

FONDAMENTI DI MATEMATICA

Enrico Martini

v1.0 — 2015 - 2019

Contents

1	Geometria analitica	3
1.1	Punto	3
1.2	Retta	3
1.3	Circonferenza	3
1.4	Parabola	4
1.5	Ellisse	4
1.6	Iperbole	4
1.6.1	Funzione omografica	4
1.7	Coniche generali	4
2	Trasformazioni geometriche	5
3	Solidi	6
4	Geometria analitica dello spazio	7
5	Probabilità	8
6	Calcolo combinatorio	9
7	Goniometria	10
8	Trigonometria	12
9	Esponenziali	13
10	Logaritmi	14
11	Limiti	15
12	Derivate	16
13	Integrali	17
14	Equazioni differenziali	19
15	Studio di funzione	20
15.1	Line-up	20
15.2	Calcolo del dominio	20
15.3	Asintoti	20
15.4	Parità/Disparità	20
15.5	Incontro con gli assi	20
15.6	Studio del segno	20
15.7	Punti di massimo e minimo	20
15.8	Punti di flesso	20

1 Geometria analitica

1.1 Punto

Rappresentazione:

$$P(x_P; y_P)$$

Distanza tra due punti:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Punto medio:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Baricentro:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Area di un triangolo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix}$$

1.2 Retta

Rappresentazione:

$$y = mx + q \qquad \vee \qquad ax + by + c = 0$$

Retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Fascio di rette passante per un punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Distanza punto-retta:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.3 Circonferenza

Rappresentazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Coordinate del centro:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Raggio:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

1.4 Parabola

Rappresentazione:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad x = ay^2 + by + c$$

Vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$$

1.5 Ellisse

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con $a > b$:

$$F(\pm c; 0) \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Con $a < b$:

$$F(0; \pm c) \qquad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

1.6 Iperbole

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se rivolta all'asse x :

$$F(\pm c; 0) \qquad c^2 = a^2 + b^2 \qquad y = \pm \frac{b}{a}x$$

Se equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad y = \pm x$$

1.6.1 Funzione omografica

Rappresentazione:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$$

1.7 Coniche generali

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

2 Trasformazioni geometriche

Simmetria

Simmetria rispetto ad un punto $P(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} x' = 2\alpha - x \\ y' = 2\beta - y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse y :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse x :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Traslazione

Traslazione rispetto ad un vettore $\vec{v}(a; b)$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Rotazione

Rotazione rispetto ad un angolo α :

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos(\alpha) + y' \cdot \sin(\alpha) \\ y = -x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

Omotetia

Omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto h :

$$\begin{cases} x' = hx - x_c \\ y' = hy - y_c \end{cases}$$

Affinità

$$\begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \quad \text{con } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

3 Solidi

Cilindro

$$\begin{aligned}S_L &= 2p \cdot h \\ S_B &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + 2S_B \\ V &= S_b \cdot h\end{aligned}$$

Cono

$$\begin{aligned}S_L &= \pi r a \\ S_B &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + 2S_B \\ V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h\end{aligned}$$

Sfera

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Prisma

$$S_L = 2p \cdot h$$

$$S_{TOT} = S_L + 2S_B$$

$$V = S_b \cdot h$$

Piramide

$$\begin{aligned}S_L &= pa \\ S_B &= l^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + S_B \\ V &= \frac{1}{3}S_B \cdot h\end{aligned}$$

4 Geometria analitica dello spazio

Equazione del piano

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \qquad d = -a^2 - b^2 - c^2$$

Punto medio

$$M \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Equazione di una retta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0 \end{cases}$$

Retta passante per due punti

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$$

Distanza tra piano e punto

$$d(A; \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Piano parallelo ad un altro piano passante per un punto

Retta perpendicolare ad un piano passante per un punto

Piano passante per un punto perpendicolare ad una retta

Parallelismo tra piani

Perpendicolarità tra piani

5 Probabilità

6 Calcolo combinatorio

7 Goniometria

Formula fondamentale:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Formule derivate:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \sec(\alpha) &= \frac{1}{\sin(\alpha)} & \csc(\alpha) &= \frac{1}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Somma e differenza:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Duplicazione:

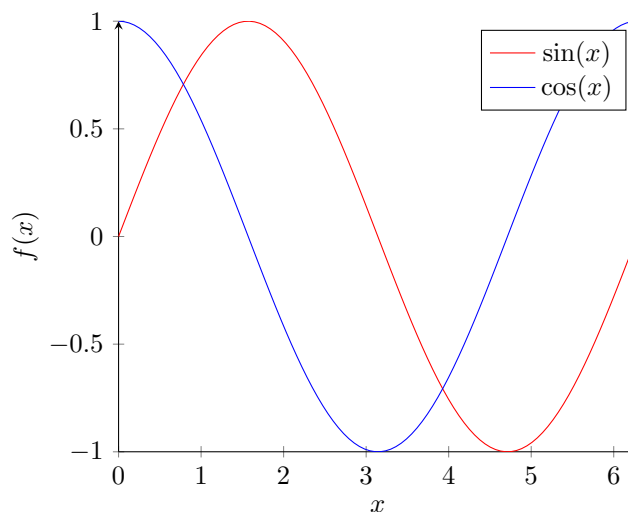
$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Bisezione:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = & \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\end{aligned}$$

Formule parametriche:

$$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



quadrante	angolo	seno	coseno	tangente	cotangente
primo	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
secondo	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
terzo	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
quarto	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

--	--

Figure 1: Tabella degli angoli associati

8 Trigonometria

9 Esponenziali

10 Logaritmi

11 Limiti

12 Derivate

13 Integrali

Proprietà

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$
$$\int [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \int f_3(x) dx$$

Integrali immediati

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c \quad \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$$
$$\int e^x dx = e^x + c \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c \quad \int 1 dx = x + c$$

Integrali mediati

$$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$
$$\int f'(x) \cdot \sin[f(x)] dx = -\cos[f(x)] + c \quad \int f'(x) \cdot \cos[f(x)] dx = \sin[f(x)] + c$$
$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \arcsin[f(x)] + c$$
$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c \quad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan[f(x)] + c$$
$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} dx = \tan[f(x)] + c$$

Funzioni non banali

Risoluzione con formule parametriche:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Risoluzione di integrali irrazionali:

$$\int \sqrt{x^2 \pm \alpha^2} dx \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}} dx \quad \rightarrow t = x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \rightarrow x = a \sin(t)$$

Risoluzione per parti:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Teorema della media

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

Volume nei solidi di rotazione

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Metodo dei rettangoli

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad \vee \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n f(x_i)$$

Metodo dei trapezi

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \int_a^b f(x) dx$$

14 Equazioni differenziali

15 Studio di funzione

15.1 Calcolo del dominio

15.2 Asintoti

15.3 Parità/Disparità

15.4 Incontro con gli assi

15.5 Studio del segno

15.6 Punti di massimo e minimo

15.7 Punti di flesso