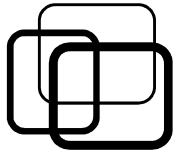
Đệ quy

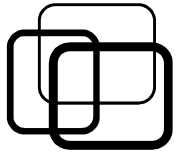
GV. Nguyễn Minh Huy

Nội dung



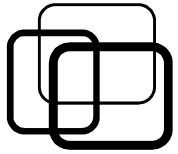
- Tổng quan về đệ quy.
- Phân loại đệ quy.
- Các vấn đề đệ quy thông dụng.

Nội dung



- **Tổng quan về đệ quy.**
- Phân loại đệ quy.
- Các vấn đề đệ quy thông dụng.

Tổng quan về đệ quy

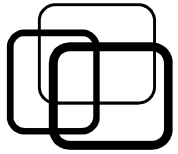


- Khái niệm đệ quy:
  - Đệ quy là gì?

    ➔ Xem phần…"Đệ quy là gì?"!!
  - Đệ quy là…

    ➔ Định nghĩa một vấn đề bằng chính vấn đề đó!!
  - Một vài định nghĩa đệ quy:
    - n! = n * (n – 1)!.
    - f(n) = f(n – 1) + f(n – 2).
    - n là số tự nhiên nếu n – 1 cũng là số tự nhiên N.
    - Tổ tiên của A là những người sinh ra…tổ tiên của A.

Tổng quan về đệ quy



- Khái niệm đệ quy:
  - Cấu trúc một định nghĩa đệ quy:
    - Phần dừng: trường hợp cơ bản.
    - Phần đệ quy: suy biến vấn đề về trường hợp đơn giản hơn.

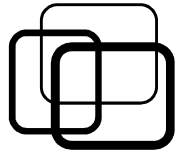
      - 0! = 1
      - n! = n * (n – 1)!.

      - f(0) = 0
      - f(1) = 1
      - f(n) = f(n – 1) + f(n – 2).

      - 0 là số tự nhiên nhỏ nhất.
      - n là số tự nhiên nếu n – 1 là số tự nhiên.

      - Tổ tiên gần nhất của A là ba mẹ A.
      - Tổ tiên của ba mẹ A cũng là A tổ tiên của A.

Tổng quan về đệ quy

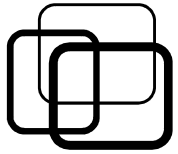


- Đệ quy trong lập trình:
  - Hàm đệ quy:
    - Thân hàm có lời gọi hàm lại chính nó.
    - Lời gọi hàm trức tiếp hay gián tiếp.

```
// Đệ quy trực tiếp.
void func()
{
        // …
        func();
        // …
}
```

```
// Đệ quy gián tiếp.
void func1()
{
        // …
        func2();
        // …
}
void func2()
{
        // …
        func1();
        // …
}
```

Tổng quan về đệ quy



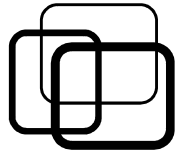
- Đệ quy trong lập trình:
  - Cấu trúc hàm đệ quy:

```
<Kiểu trả về> <Tên hàm>( [Danh sách tham số] )
{
    if (<Trường hợp cơ bản>)
        // Xử lý trường hợp cơ bản.
    else
        // Gọi lại hàm đệ quy.
}
```

```
int tinhGT(int n)
{
    if (n == 0)
        return 1;
    return n * tinhGT(n – 1);
}
```

```
int fibo(int n)
{
    if (n == 0)
        return 0;
    if (n == 1)
        return 1;
    return fibo(n – 1) + fibo(n – 2);
}
```

Tổng quan về đệ quy



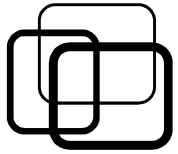
- Đệ quy trong lập trình:
  - Kiểu dữ liệu đệ quy:

```
struct <Tên cấu trúc>
{
    // …
    <Tên cấu trúc>  <Tên thành phần>;
    // …
};
```

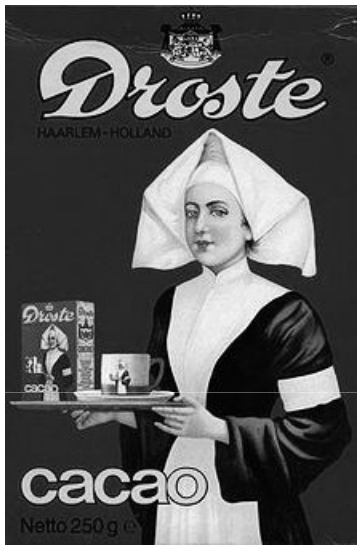
```
struct Person
{
    char    *name;
    int     age;
    Person *father;
    Person *mother;
};
```

```
struct NhanVien
{
    char        *hoten;
    char        *diachi;
    double      luong;
    NhanVien *nguoiquanly;
};
```

Tổng quan về đệ quy

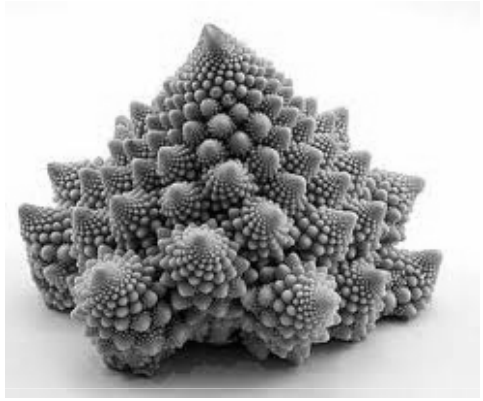


- Đệ quy trong cuộc sống:



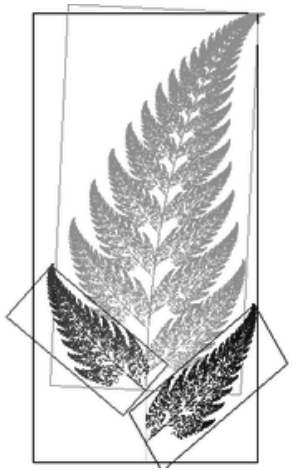
Quảng cáo

Búp bê Nga

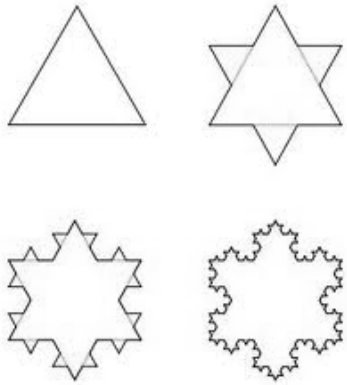


Thực phẩm

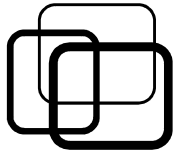
Thực vật



Bông tuyết

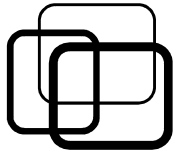


Nội dung



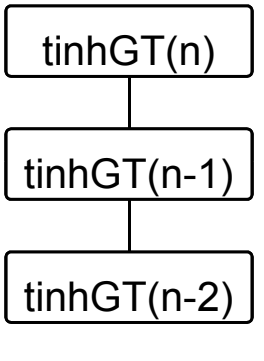
- Tổng quan về đệ quy.
- **Phân loại đệ quy.**
- Các vấn đề đệ quy thông dụng.

Phân loại đệ quy



- Các loại đệ quy:
  - Đệ quy tuyến tính:
    - Thân hàm có duy nhất một lời gọi đệ quy.

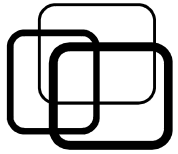
```
int tinhGT(int n)
{
    if (n == 0)
        return 1;
    return n * tinhGT(n – 1);
}
```



    - Độ phức tạp: tuyến tính O(n).
  - Đệ quy đuôi:
    - Một dạng của đệ quy tuyến tính.
    - Lời gọi đệ quy là duy nhất và là lệnh cuối cùng.

    ➔ Ít tốn bộ nhớ (không lưu các trường hợp trước đó).

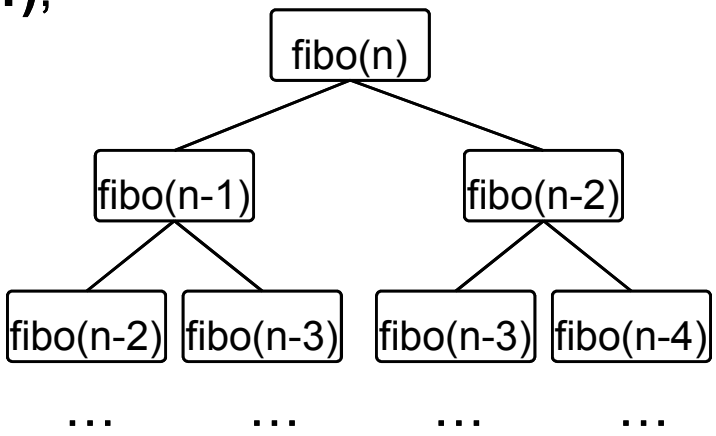
Phân loại đệ quy



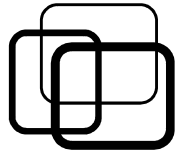
- Các loại đệ quy:
  - Đệ quy nhị phân:
    - Thân hàm có 2 lời gọi đệ quy.

```
int fibo(int n)
{
    if (n == 0)
        return 0;
    if (n == 1)
        return 1;
    return fibo(n – 1) + fibo(n – 1);
}
```

    - Độ phức tạp: $O(2^n)$.



Phân loại đệ quy



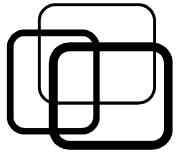
- Các loại đệ quy:
  - Đệ quy hỗ tương:
    - Hàm f1 có lời gọi đến hàm f2.
    - Hàm f2 có lời gọi đến hàm f1.

```
bool soChan(int n)
{
    if (n == 0)
        return true;
    return soLe(n – 1);
}
```

```
bool soLe(int n)
{
    if (n == 0)
        return false;
    return soChan(n – 1);
}
```

    - Độ phức tạp: tùy thuộc độ phức tạp từng hàm đệ quy.

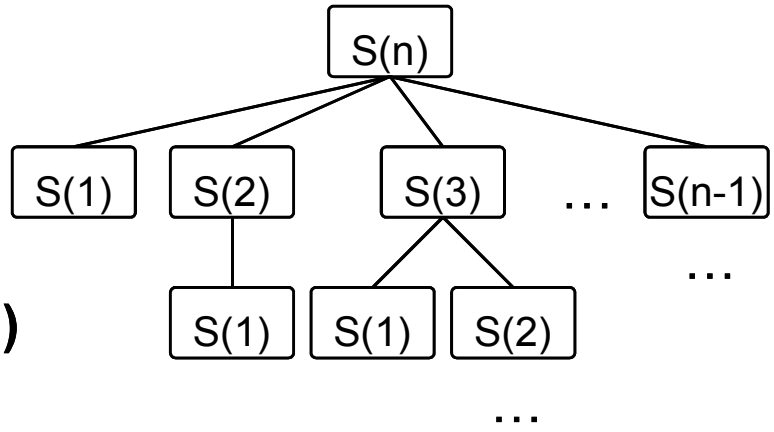
Phân loại đệ quy



- Các loại đệ quy:
  - Đệ quy phi tuyến:
    - Thân hàm có lời gọi đệ quy đặt trong vòng lặp.

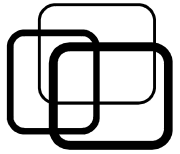
Tính: S(1) = 1
S(n) = S(1) + S(2) + … + S(n – 1).

```
int tinh(int n)
{
    if (n == 1)
        return 1;
    int S = 0;
    for (int i = 1; i <= n - 1; i++)
        S += tinh(i);
    return S;
}
```



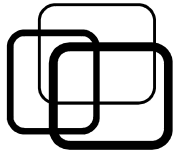
    - Độ phức tạp: O(n!).

Nội dung



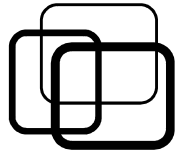
- Tổng quan về đệ quy.
- Phân loại đệ quy.
- **Các vấn đề đệ quy thông dụng.**

Các vấn đề đệ quy thông dụng



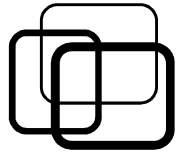
- Giải bài toán bằng đệ quy:
  - Cách giải trực tiếp:
    - Tìm từng bước đi đến kết quả.
    - Lời giải không đệ quy.
  - Cách giải đệ quy:
    - Lời giải gián tiếp.
    - Định nghĩa lại bài toán bằng đệ quy.
    - Bước 1: định nghĩa trường hợp cơ bản.
    - Bước 2: suy biến bài toán về trường hợp đơn giản hơn.
      - Công thức truy hồi (suy biến bằng công thức).
      - Chia để trị (suy biến bằng chia đôi).
      - Lần ngược (tìm tất cả lời giải).

Các vấn đề đệ quy thông dụng



- Công thức truy hồi:
  - Tính phần tử A_n của dãy số { A }:
  - Công thức truy hồi:
    - Tính trực tiếp A_0.
    - Tìm công liên hệ A_n với A_{n-1}.

Các vấn đề đệ quy thông dụng



- Công thức truy hồi:
  - Ví dụ 1:
    - Vi khuẩn cứ 1 phút nhân đôi.
    - Ban đầu có 1 vi khuẩn.
    - Sau 20 phút bao nhiêu con?

      V(0) = 1
      V(n) = 2 * V(n - 1).

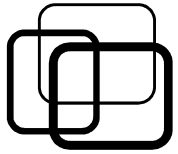
```
int tinhVK(int phut)
{
    if (phut == 0)
        return 1;
    return 2 * tinhVK(phut – 1);
}
```

  - Ví dụ 2:
    - Lãi suất tiết kiệm 7%/năm.
    - Ban đầu gửi 1 triệu.
    - Sau 20 năm bao nhiêu tiền?

      T(0) = 1
      T(n) = T(n – 1) + 0.07 * T(n – 1)
      = 1.07 T(n – 1).

```
int tinhTK(int nam)
{
    if (nam == 0)
        return 1;
    return 1.07 * tinhTK(nam – 1);
}
```

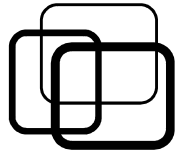
Các vấn đề đệ quy thông dụng



- Kỹ thuật chia để trị (Divide & Conquer):
  - Làm sao để ăn hết một con bò?
    - ➔ Chia thành từng phần nhỏ.
    - ➔ Thế nào là đủ nhỏ?
  - Giải toán bằng kỹ thuật chia để trị:

```
Trị ( P )
{
        if (P đủ nhỏ)
                Xử lý trực tiếp P;
        else
                Chia P → P1, P2;
                Trị ( P1 );
                Trị ( P2 );
                Tổng hợp kết quả;
}
```

Các vấn đề đệ quy thông dụng



- Kỹ thuật chia để trị (Divide & Conquer):
  - Ví dụ:
    - Cho mảng nguyên 1 chiều.
    - Đếm số âm trong mảng.

```
// Chia đối xứng…
int demAm( int *a, int l, int r )
{
   if ( l == r )
      return a[ r ] < 0 ? 1 : 0;

   int mid = ( l + r ) / 2;
   int dem1 = demAm( a, l, mid );
   int dem2 = demAm( a, mid +1, r );

   return dem1 + dem2;
}
```

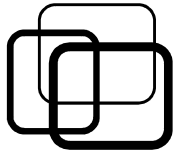
```
// Chia bất đối xứng…
int demAm( int *a, int n )
{
   int dem1 = a[ n - 1 ] < 0 ? 1 : 0;

   if ( n == 1 )
      return dem1;

   int dem2 =demAm( a, n - 1 );

   return dem1 + dem2;
}
```

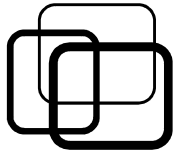
Các vấn đề đệ quy thông dụng



- Kỹ thuật lần ngược (Back-tracking):
  - Còn gọi là kỹ thuật "thử và sai".
  - Áp dụng tìm nhiều lời giải khác nhau.
  - Phù hợp khi có thể lần từng bước đến lời giải.

```
Thử ( S )
{
    if (S là lời giải)
            Ghi nhận S;
    else
            while bước tiếp được
            {
                Bước tiếp S;
                Thử ( S );
                Quay lui S;
            }
}
```

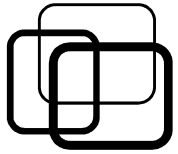
Các vấn đề đệ quy thông dụng



- Kỹ thuật lần ngược (Back-tracking):
  - Ví dụ:
    - Cho mảng nguyên dương 1 chiều.
    - Tìm tất cả các bộ phần tử có tổng bằng K.

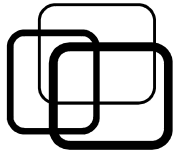
```
void tim( int *a, int n, int K, int start, int T, bool *flag ) {
        if ( T == K )
                xuat( a, n, flag );
        else
                for ( int i = start; i < n; i++ )
                {
                        T += a[ i ];  flag[ i ] = true;
                        tim( a, n, K, i + 1, T, flag );
                        T -= a[ i ];   flag[ i ] = false;
                }
}
```

Tóm tắt



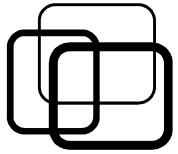
- Tổng quan về đệ quy:
  - Vấn đề được định nghĩa bằng chính nó.
  - Cấu trúc:
    - Phần dừng: trường hợp cơ bản.
    - Phần đệ quy: vấn đề suy biến về trường hợp đơn giản hơn.
  - Hàm đệ quy: hàm gọi lại chính nó.
  - Kiểu dữ liệu đệ quy: kiểu dữ liệu có thành phần con là chính nó.

Tóm tắt



- Phân loại đệ quy:
  - Đệ quy tuyến tính: 1 lời gọi đệ quy.
  - Đệ quy nhị phân: 2 lời gọi đệ quy.
  - Đệ quy hỗ tương: 2 hàm đệ quy gọi lẫn nhau.
  - Đệ quy phi tuyến: lời gọi đệ quy trong vòng lặp.
- Các vấn đề đệ quy thông dụng:
  - Công thức truy hồi.
  - Kỹ thuật chia để trị.
  - Kỹ thuật lần ngược.

Bài tập



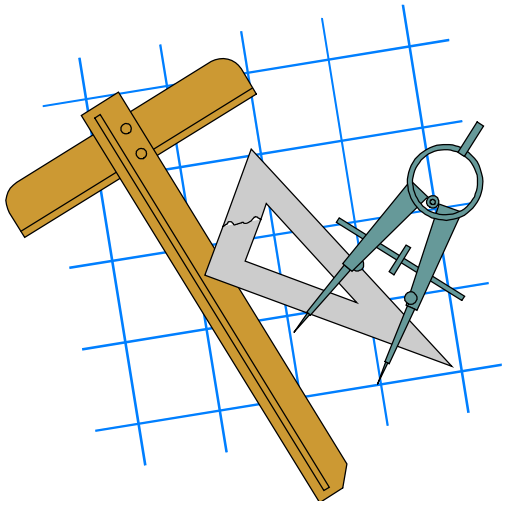
- **Bài tập 6.1: (công thức truy hồi)**

  Tìm công thức truy hồi và viết hàm đệ quy tính giá trị các dãy số:

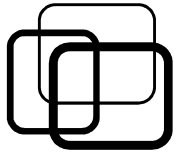
  a) A(n) = 1 + 2 + … + n.

  b) B(x, n) = x * x * … * x (n lần).

  c) C(n) = 1 -1/2 + 1/3 - … (+/-) 1/n.



Bài tập



Bài tập 6.2: (công thức truy hồi)

Công thức tính số tổ hợp chập K của N phần tử:

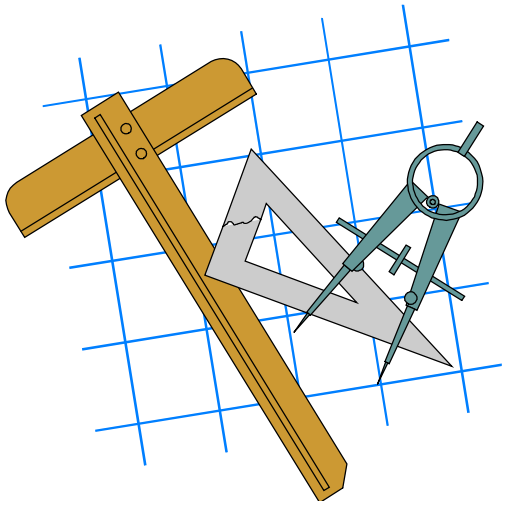
$C(N, K) = 1,$ với $k = 1$ hoặc $k = n$

$C(N, K) = C(N, K – 1) + C(N – 1, K – 1),$ với $1 < K < n$.

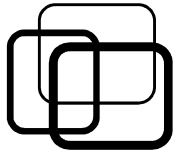
a) Viết hàm đệ quy tính số tổ hợp chập K của N phần tử.

b) Viết hàm in ra màn hình tam giác Pascal có chiều cao N. (áp dụng hàm ở câu a).

```
1
1   1
1   2   1
1   3   3   1
1   4   6   4   1
…
```



Bài tập



- **Bài tập 6.3: (chia để trị)**

  Viết hàm đệ quy thực hiện các thao tác trên mảng và chuỗi:

  a) Tính tổng các số chẵn trong mảng nguyên 1 chiều.

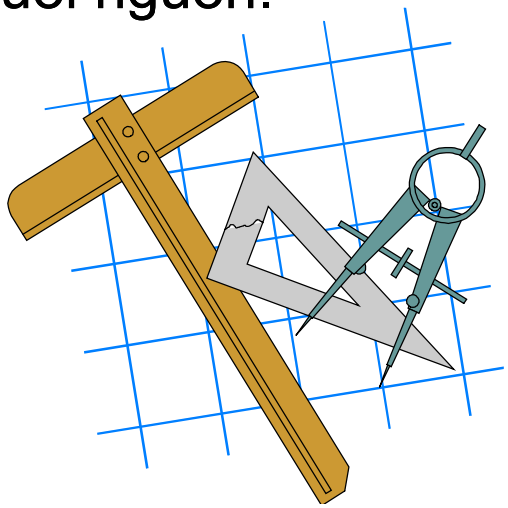
  b) Tìm phần tử lớn nhất trong mảng nguyên 1 chiều.

  c) Tìm phần tử x trong mảng nguyên 1 chiều.

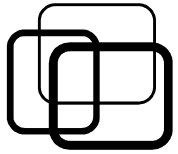
  d) Trích ra các số nguyên tố trong mảng nguyên 1 chiều.

  e) Đảo chuỗi.

  f) Tìm vị trí đầu tiên xuất hiện chuỗi con trong chuỗi nguồn.



Bài tập



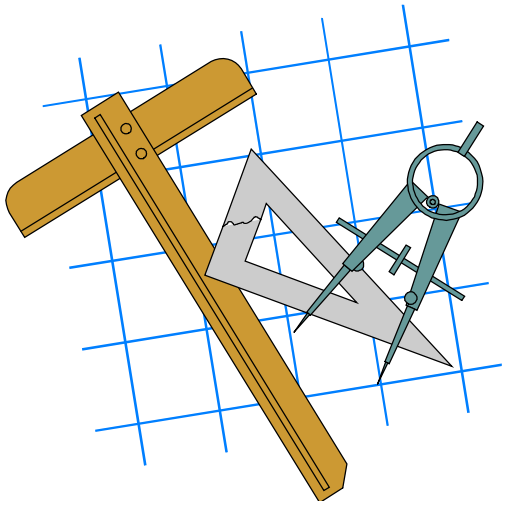
- Bài tập 6.4: (lần ngược)

  Viết hàm đệ quy thực hiện các thao tác trên chuỗi:

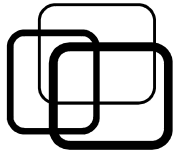
  a) In ra tất cả các hoán vị của một chuỗi.

  b) In ra tất cả các chỉnh hợp chập K của một chuỗi.

  c) In ra tất cả các tổ hợp chập K của một chuỗi.



Bài tập



Bài tập 6.5: (*)

Thuật toán Mid-Point vẽ đoạn thẳng AB:

- Nếu A, B liền kề nhau: vẽ điểm A và B.
- Nếu A, B xa nhau:
  + Gọi M là trung điểm AB.
  + Vẽ đoạn thẳng AM và MB.

Với hàm vẽ điểm SetPixel do giáo viên cung cấp, viết hàm đệ quy vẽ đoạn thẳng AB bằng thuật toán Mid-Point.