Thema

Die Collatz-Vermutung

Komplexe Leistung

vorgelegt von

Paul Mennicken

St. Benno Gymnasium Dresden

Klasse 10 b

Fach: Mathematik

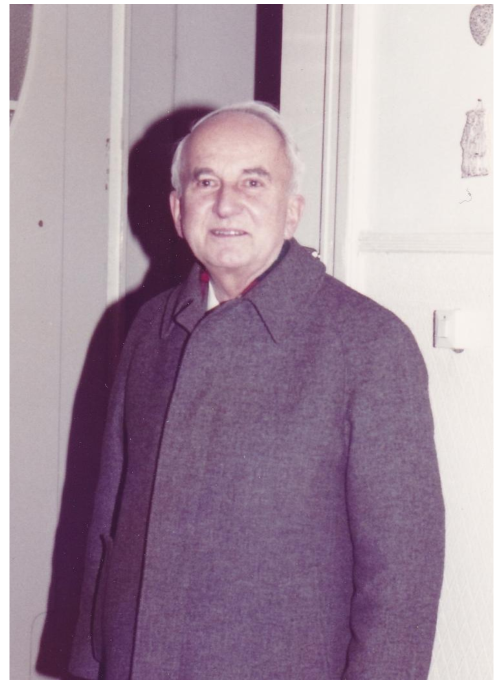
Betreuerin: Frau Nentwig

abgegeben am:

10. Juni 2022

Gliederung

1. Wissenswertes über Lothar Collatz



Bildquelle 1: Lothar Collatz (siehe Quellen)

Lothar Collatz (06.07.1910 - 26.09.1990) war ein deutscher Mathematiker.
Nach dem Abitur studierte er von 1928 bis 1933 Mathematik und Physik an verschiedenen Universitäten (z.B. Berlin und Göttingen).
Sein Staatsexamen legte er 1933 bei Richard von Mises (Mathematik) und Erwin Schrödinger (Physik, Nobelpreisträger 1933) ab.

Zwei Jahre später promovierte er bei Alfred Klose und Erhard Schmidt. Als Doktorvater gilt allerdings Richard von Mises, der 1933 aufgrund der NS-Machtergreifung aus Deutschland fliehen musste.
Dem Wikipedia-Eintrag zu seiner Person ist zu entnehmen, dass er seit 1933 der SA-Sturmabteilung und seit 1937 auch Mitglied der NSDAP gewesen ist.

1937 veröffentlichte er eine Vermutung, was unter dem Namen “Das Collatz-Problem” bekannt geworden ist. Was diese Vermutung beinhaltet, soll in dieser Arbeit aufgezeigt werden.

Ab 1952 war er als Professor für angewandte Mathematik bis zu seinem Tod an der Universität Hamburg tätig. Er gründete das Institut für angewandte Mathematik in Hamburg.
Collatz gilt als großer Vertreter der numerischen Mathematik und hat damit große Anerkennung erlangt. In seinem Leben hat er sieben Ehrenpromotionen bekommen, darunter eine Ehrenpromotion der TU Dresden (1990).

2. Vorstellung der Collatz-Vermutung

Collatz äußerte 1937 eine Vermutung, die als Collatz-Problem bekannt ist. Bis heute konnte nicht eindeutig bewiesen werden, dass seine Vermutung für alle natürlichen Zahlen gilt.

Seine Vermutung wird auch als (3n+1)-Vermutung bezeichnet.

Die Vermutung bezieht sich auf Zahlenfolgen, die nach einfachen Regeln gebildet werden:

- Beginne mit irgendeiner natürlichen Zahl n > 0
- Ist n gerade, so teile als nächstes n / 2
- Ist n ungerade, so rechne als nächstes 3 n + 1
- Wiederhole diesen Algorithmus mit der jeweils erhaltenen Zahl.

Die aus diesem Algorithmus folgende Collatz-Vermutung lautet:

“Jede so konstruierte Zahlenfolge mündet in den Zyklus 4, 2, 1, egal, mit welcher natürlichen Zahl n > 0 man beginnt.” (wikipedia)

Die Collatz Vermutung kann also in drei Regeln beschrieben werden (Collatzregeln; CR):

CR 1: Eine Zahl die gerade ist, wird sie durch zwei geteilt

CR 2: Eine Zahl, die ungerade ist, wird mit drei multipliziert und danach um 1 addiert

CR 3: Der Algorithmus gilt als fertig, wenn 1 erreicht wurde

Diese Regeln lassen sich natürlich auch mathematisch darstellen:

$$C(n) = \begin{cases} n/2 & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \\ 3n+1 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Die Frage “Enden wirklich alle natürliche Zahlen in dieser 4-2-1- Schleife, wenn man die Collatz-Regeln anwendet” zu beantworten und einen Beweis für diese Behauptung für alle natürlichen Zahlen aufzuzeigen, ist der schwierigste Punkt in der Beweisführung.

In den weiteren Abschnitten werden Beispiele für einige Zahlen unter Anwendung der Collatz-Regeln aufgezeigt.

2.1 Beispielrechnung für n = 100

Starten wir also mit der Zahl 100. Die Zahl 100 ist gerade, also wird diese durch zwei geteilt: $100/2 = 50$. 50 ist unsere nächste Zahl und auch diese ist gerade und kann durch 2 geteilt werden: $50/2 = 25$. Nun ändert sich die Vorgehensweise, denn 25 ist ungerade! Wir dürfen sie also nicht durch zwei teilen. Nun kommt die nächste Regel zum Einsatz: 3n + 1. Die Zahl 25 wird mit 3 multipliziert und 1 dazu addiert. Das Ergebnis lautet: $25 * 3 + 1 = 76$.

Eine vollständige Zahlenreihe für die Zahl 100 nach dem angewendeten Collatz-Algorithmus würde dann so aussehen:

100 ⇒ 50 ⇒ 25 ⇒ 76 ⇒ 38 ⇒ 19 ⇒ 58 ⇒ 29 ⇒ 88 ⇒ 44 ⇒ 22 ⇒ 11 ⇒ 34 ⇒ 17 ⇒ 52 ⇒ 26 ⇒ 13 ⇒ 40 ⇒ 20 ⇒ 10 ⇒ 5 ⇒ 16 ⇒ 8 ⇒ 4 ⇒ 2 ⇒ 1

Nun sind wir bei eins angekommen. Die letzte Regel tritt ein. Der Algorithmus ist beendet.

Diese Collatz-Reihe kann, wie jede andere mit den Collatz-Regeln angewandte Zahlenreihe, graphisch dargestellt werden:

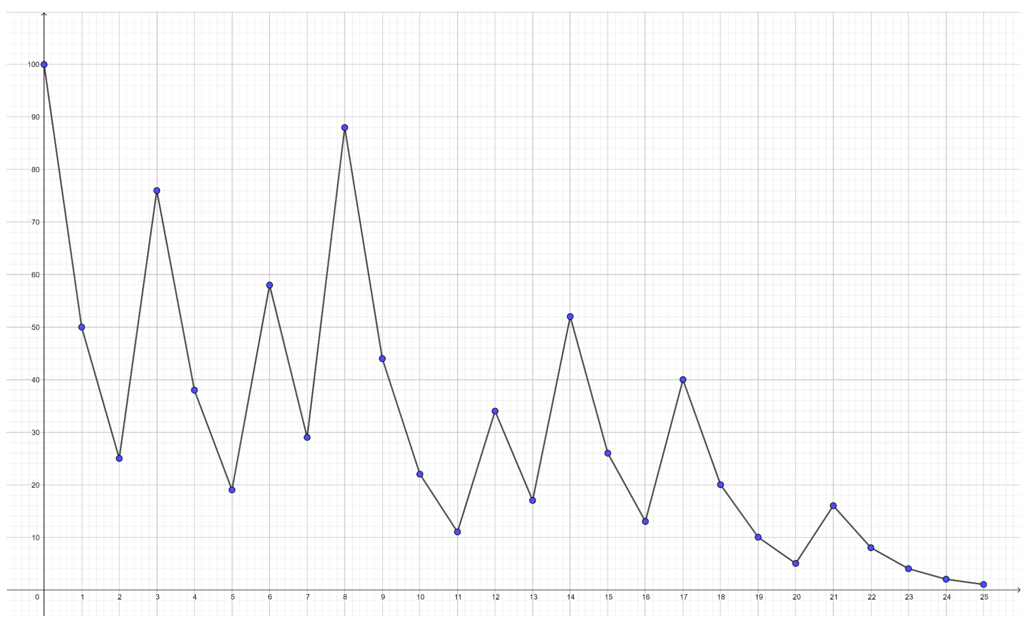


Abbildung 1: Darstellung der Zahlenreihe zur Zahl 100 nach Anwendung der Collatz-Regeln

Es ist zu beobachten, dass die sich durch den o.g. anzuwendenden Algorithmus ergebenden Zahlen zunächst kleiner und wieder größer werden, dann aber, wie in der Vermutung beschrieben, in der Reihenfolge 4-2-1- enden.

Das Gleiche kann natürlich auch mit kleineren Zahlen durchgeführt werden.

2.2 Beispielrechnungen für n = {1, 3, 5 , … , 19}

In der folgenden Tabelle wird der angewendete Algorithmus für die Zahlen 1- 20 dargestellt. Dabei liegt der Schwerpunkt vorwiegend auf den ungeraden Startzahlen. Die geraden Startzahlen werden nur für die ersten Zahlen dargestellt, da im Laufe des Algorithmus in die ungeraden Startzahlen münden. Dies ist z.B. an der Zahl 10 gut erkennbar: 10 / 2 = 5, danach kommt die Zahlenreihe der Zahl 5 zustande, die bereits dargestellt wurde.

1	4, 2, 1, …
2	1, 4, 2, 1, …
3	10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …
4	2, 1, …
5	16, 8, 4, 2, 1, …
6	3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …
7	22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …
8	4, 2,1, …
9	28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …
10	5, 16, 8, 4, 2, 1, …
11	34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …
13	13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …
15	46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …
17	17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …
19	19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …

Die dargestellten Zahlen enden mit der Zahlenreihe 4, 2, 1, was Collatz auch in seiner Vermutung geäußert hat.

3. Vorstellung von drei Lösungsansätzen

Die Collatz-Vermutung gilt als eines der ungelösten Probleme der Mathematik. Die Frage, die es zu beweisen gilt, lautet: Enden wirklich alle natürliche Zahlen in einer 4-2-1- Schleife, wenn man die Collatz-Regeln anwendet? Diese Behauptung für alle natürlichen Zahlen zu beweisen, ist der schwierigste Punkt. Obwohl die Collatz-Vermutung so denkbar einfach formuliert ist, könnte man annehmen, dass es doch ein Klacks sein sollte, diese Vermutung zu lösen. Dem ist aber nicht so!

Immer wieder wurden Gelder und Preise zur Lösung des Problems ausgelobt. Es gab bisher einige vielversprechende Ansätze, die dennoch keinen Beweis für alle natürlichen Zahlen lieferten. Die vorgelegten Lösungsansätze sind meist nur von Mathematikern zu verstehen. Auch wenn die Beweisführungen für Laien nicht nachvollziehbar sind, sollen an dieser Stelle drei wichtige Ansätze genannt werden.

3.1 Die Idee des Hamburger Mathematikers Gerhard Opfer

Im Jahr 2010 veröffentlichte Gerhard Opfer, Nachfolger von Lothar Collatz an der Universität Hamburg, einen Beweis der Collatz Vermutung. Sein Lösungsvorschlag kommt aus dem Gebiet der Funktionentheorie. Sie ist ein Teilgebiet der Mathematik, in dem die Eigenschaften von Funktionen für komplexe Zahlen untersucht werden.

Gerhard Opfer selbst wird in "Spiegel online" vom 5. Juni 2011 zitiert: "Die Collatz-Vermutung hat eine Vielzahl von Arbeiten ausgelöst. Es wäre eigentlich schade, wenn sie jetzt bewiesen ist, denn dann wäre es damit ja vorbei."

Der vorgelegte Beweis von G.Opfer wurde nach einer Begutachtung allerdings 2011 widerlegt.

Diese Idee zeigt, wie schwer es ist, einen Beweis für die Lösung des Collatz-Problems vorzulegen.

3.2 Der Lösungsansatz von Terence Tao

Ein sehr aktueller und viel versprechender Lösungsansatz ist der von Terence Tao (*1975), ein australisch-US-amerikanischer Mathematiker.

2019 und 2022 publizierte Terence Tao ein mathematisches Paper, in dem er sich der Collatz Vermutung widmet. Für seine Beweisführung nutzt er die Differenzialrechnung.

Er konnte beweisen, dass die Collatz Vermutung auf fast alle natürlichen Zahlen zutrifft, aber eben nicht für alle natürlichen Zahlen. So sind Ausnahmefälle, die die Vermutung widerlegen würden, nicht ausgeschlossen. Dieser Beweis hat Terence Tao in der Mathematik-Gesellschaft dennoch einen großen Bekanntheitsgrad gesichert.
Terence Tao sagt über seinen Beweis, dass er interessant ist, aber wohl keinen Weg zur Lösung darstellt. Auch der Mathematiker Paul Erdós, ungarischer Mathematiker (1913-1996), meinte, dass er das Collatz-Problem für fast unlösbar halte.

3.3 Boinc - Computer “brute force” Projekt

Dieses Projekt wurde in Deutschland gegründet und besteht aus Freiwilligen, die Teile ihrer Rechenleistung ihrer PCs für dieses Projekt zur Verfügung stellen. Sie haben es sich zur Aufgabe gemacht, möglichst viele Zahlen auf die Collatz-Vermutung durch Ausprobieren zu prüfen. Bisher haben sie alle Zahlen bis 2^{68} geprüft und konnten bestätigen, dass alle diese Zahlen nach Anwendung des Algorithmus (Collatz-Regeln) in einer Schleife aus 4, 2, 1 enden.

3.4 Der Ansatz über das Binäre Zahlensystem

Zur Lösung von mathematischen Problemen kann es manchmal helfen, die zu lösenden Probleme in andere Zahlensysteme, z.B. das binäre Zahlensystem, zu übersetzen. So können wir die Zahlen aus unserem auf 10-basierenden Zahlensystem auf ein auf 2-basierendes Zahlensystem übersetzen.

Beispiel:
Anhand der Zahl 52 soll das Binäre Zahlensystem kurz dargestellt werden. Diese Zahl lässt sich wie folgt aufspalten:

32	16	8	4	2	1
1	1	0	1	0	0

Alle Zahlen, die in die Zahl 52 passen, werden mit “1” angegeben, die anderen mit “0”:
$32 + 16 + 4 = 52$
In das Binärsystem übersetzt, schreibt sich die Zahl 52 nun als 110100.

Nun müssen noch alle Regeln in das binäre System übersetzt werden:

CR 1: n / 2 - Teilung von geraden Zahlen:

Hierfür entfernt man im Binärsystem alle 0 am Ende der Zahl.

Bsp.:

52 ⇒ 26 ⇒ 13

110100 ⇒ 11010 ⇒ 1101

CR 2: 3n + 1 Multiplikation der ungeraden Zahlen:

Bei dieser Regel ist die mathematische Lösung etwas komplexer, da im Binärsystem nicht einfach mit 3 multipliziert werden kann. Allerdings kann eine Multiplikation umgestellt werden, die wie folgt aussehen kann: $3n + 1 = 2n + n + 1$. Diese Umstellung kann angewendet werden, da im Binärsystem mit 2 multipliziert werden kann.

Dabei wird am Ende der Zahl einfach eine “0” angehängt (Gegenteil von CR 1). Im Weiteren läuft die Addition genau wie im Dezimalsystem.

Wir führen das o.g. Beispiel mit der Zahl 52 weiter:

26	011010 +	$(2n)$ +
13	001101 +	(n) +
01	000001	(1)
----	**----------**	
40 =	**101000**	

Nun können wir die beiden Regel fortführen:

10100 ⇒ 1010 ⇒ 101 ⇒ 10000⇒ 1000⇒ 100⇒
10 ⇒ 1

20 ⇒ 10 ⇒ 5 ⇒ 16 ⇒ 8⇒ 4⇒ 2 ⇒ 1

Es kann festgehalten werden, dass sich die 3. Regel (Der Algorithmus gilt als beendet, wenn die Zahl 1 erreicht wurde.) nicht verändert hat, da sowohl im Dezimalsystem als auch im Binärsystem die Zahl 1 die letzte Zahl ist. Dieser Ansatz ist besonders für die computerspezifischen Lösungsansätze interessant.

4. Die Erstellung eines eigenen Skripts zur graphischen Darstellung der Collatz-Vermutung für n = 1 -10.000 bei Wikipedia

Für mich persönlich entstand bei der Beschäftigung mit dem Collatz-Problem die Frage, wie ich zu der Lösung des Problems beitragen kann, z.B. öffentlich und für jeden zugänglich auf Wikipedia.

Eine kleine Einführung in die Welt der Informatik.

Ich schreibe in diesem Teil ein Script, aber was ist ein Script überhaupt? Ein Script ist eine Datei (hier eine Python Datei), die Anweisungen für den Computer enthält, die ausgeführt werden können. Hierbei verwende ich die Programmiersprache Python. Sie eignet sich gut um den Algorithmus zu programmieren, da sie einfach zu lesen und auszuführen ist. Das Skript hilft mir letztendlich dabei, die Grafik zu generieren, damit ich keine 100.000 Punkte berechnen und zeichnen muss.

Hierfür möchte ich eine graphische Darstellung des Problems erstellen, da die bereits vorhandene Grafik nur den Zahlenbereich von 0 - 5000 umfasst. Also habe ich beschlossen, ein Skript zur Erstellung einer Grafik mit dem Zahlenbereich 0 - 100000 (anpassbar) zu erstellen.

Bei vielen Stilelementen habe ich mich für ähnliche (ggf. gleiche) Designs entschieden, um die Grafiken einheitlich, auch farblich gleich, zu gestalten. Da das Script ansich sehr simple ist, sowie die Vermutung, unterscheidet sich mein Script ggf. nur geringfügig von anderen dieser Art.

Um dies nun graphisch darzustellen benutze ich das *matplotlib* Modul. Die *matplotlib* Bibliothek muss zuerst importiert werden:

```python
import matplotlib.pyplot as plt
```

Um das Programm konfigurierbar zu machen, setze ich zwei Konfigurationsvariablen:

```python
MINIMUM = 1
MAXIMUM = 100000
```

Da wir einen zweidimensionalen Bereich haben, brauchen wir x und y Werte:

```python
x_values = range(MINIMUM,MAXIMUM+1)
y_values = []
```

Nun kommt die Schleife, um die y Werte zu errechnen:

```
for x in x_values:
    count = 0
    while x != 1:
        if x % 2 == 0:
            x /= 2
        else:
            x = 3*x + 1
        count += 1

    y_values.append(count)
```

Nun werden die Werte in den Plot (Graph) eingezeichnet. Zuerst wird der Funktion die x und y Werte gegeben. Danach wird bestimmt, wie die Punkte aussehen sollen. Das 'ro' steht für einen roten Kreis (r - red/rot; o - Kreis). Das bedeutet, dass die Werte in roten Punkten dargestellt werden. Damit die Punktgröße (markersize) nicht andere Punkte anschneidet, wird sie auf 1 gesetzt.

Dabei ergibt sich allerdings ein Problem: bei kleineren Zahlenräumen, wie 1 bis 100, sind die Punkte zu klein, um sie sichtbar zu machen. Um dies zu lösen, benutze ich das Randbreite-Argument (markeredgewidth ⇒ marker-edge-width). Da ich die Punktgröße auf 1 gesetzt habe, kann ich mir sicher sein, dass die Punkte nie verschwinden. So müssen die Punkte noch vergrößert werden, um sie sichtbar zu machen. Dafür setze ich dieses Argument in Abhängigkeit zum Zahlenbereich (MAXIMUM-MINIMUM). Da sich bei größeren Zahlenräumen kleinere Punkte ergeben müssen, muss die Formel dafür so aussehen: $Randbreite = Konstante/Zahlenraum$

Die Konstante beschreibt einen Wert, der einmalig im Programmcode festgelegt wird (entweder als Variable oder direkt bei einmaliger Verwendung) und nicht verändert wird.

Hier ein Beispiel:

Wenn $Konstante = 100$ und $Zahlenraum = 1000$, dann wäre die Randbreite 0,1 (100/1000). Bei einem Zahlenraum von 10 braucht es größere Punkte. Durch die o.g. Formel wäre die Randbreite 10. Diesen Wert für die Konstante habe ich ausprobiert und bekomme solide Resultate. Also fahre ich mit dem Wert 100 für die Konstante fort.

```
plt.plot(
    x_values,
    y_values,
    'ro',
    markersize=1,
    markeredgewidth=100/(MAXIMUM-MINIMUM)
)
```

Damit der Graph nur den gewollten Bereich zeigt, werden die Minimums und Maximums manuell gesetzt:

```
plt.xlim(xmin=MINIMUM-1, xmax=MAXIMUM)
plt.ylim(ymin=0)
```

Um die Grafik zu speichern und/oder anzuzeigen, brauchen wir noch diese beiden Funktionen:

```
plt.savefig(f"collatz_{MAXIMUM}.png",bbox_inches="tight",dpi=600)
plt.show()
```

Das Resultat sind nun so aus:

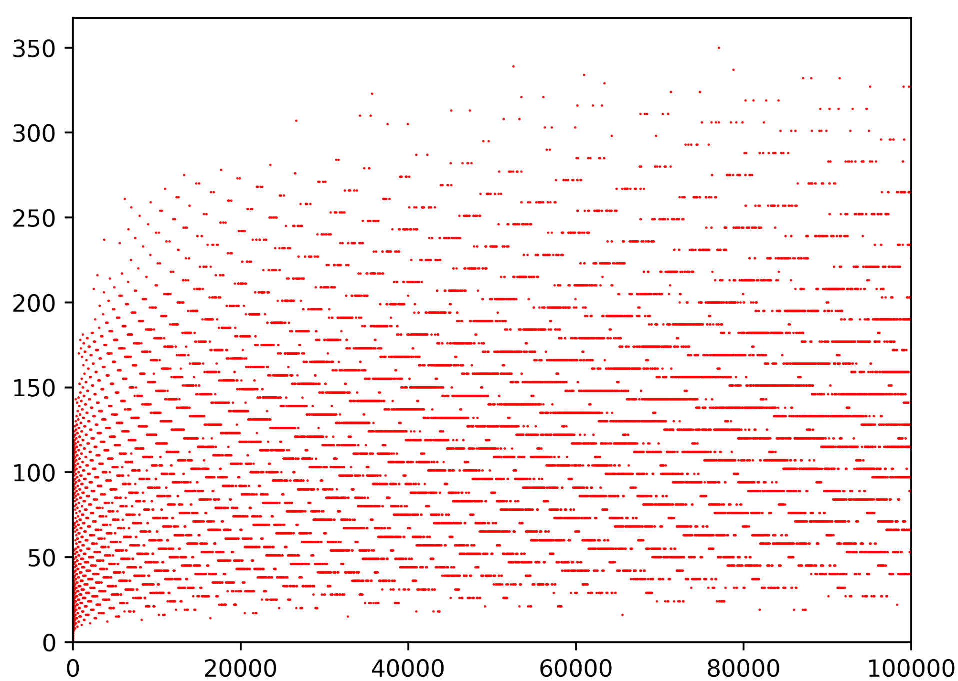


Abbildung 2: Darstellung des Zahlenbereichs 1-10.000

Da ich dies nun auf Wikipedia publizieren möchte, muss ich noch beschreibende Elemente hinzufügen. Hierfür orientiere ich mich an der bereits vorhanden Grafik (siehe Quellen). Auch hier habe ich auf ein einheitliches Aussehen geachtet.

Dieser Codeteil kommt vor dem letzten Codeteil zum Anzeigen der Grafik:

```
"""
# Deutsch (für eigene Verwendung)
plt.title("Collatz Vermutung")
plt.ylabel("Schritte um 1 zu erreichen")
plt.xlabel("Eingabe")
"""
# Englisch (für Wikipedia)
plt.title("Collatz Conjecture")
plt.ylabel("Iterations to 1")
plt.xlabel("input")
```

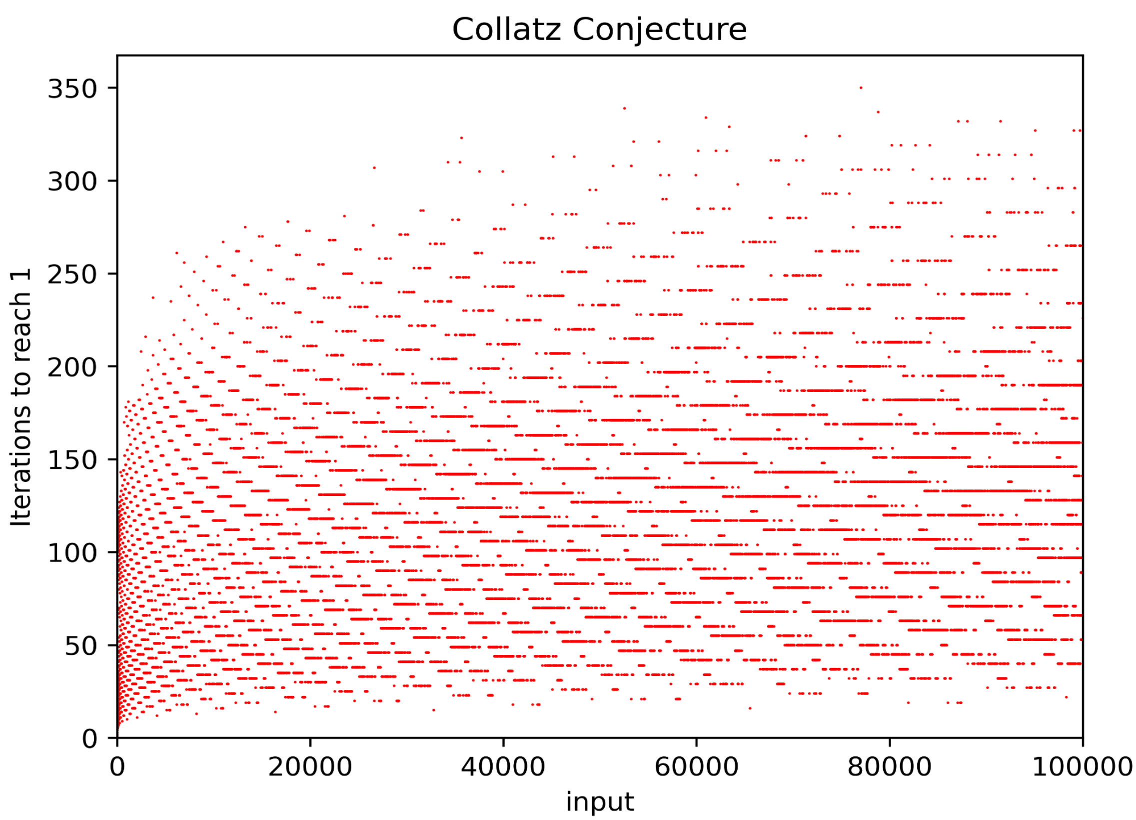


Abbildung 3: Collatz Conjecture

So sieht nun das fertige Resultat für meinen Beitrag zu Wikipedia aus, welchen ich am 24.04.2022 dort eingestellt habe.
Das komplette Skript kann hier angesehen werden: https://t.ly/3HJo

5. Eigene Abschlussgedanken zur Arbeit

Schon frühzeitig war mir klar, dass ich meine Komplexe Leistung im Fach Mathematik schreiben möchte. Welches Thema würde mich da besonders interessieren? Bei meiner Recherche bin ich auf die Collatz-Vermutung gestoßen. Sie ist so einfach formuliert, und dennoch gibt es noch keine eindeutige Lösung. Was für ein Gegensatz! Mich ließ dieses Thema nicht mehr los. Je mehr ich mich damit beschäftigte, umso mehr Ideen fand ich beim Recherchieren und auch eigene Lösungsansätze diskutierten wir zu Hause. Und das Ergebnis bei all dem immer gleich: es fehlt der Beweis, dass es für ALLE natürlichen Zahlen gilt! Ich persönlich finde faszinierend, dass eine Vermutung so einfach formuliert ist und doch so schwer zu beweisen ist.

6. Quellen

Bildquelle 1 , CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/), Eigenarbeit von Wikipeter-HH (Wikipedia Nutzer), Accessed 09 June 2022

Biener, Klaus. “Lothar Collatz.” *Fachbereich Mathematik*, 2019, https://www.math.uni-hamburg.de/home/collatz/. Accessed 23 April 2022.

bionic. “Collatz Conjecture.” *Collatz Conjecture*, https://boinc.thesonntags.com/collatz/. Accessed 24 April 2022.

Brennecke, Klaus. “Collatzfolgen und Schachbrett – Wikibooks, Sammlung freier Lehr-, Sach- und Fachbücher.” *Wikibooks*, 10 08 2007, https://de.wikibooks.org/wiki/Collatzfolgen_und_Schachbrett. Accessed 23 April 2022.

Cirne. “Collatz-Problem – Wikipedia.” *Wikipedia*, 2010, https://de.wikipedia.org/wiki/Collatz-Problem#/media/Datei:Collatz-stopping-time.svg. Accessed 23 April 2022.

Collatz, Lothar. *Collatz-Problem*, https://www.juergendankert.de/spezmath/html/collatzproblem.html. Accessed 24 April 2022.

Collatz, Lothar. “The Notorious Collatz conjecture.” *Terry Tao*, 2 1 2020, https://terrytao.files.wordpress.com/2020/02/collatz.pdf. Accessed 23 April 2022.

Dambeck, Holger. “Zahlenrätsel: Mathematiker zweifeln am Beweis der Collatz-Vermutung.” *Spiegel*, 15 June 2011, https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/zahlenraetsel-mathematiker-zweifeln-am-beweis-der-collatz-vermutung-a-768289.html. Accessed 24 April 2022.

Dambeck, Holger, and Lothar Collatz. “Collatz-Vermutung: Deutscher Mathematiker meldet Lösung für Zahlenrätsel.” *Spiegel*, 5 June 2011, https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/collatz-vermutung-deutscher-mathematiker-meldet-loesung-fuer-zahlenraetsel-a-766643.html. Accessed 24 April 2022.

Lagarias, Jeffrey C. “The 3x + 1 Problem: An Overview.” *AMS*, 2010, https://bookstore.ams.org/mbk-78/~~FreeAttachments/mbk-78-prev.pdf#page=14. Accessed 23 04 2022.

Müller, Oliver. “Die Collatz Vermutung – einfach zu verstehen, (fast) unmöglich zu meistern.” *SciLogs*, 15 February 2020, https://scilogs.spektrum.de/prosa-der-astronomie/die-collatz-vermutung-einfach-zu-verstehen-fast-unmoeglich-zu-meistern/. Accessed 9 June 2022.

Tao, Terence. “Almost all Collatz orbits attain almost bounded values.” *Terry Tao*, 10 September 2019, https://terrytao.wordpress.com/2019/09/10/almost-all-collatz-orbits-attain-almost-bounded-values/. Accessed 23 April 2022.

Tao, Terence. “ALMOST ALL ORBITS OF THE COLLATZ MAP ATTAIN ALMOST BOUNDED VALUES.” *1909.03562.pdf*, 2019, https://arxiv.org/pdf/1909.03562.pdf. Accessed 23 04 2022.

Università degli Studi dell'Insubria, and Terence Tao. “Day 2 - The notorious Collatz conjecture - Terence Tao.” *Youtube.com*, 30 10 2021, https://www.youtube.com/watch?v=X2p5eMWyaFs&ab_channel=Universit%C3%A0degliStudidell%27Insubria. Accessed 20 03 2022.

Veritasium. “The Simplest Math Problem No One Can Solve - Collatz Conjecture.” *YouTube*, 30 July 2021, https://www.youtube.com/watch?v=094y1Z2wpJg. Accessed 23 April 2022.

WikiMedia. “Collatz conjecture.” *Wikipedia*, https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture. Accessed 9 June 2022.

WikiMedia. “Collatz-Problem – Wikipedia.” *Wikipedia*, https://de.wikipedia.org/wiki/Collatz-Problem. Accessed 9 June 2022.