15. 静电场中的电介质

15.1 电介质对电场的影响

15.2 电介质的极化

15.3 $\vec{D}$的高斯定理

15.4 电容器和它的电容

15.5 电容器的能量

电介质又称绝缘体，是指不导电的物质，其中的电荷被束缚在原子范围内，不能宏观移动，称为束缚电荷或极化电荷。原先宏观上处处电中性的电介质，在外电场的作用下，尽管不存在自由电荷，但被束缚的电子和原子核受力反向，仍然会出现某种宏观的电荷分布。

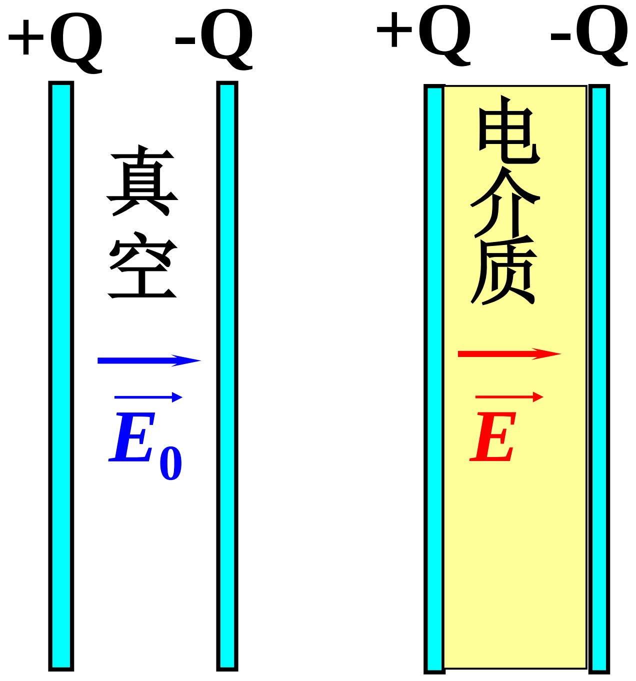
15.1 电介质对电场的影响

极板电量不变时，在极间充满各向同性线性电介质前后的场强关系为：

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon_r}$$

ε_r——介质的相对介电常数(相对电容率)

（relative permittivity）



ε_r与介质种类和状态有关。

$$\varepsilon_r \geq 1$$

如：空气 ε_r=1.00055

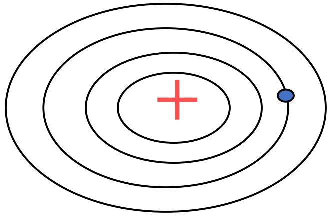
水(0°C, 1atm) ε_r=80

钛酸钡 $\varepsilon_r=10^3$—10^4

15.2 电介质的极化

介质在电场中出现附加电荷称极化(polarization)

1. 电介质的微观图象

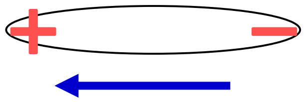


原子核 10^{-15}m

原子 10^{-10}m

有极分子polar molecule

水、HCl、NH_3、. . .

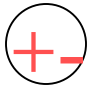


$$\boxed{\vec{p} = q\vec{l}}$$

$$p \sim 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$$

无极分子nonpolar molecule

He、Ne、CH_4、…

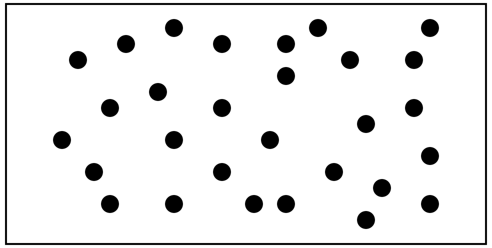


$$\boxed{\vec{p} = 0}$$

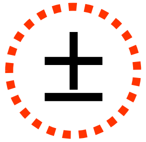
2. 极化机制

A.位移极化（displacement polarization）

对无极分子

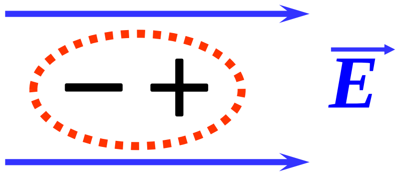


$\vec{E} = 0$



$\vec{p} = 0$

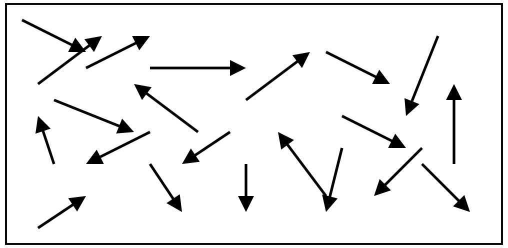
$\vec{E} \neq 0$



$\vec{p} \,/\!/\, \vec{E}$， $\vec{E}\uparrow \rightarrow \vec{p}\uparrow$

B.取向极化（orientation polarization）

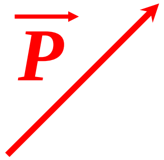
对有极分子



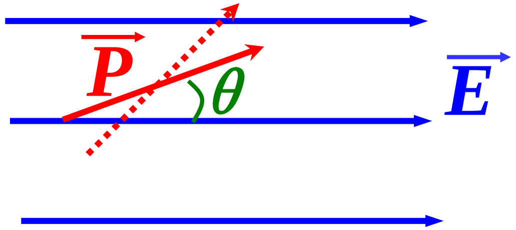
热运动---紊乱

电中性

$\vec{E} = 0$



$\vec{E} \neq 0$



$\vec{E}\uparrow \rightarrow \theta\downarrow$，

$\vec{p} \rightarrow$ 平行 $\vec{E}$

几点说明：

①由于热运动，$\vec{p}$不是都平行于$\vec{E}$；

②有极分子也有位移极化，但在静电场中主要是取向极化；

③有极分子在高频场中，位移极化反而是主要的。

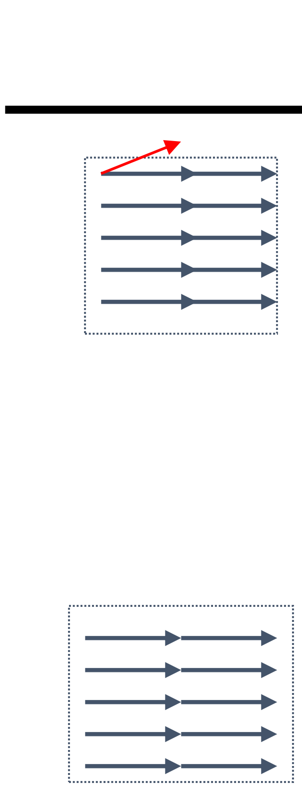
有电场时:

有极分子介质

取向极化 (orientation polarization)

无极分子介质

位移极化 displacement~



共同效果

边缘出现电荷分布

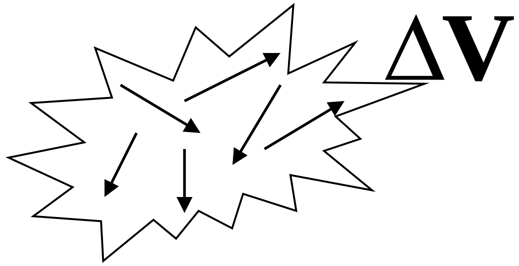
称极化电荷 或称 束缚电荷

Polarization charges bound charges

3. 描述极化强弱的物理量--极化强度 $\vec{P}$

电偶极子排列的有序程度反映了介质被极化的程度。

排列愈有序说明极化愈显著。



宏观小、微观大的体积元ΔV

定义 $$\boxed{\vec{P} = \lim \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}}$$

$\vec{p}_i$ 每个分子的电偶极矩

SI单位：c/m^2

4.极化电荷（polarizatcon charge）

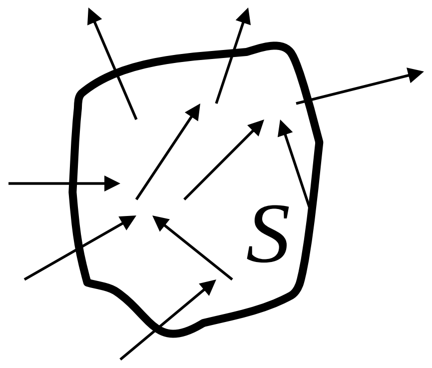
在已极化的介质内任意作一闭合面*S*，

S 将把电介质分子分为三部分：

一部分全部在 *S* 内，

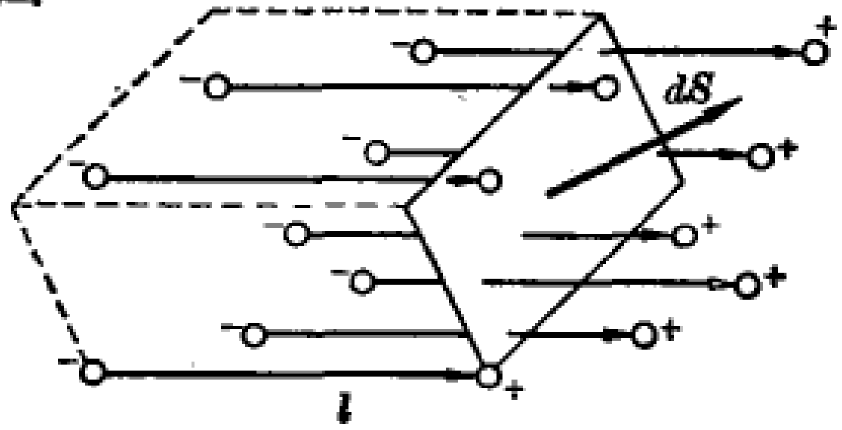
一部分全部在 *S* 外，

一部分跨界。



只有电偶极矩穿过*S* 的分子对*S*内的极化电荷有贡献。

我们用一个简化模型来描述介质中的分子。设每个分子由相距为 l 的一对正负电荷 $\pm q$ 构成，分子电偶极矩为 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$。图示介质内某曲面 S 上的一个面元 $d\boldsymbol{S}$。介质极化后，有一些分子电偶极子跨过 $d\boldsymbol{S}$。由图可见，当偶极子的负电荷处于体积 $\boldsymbol{l}\cdot d\boldsymbol{S}$ 内时，同一偶极子的正电荷就穿出界面 $d\boldsymbol{S}$ 外边。设单位体积分子数为 n，则穿出 $d\boldsymbol{S}$ 外面的正电荷为



$$nq\boldsymbol{l}\cdot d\boldsymbol{S}=n\boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

对包围区域 V 的闭合界面 S 积分，则由 V 内通过界面 S 穿出去的正电荷为 $\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}$

由于介质是电中性的，$-\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}$ 也等于V内净余的负电荷。

这种由于极化而出现的电荷分布称为束缚电荷。

以ρ_P表示束缚电荷密度，有 $$\int_V \rho_P dV = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}$$

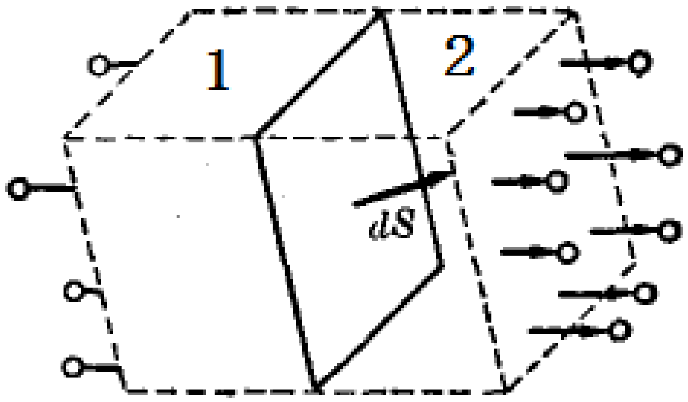
把面积分化为体积分，可得上式的微分形式

$$\rho_P = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

非均匀介质极化后一般在整个介质内部都出现束缚电荷；在均匀介质内，束缚电荷只出现在自由电荷附近以及介质界面处。

现在我们说明两介质分界面上的面束缚电荷的概念。

考虑介质 1 和介质 2 分界面上的一个面元 dS。在分界面两侧取一定厚度的薄层，使分界面包含在薄层内。在薄层内出现的束缚电荷与 dS 之比称为分界面上的束缚电荷面密度。



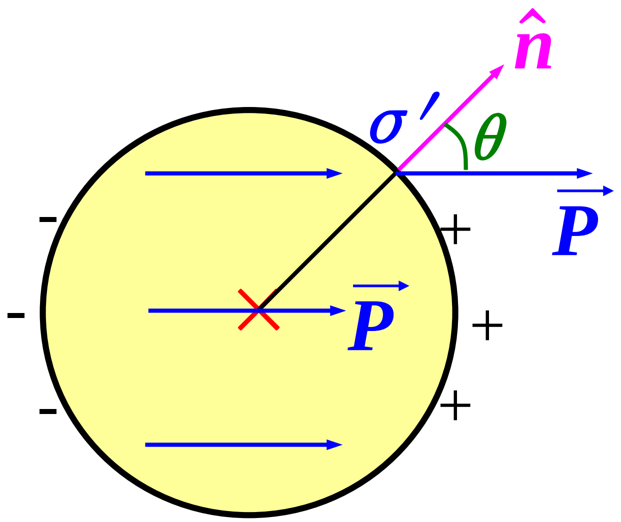
通过薄层右侧面进入介质 2 的正电荷为 $\boldsymbol{P}_2\cdot d\boldsymbol{S}$，由介质 1 通过薄层左侧面进入薄层的正电荷为 $\boldsymbol{P}_1\cdot d\boldsymbol{S}$。因此，薄层内出现的净余电荷为 $-(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\cdot d\boldsymbol{S}$。以 σ_P 表示束缚电荷面密度，有 $\sigma_P dS=-(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\cdot d\boldsymbol{S}$

由此，$\quad \sigma_P=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)$

$\boldsymbol{n}$ 为分界面上由介质 1 指向介质 2 的法线。由以上推导可见，所谓面束缚电荷不是真正分布在一个几何面上的电荷，而是在一个含有相当多分子层的薄层内的效应。

例15.1 已知：介质球均匀极化，极化强度为 $\vec{P}$。

求：ρ'、σ' 及球内的退极化场。



均匀极化，电荷并不均匀分布

解：

(1) $\rho' = -\nabla\cdot\vec{P} = 0$

(2) $\sigma' = P_n = P\cdot\cos\theta$

$$\theta = 0,\quad \sigma' = \sigma'_{\max} = P;$$

$$\theta = \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\ ,\quad \sigma' = 0;$$

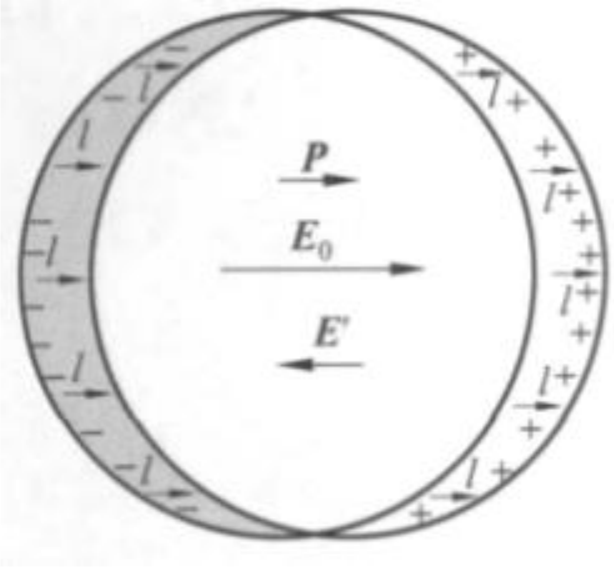
$$\theta = \pi,\quad \sigma' = -P.$$

(3) 我们把电介质球看成均匀带等量异号电荷的球体重叠在一起，它的极化看成两球体沿极化方向有一微小相对位移. 设两球体的电荷体密度分别为$\pm\rho_e$，相对位移为$\boldsymbol{l}$，则极化强度$\boldsymbol{P}=\rho_e\boldsymbol{l}$. 两球在球内产生的电场强度分别为$\boldsymbol{E}_{\pm}=\pm\rho_e\boldsymbol{r}/3\varepsilon_0$，总场强即电介质内的退极化场为

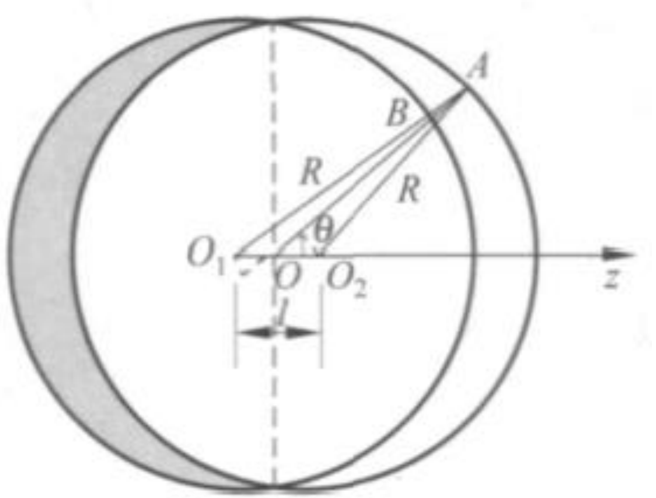
$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}/2)+\boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}/2)$$

$$=\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}/2)-(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}/2)]$$

$$=-\frac{\rho_e\boldsymbol{l}}{3\varepsilon_0}=-\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$



为什么能够用这样的模型来等效地求解？



为此，我们只须证明这种模型中电荷面密度分布也是 $\sigma_e' = P\cos\theta$ 即可.

如图，两半径均为 R 的、原本重叠的、带等量异号电荷的球体沿极化方向(设为 z 轴方向)错开一微小位移 l，球心为 O_1 的球带负电，球心为 O_2 的球带正电，电荷体密度分别为 $\pm\rho_e$. 设 O 为新组合体的中心，过 O 点作与 z 轴夹角为 θ 的直线，与两球面分别交于 A、B 点，连接 O_1B 和 O_2A，显然 $O_1B = O_2A = R$，现在先来求月牙形在 θ 角处的厚度 AB.

在 $\triangle O_1OB$ 中，因 $O_1O\,(=l/2) \ll O_1B$，故 $\angle O_1BO \to 0$，有 $O_1B \approx OB + \frac{l}{2}\cos\theta$，即

$$OB \approx R - \frac{l}{2}\cos\theta \qquad (1)$$

同理，在$\triangle O_2OA$中，$\angle O_2AO \to 0$，有$OA \approx O_2A + \frac{l}{2}\cos\theta$，即

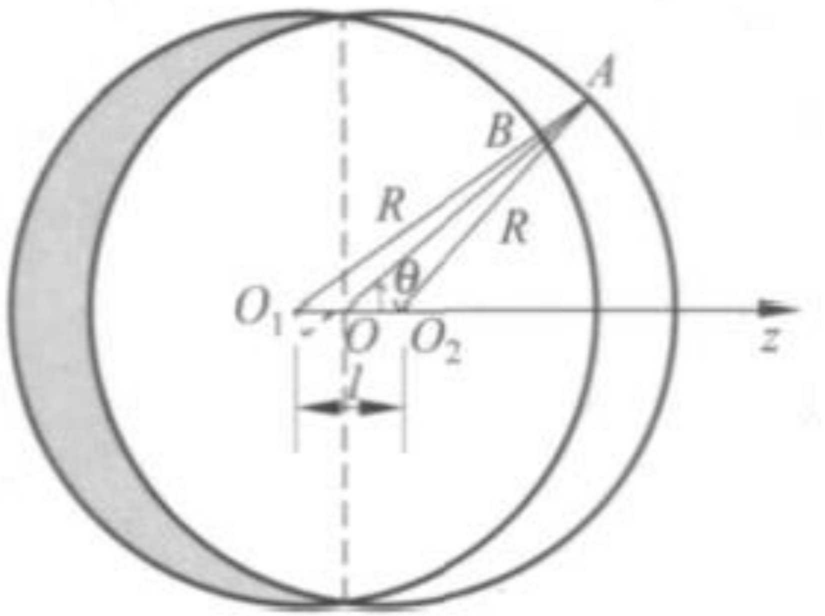
$$OA \approx R + \frac{l}{2}\cos\theta \qquad (2)$$

所以得

$$AB = OA - OB = l\cos\theta \qquad (3)$$

显然，当$\theta = 0$时，$AB = l$；当$\theta = \pi/2$时，$AB = 0$。于是，面电荷密度为

$$\begin{aligned}\sigma_e &= dq/dS = \rho_e \cdot AB \cdot dS/dS \\ &= \rho_e \cdot l\cos\theta = P\cos\theta\end{aligned} \qquad (4)$$

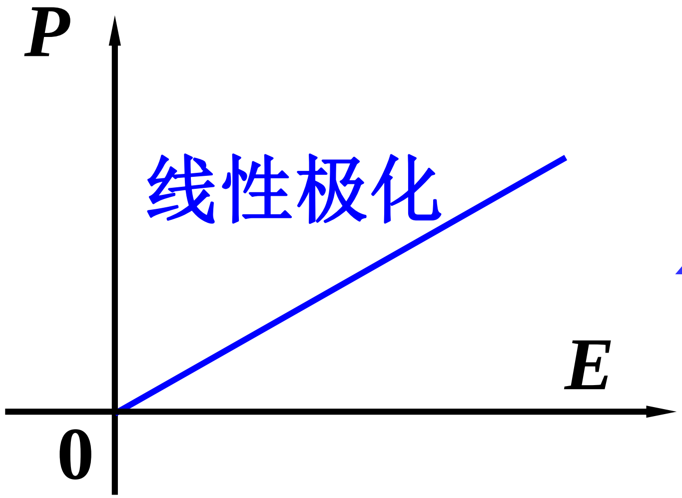


这说明此等效模型中面电荷分布与均匀极化电介质球表面的极化电荷分布是相同的，从而可以用上述等效方法求解球内的退极化场.

5. 电介质的极化规律

(1) 各向同性线性电介质

E不太强时，有：



$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}}$$

χ_e 称介质的电极化率**(polarizability)**

$$\boxed{\chi_e = \varepsilon_r - 1} \qquad \chi_e \geq 0$$

χ_e 无量纲的纯数 与 $\vec{E}$ 无关

(2) 各向异性电介质

χ_e 与 $\vec{E}$ 、与晶轴的方位有关

一般 $\vec{p} \nparallel \vec{E}$ 张量描述

6. 自由电荷与束缚电荷共同产生场

介质内的电现象包括两个方面。一方面电场使介质极化而产生束缚电荷分布，另一方面这些束缚电荷又反过来激发电场，两者是互相制约的。介质对宏观电场的作用就是通过束缚电荷激发电场。

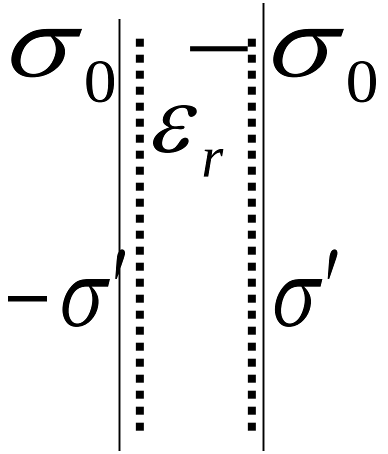
$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'}$$

例15.2 平行板电容器，自由电荷面密度为 σ_0。充满相对介电常数为 ε_r 的均匀各向同性电介质。

求:板内的场。

解: 均匀极化，表面出现束缚电荷。

内部的场由自由电荷和束缚电荷共同产生。

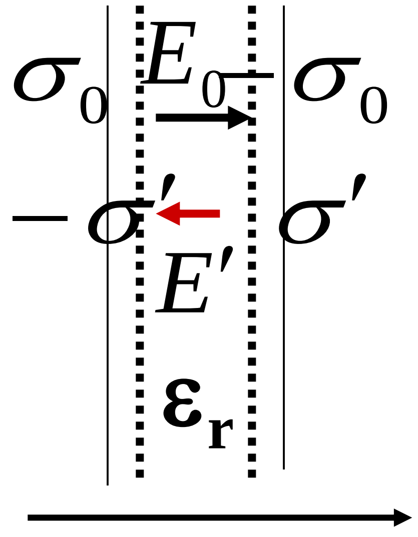


$\pm\sigma_0$ —— $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

单独

$\pm\sigma'$ —— $E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

共同产生



$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \cdots \quad (1)$$

$$\sigma' = P_n = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E \cdots \quad (2)$$

联立 → $\boxed{E = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$ $\boxed{= \dfrac{E_0}{\varepsilon_r}}$

均匀各向同性电介质充满两个等势面之间

条件：各向同性线性电介质均匀充满两个等势面间

求解思路

$$\vec{E}_0 \to \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} \to \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$$\to \sigma' = \vec{P} \cdot \hat{n} \to q' = \int_S \sigma' dS$$

电介质的击穿

如果外加电场很强，则电介质分子中的正负电荷有可能被拉开而变成可以自由移动的电荷。由于大量的这种自由电荷的产生，电介质的绝缘性能就会遭到明显的破坏而变成导体。这种现象叫电介质的击穿。

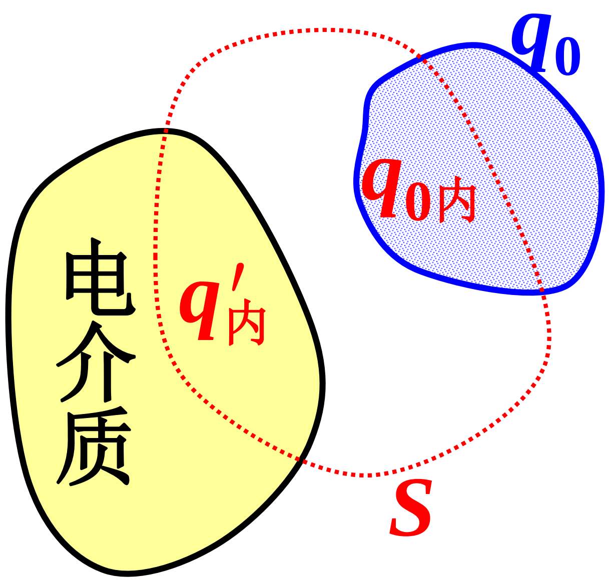
一种电介质材料所能承受的不被击穿的最大电场强度，叫做这种电介质的介电强度或击穿场强。

聚合物玻璃在高压放电时产生的分形击穿花样

放电产生的裂纹在材料中以分形方式扩展

15.3 $\vec{D}$的高斯定理

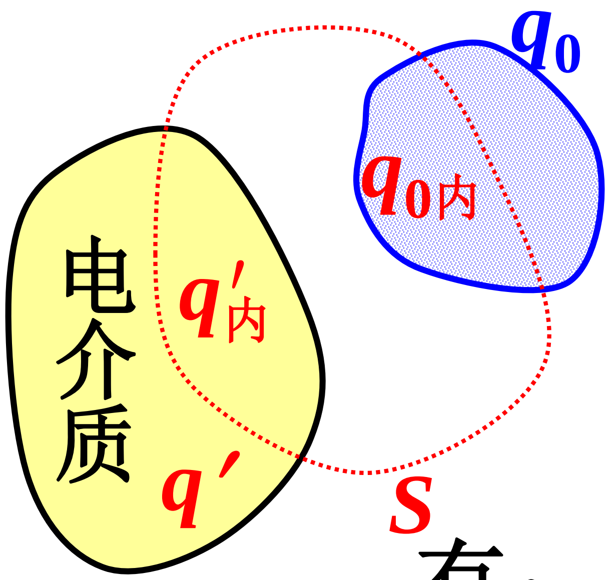
有电介质时静电场的规律



$$q' \to \vec{E}', q_0 \to \vec{E}_0, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_{0内} + \sum q'_{内}\right) \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

我们设法在方程中替换掉$q'_{内}$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_{0内} + \sum q'_内\right)$$

因 $\sum q'_内 = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{s}$

有： $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_{0内}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{s}$

$\therefore$ $\oint_s (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{s} = \sum q_{0内}$

令 $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$

$\vec{D}$称为电位移（electric displacement）

$\vec{D}$ 的高斯定理：

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_{0内}}$$

自由电荷

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$$

量纲：$[\vec{D}]=[\vec{P}]=[\sigma]$ 单位： C/m^2

各向同性线性介质 $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}}$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}}$$ 介质方程

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ 称为介质的介电常量（电容率）

在具有某种对称性的情况下，可由高斯定理解出 $\vec{D}$

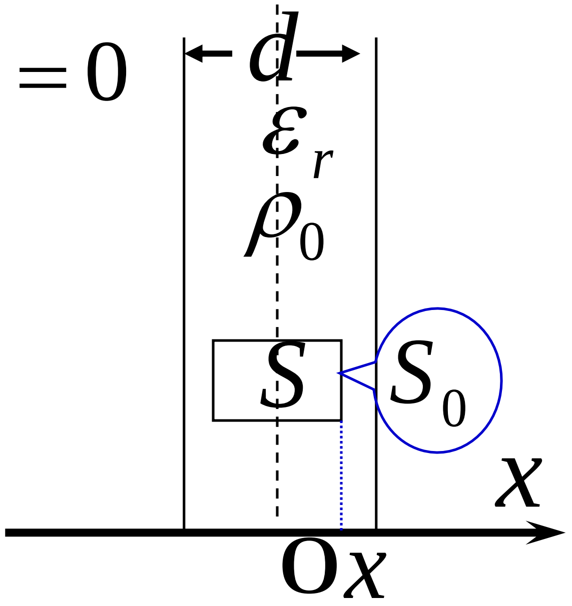
即 $\vec{D} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{P} \Rightarrow \sigma' \Rightarrow q'$

例15.3 一无限大各向同性均匀介质平板厚度为d，相对介电常量为ε_r，内部均匀分布体电荷密度为ρ_0 的自由电荷。

求：介质板内、外的$\vec{\mathbf{D}}$、$\vec{\mathbf{E}}$、$\vec{\mathbf{P}}$。

解： 面对称 $\vec{D}\ \vec{E}\ \vec{P} \perp$平板

取坐标系如图 $x=0$ 处 $E=0$



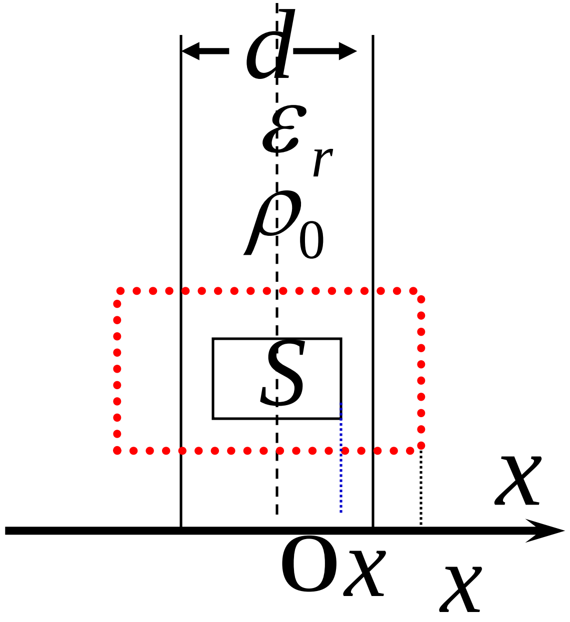
以 $x=0$ 处的面为对称

过场点作正柱形高斯面 S

底面积设 S_0

$$|x| \le \frac{d}{2} \qquad 2DS_0 = \rho_0 2|x| S_0$$

$$\boxed{D = \rho_0 |x|} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho_0 |x|}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$



$$P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E = (\varepsilon_r - 1) \frac{\rho_0 |x|}{\varepsilon_r}$$

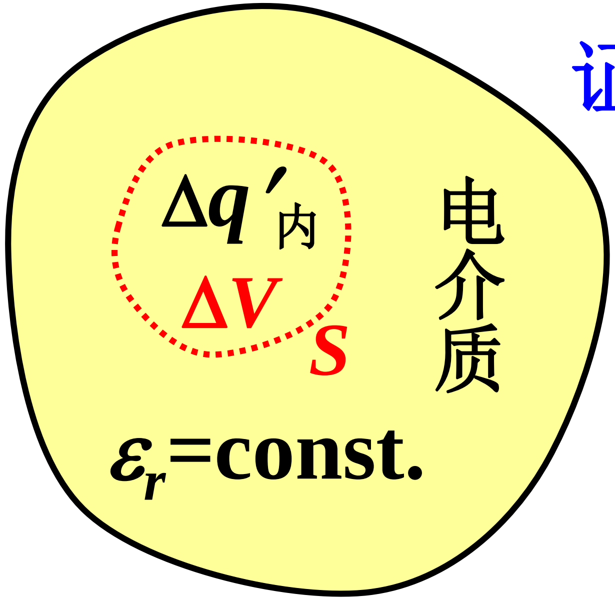
$$|x| \ge \frac{d}{2} \qquad 2DS_0 = \rho_0 S_0 d$$

$$\boxed{D = \frac{\rho_0}{2} d} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}$$

均匀场

$$P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E = 0$$

例15.4 证明各向同性线性均匀介质内$\rho_0=0$处必有$\rho'= 0$。



证：

$$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}$$

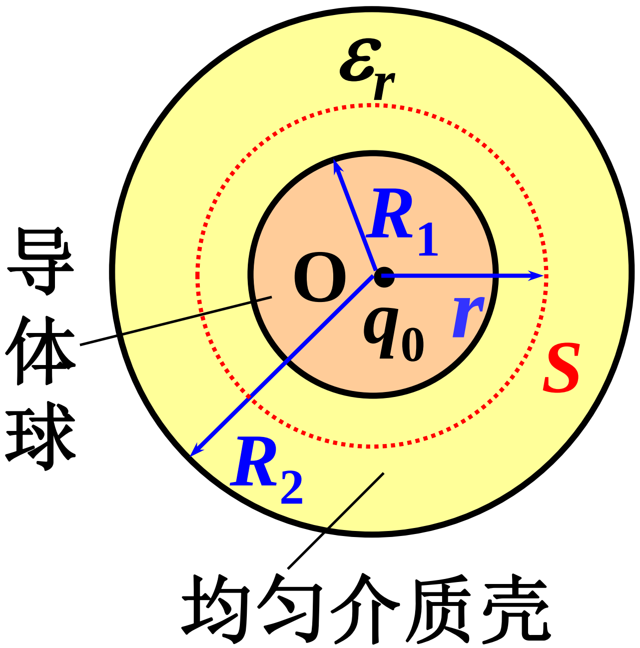
$$=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\vec{D}$$

$$\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\nabla\cdot\vec{D}=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\rho_0$$

$$\therefore\quad \rho_0=0\rightarrow\rho'=0\text{。}$$

例15.5 已知：导体球R_1、q_0， 均匀介质球壳R_2、ε_r。



求：$\vec{E}$，q'的分布。

解：导体球内：$\vec{E}_{内}=0$

导体球外：介质和电场球对称，

$$\vec{D}=D(r)\hat{r}$$

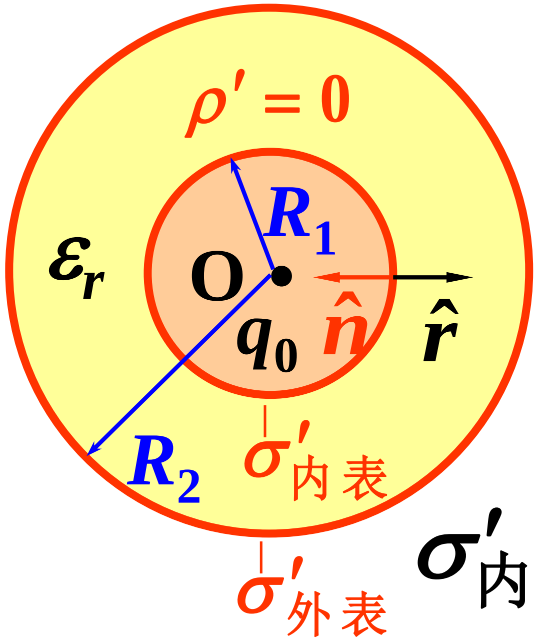
选高斯面S，令其半径$r>R_1$，

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}=D\cdot 4\pi r^2 \overset{(高)}{=} q_0 \rightarrow \vec{D}=\frac{q_0}{4\pi r^2}\hat{r}$$

介质外：$\vec{E}_{外}=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}=\vec{E}_0$

介质内：$\vec{E}_{介}=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}=\dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$

下面求极化电荷q'的分布：



介质内部：$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_r = 常数 \\ \rho_0 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \rho' = 0$

介质内表面：

$$\sigma'_{内表} = P_n\Big|_{r=R_1} = \vec{P}\cdot(-\hat{r})\Big|_{r=R_1}$$

$$= (1-\frac{1}{\varepsilon_r})\vec{D}\cdot(-\hat{r})\ \Big|_{r=R_1}$$

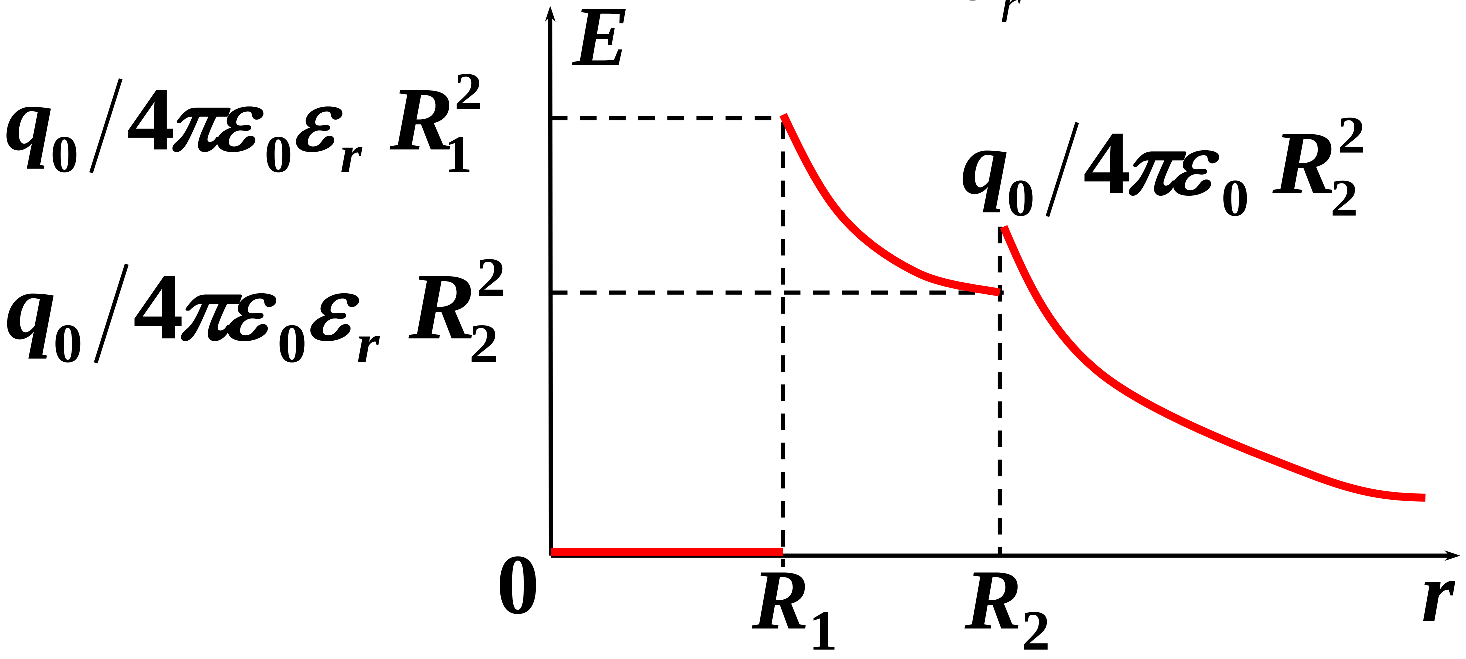
$$= -(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q_0}{4\pi R_1^2} = -(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$

$$q'_{内表} = 4\pi R_1^2\cdot\sigma'_{内表} = -(1-\frac{1}{\varepsilon_r})q_0$$

介质外表面：

$$\sigma'_{外表} = P_n\Big|_{r=R_2} = \vec{P}\cdot\hat{r}\Big|_{r=R_2} = (1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q_0}{4\pi R_2^2}$$

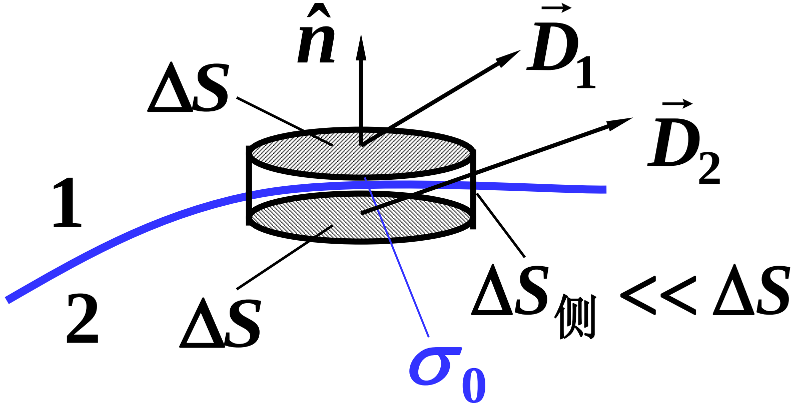
$$q'_{外表} = 4\pi R_2^2 \cdot \sigma'_{外表} = (1-\frac{1}{\varepsilon_r})\cdot q_o = -q'_{内表}$$



思考 为什么曲线不连续？

静电场的边界条件

1.界面的法向： $\oint\limits_{\text{扁柱体面}} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \vec{D}_1\cdot(\Delta S\,\hat{n}) + \vec{D}_2\cdot[(\Delta S(-\hat{n})]$



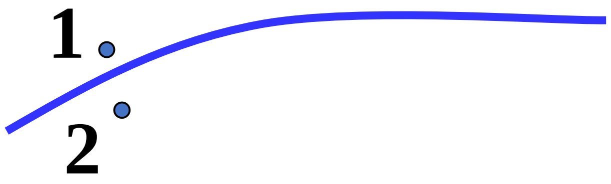
$$= (D_{1n} - D_{2n})\Delta S \underset{（高）}{=} \sigma_0 \Delta S$$

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \sigma_0} \quad \vec{n}: 2 \rightarrow 1$$

由于 $D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 - \varepsilon_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2 = -\sigma_0$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

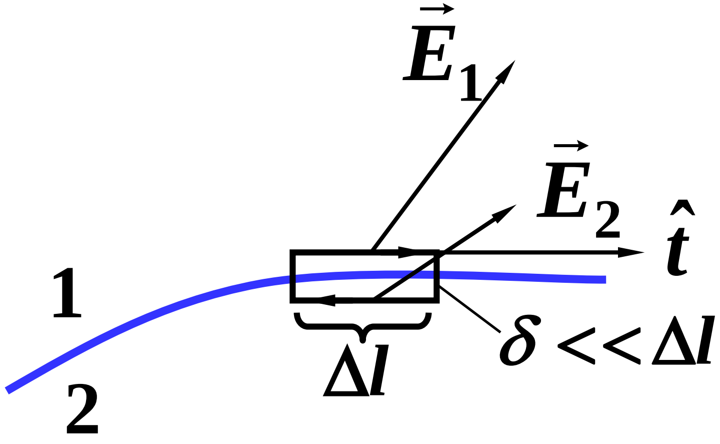


$$\varphi_1 = \varphi_2$$

2.界面的切向：

$$\oint_{\text{扁矩形边}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \vec{E}_1\cdot(\Delta l\cdot\hat{t}) + \vec{E}_2\cdot(-\Delta l\cdot\hat{t})$$

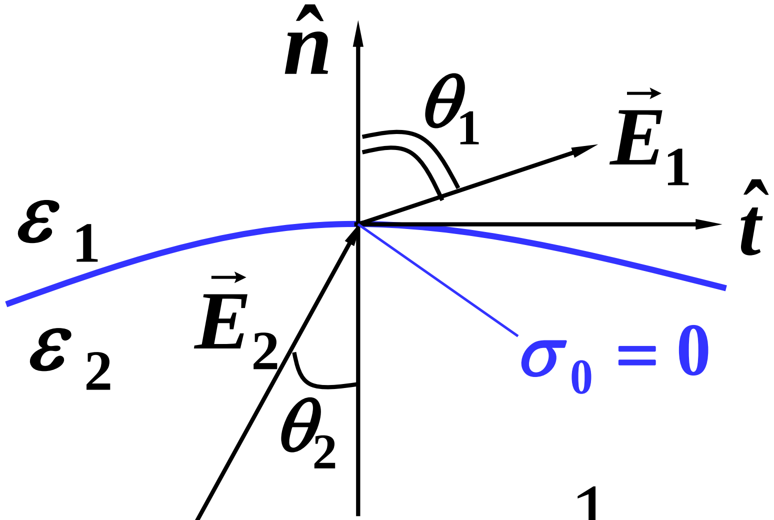
$$= (E_{1t} - E_{2t})\Delta l \underset{（环）}{=} 0$$



$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

3.对各向同性线性介质交界面

若 $\sigma_0 = 0$，则 $D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$ ①



$E_{1t} = E_{2t}$ ②

$$\frac{②}{①}: \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$\vec{E}$线的“折射” $\frac{1}{\varepsilon_1}\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{1}{\varepsilon_2}\mathrm{tg}\,\theta_2 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\mathrm{tg}\,\theta_2$

若 $\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$，则 $\theta_1 > \theta_2$