

8.6 相对论速度变换与电磁波的多普勒效应

8.6.1 速度变换

设同一质点在 S 和 S' 中速度分别为 \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{v}' 。

速度定义: $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$

由洛伦兹
坐标变换



$$\frac{dx'}{dt} = \frac{v_x - u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

和

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{u}{c^2} v_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut), \\ t' &= \gamma(t - \frac{u}{c^2} x) \end{aligned}$$

上面两式之比

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

由洛伦兹变换

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'} \quad \text{和} \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{u}{c^2} v_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

由上面两式得

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

同样得

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

洛伦兹速度变换式

正变换

$$\begin{aligned}v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \\v'_y &= \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\v'_z &= \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\end{aligned}$$

逆变换

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \\v_y &= \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\v_z &= \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\end{aligned}$$

一维运动情况:

令 $v_y = v_z = 0$, $v_x = v$ (代数量)

则 $v'_y = v'_z = 0$, $v'_x = v'$ (代数量)

有

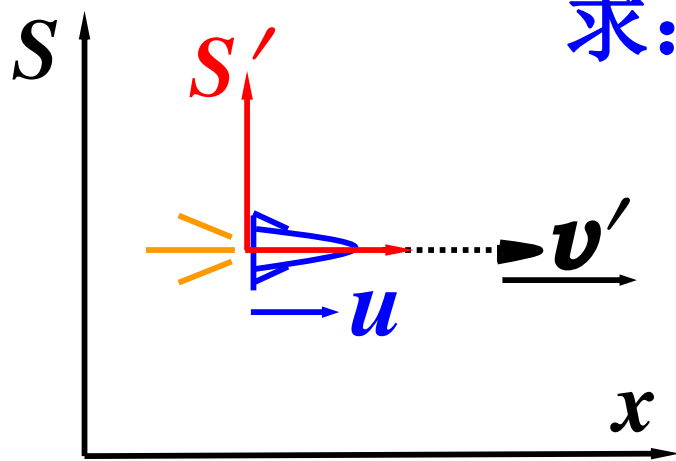
$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}$$

例8.4 已知：火箭对地的速度为 $u = 0.6c$ ，
炮弹相对火箭速度 $v' = 0.9c$ 。

求：地面上看炮弹速度 $v = ?$

解：选火箭参考系为 S' 系
地面参考系为 S 系



由速度变换，在 S 系中有

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}} = \frac{0.9c + 0.6c}{1 + 0.6 \times 0.9} = \frac{1.5c}{1.54} \approx 0.97c$$

若按伽里略变换计算，则 $v = 1.5c$ 。

例8.5 设在 S' 系中，光沿 y 轴运动， S' 相对 S 以
 $u = 0.8c$ 运动，求 S 系中光速。

解： $\because v'_x = 0, v'_y = c$

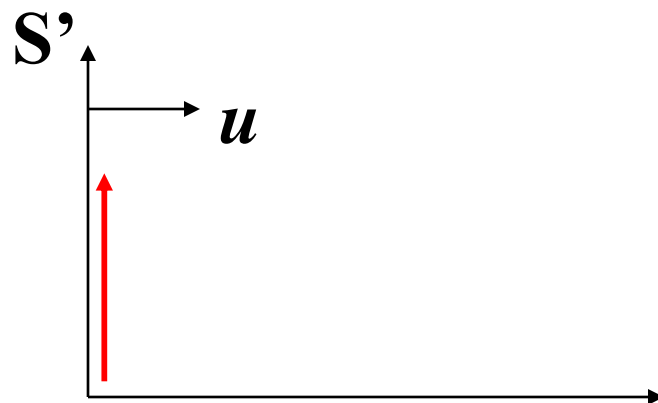
由逆变换

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} = u$$

$$\begin{aligned} \therefore v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= c \end{aligned}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

**光速率不变！
仅改变方向**



由洛仑兹速度变换，将速度对时间求导，
可进一步得到加速度变换。

$$\boldsymbol{v}'_x = \frac{\boldsymbol{v}_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} \boldsymbol{v}_x}$$

$$\boldsymbol{v}'_y = \frac{\boldsymbol{v}_y}{1 - \frac{u}{c^2} \boldsymbol{v}_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$\boldsymbol{v}'_z = \frac{\boldsymbol{v}_z}{1 - \frac{u}{c^2} \boldsymbol{v}_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_x = \frac{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}{(1 - u\mathbf{v}_x/c^2)^3} a_x \\ a'_y = \frac{(1 - u^2/c^2)}{(1 - u\mathbf{v}_x/c^2)^3} \left[a_y + \frac{u}{c^2} (a_x \mathbf{v}_y - a_y \mathbf{v}_x) \right] \\ a'_z = \frac{(1 - u^2/c^2)}{(1 - u\mathbf{v}_x/c^2)^3} \left[a_z + \frac{u}{c^2} (a_x \mathbf{v}_z - a_z \mathbf{v}_x) \right] \end{array} \right.$$

这里我们看到，非但 $\vec{a}' \neq \vec{a}$ ，而且 \vec{a}' 除了与 \vec{a} 有关外，还与 \vec{v} 有关，这在牛顿力学中是没有的。
 牛顿第二定律对洛仑兹变换不能保持不变。

8.6.2 电磁波的多普勒效应

上一章讨论过机械波的多普勒效应. 机械波只有在弹性介质中才能传播, 传播的速度是相对于介质的速度. 因而在讨论多普勒效应时, 应区分是波源相对于介质运动还是接收器相对于介质运动. 电磁波与机械波不同, 它在真空中就能传播, 而且传播速度对于任何惯性系、在任何方向上都相同. 因此, 对于电磁波而言, 不存在区分波源相对于介质运动还是接收器相对于介质运动的问题, 只与波源和接收器的相对运动有关. 所以无论实际上是波源运动; 还是接收器运动, 考虑多普勒效应时都只考虑波源相对于接收器的运动.

一光源在静止坐标系中以周期 $T_0 = \frac{1}{f_0}$ 而发光, 今光源以速度 v 向着观察者运动, 如图所示, 由于时间膨胀, 在观察者静止的坐标系中, 周期为 $T = \gamma T_0$ 。 其中: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 。

因光速为一普适恒量, 故光以速度 c 到达观察者。

正是由于这个原因, 在光的多普勒效应中, 只有相对速度起作用。



观察者看到的光的频率为 $f = \frac{c}{\lambda}$, 其中 λ 是在观察者坐标系中光的波长, 因为光源是向着观察者运动的, 所以 $\lambda = cT - vT = (c - v)T$

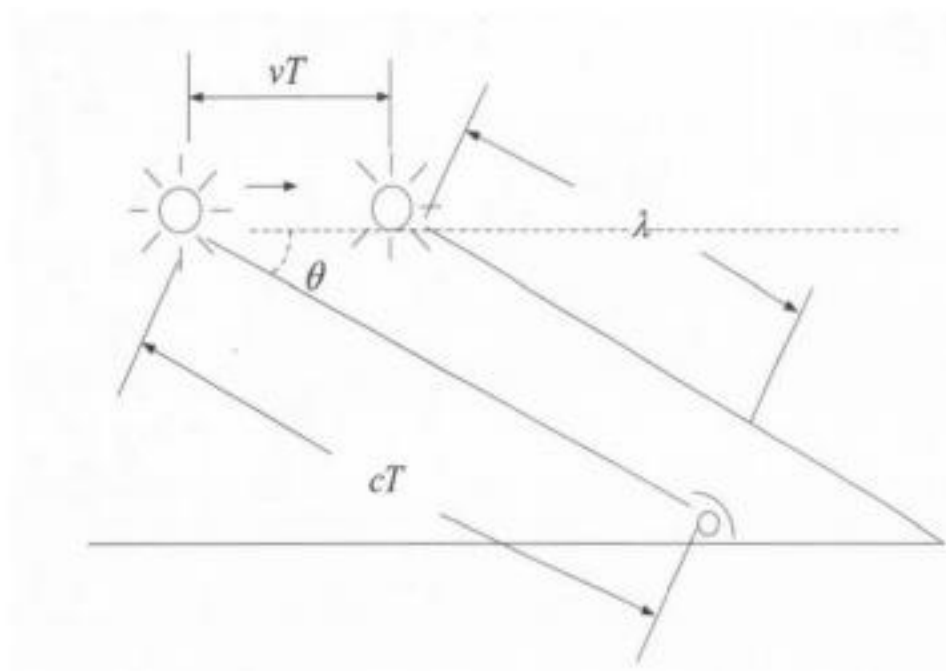
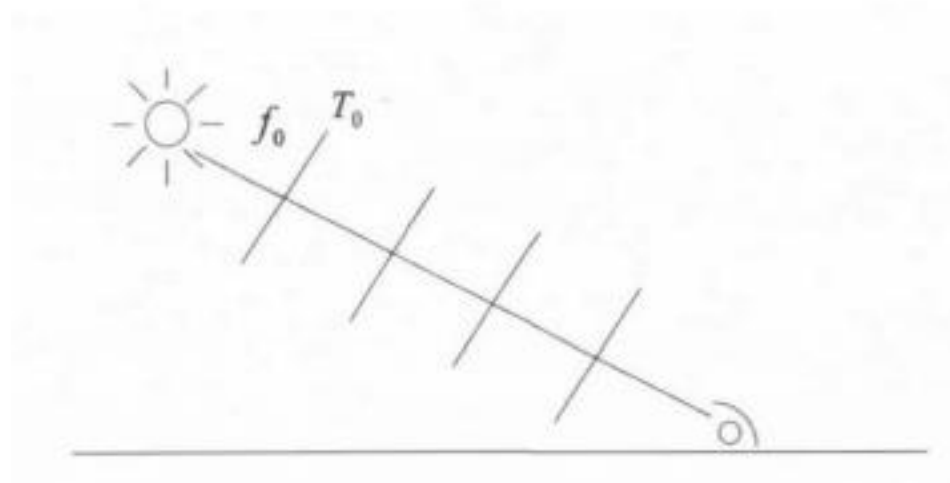
$$\text{故 } f = \frac{c}{(c - v)T} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \cdot \frac{1}{\gamma T_0}, \quad \text{化简, 得}$$

其中: f 是在观察者静止的坐标系中的频率,

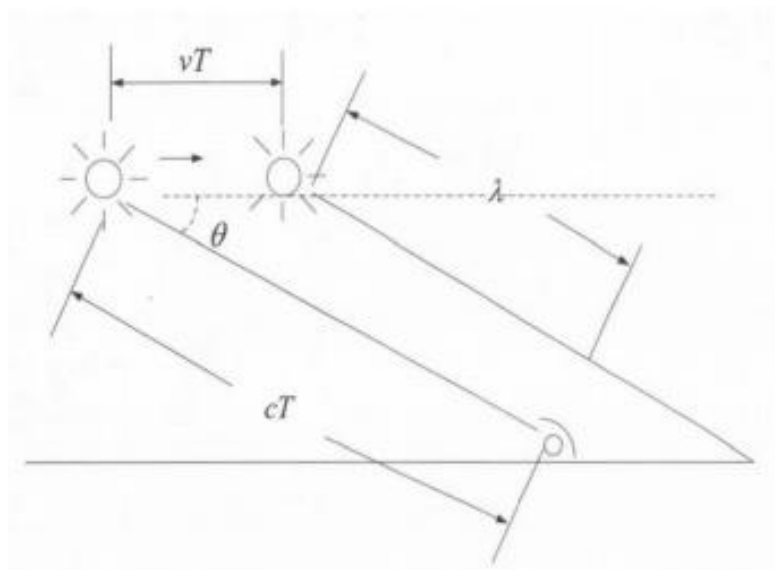
而 v 是光源和观察者的相对速度。

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}。 \quad (1)$$

观察者不在运动方向上的多普勒效应



$$\lambda = cT - vT \cos \theta = (c - v \cos \theta) T , \quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c - v \cos \theta) \gamma T_0} = f_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} .$$



$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c - v \cos \theta) \gamma T_0} = f_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \quad (2)$$

其中： θ 是在观察者静止的坐标系中测得的角度。

若观察者在运动方向上， 结果与式(1) 相同；

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， f 和 f_0 相差一个因子 $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ，

这个“横向”多普勒效应是由于时间膨胀所引起的。

对于大多数实际情况 $\beta \ll 1$, 所以有 $f \approx f_0(1 - \beta^2 / 2)$

$$\Delta f = f_0 - f = \frac{1}{2} f_0 \beta^2$$

在 f_0 不是很大的情况下, 横向多普勒效应是很难测出来的. 1941 年, 艾夫思和史迪威以相对实验室的速度为 $\beta = 0.005$ 的氢原子为光源 ($\lambda \approx 576 \text{ nm}$), 测出了横向多普勒效应. 按他们的实验条件

$$\Delta f = f_0 \times 12.5 \times 10^{-6} \text{ Hz}$$

$$f_0 \approx 5.21 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

当时还不能测量光频差, 只能测量波长差. 测量结果与计算值很好地符合. 现代的光频测量技术, 已能测量小于 kHz 级的光频差, 因此, 横向多普勒效应的测量已不是十分困难的事.

8.7 相对论质量 (relativistic mass)

相对论动力学

任何物理体系的动力学方程都是基本假设，只能通过实验事实和更普遍的假设，例如协变性等来建立。

如，质点动力学 $\vec{F} = m\vec{a}$, $m = \text{const.}$,

但与相对论矛盾：

1. 导致超光速；
2. 对洛仑兹变换, 不满足相对性原理

高速运动时动力学概念如何发展？

把经典力学改变成既不与相对论矛盾，又不与已经观察到的以及已经由经典力学解释出来的大量资料相矛盾，就很简便了。旧力学只能应用于小的速度，而成为新力学的特殊情况。

— 爱因斯坦，英费尔德. 《物理学的进化》. 周肇威译. 上海：上海科学技术出版社，1962，124

建立质点相对论动力学方程，得到相对论质量的概念，导出质能关系，能量—动量关系以及三维力的相对论变换等。

一、对方程的基本要求

1、速度 $v \ll c$ 时返回牛顿方程

力 = 动量对时间的变化率

2、满足爱因斯坦相对性原理

要求方程是洛伦兹变换协变式，在不同惯性系中方程形式相同。

二、 物理学家坚信基本的守恒定律，这是定义物理量的依据。

为使动量守恒定律成立，保留关系：

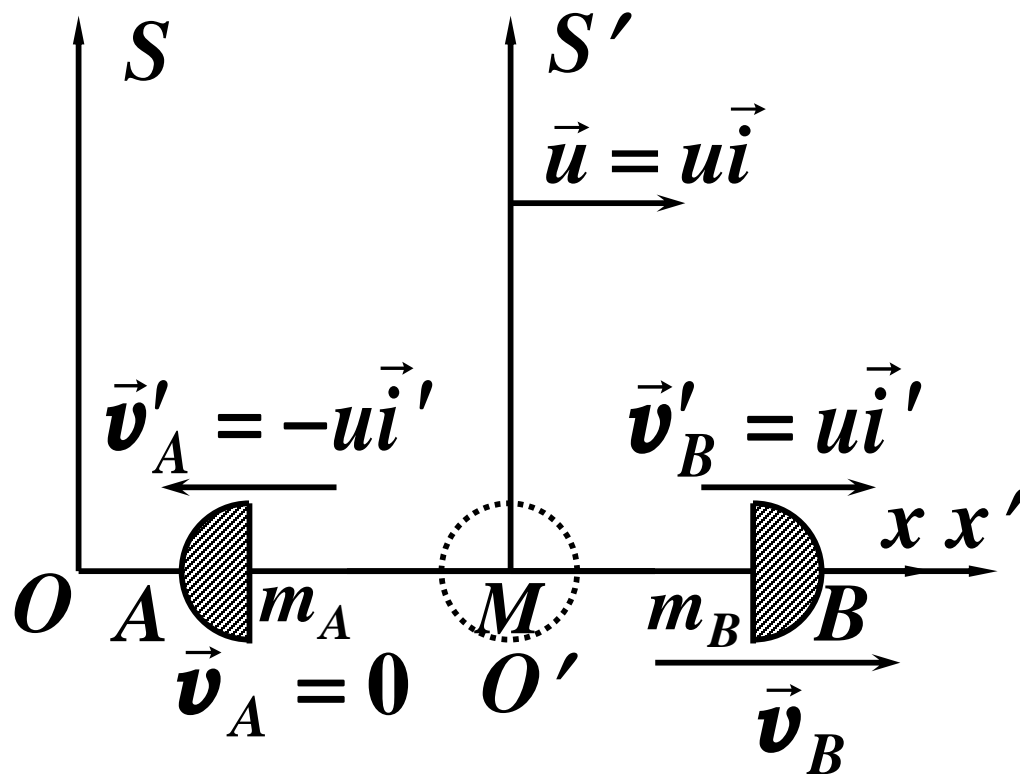
$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

同时还保留动量定义：

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

为使动量守恒对洛仑兹变换保持不变，必须认为质量与速度有关，即 $m = m(v)$ 。

下面由动量守恒导出 m 与 v 的关系：



设粒子在 S' 中静止，
后分裂为相同的两块
 A 、 B ，它们分别沿
 $+x'$ 和 $-x'$ 方向运动。

S 系中： $\vec{v}_A = 0$ ，

$$\vec{v}_B = \frac{\vec{v}'_B + u}{1 + \frac{u \vec{v}'_B}{c^2}} = \frac{u + u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \quad (1)$$

动量守恒: $Mu = m_A \cdot 0 + m_B \mathbf{v}_B$ (2)

质量守恒: $M = m_A + m_B$ (3)

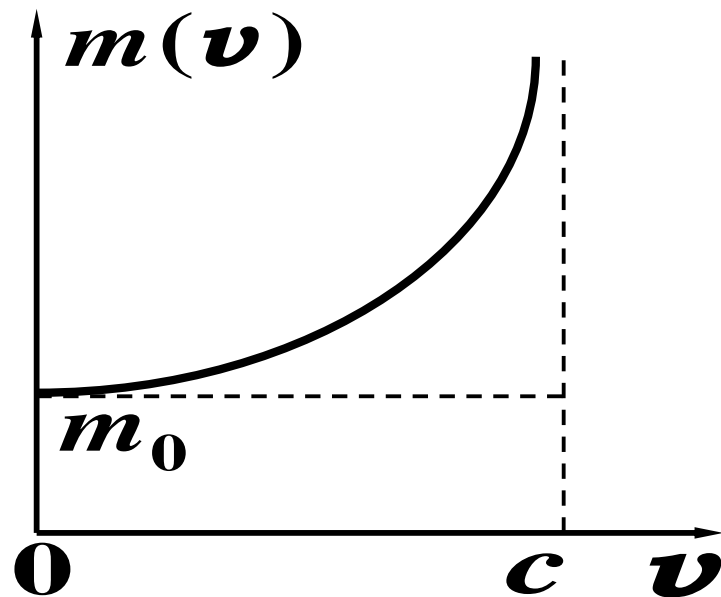
(1)、(2)、(3)消去 u 得: $m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_B^2}{c^2}}}$

令 $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}$, $m_A = m_0$ 称 静止质量 (rest mass)

$m_B = m$ 称 相对论质量 (relativistic mass)

则有:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \quad (4)$$

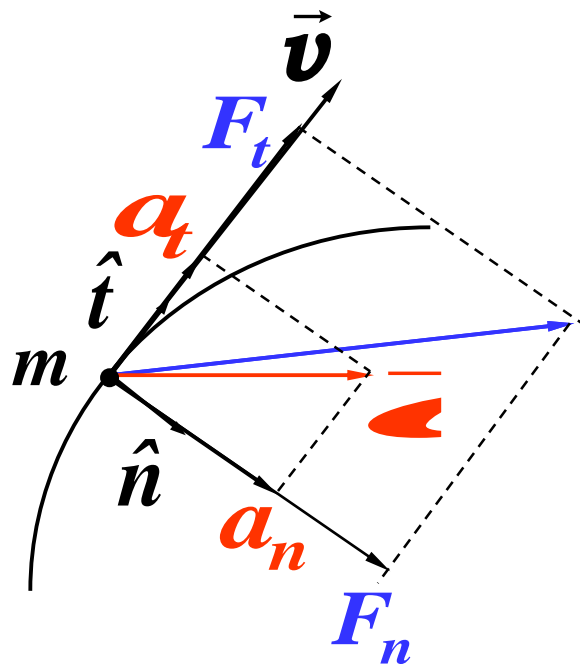


$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

电子能量(MeV)	v/c	m/m_0
5	0.995	9.8
25	0.9998	49
2.8×10^3	0.999999998	5490

$v \ll c$ 时, $m = m_0 \rightarrow$ 牛顿力学情形。

8.8 力和加速度的关系



$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = m_{(v)}\vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \\ &= m(a_n \hat{n} + a_t \hat{t}) + \frac{dm}{dt} v \hat{t}\end{aligned}$$

$$F_n = ma_n = \frac{m_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} a_n$$

$$\begin{aligned}F_t &= ma_t + v \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \\ &= \frac{m_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{m_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} a_t\end{aligned}$$

$$F_n = ma_n = \frac{m_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} a_n$$

和

$$F_t = \frac{m_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} a_t$$

表明：

(1) \vec{a} 并不平行于 \vec{F} 。

(2) 速度越大，加速越困难。

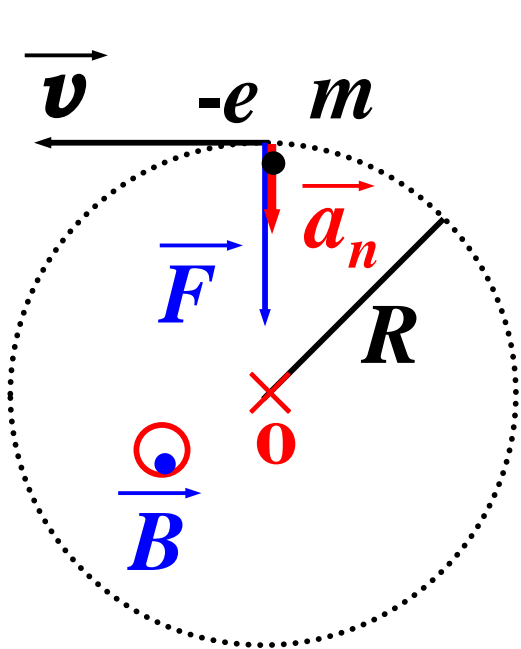
(3) 纵向（切向）比横向（法向）加速困难。

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= m_{(v)} \vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_{(v)}} - \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{F})}{m_{(v)} c^2}$$

当 $\boldsymbol{v} \ll c$ 时, $\vec{F} = m_0 \vec{a} \rightarrow$ 牛顿第二定律

当 $\vec{v} \perp \vec{F}$ 时, $\vec{F} = m_{(v)} \vec{a} = \gamma m_0 \vec{a}$

感应加速器中电子的运动就是这种情形:



$$F = Bev = m_{(v)} \frac{v^2}{R} \longrightarrow$$

$$R = \frac{m_{(v)} v}{eB} = \gamma \frac{m_0 v}{eB}$$

1909年布歇恩 (Bucherer) 实验, 利用上述关系验证了相对论性质质量式的正确性。

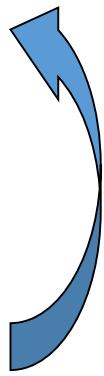
8.9 相对论动能

(relativistic kinetic energy)

相对论中仍然保留动能定理。对质点：

$$\begin{aligned} \mathrm{d} E_k &= \vec{F} \cdot \mathrm{d} \vec{r} = \frac{\mathrm{d}(m \vec{v})}{\mathrm{d} t} \cdot \mathrm{d} \vec{r} \\ &= \mathrm{d}(m \vec{v}) \cdot \vec{v} = (m \mathrm{d} \vec{v} + \vec{v} \mathrm{d} m) \cdot \vec{v} \\ &= m \vec{v} \cdot \mathrm{d} \vec{v} + v^2 \mathrm{d} m = m v \mathrm{d} v + v^2 \mathrm{d} m \end{aligned}$$

由 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, 有 $\mathrm{d} m = \frac{m v \mathrm{d} v}{c^2 - v^2} \longrightarrow$

$$m v \mathrm{d} v = c^2 \mathrm{d} m - v^2 \mathrm{d} m$$


$$\therefore \quad \mathrm{d} E_k = c^2 \mathrm{d} m$$

$$\begin{aligned} E_k &= \int_{m_0}^m c^2 \mathrm{d} m = mc^2 - m_0 c^2 \\ &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 / c^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{v} \ll c \text{ 时: } E_k \ll m_0 c^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 / c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}, \rightarrow E_k \approx \frac{1}{2} m_0 \boldsymbol{v}^2$$

注意: $\frac{1}{2} m_{(\boldsymbol{v})} \boldsymbol{v}^2$ 并不是相对论的动能,
这与相对论动量 $\vec{p} = m_{(\boldsymbol{v})} \vec{\boldsymbol{v}}$ 不同。

8.10 相对论能量 (relativistic energy)

一. 质能关系 (equivalence of mass and energy)

对 $E_k = mc^2 - m_0c^2$

爱因斯坦认为:

$E_0 = m_0c^2$ 为 静止能量 (rest energy) 。

$mc^2 = E_k + m_0c^2$ 为 总能 (total energy) 。

记作:

$$E = mc^2$$

—— 质能关系
(质量是能量的度量)

相对论统一了质量和能量守恒。

这里的质量是相对论质量, 而非静止质量。

**相对性原理和动量守恒定律导致了
质量与任何能量等效的基本原理。爱因
斯坦得到的这个原理我们认为是狭义相
对论最重要的结果.**

——泡利, 《相对论》, 1921

孤立系统:

$$E = E_k + m_0 c^2$$

$$m_{01} c^2 + E_{k1} = m_{02} c^2 + E_{k2}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = (m_{01} - m_{02}) c^2$$

$m_{01} - m_{02}$ 称（静）质量亏损（**mass defect**），

当过程前后系统可看成由一些独立质点组成时，

质量亏损

$$\Delta m_0 = \sum m_{0i\text{初}} - \sum m_{0i\text{末}}$$

[例] 热核反应: ${}_1^2\text{H} + {}_1^3\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_0^1\text{n}$

$$\Delta m_0 = (m_{\text{D}} + m_{\text{T}}) - (m_{\text{He}} + m_{\text{n}}) = 0.0311 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{释放能量: } \Delta E = \Delta m_0 c^2 = 2.799 \times 10^{-12} \text{ J}$$

1kg核燃料释放能量约为 $3.35 \times 10^{14} \text{ J}$ ， 这相当于1kg优质煤燃烧热（ $2.93 \times 10^7 \text{ J}$ ）的 1千万倍！

释能效率（释放的能量占燃料的相对论静能之比）

$$\frac{\Delta E_k}{(m_D + m_T)c^2} = \dots = 0.37\%$$

可见，静能还是要比释放的能量大得多。

太阳每时每刻进行着热核聚变反应，

释放的核能以热辐射的形式放出。

由地面接收到的太阳辐射为 $1.7 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ ，
可得整个太阳的辐射功率为 $4.9 \times 10^{26} \text{ W}$ ，

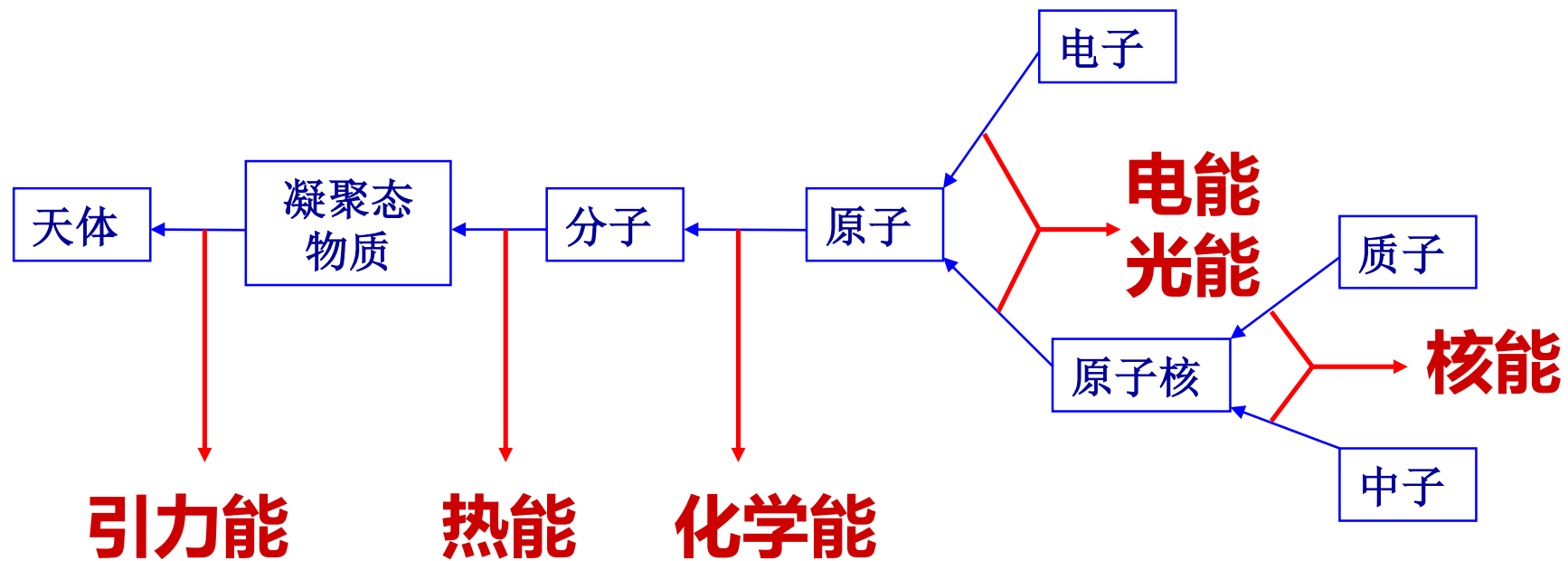
并且可以计算出太阳质量的年损失量为

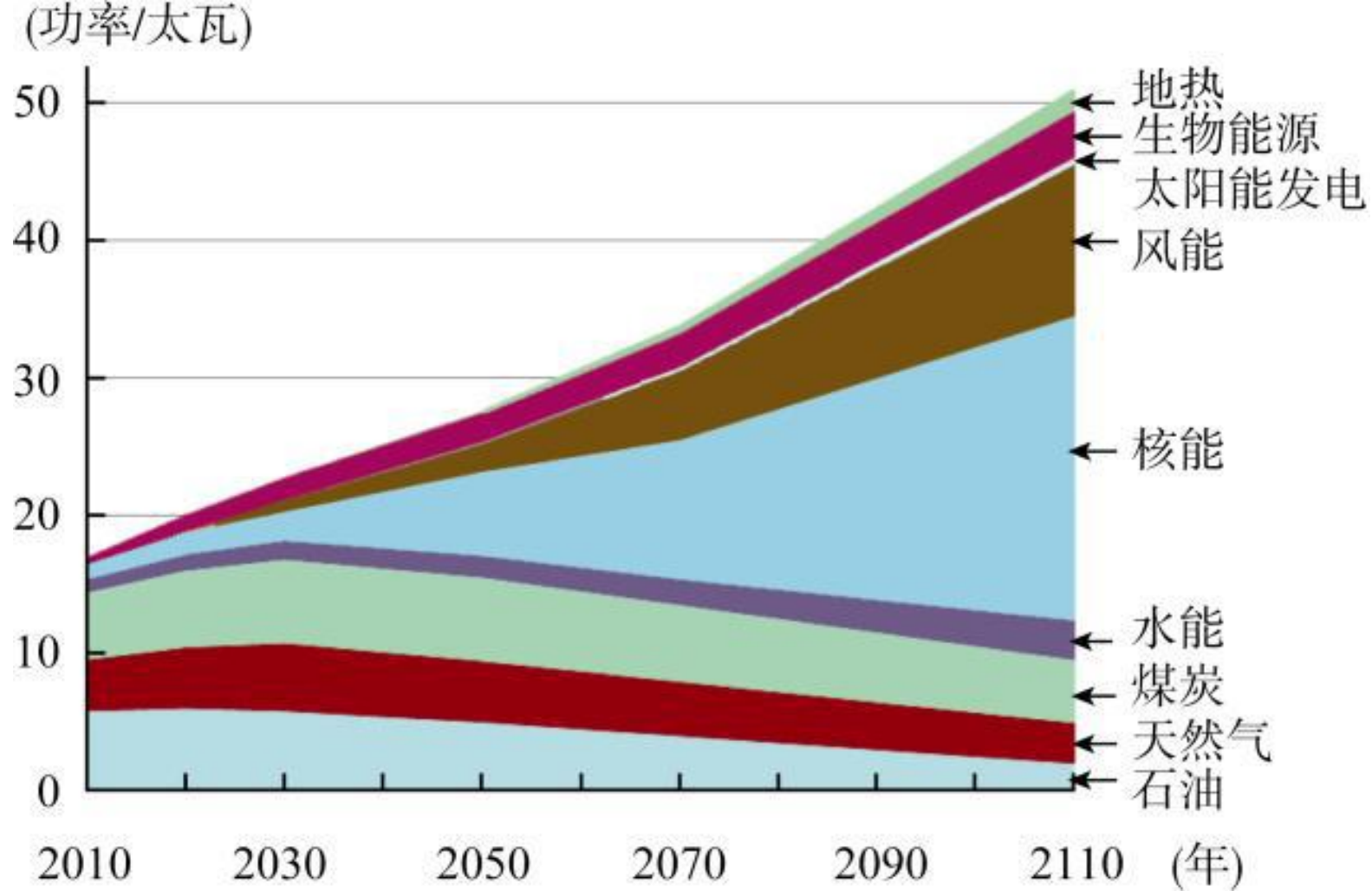
$$\Delta m = 1.7 \times 10^{17} \text{ kg}.$$

物质结构层次

物质结构变化	放出的能量形式	E_B/E_0
水分子凝聚成水	热能	2×10^{-11}
氢原子结合成分子 H_2	化学能	5×10^{-9}
电子与质子结合成氢原子	电能、光能	3×10^{-5}
质子与中子结合成氦核	核能	2×10^{-3}

物质结构系列





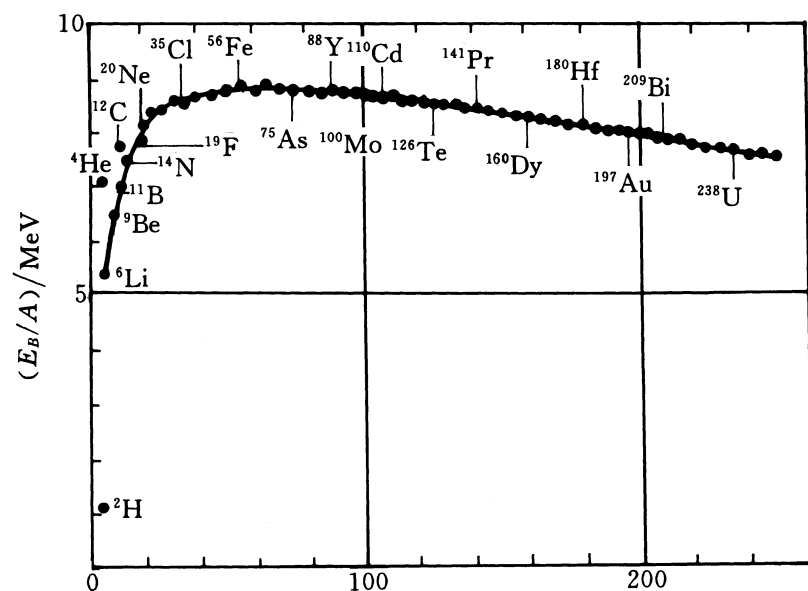
下一百年世界各种能源消耗变化图

横坐标是年份，纵坐标是功率，单位是太瓦。从2010年到2110年，世界总能源消耗增加两倍到51太瓦左右。传统化石能源将下降，但仍占据相当重要地位，主要新增能源来自核能和风能。

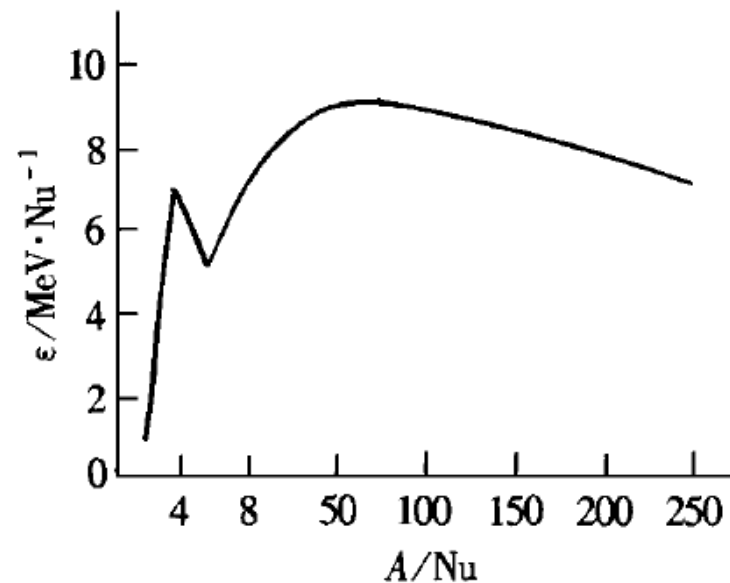
若原子核 ^AX 的结合能为 E_B ，则

$$\varepsilon = E_B / A$$

为每个核子的平均结合能，称为**比结合能**。由自然界中各种原子核的 ε - A 曲线可见，轻核和较重原子核的比结合能都比较小， ^{56}Fe 附近中等核的比结合能比较大。所以，当重核分裂或轻核聚合成中等核时，都会释放出核能来。前者称为**核裂变**，后者称为**核聚变**。

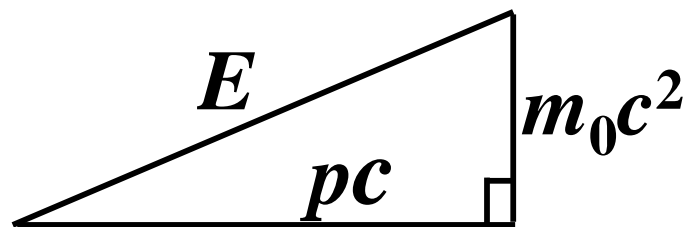


质量数 A



二. 能量和动量的关系:

$$\left. \begin{aligned} E &= mc^2 \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p &= mv \end{aligned} \right\} \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (1)$$



若粒子动能为 E_k ，则

$$E = E_k + m_0 c^2 \quad (2)$$

(2)代入(1)得: $E_k^2 + 2E_k \cdot m_0 c^2 = p^2 c^2$

前面已指出，当 $v \ll c$ 时， $E_k \ll m_0 c^2$ ，

$$\therefore 2E_k m_0 c^2 \approx p^2 c^2 \longrightarrow$$

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m_0} \quad (\text{牛顿力学的动能、动量关系})$$

对光子: $\because \boldsymbol{v} = c, \therefore m_0 = 0$

光子动能: $E_k = E = mc^2 = (mc)c = pc$

(按牛顿力学应为 $E = \frac{1}{2} pc$)

由爱因斯坦光子理论, $E = h\nu$

$$\therefore p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad m = \frac{h\nu}{c^2} \quad (p = mc)$$

这些关系将在量子物理中用到。

高能粒子: $E_k \gg m_0 c^2 \rightarrow \rightarrow E \approx E_k \approx cp$

例8.6 两全同粒子，静止质量为 m_0 ，以等速率 v 对撞，碰后复合，
求：复合粒子的速度和质量。

解： 动量守恒 $0 = M V \rightarrow V = 0$
 $\longrightarrow M = M_0$

能量守恒 $2mc^2 = Mc^2 \rightarrow M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

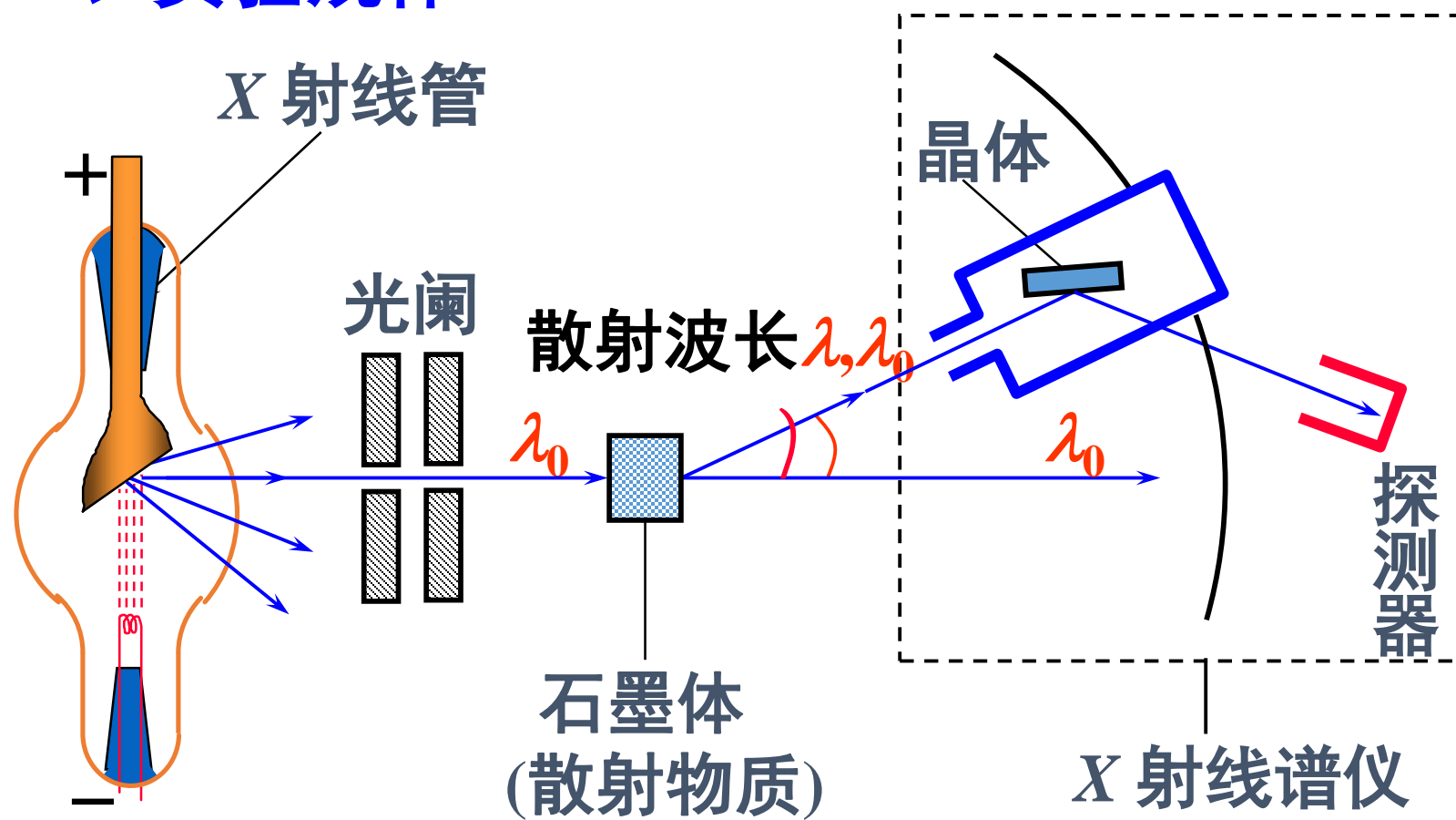
动能损失 \longrightarrow 静止质量（静能）

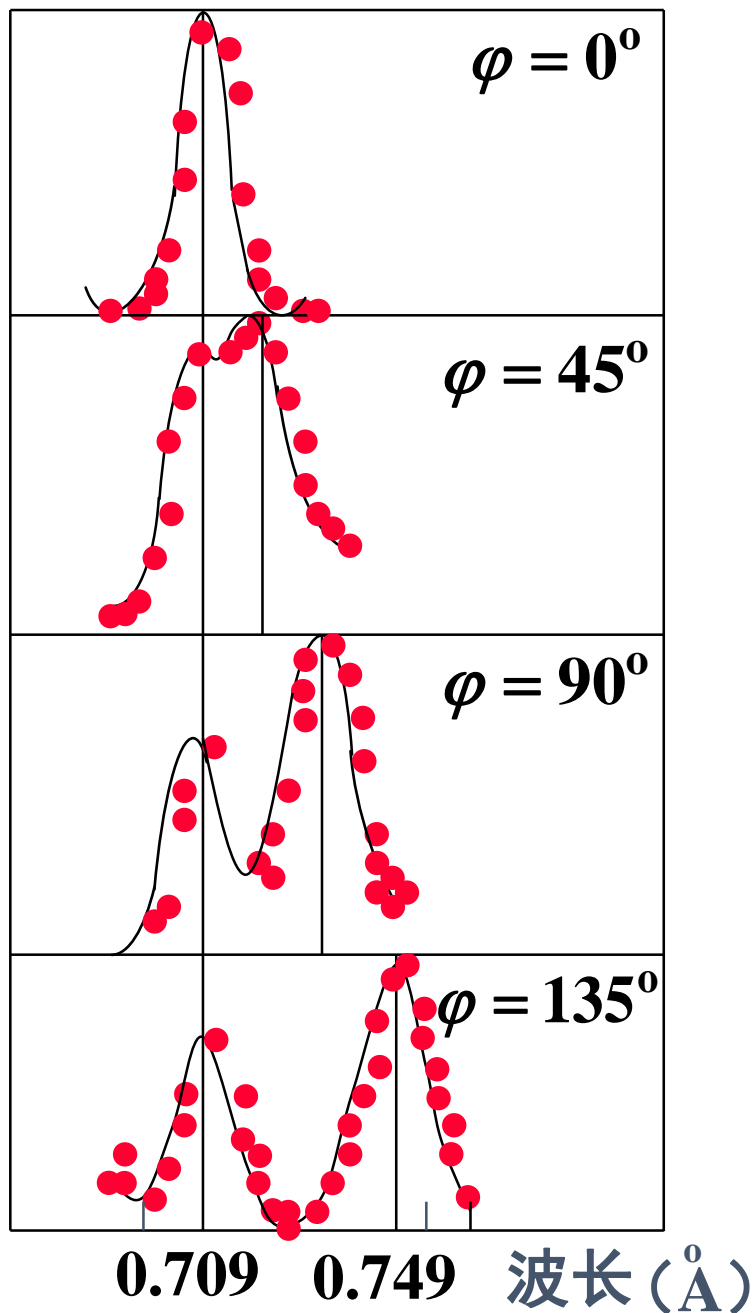
例8.7 康普顿散射

(Compton effect)

1922–23年康普顿研究了X射线在石墨上的散射

一、实验规律





散射出现了 $\lambda \neq \lambda_0$ 的现象，
称为康普顿散射。

散射曲线的三个特点：

- 1、除原波长 λ_0 外，出现了移向长波方面的新的散射波长 λ 。
- 2、新波长 λ 随散射角 φ 的增大而增大。
- 3、当散射角增大时，原波长的谱线强度降低，而新波长的谱线强度升高。

实验表明：新散射波长 $\lambda >$ 入射波长 λ_0 ，波长的偏移 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 只与散射角 φ 有关，和散射物质无关。实验规律是：

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos \varphi) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\lambda_c = 0.0241\text{\AA} = 2.41 \times 10^{-3} \text{nm} \quad (\text{实验值})$$

λ_c 称为电子的康普顿波长

只有当入射波长 λ_0 与 λ_c 可比拟时，康普顿效应才显著，因此要用X射线才能观察到。

二、康普顿效应的理论解释

经典电磁理论难解释为什么有 $\lambda \neq \lambda_0$ 的散射，

康普顿用光子理论做了成功的解释：

- X射线光子与“静止”的“自由电子”弹性碰撞

（波长 1\AA 的X射线，其光子能量 $\varepsilon \sim 10^4 \text{ eV}$ ，

外层电子束缚能 $\sim \text{eV}$ ，室温下 $kT \sim 10^{-2} \text{ eV}$ ）

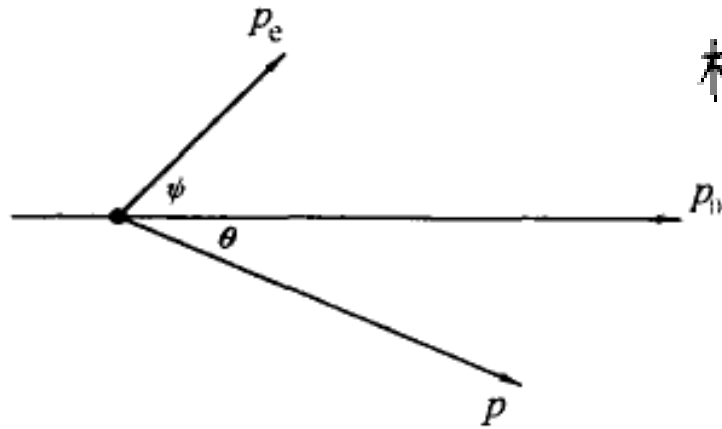
- 碰撞过程中能量与动量守恒

碰撞→光子把部分能量

传给电子 → 光子的能量↓

→ 散射X射线频率↓ 波长↑

设光子在散射前后的动量和能量分别为 (\mathbf{p}_0, E_0) 和 (\mathbf{p}, E) ,
 电子在散射后获得动量 \mathbf{p}_e 和动能 E_k ,
 散射光子和电子动量与入射光子动量的夹角分别为 θ 和 ψ ,

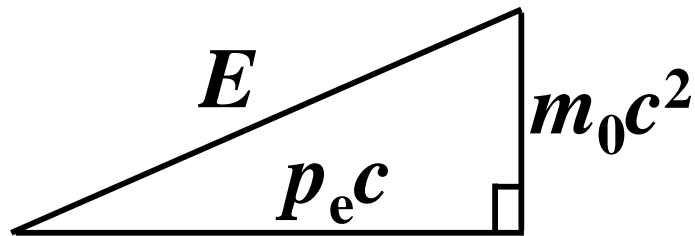


根据动量守恒和能量守恒可以写出

$$p_e^2 = p_0^2 + p^2 - 2p_0p \cos \theta \quad (1)$$

$$E_0 - E = E_k \quad (2)$$

其中 (2) 式可改写成



动质能三角形

$$(p_0 - p)c = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$$

$$\begin{aligned} p_e^2 &= (p_0 - p + m_0 c)^2 - m_0^2 c^2 \\ &= p_0^2 + p^2 - 2p_0 p + 2(p_0 - p)m_0 c \quad (3) \end{aligned}$$

(3) - (1)得:

$$(p_0 - p)m_0c = p_0p(1 - \cos\theta)$$
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

代入光子动量与波长的关系 $p = \frac{h}{\lambda}$, 即得

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

等于实验值

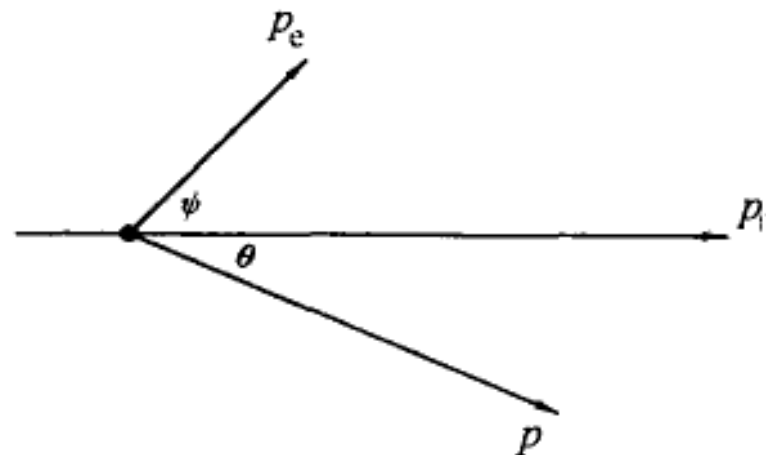
$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} m = 2.43 \times 10^{-3} \text{nm}$$

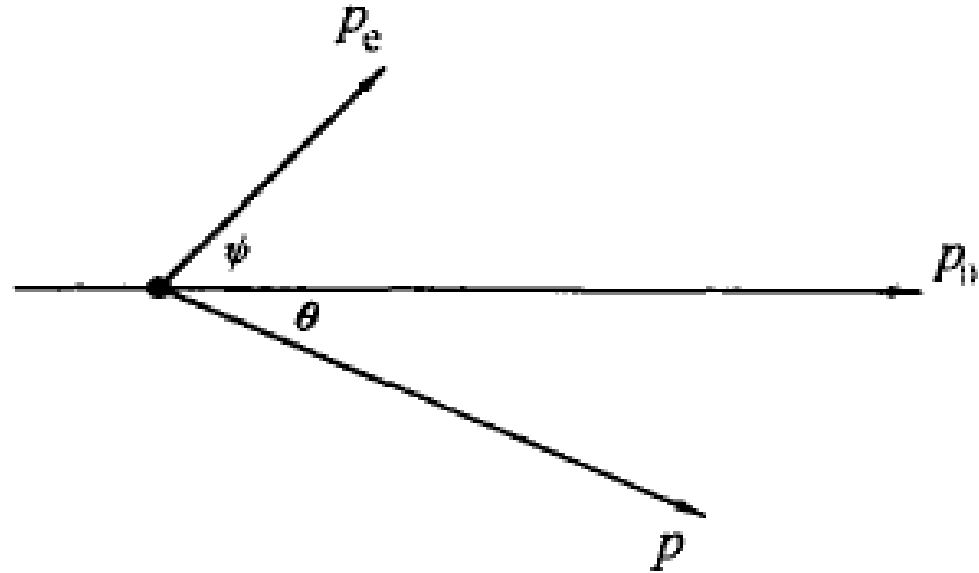
写出动量守恒的分量表达式

$$p_0 = p \cos\theta + p_e \cos\psi$$

$$p \sin\theta = p_e \sin\psi$$

还可推出电子反冲角 ψ 的公式





$$\begin{aligned}\tan \psi &= \frac{p \sin \theta}{p_0 - p \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{p_0/p - \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\lambda/\lambda_0 - \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{(1 + \lambda_c/\lambda_0)(1 - \cos \theta)} = \frac{1}{(1 + \lambda_c/\lambda_0) \tan \frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

为什么康普顿散射中还有原波长 λ_0 呢？

这是因为光子还可与石墨中被原子核束缚得很紧的电子发生碰撞。

内层电子束缚能 $10^3 \sim 10^4 \text{eV}$ ，不能视为自由，而应视为与原子是一个整体。所以这相当于光子和整个原子碰撞。 $\because m_{\text{原子}} \gg m_{\text{光子}}$

\therefore 在弹性碰撞中，入射光子几乎不损失能量，即 散射光子波长不变，散射线中还有与原波长相同的射线。

三、康普顿散射实验的意义

- 支持了“光量子”概念，进一步证实了

$$\varepsilon = h\nu$$

- 首次实验证实了爱因斯坦提出的“光量子具有动量”的假设

$$p = \varepsilon/c = h\nu/c = h/\lambda$$

- 证实了在微观领域的单个碰撞事件中，
动量和能量守恒定律仍然是成立的。

康普顿获得1927年诺贝尔物理学奖。



康普顿
(A. H. Compton)
美国人(1892-1962)



8.11 相对论动量 — 能量变换

利用 $\vec{p}' = \frac{m_0 \vec{v}'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$

和速度变换公式，可得到两惯性系之间，同一粒子的能量、动量间的变换关系。

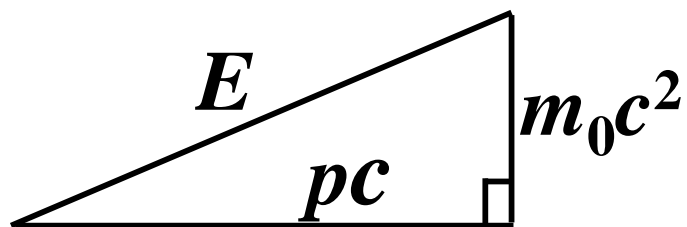
$$\begin{cases} p'_x = \gamma(p_x - u \frac{E}{c^2}) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - up_x) \end{cases}$$

能量和动量不可分割，构成确定粒子动力学状态的四维能量动量坐标。

此处介绍另一方法—**对比法**:

对比: S系→S'系, 对同一粒子:

不变量 $m_0, c \rightarrow E^2 - c^2 p^2 (= E'^2 - c^2 p'^2)$



$$\frac{E^2}{c^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

而对时空坐标, 有**时空间距**不变:

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

对比两种不变量, 对应量: (t, x, y, z)

$$\frac{E}{c^2}$$

$$p_x, p_y, p_z$$

对应量: $t \sim E / c^2, \quad x \sim p_x, \quad y \sim p_y, \quad z \sim p_z$

$(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$ 洛伦兹变换

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \end{array} \right. \quad \text{对比得} \quad \left\{ \begin{array}{l} p'_x = \gamma(p_x - u \frac{E}{c^2}) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - up_x) \end{array} \right.$$

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}dx_\mu dx_\mu = -\frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2) \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}dt$$

四维速度 $V_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt} \quad V = (\gamma \bar{v}, i\gamma c) \quad X = (\vec{r}, ict)$

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 = -c^2$$

四维动量 $P_\mu = m_0 V_\mu \quad P = (\gamma m_0 \bar{v}, i\gamma m_0 c) = (\bar{p}, i\frac{E}{c})$

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = -m_0^2 c^2$$

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$X' = LX$$

$$V' = LV$$

$$P' = LP$$

由四维速度的洛伦兹变换可导出三维速度变换公式(p.84)

$$\gamma' v'_x = \gamma \gamma_s (v_x - c \beta) \quad (1) \quad \text{(5)代入(1), (6)代入(2)、(3), 得}$$

$$\gamma' v'_y = \gamma_s v_y \quad (2)$$

$$\gamma' v'_z = \gamma_s v_z \quad (3)$$

$$\gamma' c = \gamma \gamma_s (c - \beta v_x) \quad (4)$$

$$\downarrow$$
$$\frac{\gamma \gamma_s}{\gamma'} = \frac{1}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \quad (5)$$

$$\downarrow$$
$$\frac{\gamma_s}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \quad (6)$$

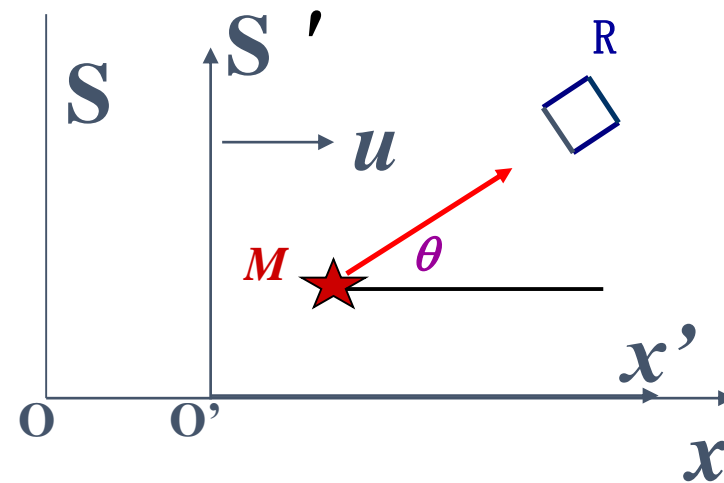
$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

例8.8 用光子观点讨论光的**多普勒效应**（光源相对接收器运动时，接收的频率不等于发光频率）。

解：设光源**M**固定在参考系**S'**，向四面八方发光，频率为 ν' ，由量子力学，光子能量与频率的关系为 **$E' = h\nu' = h\nu_0$** 。在相对于光源静止的参考系里测量的光波频率又称为光波的本征频率或固有频率，记为 **ν_0** 。接收器**R**固定在参考系**S**中，光线与光源运动速度 **u** 成 **θ** 角。由能量相对论变换关系式，可得接收器测到的频率 **ν** 与 **ν_0** 的关系。



S' 中：

$$\nu' = \nu_0, E' = h\nu_0$$

S 中：

$$E = h\nu, p = \frac{E}{c}$$

$$E' = \gamma(E - up_x) = \gamma \left(h\nu - u \frac{h\nu}{c} \cos \theta \right)$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \nu_0$$

纵向多普勒效应

当 $\theta = 0$ 时，光源向着接收器运动， $\nu > \nu_0$ 蓝移

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \nu_0 > \nu_0$$

当 $\theta = \pi$ 时，光源背离接收器运动， $\nu < \nu_0$ 红移

$$\nu = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}} \nu_0 < \nu_0$$

横向多普勒效应

当 $\theta = \pi/2$ 时，光源垂直于MR连线运动， $\nu < \nu_0$ 红移

$$\nu = \sqrt{1 - u^2 / c^2} \nu_0 < \nu_0$$

多普勒效应为宇宙膨胀学说提供了依据。1917年斯里费（V.M. Slipher）拍摄到15个涡旋星云的光谱，发现其中13个星云的吸收谱线移向红端，这表明这些星系正远离我们而去。



哈勃
(Edwin Hubble, 1889 - 1953)

1929年哈勃在此基础上根据自己测定的距离资料，总结出哈勃定律，星系的红移量与距离成正比。以后哈勃定律被更多的观测资料所证实，这意味着越远的星系退行速度越大，整个宇宙在膨胀。

例8.9 对遥远星系发来的光所做的光谱分析表明，有一些在实验室中已确认的谱线显著地移向了长波端，这种现象称为谱线红移，这是由于光源的退行速度所引起的多普勒频移。例如，钾光谱中易辨认的一对吸收线K线和H线，在地面实验室中是出现在波长395 nm附近；在来自牧夫星座一个星云的光中，却在波长447 nm处观测到了这两条谱线。试问该星云正以多大的速度离开我们？

解：

$$\nu = c/\lambda$$

$$\frac{c}{\lambda} = \nu = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \nu_0 = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \frac{c}{\lambda_0}$$

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} = \frac{c - u}{c + u}$$

$$u = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} c$$

$$\lambda = 447 \text{ nm} \qquad \lambda_0 = 395 \text{ nm}$$

$$u = 0.123 c$$