Условия задачи

4. Построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации и найти ее решения при различных значениях h:

$$u' + \alpha \cos x^2 \cdot v = e^x, \qquad v' - \alpha \sin x \cdot u = \sin x^2$$
$$u(0) = 0, \quad v(1) = 1.$$

Исследовать зависимость решения от α.

Решение:

Необходимо построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации. Разобъем отрезок $[0, 1]$ на N равных частей, т.е. получим сетку, шаг которой равен $h = \frac{1}{N}$.

$x_i = ih, \quad u(x_i) = u_i, \quad v(x_i) = v_i$. Тогда $u'(x_i) = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h}$, и первое уравнение принимает вид

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \alpha \cos x_i^2 \cdot v_i - e^{x_i} = 0.$$

Чтобы уравнение имело второй порядок аппроксимации, необходимо из него вычестеть главный член $\dfrac{h}{2}u''$.

Найдем уравнение на вторую производную из первого, продифферинцируя его.

$$u'' + \alpha \cos x^2 \cdot v' - 2\alpha x \sin x^2 \cdot v - e^x = 0.$$

Заменим v', используя второе уравнение. Получим

$$u'' = -\alpha^2 \sin x \cos x^2 \cdot u + 2\alpha x \sin x^2 \cdot v + e^x - \alpha \cos x^2 \sin x^2.$$

В результате получим уравнение вида

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{h}{2}\alpha^2 \sin x_i \cos x_i^2 \cdot u_i + (\alpha \cos x_i^2 - h\alpha x_i \sin x_i^2) \cdot v_i -$$
$$-(1 + \frac{h}{2})e^{x_i} - \frac{h}{2}\alpha \cos x_i^2 \sin x_i^2 = 0.$$

Аналогично уравнение для v

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{h} + \frac{h}{2}\alpha^2 \sin x_i \cos x_i^2 \cdot v_i - (\alpha \sin x_i + \frac{h}{2}\alpha \cos x_i) \cdot u_i -$$
$$-h(\frac{1}{2}\alpha \sin x_i e^{x_i} - x_i \cos x_i^2) - \sin x_i^2 = 0.$$

В результате получится система из $2N - 2$ уравнений и $2N$ переменных. Найдем u_N. Рассмотрим u_i как функцию от v_0. $u_N(v_1)$ должно удовлетворять посленему для u уравнению $F(u_N) = 0$. Тогда найдем такие значения v_1^0 и v_1^1, при которых $F(u_N^0) < 0$ и $F(u_N^1) > 0$. Следовательно, искомое v_1 лежит между v_1^0 и v_1^1. Найдем его с методом бисекций. В результате получится решить систему уравнений.