

# FONDAMENTI DI MATEMATICA

Enrico Martini

v1.0 — 2015 - 2019

## Indice

<b>1</b>	<b>Geometria analitica</b>	<b>3</b>
1.1	Punto . . . . .	3
1.2	Retta . . . . .	3
1.3	Circonferenza . . . . .	3
1.4	Parabola . . . . .	4
1.5	Ellisse . . . . .	4
1.6	Iperbole . . . . .	4
1.6.1	Funzione omografica . . . . .	4
1.7	Coniche generali . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Trasformazioni geometriche</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Solidi</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Geometria analitica dello spazio</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Probabilità</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Calcolo combinatorio</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Goniometria</b>	<b>10</b>
<b>8</b>	<b>Trigonometria</b>	<b>12</b>
<b>9</b>	<b>Esponenziali</b>	<b>13</b>
<b>10</b>	<b>Logaritmi</b>	<b>13</b>
<b>11</b>	<b>Limiti</b>	<b>14</b>
<b>12</b>	<b>Derivate</b>	<b>15</b>
<b>13</b>	<b>Integrali</b>	<b>17</b>
<b>14</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>19</b>
<b>15</b>	<b>Studio di funzione</b>	<b>20</b>
15.1	Studio del dominio . . . . .	20
15.2	Studio del limite e degli asintoti . . . . .	20
15.3	Parità/Disparità . . . . .	21
15.4	Incontro con gli assi . . . . .	21
15.5	Studio del segno . . . . .	21
15.6	Punti di massimo e minimo . . . . .	21
15.7	Punti di flesso . . . . .	21

# 1 Geometria analitica

## 1.1 Punto

Rappresentazione:

$$P(x_P; y_P)$$

Distanza tra due punti:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Punto medio:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Baricentro:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Area di un triangolo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix}$$

## 1.2 Retta

Rappresentazione:

$$y = mx + q \qquad \vee \qquad ax + by + c = 0$$

Retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Fascio di rette passante per un punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Distanza punto-retta:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## 1.3 Circonferenza

Rappresentazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Coordinate del centro:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Raggio:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

## 1.4 Parabola

Rappresentazione:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad x = ay^2 + by + c$$

Vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$$

## 1.5 Ellisse

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con  $a > b$ :

$$F(\pm c; 0) \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Con  $a < b$ :

$$F(0; \pm c) \qquad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

## 1.6 Iperbole

Rappresentazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se rivolta all'asse  $x$ :

$$F(\pm c; 0) \qquad c^2 = a^2 + b^2 \qquad y = \pm \frac{b}{a}x$$

Se equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad y = \pm x$$

### 1.6.1 Funzione omografica

Rappresentazione:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$$

## 1.7 Coniche generali

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

## 2 Trasformazioni geometriche

### Simmetria

Simmetria rispetto ad un punto  $P(\alpha, \beta)$  :

$$\begin{cases} x' = 2\alpha - x \\ y' = 2\beta - y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse  $y$ :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse  $x$ :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

### Traslazione

Traslazione rispetto ad un vettore  $\vec{v}(a; b)$ :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

### Rotazione

Rotazione rispetto ad un angolo  $\alpha$ :

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos(\alpha) + y' \cdot \sin(\alpha) \\ y = -x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

### Omotetia

Omotetia di centro  $O(0; 0)$  e rapporto  $h$ :

$$\begin{cases} x' = hx - x_c \\ y' = hy - y_c \end{cases}$$

### Affinità

$$\begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \quad \text{con } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

### 3 Solidi

#### Cilindro

$$\begin{aligned}S_L &= 2p \cdot h \\ S_B &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + 2S_B \\ V &= S_b \cdot h\end{aligned}$$

#### Cono

$$\begin{aligned}S_L &= \pi r a \\ S_B &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + 2S_B \\ V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h\end{aligned}$$

#### Sfera

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

#### Prisma

$$S_L = 2p \cdot h \qquad S_{TOT} = S_L + 2S_B \qquad V = S_b \cdot h$$

#### Piramide

$$\begin{aligned}S_L &= pa \\ S_B &= l^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{TOT} &= S_L + S_B \\ V &= \frac{1}{3}S_B \cdot h\end{aligned}$$

## 4 Geometria analitica dello spazio

Equazione del piano

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \qquad d = -a^2 - b^2 - c^2$$

Punto medio

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Equazione di una retta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0 \end{cases}$$

Retta passante per due punti

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$$

Distanza tra piano e punto

$$d(A; \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Piano parallelo ad un altro piano passante per un punto

$$\alpha = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Retta perpendicolare ad un piano passante per un punto

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Piano passante per un punto perpendicolare ad una retta

$$\alpha = l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

Parallelismo tra piani

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

Perpendicolarità tra piani

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

## 5 Probabilità

$$p(E) = \frac{casi_{POSSIBILI}}{casi_{TOTALI}} \quad 0 \leq p(E) \leq 1$$

### Probabilità della somma logica di eventi

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

### Probabilità condizionata

$$p(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$$

### Probabilità del prodotto logico di eventi

$$\begin{cases} p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_1|E_2) & \text{dipendenti} \\ p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) & \text{indipendenti} \end{cases}$$

### Problema delle prove ripetute

- n : numero di estrazioni
- k : numero delle volte in cui deve uscire
- p : probabilità che si verifichi
- q : probabilità che non si verifichi

$$P_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

### Teorema di Bayes

$$p(E_i|E) = \frac{p(E_i) \cdot p(E|E_i)}{p(E)}$$



## 6 Calcolo combinatorio

### Disposizione semplice

Tutti i gruppi con  $k$  elementi su  $h$  elementi diversi per contenuto e ordine non ripetuti.

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

### Disposizione con ripetizione

$$D'_{n,k} = n^k$$

### Permutazione semplice

Tutti i gruppi con  $n$  elementi con ordine diverso.

$$P_n = n!$$

### Permutazione con ripetizione

$$P_n^{(n;k)} = \frac{n!}{n!k!}$$

### Combinazione semplice

Scegliere  $k$  elementi su  $n$ , senza ripetizione e senza cambiare l'ordine.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

### Combinazione con ripetizione

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

## 7 Goniometria

Formula fondamentale:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Formule derivate:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ \sec(\alpha) &= \frac{1}{\sin(\alpha)} & \csc(\alpha) &= \frac{1}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Somma e differenza:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Duplicazione:

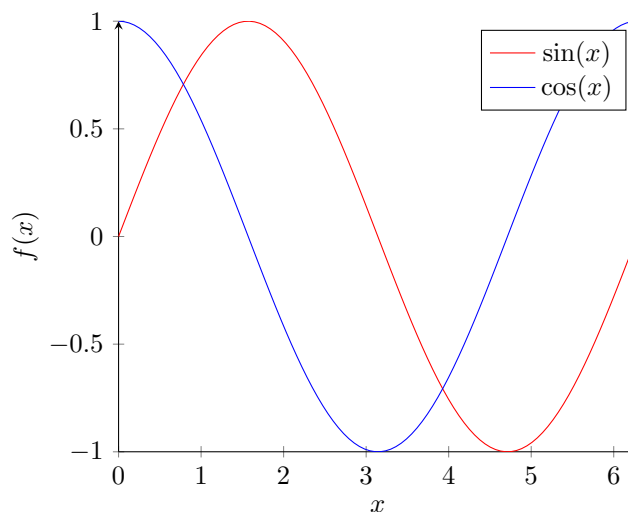
$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Bisezione:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = & \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\end{aligned}$$

Formule parametriche:

$$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



quadrante	angolo	seno	coseno	tangente	cotangente
primo	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
secondo	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
terzo	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
quarto	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

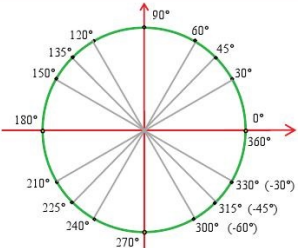
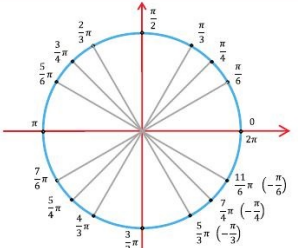
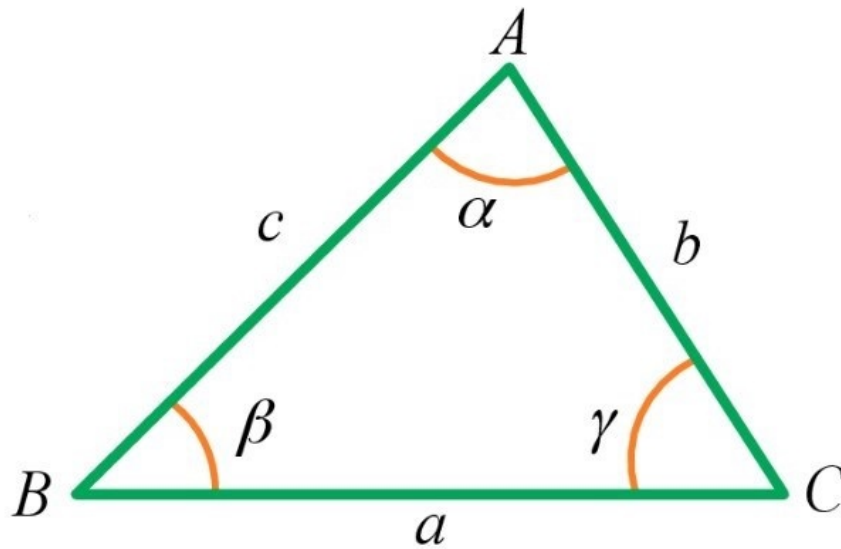



Figura 1: Tabella degli angoli associati

## 8 Trigonometria



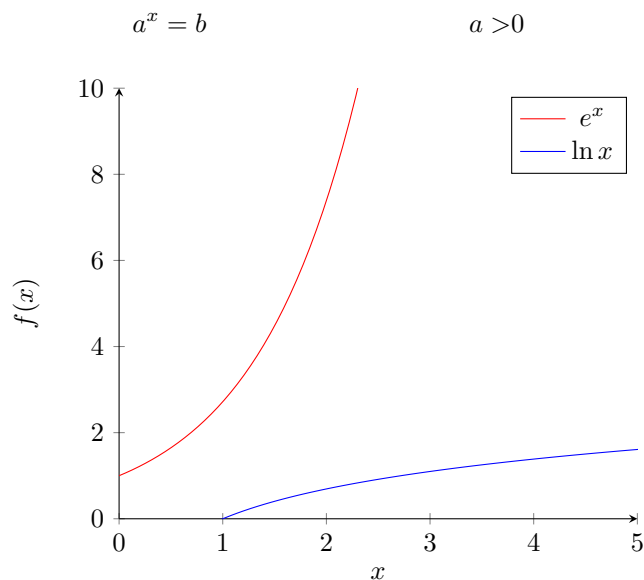
**Teorema dei seni**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

**Teorema del coseno**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

## 9 Esponenziali



## 10 Logaritmi

$$\log_a b = x \quad \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \wedge a \neq 1 \end{cases}$$

### Proprietà

$$\begin{aligned} \log_a (b \cdot c) &= \log_a b + \log_a c & \log_a \left( \frac{b}{c} \right) &= \log_a b - \log_a c \\ \log_a b^n &= n \log_a b & \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{aligned}$$

### Casi particolari

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

## 11 Limiti

### Verifica dei limiti

$$\forall \epsilon > 0 \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \quad l, x_0 \in \mathcal{N}$$

$$\forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) - l > M \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \quad l = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists I(x_0) : f(x) - l < -M \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \quad l = -\infty$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 : |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x > c \quad x_0 = +\infty$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 : |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x < -c \quad x_0 = -\infty$$

### Forme indeterminate

$$\begin{array}{ccccc} +\infty - \infty & 0 \cdot \infty & \frac{0}{0} & \frac{\infty}{\infty} & 0^0 \\ \infty^0 & 1^\infty & \log_1 1 & \log_0 \infty & \log_0 0 \end{array}$$

### Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$$

### Teorema del confronto

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{f(x)} = \mathcal{D}_{g(x)} = \mathcal{D}_{h(x)} \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \lim f(x) = \lim h(x) \quad \rightarrow \quad = \lim g(x)$$

## 12 Derivate

### Derivate immediate

$k \in \mathcal{N} \rightarrow 0$	$x^a \rightarrow ax^{a-1}$
$x \rightarrow 1$	$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x} \rightarrow \frac{1}{n\sqrt[n]{x}}$	$\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$
$a^x \rightarrow a^x \ln a$	$e^x \rightarrow e^x$
$\log_a x \rightarrow \frac{1}{x} \log_a e$	$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$
$\sin x \rightarrow \cos x$	$\cos x \rightarrow -\sin x$
$\arctan x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$	$\arcsin x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

### Proprietà

- Somma:

$$d(f(x) + g(x)) = d(f(x)) + d(g(x))$$

- Prodotto:

$$\begin{aligned}d(k \cdot f(x)) &= k \cdot d(f(x)) \\d(f(x) \cdot g(x)) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

- Quoziente:

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

- Reciproco:

$$d\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

- Inverso:

$$d(f(x)^{-1}) = \frac{1}{f'(x)}$$

### Teorema di Rolle

Requisiti:

- $f(x)$  continua e derivabile in  $(a; b)$
- $f(a) = f(b)$

$$\exists c \in \mathcal{N} f'(c) = 0$$

### **Teorema di Cauchy**

Requisiti:

- $f(x)$  continua e derivabile in  $(a; b)$
- $g(x)$  continua e derivabile in  $(a; b)$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

### **Teorema di Lagrange**



## 13 Integrali

### Proprietà

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$
$$\int [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \int f_3(x) dx$$

### Integrali immediati

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c \quad \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$$
$$\int e^x dx = e^x + c \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c \quad \int 1 dx = x + c$$

### Integrali mediati

$$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$
$$\int f'(x) \cdot \sin[f(x)] dx = -\cos[f(x)] + c \quad \int f'(x) \cdot \cos[f(x)] dx = \sin[f(x)] + c$$
$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \arcsin[f(x)] + c$$
$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c \quad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan[f(x)] + c$$
$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} dx = \tan[f(x)] + c$$

### Funzioni non banali

Risoluzione con formule parametriche:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Risoluzione di integrali irrazionali:

$$\int \sqrt{x^2 \pm \alpha^2} dx \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}} dx \quad \rightarrow t = x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \rightarrow x = a \sin(t)$$

Risoluzione per parti:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

### Teorema della media

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

### Volume nei solidi di rotazione

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

### Metodo dei rettangoli

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad \vee \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n f(x_i)$$

### Metodo dei trapezi

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \int_a^b f(x) dx$$

## 14 Equazioni differenziali

### Primo ordine

$$F(y'; y; x) = 0$$

1.  $y' = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad y = \int f(x) dx$$

2.  $y' = g(x) \cdot h(y)$  con  $h(y) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \qquad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \qquad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

3.  $y' + a(x)y = b(x)$

$$y = e^{-\int a(x)dx} \cdot \left[ \int b(x) \cdot e^{\int a(x)dx} dx + c \right]$$

### Secondo ordine

1.  $F(y''; y'; y; x) = 0$

$$y'' + by' + cx = 0 \rightarrow z^2 + bz + c = 0 \quad \begin{cases} y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x} & \Delta > 0 \\ y = e^{zx}(c_1 + c_2 x) & \Delta = 0 \\ y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) & \Delta < 0 \end{cases}$$

2.  $y'' + by' + cy = r(x)$

Risolvere la soluzione omogenea  $y'' + by' + cy = 0$  e poi valutare la soluzione particolare  $r(x)$ :

- $r(x)$  polinomio  $\rightarrow p(x) = x(ax^2 + bx + c)$
- $r(x) = A \cdot e^{hx} \rightarrow p(x) = C \cdot e^{rx}$ ,  $r = h$
- $r(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x \rightarrow p(x) = C \cos \omega x + D \sin \omega x$

## 15 Studio di funzione

### 15.1 Studio del dominio

Verificare la presenza di:

$$\frac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}} \rightarrow \text{denominatore} \neq 0$$

$$\sqrt{\text{argomento}} \rightarrow \text{argomento} \geq 0$$

$$\log_a(\text{argomento}) \rightarrow \text{argomento} > 0$$

### 15.2 Studio del limite e degli asintoti

#### Discontinuità

- Funzione continua:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

- Discontinuità di prima specie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathcal{R}$$

- Discontinuità di seconda specie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

- Discontinuità di terza specie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \wedge x \neq x_0$$

#### Asintoto

- Orizzontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = q \qquad y = q$$

- Verticale

$$\lim_{x \rightarrow q} f(x) = \pm\infty \qquad x = q$$

- Obliquo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \pm\infty & y &= mx + q \\ m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} & q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx \end{aligned}$$

### 15.3 Parità/Disparità

- **Funzione pari:** funzione simmetrica rispetto all'asse y.

$$f(x) = f(-x)$$

- **Funzione dispari:** funzione con simmetria centrale rispetto all'origine.

$$f(x) = -f(-x)$$

### 15.4 Incontro con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

### 15.5 Studio del segno

$$f(x) > 0$$

Funzione crescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funzione decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

### 15.6 Punti di massimo e minimo

Line up:

1. Calcolo della derivata prima
2. Studio del dominio
3. Studio del segno
4. Estrazione del massimo e minimo locale/globale

### 15.7 Punti di flesso