FISICA II

A.A. 2017/2018

Enrico Martini

FORZA ELETTROSTATICA E CAMPO ELETTROSTATICO

La materia stabile che ci circonda è formata da tre costituenti elementari, il protone (p), il neutrone (n) e l'elettrone (e).

$$m_p = m_n = 1{,}67 * 10^{-27}\ kg, \qquad m_e = 9{,}11 * 10^{-31}\ kg, \qquad e = 1{,}6022 * 10^{-19} C$$

Carica per strofinio

Processo in cui vengono separate, attraverso un agente meccanico, delle cariche (elettroni) e trasferite da un corpo ad un altro. La carica elettrica è quantizzata, la carica trasferita può assumere solo multipli interi della carica elementare.

Conduttori: corpi che non mantengono la carica.

Isolanti: corpi che si caricano per strofinio.

- Due corpi isolanti carichi entrambi positivamente o negativamente si respingono;
- Due corpi isolanti carichi uno negativamente e uno positivamente si attraggono;
- Nella carica per strofinio, i due oggetti che si strofinano acquisiscono carica opposta;

Principio di conservazione della carica elettrica

In un sistema elettricamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche elettriche rimane costante nel tempo ovvero si conserva.

Ionizzazione: fenomeno di sottrazione di elettroni che crea ioni negativi e ioni positivi.

Induzione elettrostatica: processo di separazione della carica tale per cui la carica elettrica all'interno di un oggetto viene ridistribuita a causa della presenza di un altro oggetto carico nelle vicinanze.

Legge di Coulomb

La forza è direttamente proporzionale al prodotto delle cariche elettriche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$$

$$\left(con\ k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}9875 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\right), \qquad F = [C] = [A * s]$$

Il versore $\vec{u}$ sarebbe: $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},\ con\ \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

La forza elettrostatica è conservativa, perciò:

- Il lavoro non dipende dal percorso;
- Il lavoro è esprimibile tramite una funzione;
- In un percorso ciclico il lavoro è nullo.

Principio di sovrapposizione: se in un sistema isolato composto da due cariche se ne aggiunge una terza, la relazione tra le prime due non cambia.

CAMPO ELETTROSTATICO

Il campo elettrostatico prodotto in un punto P da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrostatica risultante F che agisce su una carica di prova in P divisa per la carica stessa.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u} = \frac{\vec{F}}{q_0}\left[\frac{N}{C}\right]$$

Il campo elettrostatico in un punto prodotto da una <u>distribuzione discreta</u> di cariche puntiformi è espresso dalla seguente sommatoria:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{q_i * \vec{u}_{i0}}{4\pi\varepsilon_0 r_{i0}^2}$$

Il campo elettrostatico in un punto prodotto da una <u>distribuzione continua</u> di carica è espresso dall'integrale vettoriale:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varsigma * (r') * \vec{u}}{r'^2} dV$$

Linee di campo

La presenza di un sistema di cariche modifica lo spazio circostante, cioè una carica di prova posta in un qualsiasi punto risente della forza attribuita all'interazione con il campo elettrostatico.

Proprietà:

- Una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo elettrostatico in quel punto;
- Le linee di forza si addensano dove l'intensità del campo elettrostatico è maggiore;
- Le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo elettrostatico è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte;
- Le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative; qualora ci siano solo cariche di uno stesso segno le linee di forza si chiudono all'infinito.

LAVORO ELETTROSTATICO

Il lavoro svolto dalla forza elettrostatica per portare q da A a B è dato dall'opposto del prodotto di q per la differenza di potenziale tra il punto di arrivo e il punto di partenza.

$$W_{AB} = -\Delta U_e = -q_0 \Delta V$$

Il lavoro lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo, ovvero la circuitazione di una forza conservativa è nulla.

$$W = \oint E * ds = 0$$

ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

Il lavoro svolto dalla forza elettrostatica per portare q *da A a B è dato dall'opposto del prodotto di* q *per la differenza di potenziale tra il punto di arrivo e il punto di partenza.*

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V, \qquad U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Qq}{r} \ [\,J\,]$$

Energia potenziale elettrostatica del sistema con due cariche fisse:

L'energia potenziale elettrostatica del sistema di due cariche rappresenta il lavoro di una forza esterna per portare le due cariche dall'infinito alla distanza r; il lavoro è positivo se fatto contro la forza repulsiva tra cariche dello stesso segno, negativo se le cariche sono di segno opposto.

$$U_e(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO

Si definisce potenziale elettrico in un punto il valore dell'energia potenziale elettrica rilevato da una carica elettrica di prova, posta in quel punto, per unità di carica. Il potenziale elettrico è dunque il rapporto tra l'energia potenziale elettrica, ossia il lavoro che deve compiere la forza dovuta al campo elettrico per spostare una o più cariche da quel punto fino all'infinito (ove si assume potenziale nullo) e la carica di prova.

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} * d\vec{r}\,, \qquad V_B - V_A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} * d\vec{r}\,, \qquad [V = \frac{J}{C}]$$

CARICA	POTENZIALE ELETTROSTATICO
Singola carica puntiforme	$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
N cariche puntiformi	$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \sum \frac{q_i}{r_{i0}}$
Distribuzione continua di carica	$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varsigma * (r')}{r'} dV'$

Superficie equipotenziale: superficie dello spazio tridimensionale nei cui punti il potenziale elettrostatico ha lo stesso valore. Per un punto passa una ed una sola superficie equipotenziale. Le linee di forza sono in ogni punto ortogonali alle superfici equipotenziali.

$$V(x, y, x) = cost$$

LA LEGGE DI GAUSS

Il flusso del campo elettrostatico E *prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie, divisa per la costante dielettrica nel vuoto.*

$$\Phi(E) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \quad [V * m]$$

Dimostrazione:

Supponendo la carica q puntiforme:

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E} * d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{\vec{u}_r * \vec{n} * dS}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} * d\Omega$$

$$\Phi = \oint \vec{E} * d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} * \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Per il principio di sovrapposizione si può definire il risultato come generale e non solo legato al caso di una carica puntiforme.

Applicazioni del teorema di Gauss:

La densità di carica in una superficie chiusa viene calcolata così:

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Nel caso di una **superficie sferica** di raggio *R* il campo avrà questi valori:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}, & se\, r > R \\ 0, & se\, r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}, & se\, r = R \end{cases}$$

Nel caso di un **cilindro** uniformemente carico, con λ carica contenuta in un cilindro, le equazioni saranno:

$$\lambda = \frac{q}{h}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} * \ln\frac{r}{R}$$

Infine, nel caso di un **piano indefinito**, le equazioni saranno:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$$

$$\Delta V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x - x_0)$$

CONDUTTORI IN EQUILIBRIO

Particolari materiale in cui al loro interno è possibile il moto di alcune delle cariche che li costituiscono.

Caratteristiche:

- Il campo elettrico interno è uguale a 0: $E_{INT} = 0$
- La carica è solo sulla superficie del conduttore: $Q_{INT} = 0$, $Q = \int \sigma * dS$
- Il potenziale elettrostatico è costante in tutta la superficie del conduttore: $V = cost$
- Il campo elettrostatico è perpendicolare alla superficie: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Pressione di carica superficiale

In un conduttore in equilibrio la carica si distribuisce con una densità superficiale diversa a seconda della geometria. Le cariche inoltre risentono di una forza verso l'esterno che tende a "strapparle" dalla superficie.

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Cavità in un conduttore

Su un conduttore in equilibrio che presenta una cavità chiusa e vuota, la carica si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, per cui:

$$\sigma_{INT} = 0, \qquad E_{CAV} = 0$$

Schermo elettrostatico

Il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno ed esterno. Avvicinando corpi carichi al conduttore infatti il potenziale varia ma la densità di carica superficiale si ridistribuisce facendo in modo che il campo elettrostatico interno alla superficie sia nullo.

CONDENSATORI

Un condensatore è un sistema costituito da due conduttori tra i quali vi è induzione completa. I due conduttori prendono il nome di *armature del condensatore*. Un condensatore viene utilizzato come deposito di carica.

CAPACITA' DEL CONDENSATORE

Si definisce capacità di un condensatore il rapporto tra la carica presente sulle due armature e la differenza di potenziale tra le stesse. La misura della capacità è il Farad [F].

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Capacità di un condensatore sferico	$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$
Capacità di un condensatore cilindrico	$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$
Capacità di un condensatore piano	$C = \frac{\varepsilon_0 * \Sigma}{h}$

CONDENSATORI IN COLLEGAMENTO

- COLLEGAMENTO IN SERIE

In un sistema di condensatori in serie la carica è la stessa su ciascuno, l'inverso della capacità equivalente è somma degli inversi delle singole capacità.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$
$$Q = cost$$

La capacità equivalente perciò è sempre inferiore a quella di ciascun componente.

- COLLEGAMENTO IN PARALLELO

In un sistema di condensatori in parallelo ai capi di ciascuno c'è la stessa differenza di potenziale e la capacità equivalente è la somma delle singole capacità.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$$
$$\Delta V = 0$$

LA COSTANTE DIELETTRICA

Sono chiamati dielettrici quelle sostanze isolanti che hanno la proprietà di ridurre la differenza di potenziale tra le armature oltre al campo elettrico. I dielettrici hanno il rapporto:

$$\kappa = \frac{V_0}{V_k} > 1$$

La costante k è una proprietà della sostanza isolante ed è chiamata costante dielettrica relativa del dielettrico.

La suscettività elettrica del dielettrico viene calcolata come:

$$\chi = \kappa - 1$$

Il campo nel dielettrico è:

$$E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$$

La densità di carica nel dielettrico e la carica stessa si calcolano così:

$$\sigma_p = \frac{k-1}{k} * \sigma_0$$

$$q_p = \frac{k-1}{k} * q$$

$$\varepsilon = k * \varepsilon_0$$

Nel caso di un condensatore, la capacità aumenterà di un fattore k:

$$C_k = k * C_0$$

L'energia elettrostatica e la densità di energia elettrostatica di un dielettrico sono:

$$U_e = \int \frac{1}{2} \varepsilon E^2 d\tau$$

$$\mu_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

POLARIZZAZIONE DEL DIELETTRICO

L'atomo del dielettrico cerca di raggiungere l'equilibrio opponendosi alle forze esterne con una deformazione legata al campo esterno. Il materiale perciò acquista un momento di dipolo per unità di volume. Questo fenomeno viene calcolato mediante il vettore polarizzazione:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

La densità superficiale delle cariche di polarizzazione è uguale alla componente di P lungo la normale alla superficie:

$$\sigma_p = P * u_n$$

Nel caso specifico di una polarizzazione uniforme, si avrà che:

$$|\sigma_p| = |\vec{P}|$$

Si può definire il vettore spostamento elettrico, detto anche vettore di induzione dielettrica, come:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 k \vec{E}$$

Le sorgenti di D sono le cariche libere ed essendo un campo ausiliario non corrisponde a nessun campo microscopico.

Legge di Gauss per l'induzione dielettrica

Il flusso dell'induzione dielettrica attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma delle cariche libere contenute all'interno della superficie stessa.

$$\Phi(D) = q$$

IL DIPOLO ELETTRICO

Sistema composto da due cariche puntiformi +q e –q distanti a.

Si chiama **momento di dipolo** il vettore:

$$\vec{p} = q * \vec{a}$$

Se un dipolo viene immerso in un campo elettrostatico, l'energia potenziale elettrostatica sarà:

$$U_e = -\vec{E} * \vec{p}$$

Il momento meccanico di dipolo, ovvero il momento torcente mediante il quale il dipolo si allinea al campo elettrico, sarà:

$$\vec{r} = \vec{p} x \vec{E}$$

La forza agente sul dipolo è proporzionale al gradiente, cioè:

$$F_x = \vec{p} * \vec{\nabla} E_x$$

ENERGIA ELETTROSTATICA

L'energia elettrica del sistema è uguale al lavoro esterno attuato per costruire il sistema:

$$U_{sistema} = L_{esterno} = -L_{campo} = -q\Delta V$$

Cariche puntiformi	$U_{TOT} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} q_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$
Distribuzione continua	$U_{TOT} = \frac{1}{2}\int\int \frac{\varrho(r_1)dV_1 * \varrho(r_2)dV_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2}\int \varrho(r_2) * V(r_2) * dV_2$
Conduttori	$U_{TOT} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} q_i V_i$
Condensatori	$U_{TOT} = \frac{C\Delta V^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2}$

Densità di energia elettrostatica

La densità di energia in un condensatore è:

$$\mu_E = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2, \qquad \mu_E = \frac{1}{2}\vec{E} * \vec{D} \text{ in caso di dielettrico}$$

Moto di una carica

Il moto di una carica può essere descritto mediante l'osservazione del principio di conservazione dell'energia:

$$E_{tot} = 0 \rightarrow \Delta E_{cinetica} + \Delta U_{elettrica} = 0 \rightarrow qV_1 + E_{k1} = qV_2 + E_{k2}$$

FORMULARIO RIASSUNTIVO ELETTROSTATICA

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} * d\vec{r}$$

$$V_B - V_A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} * d\vec{r}$$

$$\Phi(E) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} * d\vec{S}$$

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$$

$$\kappa = \frac{V_0}{V_k}$$

$$\chi = \kappa - 1$$

$$q_p = \frac{k-1}{k} * q$$

$$\sigma_p = \frac{k-1}{k} * \sigma$$

$$\varepsilon = k * \varepsilon_0$$

$$C_k = k * C_0$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$|\sigma_p| = |\vec{P}|$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 k \vec{E}$$

$$\Phi(D) = q$$

$$\vec{p} = q * \vec{a}$$

$$U_e = -\vec{E} * \vec{p}$$

$$\vec{r} = \vec{p} x \vec{E}$$

$$U_{sistema} = L_{esterno} = -L_{campo} = -q\Delta V$$

$$U_{TOT} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} q_i V_i$$

$$\mu_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

$$qV_1 + E_{k1} = qV_2 + E_{k2}$$