Ôn thi cuối kì môn vi tích phân 1B
Đáp án

CLB học thuật NES

* **Lưu ý**

- Nhớ cách tính giới hạn cơ bản năm như năm lớp 12 (hàm liên tục thì thay số trực tiếp, thử dạng vô định bằng nhân lượng liên hợp)
- Nhớ các tính đạo hàm cơ bản như:
  + $(x^n)' = nx^{n-1}$
  + $(\sin x)' = \cos x$
  + $(\cos x)' = -\sin x$
  + $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
  + $(e^x)' = e^x$
  + $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- Nhớ các đạo hàm lượng giác ngược như:
  + $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  + $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  + $(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$
  + $(\cot^{-1} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$
- Đạo hàm hàm hợp
- Cách tính tích phân cơ bản (nhớ các đạo hàm trên), biết cách tích phân từng phần.

Bài 1: Tính các giới hạn sau

* **Lưu ý**

- Mục tiêu của dạng bài này là các bạn biết cách sử dụng L'Hospital, định lý kẹp, và áp dụng tính được các giới hạn
- Các định lý, tính chất cần nhớ là: các tính chất của hàm liên tục, các tính chất của giới hạn
  + Hàm sơ cấp thì liên tục
  + Hàm liên tục thì giới hạn tại 1 điểm bằng giá trị của hàm tại điểm đó (Để thay giá trị vô khi nó không ở dạng vô định)
  + Giới hạn của tổng hiệu tích thương bằng tổng hiệu tích thương các giới hạn. Mở rộng với các hàm liên tục như $\ln \lim u = \lim \ln u$, $\sin \lim u = \lim \sin u$, v.v

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{4x-3}}{x^2+x-2}$

Giải:

Ta thấy rằng trên tử và dưới mẫu đều có cùng nghiệm x=1, dẫn đến dạng vô định $\frac{0}{0}$ do đó ta tìm cách loại bỏ thừa số $(x-1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{4x-3}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-\sqrt{4x-3}\right)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x^2+x-2)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(4x-3)}{(x-1)(x+2)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{(x+2)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}$$

Thay x=1, không còn dạng vô định nữa, đó cũng chính là giới hạn cần tìm.

$$=\frac{1-3}{(1+2)\left(1+\sqrt{4.1-3}\right)}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

b) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

Giải:
Thay thử x=0, ta thấy nó có dạng vô định 0x∞, ta cũng không thể thêm bớt gì để khử nó, nên ta sử dụng L'Hospital để làm
L'Hospital chỉ áp dụng với dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ do đó cần biến đổi

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Tại sao ta biết là $\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ mà không phải là $\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$? Vì bởi nếu đặt ngược lại thì dùng L'Hospital chỉ cho lại dạng tương tự là $x\ln^2 x$.

c) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

Giải:
Tương tự, thay x=1, xuất hiện dạng vô định 1^∞, ta cũng cần biến đổi đôi chút

$$a=\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$
$$\Rightarrow \ln a=\ln\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\ln x^{\frac{1}{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

Đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên ta dùng L'Hospital

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$
$$\ln a=1\Rightarrow a=e$$

d) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\cos^2 x}{3x-2}$

Giải
Nhận thấy rằng khi thay x bằng ∞ thì giới hạn của $\cos^2 x$ không tồn tại, cũng nhớ rằng đối

với sin và cos thì ta có thể dùng định lý kẹp.

$$\begin{aligned}&-1 \leq \cos x \leq 1\\ \Rightarrow &0 \leq \cos^2 x \leq 1\end{aligned}$$

Vì x tiến tới $+\infty$ và $3x-2>0$ với $x>\frac{2}{3}$, nên ta giả sử $3x-2>0$
Chia các vế cho $3x-2$ và không đổi dấu bất đẳng thức:

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{3x-2} \leq \frac{1}{3x-2}$$

Mà:

$$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x-2} = 0$$

Do đó theo định lý kẹp ta tính được giới hạn cần tìm:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2 x}{3x-2} = 0$$

$*$ **Lưu ý**

- Thứ tự ưu tiên các phương pháp là: Khử dạng vô định, L'Hospital, định lý kẹp
- Các bạn có thể áp dụng L'Hospital nhiều lần nếu đạo hàm vẫn ra dạng vô định (phân biệt với không tồn tại)
- Để ý các tính chất của hàm sin, cos để áp dụng định lý kẹp

Bài 2: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2-64} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) Khảo sát sự liên tục và khả vi của hàm số

b) Chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(5,10)$

$*$ **Lưu ý**

- Cần nhớ định nghĩa liên tục, khả vi
- Các tính chất của liên tục (các hàm tổng hiệu nhân chia liên tục thì tổng hiệu nhân chia liên tục, hàm sơ cấp thì liên tục)
- Khả vi thì liên tục, nhưng liên tục chưa hẳn là khả vi, không liên tục thì chắc chắn không khả vi.
- Ba điều kiện để một hàm số liên tục tại 1 điểm:
  + $f(x_0)$ tồn tại
  + $\lim_{x\to x_0} f(x)$ tồn tại
  + $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Giải:

a) Khảo sát sự liên tục:
Xét khoảng $(-\infty, 0)$ và khoảng $(0, +\infty)$, trên các khoảng này:

$$f(x) \equiv \sqrt[3]{x^2 - 64}$$

Đây là hàm sơ cấp nên liên tục trên tập xác định của nó, và do đó hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty, 0)$ và khoảng $(0, +\infty)$.
Xét $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2 - 64} = -4 \\ \lim_{x \to 0} f(x) &= -4 \neq 0 = f(0) \end{aligned}$$

Do đó hàm số đã cho không liên tục tại x=0.

Khảo sát sự khả vi
Tại $x = 0$ hàm không liên tục do đó nó không khả vi tại $x = 0$
Xét khoảng $(-\infty, 0)$ và khoảng $(0, +\infty)$.

$$f(x) \equiv \sqrt[3]{x^2 - 64}$$

Để khảo sát sự khả vi trên 2 khoảng này, lấy đạo hàm theo công thức bình thường đối với $\sqrt[3]{x^2 - 64}$

$$\left(\sqrt[3]{x^2 - 64}\right)' = \left(\left(x^2 - 64\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{2}{3} x \left(x^2 - 64\right)^{-\frac{2}{3}}$$

Điều kiện xác định của đạo hàm là $x^2 - 64 \neq 0$ (vì số mũ là âm nên cơ số phải khác 0) do đó $x \neq \pm 8$.

Hàm số đã cho liên tục tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$ trừ điểm $x = 0$, khả vi tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$ trừ các điểm $x = 0$, $x = 8$, $x = -8$

b) Dùng định lý trung gian để chứng minh
Ta cần kiếm 2 giá trị a, b sao cho $f(a) < 0 < f(b)$ hay $f(a)f(b) < 0$, thường là giá trị tại 2 đầu mút của khoảng.

$$\begin{aligned} &f(5) = -\sqrt[3]{39}, f(10) = \sqrt[3]{36} \\ &f(5).f(10) = -\sqrt[3]{1404} < 0 \end{aligned}$$

Theo định lý giá trị trung bình, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(5, 10)$

∗ **Lưu ý**

- Ta có thể viết lại hàm số là:

$$f(x) \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 - 64} & \text{x} < 0 \quad (1) \\ 0 & \text{x} = 0 \quad (2) \\ \sqrt[3]{x^2 - 64} & \text{x} > 0 \quad (3) \end{cases}$$

  + Người ta có thể đổi (1) hoặc (3) thành biểu thức khác, hoặc thêm nhiều nhánh hơn thì ta vẫn làm theo các bước như trên. Khác ở chỗ là khi tính giới hạn tại điểm phân nhánh ta cần tính giới hạn trái và giới hạn phải để kiểm tra giới hạn tại điểm phân nhánh có tồn tại không.

+ Người ta có thể bỏ (2) và thêm dấu "=" vào (1) hoặc (3) nhưng ta vẫn chỉ nhận xét rằng hàm liên tục trên khoảng, và vẫn phải xét liên tục tại $x = 0$

- Nếu tại điểm phân nhánh ($x = 0$) mà hàm liên tục thì ta phải xét đạo hàm trái và đạo hàm phải tại đó (vẫn dùng công thức đạo hàm nhưng với 2 biểu thức khác nhau và thay $x = 0$ vào xem 2 công thức có cho cùng 1 kết quả không) xem có khả vi hay không.

- Ta có thể thay 0 trong $f(x) = 0$ bởi một số N bất kỳ, thì ta vẫn làm tương tự là tìm a và b sao cho $f(a) < N < f(b)$

Bài 3: Cho hàm số $f(x) = \sin x$

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại $x = 0$

b) Áp dụng: tính gần đúng giá trị $\sin(-0.01)$

$*$ **Lưu ý**

Cần nhớ phương trình tiếp tuyến tại một điểm của đường cong cho trước.

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Với (x_0, y_0) là điểm cho trước

Giải

a) Áp dụng phương trình tiếp tuyến:

$$\begin{aligned} &y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ \Rightarrow &y = \cos 0(x - 0) + \sin 0 \\ \Rightarrow &y = x \end{aligned}$$

b) Khi x đủ gần x_0 thì $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$\begin{aligned} \sin(-0.01) = f(-0.01) &\approx f'(0)(-0.01 - 0) + f(0) \\ &= -0.01 \end{aligned}$$

Ta có công thức xấp xỉ quen thuộc $\sin\alpha \approx \alpha$ với α nhỏ

$*$ **Lưu ý**

Đối với đường cong cho bởi hàm ẩn thì ta vẫn làm như bình thường (Tính y' nhưng biểu thức y' có chứa cả x và y) với một lưu ý nhỏ là $y'(x_0) = y'(x_0, y_0)$.
Ví dụ: cho đường cong cho bởi phương trình: $xy = y^2 \sin x$. Ta tính y' bằng cách đạo hàm 2 vế (coi x và y độc lập như trong các công thức đạo hàm u,v thường thấy): $y + xy' = 2yy' \sin x + y^2 \cos x$.
Rút gọn: $y' = \frac{y^2 \cos x - y}{x - 2y \sin x}$. Viết tiếp tuyến tại điểm $(\frac{\pi}{2}, 0)$ chẳng hạn, thì ta thay $x = \frac{\pi}{2}, y = 0$ vào y', có y' ta viết tiếp tuyến bình thường.

Bài 4: (Đề thi cuối kì I 2018-2019)

Đồng hồ tốc độ của xe mô tô được ghi nhận cách mỗi 12 giây một lần, với giá trị được cho trong bảng dưới đây:

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (ft/s)	30	28	25	22	24	27

Ước tính quãng đường xe mô tô chạy trong suốt khoảng thời gian trong bảng bằng cách lấy vận tốc mẫu tại đầu mỗi khoảng thời gian 12 giây

∗ **Lưu ý**

Cần hiểu được tổng Reimann, và xấp xỉ tích phân theo điểm mẫu.

Giải
Quãng đường là tích phân của tốc độ theo thời gian. Ta không biết biểu thức tốc độ ra sao, nên ta xấp xỉ bằng cách giả sử rằng xe đi với tốc độ không đổi trên mỗi khoảng (Xấp xỉ tích phân bằng tổng Reimann)
Gọi s là quảng đường đi được:

$$s \approx \sum_{n=1}^{5} v_n \Delta t_n = 30.12 + 28.12 + 25.12 + 22.12 + 24.12 = 1548 \quad (ft)$$

∗ **Lưu ý**

- Nhớ ghi đơn vị
- Đọc kỹ đề xem đề yêu cầu lấy điểm mẫu như thế nào
- Các khoảng Δt_n có thể khác nhau

Bài 5: Tính các tích phân sau (nếu tồn tại):

a) $\displaystyle\int e^{2x} \cos 3x\mathbf{d}\boldsymbol{x}$

Giải
Dùng tích phân từng phần.

$$\begin{cases} u = \cos 3x \\ \mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -3\sin 3x \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\mathrm{d}x \tag{1}$$

Ta tiếp tục tính tích phân phía sau.

$$\begin{cases} u = \sin 3x \\ \mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 3\cos 3x \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x \tag{2}$$

Thay (2) vào (1):

$$\begin{aligned} \int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x\right) \\ \Rightarrow \frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x + K \\ \Rightarrow \int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x &= \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + C \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int \sqrt{9 - x^2}\mathbf{d}\boldsymbol{x}$

Giải
Đặt $x = 3\sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$x = 3\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 3\cos t\mathrm{d}t$$

Tích phân trở thành:

$$\int \sqrt{9-9\sin^2 t}.3\cos t\mathrm{d}t = \int 9\cos t\sqrt{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t = \int 9\cos t.\left|\cos t\right|\mathrm{d}t$$

Vì với điều kiện t đã đặt nên $\cos t > 0$, tích phân lại bằng:

$$\int 9\cos^2 t\mathrm{d}t = \int \frac{9}{2}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C$$

Với $t = \arcsin\frac{x}{3}$, $\sin t = \frac{x}{3}$, $\cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$, Đổi về lại biến x ta được đáp án:

$$\int \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x \mathbf{d}\boldsymbol{x}$

Giải

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} xe^x\mathrm{d}x$$

Dùng tích phân từng phần, đặt $u = x$, $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} xe^x\mathrm{d}x &= \lim_{t\to-\infty}\left(xe^x\Big|_t^0 - \int_t^0 e^x\mathrm{d}x\right) = \lim_{t\to-\infty}\left(-te^t - 1 + e^t\right)\\ &= -\lim_{t\to-\infty} te^t - \lim_{t\to-\infty} 1 + \lim_{t\to-\infty} e^t\\ &= -\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{\frac{1}{e^t}} - 1 + 0 = -\lim_{t\to-\infty} e^t - 1 = -1\end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$

Giải

Đặt $t = 0.5 - x$, suy ra $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$ với $x \in (0,1)$ suy ra $t \in (-0.5, 0.5)$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = -\int_{0.5}^{-0.5}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{0.5-t}\sqrt{0.5+t}} = -\int_{0.5}^{-0.5}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{0.25-t^2}}$$

Đặt tiếp $u = 2t$ suy ra $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}t$ và $u \in (-1,1)$

$$\begin{aligned}-\int_{0.5}^{-0.5}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{0.25-t^2}} &= -\int_1^{-1}\frac{0.5\mathrm{d}u}{\sqrt{0.25-0.25u^2}} = -\int_1^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= -\arcsin u\Big|_1^{-1} = \pi\end{aligned}$$

∗ **Lưu ý**

- Đối với tích phân từng phần ta ghi nhớ một vài cách đặt như khi có đa thức và hàm mũ thì ta đặt u bằng đa thức, còn khi có lượng giác thì ta cần đặt u nhất quán khi tính tích phân 2 lần
- Khi tính tích phân bất định thì cần phải đổi về biến ban đầu. Tích phân xác định thì không cần.
- Với một số tích phân suy rộng không tính tích phân được, thì cần xác định nó hội bằng các tiêu chuẩn so sánh:
  + Tích phân loại 1: Cận là vô cùng.

* Cho $0 \leq f(x) \leq g(x), x \geq a$. Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$
* Cho $f(x), g(x)$. Nếu $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ (0 < k < +\infty)$. Thì hai tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ và $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. $k = 0$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ. $k = +\infty$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ phân kỳ

  Tương tự với các cận vô cùng khác.

+ Tích phân loại 2: có điểm làm hàm số tích phân không xác định tại 1 trong 2 cận: (Giả sử cận dưới)
  * Cho $0 \leq f(x) \leq g(x), x \in (a, c], c \leq b$. Nếu $\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$. Nếu $\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ phân kỳ thì $\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$
  * Cho $f(x), g(x)$. Nếu $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ (0 < k < +\infty)$. Thì hai tích phân $\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$ và $\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. $k = 0$: Nếu $\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ. $k = +\infty$: Nếu $\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$ phân kỳ thì $\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ phân kỳ

  Tương tự với cận trên. Nếu điểm không xác định nằm ở giữa thì chia tích phân làm các phần với điểm chia là điểm làm hàm không xác định

Nếu bạn không biết hàm của mình có lớn hơn 0 hay không thì bạn cứ lấy trị tuyệt đối của nó để áp dụng tiêu chuẩn.

Bài 6: Kiểm tra sự hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$

$\ast$ **Lưu ý**

- Các bạn cần nhớ sự hội tụ của những chuỗi đặc biệt sau:
  + $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^p}$ hội tụ nếu $p > 1$ phân kỳ nếu $p \leq 1$
  + $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ hội tụ nếu $|r| < 1$, phân kỳ nếu $|r| \geq 1$
- Các bạn cần nhớ các tiêu chuẩn hội tụ sau:
  + Tiêu chuẩn d'Alembert: cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n > 0$ giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Nếu $L > 1$ thì chuỗi hội tụ, nếu $L < 1$ thì chuỗi phân kỳ.
  + Tiêu chuẩn Cauchy: cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n > 0$ giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Nếu $L > 1$ thì chuỗi hội tụ, nếu $L < 1$ thì chuỗi phân kỳ.
  + Tiêu chuẩn so sánh: cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ 0 < a_n \leq b_n$. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ
  + Tiêu chuẩn Leibniz cho chuỗi đan dấu: cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \ a_n > 0$. Nếu $\{a_n\}$ là dãy giảm và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi hội tụ.
- Nếu chuỗi đã cho không phải chuỗi số dương (có những giá trị $a_n < 0$) thì ta phải đưa về trị tuyệt đối

Giải

a) Vì $\frac{2^n n!}{n^n} > 0 \ \forall n$, xét giới hạn sau:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.2^n(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= 2\left(\left(1+\frac{1}{-n-1}\right)^{-n-1}\right)^{\frac{n}{-n-1}} = 2e^{-1} < 1$$

Do đó chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn d'Alembert

b) Đây là chuỗi đan dấu, ta kiểm tra điều kiện để chuỗi đan dấu là hội tụ (tiêu chuẩn Leibniz) Chuỗi đã cho là chuỗi giảm (Ta cần kiểm tra $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ hoặc $a_{n+1} - a_n \leq 0$ từ n nào đó trở đi), thật vậy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}} = \sqrt[3]{\frac{n}{n+2}} < 1 \ \forall n > 0$$

Giới hạn a_n của chuỗi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}} = 0$$

Do đó chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

$*$ **Lưu ý**

- Các bạn hãy kiên nhẫn thử từng tiêu chuẩn. Lưu ý với tiêu chuẩn d'Alembert và Cauchy giới hạn $L = 1$ thì ta không có kết luận gì.

Bài 7: Cho hàm số $f(x) = \ln x^2$

a) Tìm khai triển Taylor đến cấp n của hàm số đã cho xung quanh điểm $x = 2$.

b) Xét chuỗi Taylor tương ứng. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi.

c) Áp dụng để tính xấp xỉ giá trị $\ln 4.41$ với sai số nhỏ hơn 0.0001, cho giá trị của $\ln 4 \approx 1.3863$.

$*$ **Lưu ý**

Nhớ chuỗi Taylor và công thức tính bán kính hội tụ.
Giải

a) Trước hết, ta cần tìm công thức của đạo hàm cấp n của hàm số.

$$f'(x) = \frac{2}{x}, f''(x) = \frac{-2.1}{x^2}, f'''(x) = \frac{2.1.2}{x^3}, f^{(4)}(x) = \frac{-2.1.2.3}{x^4}$$
$$\Rightarrow f^{(n)} = \frac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Áp dụng công thức Taylor cấp n cho hàm số $f(x)$ tại điểm $x = 2$:

$$f(x) = f(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}, \ \theta \text{ nằm giữa 2 và x}$$
$$= \ln 4 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}2^{1-k}}{k}(x-2)^k + \frac{2(-1)^n}{(n+1)\theta^{n+1}}(x-2)^{n+1}$$

b) Viết công thức chuỗi Taylor:

$$f(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k = \ln 4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}2^{1-k}}{k}(x-2)^k$$

Đặt $a_k = \frac{(-1)^{k-1}2^{1-k}}{k}$, xét giới hạn:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^k 2^{-k}}{k+1}}{\frac{(-1)^{k-1}2^{1-k}}{k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|-\frac{1}{2}\frac{k}{k+1}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Bán kính hội tụ của chuỗi là: } R = 2$$

c) Ta có $\ln 4.41 = f(2.1)$. Xét công thức phần dư trong khai triển Taylor cấp n:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}$$

$$\Rightarrow R_n(2.1) = \frac{2(-1)^n}{(n+1)\theta^{n+1}}(2.1-2)^{n+1} = \frac{2(-1)^n 10^{-n-1}}{(n+1)\theta^{n+1}}$$

Vì sai số nhỏ hơn 0.0001 do đó ta cần:

$$|R_n(2.1)| < 0.0001 \Rightarrow \left|\frac{2(-1)^n 10^{-n-1}}{(n+1)\theta^{n+1}}\right| < 0.0001 \ \forall\theta$$

Ta đi từ điều kiện của θ:

$$2 < \theta < 2.1 \Rightarrow 2^{n+1} < \theta^{n+1} < 2.1^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{\theta^{n+1}} > \frac{1}{2.1^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{2.10^{-n-1}}{(n+1)2^{n+1}} > \frac{2.10^{-n-1}}{(n+1)\theta^{n+1}} > \frac{2.10^{-n-1}}{(n+1)2.1^{n+1}}$$

$$|R_n(2.1)| = \left|\frac{2(-1)^n 10^{-n-1}}{(n+1)\theta^{n+1}}\right| = \frac{2.10^{-n-1}}{(n+1)\theta^{n+1}} < \frac{2.10^{-n-1}}{(n+1)2^{n+1}}$$

Ta giải $\frac{2.10^{-n-1}}{(n+1)2^{n+1}} < 0.0001$ thì $|R_n(2.1)| < 0.0001 \ \forall\theta$

$$\Rightarrow n > 1.9452... \Rightarrow n \geq 2$$

Chọn n=2 (có thể chọn n lớn hơn 2 khác nếu bạn thích) để tính xấp xỉ.

$$f(2.1) \approx f(2) + \sum_{k=1}^{2} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(2.1-2)^k$$

$$\Rightarrow \ln 4.41 \approx \ln 4 + \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}2^{1-k}}{k}(2.1-2)^k$$

Tới đây ta có thể bấm máy tổng trên với giá trị của $\ln 4$ đã biết, ta được $\ln 4.41 \approx 1.4838$, với sai số nhỏ hơn 0.0001

∗ **Lưu ý**

- Phân biệt các thuật ngữ: công thức Taylor, đa thức Taylor, chuỗi Taylor.
- Đối với những bài kêu tính sai số thay vì cho trước sai số thì ta vẫn làm bước trị tuyệt đối phần dư R_n luôn bé hơn giá trị nào đó với θ nằm trong khoảng đã biết, đó chính là sai số.
- Lưu ý giá trị cần xấp xỉ và giá trị x của hàm có thể khác nhau (như trong bài là tính $\ln 4.41$ nhưng x là 2.1).