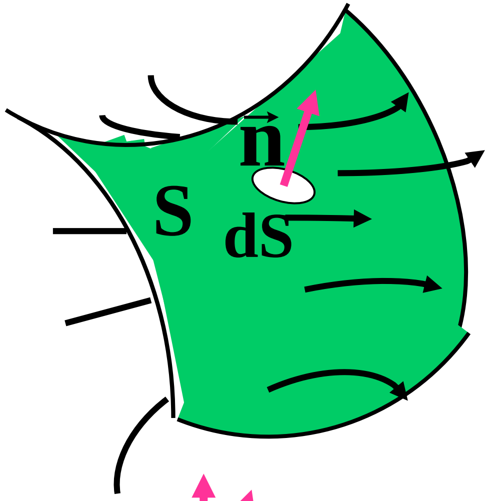
取面积元dS，其上的电通量：

$$d\Phi = EdS\cos\theta = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$



S面上的总通量：

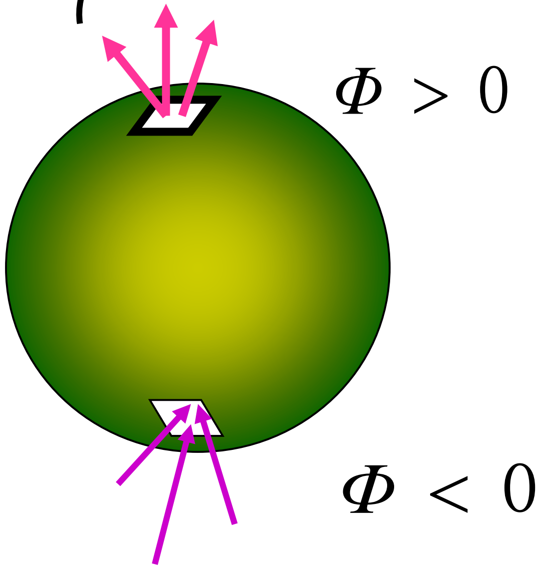
$$\boxed{\Phi = \int d\Phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$



当S为闭合曲面时： $\boxed{\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}$

对闭合面的法线方向规定：

自内向外为法线的正方向。



∴E线从曲面内向外穿出： $\Phi > 0$

而从曲面外向内穿进： $\Phi < 0$

Φ的单位： $\mathrm{N \cdot m^2 / C}$

注：

1° $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$

表示净穿出闭合面的电场线的总根数。

2° 引入电场线，只是为了形象理解电场E，实际上E是连续分布于空间。