Bài giảng

Bài giảng đang được chỉnh sửa

Quy hoạch tuyến tính

Nguyễn Đức Phương

TP. HCM, Ngày 4 tháng 1 năm 2016

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	Tập số thực
$\mathbf{A}$	Ma trận hệ số vế phải của các ràng buộc
$\mathbf{b}$	Vector hệ số vế phải
$\mathbf{c}$	Vector hệ số hàm mục tiêu
$\mathbf{x}$	Phương án chấp nhận được
$\bar{\mathbf{x}}$	Phương án tối ưu
$\mathbf{x}^T$	Phép chuyển vị
$\lvert\mathbf{A}\rvert$	Định thức ma trận $\mathbf{A}$
$[\mathbf{x}]_T$	Tọa độ của vector theo $\mathbf{x}$ theo cơ sở T
$\mathbf{A}_j$	Cột j của ma trận hệ số $\mathbf{A}$
$\mathbf{e}_j$	Vector đơn vị thứ j
Δ_j	Là ước lượng của vector cột $\mathbf{A}_j$
$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle$	Tích vô hướng của $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$
$B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\}$	Hệ vector liên kết
$\mathbf{c}^B = \{c_{k_1}; \ldots; c_{k_m}\}$	Hệ số hàm mục tiêu có chỉ số $k_1, \ldots, k_m$
$\mathbf{B}$	Ma trận có các cột là các vector của B
$\mathbf{A}_j^B$	Biểu diễn cột $\mathbf{A}_j$ theo cơ sở B

Mục lục

Chương 1

Giới thiệu quy hoạch tuyến tính

Mục lục chương 1

1.1 Một số ví dụ dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính

Ví dụ 1.1 (Bài toán lập kế hoạch sản xuất)**.** Một trại cưa cưa các khúc gỗ thành các tấm ván. Có hai loại ván: ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng. Giả sử, đối với:

- Ván thành phẩm cần 2 giờ để cưa và 5 giờ để bào 10m ván.
- Ván dùng trong xây dưng cần 3 giờ để cưa và 3 giờ để bào 10m ván.

Máy cưa làm việc tối đa 8 giờ trong ngày, và máy bào làm việc tối đa 15 giờ trong ngày. Nếu lợi nhuận của 10m ván thành phẩm là 120 (ngàn đồng), và lợi nhuận của 10m ván xây dựng là 100 (ngàn đồng). Trong ngày, trại cưa phải cưa bao nhiêu ván mỗi loại để lợi nhuận lớn nhất?

Giải. Gọi $x_1, x_2 \geq 0$ là lượng ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng.

Loại / Thời gian	Thành phẩm - x_1	Xây dựng - x_2	
Cưa	2	3	≤ 8
Bào	5	3	≤ 15
Lợi nhuận	120	100	

Tổng lợi nhuận

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

khi đó x_1, x_2 thỏa điều kiện thời gian làm việc máy cưa

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8$$

và điều kiện về thời gian làm việc máy bào

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

Tóm lại cần tìm x_1, x_2 sao cho

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 8 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Ví dụ 1.2 (Bài toán khẩu phần ăn)**.** Chuyên gia dinh dưỡng định thành lập một thực đơn gồm 2 loại thực phẩm chính A và B. Cứ một (trăm gram):

- Thực phẩm A chứa 2 đơn vị chất béo, 1 đơn vị carbohydrate và 4 đơn vị protein.
- Thực phẩm B chứa 3 đơn vị chất béo, 3 đơn vị carbohydrate và 3 đơn vị protein.

Nếu một (trăm gram) thực phẩm A giá 20 (ngàn đồng) và một (trăm gram) thực phẩm B giá 25 (ngàn đồng). Nhà dinh dưỡng muốn thức ăn phải cung cấp ít nhất 18 đơn vị chất béo, 12 đơn vị carbohydrate và 24 đơn vị protein. Bao nhiêu (trăm gram) thực phẩm mỗi loại để có giá nhỏ nhất nhưng vẫn cung cấp đủ dinh dưỡng?

Giải. Gọi x_1, x_2 lần lượt là lượng thực phẩm A và B.

Loại / Thành phần	TP* A - x_1	TP B - x_2	
Chất béo	2	3	≥ 18
Carbohydrate	1	3	≥ 12
Protein	4	3	≥ 24
Giá mua	20	25	

tổng số tiền mua x_1, x_2 thực phẩm A và B là

$$z = 20x_1 + 25x_2 \to \min$$

Yêu cầu lượng thực phẩm phải đảm bảo nhu cầu chất béo

$$2x_1 + 3x_2 \geq 18$$

nhu cầu Carbohydrate

$$x_1 + 3x_2 \geq 12$$

nhu cầu Protein

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

Vậy ta cần tìm x_1, x_2 sao cho

$$z = 20x_1 + 25x_2 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 24 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Ví dụ 1.3 (Bài toán vận tải)**.** Một nhà sản xuất có 2 nhà máy: Một nhà máy ở Vĩnh Phúc và một nhà máy ở Bình Dương. Có 3 kho hàng phân phối sản phẩm đặt ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ. Nhà máy ở Vĩnh

*TP: Thực phẩm

phúc; Bình Dương, có khả năng cung cấp tối đa 100; 140 tấn mỗi tuần. Lượng cầu của các kho ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ lần lượt từ 100; 60 và 80 tấn trở lên. Chi phí vận chuyển (trăm ngàn) mỗi tấn cho như bảng bên dưới. Hỏi cần vận chuyển bao nhiêu tấn hàng hóa từ nhà sản xuất đến các kho hàng ở Hà Nội, TP. HCM và ở cần thơ để chi phí nhỏ nhất nhưng vẫn đáp ứng đủ nhu cầu?

Trạm thu / Trạm phát	Hà Nội W_1:100	TP. HCM W_2:60	Cần Thơ W_3:80
Vĩnh Phúc-Q_1: 100	5	7	9
Bình Dương-Q_2:140	8	7	10

Giải. Gọi x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ trạm phát thứ $i; i = 1, 2$ đến trạm thu thứ $j; j = 1, 2, 3$. Tổng chi phí vận chuyển

$$z = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{23} \to \min$$

Trạm phát thì phát hết hàng và trạm thu thì nhận đủ hàng:

Trạm phát 1 phát hết hàng	$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$
Trạm phát 2 phát hết hàng	$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 140$
Trạm thu 1 thu đủ hàng	$x_{11} + x_{21} = 100$
Trạm thu 2 thu đủ hàng	$x_{12} + x_{22} = 60$
Trạm thu 3 thu đủ hàng	$x_{13} + x_{23} = 80$

Vậy ta cần tìm x_{ij} sao cho

$$z = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{23} \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 140 \\ x_{11} + x_{21} = 100 \\ x_{12} + x_{22} = 60 \\ x_{13} + x_{23} = 80 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

1.2 Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính

1.2.1 Dạng tổng quát

Từ các ví dụ mục 1.1, bài toán quy hoạch tuyến tính dạng *tổng quát* được phát biểu như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \text{ (hay min)} \tag{1.1}$$

Với các ràng buộc

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq (\geq)(=) & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq (\geq)(=) & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq (\geq)(=) & b_m \end{array}\right. \tag{1.2}$$

- Hàm tuyến tính (1.1) gọi là hàm mục tiêu.

- Hệ bất phương trình, bất phương trình tuyến tính (1.2) gọi là các ràng buộc. Vế trái của các ràng buộc là các hàm tuyến tính với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biến số.

1.2.2 Dạng chuẩn

Ta nói bài toán quy hoạch tuyến tính có *dạng chuẩn* nếu nó có dạng như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max, \text{(hay min)} \tag{1.3}$$

Với các ràng buộc

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}\right. \tag{1.4}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.5}$$

1.2.3 Dạng chính tắc

Ta nói bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng *chính tắc*† nếu nó có dạng như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max, \text{(hay min)} \tag{1.6}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1.7}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.8}$$

Ví dụ 1.4. Nhận dạng các bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

a. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Có dạng chuẩn.

b. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & -8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Có dạng tổng quát‡.

c. $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & \leq & 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Có dạng tổng quát.

† Một số sách có định nghĩa khác về dạng chuẩn và dạng chính tắc. Các bạn cần đọc kỹ định nghĩa khi tham khảo các tài liệu khác.

‡ Có thể dễ dàng chuyển sang dạng chính tắc bằng cách nhân hai vế ràng buộc thứ 3 với -1

d. $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

Có dạng chính tắc.

e. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$

Có dạng tổng quát.

f. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Có dạng tổng quát

Chú ý. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu có thể viết thành bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu và ngược lại bằng quan hệ:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min \left(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right) \tag{1.9}$$

tương đương

$$\max z = -\min(-z) \tag{1.10}$$

Do đó, không mất tính tổng quát trong phần lý thuyết ta chỉ phát biểu bài toán tìm giá trị lớn nhất hàm mục tiêu ($\max z$). Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất hàm mục tiêu ($\min z$) thì có thể sử dụng (1.10) để chuyển sang bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu .

Ví dụ 1.5. Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính tìm max hàm mục tiêu thành tìm min hàm mục tiêu hay ngược lại

a. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & -8 \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

b. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Giải.

a. Bài toán trong câu a tương đương với

$$-z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & -8 \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

b. Bài toán trong câu b tương đương với

$$-z = -3x_1 - 2x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

1.3 Chuyển bài toán quy hoạch sang dạng chính tắc

1.3.1 Đổi chiều bất đẳng thức của các ràng buộc

Nếu ta nhân hai vế của bất phương trình

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n \geq b$$

với -1 ta được bất phương trình

$$-k_1x_1 - k_2x_2 - \cdots - k_nx_n \leq -b$$

Ví dụ 1.6. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Giải. Ta nhân ràng buộc thứ ba

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8$$

với -1, ta có bài toán quy hoạch dạng chuẩn tương đương:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 13x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

1.3.2 Biến không ràng buộc

Ta biết, một số bất kỳ chính là hiệu của hai số không âm. Giả sử x_j không có ràng buộc không âm, ta có thể thay x_j bằng hai biến $x_j^+ \geq 0$ và $x_j^- \geq 0$ sao cho

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

Với cách này, ta có thể chuyển bài toán không có ràng buộc không âm thành bài toán có ràng buộc không âm.[§]

Ví dụ 1.7. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

[§] Ở đây dấu $+, -$ trong x_j^+, x_j^- không thể hiện số lớn, số bé mà chỉ là x_j^+ là số trừ và x_j^- là số bị trừ.

Giải. Biến x_2 không có ràng buộc không âm. Đặt $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $(x_2^+, x_2^- \geq 0)$ bài toán quy hoạch trở thành:

$$z = 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$$

1.3.3 Chuyển dạng chuẩn sang dạng chính tắc

Xét ràng buộc thứ i trong bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \tag{1.11}$$

Ta có thể chuyển ràng buộc (1.11) dạng bất phương trình thành phương trình bằng cách thêm vào *biến phụ* $x_{n+i} \geq 0$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \tag{1.12}$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn chuyển thành dạng chính tắc có dạng như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

Ví dụ 1.8. Chuyển bài toán sau sang dạng chính tắc

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Ta thêm hai biến phụ $x_3 \geq 0$ và $x_4 \geq 0$ vào ràng buộc thứ nhất và thứ hai thì được bài toán quy hoạch dạng chính tắc như sau:

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Ví dụ 1.9. Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chính tắc

a. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Ta thêm vào hai ẩn phụ x_3 và x_4. Bài toán có dạng chính tắc

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

b. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Giải. Cộng hai ẩn phụ x_4, x_5 vào ràng buộc 1 và 2, riêng ràng buộc thứ 3 trừ ẩn phụ x_6. Bài toán có dạng chính tắc

$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = -8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$

c. $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Giải. Thêm ẩn phụ x_5 vào ràng buộc thứ 3

$z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$

d. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$

Giải. Biến x_2 không có ràng buộc không âm. Thay $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ bài toán quy hoạch trở thành:

$z = 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- \leq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$

Thêm hai ẩn phụ x_3, x_4

$$z = 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

e. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Giải. Biến x_2 không có ràng buộc không âm. Thay $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ bài toán tương đương với

$$z = 2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2^+ - x_2^- = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$$

1.4 Dạng ma trận của bài toán quy hoạch

Xét bài toán quy hoạch dạng chuẩn:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Đặt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Ta có thể viết bài toán quy hoạch trên thành dạng ma trận:

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

Ví dụ 1.10. Viết bài toán quy hoạch tuyến tính sau dưới dạng ma trận.

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Giải. Đặt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bài toán bây giờ là tìm $\mathbf{x}$ sao cho

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

1.5 Phương án chấp nhận được

Định nghĩa 1.1 (Phương án chấp nhận được)**.** *Vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *thỏa tất cả các ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính được gọi là phương án chấp nhận được.*

Ví dụ 1.11. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

và các phương án:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Phương án nào là phương án chấp nhận được?

Giải. Ràng buộc được viết lại

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Ta xét lần lượt các phương án $\mathbf{x}_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4$.

- Với phương án $\mathbf{x}_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

  Vậy $\mathbf{x}_1$ là phương án chấp nhận được.

- Với phương án $\mathbf{x}_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

  Vậy $\mathbf{x}_2$ là phương án chấp nhận được.

- Với phương án $\mathbf{x}_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

  Vậy $\mathbf{x}_3$ không là phương án chấp nhận được.

- Với phương án $\mathbf{x}_4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

  Vậy $\mathbf{x}_4$ không là phương án chấp nhận được.

Định nghĩa 1.2 (Phương án tối ưu)**.** *Phương án chấp nhận được làm cho hàm mục tiêu có giá trị lớn nhất (nếu là bài toán* max*) hay nhỏ nhất (nếu là bài toán* min*) thì được gọi là phương án tối ưu.*

1.6 Ý nghĩa hình học của bài toán quy hoạch tuyến tính

Trong phần này ta xét đến phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng hình học. Phương pháp hình học chỉ giải những bài toán quy hoạch tuyến tính hai hoặc ba biến. Tuy nhiên, ý nghĩa của phương pháp này cho ta ý tưởng để xây dựng thuật toán có thể giải được bài toán nhiều biến hơn sẽ được trình bày trong chương 2.

1.6.1 Phương pháp đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Ví dụ 1.12. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4x + 3y \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x + 3y \leq 15 \end{cases}$$

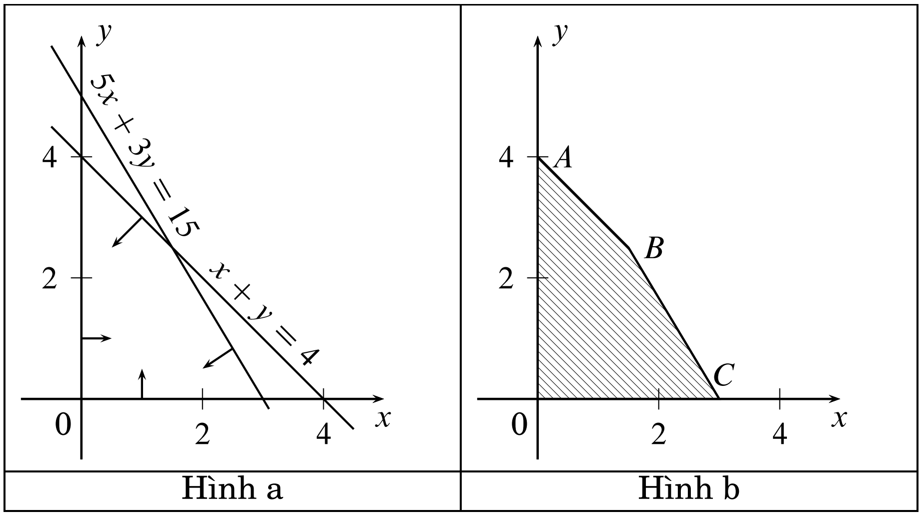
$$x \geq 0, y \geq 0$$

Giải. Tập các phương án chấp nhận được như hình 1.1b. Hàm mục tiêu được viết lại

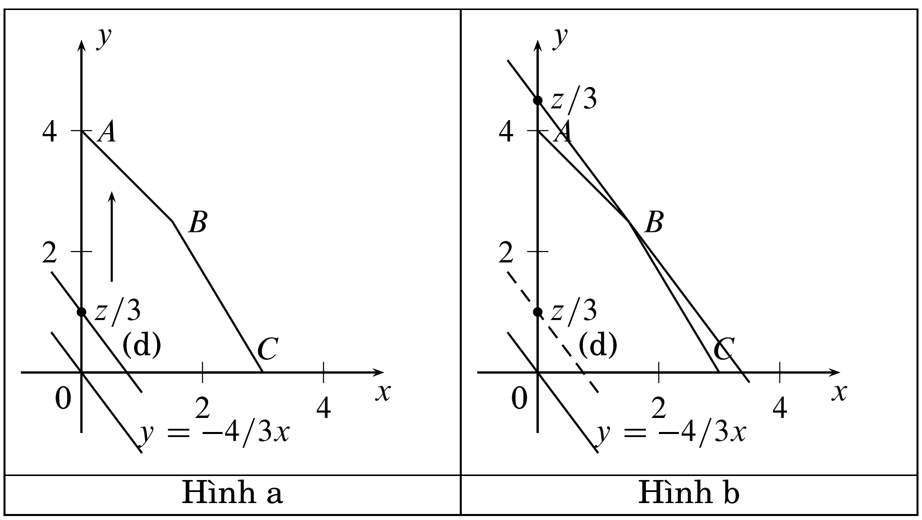
$$y = -4/3x + z/3 \quad \text{(d)}$$

trong đó (d) là một đường thẳng **song song** với $y = -4/3x$ và cắt **trục tung** tại $z/3$.

Ta nhận thấy $z \to \max$ khi và chỉ khi $z/3 \to \max$. Như hình 1.2a, để tăng giá trị $z/3$ ta tịnh tiến đường (d) theo phương của đường thẳng $y = -4/3x$ sao cho đường (d) vẫn cắt tập chấp nhận được OABC.



Hình 1.1: Tập phương án chấp nhận được ví dụ 1.12



Hình 1.2: Biểu diễn hàm mục tiêu ví dụ 1.12

$z/3 \to$ max khi và chỉ khi (d) đi qua B(3/2;5/2). Vậy phương án tối ưu $x = 3/2$, $y = 5/2$ và giá trị hàm mục tiêu là $z = 27/2$.

Ví dụ 1.13. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

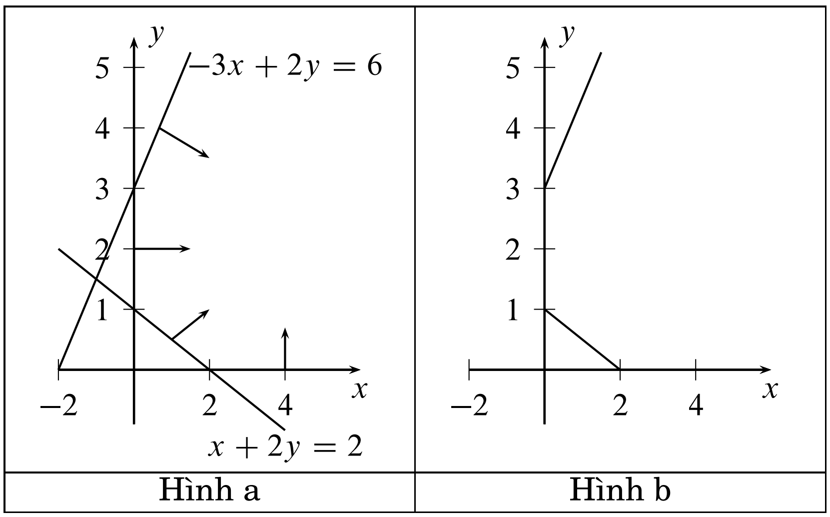
$$z = 2x + 5y \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -3x + 2y \leq 6 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Giải. Tập các phương án chấp nhận được như hình 1.3b. Tập các phương



Hình 1.3: Tập các phương án chấp nhận được ví dụ 1.13

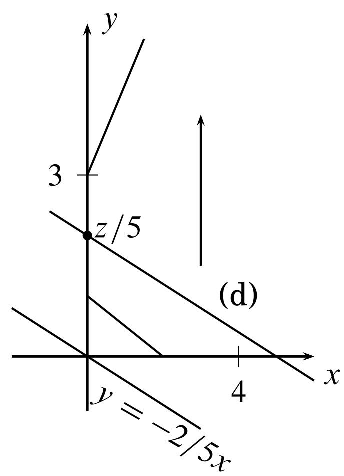
án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính này là tập không bị chặn. Hàm mục tiêu được viết lại

$$y = -2/5x + z/5 \quad \text{(d)}$$

Đồ thị của (d) là đường thẳng song song với đường

$$y = -2/5x$$

và cắt trục tung tại $z/5$.
Ta nhận thấy $z \to \max$ khi và chỉ khi $z/5 \to \max$. Như hình 1.2, để tăng giá trị $z/3$ ta tịnh tiến đường (d) theo phương của đường thẳng $y = -2/5x$ sao cho đường (d) vẫn còn cắt tập chấp nhận được.
$z/5 \to +\infty$ khi ta tịnh tiến (d) hướng lên theo phương của $y = -2/5x$. Vậy bài toán không có phương án tối ưu



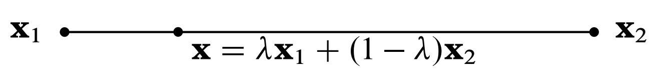
Hình 1.4: Biểu diễn hàm mục tiêu ví dụ 1.13

1.6.2 Tính chất của tập phương án chấp nhận được

Định nghĩa 1.3 (Đoạn thẳng)**.** *Đoạn thẳng nối hai điểm* $\mathbf{x}_1$ *và* $\mathbf{x}_2$ *được định nghĩa*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \quad 0 \le \lambda \le 1\} \tag{1.13}$$

Theo đó, nếu $\lambda = 0$ ta có $\mathbf{x}_2$, và nếu $\lambda = 1$ ta có $\mathbf{x}_1$. Những điểm thuộc đoạn thẳng với $0 < \lambda < 1$ được gọi là các **điểm trong** của đoạn thẳng, và $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ được gọi là **điểm biên** của đoạn thẳng.



Hình 1.5: $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ là hai điểm biên, $\mathbf{x}$ là điểm trong

Định lý 1.4. *Cho* $\mathbf{x}_1$ *và* $\mathbf{x}_2$ *là hai phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính, và* $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, 0 \le \lambda \le 1$ *là điểm thuộc đoạn nối hai điểm* $\mathbf{x}_1$ *và* $\mathbf{x}_2$*. Khi đó:*

i. $\mathbf{x}$ *cũng là phương án chấp nhận được.*

ii. Nếu $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2$ *thì* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2$.

iii. Nếu $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 < \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2$ *thì* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} < \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2$.

Chứng minh. Giả sử bài toán quy hoạch tuyến tính có ràng buộc $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}$. Vì $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ là hai phương án chấp nhận được cho nên $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 \le \mathbf{b}$ và $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_2 \le \mathbf{b}$.

i. Với $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, 0 < \lambda < 1$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$, ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^T\mathbf{x} &= \mathbf{a}^T\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right)\\ &= \lambda\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{a}^T\mathbf{x}_2\\ &\leq \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} < \mathbf{b}\end{aligned}$$

Do $\mathbf{x}$ thỏa ràng buộc cho nên $\mathbf{x}$ cũng là phương án chấp nhận được. Vậy các điểm thuộc đoạn nối hai phương án chấp nhận được cũng là các phương án chấp nhận được.

ii. Theo i), $\mathbf{x}$ là phương án chấp nhận được, giá trị hàm mục tiêu

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right)\\ &= \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2\\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1\end{aligned}$$

iii. Với $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, 0 < \lambda < 1$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$, ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right)\\ &= \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2\\ &< \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_2\end{aligned}$$

Từ định lý này, xét tập các phương án chấp nhận được là đoạn thẳng nối bởi hai điểm $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ thì một điểm biên có giá trị hàm mục tiêu lớn nhất và điểm biên còn lại có giá trị hàm mục tiêu nhỏ nhất. □

Ví dụ 1.14. Xem lại bài toán quy hoạch như ví dụ 1.12 trang 16.

$$z = 4x + 3y \to \max$$

Với các ràng buộc

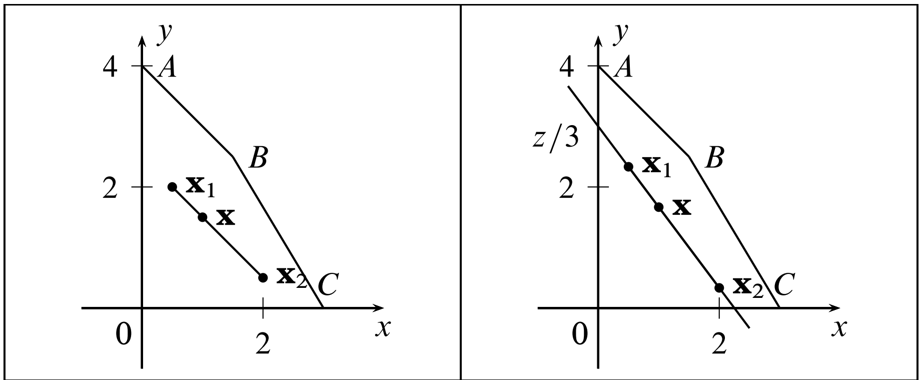
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x + 3y \leq 15 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

a. Ta thấy $\mathbf{x}_1^T = (1/2; 2), \mathbf{x}_2^T = (2; 1/2)$ là phương án chấp nhận được và điểm $\mathbf{x}$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Điểm $\mathbf{x}$ định bởi

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}_2, \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

cũng là phương án chấp nhận được, xem hình 1.6a.



Hình a | Hình b

Hình 1.6:

b. Cho hai phương án chấp nhận được $\mathbf{x}_1^T = (1/2; 7/3)$ và $\mathbf{x}_2^T = (2; 1/3)$ có cùng giá trị hàm mục tiêu là $(z/3 = 3)$, thì phương án $\mathbf{x}$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Điểm $\mathbf{x}$ định bởi

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}_2, \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

cũng cùng giá trị hàm mục tiêu là $(z/3 = 3)$, xem hình 1.6b. □

Định nghĩa 1.5 (Tập lồi)**.** *Tập $S \in \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu với hai điểm phân biệt bất kỳ $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ thuộc S thì đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ cũng nằm trong tập S.*

Ví dụ 1.15. Các tập con của $\mathbb{R}^2$ trong hình 1.7 là các tập lồi. Các tập con của $\mathbb{R}^2$ trong hình 1.8 không phải là tập lồi. □

Định lý 1.6. *Tập tất cả các phương án chấp nhận được $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là một tập lồi.*

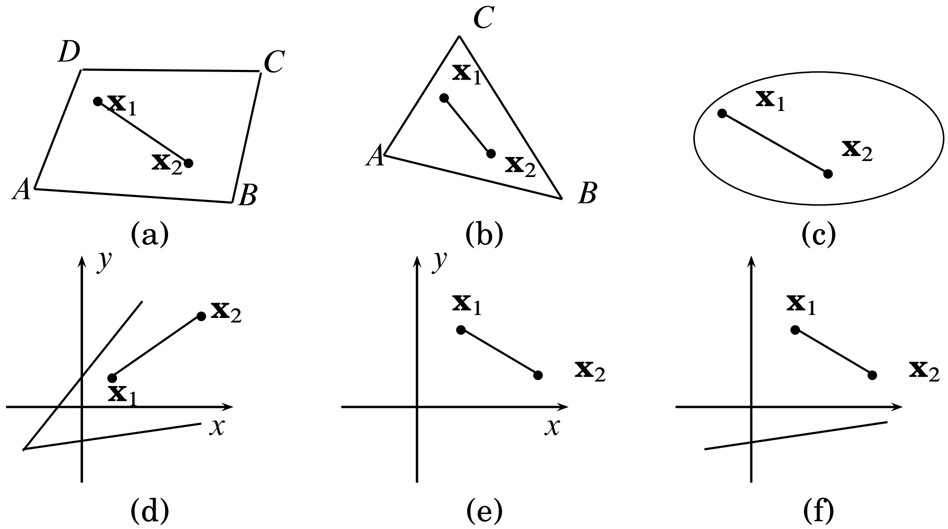
Chứng minh. Gọi $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in S$ là hai phương án chấp nhận được, theo định lý 1.4i thì

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$$

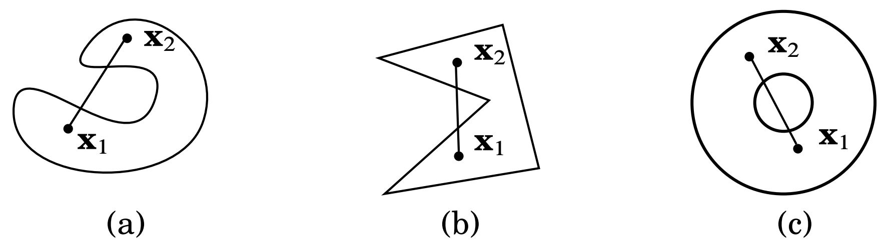
cũng là phương chấp nhận được, hay $\mathbf{x} \in S$. Vậy S là tập lồi. □

1.7 Phương án cực biên

Định nghĩa 1.7 (Tổ hợp lồi)**.** *Điểm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ là tổ hợp lồi của r điểm $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ trong $\mathbb{R}^n$ nếu tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = 1$ sao cho $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{x}_r$.*



Hình 1.7: Các tập lồi



Hình 1.8: Các tập không phải tập lồi

Định lý 1.8. *Tập chứa tất các tổ hợp lồi của hữu hạn các điểm trong* $\mathbb{R}^n$ *là một tập lồi.*

Chứng minh. Gọi S là tập chứa tất cả các tổ hợp lồi của r điểm $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ trong $\mathbb{R}^n$. Lấy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_r\mathbf{x}_r, \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0$$

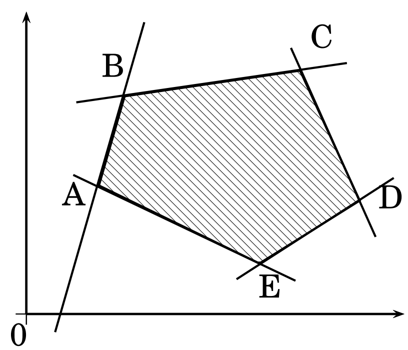
$$\mathbf{y} = \lambda_1^{'}\mathbf{x}_1 + \lambda_2^{'}\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_r^{'}\mathbf{x}_r, \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i^{'} = 1, \quad \lambda_i^{'} > 0$$

Điểm thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ có dạng

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\\ &= \Big((\lambda\lambda_1 + \lambda_1^{'} - \lambda\lambda_1^{'})\mathbf{x}_1 + (\lambda\lambda_2 + \lambda_2^{'} - \lambda\lambda_2^{'})\mathbf{x}_2 + \cdots + (\lambda\lambda_r + \lambda_r^{'} - \lambda\lambda_r^{'})\mathbf{x}_r\Big)\end{aligned}$$

Ta thấy $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda\lambda_i + \lambda_i^{'} - \lambda\lambda_i^{'} = 1, \quad \lambda\lambda_i + \lambda_i^{'} - \lambda\lambda_i^{'} > 0$, vậy $\mathbf{z} \in S$. Suy ra S là tập lồi. □

Định nghĩa 1.9 (Điểm cực biên của tập lồi). *Điểm $\mathbf{x}$ thuộc tập lồi S được gọi là điểm cực biên của S nếu $\mathbf{x}$ không là tổ hợp lồi của hai điểm của S khác $\mathbf{x}$.*



Hình 1.9:

Ví dụ 1.16. Tập lồi như hình 1.9, các đỉnh A, B, C, D và E của đa giác là điểm cực biên. □

Nhận xét. Từ định nghĩa điểm cực biên của tập lồi, ta thấy điểm $\mathbf{x} \in S$ là điểm cực biên nếu một đoạn thẳng bất kỳ trong S chứa $\mathbf{x}$ thì $\mathbf{x}$ là điểm biên.

Định nghĩa 1.10 (Phương án cực biên). *Điểm cực biên của tập các phương án chấp nhận được còn gọi là phương án cực biên.*

1.7.1 Thành lập phương án cơ bản chấp nhận

Trong phần này ta sẽ kết hợp ý tưởng của phương pháp hình học và phương án cực biên được trình bày trong phần 1.6 và 1.7 để giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng công cụ đại số.

Do phương án cực biên rất khó xác định bằng phương pháp hình học khi bài toán quy hoạch có từ ba biến trở lên. Cho nên trong phần này tôi sẽ trình bày phương pháp đại số để tìm phương án cực biên. Các khái niệm được trình bày trong phần này là **nghiệm cơ bản, phương án cơ bản chấp nhận được, phương án cực biên**. Để có thể định nghĩa phương án cơ bản, trước hết ta xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max \tag{1.14}$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1.15}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{1.16}$$

Trong đó $\mathbf{A}$ là ma trận cấp $m \times n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, và $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Đặt các cột của ma trận $\mathbf{A}$ là $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. Ràng buộc (1.15) được viết thành

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b} \tag{1.17}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử:

- Thứ nhất là $m \leq n$.
- Thứ hai là ma trận $\mathbf{A}$ có m dòng độc lập tuyến tính. Nghĩa là hạng của $\mathbf{A}$ là m, khi đó trong n cột của $\mathbf{A}$ sẽ có m cột độc lập tuyến tính.

Nghiệm cơ bản của $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Nghiệm cơ bản của $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ được xây dựng như sau:

(1) Chọn¶ tập B gồm m cột $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \ldots, \mathbf{A}_{k_m}$ độc lập tuyến tính của A (Chọn cơ sở cho $\mathbb{R}^m$).

(2) $n - m$ biến tương ứng với các cột còn lại cho bằng không.

(3) Phương trình $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ được viết lại

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b} \tag{1.18}$$

Trong đó $\mathbf{A}_i$ là cột thứ i của $\mathbf{A}$. Đặt $k_1, k_2, \ldots, k_m$ là chỉ số các biến không cho bằng bằng không. Hệ phương trình (1.18) được viết gọn

$$x_{k_1}\mathbf{A}_{k_1} + x_{k_2}\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + x_{k_m}\mathbf{A}_{k_m} = \mathbf{b} \tag{1.19}$$

hệ này có m phương trình, m ẩn có duy nhất một nghiệm.

¶Sẽ có nhiều nhất C_n^m tập B

(4) Nghiệm của hệ này kết hợp với $n - m$ thành phần ta cho bằng không ở trên được gọi là nghiệm cơ bản của $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Ví dụ 1.17. Cho hệ phương trình tuyến tính bốn ẩn như sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

Tìm tất cả nghiệm cơ bản của hệ phương trình.

Giải. Lần lượt xét các trường hợp:

Trường hợp 1. Chọn $B = \{A_1; A_2\}$ định thức

$$|A_1 \vdots A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Cho $x_3 = x_4 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_1 = 3/2; x_2 = 5/2$. Vậy $\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 2. Chọn $B = \{A_1; A_3\}$ định thức

$$|A_1 \vdots A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_2 = x_4 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 5x_1 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_1 = 3; x_3 = 1$. Vậy $\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 3. Chọn $B = \{A_1; A_4\}$ định thức

$$|A_1 \vdots A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_2 = x_3 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ 5x_1 + x_4 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_1 = 4; x_4 = -5$. Vậy $\mathbf{x}_3^T = (4; 0; 0; -5)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 4. Chọn $B = \{A_2; A_3\}$ định thức

$$|A_2 \vdots A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_1 = x_4 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_2 = 5; x_3 = -1$. Vậy $\mathbf{x}_4^T = (0; 5; -1; 0)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 5. Chọn $B = \{A_2; A_4\}$ định thức

$$|A_2 \vdots A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_1 = x_3 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_2 = 4; x_4 = 3$. Vậy $\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$ là một nghiệm cơ bản.

Trường hợp 6. Chọn $B = \{A_3; A_4\}$ định thức

$$|A_3 \vdots A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ (T độc lập tuyến tính)}$$

Cho $x_1 = x_2 = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 15 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x_3 = 4; x_4 = 15$. Vậy $\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$ là một nghiệm cơ bản.

Trong một nghiệm cơ bản bất kỳ, $n - m$ biến có giá trị cho bằng không được gọi là **biến không cơ bản**, và m biến giải được gọi là **biến cơ bản**.

Chú ý. Nghiệm cơ bản là nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nên nó không cần phải thỏa điều kiện $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, và do đó nghiệm cơ bản không nhất thiết phải là phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính. (1.14), (1.15) và (1.16).

Định nghĩa 1.11. *Cho $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch dạng chính tắc. Tập $B = \{\mathbf{A}_j : x_j > 0\}$ được gọi là hệ vector liên kết.*

Phương án cơ bản chấp nhận được

Định nghĩa 1.12 (Phương án cơ bản chấp nhận được)**.** *Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có tập các ràng buộc* $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$*, nghiệm cơ bản của* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *thỏa điều kiện* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *được là phương án cơ bản chấp nhận được.*

Ví dụ 1.18. Tìm tất cả các phương án cơ bản chấp nhận được của

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

Giải. Theo ví dụ 1.17, ta có nghệm cơ bản của $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ và phương án cơ bản chấp nhận được cho như bảng bên dưới:

Nghiệm cơ bản	Phương án cơ bản cnđ
$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$	$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$
$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$	$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$
$\mathbf{x}_3^T = (4; 0; 0; -5)$	
$\mathbf{x}_4^T = (0; 5; -1; 0)$	
$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$	$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$
$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$	$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$

1.7.2 Thành lập phương án cực biên

Định lý 1.13. *Giả sử m cột của* $\mathbf{A}$*, được ký hiệu* $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \dots, \mathbf{A}_{k_m}$ *là độc lập tuyến tính và*

$$x_{k_1}\mathbf{A}_{k_1} + x_{k_2}\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + x_{k_m}\mathbf{A}_{k_m} = \mathbf{b} \tag{1.20}$$

và $x_{k_j} \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, m$*. Khi đó phương án cơ bản chấp nhận được* $\mathbf{x}^T = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}, 0, 0, \dots, 0)$ *là phương án cực biên.*

Chứng minh. Dễ dàng ta có $\mathbf{x}$ là phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính (1.14), (1.15) và (1.16).
Giả sử $\mathbf{x}$ không là điểm cực biên của S. Khi đó $\mathbf{x}$ là điểm trong của một đoạn thuộc S. Nghĩa là có hai điểm phân biệt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ khác $\mathbf{x}$ và số $\lambda, 0 < \lambda < 1$ sao cho

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v} \tag{1.21}$$

Trong đó
$$\mathbf{u}^T = (u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_m}, u_{k_{m+1}}, \ldots, u_{k_n}) \geq \mathbf{0}$$
và
$$\mathbf{v}^T = (v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_m}, v_{k_{m+1}}, \ldots, v_{k_n}) \geq \mathbf{0}$$
Từ (1.21) ta có
$$\begin{aligned} 0 &= \lambda u_{k_j} + (1-\lambda) v_{k_j}, \quad m+1 \leq j \leq n \\ x_{k_j} &= \lambda u_{k_j} + (1-\lambda) v_{k_j}, \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned} \tag{1.22}$$
Bởi vì u_{k_j}, v_{k_j} và $\lambda, 1-\lambda$ là các số dương cho nên $u_{k_j} = 0$ và $v_{k_j} = 0$ với $i = m+1, \ldots, n$. $\mathbf{u}$ là phương án chấp nhận được nên
$$u_{k_1}\mathbf{A}_{k_1} + u_{k_2}\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + u_{k_n}\mathbf{A}_{k_n} = \mathbf{b} \tag{1.23}$$
Lấy (1.20) trừ cho (1.23) ta được
$$(x_{k_1} - u_{k_1})\mathbf{A}_{k_1} + (x_{k_2} - u_{k_2})\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + (x_{k_n} - u_{k_n})\mathbf{A}_{k_n} = \mathbf{b}$$
Bởi vì $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \ldots, \mathbf{A}_{k_m}$ độc lập tuyến tính nên
$$x_{k_j} = v_{k_j}, \quad \forall 1 \leq j \leq m$$
hay $\mathbf{x} = \mathbf{u}$, suy ra giả sử $\mathbf{x} \neq \mathbf{u}$ là sai. Vậy $\mathbf{x}$ là điểm cực biên của S. $\square$

Nhận xét. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (x_1; \ldots; x_n)$ là phương án cực biên:

- Kiểm $\mathbf{x}$ là phương án chấp nhận được.
- Đặt hệ vector liên kết $B = \{\mathbf{A}_j | x_j > 0\}$, trong đó $\mathbf{A}_j$ là các vector cột của $\mathbf{A}$.
- Nếu B độc lập tuyến tính thì $\mathbf{x}$ là phương án cực biên. $\square$

Ví dụ 1.19. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (1; 2; 3; 0)$ là phương án cực biên của

$$z = -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 \to \min$$
Với các ràng buộc
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 21 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Giải. $\mathbf{x}^T = (1; 2; 3; 0)$ là phương án chấp nhận được

- Vì $x_1, x_2, x_3 > 0$ nên ta xét $B = \{A_1; A_2; A_3\}$.
- Lập định thức
$$|A_1 \vdots A_2 \vdots A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$
nên $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên. □

Định nghĩa 1.14. *Phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc được gọi là* ***không suy biến*** *nếu số thành phần dương của nó là m. Nếu số thành phần dương ít hơn m thì gọi là phương án cực biên* ***suy biến***.

Định lý 1.15. *Nếu $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là phương án cực biên của tập các phương án $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ thì các cột của $\mathbf{A}$ tương ứng $x_j > 0$ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Gọi $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \ldots, \mathbf{A}_{k_l}$ là l cột của $\mathbf{A}$ ứng với $x_{k_l} > 0$. Phương trình (1.17), $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ được viết lại:

$$x_{k_1}\mathbf{A}_{k_1} + x_{k_2}\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + x_{k_l}\mathbf{A}_{k_l} = \mathbf{b} \tag{1.24}$$

Ta cần chứng minh rằng $\mathbf{A}_{k_1}, \mathbf{A}_{k_2}, \ldots, \mathbf{A}_{k_l}$ là độc lập tuyến tính. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử chúng không độc lập tuyến tính. Nghĩa là tồn tại $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \neq 0$ sao cho

$$c_1\mathbf{A}_{k_1} + c_2\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + c_k\mathbf{A}_{k_l} = \mathbf{0} \tag{1.25}$$

Nhân (1.25) với hằng số $d > 0$, đầu tiên ta cộng kết quả với (1.24) ta được phương trình (1.26), sau đó ta trừ kết quả với (1.24) ta được phương trình (1.27).

$$(x_{k_1} + dc_1)\mathbf{A}_{k_1} + (x_{k_2} + dc_2)\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + (x_{k_l} + dc_{k_l})\mathbf{A}_{k_l} = \mathbf{b} \tag{1.26}$$
$$(x_{k_1} - dc_1)\mathbf{A}_{k_1} + (x_{k_2} - dc_2)\mathbf{A}_{k_2} + \cdots + (x_{k_l} - dc_{k_l})\mathbf{A}_{k_l} = \mathbf{b} \tag{1.27}$$

Bây giờ ta chọn hai điểm trong $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{v}^T = (0, 0, \ldots, 0, x_{k_1} + dc_1, x_{k_2} + dc_2, \ldots, x_{k_l} + dc_k)$$

và

$$\mathbf{w}^T = (0, 0, \ldots, 0, x_{k_1} - dc_1, x_{k_2} - dc_2, \ldots, x_{k_l} - dc_k)$$

Bởi vì d là hằng số dương bất kỳ, ta chọn như sau:

$$0 < d < \min_j \frac{x_{k_j}}{|c_j|}, \quad c_j \neq 0$$

Với cách chọn d như trên, ta thấy k thành phần sau của $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ là các số dương. Mặc khác, từ (1.26) và (1.27) ta cũng có $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ là phương án chấp nhận được. Nhưng ta lại có

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w},$$

trái với giả thiết ban đầu $\mathbf{x}$ là điểm cực biên. Vậy giả sử k cột cuối của $\mathbf{A}$ không độc lập tuyến tính là sai. □

Hệ quả 1.16. *Số phương án cực biên của tập phương án chấp nhận được* $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *là hữu hạn.*

Chứng minh. Bởi vì số hệ có m vector cột độc lập tuyến tính là hữu hạn, nên theo định lý 1.15 thì số phương án cực biên của S là hữu hạn. □

Hệ quả 1.17. *Số thành phần dương của một phương án cực biên tối đa là* m.

Chứng minh. Theo định lý 1.15, các cột của $\mathbf{A}$ tương ứng với các thành phần dương của phương án cực biên $\mathbf{x} \in S$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^m$. Nhưng không thể có nhiều hơn m vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^m$. Vậy hệ quả đã được chứng minh. □

Định lý 1.18. $\mathbf{x}$ *là phương án cực biên của* $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{x}$ *là phương án cơ bản chấp nhận được.*

Ví dụ 1.20. Tìm tất cả các phương án cực biên của

$$z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Giải. Từ định lý 1.18 ta thấy phương án cơ bản chấp nhận được chính là phương án cực biên. Theo ví dụ 1.18 ta có kết quả:

1.7.3 Tìm phương án tối ưu từ phương án cực biên

Định lý 1.19. *Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì sẽ có một phương án cực biên là phương án tối ưu.*

Phương án cơ bản cnđ	Phương án cực biên
$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$	$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$
$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$	$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$
$\mathbf{x}_3$ không phải	
$\mathbf{x}_4$ không phải	
$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$	$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$
$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$	$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$

Nhận xét. Nhờ định lý 1.19, nếu ta chứng minh được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu, thì nó sẽ có phương án cực biên là phương án tối ưu. Trên đây ta có thể tìm được tất cả các phương án cực biên (vì số phương án cực biên là hữu hạn theo hệ quả). Do đó trong số các phương án cực biên vừa chỉ ra, lần lượt thử từng phương án ta được phương án tối ưu. □

Định lý 1.20. *Nếu tập phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát không rỗng và là một đa diện lồi thì bài toán sẽ có ít nhất một phương án tối ưu là phương án cực biên.*

Định lý 1.21. *Điều kiện cần và đủ để bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu là tập các phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn trên (nếu là bài toán* max*) hoặc bị chặn dưới (nếu là bài toán* min*).*

Ví dụ 1.21. Tìm phương án tối ưu của

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Giải. Từ hệ các ràng buộc ta có

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

suy ra $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4$ và hàm mục tiêu bị chặn trên bởi 27, do đó bài toán có phương án tối ưu là phương án cực biên. Trong ví dụ 1.20 ta đã tìm được tất cả các phương án cực biên:

Phương án cực biên	Giá trị z
$\mathbf{x}_1^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$	27/2
$\mathbf{x}_2^T = (3; 0; 1; 0)$	12
$\mathbf{x}_5^T = (0; 4; 0; 3)$	12
$\mathbf{x}_6^T = (0; 0; 4; 15)$	0

Vậy phương án tối ưu là $(3/2; 5/2; 0; 0)$.

1.8 Bài tập chương 1

Bài tập 1.1. Bằng phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -4x_1 + 3x_2 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Đáp án: Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (4; 2)$ giá trị hàm mục tiêu $z = -10$.

Bài tập 1.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 52 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 34/3; 22/3; 0; 2)$ là phương án cực biên.

Bài tập 1.3. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

a. Tìm tất cả các phương án cực biên.

b. Tìm phương án tối ưu.

Đáp án:

a. Phương án cực biên $\mathbf{x}_1^T = (2; 4; 0)$; $\mathbf{x}_2^T = (6; 0; 8)$

b. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 4; 0)$

Chương 2

Phương pháp đơn hình

Mục lục chương 2

2.1 Phương pháp đơn hình cho bài toán dạng chính tắc có sẵn ma trận đơn vị

2.1.1 Phương pháp đơn hình

Năm 1947, nhà toán học George Bernard Danzig đưa ra phương pháp đơn hình, ý tưởng cơ bản của phương pháp là bắt đầu xét từ một phương án cực biên ban đầu (phương án cơ bản chấp nhận được), ta xem nó có là phương án tốt nhất hay chưa, nếu chưa là phương án tốt nhất ta lần lượt xét đến các phương án cực biên liền kề sao cho làm tăng giá trị hàm mục tiêu. Quá trình tiến hành đến lúc thu được phương án tối ưu hoặc giá trị hàm mục tiêu không hữu hạn. Phương pháp đơn hình có bốn bước:

Bước 1. Thành lập một phương án cực biên.

Bước 2. Xét xem phương án cực biên hiện hành đã là phương án tối ưu hay chưa bằng dấu hiệu tối ưu (xem tiếp trang 52). Nếu phương án cực biên này là phương án tối ưu thì kết thúc. Ngược lại, nếu bài toán có phương án mới tốt hơn (xem tiếp trang 39) thì sang **bước 3**.

Bước 3. Xây dựng một phương án cực biên mới sao cho giá trị hàm mục tiêu lớn hơn hoặc bằng giá trị hàm mục tiêu của phương án cực biên trước đó.

Bước 4. Quay về **bước 2**.

Ta xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{2.1}$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}_1x_1 + \mathbf{A}_2x_2 + \cdots + \mathbf{A}_nx_n = \mathbf{b} \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \tag{2.3}$$

Giả sử có phương án cực biên $\mathbf{x}$ có m thành phần dương là $x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}$ (cực biên không suy biến) và hệ vector cơ sở liên kết là $B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\}$. Ta đặt

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}_{k_1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}_{k_m}\right); \mathbf{c}^B = (c_{k_1}; \ldots; c_{k_m}); \mathbf{x}^B = (x_{k_1}; \ldots; x_{k_m})$$

Biểu diễn các cột của hệ các ràng buộc 2.5 theo cơ sở B, ta được hệ ràng buộc tương đương

$$\underbrace{[\mathbf{A}_{k_1}]_B}_{\mathbf{A}^B_{k_1}} x_{k_1} + \underbrace{[\mathbf{A}_{k_2}]_B}_{\mathbf{A}^B_{k_2}} x_{k_2} + \cdots + \underbrace{[\mathbf{A}_{k_m}]_B}_{\mathbf{A}^B_{k_m}} x_{k_m} + \cdots + \underbrace{[\mathbf{A}_{k_n}]_B}_{\mathbf{A}^B_{k_n}} x_{k_n} =^* \underbrace{[\mathbf{b}]_B}_{\mathbf{b}^B}$$

Bài toán được viết lại:

$$z = c_{k_1}x_1 + c_{k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{k_m}x_{k_m} + \cdots + c_{k_n}x_{k_n} \to \max \tag{2.4}$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}^B_{k_1}x_{k_1} + \mathbf{A}^B_{k_2}x_{k_2} + \cdots + \mathbf{A}^B_{k_m}x_{k_m} + \cdots + \mathbf{A}^B_{k_n}x_{k_n} = \mathbf{b}^B \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

$^*[\mathbf{A}_{k_j}]_B$ là tọa độ của cột $\mathbf{A}_{k_j}$ theo cơ sở B

Bài toán được viết tường minh như sau

$$z = c_{k_1}x_{k_1} + c_{k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{k_m}x_{k_m} + \cdots + c_{k_n}x_{k_n} \to \max \tag{2.7}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_{k_1} & & & +a_{1k_{m+1}}x_{k_{m+1}} + \cdots + a_{1k_n}x_{k_n} & = b_1 \\ & x_{k_2} & & +a_{2k_{m+1}}x_{k_{m+1}} + \cdots + a_{2k_n}x_{k_n} & = b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & x_{k_m} & +a_{mk_{m+1}}x_{k_{m+1}} + \cdots + a_{mk_n}x_{k_n} & = b_m \end{cases} \tag{2.8}$$

$$x_{k_j} \geq 0, j = 1, \ldots, n \tag{2.9}$$

trong đó $0 < \mathbf{b}$.

Chú ý.

- $\mathbf{A}^B_{k_j} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{k_j}$ và $\mathbf{b}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.
- $\mathbf{A}^B_{k_j}, j = 1, \ldots, m$ là các vector đơn vị.

2.1.2 Dấu hiệu tối ưu

Trong phần này, ta sẽ tìm hiểu dấu hiệu để biết một phương án cực biên có là phương án tối ưu hay không. Trước hết, ta nhân ràng buộc thứ i cho c_{k_i}, các ràng buộc trở thành:

$$\begin{pmatrix} c_{k_1}1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_{k_m}1 \end{pmatrix} x_m + \begin{pmatrix} c_{k_1}a_{1k_{m+1}} \\ c_{k_2}a_{2k_{m+1}} \\ \vdots \\ c_{k_m}a_{mk_{m+1}} \end{pmatrix} x_{k_{m+1}} + \cdots + \begin{pmatrix} c_{k_1}a_{1k_n} \\ c_{k_2}a_{2k_n} \\ \vdots \\ c_{k_m}a_{mk_n} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} c_{k_1}b_1 \\ c_{k_2}b_2 \\ \vdots \\ c_{k_m}b_m \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Lấy tổng của m ràng buộc ở trên ta được

$$\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_1}\rangle^\dagger x_{k_1} + \cdots + \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_m}\rangle x_{k_m} + \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_{m+1}}\rangle x_{k_{m+1}} + \cdots + \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_n}\rangle x_{k_n} = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B\rangle \tag{2.11}$$

chuyển vế trái của 2.11 qua vế phải ta được

$$\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B\rangle - \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_1}\rangle x_{k_1} - \cdots - \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_m}\rangle x_{k_m} - \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_{m+1}}\rangle x_{k_{m+1}} - \cdots - \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_n}\rangle x_{k_n} = 0 \tag{2.12}$$

cộng vế trái của 2.12 vào hàm mục tiêu 2.7 ta được

$$\begin{aligned} z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle - & \underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_1} \rangle - c_{k_1}\right)}_{\Delta_{k_1}} x_{k_1} \\ & - \underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_2} \rangle - c_{k_2}\right)}_{\Delta_{k_2}} x_{k_2} - \cdots - \underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_m} \rangle - c_{k_m}\right)}_{\Delta_{k_m}} x_{k_m} \\ & - \underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_{m+1}} \rangle - c_{k_{m+1}}\right)}_{\Delta_{k_{m+1}}} x_{k_{m+1}} - \cdots - \underbrace{\left(\langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_n} \rangle - c_{k_n}\right)}_{\Delta_{k_n}} x_{k_n} \end{aligned}$$

trong đó

$$\Delta_{k_1} = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}^B_{k_1} \rangle - c_{k_1} = (1; 0; \ldots; 0)(c_{k_1}; c_{k_2}; \cdots; c_{k_m}) - c_{k_1} = 0$$

tương tự ta có $\Delta_{k_1} = \Delta_{k_2} = \cdots = \Delta_{k_m} = 0$. Vậy hàm mục tiêu 2.7 tương đương với

$$z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle - \Delta_{k_{m+1}} x_{k_{m+1}} - \cdots - \Delta_{k_n} x_{k_n} \tag{2.13}$$

Nhận xét. $\Delta_j = 0$ với mọi $j \in \{k_1; \ldots; k_m\}$.

Định lý 2.1 (Dấu hiệu tối ưu của bài toán max)**.** *Cho* $\mathbf{x}$ *là phương án cực biên có hệ vector cở sở liên kết đơn vị của bài toán dạng chính tắc. Nếu* $0 \le \Delta_{k_j}$, $j = 1, \ldots n$ *thì* $\mathbf{x}$ *là phương án tối ưu.*

Chứng minh. Do $0 \le \Delta_{k_j}$, $j = 1, \ldots n$ và theo 2.13 ta có

$$z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle - \Delta_{k_{m+1}} x_{k_{m+1}} - \cdots - \Delta_{k_n} x_{k_n} \le \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle$$

suy ra $\mathbf{x}$ là phương án tối ưu. □

Ví dụ 2.1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 5x_1 - x_2 - 19x_3 - 16x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Chứng minh $\mathbf{x}^T = (25/13; 64/13; 0; 8/13)$ là phương án cực biên, tối ưu của bài toán đã cho.

Giải. Ta cần chứng minh hai điều:

Chứng minh $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên

Xét hệ vector liên kết $B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_4\}$. Định thức

$$|\mathbf{A}_1 \vdots \mathbf{A}_2 \vdots \mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} \neq 0$$

B độc lập tuyến tính, cho nên $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên.

Chứng minh $\mathbf{x}^T$ là phương án tối ưu:

Để dùng được dấu hiệu tối ưu, ta cần biểu diễn các vector cột theo cơ sở B. Nghĩa là ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} x_1 & & + & ?x_3 & & & = & ? \\ & x_2 & + & ?x_3 & & & = & ? \\ & & + & ?x_3 & + & x_4 & = & ? \end{cases}$$

việc này có nghĩa là ta đi giải tìm $x_1; x_2; x_4$ theo các biến còn lại. Hệ các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} x_1 & & + & 7/13x_3 & & & = & 25/13 \\ & x_2 & + & 46/13x_3 & & & = & 64/13 \\ & & & 9/13x_3 & + & x_4 & = & 8/13 \end{cases}$$

Đặt $\mathbf{c}^B = (c_1; c_2; c_4) = (5; -1; -16)$, ta tính

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_1^B \rangle - c_1 = (5; -1; -16)(1; 0; 0) - 5 = 0 \\
\Delta_2 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_2^B \rangle - c_2 = (5; -1; -16)(0; 1; 0) - (-1) = 0 \\
\Delta_3 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_3^B \rangle - c_3 = (5; -1; -16)(7/13; 46/13; 9/13) - (-19) = 92/13 \\
\Delta_4 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_4^B \rangle - c_4 = (5; -1; -16)(0; 0; 1) - (-16) = 0
\end{aligned}$$

Do mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên $\mathbf{x}$ là phương án tối ưu. □

2.1.3 Thành lập phương án cực biên mới

Định lý 2.2 (Có phương án mới tốt hơn)**.** *Giả sử tồn tại cột $\mathbf{A}_{k_v}$ ngoài hệ vector cơ sở liên kết đơn vị, $v \in \{m+1; \ldots; n\}$, sao cho $\Delta_{k_v} < 0$:*

i. Nếu trên cột $\mathbf{A}_{k_v}^B$ mọi phần tử đều nhỏ hơn hay bằng 0 thì bài toán không có phương án tối ưu.

ii. Nếu trên cột $\mathbf{A}^B_{k_v}$ *tồn tại* $a_{ik_v} > 0$ *thì ta có thể tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn* $\mathbf{x}$.

Chứng minh. Hàm mục tiêu 2.13 được viết lại

$$z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle - \Delta_{k_{m+1}} x_{k_{m+1}} - \cdots - \Delta_{k_v} x_{k_v} - \cdots - \Delta_{k_n} x_{k_n} \to \max \quad (2.14)$$

Phương án hiện thời có $x_{k_{m+1}} = \cdots = x_{k_v} = \cdots = x_{k_n} = 0$. Ta nhận thấy có thể tìm phương án mới tốt hơn bằng cách tăng giá trị của x_{k_v} sao cho phương án mới vẫn thỏa ràng buộc 2.8.

$$\begin{cases} x_{k_1} = b_1 - a_{1k_v} x_{k_v} \geq 0 \\ \cdots \\ x_{k_i} = b_i - a_{ik_v} x_{k_v} \geq 0 \\ \cdots \\ x_{k_m} = b_m - a_{mk_v} x_{k_v} \geq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

i. Vì $a_{ik_v} \leq 0, v = 1, \ldots, m$ và theo 2.15

$$\begin{cases} x_{k_v} \geq b_1/a_{1k_v}; \text{ hay } x_{k_v} \text{ tùy ý khi } a_{1k_v} = 0 \\ \cdots \\ x_{k_v} \geq b_i/a_{ik_v}; \text{ hay } x_{k_v} \text{ tùy ý khi } a_{ik_v} = 0 \\ \cdots \\ x_{k_v} \geq b_m/a_{mk_v}; \text{ hay } x_{k_v} \text{ tùy ý khi } a_{mk_v} = 0 \end{cases}$$

do đó, có thể chọn x_{k_v} lớn một cách tùy ý và khi đó $z \to +\infty$ hay bài toán không có phương án tối ưu.

ii. Do tồn tại $a_{ik_v} > 0$ nên giá trị x_{k_v} phải thỏa

$$0 \leq x_{k_v} \leq \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ik_v}} : a_{ik_v} > 0 \right\} = \frac{b_r}{a_{rk_v}}$$

ta chọn $x_{k_v} = \dfrac{b_r}{a_{rk_v}}$, phương án mới có dạng

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' = &(x_{k_1}; \ldots; x_{k_{r-1}}; x_{k_r}; x_{k_{r+1}}; \ldots; x_{k_m}; x_{k_{m+1}}; \ldots; x_{k_v}; \ldots; x_{k_n}) \\ = &(b_1 - a_{1k_v} x_{k_v}; \ldots; b_{r-1} - a_{r-1k_v} x_{k_v}; 0; b_{r+1} - a_{r+1k_v} x_{k_v}; \\ &0; \ldots; x_{k_v}; \ldots; 0) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\mathbf{x}'$ là phương án cực biên tốt hơn phương án $\mathbf{x}$. Thật vậy, hệ vector cơ sở liên kết mới

$$\{\mathbf{A}_{k_1}; \dots; \mathbf{A}_{k_{r-1}}; \mathbf{A}_{k_v}; \mathbf{A}_{k_{r+1}}; \dots; \mathbf{A}_{k_m}\}$$

độc lập tuyến tính, hay $\mathbf{x}'$ là phương án cực biên. Mặt khác

$$z' = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle - \Delta_{k_v} x_{k_v} > \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle = z$$

Vậy $\mathbf{x}'$ là phương án cực biên mới tốt hơn $\mathbf{x}$ □

Nhận xét. Do hàm mục tiêu

$$z = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle - \Delta_{k_{m+1}} x_{k_{m+1}} - \dots - \Delta_{k_n} x_{k_n} \to \max$$

nên khi có nhiều $\Delta_j < 0$ ta sẽ chọn sao cho $-\Delta_j x_j$ lớn nhất. Tuy nhiên, ta thường chọn Δ_j âm nhất (nghĩa là số âm có trị tuyệt đối lớn nhất).

Ví dụ 2.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -7x_1 + 26x_2 - 9x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ -x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (5; 0; 7)$ là phương án cực biên.

b. Chứng tỏ $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên tối ưu của bài toán.

Giải.

a. $\mathbf{x}^T = (5; 0; 7)$ là phương án chấp nhận được. Xét hệ vector liên kết

$$B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_3\}$$

có định thức

$$|\mathbf{A}_1 \vdots \mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy B độc lập tuyến tính, suy ra $\mathbf{x}^T$ là phương án cực biên.

b. Các ràng buộc đã có sẵn hệ vector liên kết đơn vị $\{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_3\}$ của phương án cực biên $\mathbf{x}$. Ta đặt $\mathbf{c}^B = (c_1; c_3) = (-7; -9)$, và tính được

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 0\\ \Delta_2 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_2^B\rangle - c_2 = -3\\ \Delta_3 &= 0\end{aligned}$$

Do có $\Delta_2 < 0$ nên phương án cực biên $\mathbf{x}^T = (5; 0; 7)$ không là phương án tối ưu. □

2.2 Bảng đơn hình

Bảng đơn hình có dạng như sau:

	B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_{k_1}^B$	$\cdots$	$\mathbf{A}_{k_m}^B$	$\mathbf{A}_{k_{m+1}}^B$	$\cdots$	$\downarrow$ $\mathbf{A}_{k_v}^B$	$\cdots$	$\mathbf{A}_{k_n}^B$
				c_{k_1}	$\cdots$	c_{k_m}	$c_{k_{m+1}}$	$\cdots$	c_{k_v}	$\cdots$	c_{k_n}
	$\mathbf{A}_{k_1}$	c_{k_1}	b_1	1	$\cdots$	0	$a_{1k_{m+1}}$	$\cdots$	a_{1k_v}	$\cdots$	a_{1k_n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\leftarrow$	$\mathbf{A}_{k_r}$	c_{k_r}	b_r	0	$\cdots$	0	$a_{rk_{m+1}}$	$\cdots$	(a_{rk_v})	$\cdots$	a_{rk_n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\mathbf{A}_{k_m}$	c_{k_m}	b_m	0	$\cdots$	0	$a_{mk_{m+1}}$	$\cdots$	a_{mk_v}	$\cdots$	a_{mk_n}
	z	min		Δ_{k_1}	$\cdots$	Δ_{k_m}	$\Delta_{k_{m+1}}$	$\cdots$	Δ_{k_v}	$\cdots$	Δ_{k_n}

Bảng 2.1: Bảng đơn hình

Chú ý. Trong bảng đơn hình:

- B là hệ vector cơ sở liên kết của phương án cực biên hiện thời.
- Cột $\mathbf{A}_{k_v}^B$ tương ứng $\mathbf{A}_{k_v}$ vào cơ sở liên kết được gọi là cột xoay.
- Dòng có chỉ số cùng với chỉ số với cột ra khỏi hệ vector cơ sở liên kết gọi là dòng xoay.
- Phần tử nằm trên dòng xoay và cột xoay gọi là phần tử trực.

Tóm tắt thuật toán đơn hình

Để bắt đầu được với thuật toán đơn hình thì các ràng buộc phải có sẵn hệ vector cơ sở liên kết đơn vị (ma trận đơn vị) và $0 < \mathbf{b}$.

Bước 1: Chọn vector vào cở sở liên kết. Nếu $\min\left\{\Delta_{k_j}; \Delta_{k_j} < 0\right\} = \Delta_{k_v}$ thì vector $\mathbf{A}_{k_v}$ là vector mới vào cơ sở liên kết, sang bước 2. Ngược lại, nếu $\Delta_{k_j} > 0$ với mọi j thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu, thuật toán kết thúc.

Bước 2: Chọn vector ra khỏi cở sở liên kết. Trong bước 1 đã xác định được $\mathbf{A}_{k_v}$ là vector mới vào cơ sở liên kết.

- Nếu $a_{ik_v} \leq 0$ với mọi i thì bài toán không có phương án tối ưu, thuật toán kết thúc.
- Nếu có $a_{ik_v} > 0$, ta tính

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik_v}}; a_{ik_v} > 0\right\} = \frac{b_r}{a_{rk_v}}$$

vector $\mathbf{A}_r$ ra khỏi cơ sở liên kết.

Bước 3: Lập bảng đơn hình mới. [‡]

- Xác định phần tử trực a_{rk_v}.
- Chia dòng chứa phần tử trực cho phần tử trực.
- Các phần tử dòng i cột j khác của bảng được tính

$$a_{ik_j} = \begin{vmatrix} a_{ik_j} & a_{ik_v} \\ a_{rk_j} & a_{rk_v} \end{vmatrix} / a_{rk_v} = \left(a_{ik_j} a_{rk_v} - a_{rk_j} a_{ik_v}\right) / a_{rk_v} \qquad (2.17)$$

- Tính lại $\Delta_{k_j} = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_{k_j}^B \rangle - c_{k_j}$.

Ví dụ 2.3. Giải bài toán quy hoạch sau:

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2$$

[‡]Đây chính là phép khử Gauss - Jordan

Giải. Ta chuyển sang dạng chính tắc:

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 4$$

Bước lặp thứ nhất. Phương án cực biên ban đầu $\mathbf{x}^T = (0; 0; 4; 15)$ có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A_3}; \mathbf{A_4}\}$. Bảng đơn hình của phương án xuất phát $\mathbf{x}$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	4	1	1	1	0
$\mathbf{A}_4$	0	15	5	3	0	1
max		Δ	-4	-3	0	0

trong đó $\mathbf{c}^B = (c_3; c_4) = (0; 0)$. Ta tính được:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \Delta_4 = 0 \\ \Delta_1 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_1^B \rangle - c_1 = (0; 0)(1; 5) - 4 = -4 \\ \Delta_2 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_2^B \rangle - c_2 = (0; 0)(1; 3) - 3 = -3 \\ z &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle = 0 \end{aligned}$$

Ở đây do có $\Delta_1, \Delta_2 \leq 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu.

Xác định vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết.

$$\min\{\Delta_1; \Delta_2\} = \min\{-4; -3\} = -4 = \Delta_1$$

vậy vector liên kết mới $\mathbf{A}_1$.

Xác định vector ra khỏi hệ vector cơ sở liên kết. Ta lập tỷ số

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i1}}; a_{i1} > 0\right\} = \left\{\frac{4}{1}; \frac{15}{5}\right\} = \frac{15}{5} = \frac{b_2}{a_{21}}$$

vậy $\mathbf{A}_2$ là vector ra khỏi hệ vector cơ sở liên kết. Hệ vector cơ sở liên kết mới $B = \{\mathbf{A}_3; \mathbf{A}_1\}$ và $\mathbf{c}^B = (c_3; c_1) = (0; 4)$.

Bảng đơn hình cho phương án mới

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0			?		
$\mathbf{A}_1$	4					
max						

Chia dòng chứa phần tử trực cho phần tử trực, nghĩa là chia dòng 2 cho 5 ta được

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0			?		
$\mathbf{A}_1$	4	3	1	3/5	0	1/5
max						

các a_{ij} khác được tính dựa vào bảng trước bằng công thức

$$a_{ik_j} = \begin{vmatrix} a_{ik_j} & a_{ik_v} \\ a_{rk_j} & a_{rk_v} \end{vmatrix} / a_{rk_v} = \left(a_{ik_j} a_{rk_v} - a_{rk_j} a_{ik_v}\right) / a_{rk_v}$$

cụ thể phần tử ở ô (?) được tính như sau:

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ (5) & 3 \end{array} : (5) \quad = (1 \times 5 - 1 \times 3)/5 = 2/5$$

tính tương tự cho các a_{ij} còn lại ta được

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	1	0	2/5	1	-1/5
$\mathbf{A}_1$	4	3	1	3/5	0	1/5
max						

Tiếp theo ta tính Δ_j

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = & \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_1^B \rangle - c_1 = (0;4)(2/5;3/5) - 3 = -3/5 \\ \Delta_4 = & \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_2^B \rangle - c_2 = (0;4)(-1/5;1/5) - 0 = 4/5 \\ z = & \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{b}^B \rangle = (0;4)(1;3) = 12 \end{aligned}$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	1	0	2/5	1	-1/5
$\mathbf{A}_1$	4	3	1	3/5	0	1/5
max		Δ	0	-3/5	0	4/5

Bước lặp thứ hai. Do có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời $\mathbf{x}^T = (3; 0; 1; 0)$ không là phương án tối ưu. Ta chọn cột $\mathbf{A}_2$ là cột mới thay cho cột $\mathbf{A}_3$ trong hệ vector cơ sở liên kết. Bảng đơn hình mới làm tương tự như bước trên, ta được kết quả sau:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			4	3	0	0
$\mathbf{A}_2$	3	5/2	0	1	5/2	-1/2
$\mathbf{A}_1$	4	3/2	1	0	-3/2	1/2
max		Δ	0	0	3/2	1/2

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (3/2; 5/2; 0; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là $27/2$. $\square$

Ví dụ 2.4. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20 \\ 4x_1 + x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc:

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 20 \\ 4x_1 + x_3 + x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

Ta có phương án cực biên ban đầu $\mathbf{x}^T = (0; 0; 0; 15; 20; 10)$ và hệ các vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Ứng với hệ vector liên kết này, ta đặt $\mathbf{c}^B = (c_4; c_5; c_6) = (0; 0; 0)$. Ta có bảng đơn hình cho phương án cực biên này như sau

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	1	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	15	1	-5	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	20	3	2	-2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	10	4	0	1	0	0	1
max		Δ	-2	3	-1	0	0	0

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_1$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_6$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	1	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	25/2	0	-5	3/4	1	0	-1/4
$\mathbf{A}_5$	0	25/2	0	2	-11/4	0	1	-3/4
$\mathbf{A}_1$	2	5/2	1	0	1/4	0	0	1/4
max		Δ	0	3	-1/2	0	0	1/2

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_3$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_1$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	1	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	5	-3	-5	0	1	0	-1
$\mathbf{A}_5$	0	40	11	2	0	0	1	2
$\mathbf{A}_3$	1	10	4	0	1	0	0	1
max		Δ	2	3	0	0	0	1

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (0; 0; 10; 5; 40)$ là phương án tối ưu. Giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là 10. □

Ví dụ 2.5. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

Ta có phương án cực biên ban đầu $\mathbf{x}^T = (0; 0; 6; 7; 5)$ và hệ các vector cơ sở liên liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	3	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	6	1	-5	1	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	7	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_5$	0	5	-1	2	0	0	1
max		Δ	-1	-8	0	0	0

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_2$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_5$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	3	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	37/2	-3/2	0	1	0	5/2
$\mathbf{A}_4$	0	2	3	0	0	1	-1
$\mathbf{A}_2$	3	5/2	-1/2	1	0	0	1/2
max		Δ	-5	0	0	0	4

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_1$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_4$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	3	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	39/2	0	0	1	1/2	2
$\mathbf{A}_1$	2	2/3	1	0	0	1/3	-1/3
$\mathbf{A}_2$	3	17/6	0	1	0	1/6	1/3
max		Δ	0	0	0	5/3	7/3

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (2/3; 17/6; 39/2; 0; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là $88/3$. □

Ví dụ 2.6. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ \quad - 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ \quad - 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

Giải. Ta có phương án cực biên ban đầu $\mathbf{x}^T = (1; 0; 0; 0; 3; 7)$ và hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			-2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_1$	-2	2	1	1	2	-1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	3	0	-2	-7	3	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	7	0	0	-3	2	0	1
max		Δ	0	-1	-5	1	0	0

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_3$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_1$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			-2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	1	1/2	1/2	1	-1/2	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	10	7/2	3/2	0	-1/2	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	10	3/2	3/2	0	1/2	0	1
max		Δ	5/2	3/2	0	-3/2	0	0

Vì có $\Delta_j < 0$ nên phương án hiện thời không là phương án tối ưu. Ta chọn vector $\mathbf{A}_4$ là vector mới vào hệ vector cơ sở liên kết thay cho vector $\mathbf{A}_6$. Bảng đơn hình mới:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			-2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_3$	1	11	2	2	1	0	0	1
$\mathbf{A}_5$	0	20	5	3	0	0	1	1
$\mathbf{A}_4$	1	20	3	3	0	1	0	2

max		Δ	7	6	0	0	0	3

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (0; 0; 11; 20; 20; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là 31. □

Ví dụ 2.7. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 1; 2; 0; 1)$ là phương án cực biên không tối ưu.

b. Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn phương án trên.

Giải.

a. Phương án $\mathbf{x}^T = (0; 1; 2; 0; 1)$ có hệ vector liên kết $B = \{\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3; \mathbf{A}_5\}$.

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}_2 \vdots \mathbf{A}_3 \vdots \mathbf{A}_5\right) \Rightarrow |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vậy $\mathbf{x}$ là phương án cực biên. Để dùng dấu hiệu tối ưu, ta cần biến đổi các ràng buộc tương đương.

$$\begin{cases} -1/12x_1 + x_2 + 1/3x_4 = 1 \\ -5/3x_1 + x_3 - 7/3x_4 = 2 \\ 1/4x_1 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Ta đặt $\mathbf{c}^B = (c_2; c_3; c_5) = (2; 3; -1)$ và tính được

$$\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_5 = 0$$

$$\Delta_1 = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_1^B \rangle - c_1 = (2; 3; -1)(-1/12; -5/3; 1/4) - 0 = -55/6$$

$$\Delta_4 = \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_4^B \rangle - c_4 = (2; 3; -1)(1/3; -7/3; 1) - 4 = -28/3$$

Do có $\Delta_j < 0$ nên phương án cực biên $\mathbf{x}$ không là phương án tối ưu.

b. Bảng đơn hình của phương án $\mathbf{x}^T = (0; 1; 2; 0; 1)$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			0	2	3	4	-1
$\mathbf{A}_2$	2	1	-1/12	1	0	1/3	0
$\mathbf{A}_3$	3	2	-5/3	0	1	-7/3	0
$\mathbf{A}_5$	-1	1	1/4	0	0	1	1
		Δ	-65/12	0	0	-34/3	0
$\mathbf{A}_2$	2	2/3	-1/6	1	0	0	-1/3
$\mathbf{A}_3$	3	13/3	-13/12	0	1	0	7/3
$\mathbf{A}_4$	4	1	1/4	0	0	1	1
		Δ	-31/12	0	0	0	34/3

Phương án mới $(0; 2/3; 13/3; 1; 0)$ có giá trị hàm mục tiêu tốt hơn phương án ở câu a. $\square$

Ví dụ 2.8. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$

Giải. Chuyển bài toán min sang bài toán max, hàm mục tiêu trở thành:

$$-z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 \to \max$$

Phương án cực biên ban đầu $x = (0; 0; 0; 5; 4; 2)$ có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			1	-2	2	-1	1	-2
$\mathbf{A}_4$	-1	5	2	-1	-5	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	1	1	1	-2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	-2	2	-4	1	1	0	0	1
		Δ	6	-1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	-1	7	-2	0	-4	1	0	1
$\mathbf{A}_5$	1	5	-7	0	4	0	1	2
$\mathbf{A}_2$	-2	2	-4	1	1	0	0	1
max		Δ	2	0	4	0	0	1

Mọi $0 \leq \Delta_j$ nên phương án cực biên hiện thời $\mathbf{x}^T = (0; 2; 0; 7; 8; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $-z = -3 \to \max$ hay $z = 3 \to \min$. □

2.3 Thuật toán đơn hình cho bài toán min

Thuật toán đơn hình cho bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu về cơ bản giống với bài toán tìm giá trị lớn nhất, chỉ khác nhau ở dấu hiệu tối ưu.

Định lý 2.3 (Dấu hiệu tối ưu của bài toán min)**.** *Cho* $\mathbf{x}$ *là phương án cực biên có hệ vector cở sở liên kết đơn vị của bài toán dạng chính tắc. Nếu* $\Delta_{k_j} \leq 0$, $j = 1, \ldots n$ *thì* $\mathbf{x}$ *là phương án tối ưu.*

Định lý 2.4 (Có phương án mới tốt hơn)**.** *Giả sử tồn tại cột* $\mathbf{A}_{k_v}$ *ngoài hệ vector cơ sở liên kết,* $v \in \{m+1; \ldots; n\}$, *sao cho* $\Delta_{k_v} > 0$:

i. Nếu trên cột $\mathbf{A}_{k_v}^B$ *mọi phần tử đều nhỏ hơn hay bằng 0 thì bài toán không có phương án tối ưu.*

ii. Nếu trên cột $\mathbf{A}_{k_v}^B$ *tồn tại* $a_{ik_v} > 0$ *thì ta có thể tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn* $\mathbf{x}$.

Ví dụ 2.9. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ 3x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Giải. Chuyển sang dạng chính tắc

$$z = x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			1	1	-3	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	1	2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	2	-4	2	-1	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	5	3	0	1	0	0	1
			-1	-1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_3$	-3	1	2	-1	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	3	-2	1	0	1	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	4	1	1	0	-1	0	1
			-7	2	0	-3	0	0
$\mathbf{A}_3$	-3	4	0	0	1	2	1	0
$\mathbf{A}_2$	1	3	-2	1	0	1	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	1	3	0	0	-2	-1	1
min		Δ	-3	0	0	-5	-2	0

Mọi $\Delta_j \leq 0$ nên phương án $\mathbf{x}^T = (0; 3; 4; 0; 0; 1)$ là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $z = -6$. □

2.4 Bài toán chính tắc không có sẵn ma trận đơn vị

Giả sử cần giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$
$$\text{Với các ràng buộc}$$
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Ax} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array} \tag{2.18}$$

trong đó $\mathbf{A}$ không có ma trận đơn vị (không có sẵn hệ vector cơ sở liên kết đơn vị), $\mathbf{b} \geq 0$. Chẳng hạn cần giải bài toán sau:

Ví dụ 2.10. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \to \max$$
$$\text{Với các ràng buộc}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 13x_4 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 14x_4 = 11 \\ \quad + 3x_2 + x_3 + 14x_4 = 16 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Giải. Do ma trận các hệ số $\mathbf{A}$ không có sẵn hệ vector cơ sở liên kết đơn vị nên không xác định được phương án cực biên ban đầu. Vì các ràng buộc là hệ phương trình tuyến tính nên ta có thể biến đổi để có ba vecto cột đơn vị

$$\begin{pmatrix}1&1&1&13&14\\2&1&0&14&11\\0&3&1&14&16\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2=d_2-2d_1}\begin{pmatrix}1&1&1&13&14\\0&-1&-2&-12&-17\\0&3&1&14&16\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2=-d_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&13&14\\0&1&2&12&17\\0&3&1&14&16\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3=d_3-3d_2]{d_1=d_1-d_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-3\\0&1&2&12&17\\0&0&-5&-22&-35\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3=-1/5d_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-3\\0&1&2&12&17\\0&0&1&22/5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[d_2=d_2-2d_3]{d_1=d_1+d_3}\begin{pmatrix}1&0&0&27/5&4\\0&1&0&16/5&3\\0&0&1&22/5&7\end{pmatrix}$$

Hệ các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases}x_1 & & & + & 27/5x_4 & = & 4\\ & x_2 & & + & 16/5x_4 & = & 3\\ & & x_3 & + & 22/5x_4 & = & 7\end{cases}$$

Kế tiếp ta thành lập bảng đơn hình cho bài toán có phương án cực biên $\mathbf{x}^T = (4; 3; 7; 0)$ như sau

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			-3	4	5	-6
$\mathbf{A}_1$	-3	4	1	0	0	27/5
$\mathbf{A}_2$	4	3	0	1	0	16/5
$\mathbf{A}_3$	5	7	0	0	1	22/5
max		Δ	0	0	0	123/5

Phương án tối ưu $\mathbf{x} = (4; 3; 7; 0)$, giá trị tối ưu $z = 35$ $\square$

Nhưng có thể trong quá trình biến đổi sau khi đã có các vector đơn vị mà phương án không thỏa điều kiện không âm thì cách làm trên rất khó gặp một phương án cực biên ban đầu.

Ví dụ 2.11. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$$
Với các ràng buộc
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Giải. Vì ma trận các hệ số **A** không có ma trận đơn vị nên chưa xác định được phương án cực biên ban đầu. Vì tập các phương án là hệ phương trình tuyến tính nên ta có thể biến đổi để có hai vector đơn vị.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -4 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Đến đây ta gặp khó khăn trong việc tìm phương án cực biên. Để giải quyết triệt để, ta dùng phương pháp sau đây gọi là phương pháp **đánh thuế** để giải cho trường hợp này. □

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{2.19}$$
Với các ràng buộc
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

Thêm các ẩn $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$ mà ta gọi là **ẩn giả** vào m ràng buộc khi đó bài toán có dạng

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \cdots - Mx_{n+m} \to \max \tag{2.20}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n+m$$

trong đó M là số dương lớn hơn bất kỳ số nào mà ta cần so sánh.

Định lý 2.5. *Bài toán (2.19) có phương án tối ưu* $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ *khi và chỉ khi bài toán (2.20) có phương án tối ưu*

$$\mathbf{x}^{'T} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Chú ý. Khi giải bài toán (2.20) bằng phương pháp đơn hình thì các hệ số hàm mục tiêu có chứa tham số M. Vì M lớn nên khi so sánh các giá trị có tham số M ta có quy ước như sau:

$$aM + b > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ a = 0, b > 0 \end{array} \right.$$

$$aM + b < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a = 0, b < 0 \end{array} \right.$$

$$aM + b > cM + d \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > c \\ a = c, b > d \end{array} \right.$$

Ví dụ 2.12. Giải lại bài toán quy hoạch tuyến tính ví dụ 2.11

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Giải. Ta nhân hai vế ràng buộc thứ nhất với -1

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Thêm vào ràng buộc thứ nhất, thứ hai hai biến giả. Bài toán trở thành

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 - Mx_4 - Mx_5 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

Lập bảng đơn hình, khi giải ta coi M là tham số có giá tị lớn hơn bất kỳ hằng số nào cần so sánh. Phương án xuất phát $\mathbf{x}^T = (0; 0; 0; 1; 2)$, hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5\}$.

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	-1	-2	-M	-M
$\mathbf{A}_4$	-M	1	-1	-2	1	1	0
$\mathbf{A}_5$	-M	2	1	2	1	0	1
			-2	1	-2M+2	0	0
$\mathbf{A}_3$	-2	1	-1	-2	1	1	0
$\mathbf{A}_5$	-M	1	2	4	0	-1	1
			-2M	-4M+5	0	2M-2	0
$\mathbf{A}_3$	-2	3/2	0	0	1	1/2	1/2
$\mathbf{A}_2$	-1	1/4	1/2	1	0	-1/4	1/4
			-5/2	0	0	M-3/4	M-5/4
$\mathbf{A}_3$	-2	3/2	0	0	1	1/2	1/2
$\mathbf{A}_1$	2	1/2	1	2	0	-1/2	1/2
max		Δ	0	5	0	M-2	M

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án hiện thời $\mathbf{x}^T = (1/2; 0; 3/2; 0; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $z = -2$. □

Ví dụ 2.13. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
Với các ràng buộc
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
Với các ràng buộc
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, X_3, x_4 \ge 0$$

Để xác định được phương án cực biên ban đầu ta thêm vào ràng buộc thứ hai ẩn giả x_5

$$z = 2x_1 + 5x_2 - Mx_5 \to \max$$
Với các ràng buộc
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1, \dots, 5$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			2	5	-M	0	0
$\mathbf{A}_3$	-M	6	2	3	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	4	1	2	0	-1	1
max		Δ	-2M-2	-3M-5	0	0	0
$\mathbf{A}_2$	5	2	2/3	1	1/3	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	0	-1/3	0	-2/3	-1	1
max		Δ	4/3	0	M+5/3	0	0

Mọi $\Delta_j \ge 0$ nên phương án hiện thời $(0; 2; 0; 0; 0)$ là phương án tối ưu. $\square$

2.5 Bài tập chương 2

Bài tập 2.1. Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính:

a. $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 4; 0; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = -6$

b. $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (125/12; 17/6; 39/4)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 469/12$.

c. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (16; 0; 0; 4)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 44$.

d. $z = 15x_1 + 19x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (1; 1; 1)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 34$.

Bài tập 2.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -4x_1 - 5x_2 - 7x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 4; 2)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu.

b. Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phướng án cực biên ở câu a.

Bài tập 2.3. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 2/3; 0; 4/3)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu.

b. Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phướng án cực biên ở câu a.

Bài tập 2.4. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -4x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 20 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Chứng minh $\mathbf{x}^T = (1; 2; 3; 0)$ là phương án cực biên, tối ưu của bài toán.

Bài tập 2.5. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = x_1 + x_2 + mx_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (1; 2; 0)$ là phương án cực biên của bài toán.

b. Tìm điều kiện của m để $\mathbf{x}$ là phương án tối ưu.

Bài tập 2.6. Một công ty sản xuất hai loại sơn: sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng tương ứng là 16 tấn và 18 tấn. Để sản xuất 1 tấn sơn nội thất cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời cần 2 tấn nguyên liệu A và 3 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn. Giá bán một tấn sơn nội thất là 4000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD. Khi sản xuất 1 tấn sơn nội thất phải bỏ ra một chi phí là 1300 USD, khi sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời phải bỏ ra một chi phí là 1000 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có lợi nhuận lớn nhất?

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (21/5; 16/5)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 17740$

Bài tập 2.7. Một công ty sản xuất hai loại sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng là 6 tấn và 8 tấn tương ứng. Để sản xuất một tấn sơn nội thất cần 2 tấn nguyên liệu A và 1 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn ngoài trời cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn, nhu cầu cực đại của sơn nội thất là 2 tấn. Giá bán một tấn sơn nội thất là 2000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có doanh thu lớn nhất?

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (4/3; 10/3)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 38000/3$.

Bài tập 2.8. Một công ty sản xuất hai loại thực phẩm A, B. Nguyên liệu để sản xuất gồm ba loại bột, đường và dầu thực vật. Với trữ lượng dự trữ tương ứng là 30 tấn, 12 tấn, 6 tấn. Để sản xuất:

- 1 tấn thực phẩm loại A cần 0,5 tấn bột, 0,5 tấn đường, 0,2 tấn dầu thực vật.
- 1 tấn thực phẩm loại B cần 0,8 tấn bột, 0,4 tấn đường, 0,4 tấn dầu thực vật.

Giá bán một tấn thực phẩm A là 4000 USD, giá bán một tấn thực phẩm B là 4500 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại thực phẩm bao nhiêu tấn để có doanh thu lớn nhất?

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (20; 5)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 102500$

Bài tập 2.9. Một xí nghiệp dự định sản xuất ba loại sản phẩm A, B và C. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III . Số lượng các nguyên liệu I, II và III mà xí nghiệp có lần lượt là 30, 50, 40. Số lượng các nguyên liệu cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm A, B, C được cho ở bảng sau đây:

SP \ NL	I	II	III
A	1	1	3
B	1	2	2
C	2	3	1

Xí nghiệp muốn lập kế hoạch sản xuất để thu được tổng số lãi nhiều nhất (với giả thiết các sản phẩm làm ra đều bán hết), nếu biết rằng lãi 5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại A, lãi 3,5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại B, lãi 2 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại C.

a. Lập mô hình bài toán Quy hoạch tuyến tính.

b. Bằng phương pháp đơn hình, hãy giải bài toán trên.

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/2; 25/2; 15/2)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 285/4$

Bài tập 2.10. Một Xí nghiệp chăn nuôi cần mua một loại thức ăn tổng hợp T1, T2, T3 cho gia súc với tỷ lệ chất dinh dưỡng như sau:

- 1 kg T1 chứa 4 đơn vị dinh dưỡng D1, 2 đơn vị dinh dưỡng D2, và 1 đơn vị dinh dưỡng D3.
- 1 kg T2 chứa 1 đơn vị dinh dưỡng D1, 7 đơn vị dinh dưỡng D2, và 3 đơn vị dinh dưỡng D3
- 1 kg T3 chứa 3 đơn vị dinh dưỡng D1, 1 đơn vị dinh dưỡng D2, và 4 đơn vị dinh dưỡng D3.

Mỗi bữa ăn, gia súc cần tối thiểu 20 đơn vị D1, 25 đơn vị D2 và 30 đơn vị D3. Hỏi Xí nghiệp phải mua bao nhiêu kg T1, T2, T3 mỗi loại cho một bữa ăn để bảo đảm tốt về chất dinh dưỡng và tổng số tiền mua là nhỏ nhất? Biết rằng 1 kg T1 có giá là 10 ngàn đồng, 1 kg T2 có giá là 12 ngàn đồng, 1 kg T3 có giá là 14 ngàn đồng.

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/18; 49/18; 97/18)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 998/9$

Chương 3

Lý thuyết đối ngẫu

Mục lục chương 3

3.1 Định nghĩa bài toán đối ngẫu

Ví dụ 3.1. Có m loại nguyên liệu dự trữ dùng để sản xuất ra n loại sản phẩm. Để làm ra một sản phẩm j cần a_{ij} nguyên liệu i cho như bảng sau:

$NL \backslash SP$	x_1 1	x_2 2	$\cdots$ $\cdots$	x_n n	NL dự trữ
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
Giá bán	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

Trong đó, lượng nguyên liệu dự trữ thứ i là b_i và giá bán mỗi sản phẩm j là c_j. Yêu cầu tìm số lượng sản phẩm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho tổng doanh thu lớn nhất.

Giải. Tổng doanh thu lớn nhất

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n - \max$$

Khi đó tổng lượng nguyên liệu loại 1 sử dụng phải nhỏ hơn hoặc bằng b_1, nghĩa là

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

tương tự đối với nguyên liệu loại n

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Vậy ta có bài toán tìm $x_1, \ldots, x_n$ sao cho:

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Bài toán được viết dưới dạng ma trận

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

trong đó $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$; $\mathbf{b} \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$; $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

Ví dụ 3.2. Với giả thiết giống như ví dụ 3.1, giả sử có một người muốn mua lại toàn bộ nguyên liệu trên.

SP / NL	x_1 1	x_2 2	$\cdots$ $\cdots$	x_n n	NL dự trữ
$y_1, 1$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$y_2, 2$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m, m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
Giá bán	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

Tìm giá bán nguyên liệu i, y_i để:

- Tổng giá trị người mua phải trả là nhỏ nhất.
- Người bán không bị thiệt.

Giải. Tổng giá trị người mua phải trả nhỏ nhất được thể hiện:

$$z' = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \to \max$$

Khi sản xuất một sản phẩm 1, người ta cần a_{11} nguyên liệu 1, ..., a_{m1} nguyên liệu m.

- Khi bán nguyên liệu thì chủ sở hữu nhận được $a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m$,
- Mặc khác cùng lượng nguyên liệu trên khi sản xuất ra sản phẩm thì bán được với giá c_1.

Vậy để người bán không bị thiệt khi bán nguyên liệu sản xuất sản phẩm 1 thì

$$a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

Tương tự đối với sản phẩm n

$$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

Vậy bài toán tìm giá bán $y_1, \ldots, y_n$ sao cho

$$\begin{aligned}
&z' = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \to \min \\
&\text{Với các ràng buộc} \\
&\quad \begin{cases} a_{11}y_1 & + & \cdots & + & a_{m1}y_m & \geq & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}y_1 & + & \cdots & + & a_{mn}y_n & \geq & c_n \end{cases} \\
&\quad y_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}$$

Bài toán được viết dưới dạng ma trận

$$\begin{gathered}
z' = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \to \min \\
\text{Với các ràng buộc} \\
\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}
\end{gathered} \tag{3.2}$$

trong đó $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$; $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$; $\mathbf{c} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

Định nghĩa 3.1 (Bài toán đối ngẫu)**.** *Bài toán 3.1 và 3.2 được gọi là các bài toán đối ngẫu. Bài toán 3.1 gọi là bài toán gốc và bài toán 3.2 gọi là bài toán đối ngẫu. Nghĩa là:*

Bài toán gốc	***Bài toán đối ngẫu***
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$	$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$
Với các ràng buộc	*Với các ràng buộc*
$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$

Định lý 3.2. *Bài toán đối ngẫu của bài toán đối ngẫu 3.2 là bài toán gốc 3.1. Nghĩa là:*

Bài toán gốc	***Bài toán đối ngẫu***
$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$	$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$
Với các ràng buộc	*Với các ràng buộc*
$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$ (3.3)	$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ (3.4)
$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$	$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

Chứng minh. Bài toán 3.3 tương đương

$$-z' = -\mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}^T\mathbf{y} &\le -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Theo định nghĩa, đối ngẫu của 3.5:

$$-z = -\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} -(\mathbf{A}^T)^T\mathbf{y} &\ge -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.6}$$

tương đương với

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

3.1.1 Đối ngẫu của bài toán max

Định lý 3.3. *Cho bài toán gốc có dạng chính tắc, bài toán gốc và đối ngẫu tương ứng như sau.*

Bài toán gốc	***Bài toán đối ngẫu***
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$	$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$
Với các ràng buộc	*Với các ràng buộc*
$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.7)$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \quad (3.8)$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y}$ *tùy ý*

Chứng minh. Bài toán gốc 3.7 tương đương

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \max \\ \text{Với các ràng buộc}& \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ -\mathbf{A}\mathbf{x} &\leq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

tương đương

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \max \\ \text{Với các ràng buộc}& \\ \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}\mathbf{x} &\leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Bài toán đối ngẫu của 3.10

$$\begin{aligned} z' = \left(\mathbf{b}^T | -\mathbf{b}^T\right)\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} &\to \min \\ \text{Với các ràng buộc}& \\ \left(\mathbf{A}^T | -\mathbf{A}^T\right)\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{u} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.10}$$

tuong đương

$$z' = \mathbf{b}^T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \geq \mathbf{c}$$
$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

Đặt $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ ta được kết quả □

Định lý 3.4. *Bài toán gốc*

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$
Với các ràng buộc
$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \text{ tùy ý} \end{aligned} \tag{3.11}$$

có bài toán đối ngẫu

$$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$$
Với các ràng buộc
$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{y} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Chứng minh. Bài toán gốc 3.11 tương đương

$$-z = -\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min$$
Với các ràng buộc
$$\begin{aligned} -\mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \text{ tùy ý} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Theo định lý 3.3 và định lý 3.2, bài toán đối ngẫu của 3.13

$$-z' = -\mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \max$$
Với các ràng buộc
$$-\mathbf{A}^T\mathbf{y} = -\mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

tương đương

$$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$$
Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Hai bài toán quy hoạch tuyến tính sau gọi là cặp bài toán đối ngẫu. Bài toán 1 gọi là bài toán gốc, bài toán 2 gọi là bài toán đối ngẫu. Một ràng buộc và điều kiện về biến trên cùng một dòng gọi là **cặp ràng buộc đối ngẫu.**

Bài toán gốc (1)	Bài toán đối ngẫu (2)
$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max$	$z' = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \min$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$	$y_i \leq 0$ $y_i \geq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$ $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$ $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$

Nhận xét. Quan sát cặp bài toán đối ngẫu trên ta có các nhận xét:

- Trong cặp bài toán đối ngẫu trên, hệ số của ràng buộc thứ i của bài toán gốc trở thành hệ số của biến y_i trong bài toán đối ngẫu. Ngược lại, hệ số của x_j trong bài toán gốc chính là hệ số của dòng j trong bài toán đối ngẫu.
- Hệ số của hàm mục tiêu của bài toán gốc trở thành hệ số vế phải của ràng buộc và ngược lại. □

Ví dụ 3.3. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Bài toán gốc, đối ngẫu:

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu

$z = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \to \max$	$z' = 28y_1 + 10y_2 + 15y_3 \to \min$
$7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28$	$y_1 \geq 0$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$	$y_2 \in \mathbb{R}$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15$	$y_3 \leq 0$
$x_1 \geq 0$	$7y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 2$
$x_2 \geq 0$	$4y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 1$
$x_3 \in \mathbb{R}$	$2y_1 + 3y_2 - y_3 = -8$

Ví dụ 3.4. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Bài toán gốc, đối ngẫu:

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$	$z' = 2y_1 + 5y_2 + y_3 \to \min$
$3x_1 + 2x_2 \leq 2$	$y_1 \geq 0$
$-x_1 + 2x_2 \leq 5$	$y_2 \geq 0$
$4x_1 + x_2 \leq 1$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$3y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 2$
$x_2 \geq 0$	$2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3$

3.1.2 Đối ngẫu của bài toán min

Bài toán gốc (1)	Bài toán đối ngẫu (2)
$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min$	$z' = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \max$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$ $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$ $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$

Hai bài toán quy hoạch tuyến tính này gọi là cặp bài toán đối ngẫu. Bài toán 1 gọi là bài toán gốc, bài toán 2 gọi là bài toán đối ngẫu. Một ràng buộc và điều kiện về biến trên cùng một dòng gọi là **cặp ràng buộc đối ngẫu.**

Ví dụ 3.5. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$z = 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 - 3x_5 \leq 5 \\ x_1 - x_3 - 4x_4 - 5x_5 \leq -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 17 \end{cases}$$

$x_1, x_3 \geq 0; x_2 \in \mathbb{R}; x_4, x_5 \leq 0$

Giải. Bài toán gốc, đối ngẫu:

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \to \min$	$z' = 5y_1 - y_2 + y_3 + 17y_4 \to \min$
$12x_1 + 5x_2 - 3x_5 \leq 5$	$y_1 \leq 0$
$x_1 - x_3 - 4x_4 - 5x_5 \leq -2$	$y_2 \leq 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 1$	$y_3 \geq 0$
$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 17$	$y_4 \in \mathbb{R}$
$x_1 \geq 0$	$12y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 \leq 4$
$x_2 \in \mathbb{R}$	$5y_1 + y_3 + 4y_4 = 3$
$x_3 \geq 0$	$-y_2 + y_3 - 5y_4 \leq 1$
$x_4 \leq 0$	$-4y_2 - 2y_3 + y_4 \geq 1$
$x_5 \leq 0$	$-y_1 - 5y_2 \geq -1$

Các cặp ràng buộc trên cùng một dòng gọi là cặp ràng buộc đối ngẫu.

Ví dụ 3.6. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và giải bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình

$$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Giải. Bài toán gốc, bài toán đối ngẫu:

Bài toán gốc	**Bài toán đối ngẫu**
$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$	$z' = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$	$y_1 \geq 0$
$3x_1 + 2x_3 \geq 2$	$y_2 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 10$
$x_2 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 8$
$x_3 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 19$

Chuyển bài toán đối ngẫu sang dạng chính tắc

$$z' = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 = 10 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_5 = 8 \\ y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_6 = 19 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6$$

Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			6	2	5	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	10	1	3	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	8	1	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	19	1	2	5	0	0	1
			-6	-2	-5	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	2	0	1	-1	1	-1	0
$\mathbf{A}_1$	6	8	1	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	11	0	0	3	0	-1	1
max		Δ	0	10	7	0	6	0

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án hiện thời $\mathbf{y}^T = (8; 0; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $z' = 48$.

Nhận xét. Bài toán quy hoạch tuyến tính gốc dạng

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min \\ \text{Với các ràng buộc} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ thì bài toán đối ngẫu có dạng chuẩn

$$\begin{aligned} z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} &\to \max \\ \text{Với các ràng buộc} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

giải trực tiếp bằng phương pháp đơn hình rất đơn giản. □

Chú ý. Các phần sau, ta chỉ xét bài toán gốc dạng min .

3.2 Các định lý về đối ngẫu

Cho cặp bài toán gốc, đối ngẫu như sau:

Bài toán gốc (1)	**Bài toán đối ngẫu (2)**
$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min$	$z' = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \max$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$ $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$ $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$

Định lý 3.5 (Đối ngẫu yếu)**.** *Nếu* $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ *là phương án chấp nhận được của bài toán gốc và* $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_n)$ *là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu thì*

$$b_1y_1 + \cdots + b_my_m \leq c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \tag{3.14}$$

(Nghĩa là với cặp bài toán đối ngẫu, giá trị hàm mục tiêu của bài toán min *luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị hàm mục tiêu của bài toán* max.*)*

Chứng minh. Ta đặt

$$\begin{aligned} u_i &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ v_j &= x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} u_i &= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} v_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

và

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) - (b_1y_1 + \cdots + b_my_m)$$

Ta đã có điều cần chứng minh. □

Hệ quả 3.6 (Dấu hiệu không có phương án chấp nhận được)**.**

i. Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính gốc không giới nội dưới, thì bài toán đối ngẫu không có phương án chấp nhận được.

ii. Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không giới nội trên, thì bài toán gốc không có phương án chấp nhận được.

Chứng minh. Do sự tương tự ta chỉ chứng minh i). Giả sử bài toán gốc không giới nội dưới tức tồn các phương án chấp nhận được $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ sao cho giá trị hàm mục tiêu

$$z = c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \to -\infty \text{ khi } k \to \infty$$

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử bài toán đối ngẫu có phương án chấp nhận được $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_m)$, theo định lý đối ngẫu yếu

$$b_1y_1 + \cdots + b_my_m \leq c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \text{ với mọi } \mathbf{x}^T = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$$

Cho $k \to \infty$ ta được điều vô lý

$$b_1y_1 + \cdots + b_my_m \leq -\infty$$

Vậy ta đã có điều cần chứng minh. □

Hệ quả 3.7 (Dấu hiệu cặp phương án tối ưu)**.** *Cho* $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ *và* $\bar{\mathbf{y}}^T = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$ *là phương án chấp nhận được tương ứng của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Nếu giá trị hàm mục tiêu của hai bài toán này bằng nhau, nghĩa là*

$$c_1\bar{x}_1 + \cdots + c_n\bar{x}_n = b_1\bar{y}_1 + \cdots + b_m\bar{y}_m \tag{3.15}$$

thì $\bar{\mathbf{x}}$ *và* $\bar{\mathbf{y}}$ *là phương án tối ưu tương ứng của hai bài toán.*

Chứng minh. Gọi $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ là một phương án chấp nhận được bất kỳ của bài toán gốc. Theo định lý đối ngẫu yếu 3.5 ta có

$$c_1\bar{x}_1 + \cdots + c_n\bar{x}_n \le b_1\bar{y}_1 + \cdots + b_m\bar{y}_m \le c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

suy ra $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc. Chứng minh tương tự ta có $\bar{\mathbf{y}}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

Định lý 3.8 (Đối ngẫu mạnh)**.** *Nếu một trong hai bài toán quy hoạch tuyến tính gốc hoặc đối ngẫu có phương án tối ưu thì:*

i. Bài toán quy hoạch kia cũng có phương án tối ưu.

ii. Giá trị hàm mục tiêu tối ưu của hai bài toán bằng nhau.

Chứng minh. Bài toán quy hoạch tuyến tính có nhiều dạng tương đương, các bài toán đối ngẫu của dạng tương đương đó cũng là các dạng tương đương. Các bài toán tương đương cũng có cùng giá trị tối ưu. Do đó ta chỉ cần chứng minh định lý cho một trường hợp cụ thể

$$z = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

Bài toán đối ngẫu có dạng

$$z^{'} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}$$

Giả sử phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1; \ldots; \bar{x}_n)$ của bài toán gốc có hệ vector cơ sở liên kết $B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\}$. Ta đặt

$$\mathbf{x}^B = (x_{k_1}; \ldots; x_{k_m}); \mathbf{c}^B = (c_{k_1}; \ldots; c_{k_m}); \mathbf{B} = \left(\mathbf{A}_{k_1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}_{k_m}\right)$$

Các ràng buộc của bài toán đối ngẫu có dạng $\langle \mathbf{A}_{k_j}; \mathbf{y} \rangle \geq c_{k_j}, j = 1, \ldots, n$. Với phương án $\bar{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{c}^B\right)^T \mathbf{B}^{-1}$ ta có

$$\langle \mathbf{A}_{k_j}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = \left(\mathbf{c}^B\right)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{k_j} = \left(\mathbf{c}^B\right)^T \mathbf{A}^B_{k_j} = \Delta_{k_j} + c_{k_j} \geq c_{k_j}, \quad j = 1, \ldots, n$$

vì $\bar{\mathbf{x}}$ là phương án tối ưu nên $\Delta_{k_j} \geq 0, j = 1, \ldots, n$. Do đó $\bar{\mathbf{y}}$ là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu. Ta lại có

$$z' = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b} = \bar{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{c}^B\right)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

chú ý $\mathbf{x}^B$ là nghiệm của hệ $\mathbf{B}\mathbf{x}^B = \mathbf{b}$ hay $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}^B$. Suy ra

$$z' = \mathbf{c}^B \mathbf{x}^B = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = z$$

Theo hệ quả 3.7 ta có $\bar{\mathbf{y}}$ cũng là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

Định lý 3.9 (Độ lệch bù)**.** *Giả sử $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tương ứng là phương án chấp nhận được của bài toán gốc, bài toán đối ngẫu. Khi đó $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ là tối ưu khi và chỉ khi*

$$\begin{aligned} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i &= 0 \quad \forall i & (3.16) \\ x_j(a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m - c_j) &= 0 \quad \forall j & (3.17) \end{aligned}$$

Chứng minh. Ta đặt

$$\begin{aligned} u_i &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ v_j &= x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} u_i &= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} v_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

và

$$0 \le \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) - (b_1y_1 + \cdots + b_my_m)$$

Theo định lý đối ngẫu mạnh, nếu $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ và $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_m)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì

$$(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = (b_1y_1 + \cdots + b_my_m).$$

Do đó $u_i = v_j = 0$ với mọi i, j. Ngược lại nếu $u_i = v_j = 0$ với mọi i, j thì

$$(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = (b_1y_1 + \cdots + b_my_m).$$

Theo hệ quả 3.7 thì $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$ cũng là phương án tối ưu. □

Ví dụ 3.7. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 = 2 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3$$

có phương án tối ưu của bài toán gốc là $\mathbf{x}^T = (0; 1; 2)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Giải. Viết bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \to \min$	$z' = 2y_1 + 5y_2 \to \max$
$x_1 + x_3 = 2$	y_1 tùy ý
$x_2 + 2x_3 = 5$	y_2 tùy ý
$x_1 \ge 0$	$y_1 \le 4$
$x_2 \ge 0$	$y_2 \le 3$
$x_3 \ge 0$	$y_1 + 2y_2 \le 8$

Theo định lý độ lệch bù:

$$\begin{cases} (x_1 + x_3 - 2)y_1 = 0 \\ (x_2 + 2x_3 - 5)y_2 = 0 \\ x_1(y_1 - 4) = 0 \\ x_2(y_2 - 3) = 0 \\ x_3(y_1 + 2y_2 - 8) = 0 \end{cases}$$

thay $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2$ vào hệ trên ta được

$$\begin{cases} y_2 - 3 = 0 \\ y_1 + 2y_2 - 8 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $y_1 = 2, y_2 = 3$. Vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $\mathbf{y}^T = (2; 3)$.

Ví dụ 3.8. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$z = -4x_1 + 9x_2 + 16x_3 - 8x_4 - 20x_5 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & \geq & 5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & - & 5x_5 & \geq & -9 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

a. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

b. Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\mathbf{x}^T = (2; 0; 1; -2; 3)$.

Chú ý. Trong ví dụ này ta không dùng được dấu hiệu tối ưu trong chương 2 để kiểm tra tính tối ưu của phương án vì trong phương án có $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

Giải.

a. Bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = -4x_1 + 9x_2 + 16x_3 - 8x_4 - 20x_5 \to \min$	$z' = 5y_1 - 9y_2 + 2y_3 \to \max$
$5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \geq 5$	$y_1 \geq 0$
$-x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 \geq -9$	$y_2 \geq 0$
$-x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$	$y_3 \in \mathbb{R}$
$x_1 \geq 0$	$5y_1 - y_2 - y_3 \leq -4$

$x_2 \geq 0$	$4y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq 9$
$x_3 \geq 0$	$-y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 16$
$x_4 \in \mathbb{R}$	$3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = -8$
$x_5 \in \mathbb{R}$	$y_1 - 5y_2 + 3y_3 = -20$

Bài toán được viết lại:

$$z' = 5y_1 - 9y_2 + 2y_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 - y_3 \leq -4 \\ 4y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq 9 \\ -y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 16 \\ 3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = -8 \\ y_1 - 5y_2 + 3y_3 = -20 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

b. Kiểm tra tính tối ưu của $\mathbf{x}^T = (2; 0; 1; -2; 3)$. Sử dụng định lý độ lệch bù ta được

$$\begin{cases} (5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - 5)y_1 = 0 \\ (-x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 + 9)y_2 = 0 \\ (-x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 2)y_3 = 0 \\ (5y_1 - y_2 - y_3 + 4)x_1 = 0 \\ (4y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 9)x_2 = 0 \\ (-y_1 + 4y_2 - y_3 - 16)x_3 = 0 \\ (3y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 8)x_4 = 0 \\ (y_1 - 5y_2 + 3y_3 + 20)x_5 = 0 \end{cases}$$

và thay $\mathbf{x}$ vào hệ ta được

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ (5y_1 - y_2 - y_3 + 4) = 0 \\ (-y_1 + 4y_2 - y_3 - 16) = 0 \\ (3y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 8) = 0 \\ (y_1 - 5y_2 + 3y_3 + 20) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy có $\mathbf{y}^T = (0; 4; 0)$ thỏa định lý độ lệch bù. Nên $\mathbf{x}^T$ là phương án tối ưu và $\mathbf{y}^T$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

3.3 Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu

Định lý độ lệch bù 3.9 cho ta công cụ tổng quát để tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (gốc) khi biết phương án tối ưu của bài toán gốc (đối ngẫu) của nó. Từ định lý này, ta có hai hệ quả đề tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu khi biết phương án tối ưu của bài toán gốc hoặc bảng đơn hình của phương an tối ưu của bài toán gốc.

3.3.1 Biết phương án tối ưu bài toán gốc

Hệ quả 3.10. *Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}}$ với hệ vector cơ sở liên kết là $B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\}$. Phương án tối ưu $\bar{\mathbf{y}}$ của bài toán đối ngẫu là nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$.*

Chứng minh. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$z = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Cặp bài toán gốc, đối ngẫu như sau

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$	$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \min$
$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$

Theo định lý độ lệch bù:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\right) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{c}\right) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{3.19}$$

Do $\bar{\mathbf{x}}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc cho nên $\bar{\mathbf{y}}^T\left(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\right) = \mathbf{0}$ luôn đúng. Ta còn lại điều kiện

$$\bar{\mathbf{x}}^T\left(\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{c}\right) = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

Do $\bar{\mathbf{x}}$ có $x_{k_{m+1}} = \cdots = x_{k_n} = 0$ và $x_{k_1}, \ldots, x_{k_m} > 0$ nên khi thay $\bar{\mathbf{x}}$ vào (3.20) ta được hệ $\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$. □

Chú ý. Hệ phương trình $\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$ tương đương

$$\begin{cases} \langle \mathbf{A}_{k_1}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = c_{k_1} \\ \dots \\ \langle \mathbf{A}_{k_m}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = c_{k_m} \end{cases}$$

Ví dụ 3.9. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} \quad\; - x_2 + x_3 + x_4 \le 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad\; = 25 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 16 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

Tìm phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} \quad\; - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad = 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad\qquad\quad = 25 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + 5x_4 \qquad + x_6 = 16 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, 6$$

Giả bằng phương pháp đơn hình

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	4	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	10	0	-1	1	1	1	0
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_6$	0	16	0	2	1	5	0	1
			0	5	2	-1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	34/5	0	-7/5	4/5	0	1	-1/5
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	1	16/5	0	2/5	1/5	1	0	1/5
max		Δ	0	27/5	11/5	0	0	1/5

Phương án tối ưu của bài toán gốc $\mathbf{x}^T = (25; 0; 0; 16/5; 34/5; 0)$ có hệ vector cơ sở liên kết $B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5\}$. Ta đặt:

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}_1 \vdots \mathbf{A}_4 \vdots \mathbf{A}_5\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } \left(\mathbf{c}^B\right)^T = (c_1; c_4; c_5) = (2; 1; 0)$$

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$ hay

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nhận xét. Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu ở ví dụ 3.9 ở trên có thể làm như sau: Từ phương án tối ưu của bài toán gốc

$$\mathbf{x}^T = (25; 0; 0; 16/5; 34/5; 0)$$

ta xác định được $x_1, x_4, x_5 > 0$. Ta đánh dấu cột 1, 4, 5 của bài toán gốc:

$z =$	$0x_1$	$-\ 5x_2\ -\ 2x_3$	$+x_4$	$+x_5$		
ràng		$-\ x_2\ +\ x_3$	$+x_4$	$+x_5$		$= 10$
buộc	x_1	$+\ x_2\ +\ 3x_3$				$= 25$
		$2x_2\ +\ x_3$	$+5x_4$		$+\ x_6$	$= 16$

Lập hệ phương trình ba ẩn với hệ số các phương trình là các cột ở trên:

$$\begin{cases} 0y_1 + y_2 + 0y_3 = 0 \rightarrow \text{ cột } 1 \\ y_1 + 0y_2 + 5y_3 = 1 \rightarrow \text{ cột } 4 \\ y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 1 \rightarrow \text{ cột } 5 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $\mathbf{y}^T = (0; 2; 1/5)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

Ví dụ 3.10. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 \geq 16 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 23 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

có phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (0; 14; 6; 5)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Giải. Dạng chính tắc

$$
\begin{aligned}
& z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max \\
& \text{Với các ràng buộc} \\
& \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & & & & & = & 50 \\
-3x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & & & = & 16 \\
4x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 23
\end{array} \right. \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

Phương án tối ưu của bài toán dạng chính tắc trên

$$\mathbf{x}^T = (0; 14; 6; 5; 0; 0).$$

có $x_2; x_3; x_4 > 0$.

$$
\begin{array}{lr|c|c|c|lllll}
z = & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & & & & & \\
\hline
\text{ràng} & 5x_1 & +x_2 & +x_3 & +6x_4 & & & & = & 50 \\
\text{buộc} & -3x_1 & & +x_3 & +2x_4 & - & x_5 & & = & 16 \\
& 4x_1 & & +3x_3 & +x_4 & & & + \ x_6 & = & 23
\end{array}
$$

Lập hệ phương trình ba ẩn với hệ số các phương trình là các cột 2, 3, 4 ở trên:

$$
\begin{cases}
y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 2 \\
y_1 + y_2 + 3y_3 = 1 \\
6y_1 + 2y_2 + y_3 = 4
\end{cases}
$$

Giải hệ ta được $\mathbf{y}^T = (2; -23/5; 6/5)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

Ví dụ 3.11. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$
\begin{aligned}
& z = -6x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max \\
& \text{Với các ràng buộc} \\
& \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & & \leq & 4 \\
-4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 2
\end{array} \right. \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

có phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (0; 2; 0; 7)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Giải. Bài toán có dạng chính tắc

$z = -6x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$

có $\mathbf{x}^T = (0; 2; 0; 7; 8; 0)$ là phương án tối ưu. Trong phương án tồi ưu này, $x_2, x_4, x_5 > 0$.

$z =$	$-6x_1$	$+x_2$	$-$	$3x_3$	$+0x_4$	$+0x_5$				
ràng	$2x_1$	$-x_2$	$-$	$5x_3$	$+x_4$				$=$	5
buộc	x_1	$-2x_2$	$+$	$2x_3$		$+x_5$			$=$	4
	$-4x_1$	$+x_2$	$+$	x_3			$+$	x_6	$=$	2

Bài toán đối ngẫu có phương án tối ưu là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 = 4 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

suy ra $\mathbf{y}^T = (0; 0; 1)$. □

3.3.2 Có bảng đơn hình của phương án tối ưu

Hệ quả 3.11. *Cho bài toán gốc dạng chính tắc, phương án xuất phát có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị*

$$B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \ldots; \mathbf{A}_{k_m}\} = \{\mathbf{e}_1; \ldots; \mathbf{e}_m\}^*$$

và phương án tối ưu có các ước lượng $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là

$$\bar{\mathbf{y}} = (\Delta_{k_1} + c_{k_1}; \ldots; \Delta_{k_m} + c_{k_m})$$

*$\mathbf{e}_j = (0; \ldots; 0; 1; 0; \ldots; 0)$ là vector đơn vị thứ j

Chứng minh. Giả sử phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}}$ của bài toán gốc có hệ vector cơ sở liên kết $B' = \{\mathbf{A}_{l_1}; \ldots; \mathbf{A}_{l_m}\}$. Ta đặt

$$\mathbf{x}^{\mathbf{B}'} = (x_{l_1}; \ldots; x_{l_m}); \mathbf{c}^{\mathbf{B}'} = (c_{l_1}; \ldots; c_{l_m}); \mathbf{B}' = \left(\mathbf{A}_{l_1} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}_{l_m}\right)$$

Theo hệ quả 3.10, $\bar{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{c}^{\mathbf{B}'}\right)^T \mathbf{B}'^{-1}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Ta xét

$$\langle \mathbf{A}_{l_j}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = \left(\mathbf{c}^{\mathbf{B}'}\right)^T \mathbf{B}'^{-1} \mathbf{A}_{l_j} = \left(\mathbf{c}^{\mathbf{B}'}\right)^T \mathbf{A}_{lj}^{B'} = \Delta_{l_j} + c_{l_j}, \quad j = 1, \ldots, n$$

với các $i = l_j \in \{k_1; \ldots; k_m\}$

$$y_i = \langle \mathbf{A}_i; \bar{\mathbf{y}} \rangle = \langle \mathbf{e}_i; \bar{\mathbf{y}} \rangle = \Delta_i + c_i$$ □

Ví dụ 3.12. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} - x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 25 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Tìm phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc và biến đổi hàm mục tiêu ta được

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} - x_2 + x_3 + x_4 + \boxed{x_5} = 10 \\ \boxed{x_1} + x_2 + 3x_3 = 25 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 + \boxed{x_6} = 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

Tìm phương án tối ưu bài toán gốc

Phương án cực biên xuất phát có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_5; \mathbf{A}_1; \mathbf{A}_6\}$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	4	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	10	0	-1	1	1	1	0
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_6$	0	16	0	2	1	5	0	1
			0	5	2	-1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	34/5	0	-7/5	4/5	0	1	-1/5
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	1	16/5	0	2/5	1/5	1	0	1/5
max		Δ	0	27/5	11/5	0	0	1/5

Vậy phương án tối ưu của bài toán gốc $\mathbf{x}^T = (25; 0; 0; 16/5)$.

Suy ra phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu

$$\begin{cases} y_1 = c_{k_1} + \Delta_{k_1} = c_5 + \Delta_5 = 0 + 0 \\ y_2 = c_{k_2} + \Delta_{k_2} = c_1 + \Delta_1 = 2 + 0 \\ y_3 = c_{k_3} + \Delta_{k_3} = c_6 + \Delta_6 = 0 + 1/5 \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu $\mathbf{y}^T = (0; 2; 1/5)$ □

Ví dụ 3.13. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và giải bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình

$$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Giải. Bài toán gốc, bài toán đối ngẫu:

Bài toán gốc	**Bài toán đối ngẫu**
$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$	$z' = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$	$y_1 \geq 0$
$3x_1 + 2x_3 \geq 2$	$y_2 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 10$
$x_2 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 8$
$x_3 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 19$

Ta sẽ giải tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu sau đó suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc.

Tìm phương án tối ưu bài toán đối ngẫu

Bài toán đối ngẫu có dạng chính tắc

$$z' = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 + \boxed{y_4} = 10 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \boxed{y_5} = 8 \\ y_1 + 2y_2 + 5y_3 + \boxed{y_6} = 19 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6$$

Phương án cực biên ban đầu có hệ vector cơ sở liên kết đơn vị $B = \{\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5; \mathbf{A}_6\}$. Bảng đơn hình:

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			6	2	5	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	10	1	3	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	8	1	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	19	1	2	5	0	0	1
max		Δ	-6	-2	-5	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	2	0	1	-1	1	-1	0
$\mathbf{A}_1$	6	8	1	2	2	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	11	0	0	3	0	-1	1
max		Δ	0	10	7	0	6	0

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án hiện thời $\mathbf{y}^T = (8; 0; 0)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Suy phương án tối ưu bài toán gốc

$$\begin{cases} y_1 = c_{k_1} + \Delta_{k_1} = c_4 + \Delta_4 = 0 + 0 = 0 \\ y_2 = c_{k_2} + \Delta_{k_2} = c_5 + \Delta_5 = 0 + 6 = 6 \\ y_3 = c_{k_3} + \Delta_{k_3} = c_6 + \Delta_6 = 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu bài toán gốc $\mathbf{y}^T = (0; 6; 0)$. □

3.4 Bài tập chương 3

Bài tập 3.1. Giải các bài toán qui hoạch tuyến tính

a. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 19 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 24 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (7/5; 53/15; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 67/5$

b. $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 30 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (131/60; 127/60; 8/3)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 209/30$

Bài tập 3.2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

a. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

b. Hãy giải một trong hai bài toán rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

Bài tập 3.3. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 16x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 0; x_j \geq 0, \quad j = 2, \ldots, 4$$

a. Hỏi $\mathbf{x}^T = (25/13; 64/13; 0; 8/13)$ có phải là phương án tối ưu của bài toán trên không?

b. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bài tập 3.4. Một Xí nghiệp chăn nuôi cần mua một loại thức ăn tổng hợp T1, T2, T3 cho gia súc với tỷ lệ chất dinh dưỡng như sau:

- 1 kg T1 chứa 4 đơn vị dinh dưỡng D1, 2 đơn vị dinh dưỡng D2, và 1 đơn vị dinh dưỡng D3.
- 1 kg T2 chứa 1 đơn vị dinh dưỡng D1, 7 đơn vị dinh dưỡng D2, và 3 đơn vị dinh dưỡng D3
- 1 kg T3 chứa 3 đơn vị dinh dưỡng D1, 1 đơn vị dinh dưỡng D2, và 4 đơn vị dinh dưỡng D3.

Mỗi bữa ăn, gia súc cần tối thiểu 20 đơn vị D1, 25 đơn vị D2 và 30 đơn vị D3. Hỏi Xí nghiệp phải mua bao nhiêu kg T1, T2, T3 mỗi loại cho một bữa ăn để bảo đảm tốt về chất dinh dưỡng và tổng số tiền mua là nhỏ nhất? Biết rằng 1 kg T1 có giá là 10 ngàn đồng, 1 kg T2 có giá là 12 ngàn đồng, 1 kg T3 có giá là 14 ngàn đồng.

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/18; 49/18; 97/18)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 998/9$

Bài tập 3.5. Một Xí nghiệp xử lý giấy, có ba phân xưởng I, II, III cùng xử lý hai loại giấy A, B. Do hai phân xưởng có nhiều sự khác nhau, nên nếu cùng đầu tư 10 triệu đồng vào mỗi phân xưởng thì cuối kỳ

- Phân xưởng I xử lý được 6 tạ giấy loại A, 5 tạ giấy loại B.
- Phân xưởng II xử lý được 4 tạ giấy loại A, 6 tạ giấy loại B.
- Phân xưởng III xử lý được 5 tạ giấy loại A, 4 tạ giấy loại B.

Theo yêu cầu lao động thì cuối kỳ xí nghiệp phải xử lý ít nhất 6 tấn giấy loại A, 8 tấn giấy loại B. Hỏi cần đầu tư vào mỗi phân xưởng bao nhiêu tiền để xí nghiệp hoàn thành công việc với giá tiền đầu tư là nhỏ nhất.

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/2; 45/4; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 55/4$(đơn vị 10 triệu)

Bài tập 3.6. Một gia đình cần ít nhất 1800 đơn vị prôtêin và 1500 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Một kilôgam thịt bò chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit, một kilôgam thịt heo chứa 600 đơn vị prôtêin và 300 đơn vị lipit, một kilôgam thịt gà chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit. Giá một kilôgam thịt bò là 84 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt heo là 71 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt gà là 90 ngàn đồng. Hỏi một gia đình nên mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để bảo đảm tốt khẩu phần ăn trong một ngày và tổng số tiền phải mua là nhỏ nhất?

Đáp án. Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 1; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 239$.

Bài tập 3.7. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính.

$$z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq -4 \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_3, x_5 \geq 0$$

a. Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\mathbf{x}^T = (5; -6; 1; -4; 0)$ cho bài toán gốc

b. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên, chứng tỏa tập phương án của bài toán đối ngẫu là tập rỗng.

c. Chứng tỏa bài toán đã cho không có phương án tối ưu.

Hướng dẫn.

a. Sử dụng định lý độ lệch bù, với phương án $\mathbf{x}^T = (5; -6; 1; -4; 0)$ thì không tồn tại phương án nào của bài toán đối ngẫu thỏa định lý độ lệch bù.

b. Chỉ ra không có phương án nào thỏa các ràng buộc của bài toán đối ngẫu.

c. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử bài toán gốc có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu cũng có phương án tối ưu (theo định lý đối ngẫu mạnh 3.8). Điều này trái với câu a). Vậy ta được điều phải chứng minh.

Chương 4

Bài toán vận tải

Mục lục chương 4

4.1 Bài toán vận tải cân bằng thu phát

Phát \ Thu	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1j}	$\cdots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2j}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
a_i	c_{i1}	c_{i2}	$\cdots$	c_{ij}	$\cdots$	c_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mj}	$\cdots$	c_{mn}

- Có m nơi cung cấp hàng hóa (trạm phát), trạm phát i chứa a_i đơn vị hàng hóa $i = 1, \ldots, m$.

- Có n nơi tiêu thụ hàng hóa (trạm thu), trạm thu thứ j chứa b_j đơn vị hàng hóa $j = 1, \dots, n$.
- Tổng lượng phát bằng tổng lượng thu, nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{4.1}$$

- Cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ nơi cung cấp thứ i đến nơi tiêu thụ thứ j là c_{ij}.

Yêu cầu của bài toán là tìm lượng hàng phân phối $x_{ij} \geq 0$ từ trạm phát thứ i đến trạm thu thứ j sao cho:

- Tổng chi phí vận chuyển thấp nhất

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{4.2}$$

- Giải tỏa kho

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{4.3}$$

- Cửa hàng nhận đủ hàng

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \tag{4.4}$$

Bảng phân phối lượng hàng vận chuyển x_{ij} từ trạm phát thứ i đến trạm thu thứ j thường được trình bày như sau:

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1j} x_{1j}		c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2j} x_{2j}		c_{2n} x_{2n}
$\vdots$						
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}		c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
$\vdots$						
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}

Ma trận

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

thỏa các ràng buộc (4.3) và (4.4) được gọi là phương án chấp nhận được.

Tính chất 4.1. *Bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có phương án tối ưu.*

Chứng minh. Ta cần chứng minh tập các phương án chấp nhận được khác rỗng và hàm mục tiêu luôn bị chặn dưới. Thật vậy ta có

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \geq 0, \quad \forall i, j \tag{4.6}$$

là phương án chấp nhận được vì

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} = \frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} = \frac{b_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.8}$$

Hàm mục tiêu bị chặn dưới bởi không

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq 0 \tag{4.9}$$

Vậy theo tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính, bài toán vận tải luôn có phương án tối ưu.

Tính chất 4.2. *Ma trận hệ số các ràng buộc của bài toán vận tải có hạng bằng* $m + n - 1$.

4.2 Phương án cực biên

Định nghĩa 4.3 (Ô chọn, ô loại)**.**

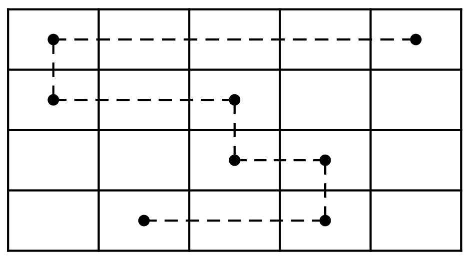
i. *Ta viết* $(i; j)$ *là ô ở dòng* i *cột* j.

ii. *Trong bảng vận tải, những ô có* $x_{ij} > 0$ *được gọi là* ***ô chọn***, *những ô có* $x_{ij} = 0$ *gọi là* ***ô loại***.

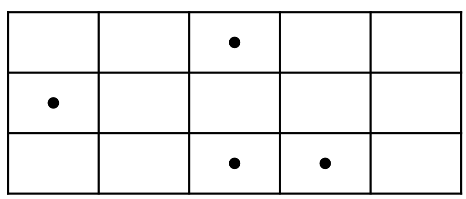
Định nghĩa 4.4 (Đường đi)**.** *Ta gọi một đường đi là tập hợp các ô chọn sao cho:*

- *Trên cùng một dòng hay một cột không có quá hai ô chọn.*
- *Hai ô chọn liên tiếp thì nằm trên cùng một dòng hay một cột.*

Ví dụ 4.1. Dãy các ô chọn sau tạo thành một đường đi:



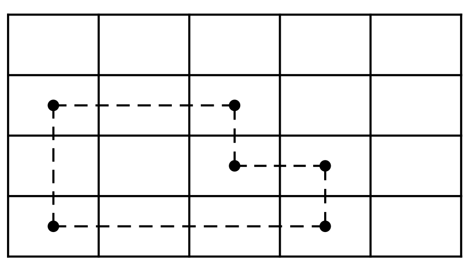
Ví dụ 4.2. Các ô chọn sau có lập thành đường đi không

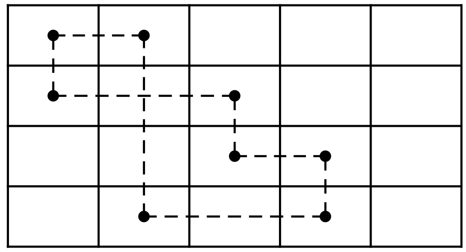


vì không có ô liên tiếp với $(2; 1)$.

Định nghĩa 4.5 (Chu trình)**.** *Một đường đi khép kín được gọi là một chu trình.*

Ví dụ 4.3. Dãy các ô chọn sau tạo thành một chu trình

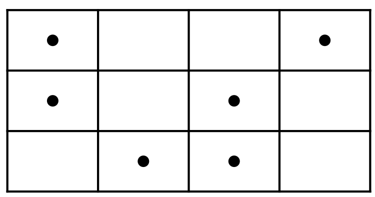




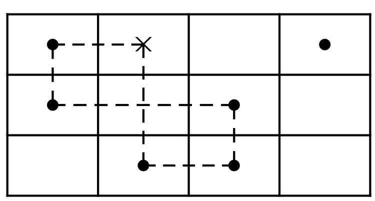
Tính chất 4.6. *Một bảng vận tải có m dòng, n cột thì tập các ô chọn không chứa chu trình có tối đa $m + n - 1$ ô.*

Tính chất 4.7. *Với một phương án có đủ $m + n - 1$ ô chọn không chứa chu trình, thì với bất kỳ một ô loại nào được đưa vào phương án thì ô loại này cùng với một số ô chọn đã cho để tạo thành chu trình và chu trình này là duy nhất.*

Ví dụ 4.4. Xét bảng vận tải 3 dòng, 4 cột với một phương án có $3+4-1 = 6$ ô chọn cho như sau



Khi ta thêm một ô loại bất kỳ thì ô loại này kết hợp với một số ô chọn này tạo thành chu trình. Chẳng hạn, ta thêm ô loại $(1, 2)$ vào phương án thì ô này sẽ kết hợp với các ô $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(2, 3)$; $(2, 1)$; $(1, 1)$ tạo thành chu trình.



□

Định lý 4.8. *Một phương án được gọi là phương án cực biên của bài toán vận tải khi và chỉ khi tập các ô chọn của nó không chứa chu trình.*

Định nghĩa 4.9. *Một phương án cực biên có $m + n - 1$ ô chọn được gọi là phương án cực biên không suy biến. Ngược lại, một phương án cực biên có ít hơn $m + n - 1$ ô chọn được gọi là phương án cực biên suy biến.*

Ví dụ 4.5. Phương án sau là phương án cực biên không suy biến

a_i \ b_j	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Ví dụ 4.6. Phương án sau là phương án cực biên suy biến

a_i \ b_j	**40**	**100**	**60**	**50**
80	1 **40**	2	4 **40**	3
70	2	4	5 **20**	1 **50**
100	4	1 **100**	2	5

Nhận xét. Một phương án cực biên có các cô chọn có thể không lập thành một đường đi.

4.3 Các phương pháp thành lập phương án cực biên

4.3.1 Phương pháp cước phí thấp nhất

Ý tưởng chính của phương pháp này là *phân phối lượng hàng lớn nhất có thể vào ô có cước phí thấp nhất*. Phương pháp phân phối lượng hàng x_{ij} được thực hiện như sau:

$$x_{ij} = \min\{a_i; b_j\} = \begin{cases} a_i & \text{loại dòng } i, b_j = b_j - a_i \\ b_j & \text{loại cột } j, a_i = a_i - b_j \\ a_i = b_j & \text{loại dòng } i \text{ cột j} \end{cases} \tag{4.10}$$

Lặp lại quá trình trên cho các ô tiếp theo đến khi yếu cầu của trạm phát, trạm thu được thỏa mãn. Phương án thu được bằng phương pháp này là phương án cực biên.

Ví dụ 4.7. Bằng phương pháp cước phí thấp nhất, thành lập một phương án cực biên của bài toán vận tải:

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Giải.

Ô $(1;1)$ có cước phí thấp nhất nên ta phân vào ô này một lượng nhiều nhất là 30. Khi đó:

- Trạm thu thứ nhất nhận đủ hàng, xóa cột 1.
- Trạm phát thứ nhất còn dư 50, ta ghi nháp 50.

	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Trong các ô còn lại, có hai ô: $(1;4)$ và $(3;2)$ có cùng cước phí thấp nhất là 2. Tuy nhiên nếu chọn ô $(1;4)$ làm ô chọn thì lượng hàng phân qua ô này là 50 sẽ nhiều hơn khi chọn ô $(3;2)$

- Trạm phát thứ nhất phát hết hàng, xóa dòng 1.
- Trạm thu thứ 4 thiếu hàng, ta ghi nháp 10.

					10
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Ô $(3;2)$ có cước phí thấp nhất là 2, ta phân một lượng 40 vào ô này:

- Trạm thu thứ 2 nhận đủ hàng, xóa cột 2.
- Trạm phát thứ 3 còn dư 15, ta ghi nháp 15.

					10
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
	45	5	7	4	9
15	**55**	12	2 **40**	3	6

Ô $(3;3)$ có cước phí thấp nhất là 3, ta phân một lượng 15 vào ô này:

- Trạm phát thứ 3 phát hết hàng, xóa dòng 3.
- Trạm thu thứ 3 còn thiếu 35, ta ghi nháp 35.

				35	**10**
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
	45	5	7	4	9
15	**55**	12	2 **40**	3 **15**	6

Trạm phát thứ 2 có lượng phát 45, ta phân vào ô $(2;3)$ một lượng 35 và ô $(2;4)$ một lượng 10. Cuối cùng ta được phương án cực biên không suy biến. Tổng cước phí $z = 485$.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

4.3.2 Phương pháp góc Tây - Bắc

Ta ưu tiên phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô ở góc Tây - Bắc (góc trên bên trái) của bảng vận tải. Khi đó nếu:

- Trạm phát nào đã hết hàng thì ta xóa dòng chứa trạm phát đó.
- Trạm thu nào đã nhận đủ hàng thì ta xóa cột chứa trạm thu đó.

Sau đó lặp lại quá trình trên đối với những ô còn lại. Phương án được thành lập bằng phương pháp góc Tây - Bắc là phương án cực biên

Ví dụ 4.8. Bằng phương pháp góc Tây - Bắc, thành lập phương án cực biên của bài toán vận tải

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Giải.

Phân vào ô $(1;1)$ một lượng 30, khi đó:

- Trạm thu thứ nhất nhận đủ hàng, ta xóa cột 1
- Trạm phát thứ nhất còn dư 50, ghi nháp 50.

	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
50	**80**	1 **30**	5	7	2
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Phân vào ô $(1;2)$ một lượng 40, khi đó:

- Trạm thu thứ 2 nhận đủ hàng, xóa cột 2.
- Trạm phát thứ nhất còn dư 10, ghi nháp 10.

	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
10	**80**	1 **30**	5 **40**	7	2
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Phân vào ô $(1;3)$ một lượng 10, khi đó:

- Trạm phát thứ nhất phát hết hàng, xóa trạm phát 1.
- Trạm thu thứ 3 còn thiếu 40, viết nháp 40.

				40	
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
10	**80**	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
	45	5	7	4	9
	55	12	2	3	6

Phân vào ô $(2;3)$ một lượng 40, khi đó:

- Trạm thu thứ 3 nhận đủ, xóa trạm thu 3.
- Trạm phát thứ 2 còn dư 5, ta viết nháp 5.

				40	
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
10	**80**	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
5	**45**	5	7	4 **40**	9
	55	12	2	3	6

Cuối cùng phân vào ô $(2;4)$ một lượng 5 và ô $(3;4)$ một lượng 55 thì ta được phương án cực biên. Phương án cực biên này không suy biến, giá trị cước phí của phương án này là $z = 790$.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
45	5	7	4 **40**	9 **5**
55	12	2	3	6 **55**

4.3.3 Phương pháp Vogel (Fogel)

Phương pháp Vogel cho ta một phương án cực biên khá tốt, theo nghĩa nó rất gần với phương án tối ưu.

i) Trên mỗi dòng, mỗi cột của ma trận cước phí ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất.

ii) Chọn dòng hay cột có hiệu số này lớn nhất (nếu có nhiều dòng hay cột thỏa điều kiện này thì ta chọn một dòng hay một cột trong các dòng, cột này)

iii) Phân lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất trên dòng hay cột vừa chọn được. Khi đó nếu nơi nào đã phát hết hàng thì ta xóa dòng chứa nơi phát đó. Nếu nơi nào nhận đủ hàng thì ta xóa cột chứa nơi nhận đó. Lúc đó cột (dòng) này hiệu số sẽ không tính cho bước sau.

iv) Lặp lại ba bước nói trên với những ô còn lại cho đến hết. Ta thu được phương án cực biên.

Ví dụ 4.9. Bằng phương pháp Vogel tìm phương án cực biên của bài toán vận tải:

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Giải.

Cột 1 có hiệu số lớn nhất (cũng có thể chọn cột 4), ta sẽ phân vào cột 1. Phân vào ô (1; 1) có cước phí thấp nhất một lượng nhiều nhất là 30.

- Trạm thu thứ 1 nhận đủ hàng, xóa cột 2.
- Trạm phát thứ 1 còn dư 50, viết nháp 50.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**	
80	1 **30**	5	7	2	1
45	5	7	4	9	1
55	12	2	3	6	1
	(4)	3	1	4	

Cột 4 có hiệu số lớn nhất , ta sẽ phân hàng vào cột 4. Phân vào ô (1; 4) có cước phí thấp nhất một lượng nhiều nhất là 50.

- Trạm phát thứ 1 hết hàng, xóa trạm phát 1.
- Trạm thu thứ 4 còn thiếu 10, viết nháp 10.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**	
80	1 **30**	5	7	2 **50**	3
45	5	7	4	9	3
55	12	2	3	6	1
		3	1	(4)	

Cột 4 có hiệu số lớn nhất , ta sẽ phân hàng vào cột 5. Phân vào ô (3; 2) có cước phí thấp nhất một lượng nhiều nhất là 40.

- Trạm thu thứ 2 nhận đủ hàng, xóa cột 2.
- Trạm phát thứ 4 còn dư 15, viết nháp 15.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**	
80	1 **30**	5	7	2 **50**	
45	5	7	4	9	3
55	12	2 **40**	3	6	1
		(5)	1	3	

Dòng 2 có hiệu số lớn nhất, ta sẽ phân hàng vào dòng 2. Phân vào ô $(2;3)$ có cước phí thấp nhất một lượng nhiều nhất là 45.

- Trạm phát thứ 2 hết hàng, xóa dòng 2.
- Trạm thu thứ 3 còn thiếu 5, viết nháp 5.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**	
80	1 **30**	5	7	2 **50**	
45	5	7	4 **45**	9	(5)
55	12	2 **40**	3	6	4
			1	3	

Cuối cùng phân vào ô $(3;3)$ một lượng 5 và ô $(3;4)$ một lượng 10 thì ta được phương án cực biên. Phương án cực biên này không suy biến, giá trị cước phí của phương án này là $z = 465$.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **45**	9
55	12	2 **40**	3 **5**	6 **10**

Nhận xét. Phương pháp Vogel cho ta một phương án cực biên khá tốt, theo nghĩa nó gần phương án tối ưu hơn hai phương pháp trước.

4.4 Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải

Để giải bài toán vận tải, ta thực hiện bốn bước như sau:

Bước 1. Thành lập phương án cực biên bằng một trong các phương pháp: **cước phí thấp nhất, Tây - Bắc, Vogel**.

Bước 2. Xét xem phương án cực biên hiện thời đã tối ưu hay chưa bằng thuật toán **quy không cước phí ô chọn.** Nếu phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu thì thuật toán kết thúc. Ngược lại sang bước 3.

Bước 3. Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn xem 4.4.2.

Bước 4. Quay về bước 2.

4.4.1 Thuật toán quy không cước phí ô chọn

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án cực biên ban đầu không suy biến (có $m + n - 1$ ô chọn). Nếu bài toán có phương án cực biên suy biến (có ít hơn $m+n-1$ ô chọn) thì ta thêm **ô chọn giả** (i,j) với $x_{ij}=0$ vào sao cho các ô chọn giả này và các ô chọn ban đầu không tạo thành chu trình.

Ví dụ 4.10. Xét bài toán vận tải có phương án cực biên suy biến

$a_i \backslash b_j$	**40**	**100**	**60**	**50**
80	1 **40**	2	4 **40**	3
70	2	4	5 **20**	1 **50**
100	4	1 **100**	2	5

Ta thêm ô chọn giả $(1,2)$ với $x_{12}=0$ thì bài toán có $m+n-1$ ô chọn

$a_i \backslash b_j$	**40**	**100**	**60**	**50**
80	1 **40**	2 **0**	4 **40**	3
70	2	4	5 **20**	1 **50**
100	4	1 **100**	2	5

Thuật toán quy không cước phí thực hiện như sau: Lần lượt cộng vào các cước phí ở dòng $1,\ldots,m$ một lượng $r_1,\ldots,r_m$ và vào cột $1,\ldots,n$ một lượng $s_1,\ldots,s_n$ sao cho tổng cước phí trên các ô chọn bằng không.

Ví dụ 4.11. Quy không cước phí các ô chọn của bảng vận tải.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Giải. Cần tìm r_i và s_j sao cho trên các ô chon có:

$$r_i + s_j + c_{ij} = 0$$

nghĩa là:

$$\begin{cases} r_1 + s_1 + 1 = 0 \\ r_1 + s_4 + 2 = 0 \\ r_2 + s_3 + 4 = 0 \\ r_2 + s_4 + 9 = 0 \\ r_3 + s_2 + 2 = 0 \\ r_3 + s_3 + 3 = 0 \end{cases}$$

		s_1	s_2	s_3	s_4
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
r_1	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
r_2	**45**	5	7	4 **35**	9 **10**
r_3	**55**	12	2 **40**	3 **15**	6

Hệ có 6 phương trình 7 biến này có vô số nghiệm, do đó có một biến nhận giá trị tùy ý. Ở đây tôi cho $r_1 = 0$ và tính được $s_1 = -1; s_4 = -2; r_2 = -7; s_3 = 3; r_3 = -6; s_2 = 4$

		s_1=-1	s_2=4	s_3=3	s_4=-2
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
r_1=0	**80**	1 **30**	5	7	2 **50**
r_2=-7	**45**	5	7	4 **35**	9 **10**
r_3=-6	**55**	12	2 **40**	3 **15**	6

Ta thay c_{ij} bằng $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$ thì được bài toán mới gọi là bài toán sau khi quy không cước phí ô chọn

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	0 **30**	9	10	0 **50**
45	-3	4	0 **35**	0 **10**
55	5	0 **40**	0 **15**	-2

Định lý 4.10. *Lần lượt cộng vào các cước phí ở dòng $1, \ldots, m$ một lượng $r_1, \ldots, r_m$ và vào cột $1, \ldots, n$ một lượng $s_1, \ldots, s_n$ tức thay c_{ij} bởi*

$$c'_{ij} = r_i + s_j + c_{ij}$$

thì ta được bài toán mới có cùng phương án tối ưu với bài toán cũ.

Nhận xét. Theo định lý 4.10, bài toán vận tải với phương án cực biên

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

và bài toán vận tải sau khi quy không cước phí các ô chọn với phương án cực biên

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	0 **30**	9	10	0 **50**
45	-3	4	0 **35**	0 **10**
55	5	0 **40**	0 **15**	-2

là tương đương nhau. Nghĩa bài toán quy không cước phí tối ưu thì bài toán ban đầu cũng tối ưu và chúng cùng phương án tối ưu.
Ta nhận thấy, trong bài toán quy không cước phí trên dòng 2, có ô $(2,1)$ có cước phí "rẻ" hơn cước phí các ô chọn $(2,3)$ và $(2,4)$ nên phương án hiện thời chưa tối ưu.

Định lý 4.11 (Dấu hiệu tối ưu)**.** *Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí các ô chọn:*

- *Nếu* $c'_{ij} \geq 0$ *với mọi* (i,j) *thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.*
- *Nếu tồn tại* $c'_{ij} < 0$ *thì có thể tìm một phương án mới tốt hơn phương án hiện thời.*

Ví dụ 4.12. Chứng minh phương án cực biên hiện thời của bài toán vận tải sau không phải là phương án tối ưu.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
45	5	7	4 **40**	9 **5**
55	12	2	3	6 **55**

Giải.

		s_1=-1	s_2=-5	s_3= -7	s_4=-12
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
r_1=0	**80**	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
r_2=3	**45**	5	7	4 **40**	9 **5**
r_3=6	**55**	12	2	3	6 **55**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	0 **30**	0 **40**	0 **10**	-10
45	7	5	0 **40**	0 **5**
55	17	3	2	0 **55**

$\exists - c'_{14} < 0$ nên phương án cực biên này không là phương án tối ưu. $\square$

Ví dụ 4.13. Chứng minh phương án cực biên hiện thời của bài toán vận tải sau là phương án tối ưu.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	1 **20**	5	7	2 **60**
45	5 **10**	7	4 **35**	9
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Giải.

		s_1=-1	s_2=1	s_3=0	s_4=-2
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
r_1=0	**80**	1 **20**	5	7	2 **60**
r_2=-4	**45**	5 **10**	7	4 **35**	9
r_3=-3	**55**	12	2 **40**	3 **15**	6

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**50**	**60**
80	0 **20**	6	7	0 **60**
45	0 **10**	4	0 **35**	3
55	8	0 **40**	0 **15**	1

$\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án này là phương án tối ưu. □

4.4.2 Xây dựng phương án cực biên mới

Trên bảng quy không cước phí tìm

Bước 1. Ô chọn mới là ô loại có c'_{ij} âm nhất (là số âm có giá trị tuyệt đối lớn nhất).

Bước 2. Xác định chu trình chứa ô chọn mới vừa xác định bước 1. Ô chọn mới được đánh dấu (+), các ô chọn còn lại trên chu trình đánh dấu xen kẻ dấu (-), (+) trên chu trình.

Bước 3. Xác định phương án cực biên mới.

- Lượng điều chỉnh $q = \min\left\{x_{ij} | (i, j) \text{ có dấu (-)}\right\}$
- Phương án cực biên mới:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + q & \text{Ô có dấu (+)} \\ x_{ij} - q & \text{Ô có dấu (-)} \\ x_{ij} & \text{Ô không có dấu} \end{cases} \tag{4.11}$$

Ví dụ 4.14. Cho bài toán vận tải có phương án cực biên

$a_i \backslash b_j$	**30**	**50**	**80**	**40**
90	3 **30**	2	5 **20**	1 **40**
70	4	1 **50**	3 **20**	6
40	7	4	2 **40**	5

Chứng minh phương án cực biên hiện thời chưa tối ưu. Xây dựng một phương án khác tốt hơn.

Giải.

		s_1=-3	s_2=-3	s_3=-5	s_4=-1
	$a_i \backslash b_j$	**30**	**50**	**80**	**40**
r_1=0	**90**	3 **30**	2	5 **20**	1 **40**
r_2=2	**70**	4	1 **50**	3 **20**	6
r_3=3	**40**	7	4	2 **40**	5

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $c'_{12} < 0$ nên có phương án mới tốt hơn

$a_i \backslash b_j$	**30**	**50**	**80**	**40**
90	0 **30**	-1 +	0 − **20**	0 **40**
70	3	0 − **50**	0 + **20**	7
40	7	4	0 **40**	7

Tiếp theo ta xây dựng phương án mới: Ô $(1;2)$ kết hợp với một số ô chọn thành chu trình.

Lượng điều chỉnh

$$q = \min 20; 50 = 20$$

Phương án mới có

$$\begin{cases} x_{12} = x_{12} + 20 = 20 \\ x_{13} = x_{13} - 20 = 0 \\ x_{22} = x_{22} - 20 = 30 \\ x_{23} = x_{23} + 20 = 40 \end{cases}$$

$a_i \backslash b_j$	**30**	**50**	**80**	**40**
90	3 **30**	2 **20**	5	1 **40**
70	4	1 **30**	3 **40**	6
40	7	4	2 **40**	5

Giá trị hàm mục tiêu của phương án mới là $z = 400$, giá trị hàm mục tiêu của phương án trước là $z = 420$.

Ví dụ 4.15. Cho bài toán vận tải có phương án cực biên

$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
80	5 **50**	5 **30**	12
20	7	9	11 **20**
60	4	2 **10**	3 **50**

Chứng minh phương án cực biên hiện thời chưa tối ưu. Xây dựng một phương án khác tốt hơn.

Giải. **Quy không cước phí ô chọn**

		s_1=-5	s_2=-5	s_3=-6
	a_i \ b_j	**50**	**40**	**70**
r_1=0	**80**	5 **50**	5 **30**	12
r_2=-5	**20**	7	9	11 **20**
r_3=3	**60**	4	2 **10**	3 **50**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn $\exists c'_{21} < 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu. **Tiếp theo ta xây dựng phương án mới**: Ô $(2;1)$ kết hợp với một số ô chọn thành chu trình.

a_i \ b_j	**50**	**40**	**70**
80	0 − **50**	0 + **30**	3
20	-3 + ×	-1	0 − **20**
60	2	0 − **10**	0 + **50**

Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{10; 20; 50\} = 10$$

Phương án mới có

$$\begin{cases} x_{11} = x_{11} - 10 = 40 \\ x_{12} = x_{12} + 10 = 40 \\ x_{21} = x_{21} + 10 = 10 \\ x_{23} = x_{23} - 10 = 10 \\ x_{33} = x_{33} + 10 = 60 \\ x_{32} = x_{32} - 10 = 0 \end{cases}$$

a_i \ b_j	**50**	**40**	**70**
80	5 **40**	5 **40**	12
20	7 **10**	9	11 **10**
60	4	2	3 **60**

Phương án mới có giá trị hàm mục tiêu 760 tốt hơn phương án trước có giá trị hàm mục tiêu 790.

Ví dụ 4.16. Cho bài toán vận tải có phương án cực biên

a_i \ b_j	**25**	**25**	**10**
10	5	3	5 **10**
30	7 **25**	6 **5**	8
20	3	2 **20**	2

Chứng minh phương án cực biên hiện thời chưa tối ưu. Xây dựng một phương án khác tốt hơn.

Giải.

Do phương án cực biên hiện thời suy biến nên ta thêm vào ô chọn giả sao cho ô này với một số ô sẵn có không lập thành chu trình. Ở đây tôi chọn ô $(2,3)$ với $x_{23} = 0$.

$a_i \backslash b_j$	**25**	**25**	**10**
10	5	3	5 **10**
30	7 **25**	6 **5**	8 **0**
20	3	2 **20**	2

Bước lặp thứ nhất

Quy không cước phí các ô chọn

	$a_i \backslash b_j$	s_1=-7 **25**	s_2=-6 **25**	s_3=-8 **10**
r_1=3	**10**	5	3	5 **10**
r_2=0	**30**	7 **25**	6 **5**	8 **0**
r_3=4	**20**	3	2 **20**	2

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $c'_{33} < 0$ nên có phương án khác tốt hơn Ta xây dựng phương án mới: Ô $(3;3)$ kết hợp với một số ô chọn sẵn có lập thành chi trình

$a_i \backslash b_j$	**25**	**25**	**10**
10	1	0	0 **10**
30	0 **25**	0 + **5**	0 − **0**
20	0	0 − **20**	-2 +

Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{0; 20\} = 0$$

Phương án mới như bảng bên cạnh

$a_i \backslash b_j$	**25**	**25**	**10**
10	5	3	5 **10**
30	7 **25**	6 **5**	8
20	3	2 **20**	2 **0**

Nhận xét. Giá trị hàm mục tiêu của phương án mới giống giá trị hàm mục tiêu phương án cũ (chưa tốt hơn). Ở đây ta thấy hai phương án chỉ

chỉ khác nhau vị trí của ô chọn giả. Ô chọn giả của phương án mới có cước phí thấp nhất trong các ô chọn giả. Do đó khi chọn ô chọn giả nên chọn ô nào có cước phí thấp nhất để quá trình tìm phương án tốt hơn sẽ nhanh hơn.

Bước lặp thứ hai

Quy không cước phí ô chọn

	a_i \ b_j	s_1=-7 **25**	s_2=-6 **25**	s_3=-6 **10**
r_1=1	**10**	5	3	5 **10**
r_2=0	**30**	7 **25**	6 **5**	8
r_3=4	**20**	3	2 **20**	2 **0**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $c'_{12} < 0$ nên có phương án khác tốt hơn Ta xây dựng phương án mới: Ô $(1;2)$ kết hợp với một số ô chọn sẵn có lập thành chi trình

a_i \ b_j	**25**	**25**	**10**
10	-1	-2 ∗ +	0 − **10**
30	0 **25**	0 **5**	2
20	0	0 − **20**	0 + **0**

Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{10; 20\} = 0$$

Phương án mới như bảng bên cạnh

a_i \ b_j	**25**	**25**	**10**
10	5	3 **10**	5
30	7 **25**	6 **5**	8
20	3	2 **10**	2 **10**

Giá trị hàm mục tiêu của phương án mới này $z = 275$ tốt hơn giá trị hàm mục tiêu của phương án ban đầu $z = 295$. □

Ví dụ 4.17. Giải bài toán vận tải

$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
80	5	5	12
20	7	9	11
60	4	2	3

Giải. Bằng phương pháp Vogel ta có phương án cực biên không suy biến như bảng bên dưới:

	$a_i \backslash b_j$	s_1=-5 **50**	s_2=-5 **40**	s_3=-9 **70**
r_1=0	**80**	5 **40**	5 **40**	12
r_2=-2	**20**	7 **10**	9	11 **10**
r_3=6	**60**	4	2	3 **60**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.

$a_i \backslash b_j$	**50**	**40**	**70**
80	0 **40**	0 **40**	3
20	0 **10**	2	0 **10**
60	5	3	0 **60**

4.5 Một số trường hợp đặc biệt

4.5.1 Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

Trường hợp phát lớn hơn thu. Ta thêm trạm thu giả b_{n+1}, với lượng hàng là

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad c_{in+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Lúc này bài toán cân bằng thu phát.

Trường hợp phát ít hơn thu. Ta thêm trạm phát giả a_{m+1}, với lượng hàng là

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i,\quad c_{m+1i}=0,\quad j=1,\dots,n$$

Lúc này bài toán cân bằng thu phát.

Ví dụ 4.18. Giải bài toán vận tải không cân bằng thu phát cho bởi bảng vận tải sau:

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**
80	7	5	2
70	3	4	5
150	9	2	7

Giải.
Tổng lượng phát là 300, tổng lượng thu là 260. Trong bài này ta thêm trạm thu giả với lượng thu là 40.
Bằng phương pháp Vogel tìm phương an cực biên ban đầu nhưng chú ý tính toán trên ô thật trước, sau cùng phần còn dư ta mới phân vào ô giả

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	7	5	2 **80**	0
70	3 **70**	4	5	0
150	9 **30**	2 **65**	7 **15**	0 **40**

Quy không cước phí ô chọn:

	$a_i \backslash b_j$	s_1=-9 **100**	s_2=-2 **65**	s_3=-7 **95**	s_4=0 **40**
r_1=5	**80**	7	5	2 **80**	0
r_2=6	**70**	3 **70**	4	5	0
r_3=0	**150**	9 **30**	2 **65**	7 **15**	0 **40**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	3	8	0 **80**	5
70	0 **70**	8	4	6
150	0 **30**	0 **65**	0 **15**	0 **40**

4.5.2 Bài toán vận tải có ô cấm

Đây là bài toán vận tải mà vì một lý do no đó có một nơi phát không thể chuyên chở hàng đến một nơi nhận nào đó được. Để giải quyết vấn đề này chúng ta cho cước phí ở ô đó là M, với M là số dương rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh. Sau đó chúng ta giải như những bài toán đã trình bày ở trên.

Ví dụ 4.19. Giải bài toán vận tải với hai ô cấm cho như sau:

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	6	5	11	10
70	10		5	7
150	9	8	7	

Giải.

Bài toán có 2 ô cấm, ta thay ô cấm này thành ô có cước phí M (M là số rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh)

Sử dụng phương pháp Vogel tìm được phương án cực biên ban đầu.

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	6 **15**	5 **65**	11	10
70	10	M	5 **30**	7 **40**
150	9 **85**	8	7 **65**	M

Quy không cước phí ô chọn:

		s_1=-6	s_2=-5	s_3=-4	s_4=-6
	$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
r_1=0	**80**	6 **15**	5 **65**	11	10
r_2=-1	**70**	10	M	5 **30**	7 **40**
r_3=-3	**150**	9 **85**	8	7 **65**	M

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn có $\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu của phương án tối ưu này là 2065

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	0 **15**	0 **65**	7	4
70	3	M-6	0 **30**	0 **40**
150	0 **85**	0	0 **65**	M-9

Nhận xét. Phương án tối ưu của ví dụ 4.19 không duy nhất, vì theo bảng sau khi quy không cước phí có ô loại (3; 2) có cùng cước phí là 0 với các ô chọn

Xét một chi trình có chứa ô (3; 2) như hình bên. Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{65; 85\} = 65$$

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	6 + **15**	5 − **65**	11	10
70	10	M	5 **30**	7 **40**
150	9 − **85**	8 + *	7 **65**	M

Phương án tối ưu mới có cùng giá trị tối ưu với phương án trước.

$a_i \backslash b_j$	**100**	**65**	**95**	**40**
80	6 **80**	5	11	10
70	10	M	5 **30**	7 **40**
150	9 **20**	8 **65**	7 **65**	M

4.6 Bài toán vận tải cực đại cước phí

Bước 1. Thành lập phương án cực biên bằng phương pháp cực đại cước phí, chúng ta phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí lớn nhất.

Bước 2. Xét xem phương án cực biên hiện thời đã tối ưu hay chưa bằng thuật toán **quy không cước phí ô chọn.**

- Nếu $c'_{ij} \leq 0$ với mọi (i, j) thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu, thuật toán kết thúc.
- Nếu tồn tại $c'_{ij} > 0$ thì có thể tìm một phương án mới tốt hơn phương án hiện thời, chuyển sang bước 3.

Bước 3. Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn, chú ý ô chọn mới là ô loại có $c'_{ij} > 0$ lớn nhất, các bước tiếp theo làm giống bài toán min .

Bước 4. Quay về bước 2.

Ví dụ 4.20. Giải bài toán vận tải cực đại cước phí sau:

a_i \ b_j	**70**	**55**	**85**	**60**
90	6	5	11	10
80	10	6	5	7
100	9	8	7	4

Giải.

4.7 Bài tập chương 4

Bài tập 4.1. Giải bài toán vận tải

a_i \ b_j	**30**	**50**	**80**	**40**
90	3	2	5	1
70	4	1	3	6
40	7	4	2	5

Đáp án: Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 30 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = 400$$

Bài tập 4.2. Giải bài toán vận tải:

$a_i \backslash b_j$	**40**	**100**	**60**	**50**
80	1	2	4	3
70	2	4	5	1
100	4	1	2	5

Đáp án: Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 & 60 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 40 & 60 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = 390$$

Bài tập 4.3. Giải bài toán vận tải:

$a_i \backslash b_j$	**20**	**30**	**45**	**50**
40	5	8	6	11
30	6	7	7	12
55	8	8	9	10

Đáp án: Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 0 \\ 20 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 30 \end{pmatrix}, \quad z = 930$$

Bài tập 4.4. Giải bài toán vận tải có ô cấm

$a_i \backslash b_j$	**45**	**100**	**50**	**60**
70		16	15	11
100	10	17	9	
85	12	14	10	13

Đáp án: Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 60 \\ 45 & 5 & 50 & 0 \\ 0 & 85 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = 2995$$

Bài tập 4.5. Cho bài toán vận tải cân bằng thu phát và một phương án:

$a_i \backslash b_j$	**40**	**45**	**60**	**65**
90	4 **25**	5	7	2 **65**
65	5	1 **45**	2 **20**	10
55	11 **15**	2	3 **40**	6

a. Tính cước phí vận chuyển của phương án này, chứng minh phương án cực biên đã cho không phải là phương án tối ưu.

b. Xuất phát từ phương án trên hãy xây dựng một phương án mới tốt hơn (chỉ cần một phương án mới tốt hơn).

Bài tập 4.6. Một nhà máy chế biến thịt, sản xuất ba loại thịt: bò, lợn, cừu, với tổng lượng mỗi ngày là 480 tấn bò; 400 tấn lợn; 230 tấn cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt nấu chín để bán trong giờ làm việc là 420 tấn. Ngoài ra nấu thêm ngoài giờ 250 tấn (với giá cao hơn). Lợi nhuận thu được trên một tấn được cho bằng bảng sau: (với đơn vị là triệu đồng)

	Tươi	Nấu chín	Nấu chín Ngoài giờ
Bò	8	11	14
Lợn	4	7	12
Cừu	4	9	13

Mục đích của nhà máy là tìm phương án sản xuất để làm cực đại lợi nhuận. Hãy tìm phương án tối ưu.

Phụ lục A

Đề thi mẫu

A.1 Đề học kì III năm 2010-2011

Câu 1 (2,5 điểm)**.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính mà ta gọi là bài toán (P)

$$z = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

a. Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 4; 2)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu của bài toán (P).

b. Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phương án $\mathbf{x}$ nói ở trên.

Câu 2 (4,5 điểm)**.** Một Xí nghiệp chăn nuôi cần mua một loại thức ăn tổng hợp T1, T2, T3 cho gia súc với tỷ lệ chất dinh dưỡng như sau: 1 kg T1 chứa 4 đơn vị dinh dưỡng D1, 2 đơn vị dinh dưỡng D2, và 1 đơn vị dinh dưỡng D3; 1 kg T2 chứa 1 đơn vị dinh dưỡng D1, 7 đơn vị dinh dưỡng D2, và 3 đơn vị dinh dưỡng D3; 1 kg T3 chứa 3 đơn vị dinh dưỡng D1, 1 đơn vị dinh dưỡng D2, và 4 đơn vị dinh dưỡng D3. Mỗi bữa ăn, gia súc cần tối thiểu 20 đơn vị D1, 25 đơn vị D2 và 30 đơn vị D3. Biết rằng 1 kg T1 có giá là 10 ngàn đồng, 1 kg T2 có giá là 12 ngàn đồng, 1 kg T3 có giá là 14 ngàn đồng. Xí nghiệp muốn mua các loại thức ăn T1, T2, T3 để bảo đảm tốt về chất dinh dưỡng cho một bữa ăn và tổng số tiền mua là nhỏ nhất.

a. Hãy lập bài toán quy hoạch tuyến tính, ta gọi đây là bài toán (P).
b. Viết bài toán đối ngẫu (Q) của bài toán (P).
c. Giải bài toán (Q), từ đó suy ra phương án tối ưu của bài toán (P).

Câu 3 (3 điểm)**.** Cho bài toán vận tải (min hàm mục tiêu cước phí) cân bằng thu phát như sau:

$a_i \backslash b_j$	**25**	**35**	**120**	**50**
110	9	6	5	7
80	2	8	10	6
40	5	7	9	4

a. Hãy xây dựng một phương án ban đầu bằng phương pháp Fogel.
b. Hỏi phương án vừa xây dựng ở câu a) có phải là phương án tối ưu? Nếu chưa tối ưu, hãy xây dựng một phương án mới tối hơn (chỉ cần một phương án mới tốt hơn).

A.2 Đề học kì I năm 2011-2012

Câu 1 (3,5 điểm)**.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính (P)

$$z = 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 34x_4 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

a. Chứng minh phương án $\mathbf{x}^T = (8/3; 0; 0; 7/3)$ là phương án cực biên nhưng không phải là phương án tối ưu của bài toán (P). Từ phương án này hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn.
b. Cho biết $\mathbf{x}^{*T} = (0; 4; 0; 1)$ là phương án tối ưu của bài toán (P). tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu của bài toán (P).

Câu 2 (4 điểm)**.** Một xí nghiệp có thể sử dụng tối đa 590 giờ máy cán, 340 giờ máy tiện, 200 giờ máy mài để sản xuất ba loại sản phẩm. Biết rằng để sản xuất một đơn vị sản phẩm thứ nhất cần 2 giờ máy cán, 5 giờ máy tiện và 1 giờ máy mài. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm thứ hai cần 5 giờ máy cán, 3 giờ máy tiện và 1 giờ máy mài. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm thứ ba cần 8 giờ máy cán, 3 giờ máy tiện và 3 giờ máy mài. Giá bán một đơn vị sản phẩm thứ nhất, thứ hai, thứ ba tương ứng là 140, 130, 180 triệu đồng. Hỏi xí nghiệp nên sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm mỗi loại để được doanh thu nhiều nhất.

Câu 3 (2,5 điểm)**.** Giải bài toán vận tải cân bằng thu phát có ô cấm với các số liệu được cho trong bảng sau:

$a_i \backslash b_j$	**55**	**65**	**120**	**60**
110	9	7	14	6
110	2	3	8	7
80	$\times$	$\times$	4	3

A.3 Đề thi học kỳ II năm 2011-2012

Câu 1 (2 điểm)**.** Một đoàn lữ hành cần thuê những con lạc đà một bứu và hai bứu để chở hàng hóa từ A đến B. Mỗi con lạc đà một bứu có thể chở được 300 kg hàng hóa, và mỗi con lạc đà hai bứu có thể chở được 500 kg hàng hóa. Trong chuyến đi, mỗi con lạc đà:

- Một bứu dùng 4 bó cỏ kho và 8 lít nước.
- Hai bứu dùng 3 bó cỏ khô và 10 lít nước.

Lượng cỏ khô và nước dự trữ lần lượt là 30 bó và 100 lít. Mỗi con lạc đà một bứu thuê với giá 3 đơn vị tiền tệ, và mỗi con lạc đà hai bứu thuê với giá 5 đơn vị tiền tệ, Nếu đoàn lữ hành này chở ít nhất 4000 kg hàng hóa từ A đến B thì cần thuê bao nhiêu con lạc đà một bứu và hai bứu để số tiền thuê là ít nhất. Hãy lập mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính.

Câu 2 (5 điểm)**.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính mà ta gọi là bài toán (P)

$$z = 14x_1 + 12x_2 + 14x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 25 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 35 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3$$

a. Viết bài toán đối ngẫu (Q) của bài toán (P).

b. Giải bài toán đối ngẫu (Q), sau đó suy ra phương án tối ưu (nếu có) của bài toán (P).

Câu 3 (3 điểm)**.** Giải bài toán vận tải (min hàm mục tiêu cước phí) không cân bằng thu phát, với các số liệu được cho trong bảng sau:

$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**
120	12	7	14
150	3	5	7
130	8	9	9

A.4 Đề học kì III năm 2011-2012

Câu 1 (3 điểm)**.** Giải bài toán vận tải (min hàm mục tiêu) cân bằng thu phát với số liệu trong bảng sau

$a_i \backslash b_j$	**100**	**80**	**100**	**40**
200	6	12	7	3
100	13	4	15	3

Câu 2 (4 điểm)**.** Một công ty sản xuất hai loại thực phẩm A, B. Nguyên liệu để sản xuất gồm: bột, đường và dầu thực vật với trữ lượng tương ứng là: 30 tấn, 12 tấn, 6 tấn. Để sản xuất 1 tấn:

- Thực phẩm loại A cần: 0,5 tấn bột, 0,5 tấn đường và 0,2 tấn dầu thực vật.
- Thực phẩm loại B cần: 0,8 tấn bột, 0,4 tấn đường và 0,4 tấn dầu thực vật.

Giá bán một tấn thực phẩm A là 4500 USD, giá bán 1 tấn thực phẩm B là 4000USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại thực phẩm bao nhiêu tiền để có doanh thu lớn nhất?

Câu 3 (3 điểm)**.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 & & & & & & & & & \geq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & & & \geq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & \geq & 3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdots & & & \vdots & \vdots \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & \geq & n \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$

a. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

b. Hãy giải một trong hai bài toán trên rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

Phụ lục B

Bài giải đề mẫu

B.1 Bài giải học kì III năm học 2010-2011

Câu 1.

a. $\mathbf{x}^T = (0; 4; 2)$ có hệ vector liên kết

$$B = \{\mathbf{A}_2 \vdots \mathbf{A}_3\} \Rightarrow |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy $\mathbf{x}$ là phương án cực biên. Hệ các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 = 4 \\ -5x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Đặt $\mathbf{c}^B = (c_2; c_3) = (5; 7)$ ta tính được

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta_3 = 0 \\ \Delta_1 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_1 \rangle - c_1 = (5; 7)(8; -5) - 4 = 1 \end{aligned}$$

Do $\exists \Delta_1 = 1 > 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu.

b. Xây dựng phương án mới tốt hơn.

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$
			4	5	7
$\mathbf{A}_2$	5	4	8	1	0
$\mathbf{A}_3$	7	2	-5	0	1
			1	0	0
$\mathbf{A}_1$	4	1/2	1	1/8	0
$\mathbf{A}_3$	7	9/2	0	5/8	1
min		Δ	0	-1/8	0

Phương án $(1/2; 0; 9/3)$ là phương án tốt hơn.

Câu 2. Gọi x_1, x_2, x_3 là lượng thực phẩm I, II, III

	T1-x_1	T2-x_2	T3-x_3	Tối thiểu
D1	4	1	3	20
D2	2	7	1	25
D3	1	3	4	30
Giá	10	12	14	

a. Ta có bài toán quy hoạch

$$z = 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 20 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 25 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

b. Bài toán đối ngẫu

$$z^{'} = 20y_1 + 25y_2 + 30y_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 10 \\ y_1 + 7y_2 + 3y_3 \leq 12 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 14 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 3$$

c. Giải bằng phương pháp đơn hình

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			20	25	30	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	10	4	2	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	12	1	7	3	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	14	3	1	4	0	0	1
max		Δ	-20	-25	-30	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	13/2	13/4	7/4	0	1	0	-1/4
$\mathbf{A}_5$	0	3/2	-5/4	25/4	0	0	1	-3/4
$\mathbf{A}_3$	30	7/2	3/4	1/4	1	0	0	1/4
max		Δ	5/2	-35/2	0	0	0	15/2

$\mathbf{A}_4$	0	152/25	18/5	0	0	1	-7/25	-1/25
$\mathbf{A}_2$	25	6/25	-1/5	1	0	0	4/25	-3/25
$\mathbf{A}_3$	30	86/25	4/5	0	1	0	-1/25	7/25
max		Δ	-1	0	0	0	14/5	27/5
$\mathbf{A}_1$	20	76/45	1	0	0	5/18	-7/90	-1/90
$\mathbf{A}_2$	25	26/45	0	1	0	1/18	13/90	-11/90
$\mathbf{A}_3$	30	94/45	0	0	1	-2/9	1/45	13/45
max		Δ	0	0	0	5/18	49/18	97/18

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là

$$\mathbf{y}^T = (76/45; 26/45; 94/45)$$

Ta suy ra được phương án tối ưu của bài toán gốc là

$$\mathbf{x}^T = (5/18; 49/18; 97/18)$$

Câu 3.

a. Phương án xây dựng bằng phân phối Vogel

		s_1=3	s_2=-3	s_3=-5	s_4=-1
	$r_i \backslash s_j$	**25**	**35**	**120**	**50**
r_1=0	**110**	9	6	5 **110**	7
r_2=-5	**80**	2 **25**	8 **35**	10 **10**	6 **10**
r_3=-3	**40**	5	7	9	4 **4**

b. Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí

$a_i \backslash b_j$	**55**	**65**	**120**	**60**
110	12	3	0 **110**	6
110	0 **25**	0 **35**	0 **10**	0 **10**
80	5	1	1	0 **10**

Do $\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.

B.2 Bài giải học kì I năm học 2011-2012

Câu 1.

a. Phương án $\mathbf{x}^T = (8/3; 0; 0; 7/3)$ có hệ vector liên kết

$$B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_4\} \Rightarrow |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Vậy $\mathbf{x}$ là phương án cực biên. Hệ các ràng buộc tương đương

$$\begin{cases} x_1 + 2/3x_2 + 10/3x_3 = 8/3 \\ \quad 1/3x_2 - 1/3x_3 + x_4 = 7/3 \end{cases}$$

Đặt $\mathbf{c}^B = (c_1; c_4) = (5; 34)$. Ta tính được

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_4 = 0 \\ \Delta_2 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_2^B \rangle - c_2 = (5; 34)(2/3; 1/3) - 3 = 35/2 \\ \Delta_3 &= \langle \mathbf{c}^B; \mathbf{A}_3^B \rangle - c_3 = (5; 34)(10/3; -1/3) - 3 = 7/3 \end{aligned}$$

Do có $\Delta_2 = 35/3 > 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu. Xây dựng phương án mới tốt hơn

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$
			5	3	3	34
$\mathbf{A}_1$	5	8/3	1	2/3	10/3	0
$\mathbf{A}_4$	34	7/3	0	1/3	-1/3	1
			0	35/3	7/3	0
$\mathbf{A}_2$	3	4	3/2	1	5	0
$\mathbf{A}_4$	34	1	-1/2	0	-2	1
min		Δ	-35/2	0	-56	0

b. Phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}}^T = (0; 4; 0; 1)$ có hệ vector cơ sở liên kết $B = \{\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_4\}$. Đặt

$$\mathbf{c}^B = (c_2; c_4) = (3; 34); \quad \mathbf{B} = (\mathbf{A}_2 \vdots \mathbf{A}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 3 \\ 4y_1 + y_2 = 34 \end{cases}$$

	SPI-x_1	SPII-x_2	SPIII-x_3	
Cán	2	5	8	≤ 590
Tiện	5	3	3	≤ 340
Mài	1	1	3	≤ 200
Lợi nhuận	140	130	180	

Câu 2. Ta có mô hình

$$z = 14x_1 + 13x_2 + 18x_3 \to \max \text{ (đơn vị 10 triệu)}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 590 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 340 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 200 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

Dạng chính tắc

$$z = 14x_1 + 13x_2 + 18x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 590 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 340 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 200 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			14	13	18	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	590	2	5	8	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	340	5	3	3	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	200	1	1	3	0	0	1
			-14	-13	-18	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	170/3	-2/3	7/3	0	1	0	-8/3
$\mathbf{A}_5$	0	140	4	2	0	0	1	-1
$\mathbf{A}_3$	18	200/3	1/3	1/3	1	0	0	1/3
			-8	-7	0	0	0	6
$\mathbf{A}_4$	0	80	0	8/3	0	1	1/6	-17/6
$\mathbf{A}_1$	14	35	1	1/2	0	0	1/4	-1/4

$\mathbf{A}_3$	18	55	0	1/6	1	0	-1/12	5/12
			0	-3	0	0	2	4
$\mathbf{A}_2$	13	30	0	1	0	3/8	1/16	-17/16
$\mathbf{A}_1$	14	20	1	0	0	-3/16	7/32	9/32
$\mathbf{A}_3$	18	50	0	0	1	-1/16	-3/32	19/32
max		Δ	0	0	0	9/8	35/16	13/16

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án tối ưu là $\mathbf{x}^T = (20; 30; 50)$.

Câu 3. Phương án xuất phát được xây dựng bằng phân phối Vogel

		s_1=-6	s_2=-7	s_3=-14	s_4=-6
	r_i \ s_j	**55**	**65**	**120**	**60**
r_1=0	**110**	9	7 **10**	14 **40**	6 **60**
r_2=4	**110**	2 **55**	3 **55**	8	7
r_3=10	**80**	M	M	4 **80**	3

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí

a_i \ b_j	**55**	**65**	**120**	**60**
110	3	0 + **10**	0 − **40**	0 **60**
110	0 **55**	0 − **55**	-2 +	5
80	M+4	M+3	0 **80**	3

Do $\exists c'_{23} = -2 < 0$ nên phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu. Ta xây dựng phương án mới tốt hơn: Lượng điều chỉnh

$$q = \min\{40; 55\} = 40$$

Phương án mới

		s_1=-2	s_2=-3	s_3=-8	s_4=-2
	r_i \ s_j	**55**	**65**	**120**	**60**
r_1=-4	**110**	9	7 **50**	14	6 **60**
r_2=0	**110**	2 **55**	3 **15**	8 **40**	7
r_3=4	**80**	M	M	4 **80**	3

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn:

$a_i \backslash b_j$	**55**	**65**	**120**	**60**
110	3	0 **50**	2	0 **60**
110	0 **55**	0 **15**	0 **40**	5
80	M+2	M+1	0 **80**	5

$\forall c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 60 \\ 55 & 15 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}$$

là phương án tối ưu.

B.3 Bài giải học kì II năm học 2011-2012

Câu 1. Gọi x_1, x_2 là số con lạc đà một, hai bứu cần thuê:

	Một bứu - x_1	Hai bứu - x_2	Dự trữ
Cỏ khô	4	3	≤ 30
Nước	8	10	≤ 100
Chở	300	500	≥ 4000
Tiền thuê	3	5	

Vậy tìm x_1, x_2 sao cho

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 100 \\ 300x_1 + 500x_2 \geq 4000 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

Câu 2.

a. Bài toán đối ngẫu

$$z = 30y_1 + 25y_2 + 35y_3 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 14 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 12 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 14 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

b. Giải bài toán đối ngẫu. Bài toán có dạng chính tắc

$$z = 30y_1 + 25y_2 + 35y_3 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 = 14 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_5 = 12 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_6 = 14 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			30	25	35	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	14	1	3	1	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	12	1	2	3	0	1	0
$\mathbf{A}_6$	0	14	3	1	2	0	0	1
			-30	-25	-35	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	0	10	2/3	7/3	0	1	-1/3	0
$\mathbf{A}_3$	35	4	1/3	2/3	1	0	1/3	0
$\mathbf{A}_6$	0	6	7/3	-1/3	0	0	-2/3	1
			-55/3	-5/3	0	0	35/3	0
$\mathbf{A}_4$	0	58/7	0	17/7	0	1	-1/7	-2/7
$\mathbf{A}_3$	35	22/7	0	5/7	1	0	3/7	-1/7
$\mathbf{A}_1$	30	18/7	1	-1/7	0	0	-2/7	3/7
			0	-30/7	0	0	45/7	55/7
$\mathbf{A}_2$	25	58/17	0	1	0	7/17	-1/17	-2/17
$\mathbf{A}_3$	35	12/17	0	0	1	-5/17	8/17	-1/17
$\mathbf{A}_1$	30	52/17	1	0	0	1/17	-5/17	7/17
max		Δ	0	0	0	30/17	105/17	125/17

Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án $\mathbf{y}^T = (52/17; 58/17; 12/17; 0; 0; 0)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Phương án tối ưu của bài toán gốc là $\mathbf{x}^T = (30/17; 105/15; 125/17)$.

Câu 3. Tổng phát là 400, tổng thu là 360 nên ta thêm trạm thu giả với lượng là 40

$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**	**40**
120	12	7	14	0
150	3	5	7	0
130	8	9	9	0

Phương án cực biên xây dựng theo phương pháp Vogel

$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**	**40**
120	12	7 **120**	14	0
150	3 **135**	5 **5**	7 **10**	0
130	8	9	9 **90**	0 **40**

Quy không cước phí

		s_1=-3	s_2=-5	s_3=-7	s_4=3
	$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**	**40**
r_1=-2	**120**	12	7 **120**	14	0
r_2=0	**150**	3 **135**	5 **5**	7 **10**	0
r_3=-3	**130**	8	9	9 **90**	0 **40**

Bài toán sau khi quy không cước phí

$a_i \backslash b_j$	**135**	**125**	**100**	**40**
120	7	0 **120**	5	1
150	0 **135**	0 **5**	0 **10**	3
130	2	1	0 **90**	0 **40**

Mọi $c'_{ij} \geq 0$ nên phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $z = 2150$.

B.4 Bài giải học kì III năm học 2011-2012

Câu 1. Phương án xuất phát được xây dựng bằng phân phối Vogel

		s_1=-6	s_2=-4	s_3=-7	s_4=-3
	$r_i \backslash s_j$	**100**	**80**	**100**	**40**
r_1=0	**220**	6 **100**	12	7 **100**	3 **20**
r_2=0	**100**	13	4 **80**	15	3 **20**

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí

$a_i \backslash b_j$	**100**	**80**	**100**	**40**
220	0 **100**	8	0 **100**	0 **20**
100	7	0 **80**	8	0 **20**

Vậy phương án trên là phương án tối ưu.

Câu 2. Gọi x_1, x_2 là số sản phẩm A, B cần sản xuất. Theo đề bài ta có

	Thực phẩm A-x_1	Thực phẩm B-x_2	
Bột	0,5	0,8	≤ 30
Đường	0,5	0,4	≤ 12
Dầu	0,2	0,4	≤ 6
Doanh thu	4500	4000	

Ta có bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4500x_1 + 4000x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 1/2x_1 + 4/5x_2 \leq 30 \\ 1/2x_1 + 2/5x_2 \leq 12 \\ 1/5x_1 + 2/5x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$
			45	40	0	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	30	1/2	4/5	1	0	0

$\mathbf{A}_4$	0	12	1/2	2/5	0	1	0
$\mathbf{A}_5$	0	6	1/5	2/5	0	0	1
max		Δ	-45	-40	0	0	0
$\mathbf{A}_3$	0	18	0	2/5	1	-1	0
$\mathbf{A}_1$	45	24	1	4/5	0	2	0
$\mathbf{A}_5$	0	6/5	0	6/25	0	-2/5	1
max		Δ	0	-4	0	90	0
$\mathbf{A}_3$	0	16	0	0	1	-1/3	-5/3
$\mathbf{A}_1$	45	20	1	0	0	10/3	-10/3
$\mathbf{A}_2$	40	5	0	1	0	-5/3	25/6
max		Δ	0	0	0	250/3	50/3

Câu 3. Bài toán đối ngẫu

$$z' = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \cdots + ny_n \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n \le 1 \\ \qquad y_2 + y_3 + \cdots + y_n \le 2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \; \vdots \; \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y_n \le n \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Bằng cách thêm ẩn phụ chuyển bài toán sang dạng chính tắc. Lập bảng đơn hình ta tìm được phương án tối ưu

$$\mathbf{y}^T = (y_1; \dots; y_n; y_{n+1}; \dots; y_{2n}) = (0; \dots; 0; 1)$$

dùng hệ quả 3.11 suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc là

$$\mathbf{x}^T = (n; 0; \dots; 0)$$

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Quốc Khánh, Trần Huệ Nương. (2000). *Quy hoạch tuyến tính*. NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Đình Tùng. (2010). *Quy hoạch tuyến tính*.

[3] Lê Khánh Luận. (2006). *Quy hoạch tuyến tính* . NXB Lao động.

[4] Bùi Phúc Trung. (2003). *Quy hoạch tuyến tính*. NXB Lao động - Xã hội.

[5] Bernard Kolman, Robert E. Beck. (1995). *Elementary Linear Programming with Applications*. Elsevier Science & Technology Books.

[6] Robert J. Vanderbei. (2007). *Linear Programming, Foundations and Extensions Third Edition*. Springer Publication.

[7] George B. Dantzig, Mukund N. Thapa. (1997). *Linear Programming, Introduction*. Springer Publication.