Chương 2. CẤU TRÚC HÌNH HỌC BÀI TOÁN QHTT

1 Tập lồi đa diện và tập lồi

1.1 Siêu phẳng, nửa không gian và tập lồi đa diện

Định nghĩa 1.1.1 Tập $P \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là **tập lồi đa diện** nếu P có thể biểu diễn dưới dạng

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\},$$

trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và b là véctơ trong $\mathbb{R}^m$.

Nhận xét 1.1.1

(a) Tập lồi đa diện chính là nghiệm của một hệ các bất phương trình tuyến tính.

(b) Tập lồi đa diện là tập đóng. Tập lồi đa diện có thể bị chặn hoặc không bị chặn. Phần trong của tập lồi đa diện có thể bằng rỗng hay khác rỗng.

(c) Tập rỗng, tập gồm một điểm, các đoạn thẳng và các đường thẳng trong $\mathbb{R}^n$ là các tập lồi đa diện.

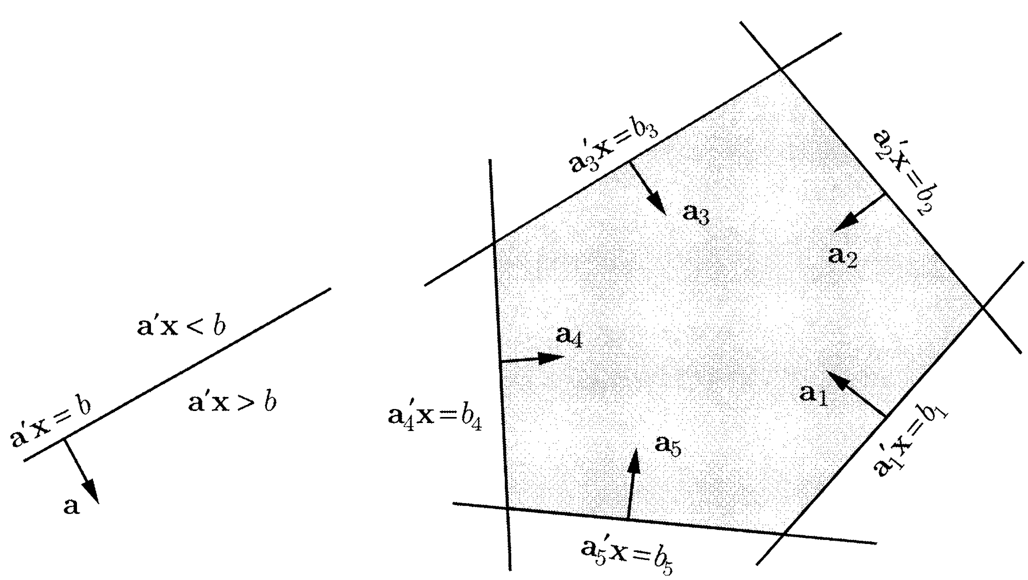
Mệnh đề 1.1.1 Tập phương án, tập nghiệm bài toán QHTT cho ở dạng tổng quát là tập lồi đa diện.

Tiếp theo ta xét tập lồi đa diện xác định bởi một ràng buộc tuyến tính.

Định nghĩa 1.1.2 Cho $a \in \mathbb{R}^n$ là véctơ khác không và số thực b.

(a) Tập hợp $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = b\}$ được gọi là **siêu phẳng**.

(b) Tập hợp $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \geq b\}$ được gọi là **nửa không gian**.



Nhận xét 1.1.2

(a) Các siêu phẳng và các nửa không gian trong các trường hợp đặc biệt:

+ $n = 1$: Các siêu phẳng là các điểm, các nửa không gian là các tia.

+ $n = 2$: Các siêu phẳng là các đường thẳng, các nửa không gian là các nửa mặt phẳng.

+ $n = 3$: Các siêu phẳng là các mặt phẳng, các nửa không gian là các nửa không gian theo nghĩa thông thường trong không gian ba chiều.

(b) Các siêu phẳng đi qua gốc là các không gian con của $\mathbb{R}^n$ có số chiều $n - 1$.

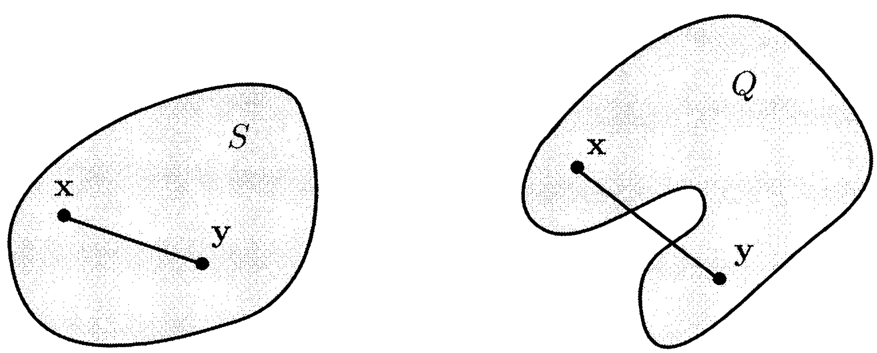
(c) Một siêu phẳng là biên của nửa không gian tương ứng. Véctơ a trong định nghĩa siêu phẳng vuông góc với chính siêu phẳng đó.

(d) Các siêu phẳng chứa các đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ nằm trong chúng. Hơn nữa các siêu phẳng có phần trong là rỗng và các nửa không gian có phần trong là khác rỗng và phần trong chính là hiệu của nó và siêu phẳng định ra nó.

(e) Tập lồi đa diện là giao của hữu hạn các nửa không gian.

1.2 Tập lồi

Định nghĩa 1.2.1 Tập $S \subset \mathbb{R}^n$ gọi là **lồi** nếu với bất kỳ $x, y \in S$ và bất kỳ $\lambda \in [0, 1]$ ta có $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.



Nhận xét 1.2.1

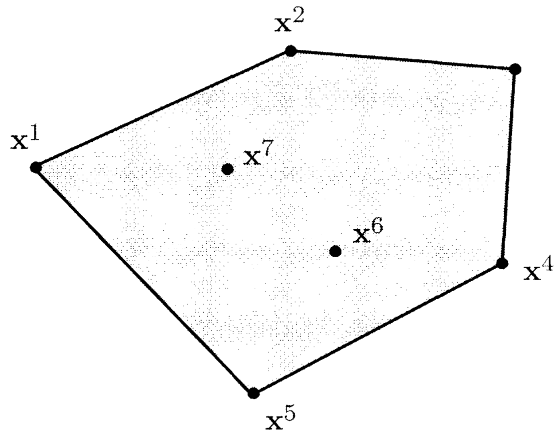
(a) Với mỗi $\lambda \in [0, 1]$ véctơ $\lambda x + (1 - \lambda)y$ nằm trên đoạn thẳng nối x và y. Vì vậy, một tập là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trong tập nằm trong tập đó.

(b) Tập lồi đa diện, siêu phẳng, nửa không gian là các tập lồi.

Định nghĩa 1.2.2 Cho $x^1, x^2, \dots, x^k$ là các véctơ trong $\mathbb{R}^n$ và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ là các số thực không âm có tổng bằng 1.

(a) Véctơ $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ được gọi là **tổ hợp lồi** của các véctơ $x^1, x^2, \dots, x^k$.

(b) **Bao lồi** của các véctơ $x^1, x^2, \dots, x^k$ là tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của các véctơ này.



Ví dụ 1.2.1 Cho tập lồi đa diện $P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$. Viết tập P dưới dạng bao lồi của hữu hạn điểm.

Định lý 1.2.1

(a) Giao của một họ các tập lồi là tập lồi.

(b) Tổ hợp lồi của một họ hữu hạn các điểm của một tập lồi thì nằm trong tập lồi đó.

(c) Bao lồi của hữu hạn các véctơ là một tập lồi.

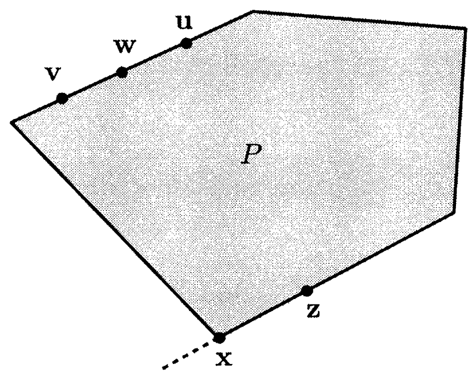
2 Điểm cực biên, đỉnh và nghiệm cơ sở chấp nhận được

Trong Mục 3 Chương 1 chúng ta quan sát rằng nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính có xu hướng nằm tại các "*điểm góc*" của tập lồi đa diện mà ta đang cần tối ưu hóa trên đó. Trong phần này chúng ta sẽ trình bày ba cách khác nhau để định nghĩa khái niệm điểm góc và chứng minh ba định nghĩa này là tương đương.

Định nghĩa đầu tiên trình bày *điểm cực biên* của một tập lồi đa diện là điểm mà không thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi của hai điểm phân biệt trong tập. Chú ý rằng định nghĩa này hoàn toàn là hình học và không phụ thuộc vào dạng biểu diễn của tập lồi đa diện theo các ràng buộc tuyến tính.

Định nghĩa 2.1.1 Cho P là tập lồi đa diện. Véctơ $x \in P$ được gọi là **điểm cực biên** của P nếu không tồn tại $y, z \in P$, y, z đồng thời khác x, và số $\lambda \in [0, 1]$ sao cho $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$.

Ví dụ 2.1.1 Trong hình bên dưới véctơ w không là điểm cực biên của P vì nó là tổ hợp lồi của u và v với $u, v \in P$. Véctơ x là điểm cực biên của P. Thật vậy, nếu $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ với $\lambda \in [0, 1]$ thì hoặc $y \notin P$ hoặc $z \notin P$ hoặc $x = y$ hoặc $x = z$.

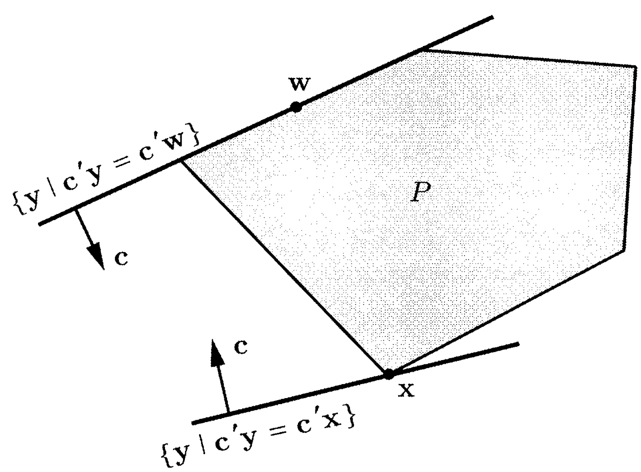


Ví dụ 2.1.2 Tìm tập hợp các điểm cực biên của tập lồi đa diện trong Ví dụ 1.2.1.

Một định nghĩa hình học khác để mô tả điểm góc là khái niệm *đỉnh* của tập lồi đa diện P. Điểm này chính là nghiệm duy nhất của một bài toán quy hoạch tuyến tính với tập phương án là P.

Định nghĩa 2.1.2 Cho P là tập lồi đa diện. Véctơ $x \in P$ được gọi là **đỉnh** của P nếu tồn tại véctơ c sao cho $\langle c, x\rangle < \langle c, y\rangle$ với mọi $y \in P$ và $y \neq x$.

Nhận xét 2.1.1 x là một đỉnh của P nếu và chỉ nếu P nằm về một phía của siêu phẳng $\{y : \langle c, y\rangle = \langle c, x\rangle\}$ và siêu phẳng này chỉ có một điểm chung với P là x.



Hai định nghĩa hình học trên là khá tự nhiên và trực quan để mô tả điểm góc của tập lồi đa diện. Tuy nhiên,các định nghĩa này không giúp ích nhiều trong quá trình xây dựng thuật toán giải bài toán QHTT. Tiếp theo chúng ta trình bày một định nghĩa phụ thuộc vào dạng biểu diễn của tập lồi diện theo các ràng buộc tuyến tính và định nghĩa này có thể kiểm tra được bằng các tiêu chuẩn đại số.

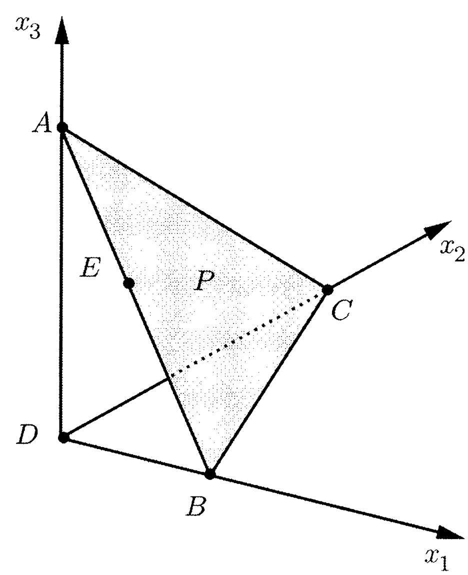
Xét tập lồi đa diện $P \subset \mathbb{R}^n$ cho bởi các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$\begin{aligned} \langle a_i, x\rangle &\geq b_i, \quad i \in M_1,\\ \langle a_i, x\rangle &\leq b_i, \quad i \in M_2,\\ \langle a_i, x\rangle &= b_i, \quad i \in M_3,\end{aligned}$$

trong đó M_1, M_2 và M_3 là các tập chỉ số hữu hạn, mỗi a_i là véctơ trong $\mathbb{R}^n$ và b_i là các số thực.

Định nghĩa 2.1.3 Nếu véctơ x^* thỏa $\langle a_i, x^*\rangle = b_i$ với chỉ số i nào đó trong $M_1.M_2$ hoặc M_3 ta nói ràng buộc tương ứng với chỉ số i là **hoạt** hay **buộc** tại x^*.

Ví dụ 2.1.3 Cho tập lồi đa diện $P = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$. Có ba ràng buộc là hoạt (buộc) tại các điểm A, B, C và D. Tuy nhiên, ta chỉ có hai ràng buộc là hoạt tại điểm E.



Nếu tồn tại n ràng buộc hoạt tại véctơ x^* thì x^* là nghiệm của một hệ gồm n phương trình tuyến tính. Hệ này có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi n véctơ tạo nên các ràng buộc là độc lập tuyến tính. Kết quả tiếp theo trình bày một cải biên cho kết quả trên.

Định lý 2.1.1 Cho x^* là véctơ trong $\mathbb{R}^n$ và $I = \{i : \langle a_i, x^*\rangle = b_i\}$ là tập các chỉ số của các ràng buộc hoạt tại x^*. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

(a) Tồn tại n véctơ trong tập hợp $\{a_i : i \in I\}$ độc lập tuyến tính.

(b) Không gian con sinh bởi các véctơ $a_i, i \in I$ là toàn bộ $\mathbb{R}^n$.

(c) Hệ phương trình $\langle a_i, x\rangle = b_i, i \in I$ có duy nhất nghiệm.

Chứng minh. Theo kết quả của đại số tuyến tính về hệ véctơ độc lập tuyến tính, cơ sở và không gian con sinh bởi hệ véctơ, (a) và (b) tương đương với nhau.

Giả sử hệ phương trình $\langle a_i, x\rangle = b_i, i \in I$ có hai nghiệm phân biệt x^1 và x^2. Khi đó véctơ $d := x^1 - x^2$ thỏa $d \neq 0$ và $\langle a_i, d\rangle = 0$ với mọi $i \in I$. Do đó d không là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $a_i, i \in I$. Điều này chứng tỏ không gian con sinh bởi hệ véctơ trên không là toàn bộ $\mathbb{R}^n$. Ngược lại, giả sử không gian con sinh bởi các véctơ $a_i, i \in I$ không là toàn bộ $\mathbb{R}^n$ hay hạng của hệ véctơ này là nhỏ hơn n. Do đó hệ phương trình $\langle a_i, x\rangle = 0, i \in I$ có nghiệm khác không, gọi là d. Suy ra x^* và $x^* + d$ là nghiệm của hệ $\langle a_i, x\rangle = b_i, i \in I$ hay hệ $\langle a_i, x\rangle = b_i, i \in I$ không có duy nhất nghiệm. Các lập luận trên chứng tỏ (b) và (c) tương đương với nhau. □

Để tiện về sau, ta dùng thuật ngữ các ràng buộc độc lập tuyến tính để chỉ hệ các véctơ tương ứng a_i của các ràng buộc là một hệ độc lập tuyến tính. Tiếp theo chúng ta xét định nghĩa đại số để mô tả điểm góc của tập lồi đa diện. Các điểm này chính là các nghiệm chấp nhận được mà tại đó có n ràng buộc hoạt độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 2.1.4 Xét tập lồi đa diện P cho bởi các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính và x^* là véctơ trong $\mathbb{R}^n$.

(a) Véctơ x^* gọi là **nghiệm cơ sở** nếu

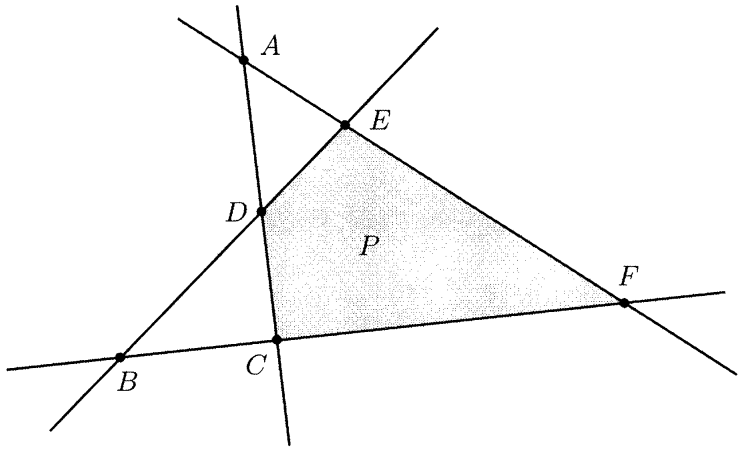
(i) Các ràng buộc đẳng thức là hoạt tại x^*.

(ii) Trong các ràng buộc hoạt tại x^*, tồn tại n ràng buộc độc lập tuyến tính.

(b) Véctơ x^* gọi là **nghiệm cơ sở chấp nhận được** nếu x^* là nghiệm cơ sở và x^* thỏa tất cả các ràng buộc.

Ví dụ 2.1.4 Trong Ví dụ 2.1.1 các điểm A, B và C là các nghiệm cơ sở chấp nhận được. Điểm D không là nghiệm cơ sở vì D không thỏa ràng buộc đẳng thức. Điểm E là chấp nhận được (thỏa tất cả các ràng buộc) nhưng không là cơ sở. Nếu ràng buộc đẳng thức $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ được thay đổi bằng ràng buộc $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ và $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ thì D là nghiệm cơ sở của P. Điều này chứng tỏ một điểm là nghiệm cơ sở hay không phụ thuộc vào dạng biểu diễn của tập lồi đa diện.

Ví dụ 2.1.5 Trong hình bên dưới các điểm A, B, C, D, E, F là các nghiệm cơ sở vì tại mỗi điểm này có hai ràng buộc độc lập tuyến tính hoạt tại chúng. Các điểm C, D, E, F là các nghiệm cơ sở chấp nhận được.



Ví dụ 2.1.6 Xác định tập hợp các nghiệm cơ sở, nghiệm cơ sở chấp nhận được của tập lồi đa diện P xác định bởi hệ các bất đẳng thức tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Chúng ta trình bày một kết quả quan trọng liên quan đến tính hữu hạn của tập các nghiệm cơ sở và tập các nghiệm cơ sở chấp nhận được của một tập lồi đa diện.

Mệnh đề 2.1.1 Tập các nghiệm cơ sở và tập các nghiệm cơ sở chấp nhận được của tập lồi đa diện là hữu hạn.

Nhận xét 2.1.2 Chú ý rằng nếu $P \subset \mathbb{R}^n$ được định nghĩa bởi m ràng buộc và $m < n$ thì số ràng buộc hoạt tại một điểm bất kỳ phải nhỏ hơn n và khi đó không tồn tại nghiệm cơ sở và nghiệm cơ sở chấp nhận được.

Trong phần trước chúng ta đã trình bày ba định nghĩa để chỉ đến một đối tượng là điểm góc của tập lồi đa diện. Điểm cực biên và đỉnh là các khái niệm hình học, trong khi đó nghiệm cơ sở chấp nhận được là khái niệm đại số. Định lý tiếp theo chỉ ra rằng ba định nghĩa này là tương đương. Do đó ta có thể sử dụng ba định nghĩa này thay thế cho nhau.

Định lý 2.1.2 Cho P là tập lồi đa diện khác rỗng và $x^* \in P$. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

(a) x^* là một đỉnh.

(b) x^* là một điểm cực biên.

(c) x^* là nghiệm cơ sở chấp nhận được.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử P là tập lồi đa diện cho bởi các ràng buộc $\langle a_i, x\rangle \geq b_i$ và $\langle a_i, x\rangle = b_i$.
Đỉnh $\Rightarrow$ Điểm cực biên

Giả sử $x^* \in P$ là đỉnh. Khi đó, tồn tại $c \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\langle c, x^*\rangle < \langle c, y\rangle$ với mọi $y \in P$ và $y \neq x^*$. Nếu $y, z \in P, y \neq x^*, z \neq x^*$ và $0 \leq \lambda \leq 1$ thì $\langle c, x^*\rangle < \langle c, y\rangle$ và $\langle c, x^*\rangle < \langle c, z\rangle$. Từ đây suy ra $\langle c, x^*\rangle < \langle c, \lambda y + (1-\lambda)z\rangle$. Do đó $x^* \neq \lambda y + (1-\lambda)z$. Vậy x^* là điểm cực biên của P.

Điểm cực biên $\Rightarrow$ Nghiệm cơ sở chấp nhận được

Giả sử $x^* \in P$ không là nghiệm cơ sở chấp nhận được. Ta sẽ chứng minh x^* không là điểm cực biên của P. Đặt $I = \{i : \langle a_i, x^*\rangle = b_i\}$. Do x^* không là nghiệm cơ sở chấp nhận được nên trong hệ $\{a_i : i \in I\}$ không tồn tại n véctơ độc lập tuyến tính. Do đó tồn tại véctơ $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $\langle a_i, d\rangle = 0$ với mọi $i \in I$. Chọn ε là số thực dương thỏa $\varepsilon|\langle a_i, d\rangle| < \langle a_i, x^*\rangle - b_i$ với mọi $i \notin I$. Khi đó $y = x^* + \varepsilon d, z = x^* - \varepsilon d \in P$. Thật vậy, nếu $i \in I$ thì

$$\langle a_i, x^* \pm \varepsilon d\rangle = \langle a_i, x^*\rangle \pm \varepsilon\langle a_i, d\rangle = \langle a_i, x^*\rangle = b_i.$$

Do đó $\langle a_i, y\rangle = \langle a_i, z\rangle = b_i$ với mọi $i \in I$. Với mỗi $i \notin I$ ta có

$$\langle a_i, x^* \pm \varepsilon d\rangle = \langle a_i, x^*\rangle \pm \varepsilon\langle a_i, d\rangle > \langle a_i, x^*\rangle - \varepsilon|\langle a_i, d\rangle| > b_i.$$

Do đó $\langle a_i, y\rangle > b_i, \langle a_i, z\rangle > b_i$. Chú ý rằng $y \neq z$ và $x^* = (y+z)/2$, điều này chứng tỏ x^* không là điểm cực biên của P.

Nghiệm cơ sở chấp nhận được $\Rightarrow$ Đỉnh

Giả sử x^* là nghiệm cơ sở chấp nhận được và $I = \{i : \langle a_i, x^*\rangle = b_i\}$. Đặt $c = \sum_{i \in I} a_i$. Khi đó ta có

$$\langle c, x^*\rangle = \sum_{i \in I}\langle a_i, x^*\rangle = \sum_{i \in I} b_i.$$

Hơn nữa, với mỗi $x \in P$ và bất kỳ i ta có $\langle a_i, x\rangle \geq b_i$ và

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i \in I}\langle a_i, x\rangle \geq \sum_{i \in I} b_i. \tag{1}$$

Điều này chứng tỏ x^* là nghiệm của bài toán QHTT với hàm mục tiêu $\langle c, x\rangle$ trên tập ràng buộc P. Hơn nữa, dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi $\langle a_i, x\rangle = b_i$ với mọi $i \in I$. Do x^* là nghiệm cơ sở chấp nhận được nên có n ràng buộc độc lập tuyến tính hoạt tại x^* và theo Định lý 2.1.1 x^* là nghiệm duy nhất của hệ các phương trình $\langle a_i, x\rangle = b_i, i \in I$. Điều này dẫn đến x^* là nghiệm duy nhất bài toán QHTT với hàm mục tiêu $\langle c, x\rangle$ trên tập ràng buộc P hay x^* là đỉnh của P. □

Nhận xét 2.1.3

(a) Lược đồ chứng minh trên được thiết lập như sau:

Đỉnh $\Rightarrow$ Điểm cực biên $\Rightarrow$ Nghiệm cơ sở chấp nhận được $\Rightarrow$ Đỉnh

Ta có thể thiết lập chứng minh cho định lý trên theo lược đồ sau:

Đỉnh $\Leftarrow$ Điểm cực biên $\Leftarrow$ Nghiệm cơ sở chấp nhận được $\Leftarrow$ Đỉnh

(b) Do một điểm của tập lồi đa diện là nghiệm cơ sở chấp nhận được khi và chỉ khi nó là điểm cực biên của tập và do định nghĩa điểm cực biên không phụ thuộc vào dạng biểu diễn của tập lồi đa diện nên tính chất nghiệm cơ sở chấp nhận được là độc lập với dạng biểu diễn của tập lồi đa diện. (Điều này là hoàn toàn trái ngược với khái niệm nghiệm cơ sở vì khái niệm này phụ thuộc vào dạng biểu diễn của tập lồi đa diện.)

(c) Kết hợp Định lý 2.1.2 và Mệnh đề 2.1.1 ta suy ra số điểm cực biên hay số đỉnh của một tập lồi đa diện bất kỳ là hữu hạn. Đây là điều kiện cần để kiểm tra một tập là tập lồi đa diện.

(d) Mặc dù tập hợp các nghiệm cơ sở và tập hợp các nghiệm cơ sở chấp nhận được, tập hợp các điểm cực biên, tập hợp các đỉnh là hữu hạn nhưng số phần tử của các tập hợp này có thể rất lớn. Chẳng hạn, hình hộp đơn vị $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_i \le 1, i = 1, \ldots, n\}$ được cho bởi $2n$ ràng buộc tuyến tính nhưng có 2^n nghiệm cơ sở chấp nhận được.

Định nghĩa 2.1.5 Hai nghiệm cơ sở phân biệt của một họ các ràng buộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là **kề nhau** nếu ta có thể tìm được $n-1$ ràng buộc độc lập tuyến tính sao cho các ràng buộc này hoạt tại hai nghiệm cơ sở này. Đoạn thẳng nối hai nghiệm cơ sở chấp nhận được kề nhau được gọi là một **cạnh** của tập chấp nhận được.

Ví dụ 2.1.7 Trong Ví dụ 2.1.5, D và E là kề với B; A và C là kề với D.

3 Tập lồi đa diện cho ở dạng chính tắc

Định nghĩa về nghiệm cơ sở liên quan đến tập lồi đa diện tổng quát (cho bởi các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính). Trong phần này chúng ta tập trung vào một loại tập lồi đa diện đặc biệt, tập lồi đa diện dạng chính tắc. Các định nghĩa và các kết quả trong phần này là cơ sở để xây dựng phương pháp đơn hình trong chương sau.

Cho $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \ge 0\}$ là tập lồi đa diện cho ở dạng chính tắc. Ở đây A là ma trận cấp $m \times n$ với m là số ràng buộc đẳng thức. Trong hầu hết các phần sau ta sẽ giả sử m hàng của ma trận A là độc lập tuyến tính. Giả thiết này là hợp lý vì khi P là khác rỗng thì các hàng phụ thuộc tuyến tính của A sẽ tương ứng với các ràng buộc thừa và có thể loại bỏ đi được. Kết quả này được thể hiện trong định lý sau:

Định lý 3.1.1 Cho $P = \{x : Ax = b, x \ge 0\}$ là tập lồi đa diện khác rỗng, trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ với các hàng $a_1, \ldots, a_m$. Giả sử $\operatorname{rank}(A) = k < m$ và các hàng $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ là độc lập tuyến tính. Xét tập lồi đa diện

$$Q = \{x : \langle a_{i_1}, x\rangle = b_{i_1}, \ldots, \langle a_{i_k}, x\rangle = b_{i_k}, x \ge 0\}.$$

Khi đó $Q = P$.

Chứng minh. Bằng cách sắp xếp lại các ràng buộc trong hệ $Ax = b$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$. Rõ ràng $P \subset Q$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $Q \subset P$. Do $\operatorname{rank}A = k$ nên không gian véctơ con sinh bởi các hàng của ma trận A có số chiều là k và nhận hệ véctơ $a_1, \ldots, a_k$ làm cơ sở. Do đó với mỗi $i \in \{1, \ldots, m\}$ tồn tại các hệ số $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ik}$ sao cho $a_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a_j$. Do P khác rỗng nên tồn tại $x \in P$. Khi đó

$$b_i = \langle a_i, x\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a_j, x \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \langle a_j, x\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Lấy y bất kỳ trong Q. Ta chứng minh $y \in P$. Thật vậy, với bất kỳ $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\langle a_i, y\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a_j, y \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \langle a_j, y\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j = b_i.$$

Điều này chứng tỏ $y \in P$ và do đó $Q \subset P$. $\square$

Ví dụ 3.1.1 Xét tập lồi đa diện khác rỗng cho bởi các ràng buộc

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. & \end{aligned}$$

Ma trận A tương ứng của tập lồi đa diện P có hạng bằng hai. Hai véctơ $(1, 1, 0)$ và $(1, 0, 1)$ tạo nên hai ràng buộc cuối là độc lập tuyến tính và ràng buộc đầu tiên là tổng của hai ràng buộc này. Do đó ràng buộc đầu tiên là thừa và sau khi loại bỏ ràng buộc này đi, Theo Định lý 3.1.1, thì ta vẫn được tập lồi đa diện ban đầu.

Chúng ta nhớ lại rằng, một véctơ là nghiệm cơ sở tương ứng với n ràng buộc độc lập tuyến tính hoạt tại véctơ đó. Hơn nữa, mỗi nghiệm cơ sở phải thỏa các ràng buộc đẳng thức $Ax = b$. Có tất cả m ràng buộc hoạt tại nghiệm cơ sở và các ràng buộc này là độc lập tuyến tính. Để thu được tổng cộng n ràng buộc hoạt chúng ta cần chọn thêm $n - m$ các biến x_i và cho chúng bằng 0. Việc chọn mỗi biến $x_i = 0$ tương ứng với việc bổ sung một ràng buộc hoạt. Tuy nhiên để thu được n ràng buộc hoạt độc lập tuyến tính, ta cần phải có cách chọn $n - m$ biến một cách thích hợp.

Định lý 3.1.2 Xét các ràng buộc $Ax = b, x \geq 0$ và giả sử A là ma trận cấp $m \times n$ có hạng bằng m. Véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm cơ sở nếu và chỉ nếu ta có $Ax = b$ và tồn tại các chỉ số $B(1), \ldots, B(m)$ thỏa:

(a) Các cột $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ là độc lập tuyến tính.

(b) Nếu $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ thì $x_i = 0$.

Chứng minh. Giả sử $x \in \mathbb{R}^n$ thỏa $Ax = b$ tồn tại các chỉ số $B(1), \ldots, B(m)$ sao cho (a) và (b) thỏa. Do (b) thỏa nên các ràng buộc $x_i = 0, i \neq B(1), \ldots, B(m)$ là hoạt và

$$\sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} = \sum_{i=1}^{m} A_i x_i = Ax = b.$$

Do các cột $A_{B(i)}, i = 1, \ldots, m$ là độc lập tuyến tính nên $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ được xác định duy nhất. Do đó hệ các phương trình tạo bởi các ràng buộc hoạt tại x có duy nhất nghiệm. Theo Định lý 2.1.1, tồn tại n ràng buộc độc lập tuyến tính hoạt tại x. Do đó x là nghiệm cơ sở của P.

Giả sử x là nghiệm cơ sở của P. Khi đó $Ax = b$. Tiếp theo ta chứng minh (a) và (b) thỏa. Gọi $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ là các thành phần của x khác không. Do x là nghiệm cơ bản nên hệ phương trình tạo bởi các ràng buộc hoạt $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b$ và $x_i = 0, i \neq B(1), \ldots, B(k)$ có duy nhất nghiệm theo Định lý 2.1.1. Do đó hệ $\sum_{i=1}^{k} A_{B(i)} x_{B(i)} = b$ có duy nhất nghiệm. Điều này dẫn đến các cột $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, nếu các cột này không độc lập tuyến tính thì ta có thể tìm được các số thực $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ không đồng thời bằng không sao cho $\sum_{i=1}^{k} A_{B(i)} \lambda_i = 0$. Khi đó, $\sum_{i=1}^{k} A_{B(i)}(\lambda_i + x_{B(i)}) = b$, điều này mâu thuẫn với tính duy nhất nghiệm. Do các cột $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}$ là độc lập tuyến tính nên $k \leq m$. Do A có m dòng độc lập tuyến tính nên A có m cột độc lập tuyến tính. Vì vậy ta có thể bổ sung $m - k$ cột $A_{B(k+1)}, \ldots, A_{B(m)}$ sao cho các cột $A_{B(i)}, i = 1, \ldots, m$ là độc lập tuyến tính. Hơn nữa, nếu $i \neq B(1), \ldots, B(m)$ thì $i \neq B(1), \ldots, B(k)$ (do $k \leq m$), và $x_i = 0$. Do đó cả (a) và (b) đều thỏa. □

Kết quả của Định lý 3.1.1 giúp ta xây dựng một thủ tục tìm các nghiệm cơ sở của một tập lồi đa diện.

Thủ tục xây dựng các nghiệm cơ sở

1. Chọn m cột độc lập tuyến tính $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$.

2. Cho $x_i = 0$ với mọi $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$.

3. Giải hệ gồm m phương trình $Ax = b$ để tìm các biến chưa biết $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$.

Nhận xét 3.1.1 Nếu nghiệm cơ sở được xây dựng theo thủ tục trên có các thành phần là không âm thì nó là nghiệm cơ sở chấp nhận được. Hơn nữa, do mỗi nghiệm cơ sở chấp nhận được là nghiệm cơ sở nên nghiệm cơ sở chấp nhận được có thể thu được từ thủ tục này.

Định nghĩa 3.1.1 Cho x là nghiệm cơ sở của hệ $Ax = b$ và $x \geq 0$.

1. $B(1), \ldots, B(m)$ gọi là các **chỉ số cơ sở**, các chỉ số còn lại gọi là **các chỉ số không cơ sở**.

2. Các biến $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ gọi là **biến cơ sở**, các biến còn lại gọi là **biến không cơ sở**.

3. Các cột $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ gọi là các **cột cơ sở**. Hệ gồm các véctơ này được gọi là **cơ sở**. Hai cơ sở được gọi là **khác nhau** nếu chúng tạo từ các tập chỉ số khác nhau. Hai cơ sở được gọi là **kề nhau** nếu chúng có chung các cột cơ sở và chỉ khác nhau duy nhất một cột cơ sở.

Ghi chú 3.1.1

(a) Bằng cách sắp xếp m cột cơ sở cạnh nhau ta thu được ma trận B cấp $m \times m$, gọi là **ma trận cơ sở**. Ma trận B này là khả nghịch do các cột cơ sở là độc lập tuyến tính. Ta gọi x_B là véctơ có giá trị là các biến cơ sở. Các biến cơ sở được xác định bằng cách giải hệ phương trình $Bx_B = b$. Hệ này có nghiệm duy nhất là $x_B = B^{-1}b$.

(b) Các nghiệm cơ sở khác nhau được tạo từ các cơ sở khác nhau vì mỗi một cơ sở xác định duy nhất một nghiêm cơ sở. Tuy nhiên, hai cơ sở khác nhau có thể sinh ra cùng một nghiệm cơ sở. Chẳng hạn, ta lấy $b = 0$ thì mỗi ma trận cơ sở đều cho cùng một nghiệm cơ sở là $x = 0$. Hiện tượng này quan trọng trong thiết kế thuật toán giải bài toán QHTT và gần với khái niệm suy biến (thoái hóa) sẽ được trình bày trong mục sau.

Ví dụ 3.1.2 Xét các ràng buộc $Ax = b$ có dạng

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- Nếu ta chọn A_4, A_5, A_6, A_7 làm các cột cơ sở thì ta thu được nghiệm cơ sở tương ứng là $x = (0, 0, 0, 8, 12, 4, 6)$ gồm các thành phần không âm, véctơ cũng chính là nghiệm cơ sở chấp nhận được,

- Nếu ta chọn A_3, A_5, A_6, A_7 (các véctơ này độc lập tuyến tính) làm các cột cơ sở thì ta thu được nghiệm cơ sở tương ứng là $x = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)$, véctơ này không là nghiệm cơ sở chấp nhận được vì có thành phần âm.

- Giả sử có thêm cột ở vị trí thứ tám, gọi là A_8, trùng với cột A_7. Khi đó hai tập hợp các cột cơ sở $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ và A_3, A_5, A_6, A_8 là trùng nhau. Mặt khác, tập các chỉ số cơ sở tương ứng là $\{3, 5, 6, 7\}$ và $\{3, 5, 6, 8\}$ là khác nhau nên ta có hai cơ sở khác nhau.

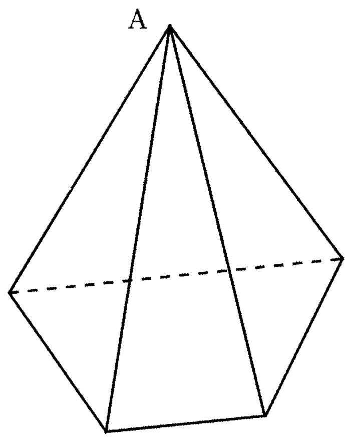
- Cơ sở $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ và $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ là kề nhau vì chúng có có ba cột giống nhau và chỉ duy nhất một cột khác nhau. Nghiệm cơ sở tương ứng với các cơ sở này là $x = (0, 0, 0, 8, 12, 4, 6)$ và $x = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)$ là kề nhau.

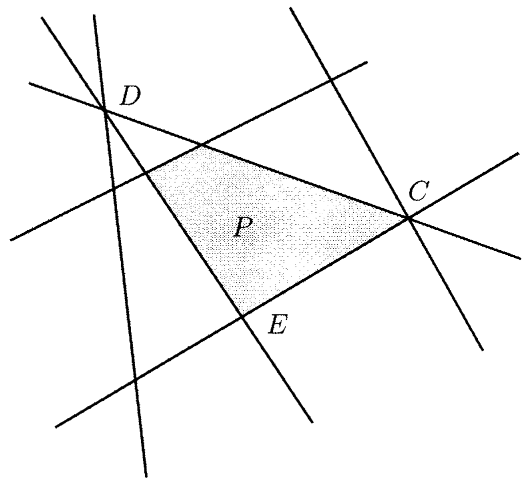
4 Tính suy biến (thoái hóa)

Định nghĩa nghiệm cơ sở chỉ yêu cầu tại đó có n ràng buộc độc lập tuyến tính hoạt. Trong một số tình huống tại nghiệm cơ sở có nhiều hơn n ràng buộc hoạt. Khi đó ta nói nghiệm cơ sở là *suy biến*.

Định nghĩa 4.1.1 Nghiệm cơ sở $x \in \mathbb{R}^n$ gọi là **suy biến** nếu có nhiều hơn n ràng buộc hoạt tại x.

Nhận xét 4.1.1 Trong hai chiều nghiệm cơ sở suy biến là giao của it nhất ba đường thẳng; trong ba chiều, nghiệm cơ sở suy biến là giao của ít nhất ba mặt phẳng.





Các điểm A và C là nghiệm cơ sở chấp nhận được suy biến. Các điểm B và E là nghiệm cơ sở chấp nhận được không suy biến. Điểm D là nghiệm cơ sở suy biến.

Ví dụ 4.1.1 Xét tập lồi đa diện P cho bởi các ràng buộc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_2 + 6x_3 &\leq 12 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Véctơ $x = (2, 6, 0)$ là nghiệm cơ sở chấp nhận được không suy biến do có đúng ba ràng buộc độc lập tuyến tính hoạt tại véctơ này. Các ràng buộc đó lần lượt là $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8, x_2 \leq 6$, và $x_3 \geq 0$. Véctơ $x = (4, 0, 2)$ là nghiệm cơ sở chấp nhận được suy biến do có bốn ràng buộc hoạt tại véctơ này, trong đó có ba ràng buộc độc lập tuyến tính. Các ràng buộc đó là $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8, x_2 + 6x_3 \leq 12, x_1 \leq 4$, và $x_2 \geq 0$.

Tại nghiệm cơ sở của tập lồi đa diện cho ở dạng chính tắc, m ràng buộc đẳng thức luôn hoạt tại điểm đó. Do đó, việc có hơn $n - m$ ràng buộc hoạt đồng nghĩa với việc có hơn $n - m$ biến nhận giá trị 0. Quan sát này dẫn đến định nghĩa tính suy biến cho tập lồi đa diện cho ở dạng chính tắc. Định nghĩa này là một trường hợp đặc biệt của Định nghĩa 4.1.1.

Định nghĩa 4.1.2 Xét tập lồi đa diện cho ở dạng chính tắc $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ và điểm x là nghiệm cơ sở. Gọi m là số hàng của ma trận A. Véctơ x gọi là nghiệm cơ sở **suy biến** nếu có nhiều hơn $n - m$ thành phần của x là 0.

Ví dụ 4.1.2 Xét tập lồi đa diện $P = \{x \in \mathbb{R}^7 : Ax = b, x \geq 0\}$, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Xét cơ sở gồm các cột A_1, A_2, A_3, A_7. Để tìm nghiệm cơ sở ta cho các biến không cơ sở là x_4, x_5, và x_6 nhận giá trị 0 và giải hệ $Ax = b$ để tìm các biến còn lại. Ta thu được $x = (4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)$. Véctơ này là nghiệm cơ sở suy biến vì véctơ có 4 thành phần nhận giá trị 0, trong khi đó $n - m = 7 - 4 = 3$.

Tiếp theo ta xây dựng ví dụ chỉ ra rằng khái niệm suy biến của nghiệm cơ sở không phải la một tính chất hình học, nghĩa là khái niệm này phụ thuộc dạng biểu diễn của tập lồi đa diện.

Ví dụ 4.1.3 Xét tập lồi đa diện

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$$

Ta có $n = 3, m = 2$ và $n - m = 1$. Véctơ $(1, 1, 0)$ là nghiệm cơ sở chấp nhận được không suy biến và véctơ $(0, 0, 1)$ là nghiệm cơ sở chấp nhận được suy biến. Tập lồi đa diện P có thể được biểu diễn lại dưới dạng (không chính tắc)

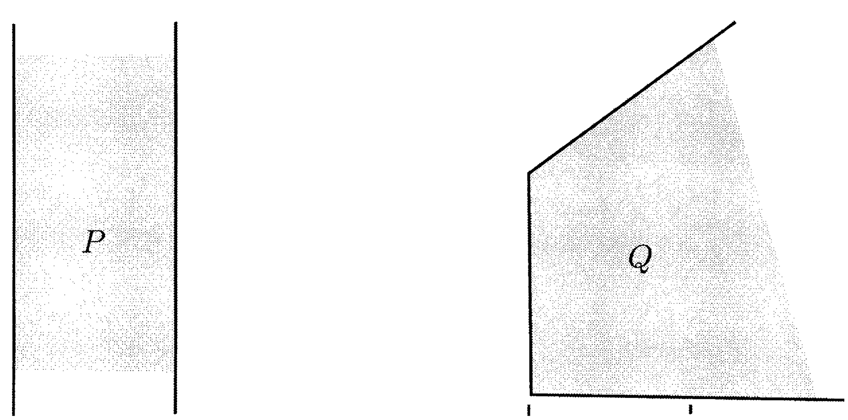
$$P = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, x_1, x_3 \geq 0\}.$$

Khi đó véctơ $(0, 0, 1)$ lúc này lại là nghiệm cơ sở chấp nhận được không suy biến.

5 Sự tồn tại điểm cực biên

Trong mục này ta trình bày các điều kiện cần và đủ để một tập lồi đa diện có ít nhất một điểm cực biên. Chúng ta quan sát rằng không phải tập lồi đa diện nào cũng có điểm cực biên. Chẳng hạn, với $n > 1$, nửa không gian trong $\mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện không có điểm cực biên. Tập lồi đa diện $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ với A là ma trận có ít hơn n hàng không có nghiệm cơ sở chấp nhận được nên không có điểm cực biên. Tiếp theo chúng ta sẽ chỉ ra rằng sự tồn tại điểm cực biên phụ thuộc vào tập lồi đa diện có chứa đường thẳng hay không.

Định nghĩa 5.1.1 Tập lồi đa diện $P \subset \mathbb{R}^n$ gọi là **chứa đường thẳng** nếu tồn tại $x \in P$ và $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $x + \lambda d \in P$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$.



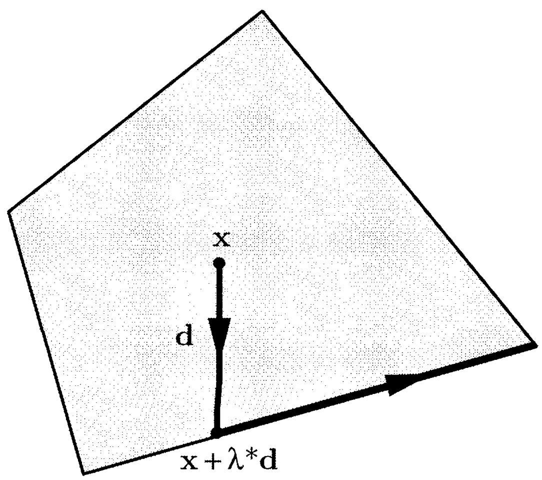
Định lý 5.1.1 Giả sử tập lồi đa diện $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$ là khác rỗng. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

(a) Tập lồi đa diện P có ít nhất một điểm cực biên.

(b) Tập lồi đa diện P không chứa đường thẳng.

(c) Tồn tại n véctơ trong họ các véctơ $a_1, \dots, a_m$ là độc lập tuyến tính.

Chứng minh.
(b) ⇒ (a)
Trước tiên ta chứng minh nếu P không chứa đường thẳng thì P phải có ít nhất một nghiệm cơ sở chấp nhận được và vì vậy có điểm cực biên theo Định lý 2.1.2. Minh họa hình học của chứng mính được thể hiện bởi hình bên dưới.



Do P là khác rỗng nên tồn tại $x \in P$. Đặt $I = \{i : \langle a_i, x\rangle = b_i\}$. Do ta có thể bổ sung thêm ràng buộc $\langle 0, x\rangle \geq 0$ vào hệ bất đẳng thức biểu diễn P mà không thay đổi P nên, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử I khác rỗng. Chú ý rằng do P khác rỗng và P không chứa đường thẳng nên ta có thể chọn $u \in P$ sao cho tập các chỉ số hoạt tại u là khác rỗng và chọn u làm điểm thay thế cho x ban đầu. Nếu trong hệ $a_i, i \in I$ tồn tại n véctơ độc lập tuyến tính thì x là nghiệm cơ sở chấp nhận được. Nếu điều này không đúng thì các véctơ $a_i, i \in I$ nằm trong một không gian véctơ con thực sự của $\mathbb{R}^n$ và vì vậy tồn tại $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $\langle a_i, d\rangle = 0, i \in I$. Với mỗi $i \in I$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có

$$\langle a_i, x + \lambda d\rangle = \langle a_i, x\rangle + \lambda\langle a_i, x + d\rangle = \langle a_i, x\rangle = b_i.$$

Điều này chứng tỏ các ràng buộc đã hoạt tại x thì ràng buộc đó sẽ hoạt tại mọi điểm thuộc đường thẳng qua x và nhận d làm véctơ chỉ phương. Do P không chứa đường thẳng nên tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $x + \lambda d \notin P$. Khi đó tồn tại k chỉ số $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ sao cho

$$\langle a_i, x + \lambda d\rangle < b_j, i = i_1, \dots, i_k,$$

$$\langle a_i, x + \lambda d\rangle \geq b_i, i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}.$$

Do $\langle a_i, x\rangle \geq b_i, \langle a_i, x + \lambda d\rangle < b_i, i = i_1, \ldots, i_k$, nên tồn tại $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ nằm trong đoạn thẳng nối x và $x + \lambda d$ sao cho $\langle a_i, x_i\rangle = b_i, i = i_1, \ldots, i_k$. Chọn $i_0 \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ sao cho x_{i_0} thuộc các đoạn thẳng nối x và $x_i, i = i_1, \ldots, i_k$. Rõ ràng $x_{i_0} \in P$ và a_{i_0} không là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $a_i, i \in I$. Chọn $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $x_{i_0} = x + \lambda_0 d$. Do đó, khi di chuyển từ x đến $x + \lambda_0 d$ số ràng buộc hoạt độc lập tuyến tính tăng ít nhất 1. Bằng cách lập luận tương tự, sau hữu hạn bước, ta tìm được một véctơ trong P sao cho số ràng buộc độc lập tuyến tính hoạt tại véctơ đó là n. Véctơ đó chính là nghiệm cơ sở chấp nhận được cần tìm.

(a) $\Rightarrow$ (c)

Nếu P có điểm cực biên thì điểm cực biên này cũng chính là nghiệm cơ sở chấp nhận được của P theo Định lý 2.1.2. Theo định nghĩa nghiệm cơ sở chấp nhận được, tồn tại n ràng buộc độc lập tuyến tính hoạt tại véctơ này. Đặc biệt, tồn tại n véctơ trong họ véctơ $a_i, i = 1, \ldots, m$ là độc lập tuyến tính.

(c) $\Rightarrow$ (b)

Giả sử tồn tại n véctơ trong hệ $a_i, i = 1, \ldots, m$ là độc lập tuyến tính. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1, \ldots, a_n$ là hệ độc lập tuyến tính hay là cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Giả sử tồn tại $x \in P$ và $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $x + \lambda d \in P$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle a_i, x + \lambda d\rangle \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Từ đây ta suy ra $\langle a_i, d\rangle = 0, i = 1, \ldots, n$. Do $a_1, \ldots, a_n$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ nên $d = 0$. Điều này là mâu thuẫn và vì vậy P không chứa đường thẳng. $\square$

Hệ quả 5.1.1 Tập lồi đa diện khác rỗng, bị chặn và tập lồi đa diện khác rỗng cho ở dạng chính tắc luôn có ít nhất một nghiệm cơ sở chấp nhận được.

6 Tính tối ưu của các điểm cực biên

Định lý 6.1.1 Xét bài toán QHTT cho ở dạng tổng quát. Nếu bài toán có nghiệm và tập phương án của bài toán có ít nhất một điểm cực biên thì bài toán sẽ có nghiệm là điểm cực biên của tập phương án.

Chứng minh. Gọi P, Q lần lượt là tập phương án và tập nghiệm của bài toán QHTT tổng quát. Khi đó P, Q là các tập lồi đa diện khác rỗng và $Q \subset P$. Do P có điểm cực biên nên theo Định lý 5.1.1 P không chứa đường thẳng và vì vậy Q không chứa đường thẳng. Lại theo Định lý 5.1.1, Q có điểm cực biên.

Gọi x^* là điểm cực biên của Q. Ta chứng minh x^* là điểm cực biên của P. Giả sử x^* không là điểm cực biên của P. Khi đó tồn tại $y, z \in P$ và $\lambda \in [0, 1]$ sao cho $y \neq x^*, z \neq x^*$ và $x^* = \lambda y + (1 - \lambda)z$. Do $y \neq x^*, z \neq x^*$ nên $\lambda \in (0, 1)$. Hơn nữa, $\langle c, y\rangle \geq \langle c, x^*\rangle, \langle c, z\rangle \geq \langle c, x^*\rangle$, và

$$\begin{aligned} 0 &= \langle c, \lambda y + (1 - \lambda)z - x^*\rangle \\ &= \lambda(\langle c, y\rangle - \langle c, x^*\rangle) + (1 - \lambda)(\langle c, z\rangle - \langle c, x^*\rangle). \end{aligned}$$

Do đó $\langle c, y\rangle = \langle c, z\rangle = \langle c, x^*\rangle$. Vậy $y, z \in Q$. Điều này là mâu thuẫn với giả thiết x^* là điểm cực biên của Q. Vậy bài toán QHTT tổng quát có nghiệm là điểm cực biên của tập phương án. $\square$

Định lý 6.1.2 Xét bài toán QHTT cho ở dạng tổng quát. Nếu tập phương án của bài toán có ít nhất một điểm cực biên và hàm mục tiêu của bài toán bị chặn dưới trên tập các phương án thì bài toán có nghiệm là điểm cực biên của tập phương án.

Chứng minh. Để chứng minh định lý trên ta sử dụng khái niệm sau:

Điểm $x \in P$ có **hạng** k nếu tồn tại đúng k ràng buộc độc lập tuyến tính hoạt tại x.

Giả sử $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ và x là điểm thuộc P có hạng $k < n$. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $y \in P$ có hạng lớn hơn k và thỏa $\langle c, y \rangle \leq \langle c, x \rangle$. Đặt $I = \{i : \langle a_i, x \rangle = b_i\}$ với a_i là dòng thứ i của ma trận A. Do $k < n$ nên các véctơ $a_i, i \in I$ nằm trong một không gian véctơ con thực sự của $\mathbb{R}^n$. Do đó tồn tại $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $\langle a_i, d \rangle = 0, i \in I$. Bằng cách thay d bằng $-d$ nếu cần thiết ta có thể giả sử $\langle c, d \rangle \leq 0$. Ta xét hai trường hợp:
Trường hợp 1. $\langle c, d \rangle < 0$
Theo chứng minh Định lý 5.1.1, với mỗi $\lambda > 0$ ta có $\langle a_i, x + \lambda d \rangle \geq b_i, i \in I$. Do hàm mục tiêu bị chặn dưới trên tập phương án nên $\{x + \lambda d : \lambda > 0\}$ không nằm hoàn toàn trong P. Thật vậy, giả sử ngược lại, ta có

$$\langle c, x + \lambda d \rangle = \langle c, x \rangle + \lambda \langle c, d \rangle \to -\infty \text{ khi } \lambda \to +\infty.$$

Điều này là mâu thuẫn với tính bị chặn dưới trên tập phương án của hàm mục tiêu. Lập luận tương tự Định lý 5.1.1 ta tìm được $\lambda_0 > 0$ và $i_0 \notin I$ sao cho $x + \lambda_0 d \in P$ và a_{i_0} không là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $a_i, i \in I$. Do đó $x + \lambda_0 d$ có hạng ít nhất là $k + 1$ và

$$\langle c, x + \lambda_0 d \rangle = \langle c, x \rangle + \lambda \langle c, d \rangle < \langle c, x \rangle.$$

Vậy $y = x + \lambda_0 d$ là véctơ cần tìm.
Trường hợp 2. $\langle c, d \rangle = 0$
Do P có điểm cực biên nên P không chứa đường thẳng. Do đó tập hợp $\{x + \lambda d : \lambda \in \mathbb{R}\}$ không nằm hoàn toàn trong P. Lập luận tương tự Định lý 5.1.1 ta tìm được $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $y = x + \lambda_0 d \in P$ và y có hạng lớn hơn x. Hơn nữa, do $\langle c, d \rangle = 0$ nên $\langle c, y \rangle = \langle c, x \rangle$.

Trong cả hai trường hợp trên ta đều tìm được điểm mới $y \in P$ sao cho $\langle c, y \rangle \leq \langle c, x \rangle$ và y có hạng lớn hơn x. Bằng cách lặp lại quá trình trên, sau hữu hạn bước, ta tìm được $w \in P$ có hạng bằng n (nghĩa là w là nghiệm cơ sở chấp nhận được) và thỏa $\langle c, w \rangle \leq \langle c, x \rangle$.

Gọi $w^1, \ldots, w^r$ là các nghiệm cơ sở chấp nhận được của P và gọi w^* là nghiệm cơ sở chấp nhận được thỏa $\langle c, w^* \rangle \leq \langle c, w^i \rangle$ với mọi i. Theo chứng minh trên, với mỗi $x \in P$ luôn tồn tại chỉ số i sao cho $\langle c, w^i \rangle \leq \langle c, x \rangle$. Do đó $\langle c, w^i \rangle \leq \langle c, x \rangle$ với mọi $x \in P$. Nói cách khác, nghiệm cơ sở chấp nhận được w^* là nghiệm của bài toán. $\square$

Hệ quả 6.1.1 Xét bài toán QHTT cho ở dạng tổng quát. Nếu bài toán có phương án và hàm mục tiêu của bài toán bị chặn dưới trên tập phương án thì bài toán có nghiệm.