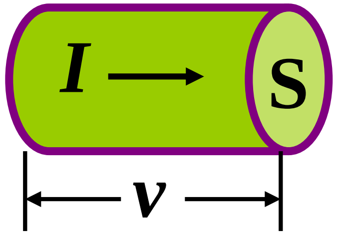
17.4 匀速运动点电荷的磁场

设电流中载流子带电为q(>0)，以速度v 沿电流I方向运动，并且载流子密度为n，导体截面积为S。

如图取一段长为v 的导体，则有:I=nq$v$S

根据毕奥 — 萨伐尔定律:



$$d\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{nqSdl\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

其中： $d\vec{l}\parallel\vec{v}$　　$nSdl=dN$

$$\therefore\quad d\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q\,dN\,\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

单个运动电荷所激发的磁场为:

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}}$$

17.5 安培环路定理

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

斯托克斯定理

$$\boxed{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{S}}$$

$$\Rightarrow \quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

即： $\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$ → **适用于恒定磁场的任何情况**

安培环路定理

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$$

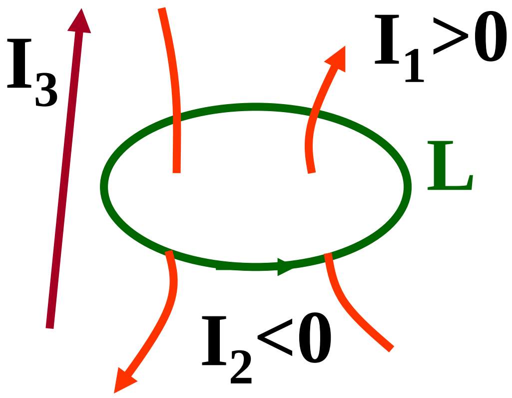
即：磁感应强度$\vec{B}$沿任意闭合曲线L的线积分＝穿过这闭合曲线内所有传导电流强度的代数和

I 的正负规定：

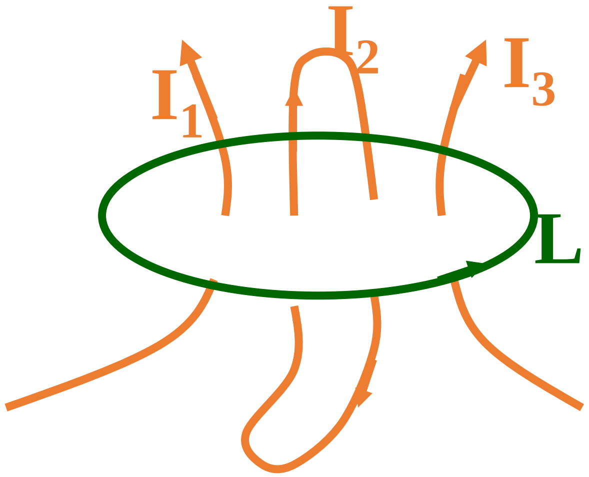
1) 当I与L的环绕方向成右手关系时，$I>0$，反之$I<0$。

2) 若I不穿过L，则I=0

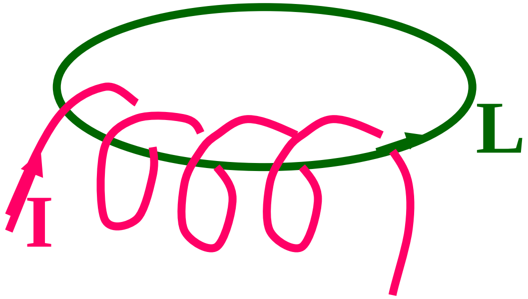
例如：



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o (I_1 - I_2)$$



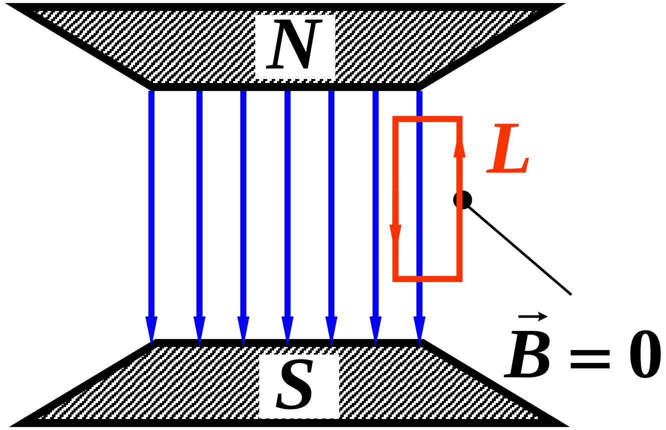
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o (I_1 + I_3)$$

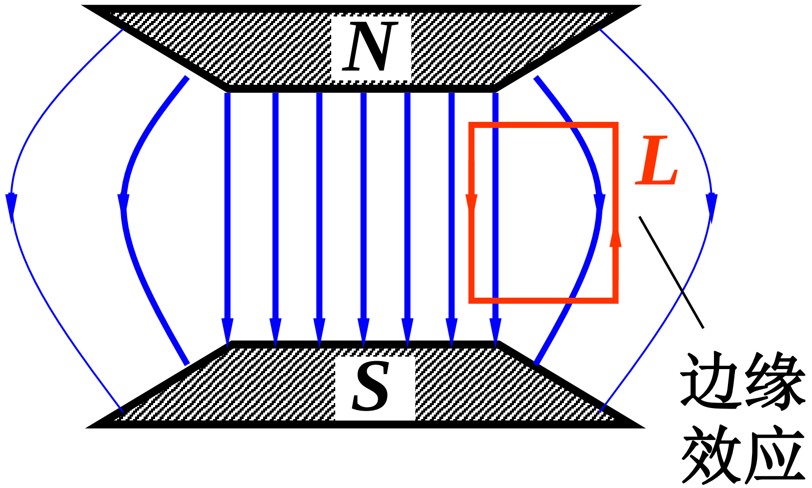


$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = -4\mu_o I$$

例17.9 证明不存在突然降到零的磁场。

（书p. 129, 思考题17.9）





证： 选图示的闭合回路 L，

应有：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内} = 0$。

但图示情况 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} \neq 0$

所以不存在这样的磁场。

实际情况应有边缘效应。

恒定磁场的性质

高斯定理： $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ $\nabla\cdot\vec{B}=0$ → 无源场

安培环路定理： $\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i$ $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ → 有旋场

比较：

静电场

高斯定理： $\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$ $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → 有源场

环路定理： $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ $\nabla\times\vec{E}=0$ → 无旋场

17.6 利用安培环路定理求磁场的分布

由毕奥—萨伐尔定律可以计算任意电流的磁场 $\vec{B}$

由安培环路定理可以计算有对称性的载流体产生的磁场

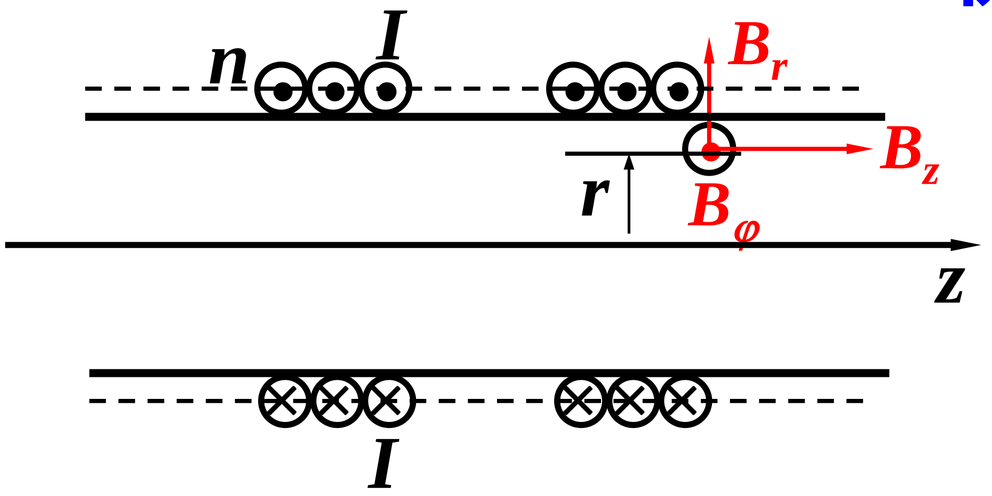
$\vec{B}$

例17.10 **已知：**无限长垂直密绕载流螺线管 n、I。

求：管内、外磁感应强度。

解：∵n大（密绕），∴螺距小，螺线管可简化为由一匝匝平面圆电流圈并排排列所组成。

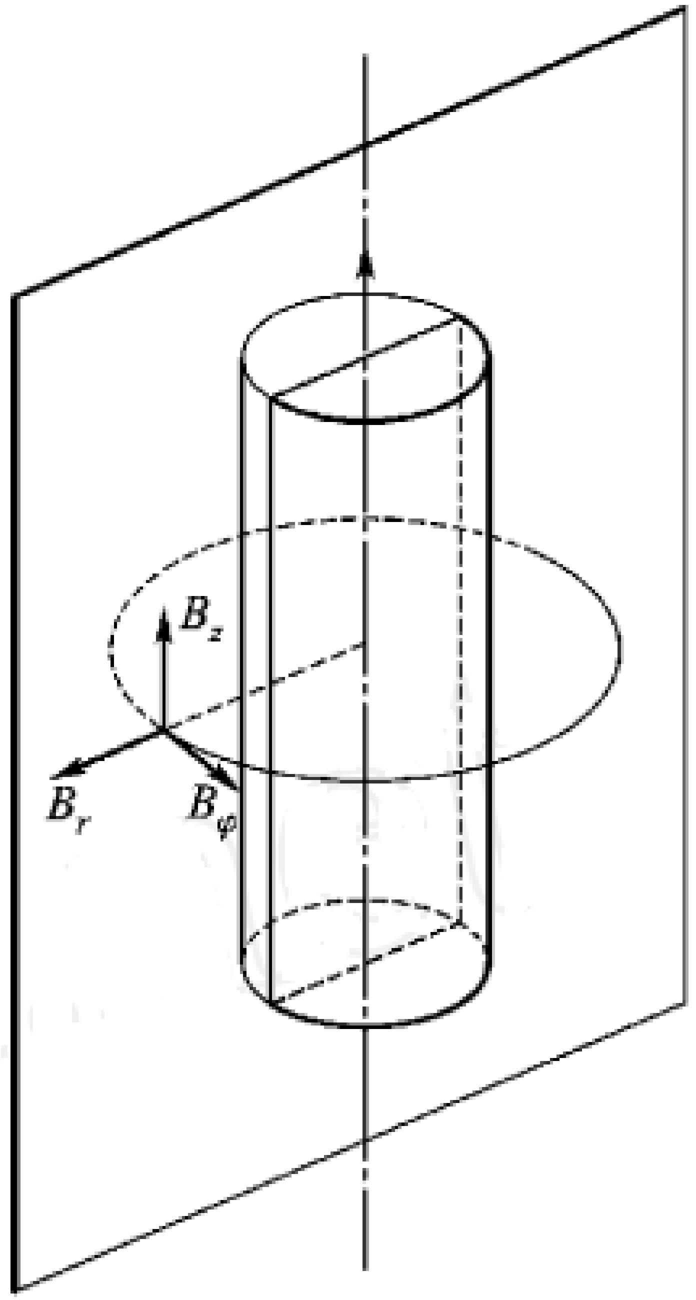
由无限长条件和轴对称，有：$\vec{B}=\vec{B}(r)$



例17.6（p.23）已证明：

$$B_r=B_\varphi=0,$$

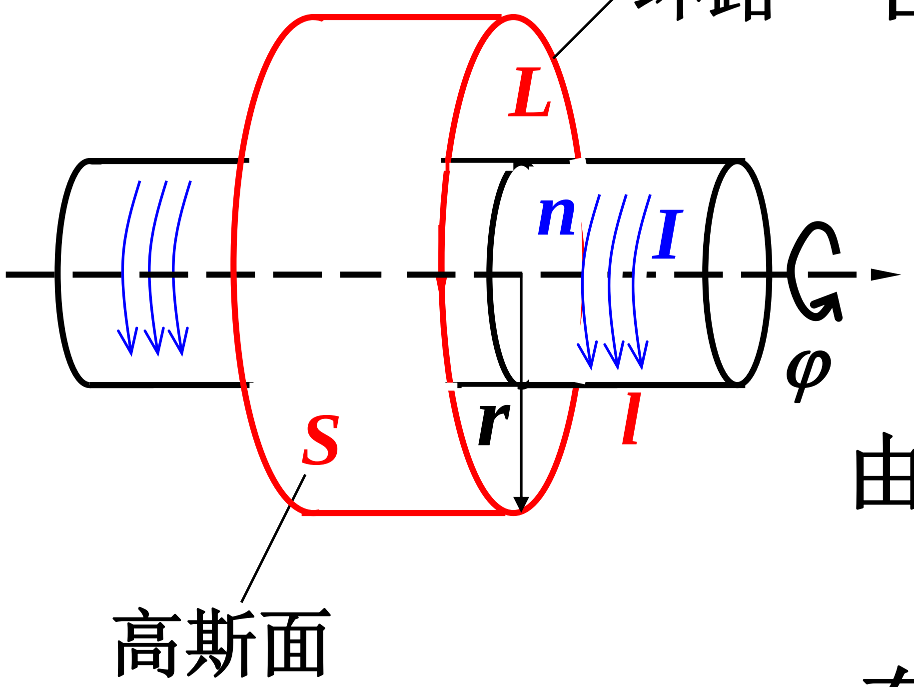
$$\vec{B}=B_z\cdot\vec{k}$$



B_z
B_r
B_φ

$\vec{B}=B_z\cdot\vec{k}$ 的结论也可以由 $\vec{B}$ 的高斯定理

和安培环路定理导出。

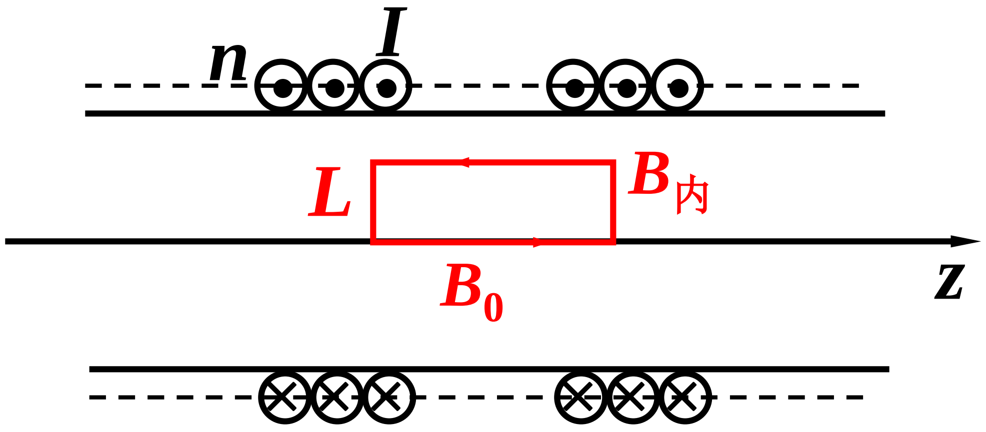


由 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=0$ ，

有： $B_\varphi(r)=0$

由 $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=B_r(r)\cdot 2\pi rl=0$，

有： $B_r(r)=0$

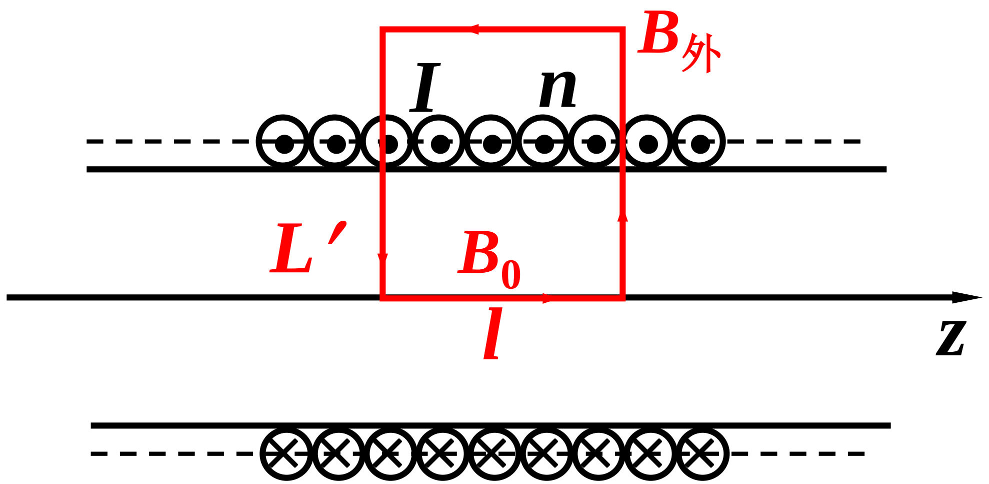


由 $\oint_{L} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ ，有：

$$B_{内} = B_0 = \mu_0\, n\, I$$

$$\boxed{\vec{B}_{内} = \mu_0\, n\, I \cdot \vec{k}}$$

$\vec{k}$与I的流向成右手螺旋关系。



由 $\int_{L'} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

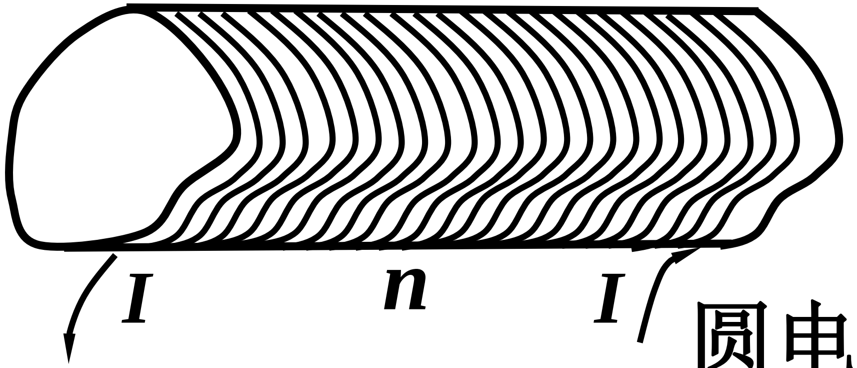
$$= B_0 \cdot l - B_{外} \cdot l$$

$$= \mu_0 n I \cdot l$$

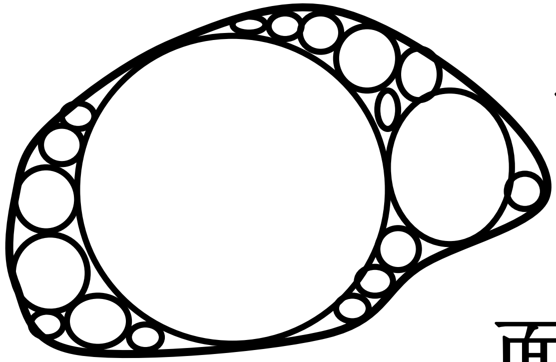
（安）

有：$B_{外} = B_0 - \mu_0\, n\, I = 0$

思考： 截面形状任意的密绕长直螺线管内外的磁场如何？（书p. 129, 思考题17.11）



答：螺线管的每圈电流都可看成是无数大大小小的圆电流叠加而成。故从电流分布来看，截面形状任意的密绕长直螺线管可看成无数大大小小的圆截面螺线管叠加而成。管内仍是均匀场

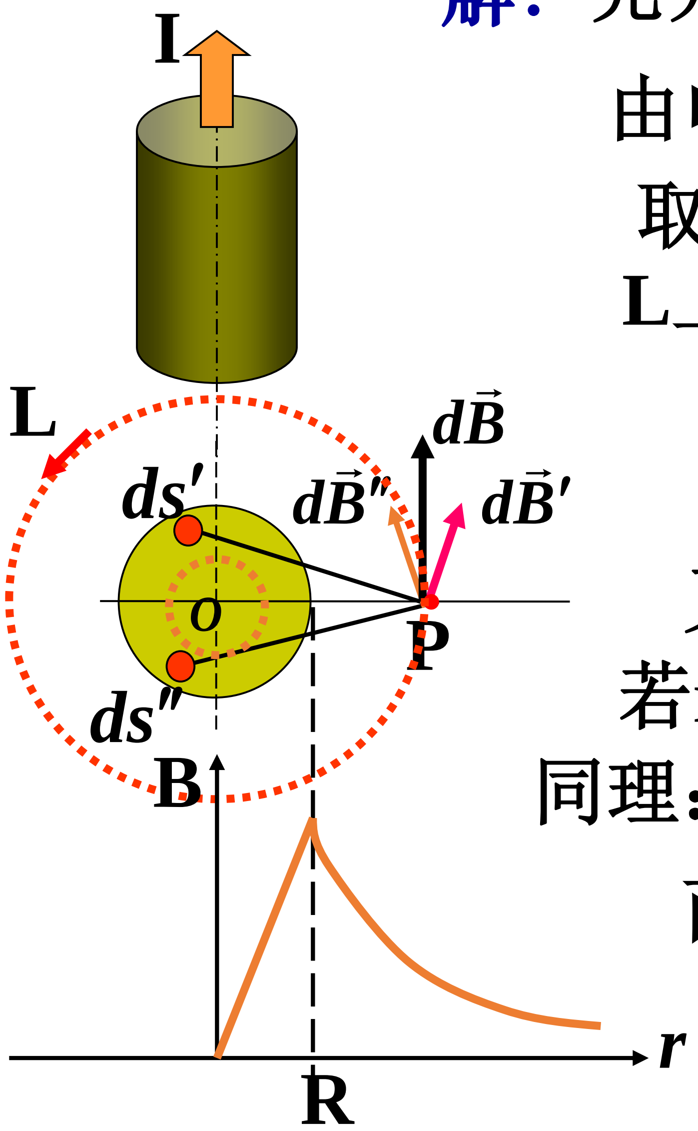


$B=\mu_0 nI$，管外B仍为零。

问：对截面任意的短粗螺线管能否这样处理？

例17.11 半径为R的无限长圆柱载流直导线，电流I沿轴线方向流动，并且截面上电流均匀分布。计算任 意点P的$\vec{B}$=？

解： 先分析P点的磁感应强度的方向



由电流对称分布可知：$\vec{B}\perp oP$

取过P点半径为 r =oP 的圆周L，L上各点B大小相等，方向沿切线

r >R时 由安培环路定理得：

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B dl\cos 0^o = B\cdot 2\pi r$$

又 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

与用毕奥-萨伐尔定律的计算结果一致

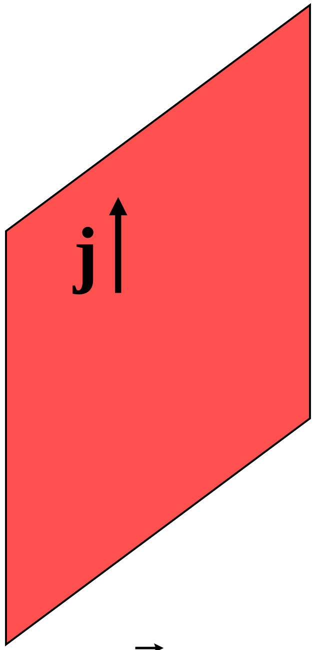
若r<R

同理：$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B dl\cos 0^o = B\cdot 2\pi r$

而 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J}\cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

例17.12 一无限大平面，有均匀分布的面电流，面电流密度的大小为 j，求平面外一点 $\vec{B}$ =？ 书p. 123, 例17.8



解： 由对称可知 $\vec{B}\perp\vec{j}$

并且离板等距离处的B大小相等。

过P点取矩形回路abcda→L

其中ab、cd与板面等距离。

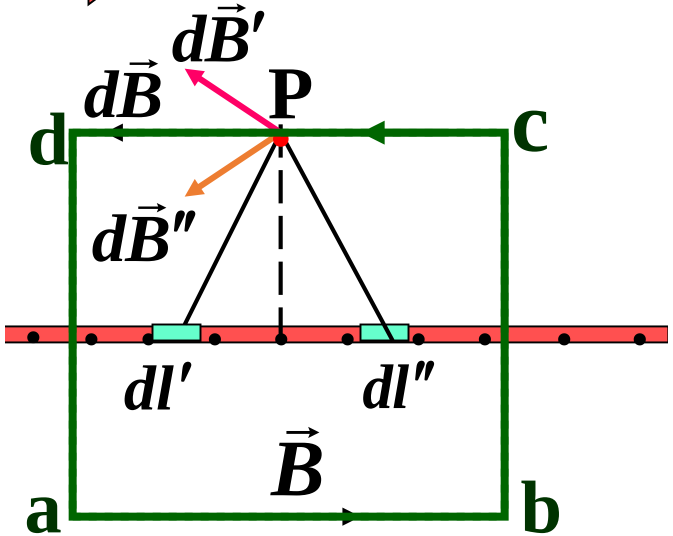
$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l}+\cancelto{0}{\int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l}}+\int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l}+\cancelto{0}{\int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}}$$

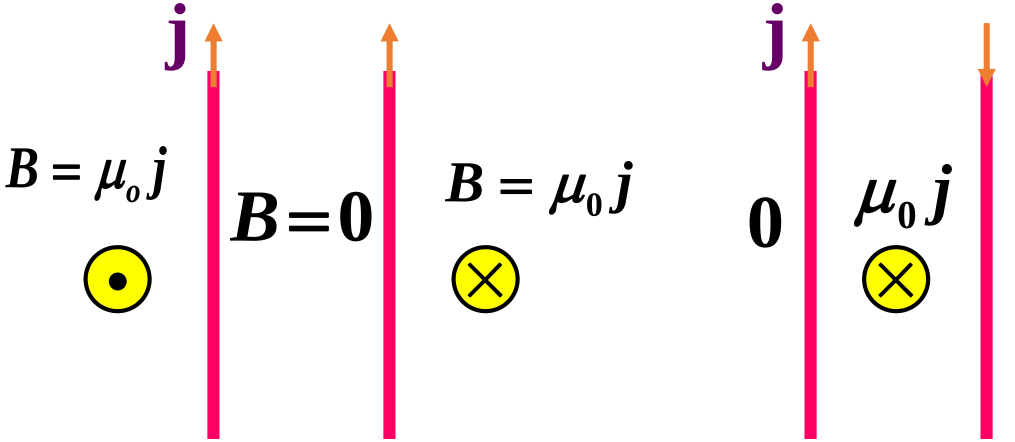
$$=B\cdot ab+B\cdot cd\quad =2B\cdot ab$$

而 $\mu_o\sum I_i=\mu_o j\cdot ab$

$$\left.\begin{array}{l}=2B\cdot ab\\ \mu_o\sum I_i=\mu_o j\cdot ab\end{array}\right\}\ B=\frac{1}{2}\mu_o j$$

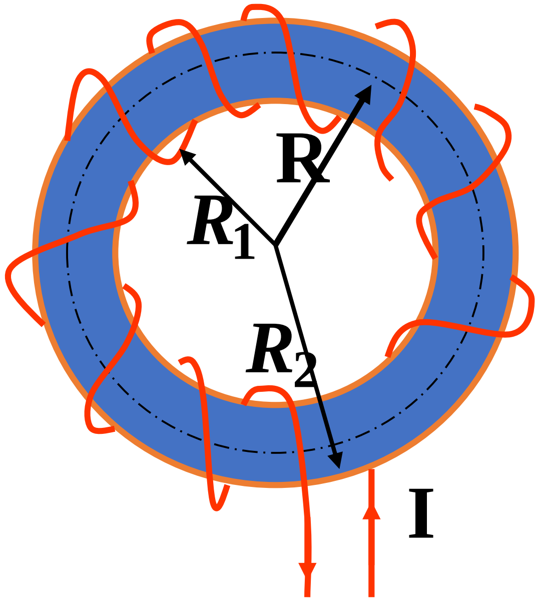
与P点到平板的距离无关。





p. 132
17.14

例17.13 求通电螺绕环的磁场分布。已知环管轴线的半径为R，环上均匀密绕N匝线圈，设通有电流I。

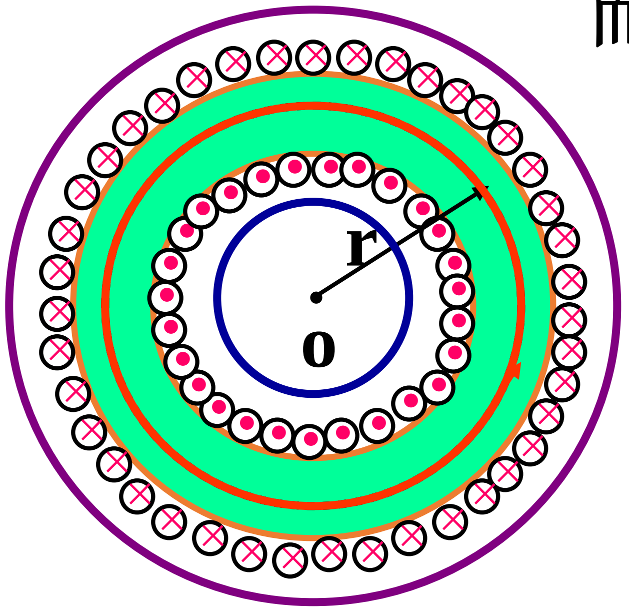


解：由于电流对称分布，与环共轴的圆周上，各点B大小相等，方向沿圆周切线方向。**参考例17.6**

取以o为中心，半径为r的圆周为L

当$R_1 < r < R_2$ 时

$$\left.\begin{aligned}&\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint Bdl\cos 0^o = B\cdot 2\pi r\\ &\text{而}\ \ \mu_0\sum I_i = \mu_0 NI\end{aligned}\right\} B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



若 $r<R_1$ $\quad\because \mu_0\sum I_i = 0 \quad \therefore B=0$

若 $r>R_2$ $\quad\because \mu_0\sum I_i = \mu_0(NI - NI) = 0$

$\therefore B=0$

当 $R_{管截面} << R$ 即 $r \approx R$

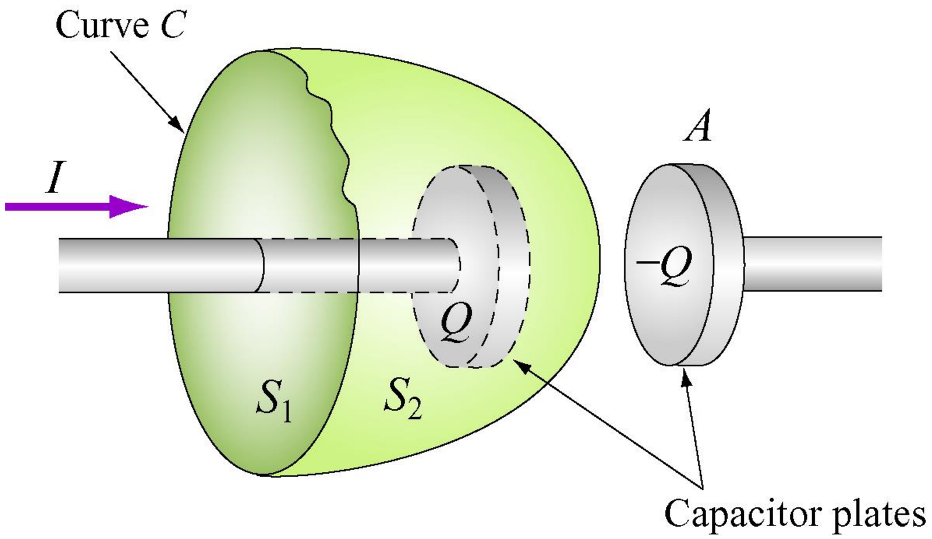
$$B = \mu_0 nI \qquad n = \frac{N}{2\pi R}$$

17.7 与变化电场相联系的磁场

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i \qquad (1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} \equiv 0$$



而一般来说，在非恒定情况下，由电荷守恒定律有

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \qquad (3)$$

由于电荷守恒定律是精确的普遍规律，而(2) 式仅是根据恒定情况下的实验定律导出的特殊规律，在两者发生矛盾的情况下，应该修改(2)式。

把(2) 式推广的一个方案是假设存在一个称为位移电流的物理量，它和传导电流合起来构成闭合的量。

$$\nabla\cdot\left(\vec{J}+\vec{J}_d\right)=0 \qquad (4)$$

并假设位移电流和传导电流一样产生磁效应，即把(2)式修改为

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\vec{J}_d\right) \qquad (5)$$

此式两边的散度都等于零，因而理论上就不再有矛盾。

从当时的实验资料和理论分析，都没有发现电场的高斯定理和磁场的高斯定理有不合理之处，麦克斯韦假定它们在普遍情况下应该成立。

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (6)$$

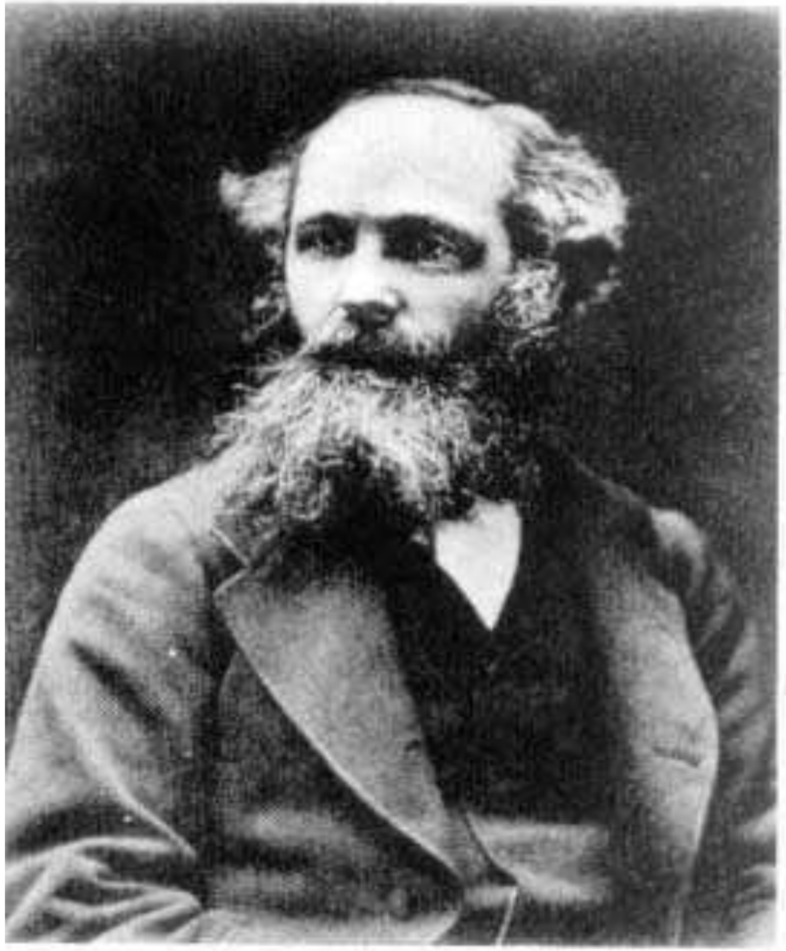
由(3)式和(6)式可得
$$\nabla\cdot\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0 \qquad (7)$$

比较(4)式和(7)式可得位移电流的一个可能表示式：

$$\vec{J}_d=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (8)$$

从数学上来说，单由条件(4)式是不可能唯一确定位移电流的。从物理上考虑，(8)式是满足该条件的最简单的物理量。位移电流实质上是电场的变化率，它是麦克斯韦首先引入的，其正确性由以后关于电磁波的广泛实践所证明。

$$I_d=\varepsilon_0\frac{d\Phi_e}{dt}=\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_S\vec{E}\cdot d\vec{S}$$



麦克斯韦

James Clerk Maxwell (1831-1879)

17.8 电场和磁场的相对性和统一性

洛仑兹变换 Lorentz transformation

令 $\beta \equiv \dfrac{u}{c}$ $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 则

正变换

$$x' = \gamma(x - c\beta t)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

逆变换

$$x = \gamma(x' + c\beta t')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

$$X' = (x_1', x_2', x_3', x_4') \qquad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z \qquad x_4 = ict$$

$$X' = LX$$

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

在相对论中，空间和时间具有完全同等的地位，它们是四维闵可夫斯基空间中的一个矢量的不同分量。

从今以后，空间和时间本身都已成为影子，两者的结合才保持独立的存在。

——闵可夫斯基，《时间与空间》，1907

在电动力学的相对论形式中，电场$\vec{E}$的三个分量和磁场$\vec{B}$的三个分量都属于同一个物理量。这个物理量当然不可能是四维矢量，因为四维矢量只有四个分量，不可能容纳$\vec{E}$和$\vec{B}$的六个分量。统一描写电磁场强度的量称为**电磁场张量**，用$F_{\mu\nu}$表示，是一个四维二阶张量。

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$E_1 = E_x \qquad B_1 = B_x$$

$$E_2 = E_y \qquad B_2 = B_y$$

$$E_3 = E_z \qquad B_3 = B_z$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -i\frac{E_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -i\frac{E_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -i\frac{E_3}{c} \\ i\frac{E_1}{c} & i\frac{E_2}{c} & i\frac{E_3}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F' = LFL^T$$

正变换

$$E_x' = E_x$$

$$E_y' = \gamma\left(E_y - c\beta B_z\right)$$

$$E_z' = \gamma\left(E_z + c\beta B_y\right)$$

$$B_x' = B_x$$

$$B_y' = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z\right)$$

$$B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y\right)$$

逆变换

$$E_x = E_x'$$

$$E_y = \gamma\left(E_y' + c\beta B_z'\right)$$

$$E_z = \gamma\left(E_z' - c\beta B_y'\right)$$

$$B_x = B_x'$$

$$B_y = \gamma\left(B_y' - \frac{\beta}{c} E_z'\right)$$

$$B_z = \gamma\left(B_z' + \frac{\beta}{c} E_y'\right)$$

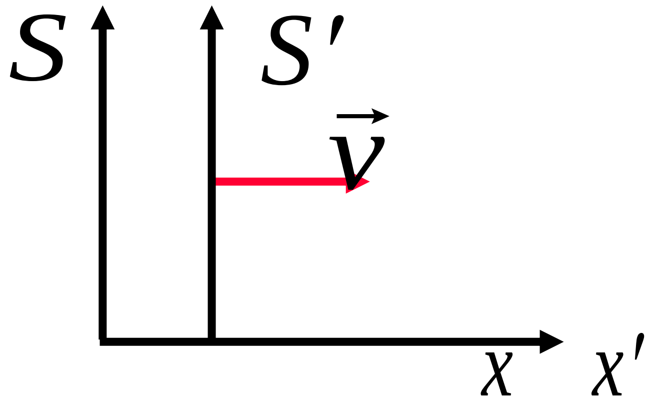
例： 在一个参考系中只有静电场

如 S'

$$B'_x = 0 \quad E'_x \neq 0$$

$$B'_y = 0 \quad E'_y \neq 0$$

$$B'_z = 0 \quad E'_z \neq 0$$



则 S 不仅有电场还有磁场

把电磁场区分为电场和磁场的做法完全是相对的。作为客观实在的电磁场可能只表现为电场；也可能只表现为磁场；当然也可能表现为既有电场又有磁场。这完全决定于参考系的选择。

如果某个方程在洛伦兹变化下形式保持不变，则称它是洛伦兹协变的。

定理：任何一个方程，如果能表示成四维张量（0，1，2阶等）的形式，且各项的张量阶数相同，则此方程必具有洛伦兹协变性。

相对论牛顿力学方程

$$F_\mu = \frac{dP_\mu}{d\tau} \qquad (\mu=1, 2, 3, 4)$$

这是惯性系变换时的洛伦兹协变形式。其前三个分量在低速极限γ=1时，就是经典牛顿第二定律，其第四分量是能量守恒。

麦克斯韦方程组的协变式

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -i\frac{E_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -i\frac{E_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -i\frac{E_3}{c} \\ i\frac{E_1}{c} & i\frac{E_2}{c} & i\frac{E_3}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu \\ \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \end{cases} \qquad J_\mu = \left(\vec{J}, ic\rho\right)$$

至此，电动力学、牛顿力学已经全部写成了洛伦兹协变式。爱因斯坦试图把万有引力定律也写成洛伦兹协变式，但遇到了困难。因此，1905年之后，他开始进行广义相对论的研究，到1916年完成，历时10年。

第17章结束