Отчет по лабораторной работе 3

Рекурсия

Дата: 2025-10-10 **Семестр:** 3 курс 5 семестр **Группа:** ПИЖ-б-о-23-2(2) **Дисциплина:** Анализ сложности алгоритмов **Студент:** Мальцев Виталий Игоревич

Цель работы

Освоить принцип рекурсии, научиться анализировать рекурсивные алгоритмы и понимать механизм работы стека вызовов. Изучить типичные задачи, решаемые рекурсивно, и освоить технику мемоизации для оптимизации рекурсивных алгоритмов. Получить практические навыки реализации и отладки рекурсивных функций.

Практическая часть

Выполненные задачи

- [ ] Задача 1: Реализовать классические рекурсивные алгоритмы.
- [ ] Задача 2: Проанализировать их временную сложность и глубину рекурсии.
- [ ] Задача 3: Реализовать оптимизацию рекурсивных алгоритмов с помощью мемоизации.
- [ ] Задача 4: Сравнить производительность наивной рекурсии и рекурсии с мемоизацией.
- [ ] Задача 5: Решить практические задачи с применением рекурсии.

Ключевые фрагменты кода

```
# recursion.py
def factorial(n):
    """
    Вычисляет факториал положительного целого числа n рекурсивно.
    Аргументы:
        n: положительное целое число, для которого вычисляется факториал.
    Возвращает:
        n!, если n >= 1; -1 для некорректных (неположительных) аргументов.
    """
    if n == 1:
        return 1
    elif n > 1:
        return n * factorial(n-1)
    else:
        return -1

# Временная сложность: O(n)
# Глубина рекурсии: n


def fibbonachi(n):
```

```
    """
    Вычисляет n-ое число Фибоначчи рекурсивно.
    Аргументы:
        n: целое число (индекс) — позиция числа Фибоначчи в последовательности.
    Возвращает:
        n-ое число Фибоначчи
        -1 для некорректных (неположительных) аргументов.
    """
    if n > 0 and n < 3:
        return 1
    elif n > 2:
        return fibbonachi(n-1) + fibbonachi(n-2)
    else:
        return -1

# Временная сложность: O(2^n)
# Глубина рекурсии: n


def quick_power(val, p):
    """
    Быстрое возведение в степень (возведение val в целую степень p) рекурсивно.
    Аргументы:
        val: число — основание степени.
        p: целое число — показатель степени.
    Возвращает:
        val**p как результат возведения в степень.
    """
    if p < 0:
        return quick_power(1/val, -p)
    if p == 0:
        return 1
    if p % 2 == 0:
        return quick_power(val*val, p/2)
    else:
        return val*quick_power(val*val, (p-1)/2)

# Временная сложность: O(log p)
# Глубина рекурсии: log₂|p| (по основанию 2)
```

```
# memoization.py
import timeit
import matplotlib.pyplot as plt

# Глобальная переменная для подсчёта числа рекурсивных вызовов
fib_memo_calls = 0
fib_calls = 0


def naive_fibbonachi(n):
```

```
    """
    Вычисляет n-ое число Фибоначчи рекурсивно.
    Аргументы:
        n: целое число (индекс) — позиция числа Фибоначчи в последовательности.
    Возвращает:
        n-ое число Фибоначчи
        -1 для некорректных (неположительных) аргументов.
    """
    global fib_calls
    fib_calls += 1
    if n > 0 and n < 3:
        return 1
    elif n > 2:
        return naive_fibbonachi(n-1) + naive_fibbonachi(n-2)
    else:
        return -1


def fibbonachi_memoized(n, memo={}):
    """
    Вычисляет n-ое число Фибоначчи с мемоизацией.
    Аргументы:
        n: целое число — позиция числа Фибоначчи в последовательности.
        memo: словарь для хранения уже вычисленных значений Фибоначчи.
    Возвращает:
        n-ое число Фибоначчи
    """
    global fib_memo_calls
    fib_memo_calls += 1
    if n in memo:
        return memo[n]
    if n > 0 and n < 3:
        return 1
    elif n > 2:
        memo[n] = (fibbonachi_memoized(n-1, memo) +
                   fibbonachi_memoized(n-2, memo))
        return memo[n]
    else:
        return -1


def compare_fibbonachi(n):
    """
    Сравнивает результаты вычисления n-го числа Фибоначчи с мемоизацией и без.
    Аргументы:
        n: целое число — позиция числа Фибоначчи в последовательности.
    Возвращает:
        Словарь содержащий два ключа time, calls значениями
        которых являются кортежи из двух значений:
        (результат без мемоизации, результат с мемоизацией).
    """
    global fib_memo_calls
    global fib_calls
```

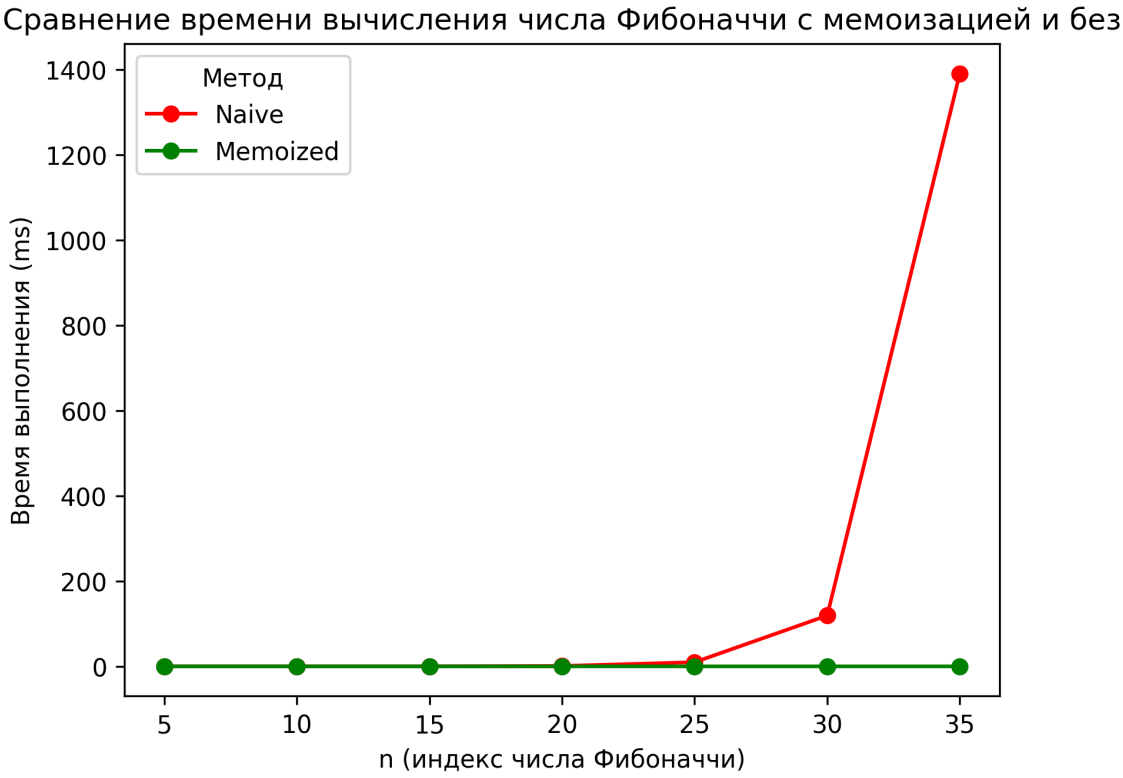
```
    start1 = timeit.default_timer()
    naive_fibbonachi(n)
    end1 = timeit.default_timer()
    fib_time = (end1 - start1) * 1000

    fib_count = fib_calls
    fib_calls = 0

    start2 = timeit.default_timer()
    fibbonachi_memoized(n)
    end2 = timeit.default_timer()
    fib_memo_time = (end2 - start2) * 1000

    fib_memo_count = fib_memo_calls
    fib_memo_calls = 0

    result = {"time": (fib_time, fib_memo_time),
              "calls": (fib_count, fib_memo_count)}

    return result


def Visualization(sizes):
    """
    Визуализация результатов замеров времени вычисления числа Фибоначчи
    с мемоизацией и без.
    """
    naive_times = []
    memoized_times = []
    print(sizes)
    for size in sizes:
        result = compare_fibbonachi(size)
        naive_times.append(result["time"][0])
        memoized_times.append(result["time"][1])

    plt.plot(sizes, naive_times, marker="o", color="red", label="Naive")
    plt.plot(sizes, memoized_times, marker="o", color="blue", label="Memoized")
    plt.xlabel("n (индекс числа Фибоначчи)")
    plt.ylabel("Время выполнения (ms)")
    plt.title("Сравнение времени вычисления "
              "числа Фибоначчи с мемоизацией и без")
    plt.legend(loc="upper left", title="Метод")
    plt.savefig("ОТЧЁТ/fibonacci_comparison.png", dpi=300, bbox_inches='tight')
    plt.show()

    # Характеристики вычислительной машины
    pc_info = """
    Характеристики ПК для тестирования:
    - Процессор: Intel Core i3-12100f
    - Оперативная память: 16 GB DDR4
    - ОС: Windows 11
    - Python: 3.12
    """
    print(pc_info)
```

```
    print(f"{naive_times} - naive \n {memoized_times} - memoized")
```

```
# recursion_tasks.py

import os


def binary_search_recursive(arr, target, left, right):
    """
    Рекурсивно ищет элемент target в отсортированном списке arr.
    Аргументы:
            arr: отсортированный список элементов.
            target: искомый элемент.
            left: левая граница поиска.
            right: правая граница поиска.
    Возвращает:
            Индекс target в arr, если найден, иначе -1.
    """
    if left > right:
        return -1
    mid = (left + right) // 2
    if arr[mid] == target:
        return mid
    elif arr[mid] > target:
        return binary_search_recursive(arr, target, left, mid - 1)
    else:
        return binary_search_recursive(arr, target, mid + 1, right)


def print_directory_tree(path, indent=""):
    """
    Рекурсивно выводит дерево каталогов и файлов, начиная с заданного пути.
    Аргументы:
        path: строка — путь к директории, с которой начинается обход.
        indent: строка — отступ для текущего уровня (служебный параметр).
    """
    print(f"{indent}{os.path.basename(path)}/")
    try:
        for entry in os.listdir(path):
            full_path = os.path.join(path, entry)
            if os.path.isdir(full_path):
                print_directory_tree(full_path, indent + "    ")
            else:
                print(f"{indent}    {entry}")
    except PermissionError:
        print(f"{indent}    [Permission Denied]")


def hanoi(n, source, target, auxiliary):
    """
```

```
    Рекурсивно решает задачу Ханойские башни для n дисков и 3 стержней.
    Аргументы:
        n: количество дисков.
        source: имя исходного стержня (строка).
        target: имя целевого стержня (строка).
        auxiliary: имя вспомогательного стержня (строка).
    """
    if n == 1:
        print(f"Переместить диск 1 с {source} на {target}")
        return
    hanoi(n-1, source, auxiliary, target)
    print(f"Переместить диск {n} с {source} на {target}")
    hanoi(n-1, auxiliary, target, source)
```

```
# main.py

from modules.recursion import factorial, fibbonachi, quick_power
from modules.memoization import compare_fibbonachi, Visualization
from modules.recursion_tasks import binary_search_recursive, print_directory_tree,
hanoi

# Демонстрация работы функций из модуля recursion
print(factorial(1), factorial(5), factorial(7), factorial(9), factorial(-1))
print(fibbonachi(1), fibbonachi(5), fibbonachi(
    7), fibbonachi(15), fibbonachi(-1))
print(quick_power(5, 7), quick_power(2, 21), quick_power(2, 65))

# Демонстрация работы функций из модуля memoization
print(compare_fibbonachi(35))

# Демонстрация работы функций из модуля recursion_tasks
arr = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19]
print(binary_search_recursive(arr, 7, 0, len(arr)-1))
print_directory_tree("./src")
hanoi(3, 'A', 'C', 'B')

# Демонстрация работы функции визуализации из модуля memoization
Visualization([5, 10, 15, 20, 25, 30, 35])
```




```
1 120 5040 362880 -1
1 5 13 610 -1
78125 2097152 36893488147419103232
{'time': (1691.8096999870613, 0.01950000296346843), 'calls': (18454929, 67)}
3
src/
    main.py
    modules/
        memoization.py
        recursion.py
        recursion_tasks.py
        __pycache__/
            memoization.cpython-313.pyc
            recursion.cpython-313.pyc
            recursion_tasks.cpython-313.pyc
Переместить диск 1 с A на C
Переместить диск 2 с A на B
Переместить диск 1 с C на B
Переместить диск 3 с A на C
Переместить диск 1 с B на A
Переместить диск 2 с B на C
Переместить диск 1 с A на C
[5, 10, 15, 20, 25, 30, 35]

    Характеристики ПК для тестирования:
    - Процессор: Intel Core i5-12500H @ 2.50GHz
    - Оперативная память: 32 GB DDR4
    - ОС: Windows 11
    - Python: 3.12

[0.00200001522898674, 0.008300004992634058, 0.08760002674534917, 0.9333000052720308, 9.689200000138953, 119.132299994817, 1390.3521000174806] - naive
 [0.001400010660290718, 0.000300002284348011, 0.000300002284348011, 0.000100000761449337, 0.000699976226314902 3, 0.0020999868866056204, 0.0027999922167509794] - memoized
```

Ответы на контрольные вопросы

Ответы на вопросы по теме "Рекурсия"

1. Базовый случай и рекурсивный шаг. Почему отсутствие базового случая приводит к ошибке

- **Базовый случай (условие выхода)** — Обязательное условие, которое прекращает рекурсивные вызовы и предотвращает зацикливание.

- **Рекурсивный шаг** — Шаг, на котором задача разбивается на более простую подзадачу того же типа и производится рекурсивный вызов.

Если **базового случая нет**, функция будет вызывать саму себя бесконечно, что приведёт к **переполнению стека вызовов (RecursionError)** — программа не сможет завершить вычисления.

---

2. Как работает мемоизация и как она влияет на вычисление чисел Фибоначчи

Мемоизация — Техника оптимизации, позволяющая избежать повторных вычислений результатов функций для одних и тех же входных данных путем сохранения ранее вычисленных результатов в кеше (например, в словаре).

Пример влияния на сложность:

- **Наивная рекурсия** для чисел Фибоначчи: `O(2^n)` — из-за повторных пересчётов одних и тех же значений.
- **С мемоизацией**: `O(n)` — каждое значение вычисляется один раз и сохраняется.

---

3. Проблема глубокой рекурсии и её связь со стеком вызовов

Каждый рекурсивный вызов занимает место в **стеке вызовов**, где хранятся локальные переменные и адрес возврата.
При слишком большой глубине рекурсии стек переполняется, и программа завершает работу с ошибкой `RecursionError`.
Это особенно актуально для языков с ограниченным размером стека (например, Python по умолчанию ограничивает глубину до ~1000 вызовов).

---

4. Алгоритм решения задачи о Ханойских башнях для 3 дисков

Задача: нужно переместить 3 диска с **стержня A** на **стержень C**, используя **стержень B** как вспомогательный.

Алгоритм:

1. Переместить 2 верхних диска с A → B (используя C как вспомогательный).
2. Переместить нижний (третий) диск с A → C.
3. Переместить 2 диска с B → C (используя A как вспомогательный).

Последовательность шагов:

1. A → C
2. A → B
3. C → B
4. A → C
5. B → A
6. B → C

7. A → C

Всего шагов: $7 = 2^3 - 1$.
Общая сложность: **$O(2^n)$**.

---

5. Рекурсивные и итеративные алгоритмы: преимущества и недостатки

Подход	Преимущества	Недостатки
Рекурсивный	Простой и наглядный код, легко описывает задачи, основанные на самоподобии (деревья, графы, Ханойские башни).	Использует стек вызовов, может вызвать переполнение при большой глубине; иногда медленнее из-за накладных расходов на вызовы функций.
Итеративный	Эффективен по памяти, не зависит от глубины рекурсии, быстрее при больших объёмах данных.	Код может быть сложнее и менее интуитивен для задач с рекурсивной природой.
