Отчет о численном методе решения задачи оптимального управления

Выполнил студент 401 группы Серёгин Андрей

7 семестр, 2023 год

Условия задачи
46. Решить задачу при $\alpha = 0, 0.1, 1, 10$.

$$\int_0^4 \ddot{x}^2 \cos(\alpha x) - \dot{x}^2 dt \to inf$$
$$|\ddot{x}| \leqslant 24, \quad x(0) = 11, \quad x(4) = \dot{x}(4) = 0$$

Формализация
$x(t) = x_1(t), \quad \dot{x}(t) = x_2(t), \quad \ddot{x}(t) = u(t).$
Тогда

$$B_0(x_1, x_2, u) = \int_0^4 u^2 \cos(\alpha x_1) - x_2^2 dt$$
$$\dot{x_1} - x_2 = 0, \quad \dot{x_2} - u = 0 \quad \forall t \in [0, 4]$$
$$x_1(0) = 11, \quad x_1(4) = x_2(4) = 0,$$
$$u \in U \equiv u||u(t)| \leqslant 24.$$

Функция Лагранжа:
$L \equiv \lambda_0(u^2 \cos(\alpha x_1) - x_2^2) + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u) \equiv p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - H.$
$H \equiv p_1 x_2 + p_2 u - \lambda_0(u^2 \cos(\alpha x_1) - x_2^2).$
$l \equiv \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(4) + \lambda_3 x_2(4).$
а) Система Эйлера - Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0.$$

$$\dot{p}_1 = -\lambda_0 \alpha u^2 \sin(\alpha x_1)$$
$$\dot{p}_2 = -p_1 - 2\lambda_0 x_2.$$

б) Условия трансвенсальности

$$p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(4) = \lambda_2$$
$$p_2(0) = 0, \quad p_2(4) = \lambda_3.$$

в) Условия оптимальности $\lambda_0 u^2 \cos(\alpha x_1) - p_2 u = L(u)$ или $H(u) = -L(u)$. Тогда $\hat{u}(t) = \arg\operatorname{abs}\min\limits_{u\in U} L(u) = \arg\operatorname{abs}\max\limits_{u\in U} H(u) = \arg\operatorname{abs}\max\limits_{u\in U}(p_2 u - \lambda_0 u^2 \cos(\alpha x_1))$. Следовательно, если $\lambda_0 \cos(\alpha x_1) > 0$, то

$$u = \begin{cases} \dfrac{p_2}{2\lambda_0 \cos(\alpha x_1)}, \textit{если} \quad \dfrac{p_2}{2\lambda_0 \cos(\alpha x_1)} \leqslant 24 \\ 24, \textit{если} \quad \dfrac{p_2}{2\lambda_0 \cos(\alpha x_1)} > 24 \\ -24, \textit{если} \quad \dfrac{p_2}{2\lambda_0 \cos(\alpha x_1)} < -24. \end{cases}$$

Если $\lambda_0 \cos(\alpha x_1) < 0$, то

$$u = \begin{cases} -24, \textit{если} \quad \dfrac{p_2}{2\lambda_0 \cos(\alpha x_1)} > 0 \\ 24, \textit{если} \quad \dfrac{p_2}{2\lambda_0 \cos(\alpha x_1)} < 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то

$$u = \begin{cases} \in U(t), \textit{если} \quad p_2 \equiv 0, \\ \nexists, \textit{если} \quad p_2 > 0, \\ \nexists, \textit{если} \quad p_2 < 0. \end{cases}$$

г) условия стационарности отсутствуют
е) $\lambda_0 \geqslant 0$
ж) Условие НЕРОН
з) Условие нормированности.

Решение краевой задачи

При $\lambda_0 = 0$ $p_1(t) = C$ и $p_2(t) = Ct + D$ из условия $p_2(0) = 0$ $D = 0$, следовательно, $p_2(t) = Ct$, то есть при $C \neq 0$ выполняется условие НЕРОН, но не существует решения, с другой стороны при $= 0$ нарушается условие НЕРОН. Таким образом, при $\lambda_0 = 0$ отсутсвует решение.

Кравевая задача. Пусть $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 - x_2 = 0 \\
\dot{x_2} - u = 0 \\
\dot{p}_1 = -\dfrac{1}{2}\alpha u^2 \sin(\alpha x_1) \\
\dot{p}_2 = -p_1 - x_2 \\
x_1(0) = 11 \\
x_1(4) = 0 \\
x_2(4) = 0 \\
p_2(0) = 0 \\
u = \arg\operatorname{abs}\min\limits_{u \in U} L(u) = .
\end{cases}
\tag{1}
$$

Перепишем систему, избавившись от p_1 и x_2.

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_1 = u \\
\ddot{p}_2 = \dfrac{1}{2}\alpha u^2 \sin(\alpha x_1) - u \\
x_1(0) = 11 \\
x_1(4) = 0 \\
\dot{x}_1(4) = 0 \\
p_2(0) = 0 \\
u = \arg\operatorname{abs}\min\limits_{u \in U} L(u) = .
\end{cases}
\tag{2}
$$

Систему будем решать с помощью модифицированного метода Ньютона. Пусть $p_2(4) = a_1$, $p_2(4-h) = a_2$, $||S||^2 = (x_1(0) - \tilde{x}_1(0))^2 + (p_2(0) - \tilde{p}_2(0))^2$ – норма невязки, где $\tilde{x}_1(0)$ и $\tilde{p}_2(0)$ – значения, полученные методом Ньютона. Тогда условием остановки с точностью ε будет: $S < \varepsilon$. При $\alpha = 0$ решение системы выписывается в явном виде), тогда при выборе $a_1 = a_2 = p_2(4) = \dfrac{-11sin(4)}{4cos(4) - sin(4)}$ метод Ньютона сойдется. Так как решение краевой задачи непрерывно зависит от параметра α, то при α близких к нулю и выборе данных начальных значений метод Ньютона будет сходится.

Чтобы решить краевую задачу для $alpha > 0$, будем в качестве начальных значений параметра брать предыдущие a_1 и a_2. При достаточно малом шаге α метод Ньютона будет сходиться.

Итерационный процесс в методе Ньютона: пусть известны a_1^k

и a_2^k, $F(a_1, a_2) = (x_1(0)(a_1, a_2), p_2(0)(a_1, a_2))$, тогда $a_1^{k+1} = a_1^k + \Delta a_1^k$ и $a_2^{k+1} = a_2^k + \Delta a_2^k$, где Δa_1^k и Δa_2^k находятся из $\dfrac{\partial F}{\partial a}(\Delta a^k) = -S$.

Запишем разностную схему для нашей краевой задачи.Заменив $z = p_2$ и $y = x_1$, получим

$$\begin{cases} y_N = 0 \\ y_{N-1} = 0 \\ z_N = a_1 \\ z_{N-1} = a_2 \\ (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})/h^2 = u_n \\ (z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1})/h^2 = \dfrac{1}{2}\alpha u_n^2 \sin(\alpha y_n) - u_n \\ u_n = \arg\operatorname{abs}\min\limits_{u \in U} L(u_n). \end{cases} \tag{3}$$

Частные производные F найдем из рекурентных соотношений:

$$\begin{cases} y_N = 0 \\ y_{N-1} = 0 \\ z_N = a_1 \\ z_{N-1} = a_2 \\ (\dfrac{\partial y_{n+1}}{\partial a_i} - 2\dfrac{\partial y_n}{\partial a_i} + \dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial a_i})/h^2 = \dfrac{\partial u_n}{\partial a_i} \\ (\dfrac{\partial z_{n+1}}{\partial a_i} - 2\dfrac{\partial z_n}{\partial a_i} + \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial a_i})/h^2 = \dfrac{\partial}{\partial a_i}(\dfrac{1}{2}\alpha u_n^2 \sin(\alpha y_n) - u_n) \\ u_n = \arg\operatorname{abs}\min\limits_{u \in U} L(u_n). \end{cases} \tag{4}$$

$\dfrac{\partial u_n}{\partial a_i}$ находим как производную сложной функции.