清华大学 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：自11　姓名：孙晓芊　编号：2021013444　科目：自动控制　第 1 页

1. 解：$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1\\-6&-5\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1(t)\\t\end{pmatrix}$　$\therefore A=\begin{pmatrix}0&1\\-6&-5\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$　$U(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{s}\\\frac{1}{s^2}\end{pmatrix}$

$$x(s)=(sI-A)^{-1}Bu(s)=\begin{pmatrix}s&-1\\6&s+5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{s}\\\frac{1}{s^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}&\frac{1}{(s+2)(s+3)}\\\frac{-6}{(s+2)(s+3)}&\frac{s}{(s+2)(s+3)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{s}\\\frac{1}{s^2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{s^2+5s+1}{s^2(s+2)(s+3)}\\\frac{-5}{s(s+2)(s+3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4(s+2)}+\frac{5}{9(s+3)}+\frac{1}{6s^2}+\frac{25}{36s}\\-\frac{5}{6s}+\frac{5}{2(s+2)}-\frac{5}{3(s+3)}\end{pmatrix}$$

Laplace反变换得状态x的强制解：$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}e^{-2t}+\frac{5}{9}e^{-3t}+\frac{t}{6}+\frac{25}{36}\\-\frac{5}{6}+\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-3t}\end{pmatrix}$

2. 解：易知系统完全能控，故(A,B)镇定

$\text{rank}\,B=1\neq\text{rank}[B\ N]=2$　∴状态对外扰无完全不变性且无法改变

$C(N\ AN)=(6\ \ 3)\begin{pmatrix}1&-2\\-2&0\end{pmatrix}=(0\ \ -12)\neq0$，可改善.

考虑 $u=-F_x x$　$F_x=(f_1\ \ f_2)$　$A_L=A-BF_x=\begin{pmatrix}0&1\\-f_1&-f_2\end{pmatrix}$

$\det(sI-A_L)=s(s+f_2)+f_1=s^2+f_2s+f_1$　$f_1>0,\ f_2>0.$

$CA_LN=(6\ \ 3)\begin{pmatrix}0&1\\-f_1&-f_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=-12+6f_2-3f_1$　可取 $f_1=2$　$f_2=3$

故取状态反馈 $u=-(2\ \ 3)x$ 时，输出对外扰有完全不变性.

3. 解：

$M=0$

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$　解得 $P=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

∴ 输出$y(t)$的静态值为0.

4. 解：
$$\begin{cases}\begin{pmatrix}0&1\\-6&-5\end{pmatrix}P-P\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-6&-5\\0&6\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\end{cases}$$　解得 $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}&-\frac{25}{36}\\0&\frac{5}{6}\end{pmatrix}$

∴ 输出$y(t)$的静态值为0.

5. 解：$\det(sI-A+BF_x)=\det\begin{pmatrix} s & -1 \\ f_1 & f_2+s \end{pmatrix}=(s+2)(s+3)$ $\therefore f_1=6$ $f_2=5$

$F_x=(6\ \ 5)$ 由 $CP=D$，即 $\begin{cases} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P - P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$AP-PM+BQ=N$

解得 $P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{25}{36} \\ 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ $Q=(0\ \ -2)$

$\therefore F_w=Q+F_xP=(-1,\ -2)$ $\therefore$ 控制器中 $F_x=(6,5)$，$F_w=(-1\ \ -2)$

6. 解：依题意设计鲁棒抗干扰控制器 $\begin{cases} \dot{q}=y \\ u=-F_x x-F_q q \end{cases}$

对于增广后的系统有 ~~dett~~

$$\det\left(sI-\begin{pmatrix} A-BF_x & -BF_q \\ C & 0 \end{pmatrix}\right)=(s+1)^2(s+2)^2$$

可解出 $F_x=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $F_q=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

清华大学 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：自11 姓名：孙捷华 编号：2021013444 科目：自动控制 第3页

7. 证明：将原系统增广后有

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\w\end{pmatrix}\\ y=(C\ \ D)\begin{pmatrix}x\\w\end{pmatrix}\end{cases}$$

先证必要性，

对增广系统有 $\tilde{Q}_g=\begin{pmatrix}C & D\\ CA & CB\\ \vdots & \vdots\\ CA^{n+p-1} & CA^{n+p-2}B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & D\\ Q_gA & Q_gB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ Q_g & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$

其中 Q_g 为 $(A\ \ C)$ 的能观性矩阵.

当增广系统可观测时 $\mathrm{rank}\,\tilde{Q}_g=n+p$，引理：$\mathrm{rank}(AB)\le\min\{\mathrm{rank}A,\mathrm{rank}B\}$

$\therefore \mathrm{rank}\begin{pmatrix}0 & I\\ Q_g & 0\end{pmatrix}\ge n+p \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\ge n+p.$

$\because \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 的列数固定为 $n+p$，$\therefore \mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\le n+p$ $\therefore \mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=n+p$

~~∴ (A B; C D) 的列数为n+p，故 (0 I; Qg 0) 的列数为n+p~~

同时由于 $\begin{pmatrix}x\\w\end{pmatrix}$ 可观测，则 x 一定可观，则原系统 $(A\ \ C)$ 可观，必要性得证.

下证充分性：

$\because \mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=n+p$，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0 & I\\ Q_g & 0\end{pmatrix}$ 列满秩

引理，当 A 列满秩时，$\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}B$.

$\therefore \mathrm{rank}\,\tilde{Q}_g=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=n+p$，故 $\begin{pmatrix}x\\w\end{pmatrix}$ 可观测，充分性得证.

综上证毕.