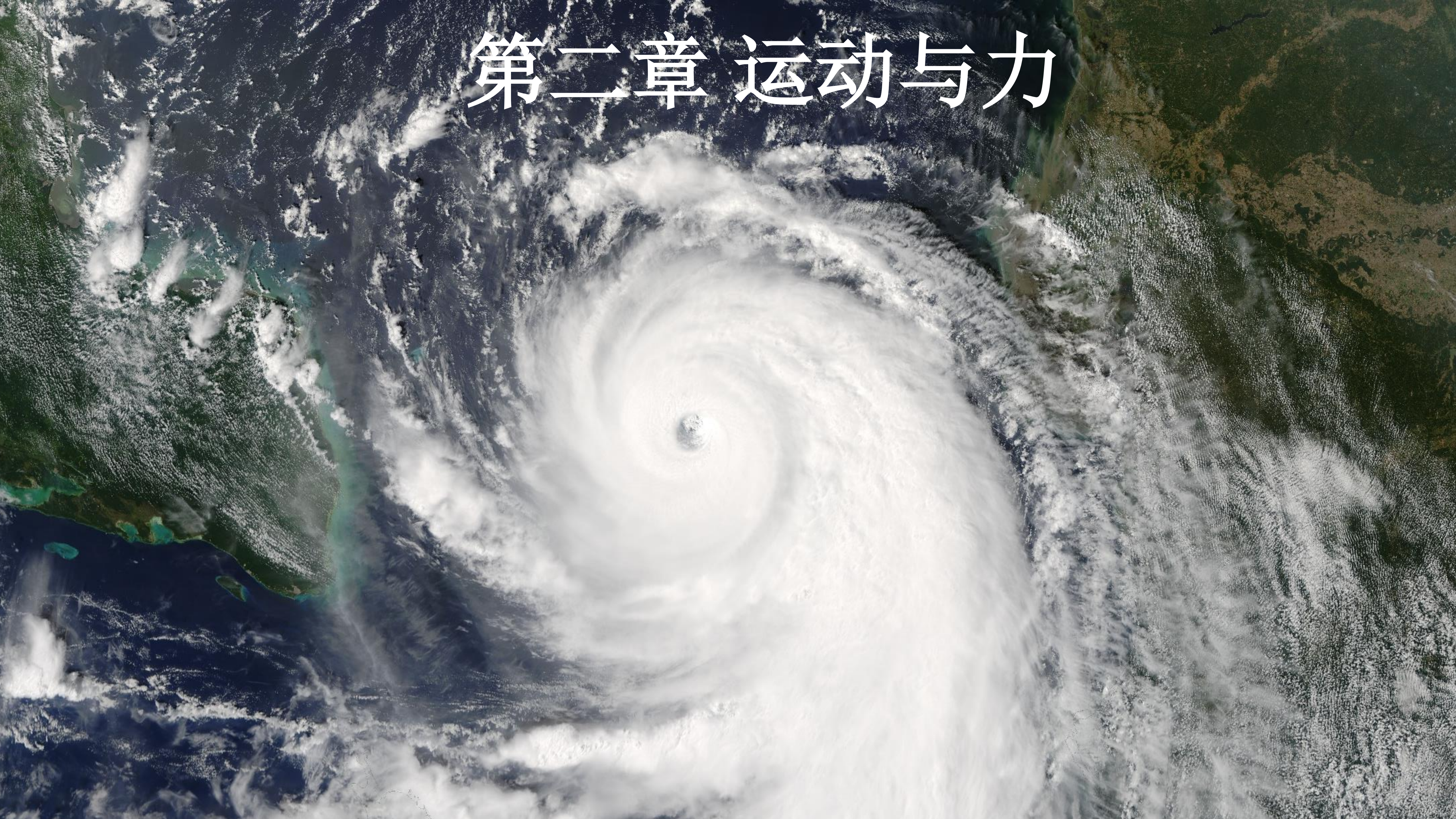
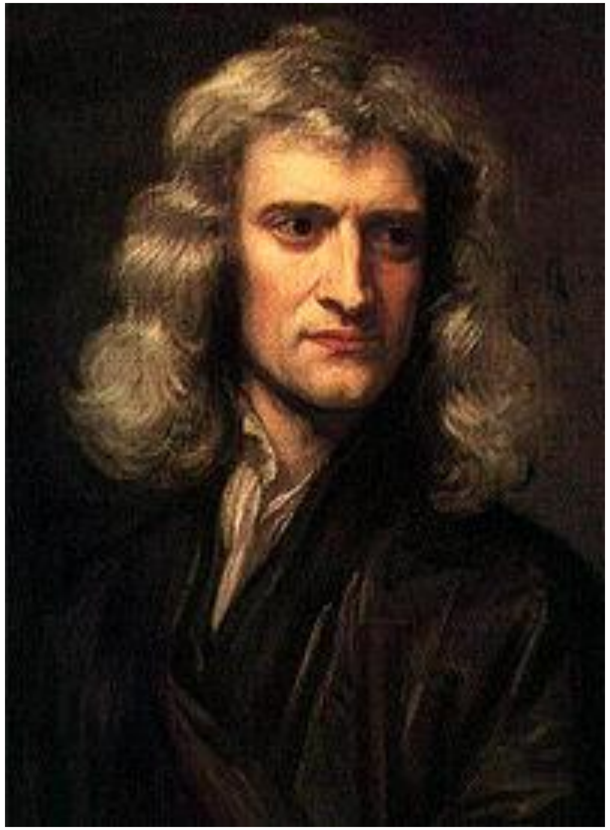
第二章 运动与力



第二章 运动与力

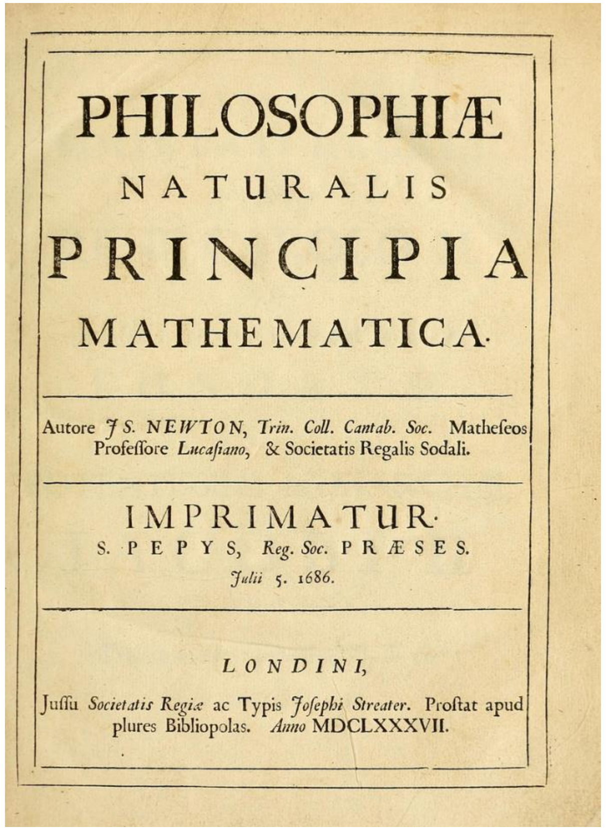


艾撒克•牛顿

Isaac Newton

1642.12.25

–1727.3.20



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater.* Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Mathematical Principles of Natural Philosophy

- 数学
- 光学
- 经典力学
- 引力论

§2.1 牛顿运动定律

一. 牛顿第一定律（惯性定律）和惯性系

任何物体如果没有力作用在它上面，都将保持静止的或作匀速直线运动的状态。

1. 定义了惯性参考系

静止或运动相对谁?　　惯性系

遥远的星体作为惯性系　地面参考系？　傅科摆

2. 定义了物体的惯性和力

惯性是指物体本身要保持运动状态不变的性质。

力是一种可以改变运动状态的相互作用

二. 牛顿第二定律

$m\vec{v}$

$$\boxed{\vec{F}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{a}=m\dot{\vec{v}}=m\ddot{\vec{r}}}$$

力是矢量，在坐标轴的三个基矢方向上具有独立性。

$$F_x=\frac{dP_x}{dt},F_y=\frac{dP_y}{dt},F_z=\frac{dP_z}{dt}$$

叠加原理:几个力的作用效果和合力的效果相同。

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots$$

惯性质量

相同的作用力，m越大，加速度越小，意味着抵抗运动变化的性质越强，也就是说惯性越大。质量是物体惯性大小的量度。牛顿第二定律中的质量为惯性质量。

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

***m* 为惯性质量**

质量标准：高度和直径都是39毫米的$Pt_{0.9}Ir_{0.1}$合金圆柱体。现今保存在巴黎的国际计量局总部。需要真空保存。

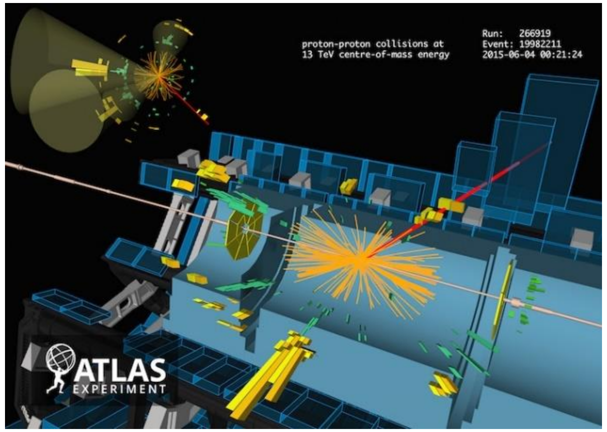
2018年11月16日，在新一届国际计量大会上，正式改用普朗克常数定义“千克”。新标准将于2019年5月20日实施。

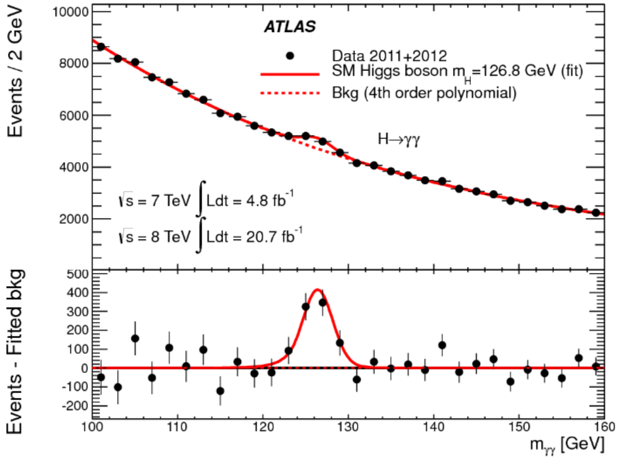
国际千克原器

有了加速度和质量之后，我们可以测量力！

*质量的起源

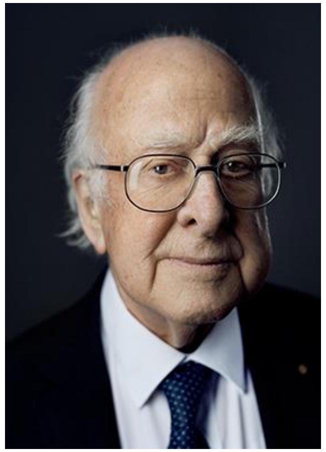
欧洲粒子物理研究所



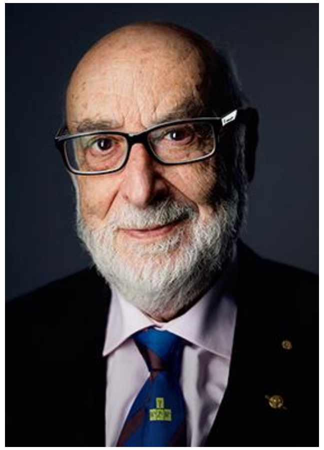


126 GeV

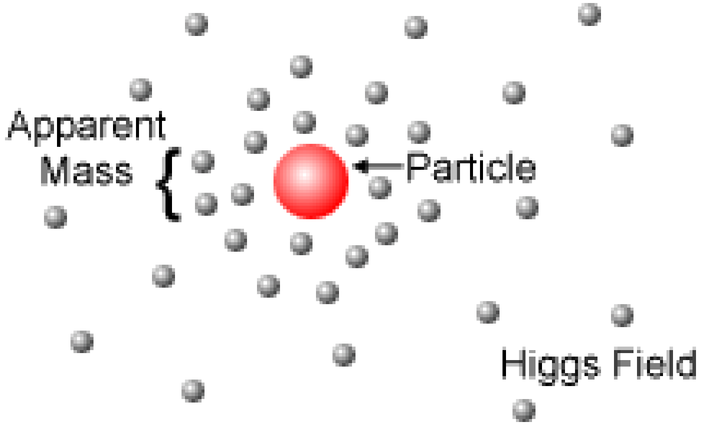
Peter W. Higgs



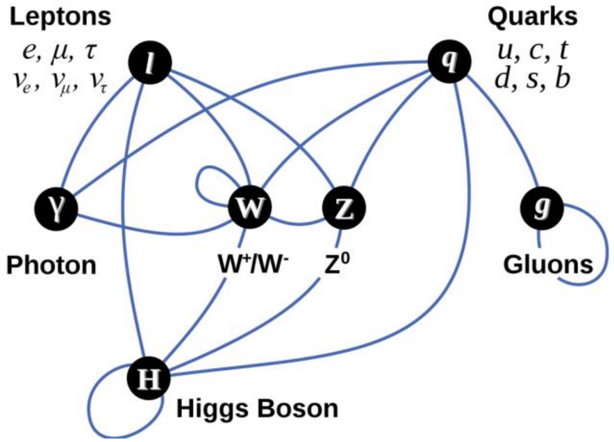
François Englert



因为发现粒子质量起源的机制，获得2013年的诺贝尔物理学奖。



质量起源机制



与Higgs相互作用的粒子都有质量

三. 牛顿第三定律(作用力与反作用力)

作用力与反作用力大小相等、方向相反，作用在不同物体上。

1. 超距作用

爱因斯坦的狭义相对论指出瞬时超距作用违反了信息传递速度的上限，即信息传递速度比光速还快。

2. 电和磁作用下有时不成立.

$B \neq 0, F \neq 0 \qquad B = 0, F = 0$

牛顿第二、三定律只在惯性系成立

§2.2 SI 单位和量纲

$[v]=LT^{-1}$ $[a]=LT^{-2}$

$[F]=MLT^{-2}$ $[p]=MLT^{-1}$

量纲正确是基本要求！

§2.3 常见力

1. 重力

$$\boxed{\vec{W} = m\vec{g}}$$

2. 弹性力

物体形变时产生的力。

$$\boxed{\vec{f} = -k\vec{x}}$$

3. 摩擦力

$$\boxed{f_k = \mu_k N}$$

$$\boxed{f_s \le \mu_s N}$$

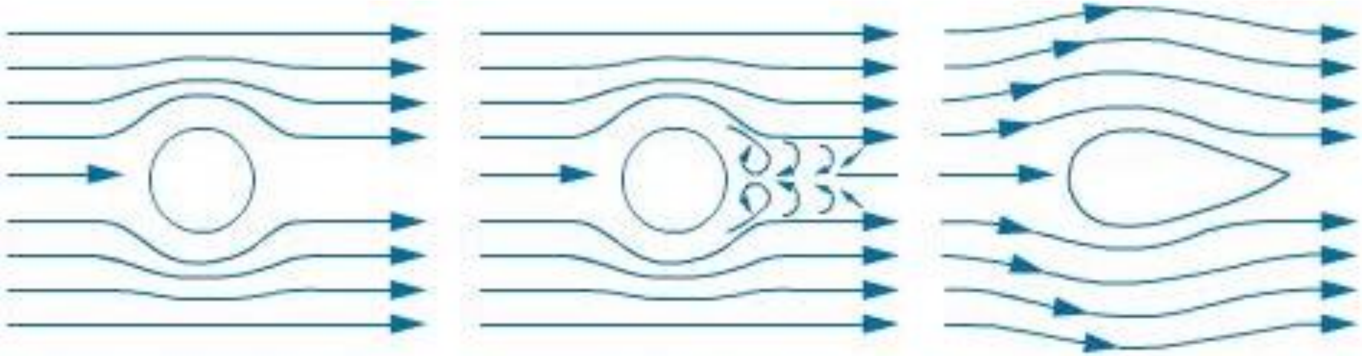
4. 流体曳力

$$\boxed{f_d = kv}$$

（相对速度较小时）

$$f_d = \frac{1}{2} C \rho A v^2$$

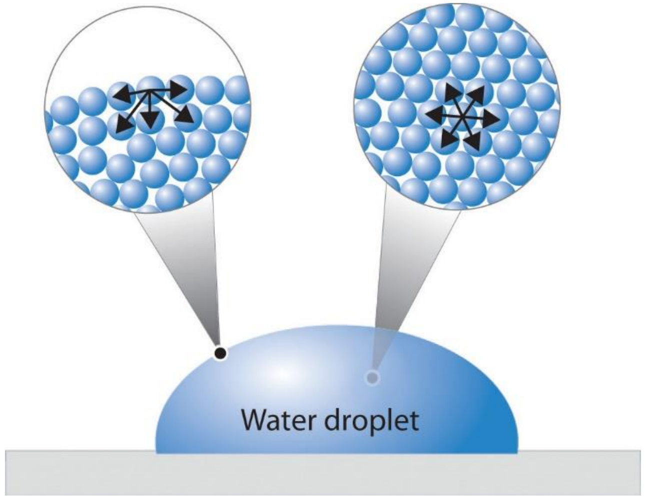
（相对速度较大，后方出现流体漩涡时）



低速　　高速　　高速（流线型）

5. 液体的表面张力 → 肥皂泡演示实验

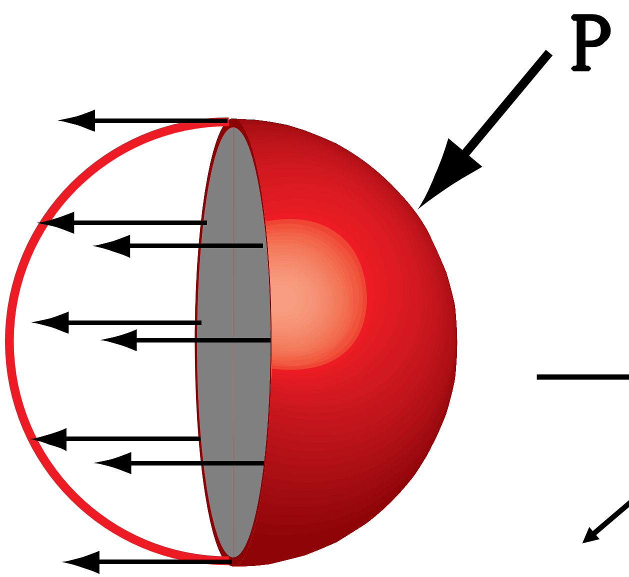
5. 液体的表面张力 → 肥皂泡演示实验

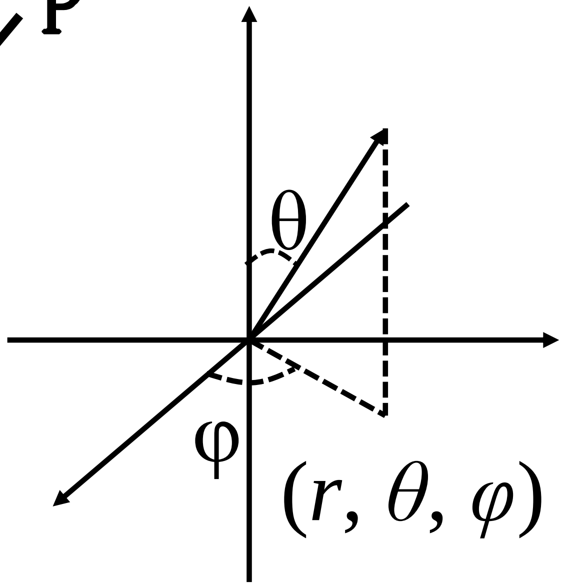


液面各部分之间存在相互拉紧的力。

$F = \gamma l$　　　γ 为表面张力系数

分析肥皂泡内的压强。





球坐标系

$$F = \int p\sin(\theta)\sin(\varphi)ds$$

$$F = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} pr^2\sin(\theta)\cdot\sin(\theta)\sin(\varphi)d\theta d\varphi$$

$$F = pr^2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\sin(\varphi)d\theta d\varphi$$

$$F = p\pi r^2 \qquad p_{in}\pi r^2 = p_{out}\pi r^2 + 2\cdot 2\pi r\gamma$$

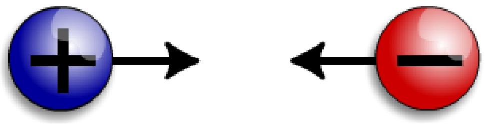
$$p_{in} = p_{out} + \frac{4\gamma}{r}$$

§2.4 基本自然力

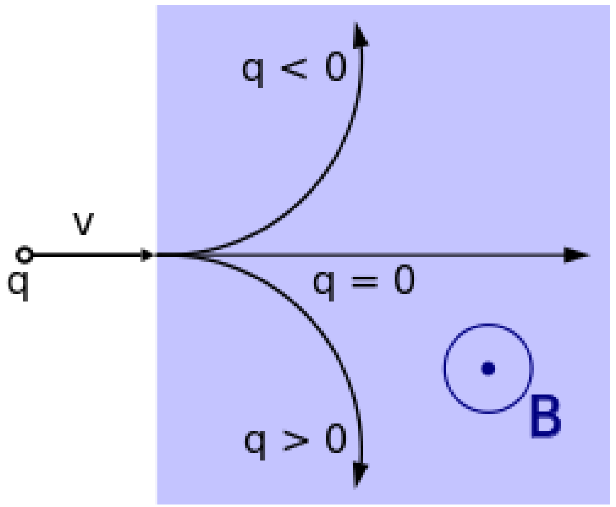
自然界有**四种**基本相互作用力：

1：万有引力（爱因斯坦：时空弯曲效应），如：重力

2：电磁力 各种**常见力**的来源：弹性力，摩擦力，流体拖曳力，表面张力，剪切（扭曲）力，等

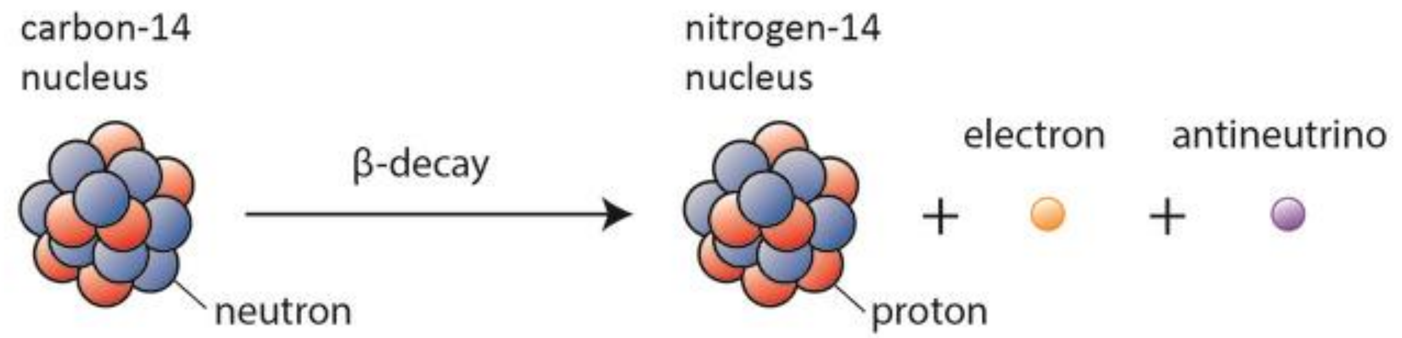


库伦相互作用

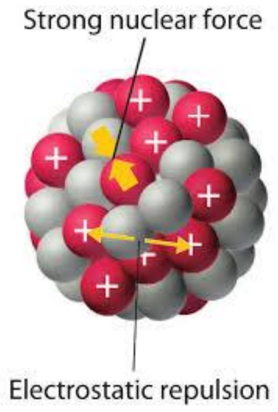


洛伦兹力

3：弱力 ， β 衰变的原因　作用力程短(10^{-15}m)，作用力大小弱



4：强力，如核力　作用力程短，作用力大小强



后三个都有**量子理论**，引力是**经典理论**

引力质量和惯性质量

万有引力定律：物体和物体之间的相互吸引的性质，大小与引力源质量都成正比。公式中的质量是物体和其他物体相互吸引的性质的度量，又叫做引力质量。

$$\boxed{F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}}$$

m_1, m_2: 引力质量

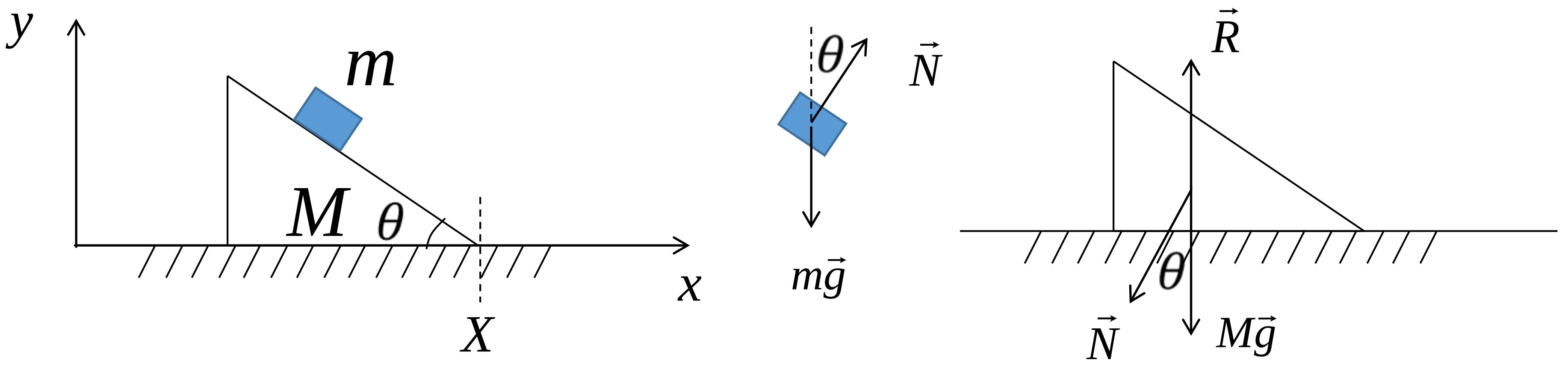
$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

m: 惯性质量

实验证明，引力质量和惯性质量相等，精度在10^{-12}量级以上。

§2.5 应用牛顿定律解题

例：平面上有一斜面，其上有一物体自由下滑。
忽略所有摩擦，求物体加速度。



解：地面参考系建坐标　隔离受力图（free-body diagram)

$$N\cos\theta - mg = ma_y$$

$$N\sin\theta = ma_x$$

$$-N\sin\theta = MA_x$$

$$R = N\cos\theta + Mg$$

尖:（X，0）

m:　(x, y)

$$y = (X - x)\tan\theta$$

$$\ddot{y} = (\ddot{X} - \ddot{x})\tan\theta \quad \rightarrow \quad a_y = (A_x - a_x)\tan\theta$$

$$\frac{N}{m}\cos\theta - g = \left(-\frac{N\sin(\theta)}{M} - \frac{N\sin(\theta)}{m}\right)tg(\theta)$$

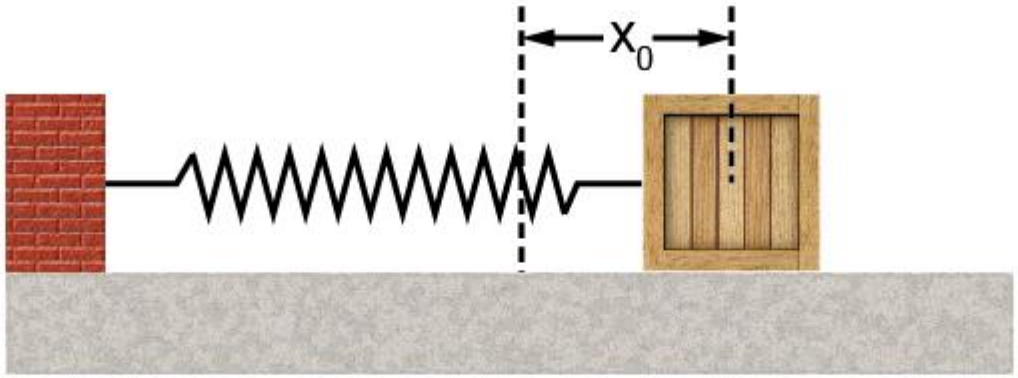
$$a_x = \frac{g\sin\theta\cos\theta}{1 + \frac{m}{M}\sin^2\theta} \quad a_y = -\frac{(1+\frac{m}{M})g\sin^2\theta}{1+\frac{m}{M}\sin^2\theta} \quad A_x = -\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

量纲分析

$$M >> m$$

$$a_x = g\sin\theta\cos\theta \qquad a_y = -g\sin^2\theta \qquad A_x = 0$$

*例：初始位置弹簧拉伸x_0=1m， 速度为0m/s，假设没有摩擦力，用数值的方法求解木箱位置随时间的变化规律。弹簧的劲度系数k=1N/m，质量为1kg。



$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{dmv}{dt}$$

$$F=m\dot{v}=m\ddot{x}$$

$$F=-kx$$

$$\ddot{x}+x=0$$

$$x=\cos(t)$$

离散化，微元思想

$$x(t+\Delta t)=x(t)+v(t)\Delta t$$

$$v(t+\Delta t)=v(t)+a(t)\Delta t$$

$$F(t)=-kx(t)=ma(t)$$

$$v(t+\Delta t)=v(t)-x(t)\Delta t$$

$$x(\Delta t)=x(0)+v(0)\Delta t$$

$$v(\Delta t)=v(0)-x(0)\Delta t$$

$$x(2\Delta t)=x(\Delta t)+v(\Delta t)\Delta t$$

$$v(2\Delta t)=v(\Delta t)-x(\Delta t)\Delta t$$

$$x(3\Delta t)=x(2\Delta t)+v(2\Delta t)\Delta t$$

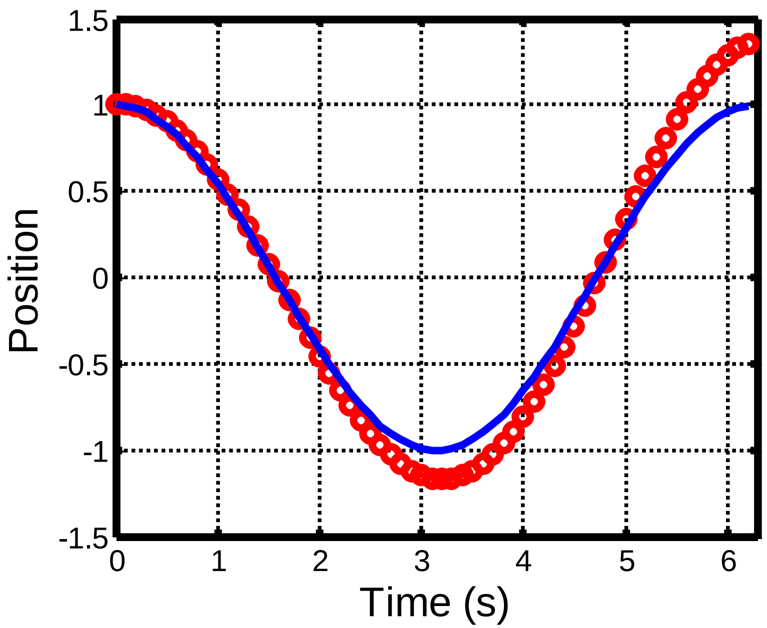
$$v(3\Delta t)=v(2\Delta t)-x(2\Delta t)\Delta t$$

$$\vdots$$

Matlab程序

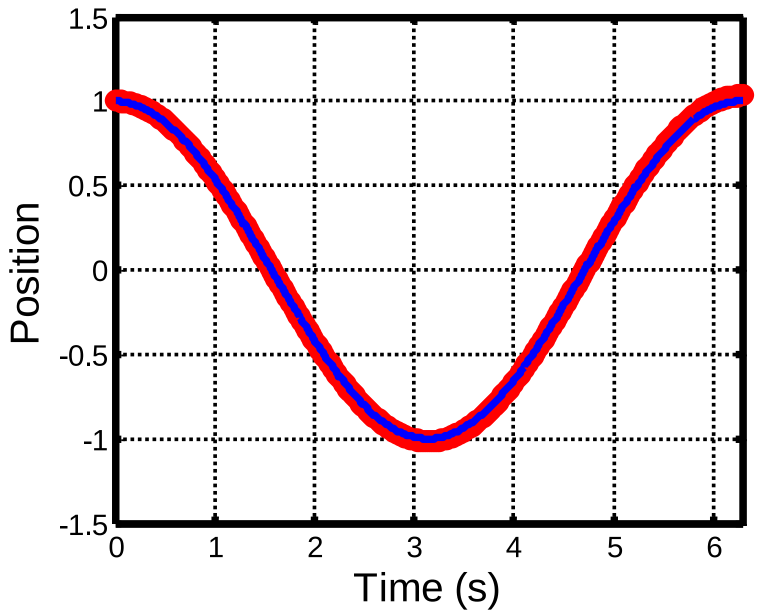
```
clc;clear;close;tic;
dt=0.01;
t=0:dt:6.29;
len=length(t);
x(1)=1;
v(1)=0;
for n=1:len-1
    x(n+1)=x(n)+v(n).*dt;
    v(n+1)=v(n)-x(n).*dt;
end
y=cos(t);
plot(t,x,'ro',t,y,'b-','linewidth',3);
xlabel('Time (s)','Fontsize',16);
ylabel('Position','Fontsize',16);
set(gca,'Fontsize',12,'linewidth',3);
set(gcf,'position',[50 50 450 350]);
grid on;
xlim([0 6.29]);

toc;
```

$$\Delta t = 0.1$$



耗时：0.078443

$$\Delta t = 0.01$$



耗时：0.068563s

误差：3%

Matlab程序

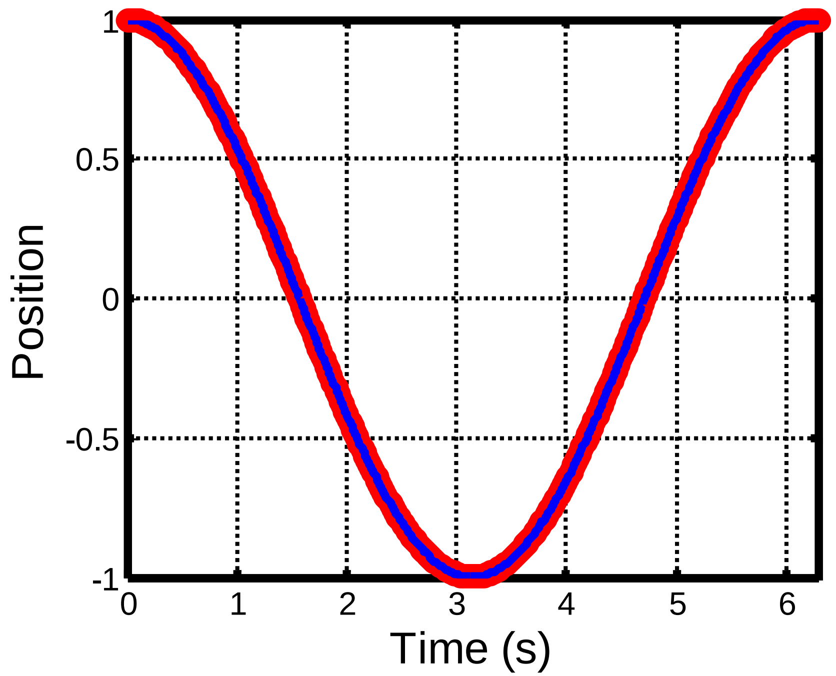
```
clc;clear;close;tic;
dt=0.01;
t=0:dt:6.29;
len=length(t);
x(1)=1;
v(1)=0;
v(2)=-x(1)*dt/2;
x(2)=x(1)+dt*v(2);
for n=1:len-2
    v(2+n)=v(1+n)-dt*x(n+1);
    x(2+n)=x(1+n)+dt*v(2+n);
end
y=cos(t);
plot(t,x,'ro',t,y,'b-','linewidth',3);
xlabel('Time (s)','Fontsize',16);
ylabel('Position','Fontsize',16);
set(gca,'Fontsize',12,'linewidth',3);
set(gcf,'position',[50 50 450 350]);
grid on;
xlim([0 6.29]);

toc;
```

改进算法

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\Delta t v(t+\Delta t/2)$$

$$v(t+\Delta t/2)=v(t-\Delta t/2)+\Delta t a(t)$$

$$a(t)=-x(t)$$

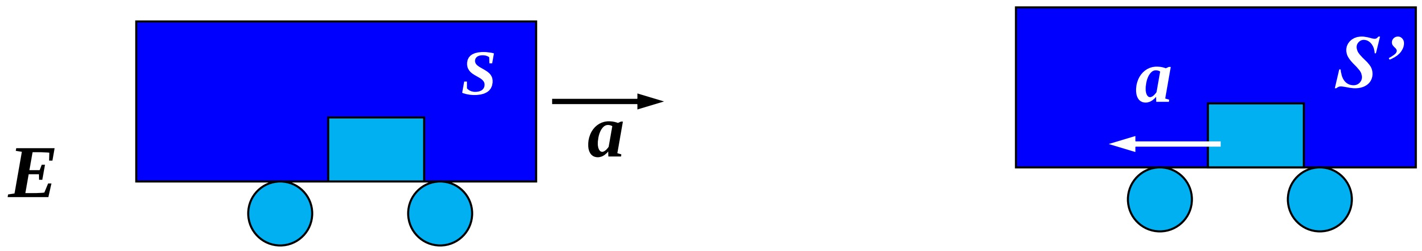


$$\Delta t=0.01$$

误差：10^{-7}

耗时：0.068701s

§2.6 惯性系(Inertial frame)和非惯性系

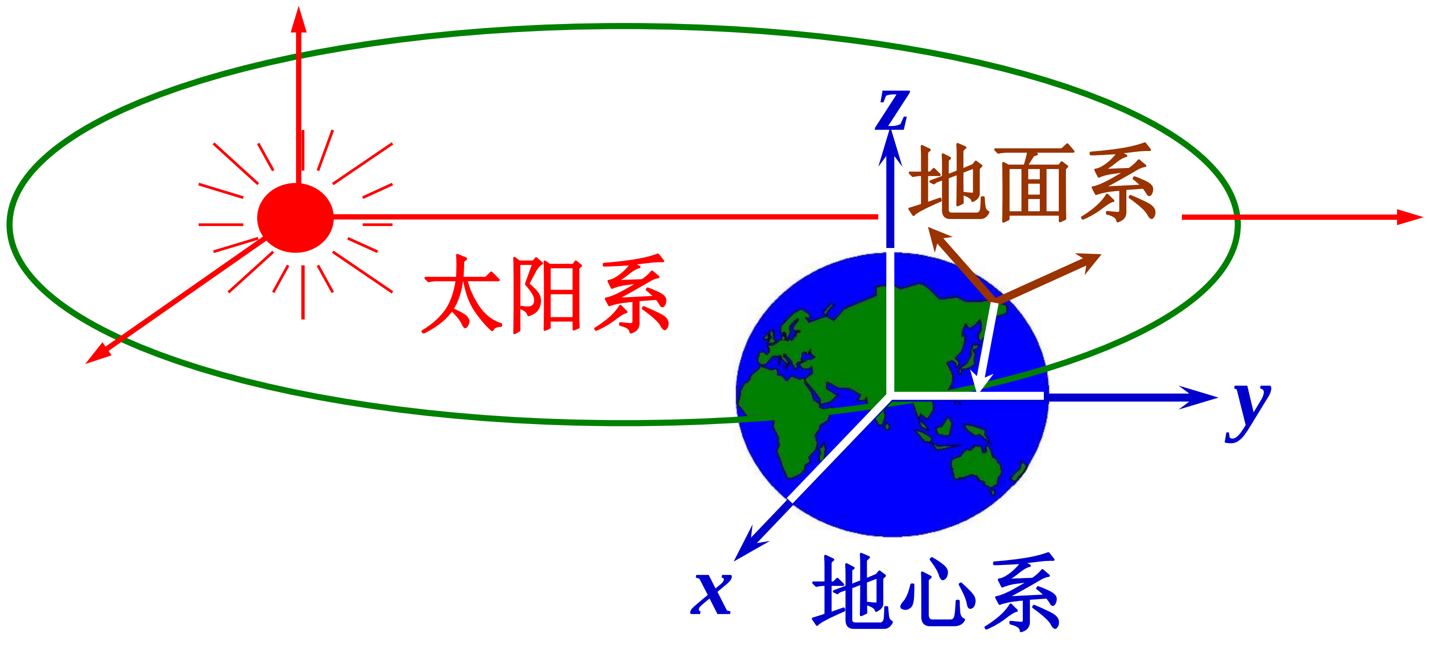


物体和小车之间没有摩擦，小车由静止开始加速。

在 S参考系,物体运动符合牛顿定律，在 *S’* 则不然

牛顿定律在惯性系成立

近似惯性系：



地面参考系，自转加速度 $a \sim 3.4$ cm/s^2

地心参考系，公转加速度 $a \sim 0.6$ cm/s^2

太阳参考系，绕银河系加速度 $a \sim 3\times10^{-8}$ cm/s^2

§2.7 惯性力和平动参考系惯性力

设 **S** 系为惯性系，**S '** 系为非惯性系

两个平动参考系之间，加速度变换 $\vec{a}=\vec{a}\,'+\vec{a}_0$

质点 **m** 在 **S** 系 $\vec{F}=m\vec{a}$ $\vec{F}$ 不随参考系变化

在 **S '** 系 $\vec{F}\neq m\vec{a}'$ 第二定律在非惯性系不成立

在非惯性系引入虚拟力或惯性力 $\boxed{\vec{F}_0=-m\vec{a}_0}$

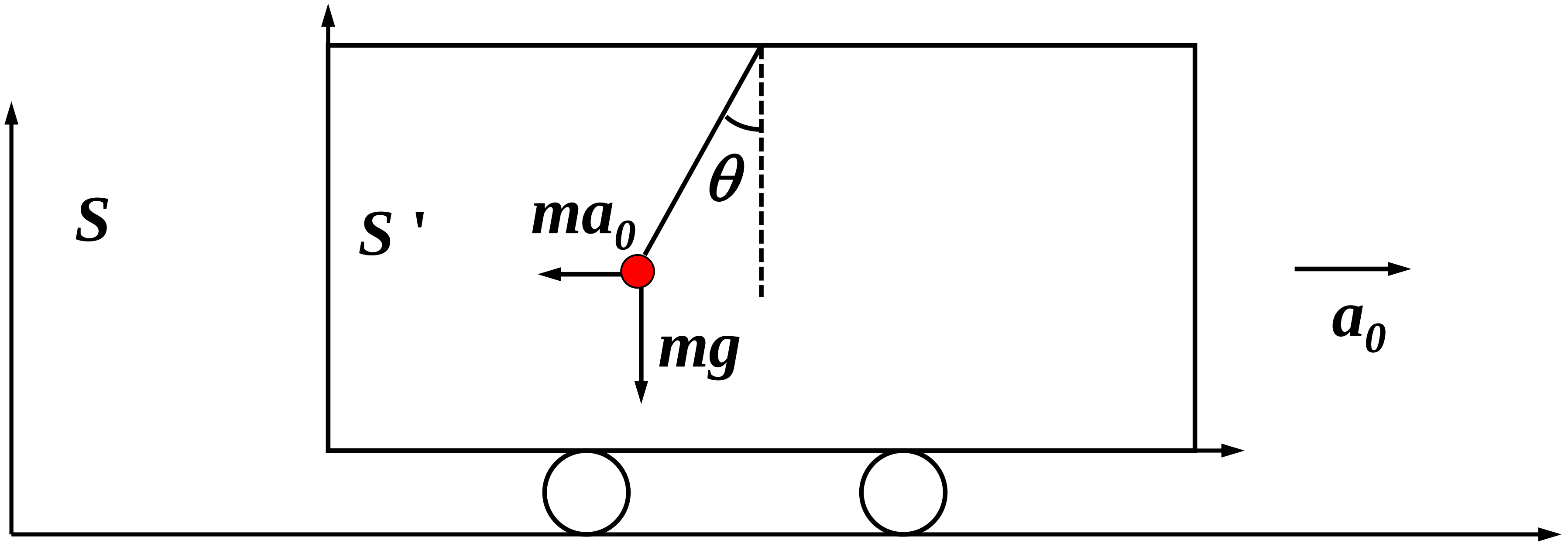
在非惯性系 **S '**系 $\vec{F}+\vec{F}_0=m\vec{a}\,'$

引入惯性力后，牛顿第二定律在非惯性系形式上成立。

结论可推广到非平动的非惯性系，如转动参考系。

$$\boxed{\vec{F}_0=m\omega^2 r\hat{r}}$$

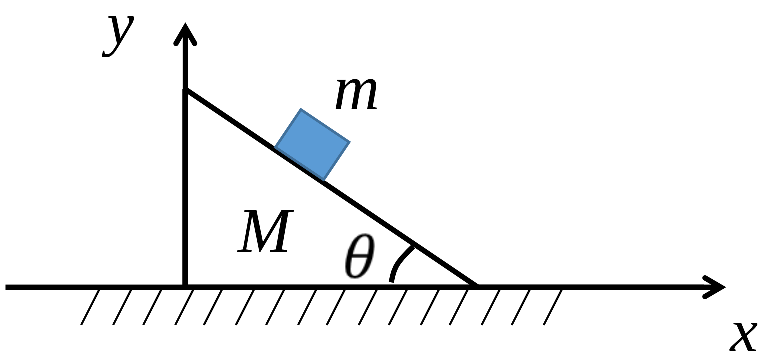
例：一匀加速运动的车厢内，观察单摆，平衡位置和振动周期如何变化？ （加速度 a_0，摆长 l，质量 m）

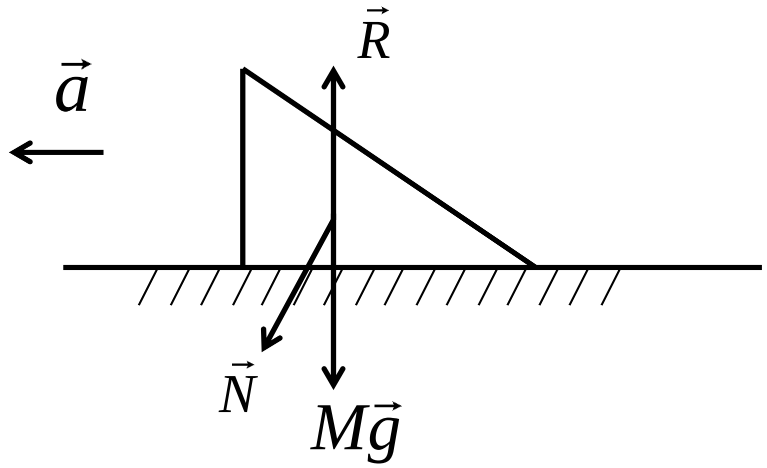


解：在 S'系 $a=\sqrt{a_0^{\ 2}+g^{\ 2}}$　　平衡位置　　$\theta=\tan^{-1}\dfrac{a_0}{g}$

周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \rightarrow T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{a}}$

例：平面上有一斜面，其上有一物体自由下滑。
忽略所有摩擦，求下滑物体相对斜面加速度。





解：考察斜面运动

$$N\sin\theta = Ma$$

$$R = N\cos\theta + Mg$$

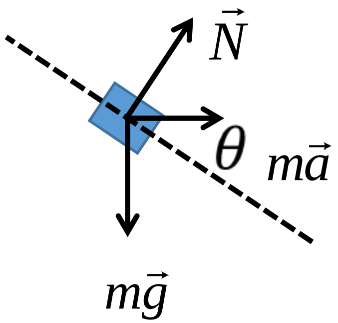
斜面参考系上建坐标

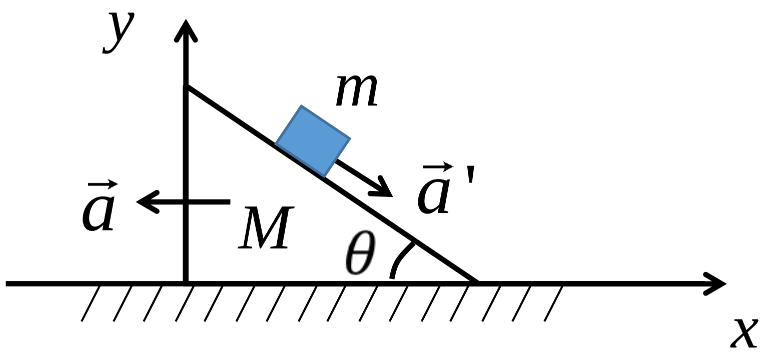
隔离受力图（free-body diagram)

考虑惯性力

$$mg\sin\theta + ma\cos\theta = ma'$$

$$N + ma\sin\theta = mg\cos\theta$$





$$a=\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

$$a'=\frac{(1+\frac{m}{M})g\sin\theta}{1+\frac{m}{M}\sin^2\theta}$$

$M>>m$

$a=0$ $\quad$ $a'=g\sin\theta$

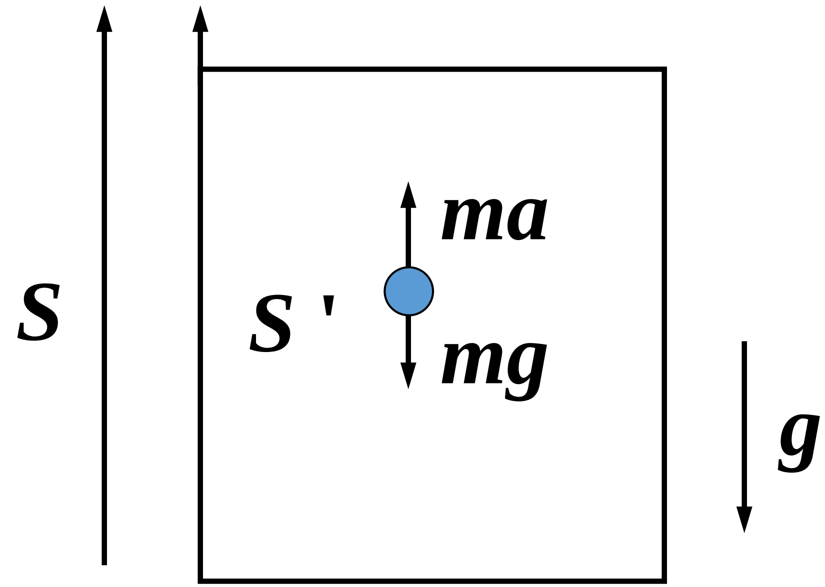
$$\vec{a}_m=\vec{a}'+\vec{a}$$

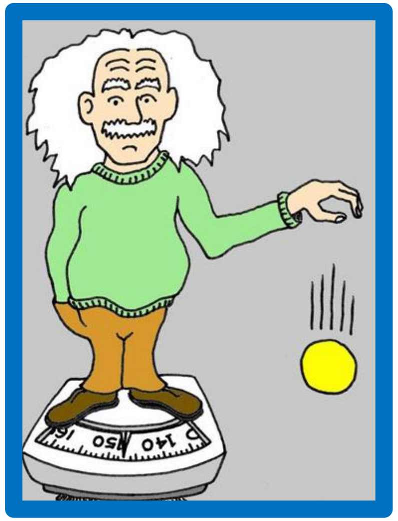
$$a_{mx}=a'\cos\theta-a$$

$$a_{my}=-a'\sin\theta$$

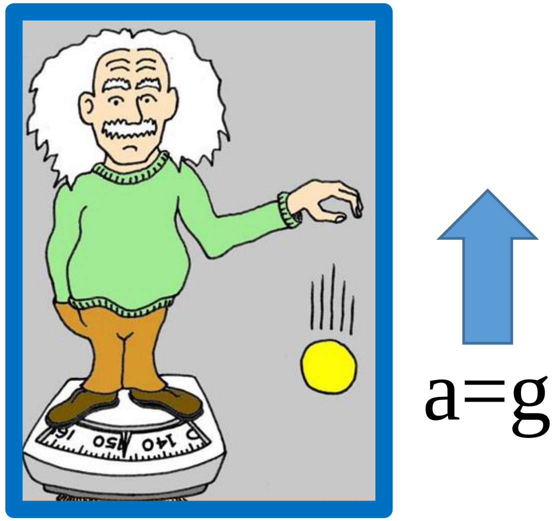
在非惯性系应用牛顿定律，只需加上惯性力

例：自由落体的参照系





地球引力



加速度上升

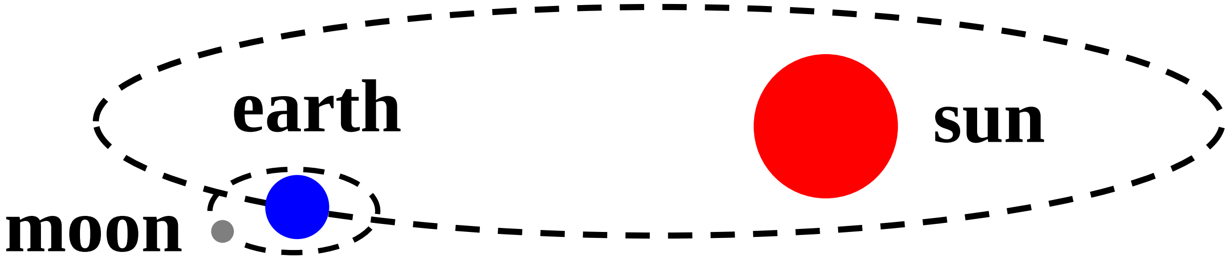
S '是理想的无外力作用的参考系

可以严格检验惯性定律

加速系中的惯性力和惯性系中的引力是等效的，这一思想是爱因斯坦首先提出的，称为等效原理。

爱因斯坦的广义相对论

例：



$$\vec{F}_{E,M} \approx M_M \vec{a} \ ?$$

求： 1. 月球所受地球和太阳的引力之比？

2. 月球在地心参考系的运动方程？

解：1.

$$\frac{F_{E,M}}{F_{S,M}} = \frac{\dfrac{M_E}{r_{E,M}^2}}{\dfrac{M_S}{r_{S,M}^2}} = \frac{r_{S,M}^2}{r_{E,M}^2}\frac{M_E}{M_S}$$

$$=\left(\frac{1.49\times 10^{11}\mathrm{m}}{3.84\times 10^{8}\mathrm{m}}\right)^2 \frac{5.975\times 10^{24}\mathrm{kg}}{1.99\times 10^{30}\mathrm{kg}} \approx 0.45$$

2. 在地心参考系月球 $\vec{F}_{E,M}+\vec{F}_{S,M}+\vec{F}_{inertia}=M_M\vec{a}$

在太阳参考系地球受力 $\vec{F}_{M,E}+\vec{F}_{S,E}=M_E\vec{a}_0$

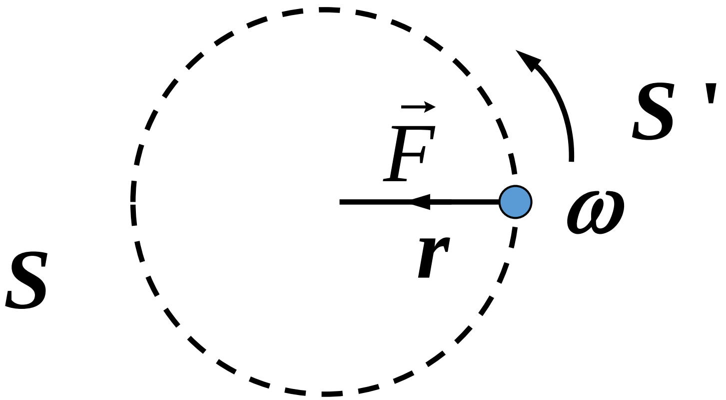
$$\frac{F_{M,E}}{F_{S,E}}\approx 0.0055 \qquad \vec{F}_{S,E}\approx M_E\vec{a}_0$$

$$\vec{F}_{S,M}+\vec{F}_{inertia}\approx\frac{M_M}{M_E}\vec{F}_{S,E}-M_M\vec{a}_0\approx 0$$

$$\vec{F}_{E,M}\approx M_M\vec{a}$$

§2.8 转动参考系的惯性力

一、 转动参考系的惯性力：离心力



在 S 系匀速圆周运动

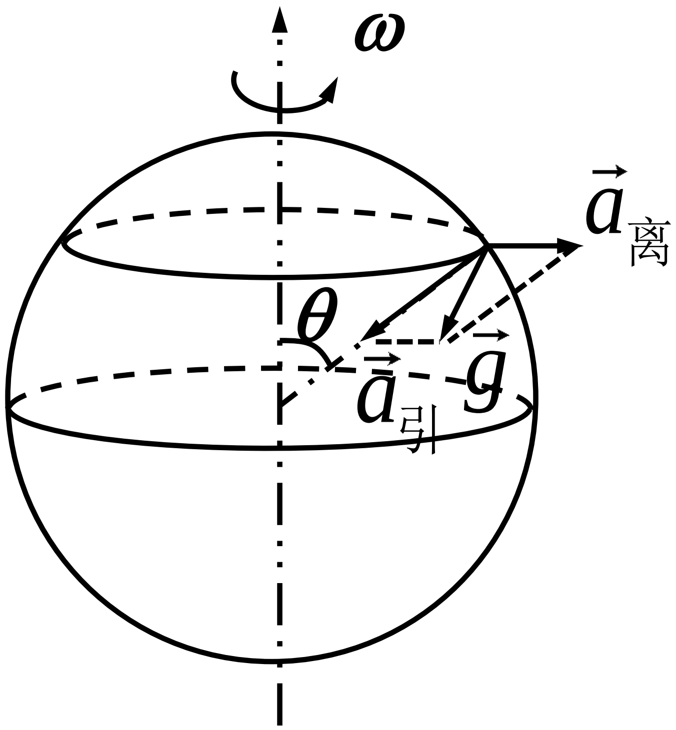
$$\vec{F} = -m\omega^2 r\hat{r} \qquad \vec{a} = -\omega^2 r\hat{r}$$

质点 m 在 S' 静止

$$\vec{F} + \vec{F}_0 = 0$$

$$\boxed{\vec{F}_0 = m\omega^2 r\hat{r}}$$ 离心方向

例：重力加速度



$$g^2 = a_{引}^2 + a_{离}^2 - 2a_{引}a_{离}\sin\theta$$

$$a_{引} >> a_{离}$$

$$g \approx a_{引} - a_{离}\sin\theta$$

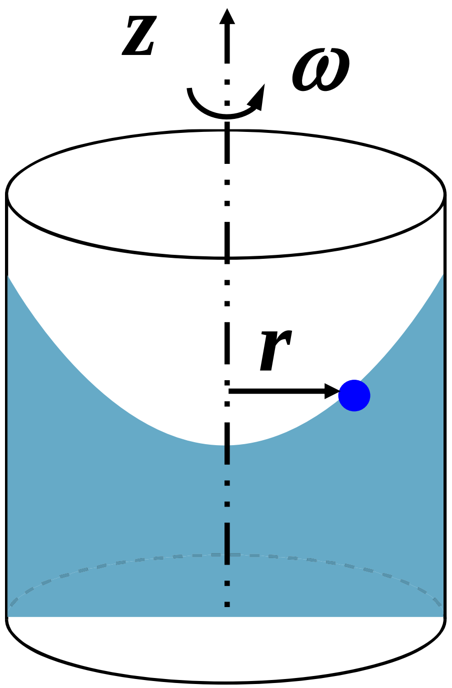
$$g \approx a_{引} - \omega^2 R\sin^2(\theta)$$

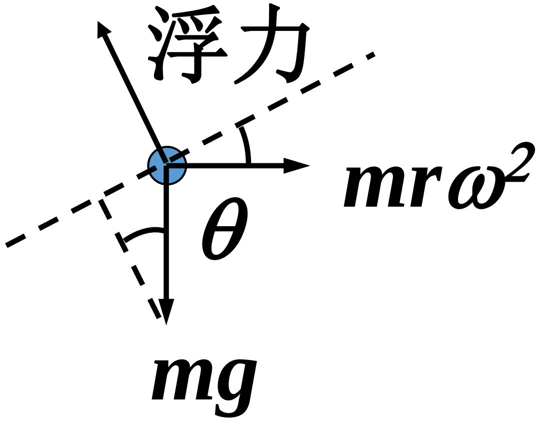
$g_{赤道}$ = 9.778 m/s^2

$g_{北极}$ = 9.832 m/s^2

*在地表面用 g，已考虑惯性离心力在内

例：水桶以ω旋转，求水面形状？





解：水面 z 轴对称，选柱坐标系。
任选水面一小质元，在切线
方向静止，在旋转参考系

$$mg\sin\theta - mr\omega^2\cos\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{r\omega^2}{g} \rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

积分 $\int_{z_0}^{z} dz = \int_0^r dr\,\frac{r\omega^2}{g}$ $->$ $z = z_0 + \frac{r^2\omega^2}{2g}$

矢量的重要公式　　矢量的标积

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

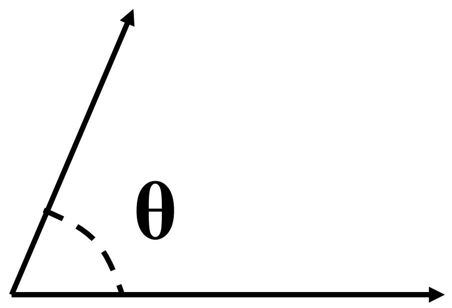
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})(\mathrm{b}_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos(\theta)$$

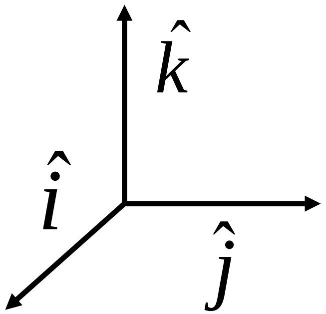
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$$



矢量的重要公式　矢量积

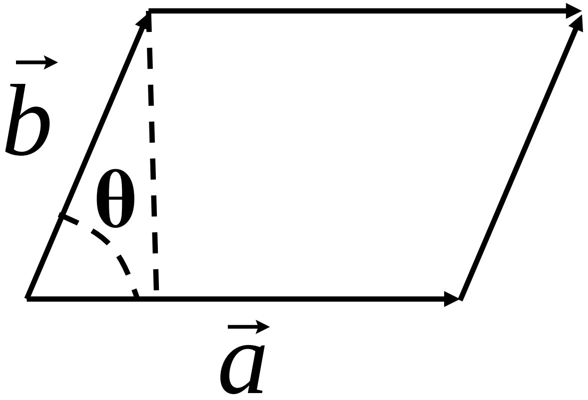
$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$$
$$\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$$
$$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$



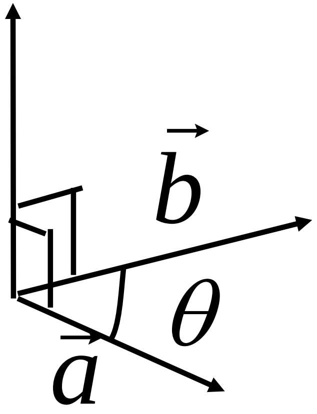
右手螺旋定则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$
$$\vec{a}\times\vec{a}=0$$
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=ab\sin(\theta)$$



几何意义



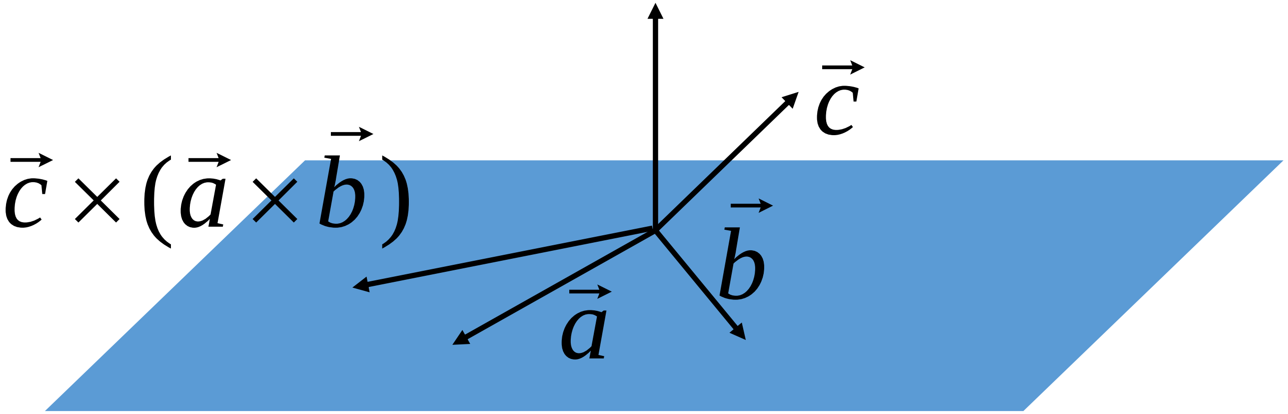
矢量积的方向

矢量的重要公式　矢量三重积

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})-\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})$$



矢量的重要公式　　矢量的微分

$$\frac{d}{dt}\vec{a} = \frac{da_x}{dt}\hat{i} + \frac{da_y}{dt}\hat{j} + \frac{da_z}{dt}\hat{k}$$

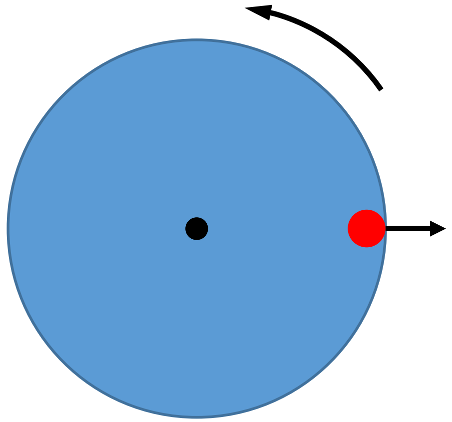
点积的微商 $$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}}$$

叉积的微商 $$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}}$$

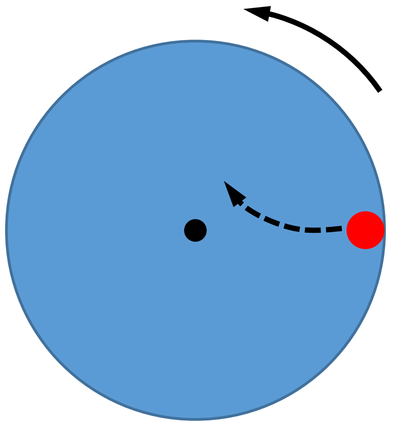
二、科里奥利力

喷水科里奥利力演示实验

离心力：转动参考系的惯性力，任何物体都会受到的惯性力。

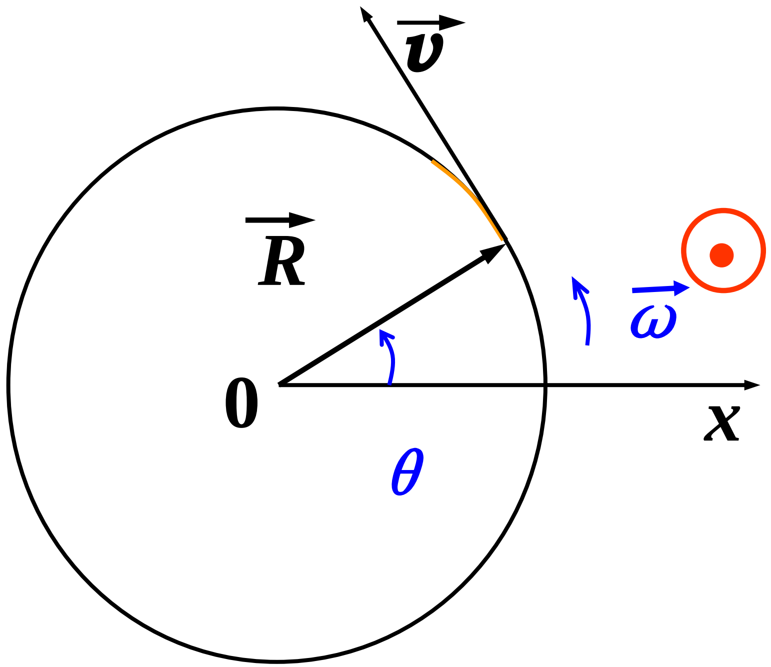


科里奥利力：转动参考系的惯性力，只有相对转动参考系运动的物体才有科里奥利力。



运动质点

科里奥利力公式推导



$$\vec{r}(t)=r\hat{r}(t)$$

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{v}=\frac{d}{dt}\vec{r}(t)=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\frac{d}{dt}\equiv\vec{\omega}\times$$

前提角速度不变

科里奥利力公式推导

$$\vec{v} = \frac{D}{Dt}\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

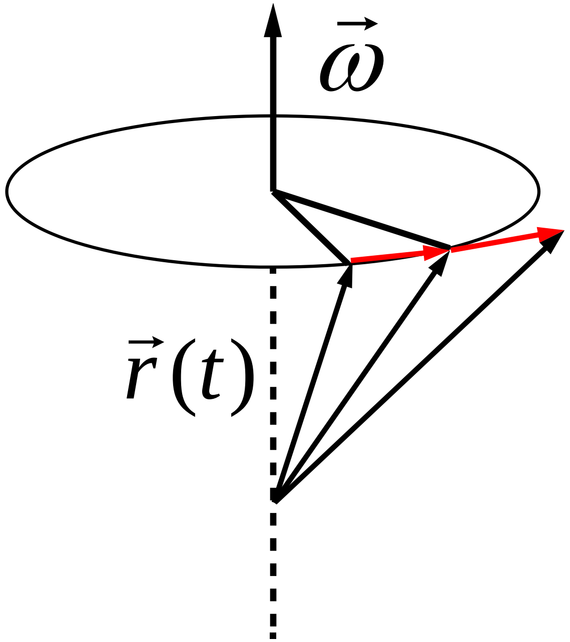
$$\vec{v} = \frac{D}{Dt}\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{d}{dt}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{D}{Dt}\vec{r}\right) = \vec{\omega} \times \left(\frac{D}{Dt}\vec{r}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{D}{Dt}\vec{r}\right)$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}') + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}')$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}(\vec{r}) + \vec{a}'$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'$$



$\frac{D}{Dt}$ 表示静止参考系的微分

$\frac{d}{dt}$ 表示转动参考系的微分

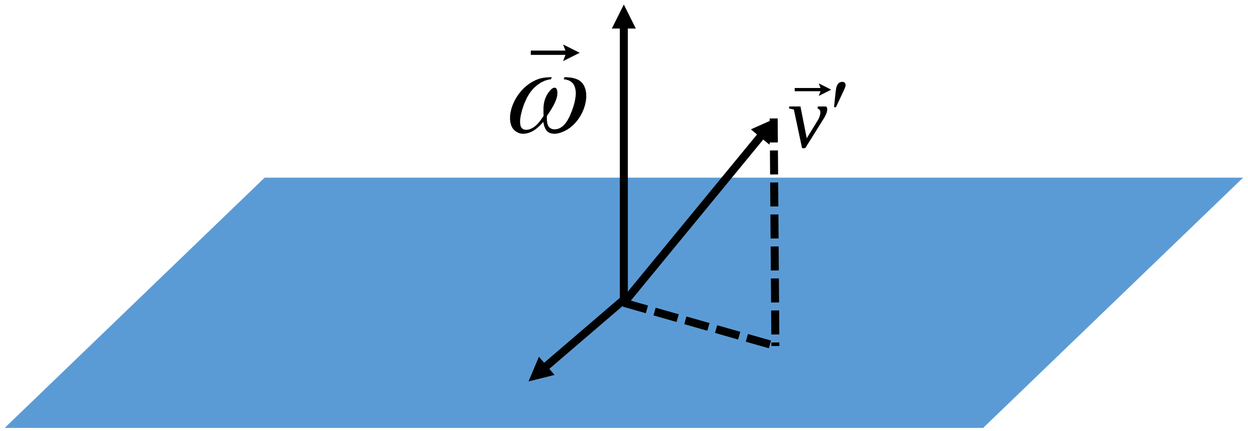
转动参考系的惯性力

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{a}')$$

$$\vec{F} + m(-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}') = m\vec{a}'$$

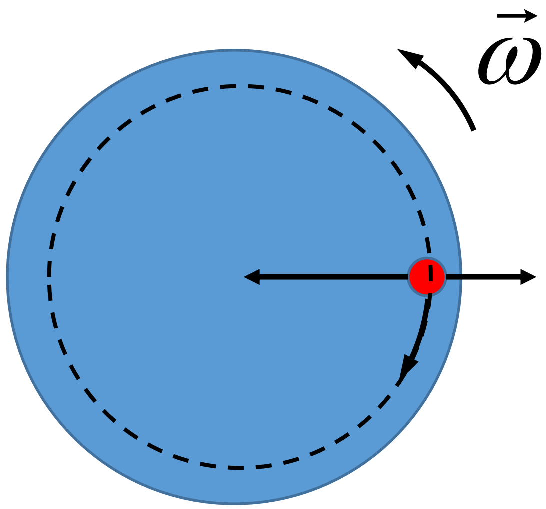
$$\boxed{\vec{F}_0 = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}}$$

离心力　　科里奥利力



例： 一质点保持静止不动，质点和桌面无摩擦，桌面匀角速转动，给出在转动参考系质点受力和运动。

转动参考系质点是匀速圆周运动



$$\vec{v}=-\omega r\hat{\theta}$$

$$\vec{F}_1=m\omega^2 r\hat{r}$$ 离心力

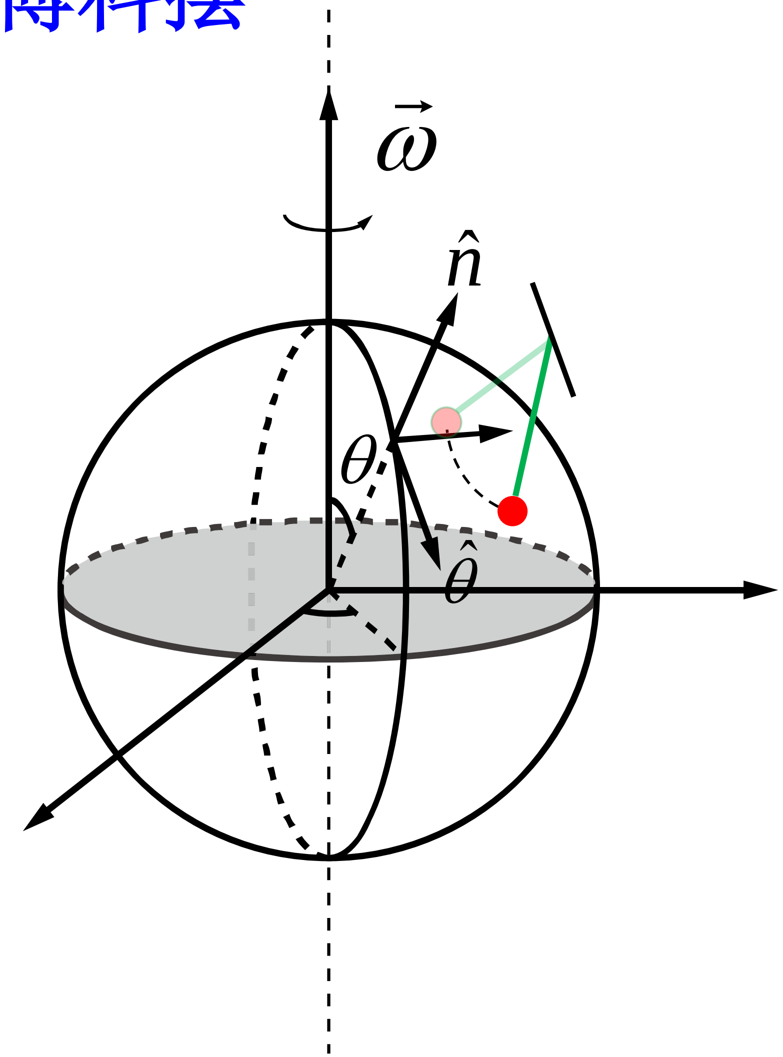
$$\vec{F}_2=2m\vec{v}\times\vec{\omega}=2m(-\omega r\hat{\theta}\times\omega\hat{e})$$

$$\vec{F}_2=-2m\omega^2 r\hat{r}$$ 科里奥利力

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=-m\omega^2 r\hat{r}$$

科里奥利力和离心力合力提供匀速圆周运动的加速度。

傅科摆



$$\vec{\omega} = \omega_{\perp}\hat{n} + \omega_{//}\hat{\theta}$$

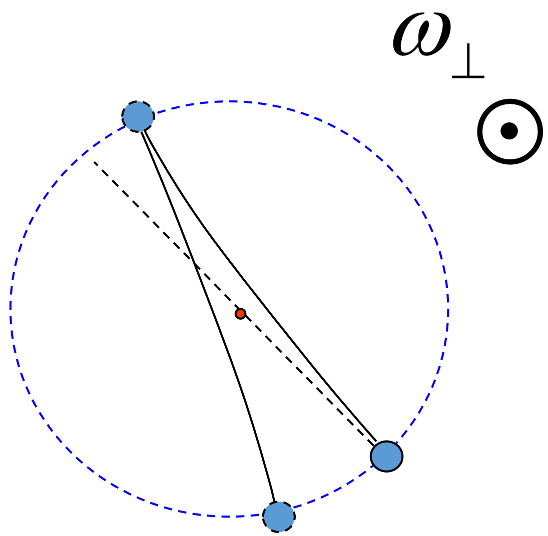
$$= \omega\cos\theta\hat{n} - \omega\sin\theta\hat{\theta}$$

地面上科氏力

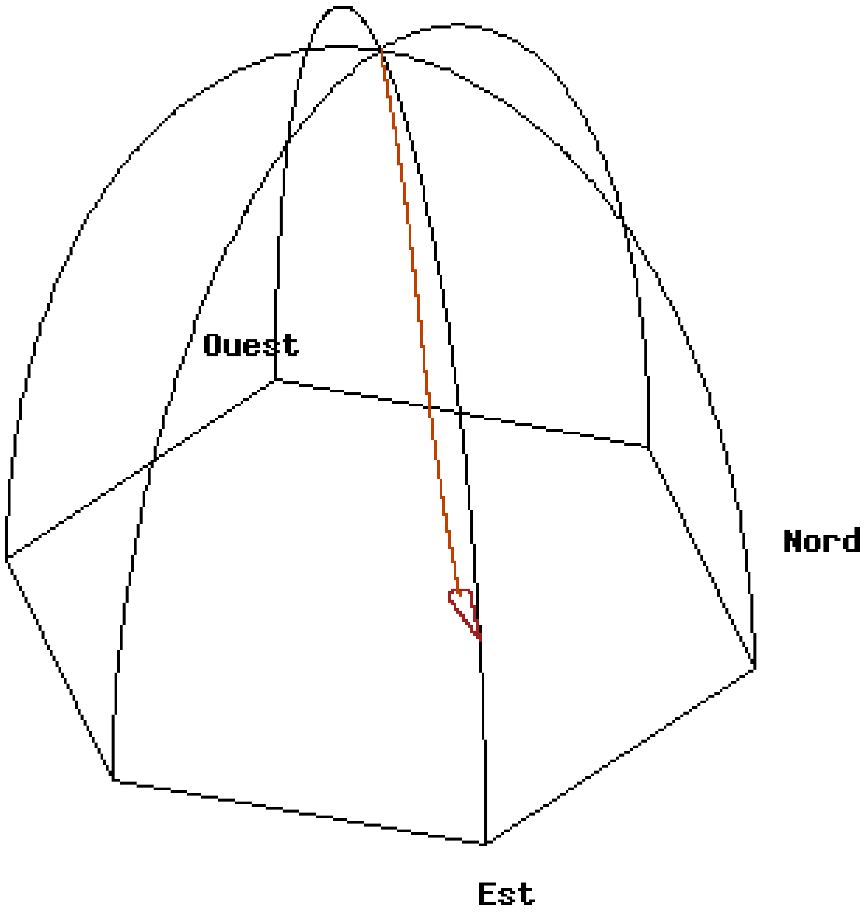
$$\vec{f}_c = 2m\vec{v}\times\vec{\omega} = 2mv\omega_{\perp}\hat{v}\times\hat{n} + 2mv\omega_{//}\hat{v}\times\hat{\theta}$$

横向加速度

$$a_{\perp} = 2v\omega_{\perp}$$



傅科摆



傅科摆演示

傅科摆周期

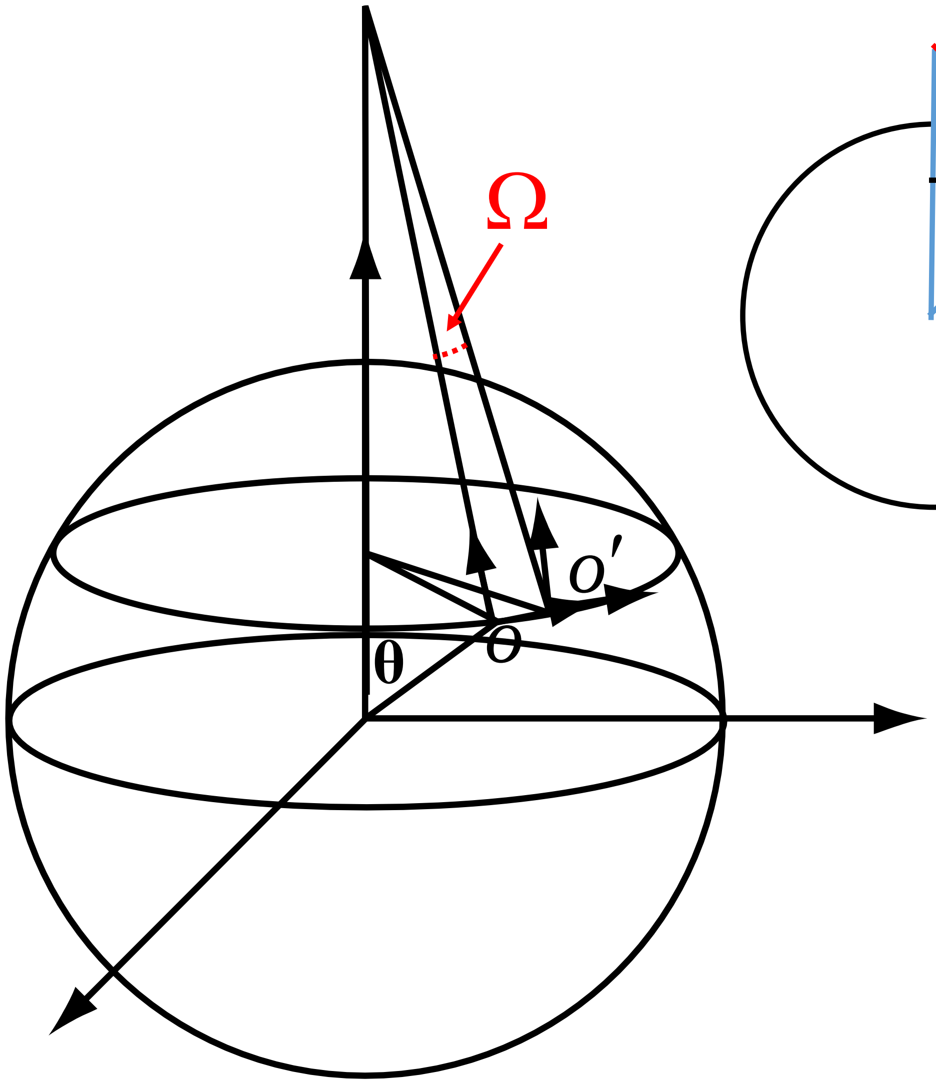
$$OO' = \omega \Delta t R \sin(\theta)$$

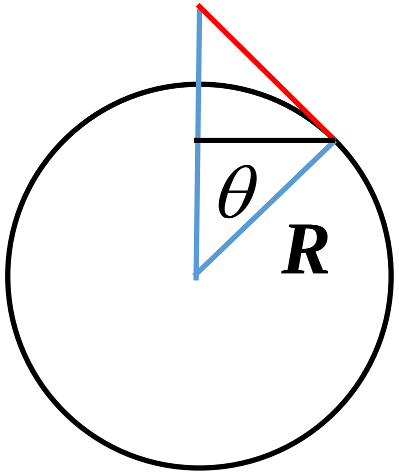
$$OO' = \Omega \Delta t \,(R \sin(\theta))/\cos(\theta)$$

$$\Omega = \omega \cos(\theta)$$

两极 $\Omega = \pm\omega$

赤道 $\Omega = 0$





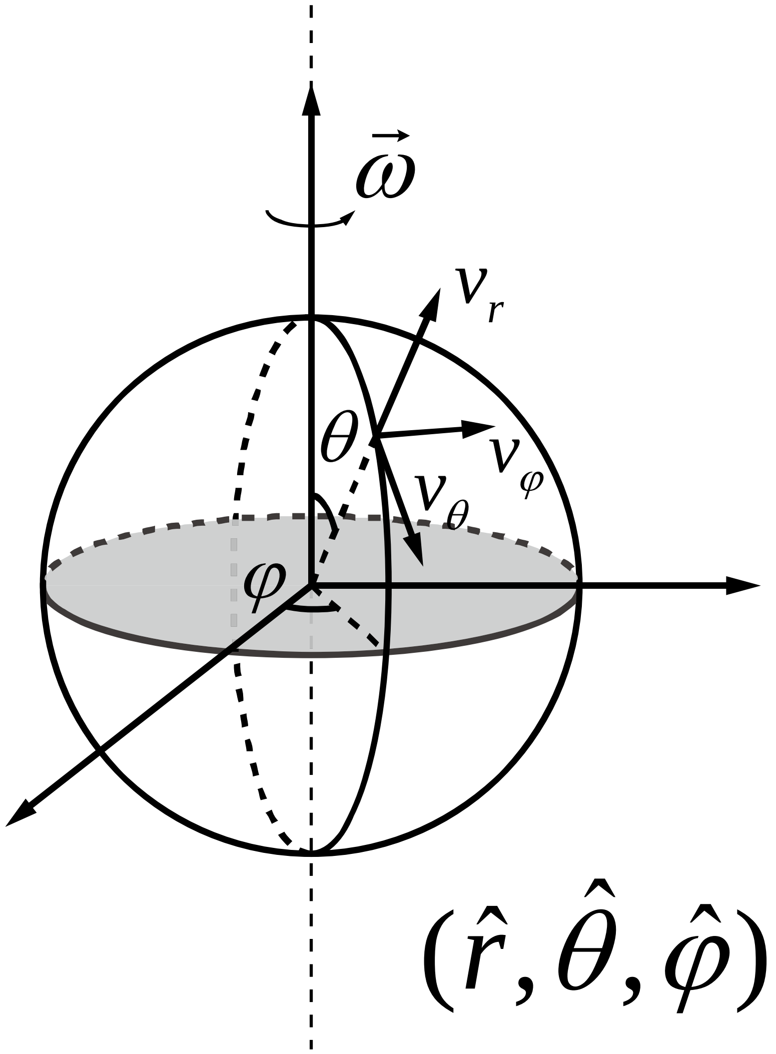
摆平面转动周期

$$\boxed{T = \frac{24\text{小时}}{\cos(\theta)}}$$

巴黎，$\varphi \approx 49^\circ$，$T = 31$小时52分

北京，$\varphi \approx 40^\circ$，$T = 37$小时15分

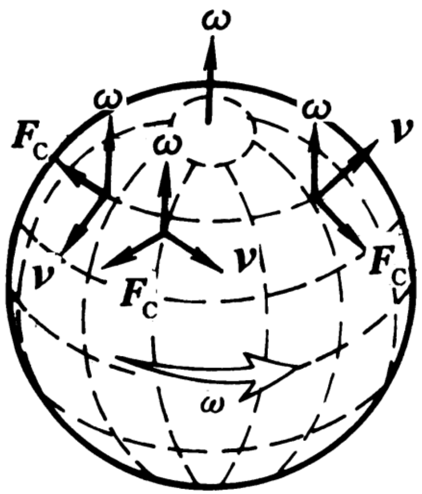
科里奥利力在三维球面上



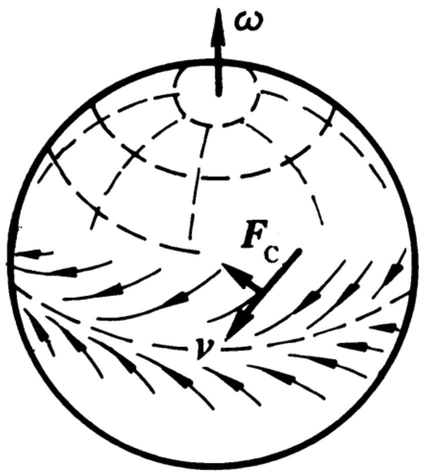
$$\boxed{\vec{f}_c = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}}$$

- 落体偏东
- 河岸冲刷，双轨磨损（北半球右，南半球左）

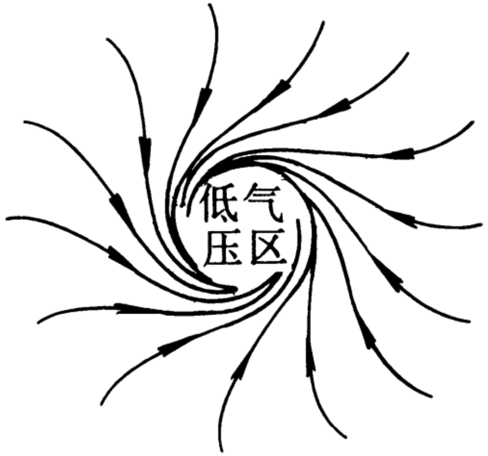
与科里奥利力有关的其它现象



北半球的科里奥利力



信风的形成

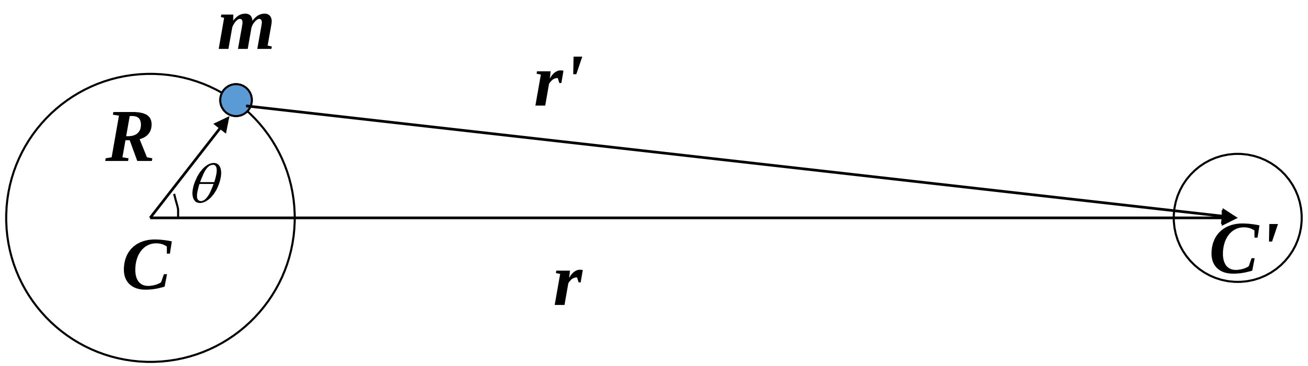


风暴漩涡的形成

- 赤道附近的信风（北半球东北，南半球东南）
- 强热带风暴漩涡的形成

§2.9 潮汐力和潮汐(tide)*

只考虑地球和月球



钱塘江大潮

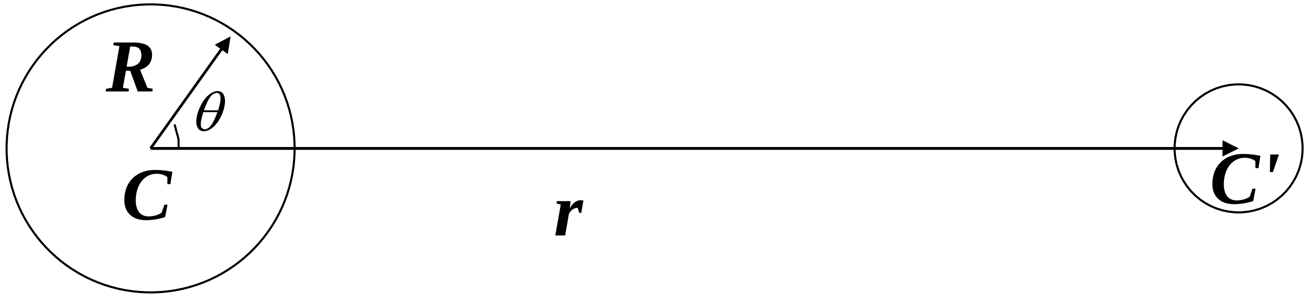
一小块海水受月球引力

$$\vec{f}_M = G\frac{mM_M}{r'^2}\hat{r}'$$

海水受月球引力不均是潮汐的本质原因

在地心参考系潮汐原因更直观

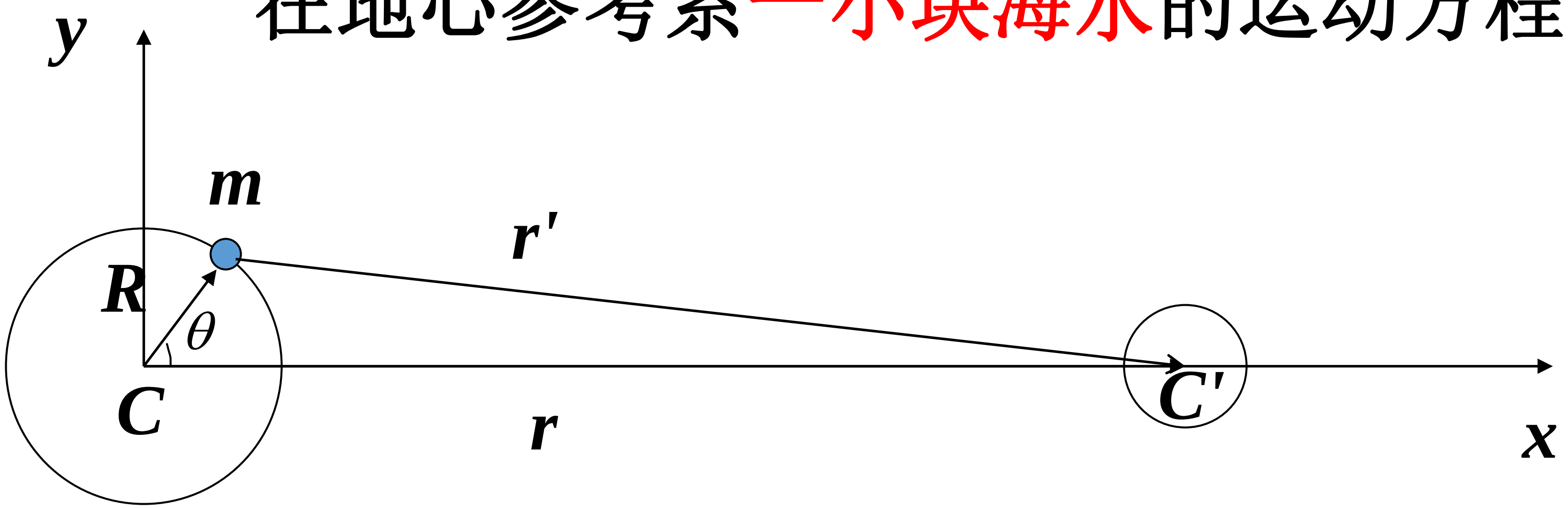
地心参考系是非惯性系



在惯性系，受月球引力，地心运动方程

$$\vec{f}_{E,M} = G\frac{M_E M_M}{r^2}\hat{r} = M_E \vec{a}_0$$

在地心参考系一小块海水的运动方程



对潮汐没有影响

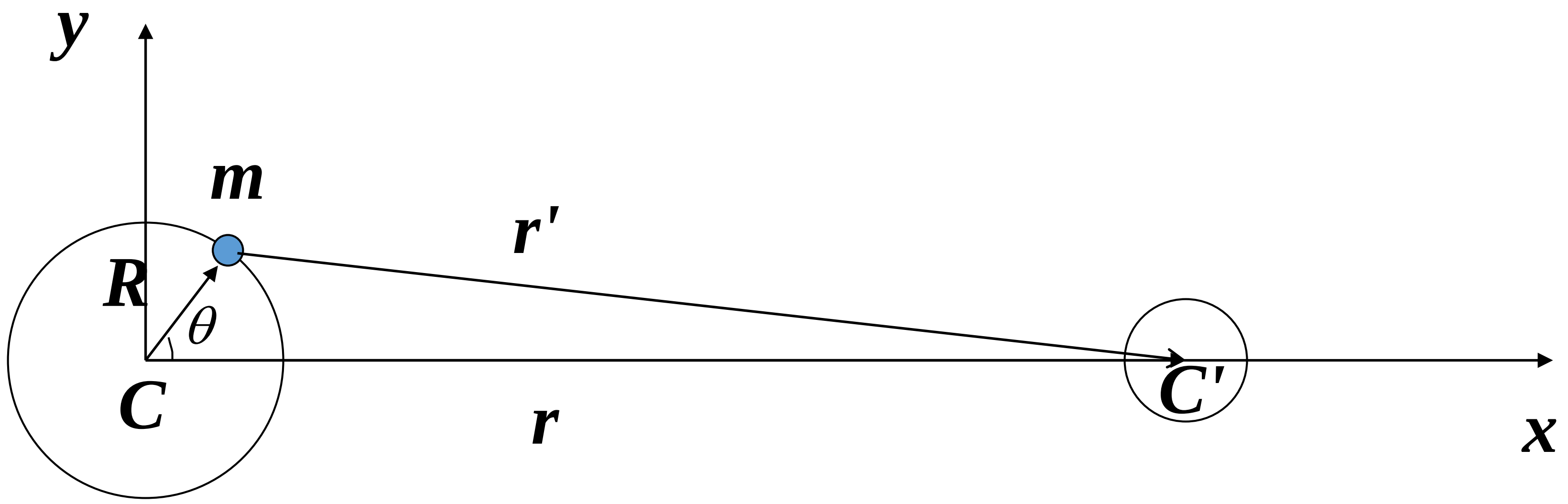
$$\vec{f}_M + \vec{f}_{惯} + \boxed{\vec{f}_E + \vec{f}_{物质间作用}} = m\vec{a}$$

剩余力 $\vec{f}_M + \boxed{\vec{f}_{惯}} = \vec{f}_{潮汐}$

$$-m\vec{a}_0$$

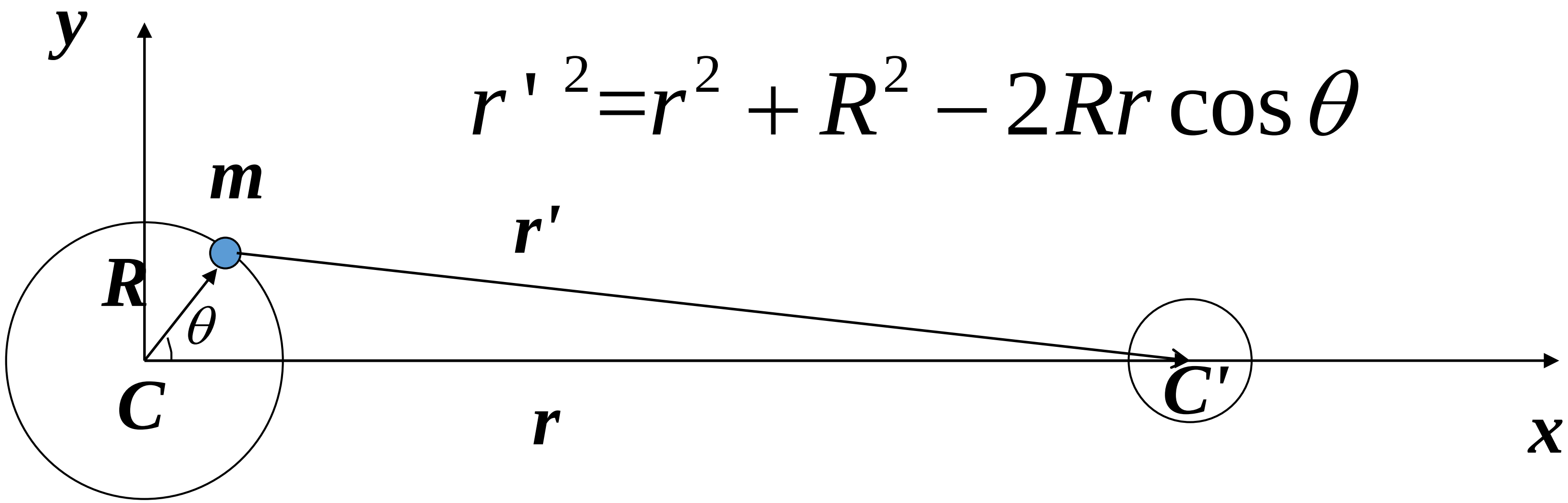
$$\vec{f}_{惯} = -m\vec{a}_0 = -G\frac{mM_M}{r^2}\hat{r} \qquad \vec{f}_M = G\frac{mM_M}{r'^2}\hat{r}'$$

$$\vec{f}_{潮汐} = GmM_M\left(\frac{\hat{r}'}{r'^2} - \frac{\hat{r}}{r^2}\right) = GmM_M\left(\frac{\vec{r}'}{r'^3} - \frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

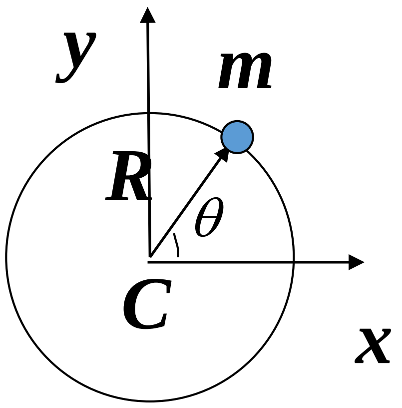
$$r'^2 = r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta$$



$$r >> R \qquad \frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\frac{R}{r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\vec{r}'}{r'^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \approx \frac{\vec{r} - \vec{R}}{r^3}\left(1 + 3\frac{R}{r}\cos\theta\right) - \frac{\vec{r}}{r^3}$$

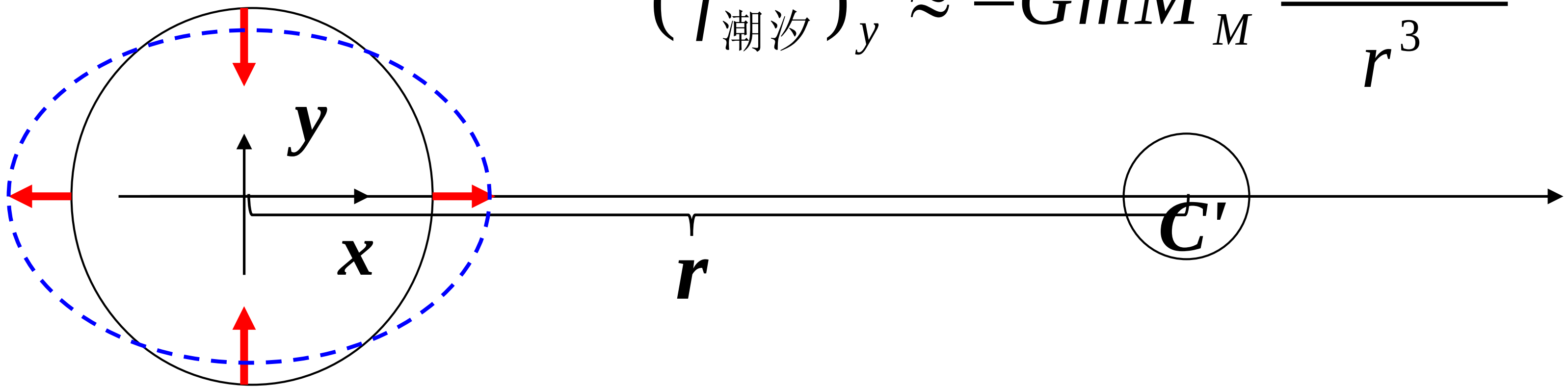
$$\approx -\frac{\vec{R}}{r^3} + \frac{3\vec{r}}{r^3}\frac{R}{r}\cos\theta$$



$$\vec{f}_{潮汐}=GmM_M(-\frac{\vec{R}}{r^3}+\frac{3\vec{r}}{r^3}\frac{R}{r}\cos\theta)$$

$$(f_{潮汐})_x \approx 2GmM_M\frac{R\cos\theta}{r^3}$$

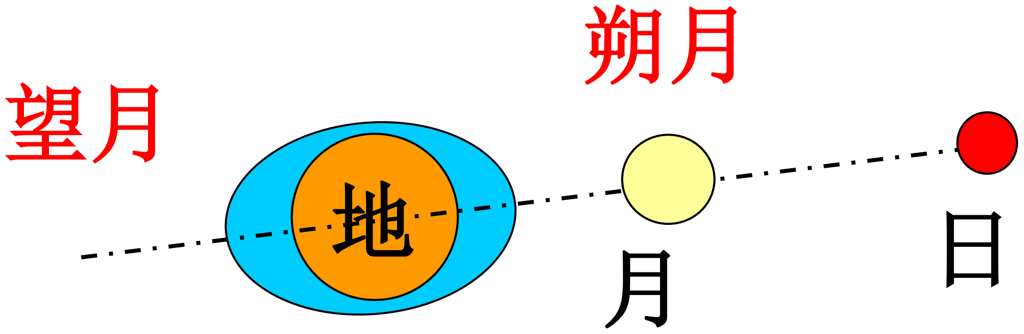
$$(f_{潮汐})_y \approx -GmM_M\frac{R\sin\theta}{r^3}$$



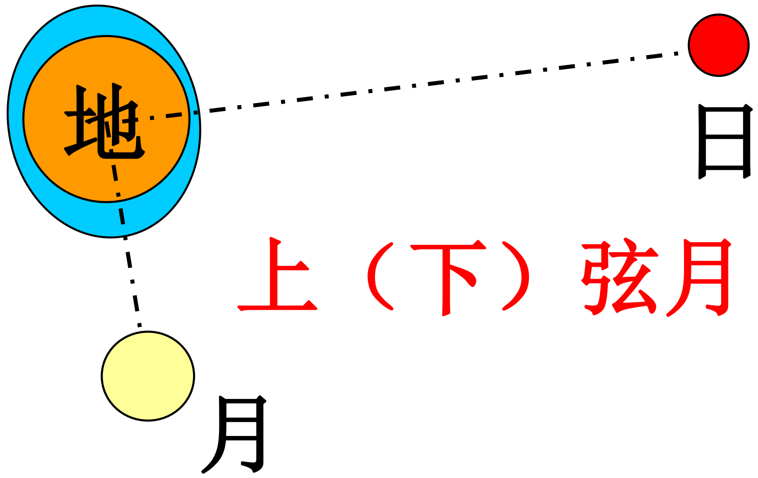
太阳的潮汐力与月球的比较

$$\frac{(f_{潮汐})_{月}}{(f_{潮汐})_{日}}=\frac{M_M}{M_S}(\frac{r_{E,S}}{r_{E,M}})^3 \approx 2.18$$

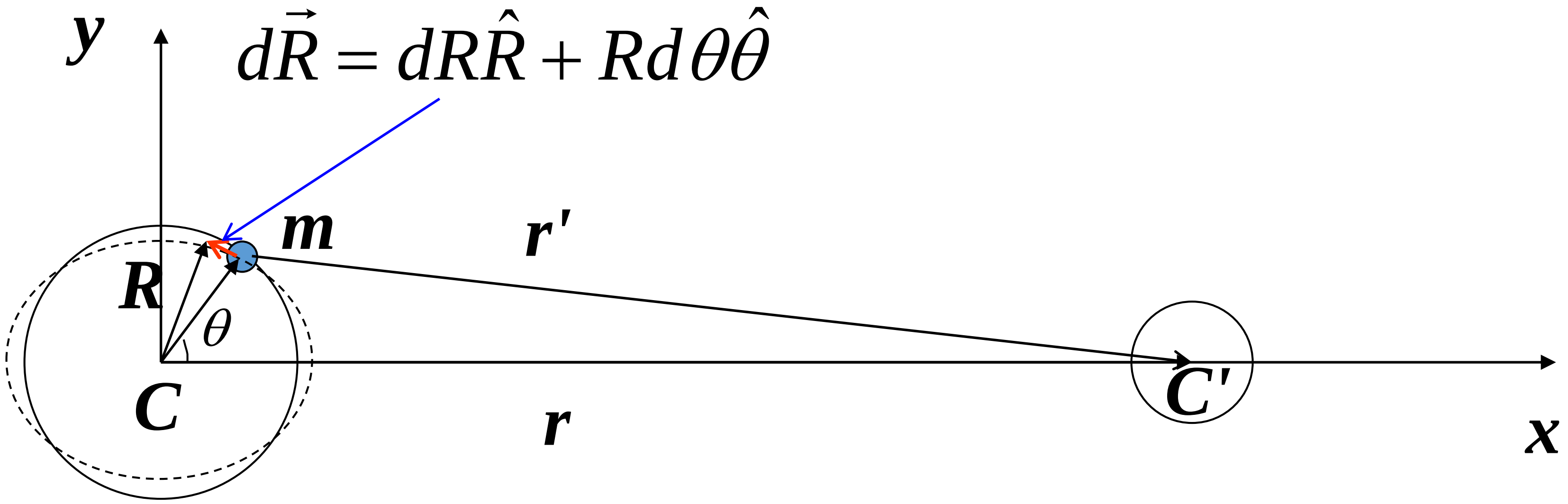
大潮



小潮



潮汐高度**



$$\Delta U=0=-\int_{沿虚线}(\vec{f}_{潮汐}+\vec{f}_E)\cdot d\vec{R}$$

$$\vec{f}_{潮汐}=GmM_M\left(-\frac{\vec{R}}{r^3}+\frac{3\vec{r}}{r^3}\frac{R}{r}\cos\theta\right)$$

$$\vec{f}_E=-G\frac{mM_E}{R^3}\vec{R}$$

潮高：$\delta=R_{\theta=0}-R_\theta$

第一项 $\int_0^\theta -G\frac{mM_M}{r^3}\vec{R}\cdot(\hat{R}dR+R\hat{\theta}d\theta)=\underline{-G\frac{mM_M}{2r^3}R^2\Big|_0^\theta}$ $\Rightarrow$ $G\frac{mM_M}{r^3}R\delta$ 量级

第二项 $\int_0^\theta G\frac{mM_M}{r^4}3\cos(\theta)R\vec{r}\cdot(\hat{R}dR+R\hat{\theta}d\theta)$

$$\int_0^\theta G\frac{mM_M}{r^3}3\cos^2(\theta)RdR+\int_0^\theta G\frac{mM_M}{r^3}3R^2\cos(\theta)\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)d\theta$$

$$\underline{\int_0^\theta G\frac{mM_M}{r^3}3\cos^2(\theta)RdR}+\int_0^\theta \underline{G\frac{mM_M}{r^3}3R^2\cos(\theta)\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)d\theta}$$

$G\frac{mM_M}{r^3}R\delta$ 量级　　　$G\frac{mM_M}{r^3}R^2$ 量级

$R>>\delta$ $\Rightarrow$ 忽略第一项和第二项第一部分，只保留第二项的第二部分。 $\Rightarrow$ $G\frac{3mM_M}{2r^3}R^2\sin^2(\theta)$

第三项 $$\int_0^{\theta} -G\frac{mM_E}{R^3}\vec{R}\cdot(\hat{R}dR + Rd\theta\hat{\theta})$$

$$\int_{R(0)}^{R(\theta)} -G\frac{mM_E}{R^2}dR = \int_{R(0)}^{R(\theta)} -G\frac{mM_E}{R^2}dR$$

$$= G\frac{mM_E}{R}\Big|_{R(0)}^{R(\theta)} \qquad \delta = R_{\theta=0} - R_{\theta}$$

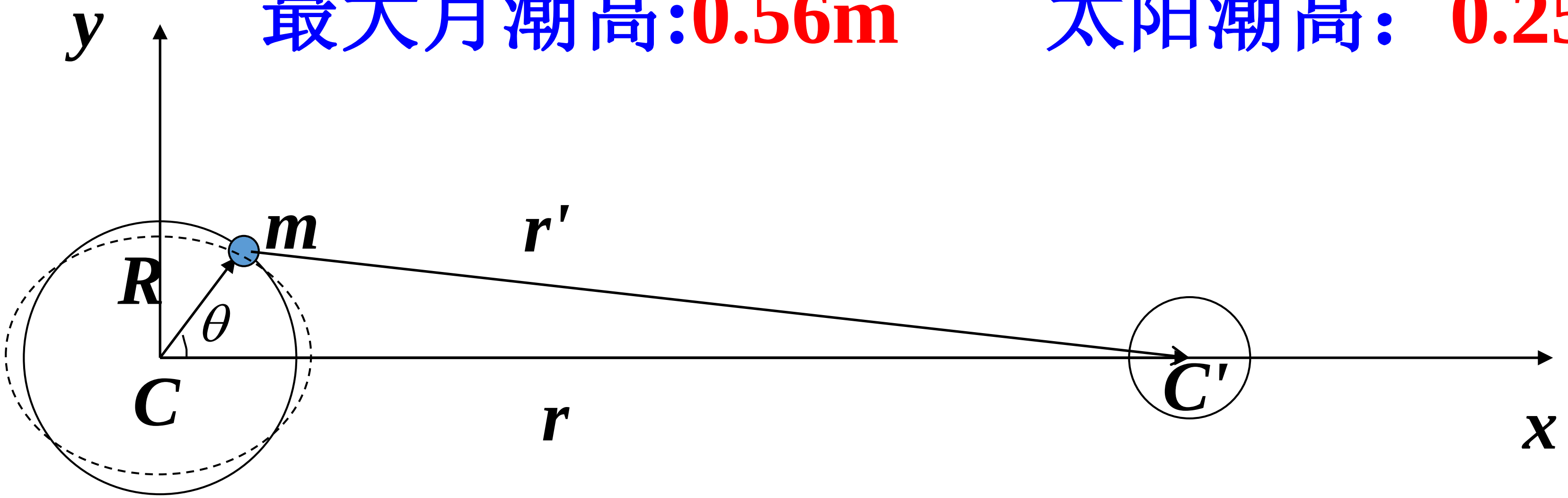
$$\approx G\frac{mM_E}{R^2}\delta$$

$$\Delta U = 0 = -\int_{\theta=0}^{\theta} (\vec{f}_{潮汐} + \vec{f}_E) \cdot d\vec{R}$$

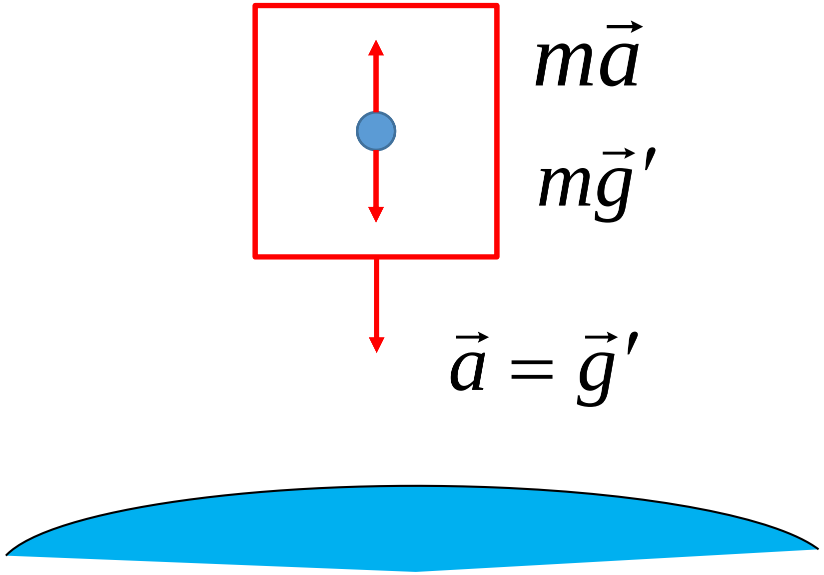
设潮高 $\delta = R_{\theta=0} - R_{\theta}$

$$\frac{3GM_M}{2r^3} R^2 \sin^2\theta = \delta \frac{GM_E}{R^2} \Rightarrow \delta = \frac{3M_M R^4}{2M_E r^3}$$

最大月潮高:**0.56m**　　太阳潮高：**0.25m**

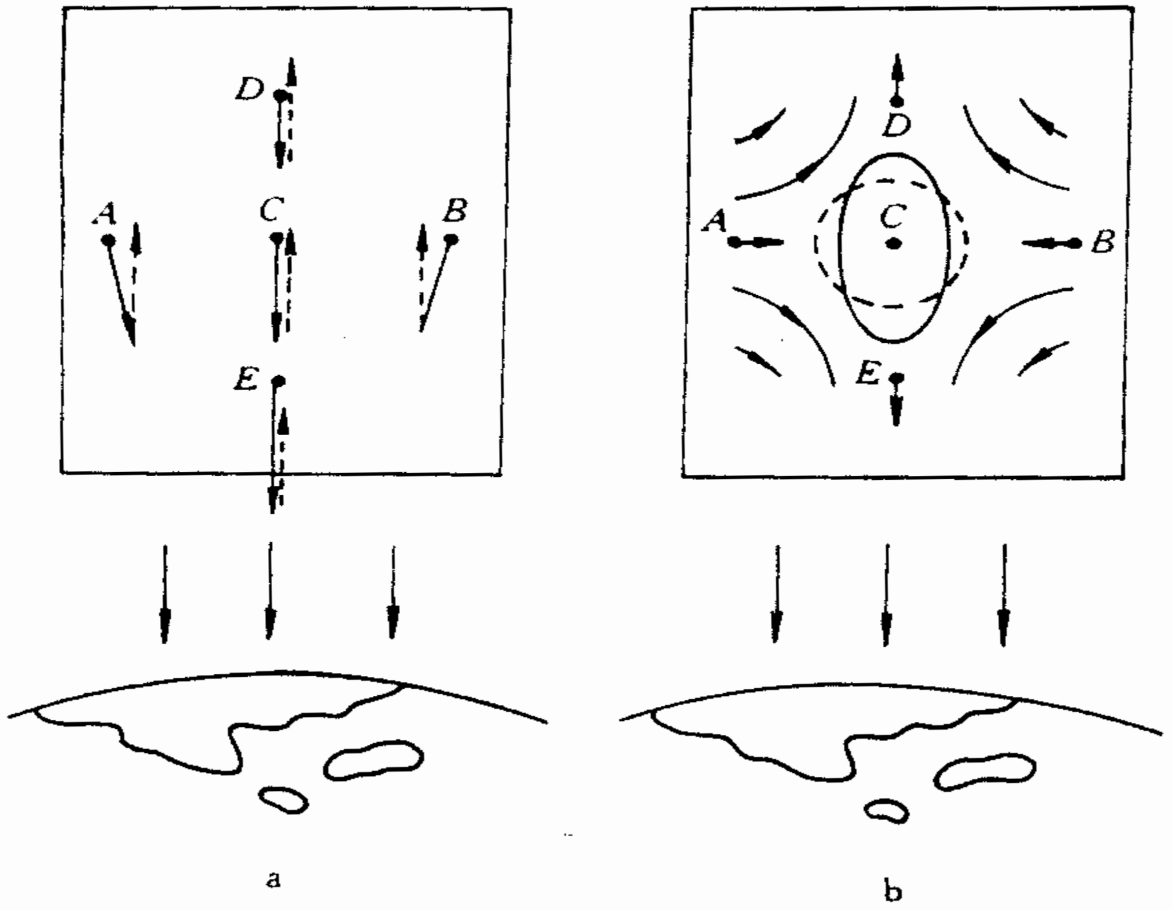


空间站内失重现象



思考：什么时候宇航员会感受到有加速度？

引潮力



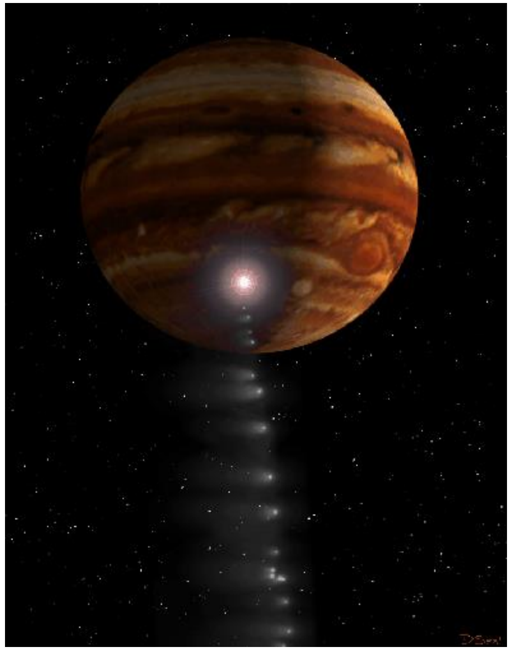
自由降落升降机中的引潮力

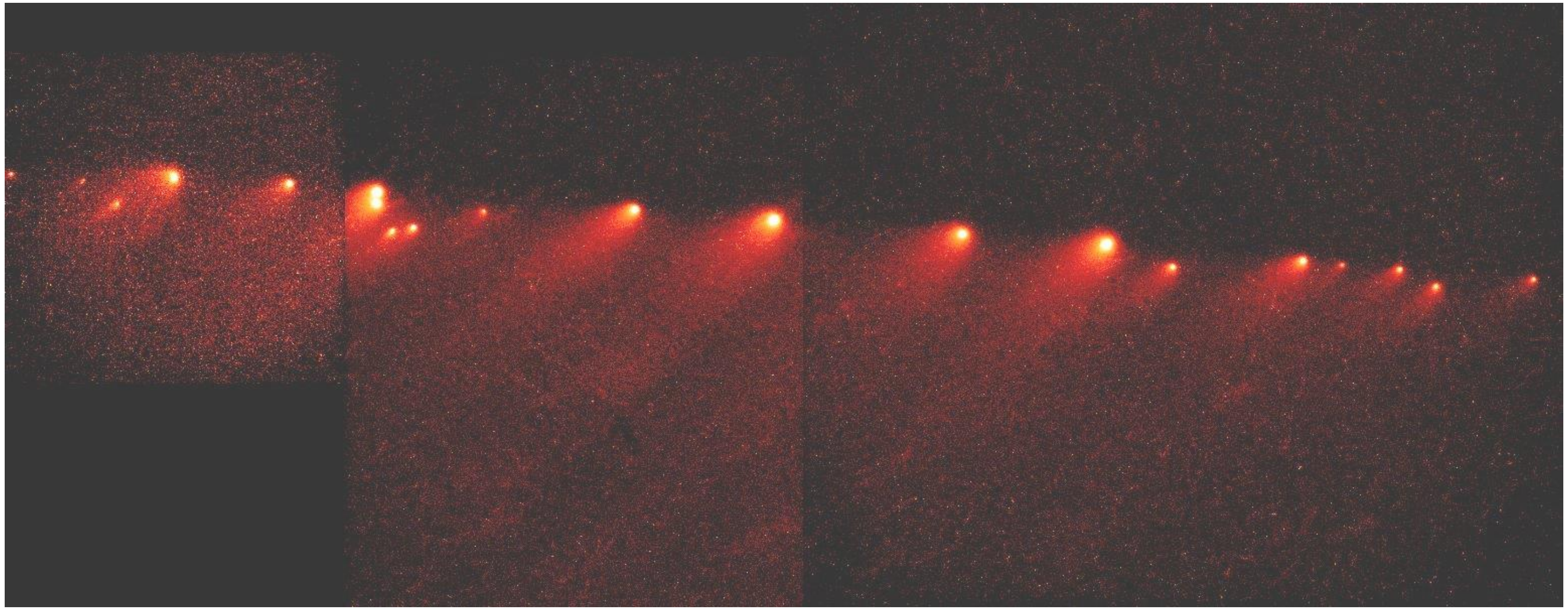
假设空间站较大，各处引力不同

不均匀的引力和惯性力合力形成的引潮力

月球撞击地球前，引潮力将撕碎它

苏梅克–列维9号彗星撞击木星

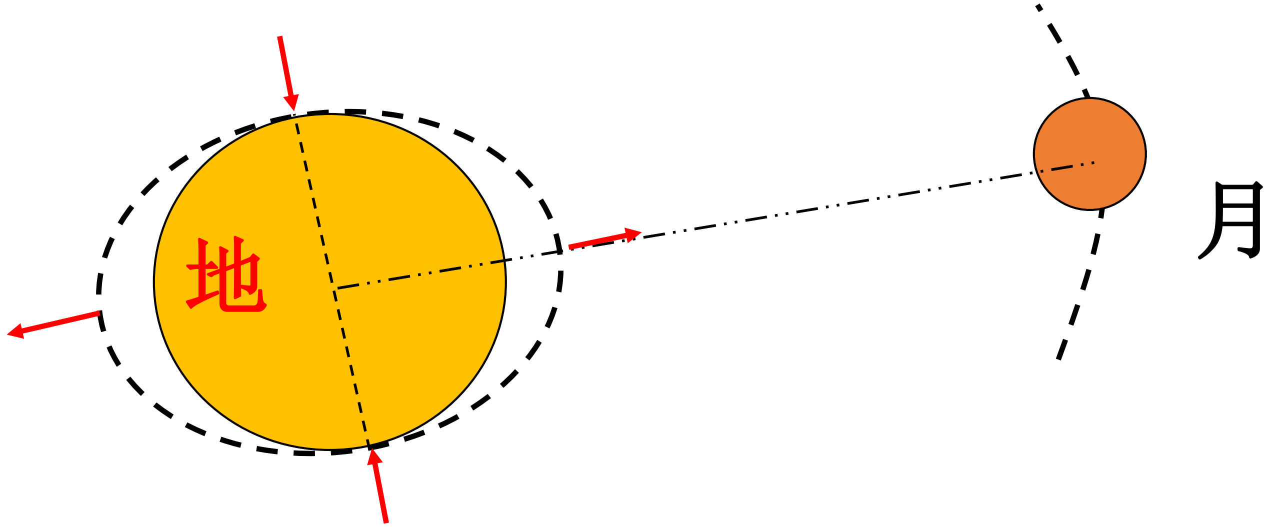




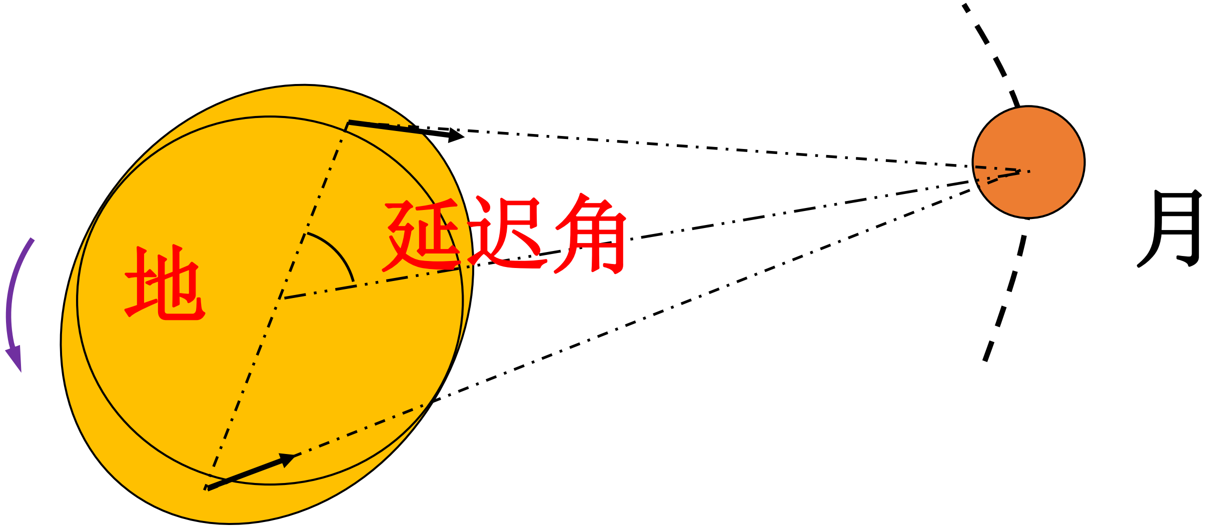
1994年

撕裂成约21块

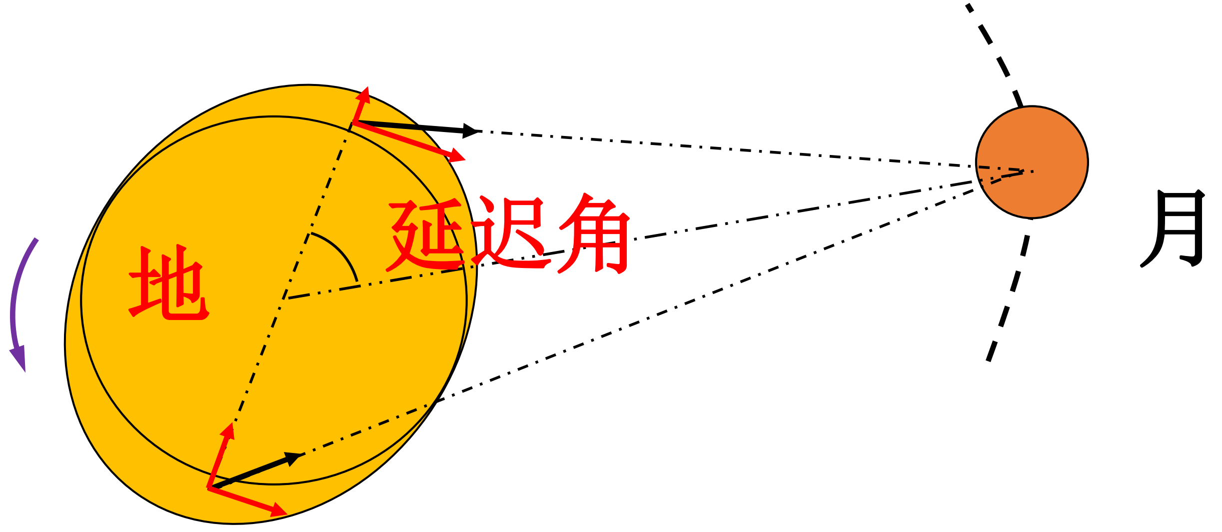
固体潮：引潮力对固体作用使之形变



应变稍有延迟



固体潮



英国的开尔文（**Kelvin**）**(1876)**
达尔文（**G.H.Darwin**）**(1883)**

月球在地球上引起的固体潮形成阻止地球自转的反力矩，减慢地球自转速度，3亿年前地球400天/每年，现只有365.25天/每年.

地对月：月球自转和公转周期相同

地震和潮汐的关系：
引潮力常触发地震，

常发生于夜间
常发生于阴历初一，
十五（大潮期）左右

唐山地震：**1976**农七月初二，

神户地震：**1995**农十二月十七

印度地震：**1993**农八月十五

本章小结

牛顿运动定律：

第一定律　惯性和力的概念，惯性系的定义。

爱因斯坦的等效原理，自由下落的电梯是局域的惯性系

第二定律　$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$　$\vec{p} = m\vec{v}$

当m为常量时　$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

注意区分引力质量和惯性质量

第三定律　作用力和反作用力大小相等，方向相反，注意应用的范围和局限性。

力的叠加原理

常见力

重力

弹性力　接触面之间的压力和绳子的张力。

弹簧的弹力　$f=-kx$　k 为劲度系数

摩擦力　滑动摩擦力　$f_k=\mu_k N$

静摩擦力　$f_s \le \mu_s N$

流体阻力　$f_d=kv$　或　$f_d=\frac{1}{2}C\rho Av^2$

表面张力　$F=\gamma l$

基本自然力：引力要求，其它力了解

惯性力（本章的重点）

在平动加速参考系中 $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$ 注意负号，表示的意义

在转动参考系

惯性离心力 $\vec{F}_0 = m\omega^2\vec{r}$ 注意力的方向

科里奥利力 $\vec{F}_c = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$ 注意力的方向，一定垂直于角速度，垂直于运动方向

旋转系惯性力有两项

$$\vec{F}_i = m\omega^2\vec{r} + 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$$

如果物体在旋转系中静止，只需要考虑惯性离心力。
如果物体在旋转系中运动，需要考虑两项。

潮汐力 要求物理的图像，力在各处的方向，潮汐力的本质惯性力和不均匀的引力引起的。