ELABORAZIONE DI SEGNALI ED IMMAGINI

Enrico Martini

A.A. 2018/2019

Indice

1 Fondamenti

1.1 Numeri complessi

Un numero complesso c ϵ C:

$$c = Re + jIm$$
$$j = \sqrt{-1}$$

Il coniugato di c è :

$$\bar{c} = Re - jIm$$

Formula di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j * \sin(\theta)$$

Serve ad ottenere una formulazione alternativa alla forma polare

I numeri complessi is possono rappresentare in coordinate polari:

$$(modulo, angolo)$$
$$(|c|, \theta)$$
$$|c| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{Im}{Re}$$

Operazioni tra numeri complessi:

$$c_1 + c_2 = (R_1 + R_2) + j * (I_1 + I_2)$$
$$c_1 * c_2 = (R_1R_2 - I_1I_2) - j * (R_1R_2 + I_1I_2) = |c_1||c_2| * e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

1.2 Funzioni complesse

Fasore: *funzione complessa che modella la posizione di un punto che ruota attorno all'origine a raggio determinato $|c|$ e velocità angolare $\theta(t)$.*
I fasori permettono di passare dal dominio del tempo/spazio al dominio delle frequenze. Un fasore fa variare nel tempo un numero complesso in forma polare, mantenendone il modulo $|c|$ costante.

Velocità angolare:

$$\theta(t) = \frac{2\pi}{T_0} + \phi$$
$$f(t) = |c|(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$$

1.3 Funzioni pari e dispari

Una funzione è pari se:

$$f(t) = f(-t)$$

Una funzione è dispari se:

$$f(t) = -f(-t)$$

Ogni funzione può essere scritta come una combinazione di una pari e una dispari:

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) + \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$$

Dalle proprietà delle funzioni pari e dispari si possono ricavare funzioni utili:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

2 Tassonomia dei segnali

Un segnale è una funzione generica che associa ad ogni elemento del dominio uno e un solo elemento del codominio, anche con domini di tipo diverso.
I segnali possono essere rappresentati nello spazio, nel tempo e nelle frequenze.

2.1 Segnali frequenziali continui

Sono duali ai segnali temporali e spaziali e ne descrivono alcune proprietà.

$$D_1 \to D_2$$
$$D_1 \subseteq R$$
$$D_2 \subseteq C$$

La variabile in D_1 è la *frequenza* (μ). La frequenza indica quanti cicli di un segnale che si ripete accadono respetto all'unità di cui sono duali. La variabile in D_2 è chiamata *magnitudo*.

2.2 Segnali spaziali continui

$$D_1 \subseteq R^2$$

Le variabili in D_1 sono coordinate. Un segnale spaziale continuo può essere definito in più dimensioni, come il colore, l'intensità, la saturazione, ecc. Nel caso di immagini, si possono trasformare in segnali frequenziali continui, trovando magnitudo se $D_2 \subseteq R$, oppure trovando ampiezza e fase se $D_2 \subseteq C$.

2.3 Segnali discreti

Segnali il cui dominio viene campionato da un insieme discreto di punti.
Si parla di *campionatura* quando i segnali discreti derivano da una decimazione del dominio. Anche i segnali discreti possono essere analizzati in frequenza.

2.4 Segnali periodici

Un segnale è detto periodico se:

$$\exists T \epsilon R^{+} : f(t+T) = f(t)$$

Dove T è il minor numero di volte per cui la condizione di ripetizione si verifica. Dato un periodo T la frequenza è : $\mu_0 = \frac{1}{T}$.

segnali digitali: sono segnali discreti con ampiezza quantizzata.

2.5 Segnali periodici trigonometrici

Fissato $T > 0$ i segnali trigonometrici con un minimo periodo sono:

$$f(t) = \cos 2\pi\mu_0 t$$
$$f(t) = \sin 2\pi\mu_0 t$$

La cui velocità angolare o *pulsazione* è:

$$2\pi\mu_0 = \frac{2\pi}{T} = \omega_0$$

2.6 Energia di un segnale

Un segnale si dice ad energia dinita se l'integrale che ne rappresenta l'energia converge. *Condizione sufficiente all'esistenza della sua trasformata di Fourier.* All'infinito, l'ampiezza va a zero. L'unità di misura è il joule.

2.7 Potenza media di un segnale

Un segnale si dice a potenza finita se l'integrale che ne rappresenta la potenza converge. Per un segnale ad energia finita la potenza tende a zero.

3 Operazioni fondamentali

3.1 Operazioni base

Somma:

$$h(t) = f(t) + g(t), \forall t \epsilon D_1$$

Prodotto:

$$h(t) = f(t) * g(t), \forall t \epsilon D_1$$

Amplificazione:

$$h(t) = \lambda f(t), \forall t \epsilon D_1$$

Shift (Traslazione):

$$\forall f(t) : D_1 \epsilon R, \tau \epsilon R$$
$$f(t) \in f(t \pm \tau)$$

Rescaling (Riscalatura):

$$\forall f(t) : D_1 \epsilon R, \omega \neq 0$$
$$f(t) \in f(\omega\tau)$$

3.2 Cross-Correlazione

Cross-correlazione per segnali continui:

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(\tau) f_2(\tau + t) dt$$

dove $f_1^*(\tau)$ *è il complesso coniugato.*

Cross-correlazione normalizzata:

$$f_1 \bar{\otimes} f_2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(\tau) f_2(\tau + t) dt}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}}$$

Quando $f_1 = f_2$ *si parla di autocorrelazione.*

Cross-correlazione con segnali discreti:

$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k) x_2(k + n), k \epsilon Z$$

Cross-correlazione 2D:

$$x_1 \otimes x_2(n, m) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(n + u, m + v)$$

x_1 *viene chiamato template o matrice kernel,* x_2 *viene chiamato immagine.*

3.3 Convoluzione

Convoluzione con segnali continui:

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Convoluzione con segnali discreti:

$$x_1 * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k) x_2(k - n), k \epsilon Z$$

Cross-correlazione 2D:

$$x_1 * x_2(n, m) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(n - u, m - v)$$

4 Segnali continui di uso comune

4.1 Funzione box

$$\Pi(x/a) = \begin{cases} a & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & alt. \end{cases}$$

4.2 Impulso unitario

Il vincolo integrale rende l'impulso associabile ad una distribuzione probabilistica.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

4.3 Funzione sinc

Fondamentale per l'analisi tempo/frequenza.

$$sinc(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

4.4 Funzione triangolo

Importante nell'analisi spettrale e per le operazioni di convoluzione.

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & alt. \end{cases}$$

4.5 Funzione segno

Ribalta i segnali sopra/sotto l'asse x.

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

4.6 Funzione gradino

Rappresenta un segnale che si attiva a partire da un tempo specificato e rimane attivo indefinitamente.

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

5 Segnali discreti di uso comune

5.1 Impulso unitario

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

5.2 Treno di impulsi

Somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità $\varDelta T$.

$$s_{\varDelta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\varDelta T)$$

6 Analisi di Fourier

Formalizza matematicamente come passare da segnali temporali o spaziali a quelli frequenziali e viceversa.

6.1 Serie di Fourier

Una funzione $f : R \to R$ di variabile continua t, periodica di periodo T, può essere espressa come:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

E' una somma di infiniti termini in cui ogni termine vede la moltiplicazione tra un numero complesso ed un fasore, che produce un altro fasore.

$$c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n| e^{j\theta_n} e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n| e^{j\frac{2\pi n}{T}t + \theta_n}$$

Così facendo si estende il fasore $e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ ad una lunghezza $|c_n|$ facendolo partire con un angolo di partenza pari a θ_n detto **angolo di fase**.

Esempio

Dato il segnale trigonometrico:

$$f(t) = \cos 2\pi t$$

Assumendo che $c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{2}$ ottengo che:

$$\cos 2\pi t = \frac{1}{2} e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi t} = \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}$$

Ci sono percui due fasori di modulo 0.5 e angolo $\pm 2\pi t$: $\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}$, $\frac{1}{2}e^{j2\pi t}$, con i quali si può disegnare lo **spettro di ampiezza**.

Proprietà della serie di Fourier

Lo spettro di Fourier è composto dallo spettro di fase e dallo spettro di ampiezza, che hanno le seguenti caratteristiche:

1. lo spettro di ampiezza è simmetrico rispetto all'asse y

2. lo spettro di fase è asimmetrico rispetto all'asse y

3. se i coefficienti c_n sono reali, non esiste lo spettro di fase

4. sono entrambi funzioni a pettine definite su frequenze multiple rispetto a quella fondamentale

6.2 Trasformata di Fourier continua

Sia $f(t)$ segnale reale continuo $f : R \to R$ anche non periodico, si chiama trasformata di Fourier (Tdf) il segnale $\mathcal{F} : R \to C$:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-j2\pi\mu t} dt$$

L'unità frequenziale μ è l'analogo di $\frac{n}{T}$ della serie di Fourier. La Tdf esiste se f(t) è un segnale di energia.
Con la **Trasformata di Fourier inversa** si ricostruisce f a partire da F:

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\mu)) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) * e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

Se $f(t)$ è reale, in genere la sua trasformata è complessa, con $c_n \in C$:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) * e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

Gli spettri di ampiezza e fase sono generalmente funzioni continue o continue a tratti.

Proprietà della trasformata di Fourier

1. Linearità:
$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \to^{\mathcal{F}} a_1 F_1(\mu) + a_2 F_2(\mu)$$
2. Scalatura temporale:
$$z(t) = f(at) \to^{\mathcal{F}} Z(\mu) = \frac{1}{a} F(\frac{\mu}{a})$$
3. Dualità:
$$f(t) \to^{\mathcal{F}} F(\mu)$$
$$F(t) \to^{\mathcal{F}} f(-\mu)$$

6.2.1 Trasformata di Fourier di una Box

Partendo da una funzione box:

$$\mathit{\Pi}(t/w) = \begin{cases} A & -\frac{w}{2} < t < \frac{w}{2} \\ 0 & alt. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathit{\Pi}(t/w) e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} A e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \frac{A}{j2\pi\mu}[e^{j\pi\mu w} - e^{-j\pi\mu w}] \\ &= Aw\frac{\sin(\pi\mu w)}{\pi\mu w} = sinc(\mu w) \end{aligned}$$

Si può osservare che più è larga la funzione box, più è frequente la funzione sinc, inoltre mentre la box è limitata, la sinc è infinita.
Grazie alla dualità, si ha che:

$$\Pi(t/w) \to_{\mathcal{F}} sinc(\mu w)$$
$$sinc(tw) \to_{\mathcal{F}} \Pi(-\mu/w) = \Pi(\mu/w)$$

6.2.2 Trasformata di Fourier di un impulso

Dato un impulso:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(0) e^{-j2\pi\mu 0} dt = 1$$

Appartendendo ai numeri reali, abbiamo solo lo spettro in ampiezza.
Nel caso di un impulso centrato in t_0:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt = e^{-j2\pi\mu t_0}$$

Applicando la formula di dualità:

$$\delta(t - t_0) \to^{\mathcal{F}} e^{-j2\pi\mu t_0}$$
$$e^{-j2\pi\mu t t_0} \to^{\mathcal{F}} \delta(-\mu - t_0)$$
$$e^{j2\pi t t_0} \to^{\mathcal{F}} \delta(\mu - t_0)$$

6.2.3 Trasformata di Fourier di un treno di impulsi

Dato un treno di impulsi ($n \in \mathbf{Z}$):

$$s_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\Delta T)$$

Essendo una funzione periodica, utilizzo la serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T} t}$$

Determino c_n:

$$c_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\Delta T) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T} t} dt = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T} t} dt = \frac{1}{\Delta T}$$

Ottengo così una forma alternativa per il treno di impulsi:

$$s_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\Delta T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

Utilizzo la dualità:

$$e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} \rightarrow^{\mathcal{F}} \delta(\mu - \frac{n}{\Delta T})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \rightarrow^{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T}\delta(\mu - \frac{n}{\Delta T})$$

Più è il periodo di campionamento di $f(t)$, più è fitto il periodo di campionamento di $F(\mu)$ e meno sono alti gli impulsi.

6.2.4 Trasformata di Fourier della convoluzione

Data la funzione convoluzione:

$$f * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Applico la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * h(t)) = F(\mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f * h(t)]e^{-j2\pi\mu t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}d\tau \\ &= H(\mu) \cdot F(\mu)\end{aligned}$$

La traformata di Fourier di un prodotto di due funzioni continue reali è la convoluzione delle trasformate di Fourier.

$$\mathcal{F}(f \cdot h(t)) = H(\mu) * F(\mu)$$

La trasformata di Fourier di una convoluzione di due funzioni continue reali è il prodotto delle trasformate di Fourier delle singole funzioni

$$\mathcal{F}(f * h(t)) = H(\mu) \cdot F(\mu)$$

6.3 Trasformata di Fourier tempo-discreta

Per trasformare un segnale continuo in tempo-discreto ed essere quindi elaborato da un computer, bisogna moltiplicarlo per un treno d'impulsi:

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

Usando il teorema della convoluzione, si ha che:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) = \mathcal{F}\{\tilde{f}(t)\} = \mathcal{F}\{f(t) \cdot s_{\Delta T}(t)\} &= F(\mu) * S_{\Delta T}(\mu) \\ &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\mu - \frac{n}{\Delta T})\end{aligned}$$

Si noti che $F(\mu - \frac{n}{\Delta T})$ è la TdF di f(t) shiftato a destra di $\frac{n}{\Delta T}$.
Perciò $\frac{1}{\Delta T} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} F(\mu - \frac{n}{\Delta T})$ sono infinite copie dello spettro $F(\mu)$ di periodo $\frac{1}{\Delta T}$, detto anche **fattore di scalatura** nell'ampiezza.

6.3.1 Teorema del campionamento

Un segnale reale continuo $f(t)$, limitato in banda, può essere ricostruito senza errori completamente da un set di suoi campioni se essi sono acquisiti con un tempo di campionamento ΔT tale per cui:

$$\frac{1}{\Delta T} = \mu_s > 2\mu_{MAX}$$

dove μ_{MAX} è la frequenza massima del segnale e $\frac{1}{\Delta T}$ viene detta frequenza di Nyquist. Per frequenze minori si ha il fenomeno di aliasing. Tutte le proprietà di un segnale perciò possono essere espresse usando dei campioni.

6.3.2 Ricostruzione di un segnale continuo

Dato il segnale campionato $\tilde{f}(t)$, ne calcolo la trasformata di Fourier ottenendo $\tilde{F}(\mu)$:

$$\tilde{f}(t) \rightarrow^{\mathcal{F}} \tilde{F}(\mu)$$

$\tilde{F}(\mu)$ è una funzione periodica in cui ogni periodo riporta una copia dello spettro della funzione continua. Ne isolo un periodo con la funzione box $H(\mu)$:

$$H(\mu) = \begin{cases} \Delta T & -\mu_{MAX} < \mu < \mu_{MAX} \\ 0 & alt. \end{cases}$$

In questo modo ottengo $F(\mu)$ continua:

$$F(\mu) = \tilde{F}(\mu) \cdot H(\mu)$$

A questo punto è possibile risalire a $f(t)$ continua:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mu)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(\mu) \cdot \tilde{F}(\mu)\} = h(t) * \tilde{f}(t)$$

6.4 Trasformata di Fourier discreta (DTFT)

La trasformata di Fourier di un segnale reale continuo $f(t)$ di dominio illimitato e non periodico, campionato nel tempo con periodo di campionamento ΔT è una funzione continua, periodica (periodo $= \frac{1}{\Delta T}$) anch'essa di dominio illimitato.

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \rightarrow^{\mathcal{F}} \tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\mu - \frac{n}{\Delta T})$$

Questa espressione analitica presuppone però che si conosca la trasformata di Fourier teorica F del segnale di partenza. Riformulo l'espressione per evitare questo problema:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\tilde{f}(t)) = \tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} \delta(t - n\Delta T) dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta T) e^{-j2\pi\mu n\Delta T} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}
\end{aligned}$$

Questa seconda rappresentazione della trasformata di Fourier permette una rappresentazione spettrale a partire dai campioni della funzione originale $f(t)$.

Bisogna ora campionare anche il dominio spettrale per poter elaborare la funzione campionata su pc. Prendendo l'intervallo sequenziale $0 \leq \mu \leq \frac{1}{\Delta T} = \mu_s$ e prendendo in considerazione M campioni:

$$\begin{gathered}
\tilde{\mu} = \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{\Delta T} \\
m = [0, M-1] \\
\frac{m}{M} \in \left[0, 1 - \frac{1}{M}\right]
\end{gathered}$$

Assumo di avere M campioni del segnale di partenza, in tal modo la trasformata di Fourier discreta risulta:

$$\tilde{F}(\tilde{\mu}) = \tilde{F}\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n} = F_m$$

La trasformata di Fourier discreta è:

$$\tilde{f}(n\Delta T) = f(n\Delta T) = f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi\frac{m}{M}n}$$

7 Elaborazione di immagini

L'elaborazione delle immagini consiste nel prendere come input un'immagine e restituirne un'altra come output.

7.1 Rinforzo di immagini

La qualità di un immagine è una combinazione pesata di tutti gli attributi significativi di un immagine. Un immagine non è di qualità quando non viene interpretata facilmente da un poeratore umano.
Restauro : processo di ricostruzione dell'immagine a partire da un modello di degradazione noto.

7.2 Istogramma

E' importante conoscere la distribuzione delle frequenze dei toni di grigio. Può essere visto come una funzione continua o discreta H. Per ogni livello di grigio viene riportato il numero di pixel di quel colore. E' utile a comprendere in maniera immediata le caratteristiche di un immagine. L'istogramma non tiene conto della distribuzione spaziale dei pixel.
Un'istogramma può anche essere visto come una distribuzione di probabilità:

$$p_h(r) = \frac{H(r)}{M * N}$$

$$\sum_r p_h(r) = 1$$

Contrasto : rapporto o differenza tra il valore più alto (luminoso) e il valore più basso (scuro) della luminosità.
L'immagine si dice sovraesposta se l'istogramma ha valori più alti a destra, sottoesposta a sinistra.

7.3 Domini

L'elaborazione delle immagini possono avvenire:

1. nel dominio spaziale
2. nel dominio frequenziale

Nel dominio spaziale, l'elaborazione delle immagini può essere espressa come:

$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

A seconda dell'intorno di $[f(x, y)]$, si identificano tre tipi di elaborazione dell'immagine:

1. **puntuale**: l'intorno coincide con il pixel
2. **locale**: l'intorno è una locazione intorno al pixel di locazione
3. **globale**: rappresenta l'intera immagine

7.3.1 Operazioni puntuali

Un operatore puntuale prende in input il valore di un pixel e ne restituisce uno cambiato che dipende esclusivamente dal valore del pixel in ingresso.
Può essere rappresentato da una funzione che preso in input un valore r lo modifica in un valore $s = T(r)$ con s, r appartenenti allo stesso campo di definizione.

Identità

La più semplice operazione, non effettua alcuna modifica.

$$s = r$$

Negativo

Viene utilizzata quando si hanno dettagli da voler evidenziare.

$$s = L - 1 - r$$

Trasformazione logaritmica

Viene utilizzata quando si vogliono mappare fasce strette di valori dell'immagine originale in fasce più ampie, aumentandone il range del contrasto. La trasformazione logaritmica inversa permette invece di aumentare il range di una fascia determinata di ldg chiari.

$$s = c \log(1 + r)$$

Trasformazione di potenza

$$s = cr^{\gamma}$$

La costante c è scelta in dipendenza da γ in modo da normalizzare i valori di s nell'intervallo [0,255]. per $\gamma < 1$ la trasformazione ha effetti analoghi alla trasformazione logaritmica, per $\gamma > 1$ la trasformazione ha gli effetti opposti.

Binarizzazione

Produce un'immagine con solo due elementi: nero e bianco. Serve per discriminare un oggetto da una scena, scegliendo una soglia T.

7.4 Rinforzo nel dominio delle frequenze

Trasformata di Fourier discreta 2D:

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x + \frac{v}{N}y\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) B^{(u,v)}(x,y) = I \cdot B^{(u,v)} \end{aligned}$$

Trasformata di Fourier discreta 2D inversa:

$$f(x,y) = \mathcal{F}^{-1}(F(u,v)) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{u}{M}x + \frac{v}{N}y\right)}$$

7.4.1 Proprietà della DFT 2D

1. **Trasformazione**

$$g(x,y) = f(x-x_0, y-y_0) \to^{\mathcal{F}} G(u,v) = F(u,v) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x_0 + \frac{v}{N}y_0\right)}$$
$$g(x,y) = f(x,y) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x_0 + \frac{v}{N}y_0\right)} \to^{\mathcal{F}} G(u,v) = F(u-u_0, v-v_0)$$

2. **Rotazione**

$$\mathcal{F}(f_\Theta)(u,v) = \mathcal{F}(f)_\Theta(u,v)$$

7.4.2 Filtri passa basso

Un filtro passa basso è un sistema che permette il passaggio di frequenze al di sotto di una data soglia, detta frequenza di taglio, bloccando le alte frequenze. L'informazione a basse frequenze corrispondono a parti dell'immagine che presentano lente variazioni di intensità. Attenuando le alte frequenze, si ottengono sfocamento o smoothing, insieme alla riduzione del rumore.

Ringing Il fenomeno di Gibbs si presenta quando viene ricostruito un segnale dalla serie di Fourier troncata. E' dovuto al fatto che filtrare un PB ideale in frequenza equivale a convoluire con un sinc nello spazio. La risposta all'impulso del PB ideale è un sinc.

Filtro passa basso ideale Un filtro passa basso ideale ha una funzione di trasferimento a box.

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

E' una brusca transizione in corrispondenza della frequenza di cut-off, portando al fenomeno di ringing.

Filtro passa basso di Butterworth Filtro con attenuazione dolce in prossimità della frequenza di taglio, con una risposta molto ripida nella banda passante.

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

L'ordine è n e la frequenza di taglio $D_0 = \mu_c$. E' di rapidità variabile, modellata dall'ordine del filtro. La frequenza di cut-off viene selezionata indipendentemente dall'ordine del filtro.

Filtro passa basso Gaussiano La trasformata di Fourier di una funzione Gaussiana è anch'essa Gaussiana.

$$H(u,v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

D_0 può essere sostituita con σ(deviazione standard della Gaussiana), creando un attenuamento di quella frequenza del 60.7%. E' perciò una transizione di cut-off dolce. Il parametro σ determina la frequenza di cut-off.

7.4.3 Filtri passa alto

Un filtro passa alto sopprime (blocca) le basse frequenze e lascia passare le alte frequenze. La costruzione di un filtro passa alto può essere eseguita come $H_{PA} = 1 - H_{PB}$.

Filtro passa alto ideale

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

Filtro passa alto di Butterworth

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{-2n}}$$

Filtro passa alto Gaussiano

$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

Per enfatizzare le alte frequenze, solitamente si usa:

$$H(u,v) = 1 + k \cdot H_{PA}(u,v)$$

7.4.4 Filtro passa banda

Sopprime tutte le frequenze al di fuori di un intervallo tra u_1 e u_2.

$$G(u) = \begin{cases} 1 & u_1 < |u| < u_2 \\ 0 & alt. \end{cases}$$

7.4.5 Filtro ferma banda

Sopprime tutte le frequenze all'interno di un intervallo tra u_1 e u_2.

$$G(u) = \begin{cases} 0 & u_1 < |u| < u_2 \\ 1 & alt. \end{cases}$$