

Fondamenti di Matematica



Enrico Martini

2015 - 2019

Indice

1	Geometria analitica	1
1.1	Punto	1
1.2	Retta	1
1.3	Circonferenza	1
1.4	Parabola	2
1.5	Ellisse	2
1.6	Iperbole	2
1.6.1	Funzione omografica	2
1.7	Coniche generali	2
2	Trasformazioni geometriche	3
2.0.1	Simmetria	3
2.0.2	Traslazione	3
2.0.3	Rotazione	3
2.0.4	Omotetia	3
2.0.5	Affinita'	3
3	Solidi	4
3.0.1	Cilindro	4
3.0.2	Cono	4
3.0.3	Sfera	4
3.0.4	Prisma	4
3.0.5	Piramide	4
4	Geometria analitica dello spazio	5
4.0.1	Equazione del piano	5
4.0.2	Punto medio	5
4.0.3	Equazione di una retta	5
4.0.4	Retta passante per due punti	5
4.0.5	Distanza tra piano e punto	5
4.0.6	Piano parallelo ad un altro piano passante per un punto .	5
4.0.7	Retta perpendicolare ad un piano passante per un punto .	5
4.0.8	Piano passante per un punto perpendicolare ad una retta	5
4.0.9	Parallelismo tra piani	5
4.0.10	Perpendicolarita' tra piani	5
4.1	Calcolare i punti stazionari	6
4.2	Calcolare il massimo/minimo locale vincolato	7
4.3	Calcolare il massimo/minimo globale	7
5	Numeri complessi	8
5.1	Coordinate	9
5.1.1	Coordinate sferiche	9
5.1.2	Coordinate cilindriche	9
5.2	Parametrizzazione	9
5.2.1	Parametrizzazione di un ellisse	9
5.2.2	Retta tangente alla curva	9
5.2.3	Lunghezza di una curva	9

6	Probabilita'	10
6.0.1	Probabilita' della somma logica di eventi	10
6.0.2	Probabilita' condizionata	10
6.0.3	Probabilita' del prodotto logico di eventi	10
6.0.4	Problema delle prove ripetute	10
6.0.5	Teorema di Bayes	10
7	Calcolo combinatorio	11
7.0.1	Disposizione semplice	11
7.0.2	Disposizione con ripetizione	11
7.0.3	Permutazione semplice	11
7.0.4	Permutazione con ripetizione	11
7.0.5	Combinazione semplice	11
7.0.6	Combinazione con ripetizione	11
8	Goniometria	12
8.1	Formule di Werner	12
8.2	Formule di Prostaferesi	13
9	Trigonometria	14
9.0.1	Teorema dei seni	14
9.0.2	Teorema del coseno (Carnot)	14
10	Matrici	15
10.0.1	Somma tra matrici	15
10.0.2	Sottrazione tra matrici	15
10.0.3	Moltiplicazione per uno scalare	15
10.0.4	Prodotto tra matrici	15
11	Progressioni	16
11.1	Progressioni aritmetiche	16
11.2	Progressioni geometriche	16
12	Esponenziali	17
13	Logaritmi	17
13.0.1	Proprieta'	17
13.0.2	Casi particolari	17
14	Limiti	18
14.0.1	Verifica dei limiti	18
14.0.2	Forme indeterminate	18
14.0.3	Limiti notevoli	18
14.0.4	Teorema del confronto	18
15	Derivate	19
15.0.1	Derivate immediate	19
15.0.2	Proprieta'	19
15.0.3	Retta tangente alla curva	20
15.0.4	Retta normale alla curva	20
15.0.5	Teorema di Fermat	20

15.0.6	Teorema di Rolle	20
15.0.7	Teorema di Cauchy	21
15.0.8	Teorema di Lagrange	21
15.1	Teorema delle derivate successive	22
16	Integrali	23
16.0.1	Proprieta'	23
16.0.2	Integrali immediati	23
16.0.3	Integrali mediati	23
16.0.4	Funzioni non banali	24
16.0.5	Teorema della media	24
16.0.6	Volume nei solidi di rotazione	24
16.0.7	Metodo dei rettangoli	24
16.0.8	Metodo dei trapezi	24
16.0.9	Integrali doppi	25
16.0.10	Integrali di linea di prima specie	25
16.0.11	Integrali di linea di seconda specie	25
16.0.12	Integrali tripli	25
16.0.13	Campi vettoriali	25
17	Equazioni differenziali	26
17.0.1	Primo ordine	26
17.0.2	Secondo ordine	26
18	Studio di funzione	27
18.1	Studio del dominio	27
18.2	Studio del limite e degli asintoti	27
18.2.1	Discontinuita'	27
18.2.2	Asintoto	27
18.3	Parita'/Disparita'	28
18.4	Incontro con gli assi	28
18.5	Studio del segno	28
18.6	Punti di massimo e minimo	28
18.7	Punti di flesso	28
18.8	Punti di non derivabilita'	29
18.9	Proprieta' delle funzioni derivabili	29
18.10	Approssimazioni	29
18.10.1	Metodo delle tangenti (Newton)	29
18.10.2	Metodo delle secanti	29

1 Geometria analitica

1.1 Punto

Rappresentazione:

$$P(x_P; y_P)$$

Distanza tra due punti:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Punto medio:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Baricentro:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Area di un triangolo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix}$$

1.2 Retta

Rappresentazione:

$$y = mx + q \qquad \vee \qquad ax + by + c = 0$$

Retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Fascio di rette passante per un punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Distanza punto-retta:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.3 Circonferenza

Rappresentazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Coordinate del centro:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Raggio:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

1.4 Parabola

Rappresentazione:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad x = ay^2 + by + c$$

Vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$$

1.5 Ellisse

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con $a > b$:

$$F(\pm c; 0) \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Con $a < b$:

$$F(0; \pm c) \qquad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

1.6 Iperbole

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se rivolta all'asse x :

$$F(\pm c; 0) \qquad c^2 = a^2 + b^2 \qquad y = \pm \frac{b}{a}x$$

Se equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad y = \pm x$$

1.6.1 Funzione omografica

Rappresentazione:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$$

1.7 Coniche generali

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

2 Trasformazioni geometriche

2.0.1 Simmetria

Simmetria rispetto ad un punto $P(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} x' = 2\alpha - x \\ y' = 2\beta - y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse y :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse x :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

2.0.2 Traslazione

Traslazione rispetto ad un vettore $\vec{v}(a; b)$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

2.0.3 Rotazione

Rotazione rispetto ad un angolo α :

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos(\alpha) + y' \cdot \sin(\alpha) \\ y = -x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

2.0.4 Omotetia

Omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto h :

$$\begin{cases} x' = hx - x_c \\ y' = hy - y_c \end{cases}$$

2.0.5 Affinita'

$$\begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \quad \text{con } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

3 Solidi

3.0.1 Cilindro

$$\begin{aligned}S_L &= 2p \cdot h \\ S_B &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + 2S_B \\ V &= S_b \cdot h\end{aligned}$$

3.0.2 Cono

$$\begin{aligned}S_L &= \pi r a \\ S_B &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + 2S_B \\ V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h\end{aligned}$$

3.0.3 Sfera

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3.0.4 Prisma

$$S_L = 2p \cdot h \qquad S_{TOT} = S_L + 2S_B \qquad V = S_b \cdot h$$

3.0.5 Piramide

$$\begin{aligned}S_L &= pa \\ S_B &= l^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + S_B \\ V &= \frac{1}{3}S_B \cdot h\end{aligned}$$

4 Geometria analitica dello spazio

4.0.1 Equazione del piano

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \qquad d = -a^2 - b^2 - c^2$$

4.0.2 Punto medio

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

4.0.3 Equazione di una retta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0 \end{cases}$$

4.0.4 Retta passante per due punti

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$$

4.0.5 Distanza tra piano e punto

$$d(A; \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4.0.6 Piano parallelo ad un altro piano passante per un punto

$$\alpha = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

4.0.7 Retta perpendicolare ad un piano passante per un punto

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

4.0.8 Piano passante per un punto perpendicolare ad una retta

$$\alpha = l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

4.0.9 Parallelismo tra piani

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

4.0.10 Perpendicolarita' tra piani

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

4.1 Calcolare i punti stazionari

Punti chiave:

1. Calcolare le derivate parziali del primo ordine

$$f'_x(x, y) \qquad f'_y(x, y)$$

2. Risolvere il sistema con le derivate uguali a zero

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. Ricavare i punti stazionari

$$P(x_P, y_P)$$

4. Calcolare le derivate parziali del secondo ordine

$$f''_{xx}(x, y) \qquad f''_{xy}(x, y) \qquad f''_{yx}(x, y) \qquad f''_{yy}(x, y)$$

5. Costruire la matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

6. Calcolare il determinante della matrice Hessiana

$$\det(H_f(x, y)) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

Considerare i casi:

- $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \wedge \det(H_f) > 0 \rightarrow$ minimo locale
- $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \wedge \det(H_f) > 0 \rightarrow$ massimo locale
- $\det(H_f) < 0 \rightarrow$ punto di sella

4.2 Calcolare il massimo/minimo locale vincolato

Punti chiave:

1. Definire la funzione lagrangiana:

$$\mathcal{L} = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

2. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. Calcolare le derivate parziali del secondo ordine

$$\mathcal{L}''_{xx}(x, y) \quad \mathcal{L}''_{xy}(x, y) \quad \mathcal{L}''_{yx}(x, y) \quad \mathcal{L}''_{yy}(x, y)$$

4. Calcolare il determinante della matrice hessiana orlata:

$$\det(\bar{H}) = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} \\ g'_y & \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} \end{vmatrix}$$

Considerare i casi:

- $\det(\bar{H}) > 0 \rightarrow$ Massimo locale vincolato
- $\det(\bar{H}) < 0 \rightarrow$ Minimo locale vincolato
- $\det(\bar{H}) = 0 \rightarrow$ Indeterminato

4.3 Calcolare il massimo/minimo globale

Passi chiave:

1. Verificare che l'insieme sia compatto
2. Trovare i punti stazionari interni con le derivate parziali
3. Trovare i punti di frontiera stazionari con Lagrange
4. Sostituire massimo/minimo per trovare i punti globali

5 Numeri complessi

Un numero complesso $c \in \mathbb{C}$:

$$c = Re + jIm$$
$$j = \sqrt{-1}$$

Il coniugato di c è :

$$\bar{c} = Re - jIm$$

Formula di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j * \sin(\theta)$$

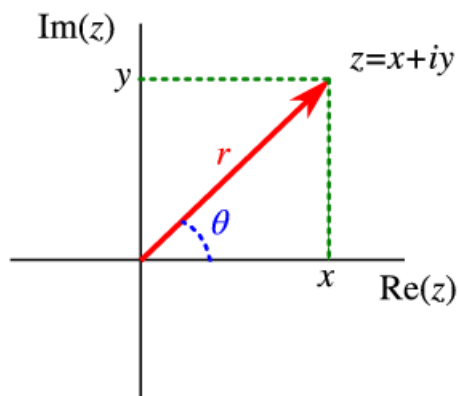
Serve ad ottenere una formulazione alternativa alla forma polare

I numeri complessi si possono rappresentare in coordinate polari:

$$(modulo, angolo)$$
$$(|c|, \theta)$$
$$|c| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{Im}{Re}$$

Operazioni tra numeri complessi:

$$c_1 + c_2 = (R_1 + R_2) + j * (I_1 + I_2)$$
$$c_1 * c_2 = (R_1 R_2 - I_1 I_2) - j * (R_1 I_2 + I_1 R_2) = |c_1| |c_2| * e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$



5.1 Coordinate

5.1.1 Coordinate sferiche

Si noti che $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $\Theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin(\varphi) \cos(\Theta) \\ y = \rho \cdot \sin(\varphi) \sin(\Theta) \\ z = \rho \cdot \cos(\varphi) \end{cases} \quad p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_D f(\rho, \varphi, \Theta) \cdot \rho^2 \cdot \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\Theta$$

5.1.2 Coordinate cilindriche

Si noti che $p \geq 0$, $z \in \mathcal{R}$ e $\Theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} x = p \cdot \cos(\Theta) \\ y = p \cdot \sin(\Theta) \\ z = z \end{cases} \quad p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

5.2 Parametrizzazione

5.2.1 Parametrizzazione di un ellisse

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{R}^2 \quad t \rightarrow (x_c + a \cos t; y_c + b \sin t) \quad \begin{cases} x = a \cos t + x_c \\ y = b \sin t + y_c \end{cases}$$

5.2.2 Retta tangente alla curva

$$\begin{aligned} \gamma : I \subseteq \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{R}^n & r : \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{R}^n \\ t \rightarrow \gamma(t) &= (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) & t \rightarrow \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) &= P + t\gamma'(t_0) \end{aligned}$$

5.2.3 Lunghezza di una curva

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^n$ una curva regolare. Allora la lunghezza $l(\gamma)$ di γ è finita e vale:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

6 Probabilità

$$p(E) = \frac{casi_{POSSIBILI}}{casi_{TOTALI}} \quad 0 \leq p(E) \leq 1$$

6.0.1 Probabilità della somma logica di eventi

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

6.0.2 Probabilità condizionata

La probabilità condizionata di un evento A rispetto a un evento B è la probabilità che si verifichi A, sapendo che B è verificato.

$$p(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$$

6.0.3 Probabilità del prodotto logico di eventi

$$\begin{cases} p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_1|E_2) & \text{dipendenti} \\ p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) & \text{indipendenti} \end{cases}$$

6.0.4 Problema delle prove ripetute

- n : numero di estrazioni
- k : numero delle volte in cui deve uscire
- p : probabilità che si verifichi
- q : probabilità che non si verifichi

$$P_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

6.0.5 Teorema di Bayes

Considerando un insieme di alternative A_1, \dots, A_n che partizionano lo spazio degli eventi Ω (ossia $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ e $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$) si trova la seguente espressione per la probabilità condizionata:

$$p(E_i|E) = \frac{p(E_i) \cdot p(E|E_i)}{p(E)}$$

7 Calcolo combinatorio

7.0.1 Disposizione semplice

Tutti i gruppi con k elementi su h elementi diversi per contenuto e ordine non ripetuti.

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

7.0.2 Disposizione con ripetizione

Numeri di k -uple ordinate $D_{n,k}$ che posso formare con n oggetti, considerando che tali oggetti possono anche essere ripetuti.

$$D'_{n,k} = n^k$$

7.0.3 Permutazione semplice

Tutti i gruppi con n elementi con ordine diverso.

$$P_n = n!$$

7.0.4 Permutazione con ripetizione

$$P_n^{(m;k)} = \frac{n!}{m!k!}$$

7.0.5 Combinazione semplice

Scegliere k elementi su n , senza ripetizione e senza cambiare l'ordine.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

7.0.6 Combinazione con ripetizione

Si consideri un insieme I costituito da n oggetti distinti e sia k un numero naturale senza alcuna limitazione superiore.

Si chiama combinazione con ripetizioni di classe k un raggruppamento non ordinato di k degli n elementi di I nel quale si possono avere ripetizioni di uno stesso elemento.

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

8 Goniometria

Formula fondamentale:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Formule derivate:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \sec(\alpha) &= \frac{1}{\sin(\alpha)} & \csc(\alpha) &= \frac{1}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Somma e differenza:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Duplicazione:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Bisezione:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = & \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\end{aligned}$$

Formule parametriche:

$$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

8.1 Formule di Werner

$$\begin{aligned}\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]\end{aligned}$$

8.2 Formule di Prostaferesi

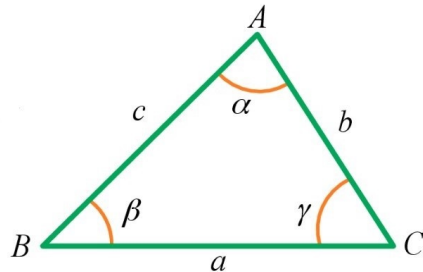
$$\begin{aligned}\sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin(\alpha) - \cos(\beta) &= -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

quadrante	angolo	seno	coseno	tangente	cotangente
primo	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
secondo	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
terzo	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
quarto	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

--	--

Figura 1: Tabella degli angoli associati

9 Trigonometria



9.0.1 Teorema dei seni

In ogni triangolo e' costante il rapporto fra ogni lato ed il seno dell'angolo opposto e tale costante equivale al doppio del raggio del cerchio circoscritto al triangolo.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

9.0.2 Teorema del coseno (Carnot)

In ogni triangolo il quadrato di un lato e' uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati meno il doppio prodotto degli stessi lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

10 Matrici

Una matrice è una tabella rettangolare di elementi.

$$\begin{array}{c}
 a_{ij} \\
 \begin{array}{c} \textcolor{blue}{n} \text{ righe} \\ \textcolor{blue}{i} \text{ cresce} \end{array} \downarrow \begin{array}{c} \textcolor{red}{m} \text{ colonne} \\ \textcolor{red}{j} \text{ cresce} \end{array} \rightarrow \\
 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \\
 \text{matrice } \textcolor{blue}{n} \times \textcolor{red}{m}
 \end{array}$$

10.0.1 Somma tra matrici

$$[A + B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$$

10.0.2 Sottrazione tra matrici

$$[A - B]_{i,j} = [A]_{i,j} - [B]_{i,j}$$

10.0.3 Moltiplicazione per uno scalare

$$[cA]_{i,j} = c[A]_{i,j}$$

10.0.4 Prodotto tra matrici

La moltiplicazione è definita soltanto se le matrici A e B sono rispettivamente di tipo $m \times p$ e $p \times n$: il numero p di colonne di A deve coincidere con il numero p di righe di B . Il risultato è una matrice C di tipo $m \times n$.

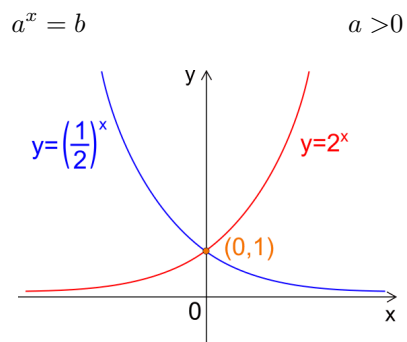
$$[C]_{i,j} = [A]_{i,1}[B]_{1,j} + [A]_{i,2}[B]_{2,j} + \dots + [A]_{i,j}[B]_{i,j}$$

11 Progressioni

11.1 Progressioni aritmetiche

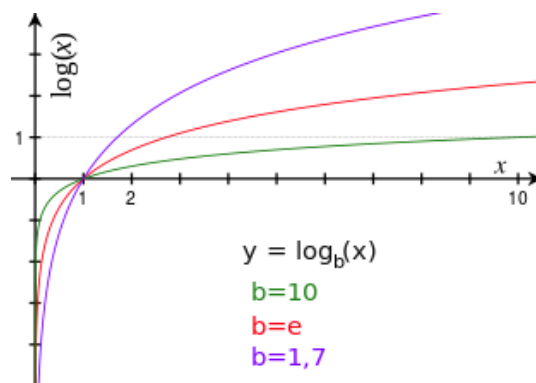
11.2 Progressioni geometriche

12 Esponenziali



13 Logaritmi

$$\log_a b = x \quad \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \wedge a \neq 1 \end{cases}$$



13.0.1 Proprieta'

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

13.0.2 Casi particolari

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

14 Limiti

14.0.1 Verifica dei limiti

$$\forall \epsilon > 0 \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \quad l, x_0 \in \mathcal{N}$$

$$\forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) - l > M \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \quad l = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) - l < -M \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \quad l = -\infty$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 : |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x > c \quad x_0 = +\infty$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 : |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x < -c \quad x_0 = -\infty$$

14.0.2 Forme indeterminate

$$\begin{array}{ccccc} +\infty - \infty & 0 \cdot \infty & \frac{0}{0} & \frac{\infty}{\infty} & 0^0 \\ \infty^0 & 1^\infty & \log_1 1 & \log_0 \infty & \log_0 0 \end{array}$$

14.0.3 Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$$

14.0.4 Teorema del confronto

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{f(x)} = \mathcal{D}_{g(x)} = \mathcal{D}_{h(x)} \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases} \rightarrow \lim f(x) = \lim h(x) \rightarrow \lim g(x)$$

15 Derivate

Il rapporto incrementale di una funzione in un punto è il rapporto tra la variazione di ordinate e la variazione di ascisse definite a partire da un incremento h , ed è un prerequisito necessario per la definizione di derivata.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

15.0.1 Derivate immediate

$$k \in \mathcal{N} \rightarrow 0$$

$$x^a \rightarrow ax^{a-1}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt[n]{x} \rightarrow \frac{1}{n \sqrt[n]{x}}$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

$$a^x \rightarrow a^x \ln a$$

$$e^x \rightarrow e^x$$

$$\log_a x \rightarrow \frac{1}{x} \log_a e$$

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$\sin x \rightarrow \cos x$$

$$\cos x \rightarrow -\sin x$$

$$\arctan x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arcsin x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

15.0.2 Proprieta'

- Somma:

$$d(f(x) + g(x)) = d(f(x)) + d(g(x))$$

- Prodotto:

$$\begin{aligned} d(k \cdot f(x)) &= k \cdot d(f(x)) \\ d(f(x) \cdot g(x)) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

- Quoziente:

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

- Reciproco:

$$d\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

- Inverso:

$$d(f(x)^{-1}) = \frac{1}{f'(x)}$$

15.0.3 Retta tangente alla curva

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

15.0.4 Retta normale alla curva

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

15.0.5 Teorema di Fermat

Una funzione che ammette un massimo od un minimo relativo o assoluto in un punto, e che sia ivi derivabile, ha necessariamente la derivata prima nulla nel punto.

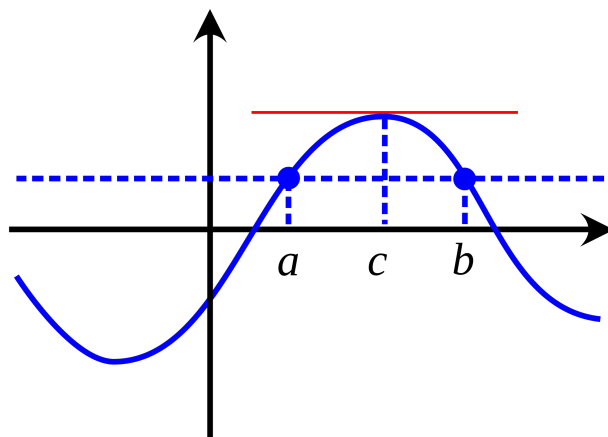
15.0.6 Teorema di Rolle

Se una funzione è continua in un intervallo chiuso, derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto e assume valori uguali negli estremi dell'intervallo, allora esiste almeno un punto interno ad in cui la derivata si annulla, cioè (punto critico o stazionario).

Requisiti:

- $f(x)$ continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$
- $f(a) = f(b)$

$$\exists c \in \mathcal{N} f'(c) = 0$$



15.0.7 Teorema di Cauchy

Requisiti:

- $f(x)$ continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$
- $g(x)$ continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$

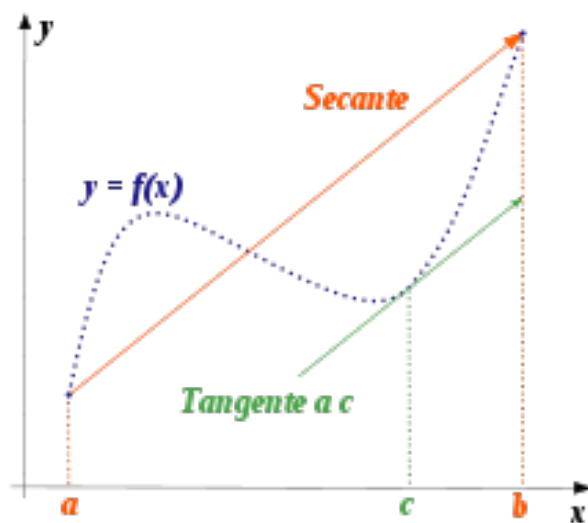
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

15.0.8 Teorema di Lagrange

Dato il grafico di una funzione tra due estremi, esiste almeno un punto in cui la tangente al grafico è parallela alla secante passante per gli estremi. Questo teorema è usato per provare delle proprietà di una funzione in un intervallo partendo da ipotesi locali sulle derivate nei punti di tale intervallo. Requisiti:

- $f(x)$ continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$

$$m = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



15.1 Teorema delle derivate successive

Massimo:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Minimo:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Flesso ascendente a tangente orizzontale:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Flesso discendente a tangente orizzontale:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Flesso ascendente a tangente obliqua:

$$\begin{cases} f'(x_0) \neq 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Flesso discendente a tangente obliqua:

$$\begin{cases} f'(x_0) \neq 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Formula della tangente obliqua:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

16 Integrali

16.0.1 Proprieta'

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$
$$\int [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \int f_3(x) dx$$

16.0.2 Integrali immediati

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c \quad \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$$
$$\int e^x dx = e^x + c \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c \quad \int 1 dx = x + c$$

16.0.3 Integrali mediati

$$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$
$$\int f'(x) \cdot \sin[f(x)] dx = -\cos[f(x)] + c \quad \int f'(x) \cdot \cos[f(x)] dx = \sin[f(x)] + c$$
$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \arcsin[f(x)] + c$$
$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c \quad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan[f(x)] + c$$
$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} dx = \tan[f(x)] + c$$

16.0.4 Funzioni non banali

Risoluzione con formule parametriche:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Risoluzione di integrali irrazionali:

$$\int \sqrt{x^2 \pm \alpha^2} dx \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}} dx \quad \rightarrow t = x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \rightarrow x = a \sin(t)$$

Risoluzione per parti:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

16.0.5 Teorema della media

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

16.0.6 Volume nei solidi di rotazione

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

16.0.7 Metodo dei rettangoli

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad \vee \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n f(x_i)$$

16.0.8 Metodo dei trapezi

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \int_a^b f(x) dx$$

16.0.9 Integrali doppi

$$I = \int_a^b dy \int_c^d f(x, y) dx$$

16.0.10 Integrali di linea di prima specie

$$I = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

16.0.11 Integrali di linea di seconda specie

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^2 \quad \vec{F} : (x, y) \rightarrow (x_1, y_1) \quad t \rightarrow (t_1, t_2)$$

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt$$

16.0.12 Integrali tripli

- Parallelepipedi regolari:

$$D = [a, b] \times [c, d] \times [e, h] \rightarrow \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^h f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

- Per fili:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : (x, y) \in \Omega, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\} \rightarrow \int \int_{\Omega} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

- Per strati:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : z_1 \leq z \leq z_2, (x, y) \in \Omega(z)\} \rightarrow \int_{z_1}^{z_2} \left(\int \int_{\Omega(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

16.0.13 Campi vettoriali

1. Verificare che il campo sia conservativo con le derivate incrociate:

$$F'_{ij} = F'_{ji}$$

2. Trovare il potenziale (U è il minimo potenziale che comprende entrambi gli integrali):

$$\vec{F} : (x, y) \rightarrow (x_1, y_2) \quad \begin{cases} \int x_1 dx \\ \int y_1 dy \end{cases} \quad \int_a^b \vec{F} = U(\gamma)_B - U(\gamma)_A$$

17 Equazioni differenziali

17.0.1 Primo ordine

$$F(y'; y; x) = 0$$

1. $y' = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad y = \int f(x) dx$$

2. $y' = g(x) \cdot h(y)$ con $h(y) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \qquad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \qquad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

3. $y' + a(x)y = b(x)$

$$y = e^{-\int a(x)dx} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{\int a(x)dx} dx + c \right]$$

17.0.2 Secondo ordine

1. $F(y''; y'; y; x) = 0$

$$y'' + by' + cx = 0 \rightarrow z^2 + bz + c = 0 \quad \begin{cases} y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x} & \Delta > 0 \\ y = e^{zx}(c_1 + c_2 x) & \Delta = 0 \\ y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) & \Delta < 0 \end{cases}$$

2. $y'' + by' + cy = r(x)$

Risolvere la soluzione omogenea $y'' + by' + cy = 0$ e poi valutare la soluzione particolare $r(x)$:

- $r(x)$ polinomio $\rightarrow p(x) = x(ax^2 + bx + c)$
- $r(x) = A \cdot e^{hx} \rightarrow p(x) = C \cdot e^{rx}$, $r = h$
- $r(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x \rightarrow p(x) = C \cos \omega x + D \sin \omega x$

18 Studio di funzione

18.1 Studio del dominio

Verificare la presenza di:

$$\frac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}} \rightarrow \text{denominatore} \neq 0$$

$$\sqrt{\text{argomento}} \rightarrow \text{argomento} \geq 0$$

$$\log_a(\text{argomento}) \rightarrow \text{argomento} > 0$$

18.2 Studio del limite e degli asintoti

18.2.1 Discontinuità'

- Funzione continua:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

- Discontinuità' di prima specie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathcal{R}$$

- Discontinuità' di seconda specie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

- Discontinuità' di terza specie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \wedge x \neq x_0$$

18.2.2 Asintoto

- Orizzontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = q \qquad y = q$$

- Verticale

$$\lim_{x \rightarrow q} f(x) = \pm\infty \qquad x = q$$

- Obliquo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \pm\infty & y &= mx + q \\ m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} & q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx \end{aligned}$$

18.3 Parita'/Disparita'

- **Funzione pari:** funzione simmetrica rispetto all'asse y.

$$f(x) = f(-x)$$

- **Funzione dispari:** funzione con simmetria centrale rispetto all'origine.

$$f(x) = -f(-x)$$

18.4 Incontro con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

18.5 Studio del segno

$$f(x) > 0$$

Funzione crescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funzione decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

18.6 Punti di massimo e minimo

Line up:

1. Calcolo della derivata prima
2. Studio del dominio
3. Studio del segno

$$f'(x) > 0$$

4. Estrazione del massimo e minimo locale/globale

18.7 Punti di flesso

Line up:

1. Calcolo della derivata seconda
2. Studio del dominio
3. Studio del segno

$$f''(x) > 0$$

4. Estrazione del massimo e minimo locale/globale

18.8 Punti di non derivabilit 

Punto angoloso:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

Cuspide:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm\infty$$

Flesso a tangente verticale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm\infty$$

18.9 Propriet  delle funzioni derivabili

f(x)	f'(x)
$x \neq k$	$x \neq k$
<i>pari</i>	<i>dispari</i>
<i>dispari</i>	<i>pari</i>
<i>crescente</i>	<i>positiva</i>
<i>decrescente</i>	<i>negativa</i>
<i>max/min</i>	<i>intersezione</i>
\cap	<i>decrescente</i>
\cup	<i>crescente</i>
<i>flesso</i>	<i>max/min</i>

18.10 Approssimazioni

18.10.1 Metodo delle tangenti (Newton)

Il metodo delle tangenti, chiamato anche metodo di Newton-Raphson,   uno dei metodi per il calcolo approssimato di una soluzione di un'equazione della forma $f(x) = 0$. Esso si applica dopo avere determinato un intervallo $[a, b]$ che contiene una sola radice.

$$C_n = C_{n-1} - \frac{f(C_{n-1})}{f'(C_{n-1})}$$

18.10.2 Metodo delle secanti

Il metodo delle secanti   uno dei metodi pi  semplici per il calcolo approssimato di una soluzione di un'equazione della forma $f(x) = 0$. Esso si applica dopo avere determinato un intervallo $[a, b]$ che contiene una sola radice.

$$C_{n+1} = C_n - \frac{f(C_n) \cdot (C_n - C_{n-1})}{f(C_n) - f(C_{n-1})}$$