第一章　解耦控制

基本概念

串联补偿器，$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$解耦，解耦阶常数，可解耦矩阵，静态解耦*

问题求解

一．线性定常系统的解耦阶常数α_i和可解耦矩阵$\mathbf{D}_0$

（1）给定系统的状态方程$(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$

$$\alpha_i \triangleq \min\{k \mid c_i^\tau A^{k-1} B \neq 0,\quad 1 \le k \le n\},\quad i=1,\cdots,m$$

$$\mathbf{D}_0=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^\tau\mathbf{A}^{\alpha_1-1}\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{c}_m^\tau\mathbf{A}^{\alpha_m-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}$$，注意，$\mathbf{D}_0$的第 i 行可在求α_i时确定。

（2）给定系统的传递函数阵$\mathbf{G}_O(s)$

设$\mathbf{G}_O(s)$第i行$\mathbf{g}_i^\tau(s)$各元同分母，其阶次为d_i，各元分子的最大阶次为n_i，则$\alpha_i=d_i-n_i$，$\mathbf{D}_0$第i行的各元等于$\mathbf{g}_i^\tau(s)$对应元分子n_i次幂项的系数。

二．线性定常系统的（动态）解耦问题

（1）串联补偿器方法

给定系统的传递函数阵$\mathbf{G}_O(s)$，通过串联一个补偿器$\mathbf{G}_C(s)$使得总的传递函数阵$\mathbf{G}_L(s)$是非奇异对角阵.

必要条件：输入个数不少于输出个数

输入与输出个数相等时，可采用 $\mathbf{G}_C(s)=\mathbf{G}_O^{-1}(s)\mathbf{G}_L(s)$，该方法可实现的充分必要条件是：$\mathbf{G}_O(s)$可逆，且$\mathbf{G}_L(s)$的选择应保证$\mathbf{G}_C(s)$分母的幂次不低于分子。

（2）$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$方法—状态反馈+输入变换

给定系统的状态方程$(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$，通过状态反馈+输入变换使得$\mathbf{G}_L(s)=\mathrm{diag}[1/\psi_1^*(s),\ \cdots,\ 1/\psi_m^*(s)]$，$\psi_i^*(s)$是第 i 个子系统希望的特征多项式：$\psi_i^*(s)=s^{\alpha_i}+\beta_{i1}s^{\alpha_i-1}+\ \cdots\ +\beta_{i\alpha_i}$。

$$\mathbf{u}=\mathbf{Rv}-\mathbf{Fx},\quad \mathbf{R}=\mathbf{D}_0^{-1},\quad \mathbf{F}=\mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{L}$$

$$\mathbf{D}_0=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^\tau\mathbf{A}^{\alpha_1-1}\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{c}_m^\tau\mathbf{A}^{\alpha_m-1}\mathbf{B}\end{bmatrix},\quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^\tau\psi_1^*(\mathbf{A})\\ \vdots\\ \mathbf{c}_m^\tau\psi_m^*(\mathbf{A})\end{bmatrix}$$

该方法可实现的充分必要条件是：D_0可逆

四．线性定常系统的静态解耦问题*

给定系统的状态方程$(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$，通过状态反馈+输入变换使得$\mathbf{G}_L(0)$（静态增益阵）是希望的非奇异对角阵.

第二章　抗外扰控制

基本概念

外扰，外扰模型，完全不变性，静态不变性，顺馈（前馈），顺馈补偿，匹配条件，鲁棒性，鲁棒调节器，稳态无差，内模原理

问题求解

一．状态对外扰的完全不变性问题

系统：　$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Nw}$

控制律：$\mathbf{u} = -\mathbf{F_x x} - \mathbf{F_w w}$

目标：　$\mathbf{A}_L = \mathbf{A} - \mathbf{BF_x}$ 渐稳，$\mathbf{N}_L = \mathbf{N} - \mathbf{BF_w} = 0$

匹配条件：$rank\,\mathbf{B} = rank[\mathbf{B}\quad \mathbf{N}]$

二．输出对外扰的完全不变性问题

系统：$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Nw} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx}\end{cases}$

控制律：$\mathbf{u} = -\mathbf{F_x x} - \mathbf{F_w w}$

目标：　$\mathbf{A}_L = \mathbf{A} - \mathbf{BF_x}$ 渐稳，$\mathbf{N_L} = \mathbf{N} - \mathbf{BF_w}$

$$\mathbf{C}[\mathbf{N}_L\quad \mathbf{A}_L\mathbf{N}_L\quad \cdots\quad \mathbf{A}_L^{n-1}\mathbf{N}_L] = 0$$

有时仅靠状态反馈就能满足上式，必要条件是：$\mathbf{CN} = 0$。

三．输出对外扰的静态不变性问题（静态无差问题）

系统：$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Nw} \\ \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{Mw} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Dw}\end{cases}$

外扰引起的状态的强制解：

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{Pw}(t)\text{，其中}\mathbf{P}\text{满足}\ \mathbf{AP} - \mathbf{PM} = \mathbf{N}$$

控制律：$\mathbf{u} = -\mathbf{F_x x} - \mathbf{F_w w}$

目标：$\mathbf{A}_L = \mathbf{A} - \mathbf{BF_x}$ 渐稳，$\mathbf{N}_L = \mathbf{N} - \mathbf{BF_w}$

$$\begin{cases}\mathbf{A}_L\mathbf{P}-\mathbf{PM}=\mathbf{N}_L\\ \mathbf{CP}=\mathbf{D}\end{cases}$$ 联立有解

解法：令$\mathbf{F_w}-\mathbf{F_x}\mathbf{P}=\mathbf{Q}$，上述方程组变为：

$$\begin{cases}\mathbf{AP}-\mathbf{PM}+\mathbf{BQ}=\mathbf{N}\\ \mathbf{CP}=\mathbf{D}\end{cases}$$

（1）根据上面的方程组求解 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 矩阵；

（2）设计状态反馈阵$\mathbf{F_x}$，使$\mathbf{A}-\mathbf{BF_x}$渐稳；

（3）求出顺馈补偿阵$\mathbf{F_w}=\mathbf{Q}+\mathbf{F_x}\mathbf{P}$。

四．常值扰动下的鲁棒调节器问题*

第三章 最优控制

基本概念

宗量，泛函，宗量的变分，泛函的变分，泛函的极值，

最优控制，线性二次型最优调节器，有(无)限时间状态调节器

问题求解

一．泛函

（1）泛函 $J=\int_{x_1}^{x_2}F\,[y_1(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ x]\,d\,x$，则：

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1(x)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y_n}\delta y_n(x)\right]d\,x$$

（2）必要条件：$\delta J[x^*(t)]=0$（对应于微积分中的驻点条件）

二．求解一般最优控制问题

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)，\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$

$$J[\mathbf{u}(\cdot)]=\phi[\mathbf{x}(t_f),\ t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)\,d\,t$$

若t_f固定，$\mathbf{x}(t_f)$自由，最优解应满足如下必要条件：

H 函数：　$H(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \lambda,t)=\lambda^T\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)+L(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)$

控制方程：　$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}=0$（$\mathbf{u}$受限于闭集时，$\mathbf{u}^*$使 H 取最值）

正则方程：　$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) & \textit{状态方程}\\ \dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} & \textit{协态方程}\end{cases}$$

边界条件：$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \textit{初始条件} \\ \lambda(t_f) = \dfrac{\partial\phi(\mathbf{x}(t_f),t_f)}{\partial\mathbf{x}(t_f)} & \textit{末端条件} \end{cases}$

若t_f固定，$\mathbf{x}(t_f)$也固定，上述末端条件应改为：$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$。

若t_f固定，$\mathbf{x}(t_f)$受约束，或t_f可变的其它情况，参阅课件。

四．线性系统有限时间调节器问题

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}(t)\mathbf{u}]\,d\,t$$

最优控制可表达成状态的线性反馈，但反馈阵通常是时变的：

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)，J^* = (1/2)\,\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

其中$\mathbf{P}(t)$是下述 Riccati 矩阵微分方程的解：

$$\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0，\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{F}$$

五．线性定常系统无限时间调节器问题

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]\,d\,t$$

最优控制可表达成状态的线性反馈，且反馈阵是定常的：

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t)，J^* = (1/2)\,\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}\mathbf{x}(t_0)$$

其中，$\mathbf{P}$是下述 Riccati 矩阵代数方程的解：

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

$\mathbf{P}$有解时，通常不唯一，应取非负定解。

$\mathbf{P}$有解的充分条件是：$(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$完全可控。

闭环渐稳的充分条件是：$(\mathbf{A},\ \mathbf{D})$完全能观，$\mathbf{Q} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}$。

第四章　离散时间系统

基本概念

采样控制*，离散时间状态方程，离散时间系统的最优控制*

问题求解

一．采样控制系统*

二．离散时间控制系统状态方程

（1）设连续时间系统的状态方程为$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$，采样周期为T。该系统离散化后的状态方程为：

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),$$

其中

$$G=e^{AT},\ \ H=\int_0^T e^{At}B\mathrm{d}t$$

（2）离散时间系统的渐近稳定性：$x(k)\to 0, k\to\infty$

线性定常系统渐稳的充分必要条件：G的所有特征值模小于 1。

三．离散时间系统的最优控制*

四．有限拍与无限拍最优调节器问题*

第四章　预测控制

基本概念

滚动优化，动态矩阵控制，基于状态方程的预测控制，预测控制稳定性分析

问题求解

一．　基本思想

滚动优化：看 P 步（预测），规划 L 步（控制），走一步

可以充分利用算力控制变化较快的对象

二．动态矩阵法

（1）预测模型：阶跃响应（非参数模型），只适用于稳定对象

（2）基于阶跃响应的输出预测；基于输出测量的预测校正

（3）　面向跟踪误差的控制优化

（4）　预测控制参数（预测窗口、控制窗口，阶跃响应序列长度等）选取原则

三．基于状态空间模型的预测控制

（1）预测模型：状态空间模型（参数模型），可用于不稳定对象

（2）预测校正：基于状态测量或估计

（3）面向跟踪误差的控制优化