

FONDAMENTI DI MATEMATICA

Enrico Martini

v1.0 — 2015 - 2019

Indice

1	Geometria analitica	3
1.1	Punto	3
1.2	Retta	3
1.3	Circonferenza	3
1.4	Parabola	4
1.5	Ellisse	4
1.6	Iperbole	4
1.6.1	Funzione omografica	4
1.7	Coniche generali	4
2	Trasformazioni geometriche	5
3	Solidi	6
4	Geometria analitica dello spazio	7
5	Probabilità	8
6	Calcolo combinatorio	9
7	Goniometria	10
8	Trigonometria	12
9	Esponenziali	13
10	Logaritmi	13
11	Limiti	14
12	Derivate	15
13	Integrali	16
14	Equazioni differenziali	18
15	Studio di funzione	19
15.1	Calcolo del dominio	19
15.2	Asintoti	19
15.3	Parità/Disparità	19
15.4	Incontro con gli assi	19
15.5	Studio del segno	19
15.6	Punti di massimo e minimo	19
15.7	Punti di flesso	19

1 Geometria analitica

1.1 Punto

Rappresentazione:

$$P(x_P; y_P)$$

Distanza tra due punti:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Punto medio:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Baricentro:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Area di un triangolo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix}$$

1.2 Retta

Rappresentazione:

$$y = mx + q \qquad \vee \qquad ax + by + c = 0$$

Retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Fascio di rette passante per un punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Distanza punto-retta:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.3 Circonferenza

Rappresentazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Coordinate del centro:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Raggio:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

1.4 Parabola

Rappresentazione:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad x = ay^2 + by + c$$

Vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$$

1.5 Ellisse

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con $a > b$:

$$F(\pm c; 0) \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Con $a < b$:

$$F(0; \pm c) \qquad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

1.6 Iperbole

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se rivolta all'asse x :

$$F(\pm c; 0) \qquad c^2 = a^2 + b^2 \qquad y = \pm \frac{b}{a}x$$

Se equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad y = \pm x$$

1.6.1 Funzione omografica

Rappresentazione:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$$

1.7 Coniche generali

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

2 Trasformazioni geometriche

Simmetria

Simmetria rispetto ad un punto $P(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} x' = 2\alpha - x \\ y' = 2\beta - y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse y :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse x :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Traslazione

Traslazione rispetto ad un vettore $\vec{v}(a; b)$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Rotazione

Rotazione rispetto ad un angolo α :

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos(\alpha) + y' \cdot \sin(\alpha) \\ y = -x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

Omotetia

Omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto h :

$$\begin{cases} x' = hx - x_c \\ y' = hy - y_c \end{cases}$$

Affinità

$$\begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \quad \text{con } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

3 Solidi

Cilindro

$$\begin{aligned}S_L &= 2p \cdot h \\ S_B &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + 2S_B \\ V &= S_b \cdot h\end{aligned}$$

Cono

$$\begin{aligned}S_L &= \pi r a \\ S_B &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + 2S_B \\ V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h\end{aligned}$$

Sfera

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Prisma

$$S_L = 2p \cdot h$$

$$S_{TOT} = S_L + 2S_B$$

$$V = S_b \cdot h$$

Piramide

$$\begin{aligned}S_L &= pa \\ S_B &= l^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + S_B \\ V &= \frac{1}{3}S_B \cdot h\end{aligned}$$

4 Geometria analitica dello spazio

Equazione del piano

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \qquad d = -a^2 - b^2 - c^2$$

Punto medio

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Equazione di una retta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0 \end{cases}$$

Retta passante per due punti

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$$

Distanza tra piano e punto

$$d(A; \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Piano parallelo ad un altro piano passante per un punto

$$\alpha = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Retta perpendicolare ad un piano passante per un punto

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Piano passante per un punto perpendicolare ad una retta

$$\alpha = l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

Parallelismo tra piani

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

Perpendicolarità tra piani

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

5 Probabilità

$$p(E) = \frac{casi_{POSSIBILI}}{casi_{TOTALI}} \quad 0 \leq p(E) \leq 1$$

Probabilità della somma logica di eventi

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

Probabilità condizionata

$$p(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$$

Probabilità del prodotto logico di eventi

$$\begin{cases} p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_1|E_2) & \text{dipendenti} \\ p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) & \text{indipendenti} \end{cases}$$

Problema delle prove ripetute

- n : numero di estrazioni
- k : numero delle volte in cui deve uscire
- p : probabilità che si verifichi
- q : probabilità che non si verifichi

$$P_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Teorema di Bayes

$$p(E_i|E) = \frac{p(E_i) \cdot p(E|E_i)}{p(E)}$$

6 Calcolo combinatorio

Disposizione semplice

Tutti i gruppi con k elementi su h elementi diversi per contenuto e ordine non ripetuti.

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Disposizione con ripetizione

$$D'_{n,k} = n^k$$

Permutazione semplice

Tutti i gruppi con n elementi con ordine diverso.

$$P_n = n!$$

Permutazione con ripetizione

$$P_n^{(n;k)} = \frac{n!}{n!k!}$$

Combinazione semplice

Scegliere k elementi su n , senza ripetizione e senza cambiare l'ordine.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Combinazione con ripetizione

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

7 Goniometria

Formula fondamentale:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Formule derivate:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \sec(\alpha) &= \frac{1}{\sin(\alpha)} & \csc(\alpha) &= \frac{1}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Somma e differenza:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Duplicazione:

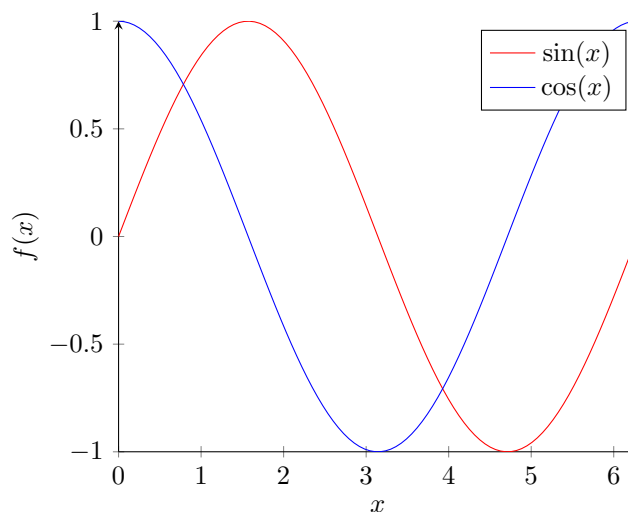
$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Bisezione:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = & \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\end{aligned}$$

Formule parametriche:

$$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



quadrante	angolo	seno	coseno	tangente	cotangente
primo	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
secondo	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
terzo	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
quarto	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

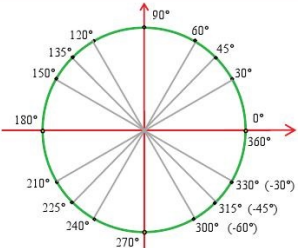
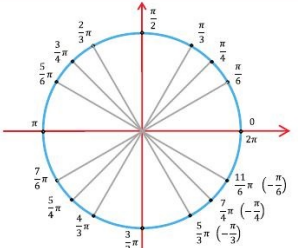
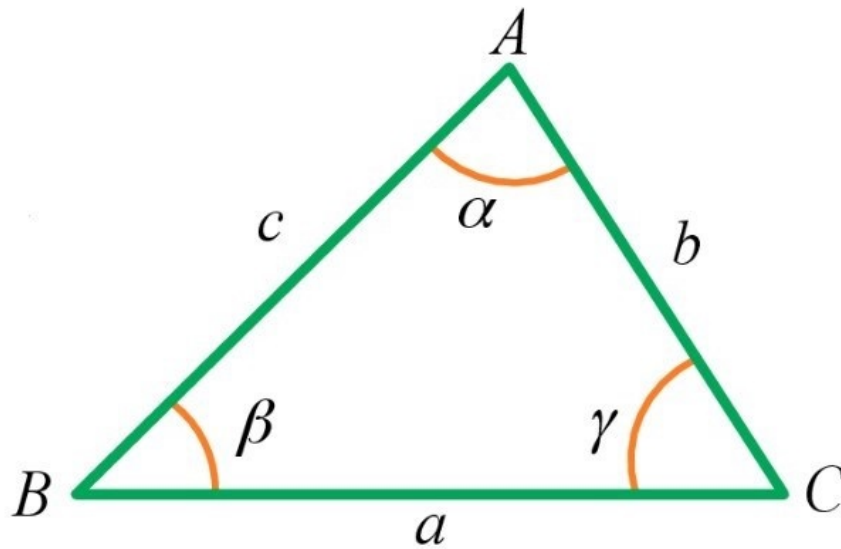



Figura 1: Tabella degli angoli associati

8 Trigonometria



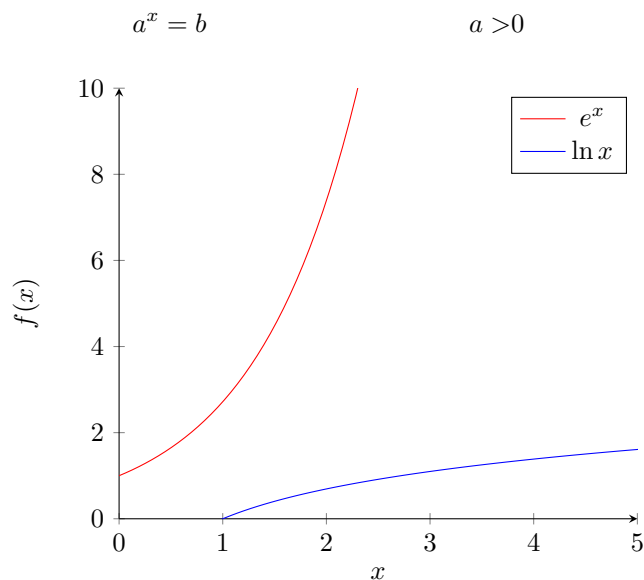
Teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

9 Esponenziali



10 Logaritmi

$$\log_a b = x \quad \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \wedge a \neq 1 \end{cases}$$

Proprietà

$$\begin{aligned} \log_a(b \cdot c) &= \log_a b + \log_a c & \log_a \left(\frac{b}{c} \right) &= \log_a b - \log_a c \\ \log_a b^n &= n \log_a b & \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{aligned}$$

Casi particolari

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

11 Limiti

Verifica dei limiti

$$\forall \epsilon > 0 \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \quad l, x_0 \in \mathcal{N}$$

$$\forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) - l > M \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \quad l = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) - l < -M \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \quad l = -\infty$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 : |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x > c \quad x_0 = +\infty$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 : |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x < -c \quad x_0 = -\infty$$

Forme indeterminate

$$\begin{array}{ccccc} +\infty - \infty & 0 \cdot \infty & \frac{0}{0} & \frac{\infty}{\infty} & 0^0 \\ \infty^0 & 1^\infty & \log_1 1 & \log_0 \infty & \log_0 0 \end{array}$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$$

Teorema del confronto

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{f(x)} = \mathcal{D}_{g(x)} = \mathcal{D}_{h(x)} \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \lim f(x) = \lim h(x) \quad \rightarrow \quad = \lim g(x)$$

12 Derivate

Derivate immediate

$k \in \mathcal{N} \rightarrow 0$	$x^a \rightarrow ax^{a-1}$
$x \rightarrow 1$	$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x} \rightarrow \frac{1}{n\sqrt[n]{x}}$	$\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$
$a^x \rightarrow a^x \ln a$	$e^x \rightarrow e^x$
$\log_a x \rightarrow \frac{1}{x} \log_a e$	$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$
$\sin x \rightarrow \cos x$	$\cos x \rightarrow -\sin x$
$\arctan x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$	$\arcsin x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

Proprietà

- Somma:

$$d(f(x) + g(x)) = d(f(x)) + d(g(x))$$

- Prodotto:

$$\begin{aligned}d(k \cdot f(x)) &= k \cdot d(f(x)) \\d(f(x) \cdot g(x)) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

- Quoziente:

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

- Reciproco:

$$d\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

- Inverso:

$$d(f(x)^{-1}) = \frac{1}{f'(x)}$$

13 Integrali

Proprietà

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$
$$\int [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \int f_3(x) dx$$

Integrali immediati

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c \quad \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$$
$$\int e^x dx = e^x + c \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c \quad \int 1 dx = x + c$$

Integrali mediati

$$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$
$$\int f'(x) \cdot \sin[f(x)] dx = -\cos[f(x)] + c \quad \int f'(x) \cdot \cos[f(x)] dx = \sin[f(x)] + c$$
$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \arcsin[f(x)] + c$$
$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c \quad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan[f(x)] + c$$
$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} dx = \tan[f(x)] + c$$

Funzioni non banali

Risoluzione con formule parametriche:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Risoluzione di integrali irrazionali:

$$\int \sqrt{x^2 \pm \alpha^2} dx \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}} dx \quad \rightarrow t = x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \rightarrow x = a \sin(t)$$

Risoluzione per parti:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Teorema della media

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

Volume nei solidi di rotazione

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Metodo dei rettangoli

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad \vee \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n f(x_i)$$

Metodo dei trapezi

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \int_a^b f(x) dx$$

14 Equazioni differenziali

15 Studio di funzione

15.1 Calcolo del dominio

15.2 Asintoti

15.3 Parità/Disparità

15.4 Incontro con gli assi

15.5 Studio del segno

15.6 Punti di massimo e minimo

15.7 Punti di flesso