



ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-TPHCM  
ĐỀ THI CUỐI KỲ  
Học kỳ I-Năm học 2018-2019

MÃ LƯU TRỮ  
(do phòng KT-ĐBCL  
ghi)

Tên học phần: \_\_\_\_\_ Mã HP: \_\_\_\_\_

Thời gian làm bài: \_\_\_\_\_ Ngày thi: \_\_\_\_\_

Ghi chú:

- Sinh viên không được sử dụng tài liệu dưới mọi hình thức.
- Để nhận được trọn vẹn điểm, sinh viên cần lập luận rõ ràng và chính xác.

Họ tên sinh viên: \_\_\_\_\_ MSSV: \_\_\_\_\_ STT: \_\_\_\_\_

Bài 1. (2đ) Tính giới hạn sau:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x \sin x}$

Bài 2. (2đ) Cho  $f(x) = e^{2x}$ . Với bất kỳ số tự nhiên  $n, k$ , hãy tìm

- (a)  $f^{(k)}(x)$ .
- (b) khai triển Taylor của hàm  $f$  quanh điểm 3 đến cấp  $n$ .

Bài 3. (2đ) Cho  $f(x) = 2 - |2x - 1|$ . Chứng minh rằng không tồn tại giá trị  $c \in (0, 3)$  sao cho  $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$  và giải thích tại sao điều này không mâu thuẫn với định lý giá trị trung bình?

Bài 4. (2đ) Một giọt mực rơi xuống mặt hồ (xem mặt hồ như mặt phẳng) và loang theo mọi hướng như nhau. Khi đó, tại mỗi thời điểm vết mực trên mặt hồ là hình tròn. Biết rằng tốc độ thay đổi diện tích vết mực là  $2\text{mm}^2/\text{s}$ . Tìm tốc độ thay đổi bán kính vết mực tại thời điểm  $r = 1\text{ mm}$ .

Bài 5. (2đ) Sinh viên chọn 1 trong 2 ý sau.

- (a) Kỳ vọng (trung bình giá trị) của một biến ngẫu nhiên liên tục tuyệt đối (BNNLTĐ)  $X$  có hàm mật độ  $f$  là  $E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ . Hãy tìm kỳ vọng của BNNLTĐ  $X$  có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{nếu } x \geq 1, \\ 0 & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

- (b) Sử dụng tích phân suy rộng hoặc **bằng cách khác** để tìm độ lớn phần diện tích của miền  $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{2}{x^2}\}$ .

# Answer Key for Exam A

## Bài 1. Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x \sin x} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x + x \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{\sin x + x \cos x} \\&\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x - x \sin x} \\&= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

## Bài 2. Lời giải. (a) Bằng phương pháp qui nạp, ta nhận được

$$f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}.$$

(b) Vậy khai triển Taylor của hàm số  $f(x)$  quanh điểm  $a = 3$  là

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k e^6}{k!} (x-3)^k + R_n(x). \quad (1)$$

**Nhận xét.** Sinh viên có thể sử dụng đẳng thức chuẩn  $e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + o(u^k)$ . Áp dụng đẳng thức chuẩn cho  $f(x) = e^6 \dots e^{2(x-3)}$  với  $u = 2(x-3)$ , ta nhận được kết quả cần tìm.

## Bài 3. Lời giải.

$$\begin{aligned}f(x) = 2 - |2x - 1| &= \begin{cases} 2 - (2x - 1) & \text{nếu } 2x - 1 \geq 0 \\ 2 - [-(2x - 1)] & \text{nếu } 2x - 1 < 0 \end{cases} \\&= \begin{cases} 3 - 2x & \text{nếu } x \geq \frac{1}{2} \\ 1 + 2x & \text{nếu } x < \frac{1}{2}, \end{cases} \\f'(x) &= \begin{cases} -2 & \text{nếu } x < \frac{1}{2} \\ 2 & \text{nếu } x > \frac{1}{2}, \end{cases}\end{aligned}$$

và  $f$  không khả vi tại  $\frac{1}{2}$ .

Do đó,  $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0) \Rightarrow -3 - 1 = f'(c).3 \Rightarrow f'(c) = -\frac{4}{3} \neq \pm 2$ .

Điều này không mâu thuẫn với định lý giá trị trung bình vì  $f$  không khả vi (có đạo hàm) tại  $x = \frac{1}{2}$ .

## Bài 4. Lời giải. Gọi $S, r$ lần lượt là diện tích, bán kính của vết mực ở thời điểm $t$ với $t > 0$ .

Khi đó,  $S = \pi r^2$ . Do đó,  $S' = 2\pi r r'$ . Suy ra  $r' = \frac{S'}{2\pi} = \frac{1}{\pi r}$ .

Khi  $r = 1$  mm,  $r' = \frac{1}{\pi}$  mm/s.

**Bài 5. Lời giải.** (a)

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx = \dots = 2.$$

(b) Diện tích miền  $A$  :

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx = \dots = 2.$$