Fondamenti di Matematica

Enrico Martini

2015 - 2019

Indice

1 Geometria analitica

1.1 Punto

Rappresentazione:

$$P(x_P; y_P)$$

Distanza tra due punti:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Punto medio:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Baricentro:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Area di un triangolo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix}$$

1.2 Retta

Rappresentazione:

$$y = mx + q \qquad \vee \qquad ax + by + c = 0$$

Retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Fascio di rette passante per un punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Distanza punto-retta:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.3 Circonferenza

Rappresentazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Coordinate del centro:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Raggio:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

1.4 Parabola

Rappresentazione:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad\qquad x = ay^2 + by + c$$

Vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad\qquad V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$$

1.5 Ellisse

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con $a > b$:

$$F(\pm c; 0) \qquad\qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Con $a < b$:

$$F(0; \pm c) \qquad\qquad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

1.6 Iperbole

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se rivolta all'asse x:

$$F(\pm c; 0) \qquad\qquad c^2 = a^2 + b^2 \qquad\qquad y = \pm\frac{b}{a}x$$

Se equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad\qquad y = \pm x$$

1.6.1 Funzione omografica

Rappresentazione:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad\qquad C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$$

1.7 Coniche generali

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

2 Trasformazioni geometriche

2.0.1 Simmetria

Simmetria rispetto ad un punto $P(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} x' = 2\alpha - x \\ y' = 2\beta - y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse y:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse x:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

2.0.2 Traslazione

Traslazione rispetto ad un vettore $\vec{v}(a; b)$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

2.0.3 Rotazione

Rotazione rispetto ad un angolo α:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos(\alpha) + y' \cdot \sin(\alpha) \\ y = -x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

2.0.4 Omotetia

Omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto h:

$$\begin{cases} x' = hx - x_c \\ y' = hx - y_c \end{cases}$$

2.0.5 Affinita'

$$\begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \qquad con \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

3 Solidi

3.0.1 Cilindro

$$S_L = 2p \cdot h \qquad S_{TOT} = S_L + 2S_B$$
$$S_B = \pi r^2 \qquad V = S_b \cdot h$$

3.0.2 Cono

$$S_L = \pi r a \qquad S_{TOT} = S_L + 2S_B$$
$$S_B = \pi r^2 \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3.0.3 Sfera

$$S = 4\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3.0.4 Prisma

$$S_L = 2p \cdot h \qquad S_{TOT} = S_L + 2S_B \qquad V = S_b \cdot h$$

3.0.5 Piramide

$$S_L = pa \qquad S_{TOT} = S_L + S_B$$
$$S_B = l^2 \qquad V = \frac{1}{3}S_B \cdot h$$

4 Geometria analitica dello spazio

4.0.1 Equazione del piano

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \qquad\qquad d = -a^2 - b^2 - c^2$$

4.0.2 Punto medio

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

4.0.3 Equazione di una retta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0 \end{cases}$$

4.0.4 Retta passante per due punti

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$$

4.0.5 Distanza tra piano e punto

$$d(A; \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4.0.6 Piano parallelo ad un altro piano passante per un punto

$$\alpha = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

4.0.7 Retta perpendicolare ad un piano passante per un punto

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

4.0.8 Piano passante per un punto perpendicolare ad una retta

$$\alpha = l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

4.0.9 Parallelismo tra piani

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

4.0.10 Perpendicolarita' tra piani

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

4.1 Calcolare i punti stazionari

Punti chiave:

1. Calcolare le derivate parziali del primo ordine

$$f'_x(x, y) \qquad\qquad f'_y(x, y)$$

2. Risolvere i sistema con le derivate uguali a zero

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. Ricavare i punti stazionari

$$P(x_P, y_P)$$

4. Calcolare le derivate parziali del secondo ordine

$$f''_{xx}(x, y) \qquad f''_{xy}(x, y) \qquad f''_{yx}(x, y) \qquad f''_{yy}(x, y)$$

5. Costruire la matrice Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

6. Calcolare il determinante della matrice Hessiana

$$det(H_f(x, y)) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

Considerare i casi:

- $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \wedge det(H_f) > 0 \rightarrow$ minimo locale
- $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \wedge det(H_f) > 0 \rightarrow$ massimo locale
- $det(H_f) < 0 \rightarrow$ punto di sella

4.2 Calcolare il massimo/minimo locale vincolato

Punti chiave:

1. Definire la funzione lagrangiana:

$$\mathcal{L} = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

2. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. Calcolare le derivate parziali del secondo ordine

$$\mathcal{L}''_{xx}(x, y) \qquad \mathcal{L}''_{xy}(x, y) \qquad \mathcal{L}''_{yx}(x, y) \qquad \mathcal{L}''_{yy}(x, y)$$

4. Calcolare il determinante della matrice hessiana orlata:

$$det(\bar{H}) = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} \\ g'_y & \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} \end{vmatrix}$$

Considerare i casi:

- $det(\bar{H}) > 0 \rightarrow$ Massimo locale vincolato
- $det(\bar{H}) < 0 \rightarrow$ Minimo locale vincolato
- $det(\bar{H}) = 0 \rightarrow$ Indeterminato

4.3 Calcolare il massimo/minimo globale

Passi chiave:

1. Verificare che l'insieme sia compatto
2. Trovare i punti stazionari interni con le derivate parziali
3. Trovare i punti di frontiera stazionari con Lagrange
4. Sostituire massimo/minimo per trovare i punti globali

4.4 Coordinate

4.4.1 Coordinate sferiche

Si noti che $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $\Theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin(\varphi)\cos(\Theta) \\ y = \rho \cdot \sin(\varphi)\sin(\Theta) \\ z = p \cdot \cos(\varphi) \end{cases} \qquad p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_D f(\rho, \varphi, \Theta) \cdot \rho^2 \cdot \sin(\varphi)d\rho d\varphi d\Theta$$

4.4.2 Coordinate cilindriche

Si noti che $p \geq 0$, $z \in \mathcal{R}$ e $\Theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\Theta) \\ y = \rho \cdot \sin(\Theta) \\ z = z \end{cases} \qquad p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

4.5 Parametrizzazione

4.5.1 Parametrizzazione di un ellisse

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathcal{R}^2 \qquad t \to (x_c + a\cos t; y_c + b\sin t) \qquad \begin{cases} x = a\cos t + x_c \\ y = b\sin t + y_c \end{cases}$$

4.5.2 Retta tangente alla curva

$$\begin{array}{ll} \gamma : I \subseteq \mathcal{R} \to \mathcal{R}^n & r : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^n \\ t \to \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t)) & t \to \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) = P + t\gamma'(t_0) \end{array}$$

4.5.3 Lunghezza di una curva

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathcal{R}^n$ una curva regolare. Allora la lunghezza $l(\gamma)$ di γ Ãĺ finita e vale:

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$

5 Probabilita'

$$p(E) = \frac{casi_{POSSIBILI}}{casi_{TOTALI}} \qquad\qquad 0 \leq p(E) \leq 1$$

5.0.1 Probabilita' della somma logica di eventi

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

5.0.2 Probabilita' condizionata

La probabilita' condizionata di un evento A rispetto a un evento B ÃÍ la probabilita' che si verifichi A, sapendo che B ÃÍ verificato.

$$p(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$$

5.0.3 Probabilita' del prodotto logico di eventi

$$\begin{cases} p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_1|E_2) & dipendenti \\ p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) & indipendenti \end{cases}$$

5.0.4 Problema delle prove ripetute

- n : numero di estrazioni
- k : numero delle volte in cui deve uscire
- p : probabilita' che si verifichi
- q : probabilita' che non si verifichi

$$P_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

5.0.5 Teorema di Bayes

Considerando un insieme di alternative $A_1, , A_n$ che partizionano lo spazio degli eventi Ω (ossia $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ e $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) si trova la seguente espressione per la probabilita' condizionata:

$$p(E_i|E) = \frac{p(E_i) \cdot p(E|E_i)}{p(E)}$$

6 Calcolo combinatorio

6.0.1 Disposizione semplice

Tutti i gruppi con k elementi su h elementi diversi per contenuto e ordine non ripetuti.

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

6.0.2 Disposizione con ripetizione

Numeri di k-uple ordinate $D_{n,k}$ che posso formare con n oggetti, considerando che tali oggetti possono anche essere ripetuti.

$$D'_{n,k} = n^k$$

6.0.3 Permutazione semplice

Tutti i gruppi con n elementi con ordine diverso.

$$P_n = n!$$

6.0.4 Permutazione con ripetizione

$$P_n^{(n;k)} = \frac{n!}{n!k!}$$

6.0.5 Combinazione semplice

Scegliere k elementi su n, senza ripetizione e senza cambiare l'ordine.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

6.0.6 Combinazione con ripetizione

Si consideri un insieme I costituito da n oggetti distinti e sia k un numero naturale senza alcuna limitazione superiore.

Si chiama combinazione con ripetizioni di classe k un raggruppamento non ordinato di k degli n elementi di I nel quale si possono avere ripetizioni di uno stesso elemento.

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

7 Goniometria

Formula fondamentale:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Formule derivate:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} \qquad \csc(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

Somma e differenza:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Duplicazione:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

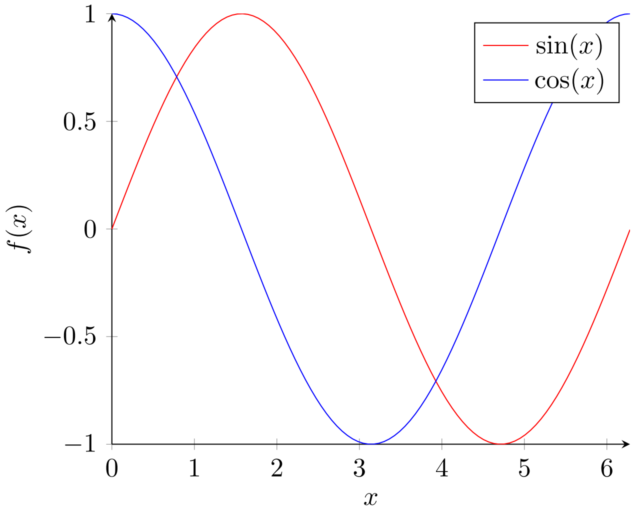
Bisezione:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}} \qquad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

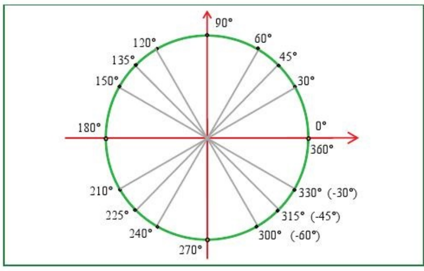
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Formule parametriche:

$$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



quadrante	angolo	seno	coseno	tangente	cotangente
primo	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
secondo	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
terzo	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
quarto	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$



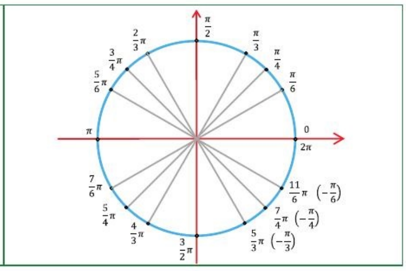
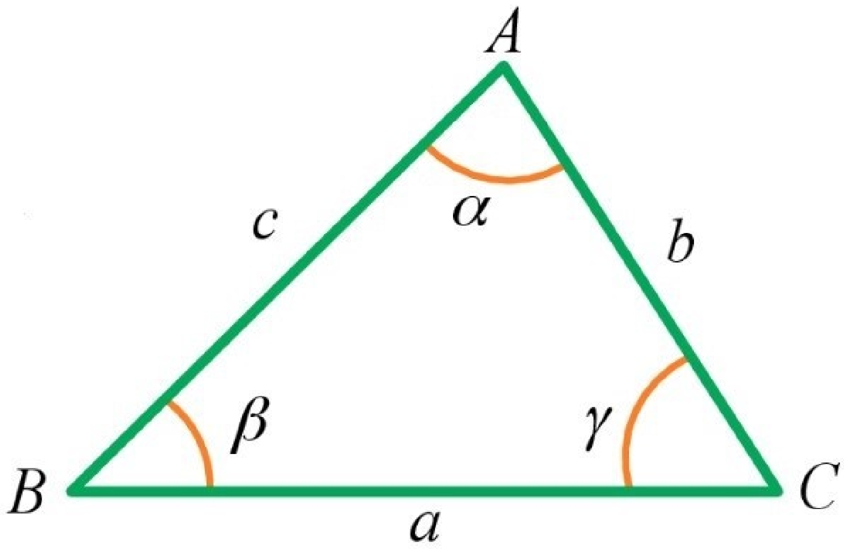


Figura 1: Tabella degli angoli associati

8 Trigonometria



8.0.1 Teorema dei seni

In ogni triangolo e' costante il rapporto fra ogni lato ed il seno dell'angolo opposto e tale costante equivale al doppio del raggio del cerchio circoscritto al triangolo.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

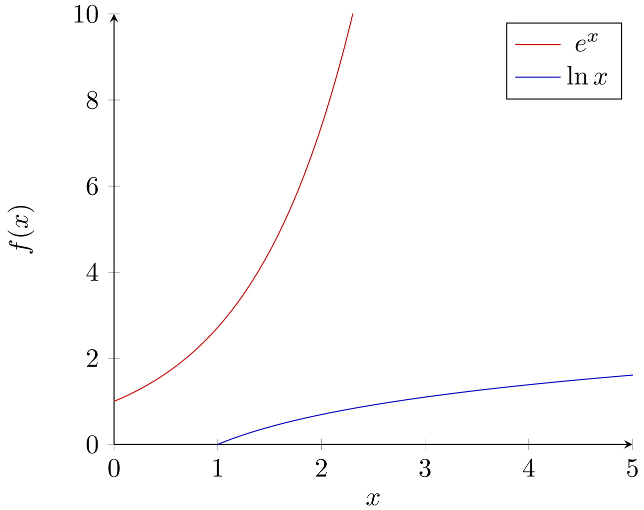
8.0.2 Teorema del coseno (Carnot)

In ogni triangolo il quadrato di un lato e' uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati meno il doppio prodotto degli stessi lati per il coseno dell' angolo fra essi compreso.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

9 Esponenziali

$$a^x = b \qquad\qquad a > 0$$



10 Logaritmi

$$\log_a b = x \qquad\qquad \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \land a \neq 0 \end{cases}$$

10.0.1 Proprieta'

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \qquad\qquad \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \log_a b \qquad\qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

10.0.2 Casi particolari

$$\log_a 1 = 0 \qquad\qquad \log_a a = 1$$

11 Limiti

11.0.1 Verifica dei limiti

$\forall\epsilon > 0 \exists I(x_0) : \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon$	$\forall x \in I(x_0), x \neq x_0$	$l, x_0 \in \mathcal{N}$
$\forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) - l > M$	$\forall x \in I(x_0), x \neq x_0$	$l = +\infty$
$\forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) - l < -M$	$\forall x \in I(x_0), x \neq x_0$	$l = -\infty$
$\forall\epsilon > 0 \exists c > 0 : \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon$	$\forall x > c$	$x_0 = +\infty$
$\forall\epsilon > 0 \exists c > 0 : \lvert f(x) - l\rvert < \epsilon$	$\forall x < -c$	$x_0 = -\infty$

11.0.2 Forme indeterminate

$+\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	0^0
∞^0	1^∞	$\log_1 1$	$\log_0 \infty$	$\log_0 0$

11.0.3 Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$$

11.0.4 Teorema del confronto

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{f(x)} = \mathcal{D}_{g(x)} = \mathcal{D}_{h(x)} \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \lim f(x) = \lim h(x) \quad \rightarrow \quad = \lim g(x)$$

12 Derivate

12.0.1 Derivate immediate

$$k \in \mathcal{N} \rightarrow 0 \qquad x^a \rightarrow ax^{a-1}$$

$$x \rightarrow 1 \qquad \sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt[n]{x} \rightarrow \frac{1}{n\sqrt[n]{x}} \qquad \frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

$$a^x \rightarrow a^x \ln a \qquad e^x \rightarrow e^x$$

$$\log_a x \rightarrow \frac{1}{x}\log_a e \qquad \ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$\sin x \rightarrow \cos x \qquad \cos x \rightarrow -\sin x$$

$$\arctan x \rightarrow \frac{1}{1+x^2} \qquad \arcsin x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12.0.2 Proprieta'

- Somma:

$$d(f(x)+g(x)) = d(f(x)) + d(g(x))$$

- Prodotto:

$$d(k \cdot f(x)) = k \cdot d(f(x))$$
$$d(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Quoziente:

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

- Reciproco:

$$d\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

- Inverso:

$$d\left(f(x)^{-1}\right) = \frac{1}{f'(x)}$$

12.0.3 Teorema di Rolle

Se una funzione Ãĺ continua in un intervallo chiuso , derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto e assume valori uguali negli estremi dell'intervallo, allora esiste almeno un punto interno ad in cui la derivata si annulla, cioÃĺ (punto critico o stazionario).
Requisiti:

- $f(x)$ continua e derivabile in $(a;b)$
- $f(a) = f(b)$

$$\exists c \in \mathcal{N} f'(c) = 0$$

12.0.4 Teorema di Cauchy

Requisiti:

- $f(x)$ continua e derivabile in $(a;b)$
- $g(x)$ continua e derivabile in $(a;b)$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

12.0.5 Teorema di Lagrange

Dato il grafico di una funzione tra due estremi, esiste almeno un punto in cui la tangente al grafico Ãĺ parallela alla secante passante per gli estremi. Questo teorema Ãĺ usato per provare delle proprieta' di una funzione in un intervallo partendo da ipotesi locali sulle derivate nei punti di tale intervallo. Requisiti:

- $f(x)$ continua e derivabile in $(a;b)$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

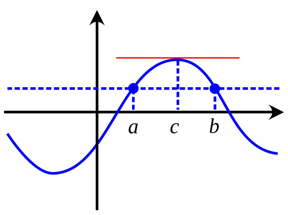


Figura 2: Teorema di Rolle

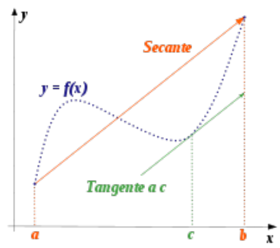


Figura 3: Teorema di Lagrange

12.1 Teorema delle derivate successive

Massimo:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Minimo:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Flesso ascendente a tangente orizzontale:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Flesso discendente a tangente orizzontale:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Flesso ascendente a tangente obliqua:

$$\begin{cases} f'(x_0) \neq 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Flesso discendente a tangente obliqua:

$$\begin{cases} f'(x_0) \neq 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) < 0 \end{cases}$$

Formula della tangente obliqua:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

13 Integrali

13.0.1 Proprieta'

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int \left[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx$$

13.0.2 Integrali immediati

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c \qquad \int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + c$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + c \qquad \int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln(a)} + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}dx = \arcsin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x) + c \qquad \int 1dx = x + c$$

13.0.3 Integrali mediati

$$\int [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int f'(x) \cdot \sin[f(x)]dx = -\cos[f(x)] + c \qquad \int f'(x) \cdot \cos[f(x)]dx = \sin[f(x)] + c$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = \arcsin[f(x)] + c$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c \qquad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan[f(x)] + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx = \tan[f(x)] + c$$

13.0.4 Funzioni non banali

Risoluzione con formule parametriche:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Risoluzione di integrali irrazionali:

$$\int \sqrt{x^2 \pm \alpha^2} dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}} dx \quad \rightarrow t = x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \rightarrow x = a\sin(t)$$

Risoluzione per parti:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

13.0.5 Teorema della media

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

13.0.6 Volume nei solidi di rotazione

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

13.0.7 Metodo dei rettangoli

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \qquad \vee \qquad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

13.0.8 Metodo dei trapezi

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_i+1)}{2} = \int_a^b f(x) dx$$

13.0.9 Integrali doppi

$$I = \int_a^b dy \int_c^d f(x,y)dx$$

13.0.10 Integrali di linea di prima specie

$$I = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||dt$$

13.0.11 Integrali di linea di seconda specie

$$\gamma : [a,b] \to \mathcal{R}^2 \qquad \vec{F} : (x,y) \to (x_1, y_1) \qquad t \to (t_1, t_2)$$

$$\int_a^b < (f(\gamma)); (\gamma'(t)) > dt$$

13.0.12 Integrali tripli

- Parallelepipedi regolari:

$$D = [a,b] \times [c,d] \times [e,h] \to \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^h f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

- Per fili:

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^2 : (x,y) \in \Omega, g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\right\} to \int\int_\Omega \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

- Per strati:

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^2 : z_1 \leq z \leq z_2, (x,y) \in \Omega(z)\right\} \to \int_{z_1}^{z_2} \left(\int\int_{\Omega(z)} f(x,y,z)dxdy \right) dz$$

13.0.13 Campi vettoriali

1. Verificare che il campo sia conservativo con le derivate incrociate:

$$F'_{ij} = F'_{ji}$$

2. Trovare il potenziale (U Ãĺ il minimo potenziale che comprende entrambi gli integrali):

$$\vec{F} : (x,y) \to (x_1, y_2) \qquad \begin{cases} \int x_1 dx \\ \int y_1 dy \end{cases} \qquad \int_a^b \vec{F} = U(\gamma)_B - U(\gamma)_B$$

14 Equazioni differenziali

14.0.1 Primo ordine

$$F(y'; y; x) = 0$$

1. $y' = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad\qquad y = \int f(x)dx$$

2. $y' = g(x) \cdot h(x)$ con $h(y) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \qquad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \qquad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

3. $y' + a(x)y = b(x)$

$$y = e^{-\int a(x)dx} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{\int a(x)dx} dx + c \right]$$

14.0.2 Secondo ordine

1. $F(y''; y'; y; x) = 0$

$$y'' + by' + cx = 0 \rightarrow z^2 + bz + c = 0 \quad \begin{cases} y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x} & \Delta > 0 \\ y = e^{zx}(c_1 + c_2 x) & \Delta = 0 \\ y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) & \Delta < 0 \end{cases}$$

2. $y'' + by' + cy = r(x)$

   Risolvere la soluzione omogenea $y'' + by' + cy = 0$ e poi valutare la soluzione particolare $r(x)$:

   - $r(x)$ polinomio $\rightarrow p(x) = x(ax^2 + bx + c)$
   - $r(x) = A \cdot e^{hx} \rightarrow p(x) = C \cdot e^{rx}$, $r = h$
   - $r(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x \rightarrow p(x) = C \cos \omega x + D \sin \omega x$

15 Studio di funzione

15.1 Studio del dominio

Verificare la presenza di:

$$\frac{numeratore}{denominatore} \quad \rightarrow \quad denominatore \neq 0$$

$$\sqrt{argomento} \quad \rightarrow \quad argomento \geq 0$$

$$\log_a (argomento) \quad \rightarrow \quad argomento > 0$$

15.2 Studio del limite e degli asintoti

15.2.1 Discontinuita'

- Funzione continua:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- Discontinuita' di prima specie:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathcal{R}$$

- Discontinuita' di seconda specie:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

- Discontinuita' di terza specie:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \wedge x \neq x_0$$

15.2.2 Asintoto

- Orizzontale

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = q \qquad y = q$$

- Verticale

$$\lim_{x \to q} f(x) = \pm\infty \qquad x = q$$

- Obliquo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad\qquad y = mx + q$$
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$$

15.3 Parita'/Disparita'

- **Funzione pari:** funzione simmetrica rispetto all'asse y.

$$f(x) = f(-x)$$

- **Funzione dispari:** funzione con simmetria centrale rispetto all'origine.

$$f(x) = -f(-x)$$

15.4 Incontro con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

15.5 Studio del segno

$$f(x) > 0$$

Funzione crescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$$

Funzione decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 > x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$$

15.6 Punti di massimo e minimo

Line up:

1. Calcolo della derivata prima
2. Studio del dominio
3. Studio del segno

$$f'(x) > 0$$

4. Estrazione del massimo e minimo locale/globale

15.7 Punti di flesso

Line up:

1. Calcolo della derivata seconda
2. Studio del dominio
3. Studio del segno

$$f''(x) > 0$$

4. Estrazione del massimo e minimo locale/globale

15.8 Punti di non derivabilita'

Punto angoloso:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

Cuspide:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$$

Flesso a tangente verticale:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$$

15.9 Proprieta' delle funzioni derivabili

f(x)	**f'(x)**
$x \neq k$	$x \neq k$
$pari$	$dispari$
$dispari$	$pari$
$crescente$	$positiva$
$decrescente$	$negativa$
max/min	$intersezione$
∩	$decrescente$
∪	$crescente$
$flesso$	max/min

15.10 Approssimazioni

15.10.1 Metodo delle tangenti (Newton)

Il metodo delle tangenti, chiamato anche metodo di Newton-Raphson, ÃÍ uno dei metodi per il calcolo approssimato di una soluzione di un'equazione della forma $f(x) = 0$. Esso si applica dopo avere determinato un intervallo $[a, b]$ che contiene una sola radice.

$$C_n = C_{n-1} - \frac{f(n-1)}{f'(n-1)}$$

15.10.2 Metodo delle secanti

Il metodo delle secanti ÃÍ uno dei metodi piÃź semplici per il calcolo approssimato di una soluzione di un'equazione della forma $f(x) = 0$. Esso si applica dopo avere determinato un intervallo $[a, b]$ che contiene una sola radice.

$$C_{n+1} = b - \frac{f(b) \cdot (b - C_n)}{f(b) - f(C_n)}$$