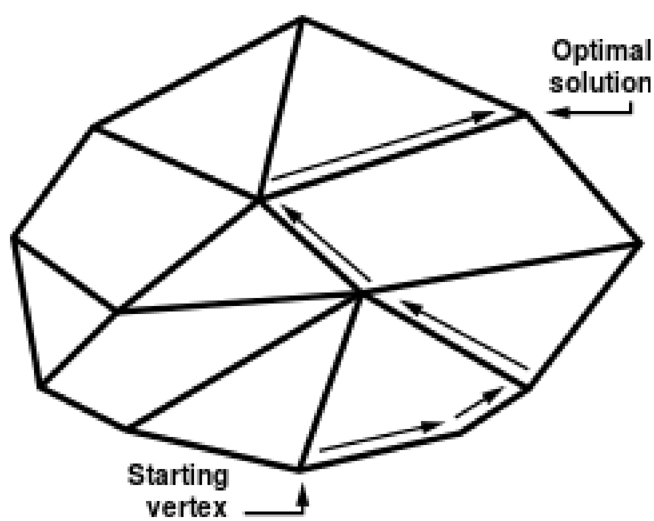
Chương 3. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

Trong Chương 2 chúng ta thấy rằng nếu bài toán QHTT dạng chính tắc có nghiệm thì tồn tại nghiệm cơ sở chấp nhận được của tập phương án (phương án cực biên) là nghiệm của bài toán. Phương pháp đơn hình dựa trên tính chất này của bài toán QHTT dạng chính tắc và tìm nghiệm của bài toán bằng cách di chuyển từ nghiệm cơ sở chấp nhận được này sang nghiệm cơ sở chấp nhận được khác, dọc theo các cạnh của tập phương án, sao cho giá trị hàm mục tiêu giảm. Cuối cùng, chúng ta sẽ tìm được một nghiệm cơ sở chấp nhận được mà tại đó giá trị hàm mục tiêu không thể giảm được nữa, nghiệm cơ sở chấp nhận được đó chính là nghiệm của bài toán và dừng thuật toán.



Chương này trình bày chi tiết việc xây dựng phương pháp đơn hình và việc tổ chức tính toán đối với phương pháp này bao gồm bảng đơn hình và phương pháp đơn hình cải biên. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu một số khó khăn trong tính toán khi xuất hiện sự suy biến. Trong toàn bộ chương này chúng ta xét bài toán QHTT dạng chính tắc

$$\begin{cases} \langle c, x\rangle \to \min \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ có hạng bằng m. Ta kí hiệu A_i là cột và a_i là dòng của ma trận A. Tập phương án P của bài toán được cho bởi

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}.$$

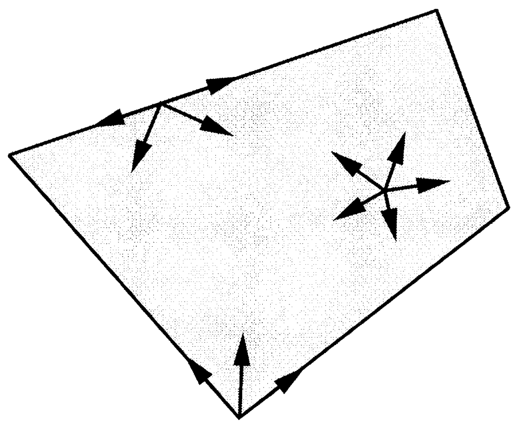
1 Các điều kiện tối ưu

Nhiều thuật toán tối ưu được xây dựng như sau: cho trước một phương án, tiếp theo chúng ta tìm trong lân cận của phương án này các phương án mà tại đó giá trị hàm mục tiêu giảm. Nếu không tìm được phương án nữa để giá trị hàm mục tiêu giảm thì thuật toán dừng và phương án đó chính là nghiệm địa phương của bài toán. Đối với bài toán tối ưu tổng quát, nghiệm địa phương không là nghiệm toàn cục. **May**

mắn thay, trong QHTT, tính tối ưu địa phương kéo theo tính tối ưu toàn cục. Trong mục này, chúng ta tập trung vào bài toán tìm hướng giảm của hàm mục tiêu trong lân cận của nghiệm cơ sở chấp nhận được và thiết lập các điều kiện đủ tối ưu.

Giả sử ta muốn di chuyển từ điểm $x \in P$ theo phương $d \in \mathbb{R}^n$ để tìm phương án tốt hơn. Rõ ràng, ta chỉ nên di chuyển theo các phương mà điểm di chuyển không được rời khỏi tập phương án. Điều này dẫn đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.1.1 Cho x là một điểm của tập lồi đa diện P. Véctơ $d \in \mathbb{R}^n$ gọi là **hướng chấp nhận được** tại x nếu tồn tại số thực dương θ sao cho $x + \theta d \in P$.



Tiếp theo chúng ta mô tả cách tìm các hướng chấp nhận được tại nghiệm cơ sở chấp nhận được. Giả sử x là một nghiệm cơ sở chấp nhận được tương ứng với bộ chỉ số cơ sở $B(1), \dots, B(m)$ và $B = [A_{B(1)} \dots A_{B(m)}]$ là ma trận cơ sở tương ứng. Ta đã biết $x_i = 0$ cho các biến không cơ sở và với $x_B = (x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)})$ gồm các biến cơ sở được cho bởi

$$x_B = B^{-1}b.$$

Chúng ta di chuyển từ véctơ x đến véctơ mới là $x + \theta d$ bằng cách chọn một biến không cơ sở x_j và tăng nó lên một lượng dương là θ và các biến không cơ sở khác vẫn giữ nguyên giá trị là 0. Về mặt đại số, việc làm trên nghĩa là ta cho $d_j = 1$ và $d_i = 0$ với các chỉ số không cơ sở $i \neq j$. Khi đó véctơ x_B gồm các biến cơ sở sẽ thay đổi thành $x_B + \theta d_B$, trong đó $d_B = (d_{B(1)}, \dots, d_{B(m)})$ là véctơ tạo từ các thành phần của d tương ứng với các biến cơ sở.

Do yêu cầu của việc di chuyển là trên tập phương án nên $A(x + \theta d) = b$. Do x là phương án, nghĩa là $Ax = b$ và $\theta > 0$ nên ta cần $Ad = 0$. Chú ý rằng $d_j = 1$ và $d_i = 0$ với mọi chỉ số không cơ sở $i \neq j$. Do đó

$$0 = Ad = \sum_{i=1}^{n} A_i d_i = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} d_{B(i)} + A_j = B d_B + A_j.$$

Do ma trận cơ sở B là khả nghịch nên

$$d_B = -B^{-1} A_j.$$

Véctơ d chúng ta vừa xây dựng được goi là **hướng cơ sở** thứ j. Véctơ mới $x + \theta d$ vừa xây dựng chỉ thỏa ràng buộc đẳng thức, do đó để véctơ này là phương án của bài toán ta cần các thành phần của véctơ là không âm. Chú ý rằng biến x_j là tăng và các biến không cơ sở khác vẫn có giá trị là 0. Do đó ta chỉ quan tâm đến các biến cơ sở. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. x là nghiệm cơ sở chấp nhận được không suy biến. Khi đó $x_B > 0$ nên ta có thể chọn θ đủ bé để $x_B + \theta d_B \geq 0$ và do đó $x + \theta d$ là phương án của bài toán. Đặc biệt, d là hướng chấp nhận được.

Trường hợp 2. x là nghiệm cơ sở chấp nhận được suy biến. Khi đó d có thể không là hướng chấp nhận được. Thật vậy, trong tình huống biến cơ sở $x_{B(i)}$ bằng 0 và thành phần tương ứng $d_{B(i)}$ của véctơ $d_B = -B^{-1}A_j$ là âm thì nếu ta di chuyển theo hướng cơ sở thứ j thì ràng buộc không âm cho $x_{B(i)}$ sẽ bị vi phạm và ta sẽ rời khỏi tập phương án của bài toán.

Tiếp theo chúng ta nghiên cứu sự thay đổi của giá trị hàm mục tiêu khi ta di chuyển dọc theo hướng cơ sở. Nếu d là hướng cơ sở thứ j thì tỉ lệ giảm của giá trị hàm mục tiêu là $\langle c, d\rangle$ hay $\langle c_B, d_B\rangle + c_j$ với $c_B = (c_{B(1)}, \ldots, c_{B(m)})$. Thay $d_B = -B^{-1}A_j$ vào công thức vừa có và sắp xếp lại ta thu được $c_j - \langle c_B, B^{-1}A_j\rangle$. Đại lượng này quan trọng trong các kết quả về định tính và định lượng sau này.

Định nghĩa 1.1.2 Cho x là nghiệm cơ sở, B là ma trận cơ sở tương ứng và c_B là véctơ của hàm mục tiêu tương ứng với các biến cơ sở. Với mỗi j, **giá trị giảm** của biến x_j, kí hiệu $\bar{c}_j$, được cho bởi

$$\bar{c}_j = c_j - \langle c_B, B^{-1}A_j\rangle.$$

Ví dụ 1.1.1 Xét bài toán QHTT

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Hai cột A_1, A_2 của ma trận A là độc lập tuyến tính. Do đó ta có thể chọn x_1, x_2 làm các biến cơ sở. Ma trận cơ sở tương ứng là

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta đặt $x_3 = x_4 = 0$ và giải x_1, x_2 ta thu được $x_1 = x_2 = 1$. Ta thu được nghiệm cơ sở chấp nhận được không suy biến $x = (1, 1, 0, 0)$.

Hướng cơ sở tương ứng với sự tăng của biến không cơ sở x_3 được xây dựng như sau. Ta đặt $d_3 = 1, d_4 = 0$. Hướng của sự thay đổi các biến cơ sở cho bởi

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{B(1)} \\ d_{B(2)} \end{bmatrix} = d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Giá trị giảm của biến x_3 được cho bởi công thức

$$\bar{c}_3 = c_3 - \langle c_B, B^{-1}A_3\rangle = -3c_1/2 + c_2/2 + c_3.$$

Nhận xét. Ta xét Định nghĩa 1.1.2 cho trường hợp biến cơ sở. Do B là ma trận khả nghịch cho bởi $B = [A_{B(1)} \dots A_{B(m)}]$ nên $B^{-1}[A_{B(1)} \dots A_{B(m)}] = I$ với I là ma trận đơn vị cấp $m \times m$. Đặc biệt, $B^{-1}A_{B(i)}$ là cột thứ i của ma trận đơn vị, chính là véctơ đơn vị e_i. Do đó, với mỗi biến cơ sở $x_{B(i)}$ ta có

$$\bar{c}_{B(i)} = c_{B(i)} - \langle c_B, B^{-1}A_{B(i)} \rangle = c_{B(i)} - \langle c_B, e_i \rangle = c_{B(i)} - c_{B(i)} = 0.$$

Do đó giá trị giảm của các biến cơ sở là 0.

Tiếp theo chúng ta trình bày điều kiện cần, điều kiện đủ để một nghiệm cơ sở chấp nhận được là nghiệm của bài toán.

Định lý 1.1.1 Xét nghiệm cơ sở chấp nhận được x gắn với ma trận cơ sở B và $\bar{c}$ véctơ giá trị giảm tương ứng.

(a) Nếu $\bar{c} \geq 0$ thì x là nghiệm.

(b) Nếu x là nghiệm và không suy biến thì $\bar{c} \geq 0$.

Chứng minh.

(a) Giả sử $\bar{c} \geq 0$ và y là một phương án bất kỳ của bài toán. Đặt $d = y - x$. Do x, y là các phương án của bài toán nên

$$Ad = Ay - Ax = b - b = 0.$$

Đẳng thức trên có thể được viết lại dưới dạng

$$Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0,$$

trong đó N là tập hợp các chỉ số tương ứng với các biến không cơ sở. Do B là khả nghịch nên ta thu được

$$d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1}A_i d_i,$$

và

$$\langle c, d \rangle = \langle c_B, d_B \rangle + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - \langle c_B, B^{-1}A_i \rangle) d_i = \sum_{i \in N} \bar{c}_i d_i.$$

Với mỗi chỉ số không cơ sở $i \in N$ ta có $x_i = 0$ và $y_i \geq 0$ do y là phương án. Vì vậy, $d_i \geq 0$ và $\bar{c}_i d_i \geq 0$ với mọi $i \in N$. Điều này dẫn đến $\langle c, y - x \rangle = \langle c, d \rangle \geq 0$. Do y là phương án bất kỳ của bài toán nên x là nghiệm.

(b) Giả sử x là nghiệm không suy biến của bài toán và có chỉ số j sao cho $\bar{c}_j < 0$. Do giá trị giảm của các biến cơ sở luôn bằng 0 nên x_j là biến không cơ sở và $\bar{c}_j$ là tỉ lệ thay đổi giá trị hàm mục tiêu dọc theo hướng cơ sở thứ j. Do x là không suy biến nên hướng cơ sở thứ j là hướng chấp nhận được. Hơn nữa, vì $\bar{c}_j < 0$ nên khi di chuyển theo hướng cơ sở thứ j thì giá trị hàm mục tiêu là giảm. Điều này là mâu thuẫn với giả thiết x là nghiệm của bài toán. $\square$

Nhận xét 1.1.1

(a) Tồn tại véctơ x là nghiệm cơ sở chấp nhận được (suy biến) và là nghiệm của bài toán nhưng $\bar{c}_j < 0$ với một chỉ số j không cơ sở nào đó.

(b) Nếu $\bar{c}_j > 0$ với mọi chỉ số không cơ sở j thì x là nghiệm duy nhất của bài toán. Ngược lại, nếu x nghiệm cơ sở không suy biến và là nghiệm duy nhất của bài toán thì $\bar{c}_j > 0$ với mọi chỉ số không cơ sở j.

(c) Theo Định lý 1.1.1, để kiểm tra một nghiệm cơ sở chấp nhận được không suy biến là tối ưu ta chỉ cần kiểm tra tất cả các giá trị giảm ứng với các biến không cơ sở là không âm. Trong trường hợp x là nghiệm cơ sở chấp nhận được suy biến ta không có tiêu chuẩn tương tự như trên để kiểm tra x là tối ưu hay không.

Chúng ta quan sát rằng để sử dụng Định lý 1.1.1 để kết luận một nghiệm cơ sở là nghiệm của bài toán ta cần kiểm tra hai điều kiện sau: tính chấp nhận được và tính không âm của các giá trị giảm của các biến. Điều này dẫn đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.1.3 Ma trận cơ sở B được gọi là **tối ưu** nếu

(a) $B^{-1}b \geq 0$, và

(b) $\bar{c} = c - \langle c_B, B^{-1}A \rangle \geq 0$, trong đó

$$\langle c_B, B^{-1}A \rangle = \left(\langle c_B, B^{-1}A_1 \rangle, \ldots, \langle c_B, B^{-1}A_n \rangle \right).$$

Rõ ràng, nếu chúng ta có ma trận cơ sở tối ưu thì nghiệm cơ sở tương ứng là chấp nhận được và thỏa các điều kiện tối ưu và vì vậy nó là tối ưu. Tuy nhiên, trong trường hợp suy biến, việc có một nghiệm cơ sở chấp nhận được tối ưu không đảm bảo các giá trị giảm là không âm.

2 Xây dựng phương pháp đơn hình

Trong mục này chúng ta sẽ hoàn tất việc xây dựng phương pháp đơn hình. Nội dung chính ở đây là chỉ ra cách để di chuyển đến một nghiệm cơ sở chấp nhận được tốt hơn khi mà chúng ta đã tìm được một hướng cơ sở có lợi, nghĩa là di chuyển theo hướng này ta được các phương án mới mà giá trị hàm mục tiêu sẽ tốt hơn. Tiếp theo chúng ta xét bài toán QHTT dạng chính tắc, không suy biến, nghĩa là mỗi nghiệm cơ sở chấp nhận được đều không suy biến.

Giả sử rằng chúng ta đang đứng ở một nghiệm cơ sở chấp nhận được x và đã tính được các giá trị giảm $\bar{c}_j$ của các biến không cơ sở. Nếu toàn bộ giá trị giảm là không âm thì theo Định lý 1.1.1, x là nghiệm của bài toán và ta dừng ở đây. Trong trường hợp ngược lại, giá trị giảm $\bar{c}_j$ của biến không cơ sở x_j là âm, hướng cơ sở thứ j, gọi là d, là hướng chấp nhận được của việc giảm giá trị hàm mục tiêu. Nhắc lại rằng, hướng này được tìm bằng cách cho $d_j = 1, d_i = 0$ với $i \neq B(1), \ldots, B(m), j$, và $d_B = -B^{-1}A_j$. Khi di chuyển dọc theo hướng d, biến không cơ sở x_j trở thành dương trong khi đó các biến không cơ sở khác vẫn giữ nguyên giá trị 0. Chúng ta gọi tình huống này là biến x_j (hay cột A_j) **vào hay được mang vào cơ sở**.

Việc di chuyển khỏi x theo phương d chúng ta sẽ thu được tập hợp gồm các điểm có dạng $x + \theta d$ với $\theta \geq 0$. Do giá trị hàm mục tiêu giảm khi di chuyển theo hướng d nên ta cần di chuyển càng xa càng tốt. Do đó ta cần di chuyển đến điểm $x + \theta^* d$, trong đó

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 : x + \theta d \in P\}.$$

Lượng thay đổi của hàm mục tiêu tại điểm đang xét là $\theta^* \langle c, d\rangle$ hay $\theta^* \bar{c}_j$.

Tiếp theo ta thiết lập công thức cho θ^*. Vì $Ad = 0$ nên $A(x + \theta d) = Ax = b$ với mọi θ nên điểm $x + \theta d$ luôn thỏa ràng buộc đẳng thức với mọi $\theta \geq 0$. Do đó, $x + \theta d$ chỉ có thể là không chấp nhận được chỉ khi một trong các thành phần của véctơ này là âm. Ta xét hai trường hợp:

(a) Nếu $d \geq 0$ thì $x + \theta d \geq 0$ với mọi $\theta \geq 0$. Khi đó véctơ $x + \theta d$ là chấp nhận được và đặt $\theta^* = \infty$.

(b) Nếu $d_i < 0$ với i nào đó thì ràng buộc $x_i + \theta d_i \geq 0$ trở thành $\theta \leq -x_i/d_i$. Ràng buộc này trên θ phải được thỏa với mọi i sao cho $d_i < 0$. Vì vậy, giá trị lớn nhất có thể của θ là

$$\theta^* = \min_{\{i:d_i<0\}} \left(-\frac{x_i}{d_i}\right).$$

Nhắc lại rằng nếu x_i là biến không cơ sở thì hoặc x_i là biến đi vào và $d_i = 1$ hoặc $d_i = 0$. Cả hai tình huống đều có $d_i \geq 0$. Do đó ta chỉ cần quan tâm đến các biến cơ sở trong việc tìm θ^* và ta có được công thức tương đương

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m:d_{B(i)}<0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right). \tag{1}$$

Chú ý rằng, do x là không suy biến nên $x_{B(i)} > 0$. Điều này kéo theo $\theta^* > 0$.

Ví dụ 2.1.1 Ví dụ này tiếp theo Ví dụ 1.1.1 ở mục trước, nghĩa là xét bài toán

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \min \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Chúng ta xét lại nghiệm cơ sở chấp nhận được $x = (1, 1, 0, 0)$ và giá trị giảm $\bar{c}_3$ của biến không cơ sở x_3 được cho bởi $-3c_1/2 + c_2/2 + c_3$. Giả sử $c = (2, 0, 0, 0)$, trong trường hợp này ta có $\bar{c}_3 = -3$. Do $\bar{c}_3$ là âm nên ta xây dựng hướng cơ sở tương ứng là $d = (-3/2, 1/2, 1, 0)$ và xét các véctơ có dạng $x + \theta d$ với $\theta \geq 0$. Khi θ tăng thành phần duy nhất của x giảm là thành phần thứ nhất (do $d_1 < 0$). Giá trị lớn nhất có thể của θ là $\theta^* = -(x_1/d_1) = 2/3$. Giá trị này cho ta véctơ tương ứng $y = x + 2d/3 = (0, 4/3, 2/3, 0)$. Chú ý rằng các cột A_2 và A_3 tương ứng với các biến khác không tại véctơ mới y là $(1, 0)$ và $(1, 3)$ và chúng là độc lập tuyến tính. Vì vậy, chúng ta đã tạo được một cơ sở mới và véctơ y là nghiệm cơ sở chấp nhận được mới. Đặc biệt, biến x_3 đi vào cơ sở và biến x_1 rời khỏi cơ sở.

Với θ^* được chọn và giả sử nó hữu hạn chúng ta di chuyển đến phương án mới $y = x + \theta^* d$. Do $x_j = 0$ và $d_j = 1$ ta có $y_j = \theta^* > 0$. Gọi ℓ là chỉ số đạt cực tiểu trong (1), nghĩa là

$$-\frac{x_{B(\ell)}}{d_{B(\ell)}} = \min_{\{i=1,\dots,m : d_{B(i)}<0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right) = \theta^*;$$

Đặc biệt, ta có

$$d_{B(\ell)} < 0, \quad x_{B(\ell)} + \theta^* d_{B(\ell)} = 0.$$

Từ đây ta thấy biến cơ sở $x_{B(\ell)}$ sẽ trở thành 0 và biến không cơ sở x_j trở thành dương. Điều này chứng tỏ x_j thay $x_{B(\ell)}$ trong cơ sở. Song song, ta lấy ma trận ban đầu B và thay $A_{B(\ell)}$ bởi cột A_j và thu được ma trận

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} | & & | & | & | & & | \\ A_{B(1)} & \dots & A_{B(\ell-1)} & A_j & A_{B(\ell+1)} & \dots & A_{B(m)} \\ | & & | & | & | & & |. \end{bmatrix} \tag{2}$$

Một cách tương đương, ta đang thay thế tập các chỉ số cơ sở $\{B(1), \dots, B(m)\}$ bởi một tập chỉ số mới$\{\overline{B}(1), \dots, \overline{B}(m)\}$ cho bởi công thức

$$\overline{B}(i) = \begin{cases} B(i), & i \neq \ell, \\ j, & i = \ell. \end{cases} \tag{3}$$

Định lý 2.1.1

(a) Các cột $A_{B(i)}, i \neq \ell$, và A_j là độc lập tuyến tính và vì vậy $\overline{B}$ là ma trận cơ sở.

(b) Véctơ $y = x + \theta^* d$ là nghiệm cơ sở chấp nhận được gắn với ma trận cơ sở $\overline{B}$.

Chứng minh.
(a) Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử các véctơ $A_{\overline{B}(i)}, i = 1, \dots, m$ là phụ thuộc tuyến tính. Tồn tại các số thực $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_{\overline{B}(i)} = 0.$$

Nhân hai vế cho ma trận B^{-1} ta thu được

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i B^{-1} A_{\overline{B}(i)} = 0.$$

Do đó các véctơ $B^{-1}A_{\overline{B}(i)}$ cũng phụ thuộc tuyến tính. Điều này là vô lý. Thật vậy, do $B^{-1}B = I$ và $A_{B(i)}$ là cột thứ i của ma trận B nên các véctơ $B^{-1}A_{B(i)}, i \neq \ell$ là các véctơ đơn vị ngoại trừ véctơ đơn vị thứ ℓ. Đặc biệt, hệ gồm các véctơ này là độc lập tuyến tính và các véctơ này có thành phần thứ ℓ đều bằng 0. Mặt khác, do

$B^{-1}A_j = -d_B$ nên véctơ này có thành phần thứ ℓ là $-d_{B(\ell)}$ khác 0 do định nghĩa ℓ. Do đó, hệ gồm các véctơ $B^{-1}A_{B(i)}, i \neq \ell$ và $B^{-1}A_j$ là độc lập tuyến tính.

(b) Ta có $y \geq 0, Ay = b$ và $y_i = 0$ với $i \neq \overline{B}(1), \ldots, \overline{B}(m)$. Hơn nữa các cột $A_{\overline{B}(1)}, \ldots, A_{\overline{B}(m)}$ là độc lập tuyến tính theo **(a)**. Điều này chứng tỏ y là nghiệm cơ sở chấp nhận được gắn với ma trận cơ sở $\overline{B}$. □

Do θ^* dương nên nghiệm cơ sở chấp nhận được mới $x + \theta^* d$ là khác x. Do d là hướng giảm của hàm mục tiêu nên giá trị hàm mục tiêu tại nghiệm cơ sở chấp nhận được mới là nhỏ hơn giá trị hàm mục tiêu tại nghiệm cơ sở chấp nhận được cũ. Do đó, chúng ta đã đạt được mục đích di chuyển đến một nghiệm cơ sở chấp nhận được mới với giá trị hàm mục tiêu giảm. Tiếp theo, chúng ta tổng kết lại một bước lặp thông thường trong thuật toán đơn hình. Để thuận tiện, ta định nghĩa $u = (u_1, \ldots, u_m)$ bằng cách đặt

$$u = -d_B = B^{-1}A_j,$$

trong đó A_j là cột đi vào cơ sở. Đặc biệt, $u_i = -d_{B(i)}$ với $i = 1, \ldots, m$.

Bước lặp của thuật toán đơn hình

1. Trong một bước lặp, chúng ta khởi động với một cơ sở gồm các cột cơ sở $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ và một nghiệm cơ sở chấp nhận được liên kết là x.

2. Tính các giá trị giảm $\bar{c}_j = c_j - \langle c_B, B^{-1}A_j \rangle$ với các chỉ số không cơ sở j. Nếu toàn bộ các giá trị giảm là không âm thì nghiệm cơ sở đang xét là tối ưu và thuật toán dừng. Trong trường hợp ngược lại, chọn j sao cho $\bar{c}_j < 0$.

3. Tính $u = B^{-1}A_j$. Nếu không có thành phần nào của u là dương thì ta đặt $\theta^* = \infty$, bài toán vô nghiệm và thuật toán dừng.

4. Nếu có thành phần nào đó của u là dương thì đặt
$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m: u_i > 0\}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}.$$

5. Gọi ℓ là chỉ số sao cho $\theta^* = x_{B(\ell)}/u_\ell$. Tạo cơ sở mới bằng cách thay cột $A_{B(\ell)}$ bởi cột A_j. Nếu y là nghiệm cơ sở chấp nhận được mới thì giá trị của biến cơ sở mới là $y_j = \theta^*$ và $y_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta^* u_i, i \neq \ell$.

Thuật toán đơn hình khởi động với một nghiệm cơ sở chấp nhận được bất kỳ. Điều này là được đảm bảo vì đối với bài toán dạng chính tắc có phương án thì có phương án cơ sở chấp nhận được. Định lý sau chứng minh rằng đối với bài toán QHTT dạng chính tắc, không suy biến thì thuật toán đơn hình dừng sau hữu hạn bước lặp, nghĩa là ta có thể kết luận bài toán vô nghiệm hay chỉ ra một nghiệm của bài toán.

Định lý 2.1.2 Giả sử rằng tập phương án của bài toán là khác rỗng và mỗi nghiệm cơ sở chấp nhận được của tập phương án là không suy biến. Khi đó, thuật toán đơn hình dừng sau hữu hạn bước lặp. Khi dừng thuật toán, chỉ một trong hai tình huống sau xảy ra:

(a) Chúng ta tìm được ma trận cơ sở tối ưu B và nghiệm cơ sở chấp nhận được tương ứng tối ưu.

(b) Ta tìm được véctơ d thỏa $Ad = 0, d \geq 0, \langle c, d \rangle < 0$ và bài toán vô nghiệm.

Chứng minh. Nếu thuật toán dừng theo tiêu chuẩn dừng trong bước 2 thì điều kiện tối ưu của Định lý 1.1.1 được thỏa. Khi đó ma trận cơ sở B đang xét là tối ưu và nghiệm cơ sở chấp nhận được đang xét là tối ưu.

Nếu thuật toán dừng trong bước 3 thì ta đang đứng ở nghiệm cơ sở chấp nhận được x và ta tìm được biến không cơ sở x_j thỏa $\bar{c}_j < 0$ và hướng cơ sở tương ứng d thỏa $Ad = 0$ và $d \geq 0$. Đặc biệt $x + \theta d \in P$ với mọi $\theta > 0$. Do $\langle c, d \rangle = \bar{c}_j < 0$ nên bằng cách cho θ lớn tùy ý thì ta được giá trị hàm mục tiêu có thể lớn tùy ý. Điều này chứng tỏ hàm mục tiêu của bài toán là không bị chặn dưới. Do đó bài toán vô nghiệm.

Tại mỗi bước lặp, thuật toán cho ta tìm được một nghiệm cơ sở chấp nhận được mới mà giá trị hàm mục tiêu tại nó nhỏ hơn giá trị hàm mục tiêu tại nghiệm cơ sở chấp nhận được trước đó. Do chỉ có hữu hạn các nghiệm cơ sở chấp nhận được nên cuối cùng thuật toán phải dừng tại một nghiệm cơ sở chấp nhận được nào đó. □

Nhận xét 2.1.1 Định lý 2.1.2 cung cấp một chứng minh khác cho một số kết quả trong Chương 2 đối với bài toán QHTT dạng chính tắc, không suy biến. Đặc biệt, nó chỉ ra rằng đối với các bài toán QHTT dạng chính tắc không suy biến, có tập phương án khác rỗng thì hoặc bài toán là vô nghiệm hoặc tồn tại nghiệm cơ sở chấp nhận được là tối ưu.

Phương pháp đơn hình cho bài toán suy biến

Phần này chúng ta trình bày một số tình huống xảy ra khi áp dụng phương pháp đơn hình cho bài toán suy biến.

(a) Nếu nghiệm cơ sở chấp nhận được hiện tại x là suy biến thì θ^* có thể bằng 0. Trong tình huống này nghiệm cơ sở chấp nhận mới y chính là x. Điều này xảy ra khi một biến cơ sở nào đó $x_{B(\ell)}$ là 0 và thành phần tương ứng $d_{B(\ell)}$ của hướng d là âm. Tuy nhiên, ta vẫn có thể định nghĩa được cơ sở mới $\overline{B}$ bằng cách thay cột $A_{B(\ell)}$ bởi cột A_j và Định lý 2.1.1 vẫn đúng.

(b) Ngay cả trong trường hợp θ^* là dương, vẫn có thể xảy ra tình huống một trong các biến cơ sở ban đầu trở thành 0 tại điểm mới $x + \theta^* d$. Do chỉ có duy nhất một biến cơ sở rời khỏi cơ sở nên các biến còn lại trong cơ sở vẫn giữ giá trị 0 và vì vậy nghiệm cơ sở chấp nhận được mới là suy biến.

Như các phân tích trên, trong việc thực thi phương pháp đơn hình cho bài toán suy biến ta có thể gặp tình huống cơ sở thay đổi nhưng nghiệm cơ sở chấp nhận lại không thay đổi. Gặp tình huống trên ta lại tiếp tục thực thi phương pháp đơn hình để tìm được cơ sở mới với nghiệm cơ sở chấp nhận được mới. Tuy nhiên, có những tình huống một dãy các cơ sở thay đổi dẫn đến cơ sở ban đầu, nghĩa là thuật toán lặp vô hạn. Hiện tượng không mong muốn này được goi là **xoay vòng**. Mục sau sẽ trình bày một số phương pháp để chống xoay vòng trong quá trình thực thi phương pháp đơn hình.

Lựa chọn trục xoay

Phương pháp đơn hình được chúng ta trình bày có một số sự tự do: trong bước 2 ta có thể tự do chọn chỉ số j sao cho lượng giảm $\bar{c}_j$ là âm; trong bước 5 có thể có nhiều chỉ số ℓ để đạt giá trị nhỏ nhất trong việc chọn θ^* và ta cũng có thể tự do chọn các chỉ số này. Các quy tắc lựa chọn các chỉ số j và ℓ mô tả trên được gọi là các quy tắc xoay trục.

Liên quan đến việc chọn cột đi vào, ta có các quy tắc sau:

(a) Chọn cột A_j với giá trị giảm tương ứng $\bar{c}_j < 0$ và có giá trị âm nhất. Do giá trị giảm chính là tỷ lệ thay đổi của giá trị hàm mục tiêu nên quy tắc này chọn được hướng mà dọc theo hướng này giá trị hàm mục tiêu giảm với tốc độ nhanh nhất. Tuy nhiên, giá trị giảm thực sự của hàm mục tiêu phụ thuộc vào việc chúng ta di chuyển được bao xa theo phương đã chọn. Điều này dẫn đến quy tắc tiếp theo.

(b) Chọn cột với $\bar{c}_j < 0$ sao cho lượng giảm tương ứng $\theta^*|\bar{c}_j|$ lớn nhất. Quy tắc này có thể giúp tìm được nghiệm của bài toán với số bước lặp ít hơn. Tuy nhiên, khối lượng tính toán theo quy tắc này là lớn hơn vì ta cần phải tìm θ^* cho mỗi cột tương ứng với $\bar{c}_j < 0$. Các tính toán thực nghiệm cho thấy thời gian chạy tổng thể của thuật toán là không cải thiện.

Đối với các bài toán cỡ lớn, quy tắc chọn cột tương ứng với lượng giảm $\bar{c}_j$ âm nhất có thể dẫn đến khối lượng tính toán lớn vì quy tắc này đòi hỏi phải tính giá trị giảm của tất cả các biến. Trong thực hành, các quy tắc đơn giản hơn có thể được sử dụng, chẳng hạn quy tắc **chọn chỉ số nhỏ nhất**, nghĩa là chọn chỉ số j nhỏ nhất sao cho $\bar{c}_j$ là âm. Với quy tắc này, khi một giá trị giảm âm được phát hiện thì ta không cần tính các giá trị giảm còn lại. Liên quan đến việc chọn cột rời khỏi cơ sở, lựa chọn đơn giản nhất lại là quy tắc **chọn chỉ số nhỏ nhất**, nghĩa là trong các biến đủ điều kiện rời khỏi cơ sở, chọn biến có chỉ số nhỏ nhất. Một điều thú vị là bằng cách sử dụng quy tắc chọn chỉ số nhỏ nhất cho việc chọn các cột đi vào và đi ra thì hiện tượng xoay vòng được khắc phục.

3 Tổ chức tính toán đối với phương pháp đơn hình

Trong mục này chúng ta trình bày một số tổ chức tính toán đối với phương pháp đơn hình. Như đã biết trong tính toán của phương pháp đơn hình các véctơ $B^{-1}A_j$ đóng vai trò then chốt. Khi tính được các véctơ này đồng thời chúng ta cũng thu được các giá trị giảm, hướng di chuyển giảm hàm mục tiêu, độ dài bước đi θ^*. Do đó, sự khác nhau giữa các tổ chức tính toán nằm ở chỗ các véctơ $B^{-1}A_j$ được tính toán như thế nào và các thông tin lưu trữ từ bước lặp trước cho bước lặp tiếp theo.

Tổ chức tính toán sơ khai

Chúng ta bắt đầu với tổ chức tính toán đơn giản mà ở đó các thông tin ở bước lặp trước không được kế thừa cho bước lặp tiếp theo. Bắt đầu một bước lặp ta có các chỉ số $B(1), \ldots, B(m)$ của các biến cơ sở. Từ các chỉ số cơ sở chúng ta thiết lập ma trận cơ sở B và tính $p' = c'_B B^{-1}$ bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính $p'B = c'_B$ để tìm véctơ p. Véctơ p được gọi là véctơ của các **nhân tử đơn hình** gắn với ma trận B. Giá trị giảm $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A_j$ của biến x_j được tính theo công thức

$$\bar{c}_j = c_j - p' A_j.$$

Tùy theo quy tắc xoay trục mà chúng ta sử dụng, chúng ta có thể tính tất cả các giá trị giảm hoặc tính các giá trị giảm đến khi tìm được giá trị giảm âm. Khi chọn được cột A_j đi vào cơ sở, ta giải hệ phương trình tuyến tính $Bu = A_j$ để tìm véctơ $u = B^{-1}A_j$. Từ đây, ta có thể xây dựng được hướng mà dọc theo hướng này chúng ta có thể di chuyển khỏi nghiệm cơ sở chấp nhận được hiện tại. Cuối cùng chúng ta có thể tìm được θ^* và biến rời khỏi cơ sở và từ đó xây dựng nghiệm cơ sở chấp nhận được mới.

Việc tổ chức tính toán sơ khai đòi hỏi phải giải rất nhiều hệ phương trình tuyến tính nên nhìn chung là không hữu hiệu. Tổ chức tính toán sơ khai chỉ hữu hiệu với một số bài toán có cấu trúc đặc biệt mà ở đócác hệ phương trình $p'B = c'_B$ và $Bu = A_j$ được giải nhanh.

Phương pháp đơn hình cải biên

Gánh nặng tính toán đối với tổ chức tính toán sơ khai là do việc giải hai hệ phương trình tuyến tính trong mỗi bước lặp. Chúng ta sẽ đề xuất một tổ chức tính toán kiểu khác để có thể khắc phục việc này. Trong tổ chức tính toán tiếp theo, ma trận B^{-1} được cho trước ở bước khởi đầu mỗi bước lặp và các véctơ $c'_B B^{-1}$ và $B^{-1}A_j$ lúc này được tính bằng cách thực hiện phép nhân ma trận. Tiếp theo chúng ta sẽ nghĩ cách để cập nhật ma trận B^{-1} tại mỗi thời điểm chúng ta thay đổi cơ sở. Đặt

$$B = \left[A_{B(1)} \ldots A_{B(m)}\right]$$

là ma trận cơ sở tại bước lặp ban đầu và đặt

$$\overline{B} = \left[A_{B(1)} \ldots A_{B(\ell-1)} A_j A_{B(\ell+1)} \ldots A_{B(m)}\right]$$

là ma trận cơ sở của bước lặp tiếp theo. Hai ma trận cơ sở này có cùng số cột ngoại trừ cột thứ ℓ là $A_{B(\ell)}$ (cột rời khỏi cơ sở) được thay thế bởi cột A_j (cột vào cơ sở). Quan sát này cho chúng ta hi vọng ma trận B^{-1} chứa các thông tin có thể sử dụng trong việc tính toán $\overline{B}^{-1}$. Chúng ta cần xây dựng một số công cụ và các thuật ngữ bổ trợ để làm việc này.

Định nghĩa 3.1.1 Cho trước một ma trận (không nhất thiết vuông), phép biến đổi trên ma trận bằng cách lấy một dòng nhân với một hằng số rồi cộng vào chính nó hoặc một dòng khác được gọi là **biến đổi sơ cấp trên dòng**.

Ví dụ sau chỉ ra rằng việc thực hiện một biến đổi sơ cấp trên dòng của một ma trận C tương đương với việc tạo thành ma trận tích QC ở đó Q là ma trận vuông có cấp phù hợp.

Ví dụ 3.1.1 Cho các ma trận

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

và chú ý rằng

$$QC = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Đặc biệt, phép nhân bên trái bởi ma trận Q tác động lên ma trận C bằng cách nhân dòng thứ ba của C bởi 2 và cộng vào dòng thứ nhất.

Tổng quát Ví dụ 3.1.1 chúng ta thấy rằng việc nhân dòng thứ j bởi số β và cộng vào dòng thứ i (với $i \neq j$) đồng nghĩa với việc nhân bên trái bởi ma trận $Q = I + D_{ij}$, với D_{ij} là ma trận với tất cả phần từ đều bằng 0 ngoại trừ phần tử (i, j) là bằng β. Định thức của ma trận là bằng 1, do đó khả nghịch.

Bây giờ chúng ta thực hiện một dãy gồm K biến đổi sơ cấp trên dòng và ứng với phép biến đổi thứ k là phép nhân bên trái với ma trận khả nghịch Q_k. Khi đó, thực hiện một dãy các biến đổi sơ cấp trên dòng này chính là thực hiện phép nhân bên trái các ma trận khả nghich $Q_K Q_{K-1} \dots Q_2 Q_1$. Lập luận trên chứng tỏ rằng việc thực hiện một dãy các biến đổi sơ cấp trên một ma trận cho trước tương đương với việc nhân bên trái ma trận đó với một ma trận khả nghịch.

Do $B^{-1}B = I$ nên $B^{-1}A_{B(i)}$ là véctơ đơn vị e_i. Sử dụng quan sát này ta có

$$\begin{aligned} B^{-1}\overline{B} &= \begin{bmatrix} | & & | & | & | & & | \\ e_1 & \cdots & e_{\ell-1} & u & e_{\ell+1} & \cdots & e_m \\ | & & | & | & | & & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & u_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & u_\ell & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & u_m & & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ở đó $u = B^{-1}A_j$. Chúng ta thực hiện một dãy các biến đổi sơ cấp trên dòng để biến đổi ma trận trên thành ma trận đơn vị. Đặc biệt, chúng ta xét một dãy các biến đổi sơ cấp trên dòng sau:

(a) Với mỗi $i \neq \ell$, ta lấy dòng thứ ℓ nhân với $-u_i/u_\ell$ rồi cộng vào dòng thứ i. (Chú ý rằng $u_\ell > 0$). Biến đổi này thay u_i bởi 0.

(b) Ta chia dòng thứ ℓ cho u_ℓ. Biến đổi này thay u_ℓ bởi 1.

Tóm lại, chúng ta cộng vào mỗi dòng của ma trận với tích của dòng thứ ℓ với một hằng số để biến cột thứ ℓ trong ma trận là u thành cột đơn vị e_ℓ. Thực hiện dãy các phép biến đổi sơ cấp trên dòng này tương đương với việc nhân vào bên trái ma trận $B^{-1}\overline{B}$ bởi một ma trận khả nghịch Q. Do kết quả là ma trận đơn vị nên $QB^{-1}\overline{B} = I$ hay $\overline{B}^{-1} = QB^{-1}$. Đẳng thức vừa có chứng tỏ nếu ta thực hiện cùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng mô tả phía trên đối với ma trận B^{-1} ta sẽ thu được $\overline{B}^{-1}$.

Ví dụ 3.1.1 Cho

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

và giả sử rằng $\ell = 3$. Mục tiêu của chúng ta là chuyển véctơ u thành véctơ đơn vị $e_3 = (0, 0, 1)$. Chúng ta nhân dòng thứ 3 với 2 và cộng nó vào dòng thứ nhất. Chúng ta nhân dòng thứ ba với -1 rồi cộng vào dòng thứ hai. Cuối cùng chúng ta chia dòng thứ ba cho 2. Ta thu được

$$\overline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -4 \\ -6 & 6 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Với cách cập nhập ma trận B^{-1} theo cách được mô tả trên ta thu được một tổ chức tính toán mới cho phương pháp đơn hình. Tổ chức tính toán mới này được gọi là **phương pháp đơn hình cải biên**. Ta tóm tắt phương pháp này trong bảng sau:

Bước lặp của thuật toán đơn hình cải biên

1. Trong một bước lặp, chúng ta khởi động với một cơ sở gồm các cột cơ sở $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$, một nghiệm cơ sở chấp nhận được x và ma trận nghịch đảo B^{-1} của ma trận cơ sở.

2. Tính véctơ dòng $p^T = c_B^T B^{-1}$ và sau đó tính các giá trị giảm $\bar{c}_j = c_j - p^T A_j$. Nếu toàn bộ giá trị giảm là không âm thì nghiệm cơ sở chấp nhận được đang xét là nghiệm của bài toán và thuật toán dừng; trường hợp ngược lại chọn j sao cho $\bar{c}_j < 0$.

3. Tính $u = B^{-1}A_j$. Nếu không có thành phần nào của u là dương thì bài toán vô nghiệm, thuật toán dừng.

4. Nếu u có thành phần dương thì đặt

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\dots,m: u_i > 0\}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}.$$

5. Gọi ℓ là chỉ số sao cho $\theta^* = x_{B(\ell)}/u_\ell$. Tạo cơ sở mới bằng cách thay cột $A_{B(\ell)}$ bởi cột A_j. Nếu y là nghiệm cơ sở chấp nhận được mới thì giá trị của các biến cơ sở mới là $y_j = \theta^*$ và $y_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta^* u_i, i \neq \ell$.

6. Tạo ma trận cấp $m \times (m+1)$ có dạng $[B^{-1}|u]$. Cộng vào mỗi dòng của ma trận bởi dòng thứ ℓ nhân với hằng số sao cho cột cuối cùng của ma trận là cột đơn vị e_ℓ. Ma trận thu được bởi m cột đầu tiên của quá trình tính trên chính là nghịch đảo của $\overline{B}^{-1}$.

Tổ chức tính toán trên bảng cho phương pháp đơn hình

Trong mục này chúng ta trình bày việc tổ chức tính toán trên bảng cho phương pháp đơn hình. Ở đây, thay vì lưu trữ và cập nhật ma trận B^{-1} ta sẽ lưu trữ và cập nhật ma trận cấp $m \times (n+1)$

$$B^{-1}[b|A]$$

với các cột $B^{-1}b$ và $B^{-1}A_1, \dots, B^{-1}A_n$. Ma trận này được gọi là **bảng đơn hình**. Cột $B^{-1}b$ gọi là cột thứ 0 và chứa các giá trị của biến cơ sở. Cột $B^{-1}A_i$ gọi là cột thứ i. Cột $B^{-1}A_j$ tương ứng với biến đi vào cơ sở và được gọi là **cột xoay**. Nếu biến cơ sở thứ ℓ rời khỏi cơ sở thì dòng thứ ℓ của bảng được gọi là **dòng xoay**. Phần tử nằm đồng thời trên dòng xoay và cột xoay được gọi là **phần tử xoay**. Chú ý rằng phần tử xoay là u_ℓ và luôn dương (ngược lại $u \leq 0$ và khi đó thuật toán dừng ở Bước 3).

Thông tin trên mỗi dòng của bảng có thể được hiểu như sau. Các ràng buộc đẳng thức ban đầu cho dưới dạng $b = Ax$. Cho trước một ma trận cơ sở B, các ràng buộc đẳng thức có thể viết lại tương đương dưới dạng

$$B^{-1}b = B^{-1}Ax,$$

và đây chính là thông tin được lưu trữ trên bảng. Nói cách khác, các dòng của bảng cho ta các hệ số của các ràng buộc đẳng thức $B^{-1}b = B^{-1}Ax$.

Tại cuối mỗi bước lặp, chúng ta cần phải cập nhật bảng $B^{-1}[b|A]$ và tính $\overline{B}^{-1}[b|A]$. Điều này được thực hiện bằng cách nhân bên trái bảng đơn hình với ma trận Q sao cho $QB^{-1}\overline{B}^{-1}$. Như đã biết, việc làm này chính là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để biến B^{-1} thành $\overline{B}^{-1}$, nghĩa là cộng vào mỗi dòng tích của xoay với một hằng số để biến các phần tử của cột xoay thành 0 trừ phần tử xoay thành 1.

Liên quan đến việc xác định cột rời khỏi cơ sở $A_{B(\ell)}$ và độ dài bước đi θ^*, Bước 4 và 5 trong mô tả của thuật toán đơn hình được thực hiện trên bảng như sau: $x_{B(i)}/u_i$ là tỉ số của của phần tử thứ i ở cột thứ 0 của bảng với phần tử thứ i của cột xoay trong bảng. Ta chỉ cần xét những i với $u_i > 0$. Tỉ số nhỏ nhất chính là θ^* và từ đó ta xác định được ℓ.

Để tiện lợi hơn trong tính toán, ta bổ sung thêm một dòng phía trên của bảng đơn hình, gọi là dòng thứ 0. Phần tử ở góc ngoài cùng bên trái của bảng (phần tử đầu tiên của dòng thứ 0) chứa giá trị $-\langle c_B, x_B\rangle$, đối của giá trị hàm mục tiêu tại nghiệm cơ sở chấp nhận được hiện tại. Phần còn lại của dòng thứ 0 chính là véctơ dòng gồm các giá trị giảm, nghĩa là véctơ $\bar{c} = c - \langle c_B, B^{-1}A\rangle$. Do đó, cấu trúc của bảng lúc này là:

$-c_B'B^{-1}b$	$c' - c_B'B^{-1}A$
$B^{-1}b$	$B^{-1}A$

hay chi tiết hơn

$-c_B'x_B$	$\bar{c}_1$	$\cdots$	$\bar{c}_n$
$x_{B(1)}$	$\vert$		$\vert$
$\vdots$	$B^{-1}A_1$	$\cdots$	$B^{-1}A_n$
$x_{B(m)}$	$\vert$		$\vert$

Một điều thú vị là quy tắc để cập nhật dòng thứ 0 trong bảng lại trùng với quy tắc đã được sử dụng cho các dòng còn lại trong bảng: cộng vào dòng thứ 0 tích của dòng xoay với một hằng số để cho giá trị giảm ứng với biến đi vào là bằng 0. Thật vậy, tại mỗi bước lặp, dòng thứ 0 luôn có dạng

$$[0|c'] - g'[b|A],$$

trong đó $g' = c_B'B^{-1}$. Do đó, dòng thứ 0 bằng với dòng $[0|c']$ cộng với tổ hợp tuyến tính với các dòng của ma trận $[b|A]$. Giả sử cột xoay là cột j và dòng xoay là dòng ℓ. Chú ý rằng dòng xoay có dạng $h'[b|A]$, trong đó h' là dòng thứ ℓ của ma trận B^{-1}. Do đó, nếu ta lấy dòng xoay nhân với hằng số rồi cộng vào dòng 0 thì dòng này sẽ có dạng $[0|c']$ cộng với tổ hợp tuyến tính các dòng của ma trận $[b|A]$ và vì vậy có dạng

$$[0|c'] - p'[b|A],$$

với véctơ p nào đó. Nhắc lại rằng quy tắc chúng ta sử dụng để phần tử nằm trên cột xoay và dòng 0 biến thành 0, nghĩa là

$$c_{\overline{B}(\ell)} - p'A_{\overline{B}(\ell)} = c_j - p'A_j = 0.$$

Bây giờ ta xét cột thứ $\overline{B}(i)$ với $i \neq \ell$. (Đây là cột tương ứng với biến cơ sở ban đầu mà không rời khỏi cơ sở.) Phần tử nằm ở dòng 0 và cột này là bằng 0 trước khi thay đổi cơ sở do nó là giá trị giảm của biến cơ sở. Do $B^{-1}A_{B(i)}$ là véctơ đơn vị thứ i và $i \neq \ell$ nên phần tử nằm trên dòng xoay và cột này là bằng 0. Vì vậy, lấy dòng xoay nhân với một hằng số rồi cộng vào dòng 0 thì không ảnh hưởng đến phần tử nằm trên dòng xoay và cột này, nghĩa là giá trị của phần tử đó cũng bằng 0. Lập luận này dẫn đến p là véctơ thỏa $c_{\overline{B}(i)} - p'A_{\overline{B}(i)} = 0$ với mỗi cột $A_{\overline{B}(i)}$ trong cơ sở mới. Điều này dẫn đến $c'_{\overline{B}} - p'\overline{B} = 0$ hay $p' = c'_{\overline{B}}\overline{B}^{-1}$. Do đó, dòng cập nhật thứ 0 của bảng chính là

$$[0|c'] - c'_{\overline{B}}\overline{B}^{-1}[b|A].$$

Chúng ta tóm tắt lại các bước tính toán trên bảng đơn hình như sau:

Một bước lặp với bảng đơn hình

1. Ta khởi tạo bước lặp với một cơ sở gồm các cột cơ sở $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$, nghiệm cơ sở chấp nhận được liên kết x nghịch đảo của ma trận cơ sở B^{-1}.

2. Kiểm tra các giá trị giảm nằm ở dòng 0 của bảng. Nếu toàn bộ giá trị này không âm thì nghiệm cơ sở chấp nhận được đang xét là nghiệm và thuật toán dừng. Ngược lại chọn chỉ số j sao cho $\bar{c}_j < 0$.

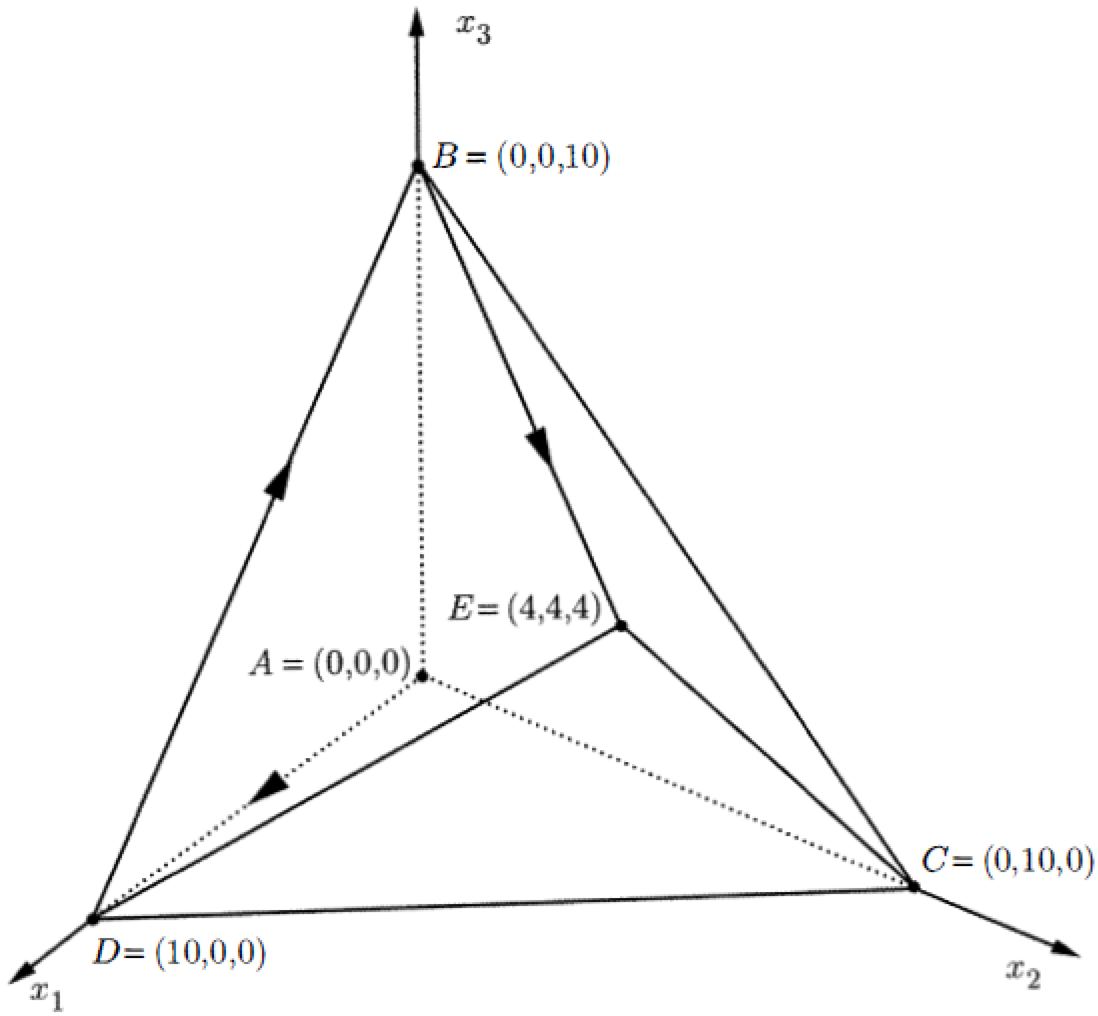
3. Xét véctơ $u = B^{-1}A_j$, cột thứ j (cột xoay) của bảng. Nếu u không có thành phần dương thì bài toán vô nghiệm và thuật toán dừng.

4. Với mỗi i mà $u_i > 0$ tính tỉ số $x_{B(i)}/u_i$. Gọi ℓ là chỉ số dòng tương ứng với tỉ số nhỏ nhất. Cột $A_{B(\ell)}$ rời khỏi cơ sở và cột A_j đi vào cơ sở.

5. Cộng vào mỗi dòng của bảng với dòng thứ ℓ (dòng xoay) đã nhân một hằng số sao cho u_ℓ (phần tử xoay) biến thành 1 và các phần tử khác trên cột xoay biến thành 0.

Ví dụ 3.1.2 Xét bài toán QHTT

$$\begin{cases} -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \to \min \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$



Bài toán dạng chính tắc tương ứng với bài toán trên cho bởi:

$$\begin{cases} -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \to \min \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Chú ý rằng $x = (0,0,0,20,20,20)$ nghiệm cơ sở chấp nhận được tương ứng với ma trận cơ sở $B = [A_4, A_5, A_6]$ là ma trận đơn vị cấp 3 và bộ chỉ số cơ sở $B(1) = 4, B(2) = 5$ và $B(3) = 6$. Hơn nữa, $c_B = 0$ nên giá trị hàm mục tiêu là $c'_B x_B = 0$ và giá trị giảm $\bar{c} = c = (10, -12, -12, 0, 0, 0)$. Do B là ma trận đơn vị nên

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}A = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các phân tích trên cho ta bảng đơn hình xuất phát:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	-10	-12	-12	0	0	0
$x_4 =$	20	1	2	2	1	0	0
$x_5 =$	20	**2**	1	2	0	1	0
$x_6 =$	20	2	2	1	0	0	1

Chúng ta giải thích một số kí hiệu trong bảng đơn hình phía trên. Các kí hiệu x_i trên đầu các cột thứ i chỉ các biến tương ứng với các cột. Kí hiệu $x_i =$ ở cột ngoài cùng bên trái bảng để chỉ các biến cơ sở theo thứ tự.

Trong bảng trên, giá trị giảm tương ứng biến x_1 là $-10 < 0$ nên ta chọn biến này vào cơ sở. Do đó cột xoay là $u = (1, 2, 2)$. Tính các tỉ số $x_{B(i)}/u_i, i = 1, 2, 3$; tỉ số nhỏ nhất tương ứng với $i = 2$ và $i = 3$. Ta chọn chỉ số $\ell = 2$. Từ đây ta có dòng xoay là $v = (2, 1, 2, 0, 1, 0)$ và chọn được phần tử xoay (giao của dòng xoay và trục xoay) là 2, số được tô đậm trong bảng. Biến cơ sở $x_{B(2)} = x_5$ sẽ rời khỏi cơ sở. Cơ sở mới lúc này là $\overline{B}(1) = 4, \overline{B}(2) = 1$, và $\overline{B}(3) = 6$. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng sau để thu được bảng đơn hình mới:

- Nhân dòng xoay với 5 rồi cộng vào dòng thứ 0.
- Nhân dòng xoay với $-1/2$ rồi cộng vào dòng thứ 1.
- Nhân dòng xoay với -1 rồi cộng vào dòng thứ 3.
- Chia dòng xoay cho 2.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	100	0	-7	-2	0	5	0
$x_4 =$	10	0	1.5	**1**	1	-0.5	0
$x_1 =$	10	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6 =$	0	0	1	-1	0	-1	1

Nghiệm cơ sở chấp nhận được lúc này là $x = (10, 0, 0, 10, 0, 0)$. Theo các biến ban đầu x_1, x_2, x_3 chúng ta đã di chuyển đến điểm $D = (10, 0, 0)$ trong hình bên trên. Chú ý rằng đây nghiệm cơ sở chấp nhận được suy biến do biến $x_6 = 0$. Điều này là phù hợp với trong hình vẽ tại D có 4 ràng buộc hoạt.

Chúng ta chú ý rằng các dòng trên bảng đơn hình (trừ dòng thứ 0) biểu diễn ràng buộc đẳng thức $B^{-1}Ax = B^{-1}b$, ràng buộc đẳng thức này tương đương với ràng buộc gốc là $Ax = b$. Với bảng đang xét ta có thể viết lại với ràng buộc đẳng thức như sau:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
10 & = & & & 1.5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 0.5x_5 & & \\
10 & = & x_1 & + & 0.5x_2 & + & x_3 & & & + & 0.5x_5 & & \\
0 & = & & & x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & + & x_6.
\end{array}$$

Với bảng đơn hình hiện tại, các giá trị giảm của biến x_2 và x_3 là âm. Ta chọn x_3 là biến đi vào cơ sở. Do đó cột cơ sở là $u = (1, 1, -1)$. Do $u_3 < 0$ ta chỉ tính các tỉ số $x_{B(i)}/u_i, i = 1, 2$.Ta chọn chỉ số $\ell = 1$ và do đó biến cơ sở thứ nhất là x_4 rời khỏi cơ sở. Từ đây ta có dòng xoay là $v = (0, 1.5, 1, 1, -0.5, 0)$và phần tử xoay là 1, được tô đậm trong bảng. Tiếp tục thực hiện biến đổi sơ cấp ta thu được bảng đơn hình tiếp theo:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	120	0	-4	0	2	4	0
$x_3 =$	10	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1 =$	0	1	-1	0	-1	1	0.4
$x_6 =$	10	0	**2.5**	0	1	-1.5	1

Nghiệm cơ sở chấp nhận được lúc này là $x = (0, 0, 10, 0, 0, 10)$. Tương ứng với hình vẽ ta đã di chuyển đến điểm $B = (0, 0, 10)$ và giá trị giảm của hàm mục tiêu là -120. Tại nghiệm cơ sở chấp nhận được lúc này, giá trị giảm ứng với biến x_2 là âm nên x_2 là biến vào cơ sở. Lập luận tương tự trên biến x_6 rời khỏi cơ sở. Bảng đơn hình kế tiếp là

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	136	0	0	0	3.6	1.6	1.6
$x_3 =$	4	0	0	1	0.4	0.4	-0.6
$x_1 =$	4	1	0	0	-0.6	0.4	0.4
$x_2 =$	4	0	1	0	0.4	-0.6	0.4

Do các giá trị giảm là không âm nên nghiệm cơ sở chấp nhận được lúc này $x = (4, 4, 4, 0, 0, 0)$ là nghiệm bài toán QHTT dạng chính tắc. Tương ứng trong hình vẽ ta đã di chuyển đến điểm $E = (4, 4, 4)$. Nghiệm của bài toán QHTT ban đầu là $(4, 4, 4)$.

Ví dụ tiếp theo chỉ rằng khi áp dụng thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT ta có thể gặp tình huống xoay vòng.

Ví dụ 3.1.3 Xét bài toán QHTT được mô tả ở bảng xuất phát sau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
$x_5 =$	0	**1/4**	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 =$	0	1/2	-12	$-1/2$	3	0	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

Chúng ta sử dụng quy tắc sau để thực hiện thủ tục xoay:

(a) Ta chọn biến x_j có giá trị giảm tương ứng $\bar{c}_j$ âm nhất để đi vào cơ sở.

(b) Ta chọn biến đi vào cơ sở là biến có chỉ số nhỏ nhất.

Ta thực hiện thuật toán đơn hình với các quy tắc trên ta sẽ thu được một dãy các bảng đơn hình phía dưới:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	0	-4	$-7/2$	33	3	0	0
$x_1 =$	0	1	-32	-4	36	4	0	0
$x_6 =$	0	0	**4**	$3/2$	-15	-2	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	0	0	-2	18	1	1	0
$x_1 =$	0	1	0	**8**	-84	-12	8	0
$x_2 =$	0	0	1	$3/8$	$-15/4$	$-1/2$	$1/4$	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$1/4$	0	0	-3	-2	3	0
$x_3 =$	0	$1/8$	0	1	$-21/2$	$-3/2$	1	0
$x_2 =$	0	$-3/64$	1	0	**3/16**	$1/16$	$-1/8$	0
$x_7 =$	1	$-1/8$	0	0	$21/2$	$3/2$	-1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$-1/2$	16	0	0	-1	1	0
$x_3 =$	0	$-5/2$	56	1	0	**2**	-6	0
$x_4 =$	0	$-1/4$	$16/3$	0	1	$1/3$	$-2/3$	0
$x_7 =$	1	$5/2$	-56	0	0	-2	6	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$-7/4$	44	$1/2$	0	0	-2	0
$x_5 =$	0	$-5/4$	28	$1/2$	0	1	-3	0
$x_4 =$	0	$1/6$	-4	$-1/6$	1	0	**1/3**	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
$x_5 =$	0	$\mathbf{1/4}$	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 =$	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

Sau 6 bước lặp (bước xoay) ta có lại cơ sở ban đầu và bảng đơn hình xuất phát. Với mỗi lần cơ sở ta có $\theta^* = 0$. Đặc biệt, với mỗi bảng đơn hình ta có cùng nghiệm cơ sở chấp nhận được và giá trị hàm mục tiêu. Vòng lặp giống nhau sẽ được thực hiện mãi mãi và do đó thuật toán đơn hình không dừng.