VI TÍCH PHÂN 1B

Bộ môn Giải Tích, Khoa Toán Tin Học

Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, Tp HCM

Số thực

Số thực

- Tập hợp
- Số thực
- Vài qui tắc suy luận
- Bài tập thực hành qui tắc suy luận trên đề tài số thực.

Tập hợp

Tập hợp

Tập hợp được dùng để mô tả một quần thể của những đối tượng phân biệt được mà chúng ta tư duy như một thể chọn vẹn

- Cho A là một tập hợp, ta viết $x \in A$ có nghĩa là x là một phần tử và viết $x \notin A$ có nghĩa là x không phải là phần tử của A.
- Để **diễn tả tập hợp** người ta dùng dấu móc $\{\ldots\}$. Trong dấu móc ta có thể liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, hoặc nêu lên thuộc tính chung (P) của các phần tử tập hợp bằng cách viết $\{x : x \text{ thỏa mãn } P\}$.
- Ta quy ước **tập rỗng** (hay tập trống) là tập hợp không có phần tử nào cả. Người ta thường ký hiệu tập rỗng là $\varnothing$.

Tập hợp

Tập hợp trùng nhau

Ta nói tập A và tập B **trùng nhau** (hay bằng nhau) và viết $A = B$ (đọc A bằng B) nếu chúng có cùng những phần tử, tức là $x \in A$ **khi và chỉ khi** $x \in B$. Khi chúng không trùng nhau thì ta viết $A \neq B$.

Tập con

Ta nói A là **tập con** của B nếu mọi phần tử của A là phần tử của B. Khi đó ta viết $A \subseteq B$ (đọc: A nằm trong B), $B \supseteq A$ (đọc B chứa A). Nếu $A \subseteq B$ và $A \neq B$ ta nói A là **tập con thật sự** của B. Quy ước: tập rỗng là tập con của mọi tập.

Chú ý: Mỗi phần từ x của A tạo thành tập con $\{x\}$ của A. Cần phân biệt giữa phần tử x của tập hợp A (viết là $x \in A$) với tập con $\{x\}$ của tập hợp A (viết là $\{x\} \subseteq A$).

Tập hợp

Hợp của hai tập

Hợp của hai tập A và B được ký hiệu là $A \cup B$ (đọc: A hợp B) là tập gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B . Nghĩa là, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

Giao của hai tập

Giao của hai tập A và B được ký hiệu là $A \cap B$ (đọc: A giap B) là tập gồm tất cả các phần tử vừa thuộc tập A lại vừa thuộc tập B. Vậy $A \cap B = \{x : x \in A \text{ và } x \in B\}$.

Phần bù

Phần bù của A trong B được ký hiệu là $B \setminus A$ là tập gồm tất cả các phần tử thuộc tập B nhưng không thuộc tập A. Đôi khi người ta gọi $B \backslash A$ là hiệu của B và A. Vậy $B \backslash A = \{x : x \in b \text{ và } x \notin B\}$.

Tập hợp

Tính chất của các phép tính. Cho A, B và C là các tập hợp bất kỳ. Khi đó ta có:

- *Tính kết hợp*
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- *Tính giao hoán*
  - $A \cup B = B \cup A$,
  - $A \cap B = B \cap A$.
- *Tính phân phối*
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
  - $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Tập hợp

Tích của các tập hợp

Cho 2 tập hợp A và B. Tập hợp tất cả các cặp điểm (a, b), với $a \in A$ và $b \in B$, lập thành một tập hợp mới gọi là **tích của hai tập** A và B, và được ký hiệu là $A \times B$. Như vậy, mỗi phần tử z của tập tích $A \times B$ luôn biểu diễn dưới dạng $z = (a, b)$, với $a \in A$, $b \in B$, và người ta gọi a, b là các **thành phần** (hay **tọa độ** của z).

Số thực

- Ký hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số **tự nhiên** và $\mathbb{Z}$ là tập các **số nguyên**.
- Theo định nghĩa số hữu tỷ là số có dạng $\frac{m}{n}$ trong đó $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ và $(m, n) = 1$ (ước số chung lớn nhất của m và n là 1, hay m và n là hai số nguyên tố cùng nhau). Ta ký hiệu $\mathbb{Q}$ là tập các số **hữu tỷ**.Những số không được biểu diễn dưới dạng trên gọi là số **vô tỷ**.

$\Rightarrow$ Như vậy, tập các **số thực** bao gồm tất cả các số vô tỷ và hữu tỷ, và sẽ được ký hiệu là $\mathbb{R}$.

Số thực

- **Các phép tính**. Trong $\mathbb{R}$ cũng như trong $\mathbb{Q}$ cũng có bốn phép tính số học cơ bản: cộng, trừ, nhân và chia. Các phép tính này có tính chất sau:
  - *Giao hoán*: $a + b = b + a$ và $ab = ba$.
  - *Kết hợp*: $(a + b) + c = a + (b + c)$ và $(ab)c = a(bc)$.
  - *Phân phối*: $a(b + c) = ab + ac$.
- **Thứ tự**. Bất cứ hai phần tử a, b (thuộc $\mathbb{Q}$ hoặc $\mathbb{R}$) đều có thể so sánh $a > b$ (a lớn hơn b), $a = b$ (a bằng b) hoặc $a < b$ (a nhỏ hơn b). Thứ tự ($>$) có tính chất sau:
  - *Bắc cầu*: $a > b$, $b > c$ thì $a > c$
  - *Trù mật*: $a > b$ thì có c để $a > c > b$

Số thực

Tập giới nội

Ta nói $A \subseteq \mathbb{R}$ **bị chặn trên** nếu có số α để $a \leq \alpha$ với mọi $a \in A$; số α này được gọi là **cận trên** của A. Tương tự A **bị chặn dưới** nếu nếu có số β (gọi là **cận dưới**) để $a \geq \beta$ với mọi $a \in A$. Một tập vừa bị chặn dưới vừa bị chặn trên gọi là **bị chặn** hay **giới nội**.

Số thực

Biên trên

Biên trên của A, ký hiệu là $\sup A$, là cận trên nhỏ nhất của A. Nếu $\sup A \in A$ thì viết là $\max A$ thay cho $\sup A$. Đây là số lớn nhất trong A.

Biên dưới

Biên dưới của A, ký hiệu là $\inf A$, là cận dưới lớn nhất của A. Nếu $\inf A \in A$ thì viết là $\min A$ thay cho $\inf A$. Đây là số nhỏ nhất trong A.

Tiên đề về sự tồn tại biên

Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$, nếu bị chặn trên (dưới) thì phải có biên trên (dưới).

Vài qui tắc trong suy luận

Phủ định sự tồn tại

- Mệnh đề "$\exists x \in D, T(x)$" (đọc là *có một x thuộc D mang tính chất T(x)*) được phủ định thành "$\forall x \in D, \overline{T(x)}$" (đọc là *tất cả x thuộc D đều không có tính chất T(x)*).
- Mệnh đề "$A \vee B$" (đọc là *A hay B*, hàm ý rằng có ít nhất một trong hai điều A hay B xảy ra) được phủ định thành "$\overline{A} \wedge \overline{B}$" (đọc là *không-A và không-B*, hàm ý rằng không có điều nào trong số A và B xảy ra cả).

Vài qui tắc trong suy luận

Phủ định mệnh đề bắt đầu bởi $\forall$

- Mệnh đề "$\forall x \in D, T(x)$" (đọc là *mọi x thuộc D đều có tính chất* $T(x)$) được phủ định thành "$\exists x \in D, \overline{T(x)}$" (đọc là *tồn tại một phần tử x thuộc D không có tính chất* $T(x)$).
- Mệnh đề "$A \wedge B$" (đọc là *A và B*, hàm ý rằng cả hai điều A và B cùng xảy ra) được phủ định thành "$\overline{A} \vee \overline{B}$" (đọc là *không-A hay không-B*, hàm ý rằng có ít nhất một điều A hay B sẽ không xảy ra).

Vài qui tắc trong suy luận

Phủ định nhân-quả

Mệnh đề "$A \Rightarrow B$" (*hễ có A thì phải có B*) được phủ định thành "$A \wedge \overline{B}$" (*có A mà vẫn không có B*).

Phép chứng minh qui nạp

Giả sử rằng:

- Mệnh đề $T(n_0)$ là đúng
- Hễ $T(k)$ xảy ra thì $T(k+1)$ cũng phải xảy ra (hàm ý rằng với mọi số $k \geq n_0$, mệnh đề "$T(k) \Rightarrow T(k+1)$" luôn đúng).

Khi đó mệnh đề $T(n)$ sẽ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Vài qui tắc trong suy luận

Phép phản chứng kiểu phản đảo

- Mệnh đề "$A \Rightarrow B$" (hễ có A thì phải có B) cùng nghĩa với "$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$" (nếu không có B thì sẽ không có A).
- Áp dụng: khi người ta cho điều A và yêu cầu chứng minh điều B, ta có thể giả sử phản chứng rằng không có điều B rồi suy luận dẫn đến không có điều A (trái với giả thiết). Vậy phải có điều B.

Phép phản chứng trực tiếp

Khi người ta yêu cầu chứng minh điều A, ta có thể giả thiết tạm rằng không có A rồi suy ra điều mâu thuẫn (với một giả thiết ngầm).

Bài tập áp dụng qui tắc suy luận trên đề tài số thực I

1. a) Cho số tự nhiên m. Chứng minh rằng nếu m^2 chẵn thì m cũng là số chẵn.
   b) Chứng minh rằng nếu một số chính phương là chẵn thì số chính phương đó chia hết cho 4.
2. Chứng minh rằng không tồn tại phân số dạng $\dfrac{m}{n}$, với m và n là số tự nhiên $(n \neq 0)$, thỏa $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = 2$.
3. Cho $\alpha > -1$ và n là số tự nhiên tùy ý lớn hơn 1. Dùng phép qui nạp, hãy chứng minh bất đẳng thức Bernouli: $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$.
4. Cho số a thỏa $\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$. Chứng minh $a = 0$.
5. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương: Mệnh đề 1 là "$\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$"; mệnh đề 2 là "$a \leq 0$".

Bài tập áp dụng qui tắc suy luận trên đề tài số thực II

6. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương: Mệnh đề 1 là "$\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$", mệnh đề 2 là "$\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon$".
7. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương: Mệnh đề 1 là "$\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$", mệnh đề 2 là "$\forall \varepsilon > 0, a \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$".
8. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây (bất đẳng thức tam giác
   a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ b) $|x| - |y| \leq |x - y|$
   c) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
9. a) Dùng các ký hiệu $\forall$ hay $\exists$ để biểu thị các phát biểu sau sau:
   - Tập hợp A bị chặn trên.
   - Số α không phải là cận trên của tập A.
   - Số α không phải là phần tử lớn nhất của A.

Bài tập áp dụng qui tắc suy luận trên đề tài số thực III

b) Cho $A = [0, 1)$. Số $\dfrac{999}{1000}$ có phải là cận trên của A không? Tại sao?

c) Chứng minh không tồn tại $\max A$ và chứng minh $\sup A = 1$.

d) Số 0 là gì đối với tập A?

10. a) Dùng các ký hiệu $\forall$ hay $\exists$ để biểu thị các phát biểu sau:

- Tập hợp A bị chặn dưới.
- Số α không phải là cận dưới của tập A.
- Số α không phải là phần tử nhỏ nhất của A.

b) Cho $A = (1, 2]$. Số $\dfrac{1000}{999}$ có phải là cận dưới của A không? Tại sao?

c) Chứng minh không tồn tại $\min A$ và chứng minh $\inf A = 1$.

d) Số 2 là gì đối với tập A?

11. Cho $A = \left\{n + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Tập A có bị chặn trên không, vì sao? Chứng minh A có phần tử nhỏ nhất.

Bài tập áp dụng qui tắc suy luận trên đề tài số thực IV

12. Cho $A = \left\{\frac{n}{n+1} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Chứng minh A không có phần tử lớn nhất. Chứng minh $\sup A = 1$ và chứng minh A có phần tử nhỏ nhất.

13. Cho $\left\{\frac{(-1)^n}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$. Chứng minh tồn tại $\max A$ và $\min A$.

14. Chứng minh rằng $\alpha = \sup A$ khi và chỉ khi α là cận trên của A, đồng thời $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > \alpha - \varepsilon$.

15. Chứng minh rằng $\alpha = \inf A$ khi và chỉ khi α là cận dưới của A, đồng thời $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \alpha + \varepsilon$.

16. a) Cho hai số thực x, y thỏa $y - x > 1$. Chứng minh rằng có số nguyên m sao cho $x < m < y$.
Hướng dẫn: sử dụng ký hiệu $[x]$ cho phần nguyên của x, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, từ đó chỉ ra số m thỏa đề bài.

Bài tập áp dụng qui tắc suy luận trên đề tài số thực V

b) Cho hai số thực a, b tùy ý và $a < b$. Chứng minh rằng có số hữu tỉ $q = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}^*$, sao cho $a < q < b$.
Hướng dẫn: Gọi n là số tự nhiên đủ lớn để $n(b-a) > 1$, sau đó dùng kết quả câu a ở trên.

17. *Bài tập mở rộng:*
a) Hãy chứng minh phương trình $x^2 = 2$ có nghiệm dương duy nhất là số thực (nghiệm này được ký hiệu là $\sqrt{2}$) và không có nghiệm là số hữu tỉ.
Hướng dẫn: Đặt $L = \left\{s \in \mathbb{R}^+ / s^2 < 2\right\}$ và
$R = \left\{s \in \mathbb{R}^+ / s^2 > 2\right\}$.
(i) Chứng minh hai tập L và R khác rỗng, L bị chặn trên, R bị chặn dưới. Từ đó chứng minh $\sup L \leq \inf R$.
(ii) Chứng minh không tồn tại $\max L$ và không tồn tại $\min R$. Suy ra rằng nếu số x thỏa $\sup L \leq x \leq \inf R$ thì $x^2 = 2$, đồng thời $\sup L = \inf R$.

Bài tập áp dụng qui tắc suy luận trên đề tài số thực VI

(iii) Chứng minh nếu x thỏa $x^2 = 2$ thì x không phải là số hữu tỉ.

b) Cho $A = \left\{q \in \mathbb{Q} / \sqrt{2} \leq q < 3\right\}$. Tìm $\sup A$, $\inf A$ (có chứng minh). Có tồn tại $\max A$, $\min A$ không, vì sao?

18. *Bài tập mở rộng:* Chứng minh tập hợp các số hữu tỉ thì dày đặc (trù mật) trong tập hợp các số thực, nghĩa là giữa hai số thực bất kỳ luôn có một số hữu tỉ.
Hướng dẫn: sử dụng kết quả bài tập 16 và chứng minh tổng của số hữu tỉ với $\sqrt{2}$ (dựa vào bài tập 17) là số vô tỉ.

Chuỗi số

Chuỗi số

- Dãy số
- Khái niệm chuỗi số
- Tính chất của chuỗi số
- Các dấu hiệu hội tụ của chuỗi số

Dãy số

Dãy số

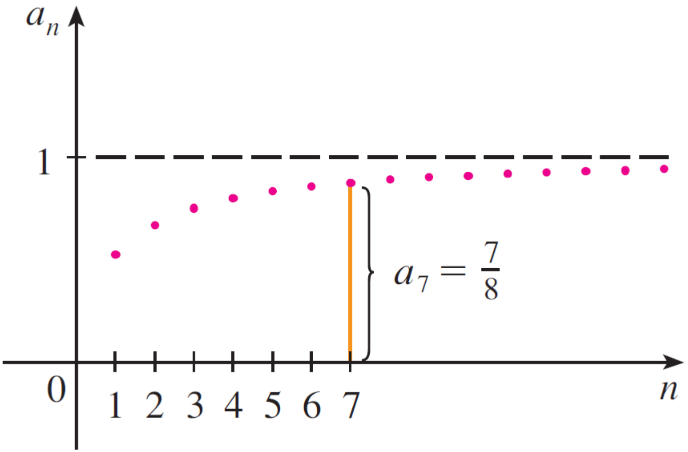
Dãy số là phép liên kết mỗi chỉ số tự nhiên $n \geq n_0$ với một số thực a_n (n_0 là một số tự nhiên nào đó được cho trước). Dãy số nói trên thường được ký hiệu là $(a_n)_{n \geq n_0}$, hoặc viết tắt là (a_n) nếu không có nhầm lẫn.

Ghi chú.

- Miền giá trị của dãy số là tập hợp $\{a_n / n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$. Ví dụ, nếu dãy số (a_n) được định bởi $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n$ thì miền giá trị của dãy số là $\{-1;\ 1\}$.
- Ký hiệu dãy số kiểu cổ điển là $\{a_n\}_{n \geq n_0}$, dễ nhầm lẫn với ký hiệu miền giá trị dãy, do đó ta nên tránh dùng ký hiệu này.

Dãy số

Ta có thể biểu diễn dãy số (a_n) dưới dạng đồ thị: đó là tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ có hoành độ là số tự nhiên n và tung độ là a_n. Đồ thị sau minh họa cho dãy (a_n) định bởi $a_n = \frac{n}{n+1}$



Dãy số

Dãy số bị chặn

- **Dãy số bị chặn trên** là dãy số có miền giá trị là tập hợp bị chặn trên.
- **Dãy số bị chặn dưới** là dãy số có miền giá trị là tập hợp bị chặn dưới.
- **Dãy số bị chặn (giới nội)** là dãy số có miền giá trị là tập hợp vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

Tổng, hiệu, tích, thương của hai dãy số

Giả sử (a_n) và (b_n) là hai dãy bất kỳ. Khi đó các dãy $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n b_n)$, $(a_n/b > n)$ (với $b_n \neq 0$) được gọi là dãy tổng, hiệu, tích và thương của hai dãy ban đầu.

Dãy số

Dãy hội tụ và dãy phân kỳ

Dãy số (a_n) được gọi là có giới hạn, hay **hội tụ**, nghĩa là tồn tại số thực L thỏa điều sau

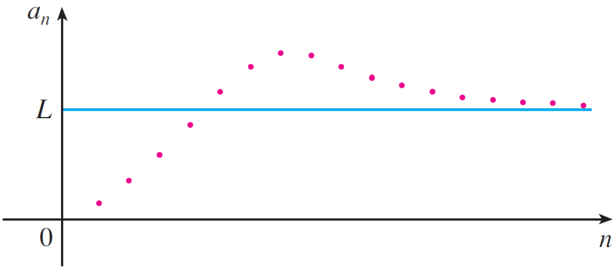
$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |a_n - L| < \varepsilon \tag{1}$$

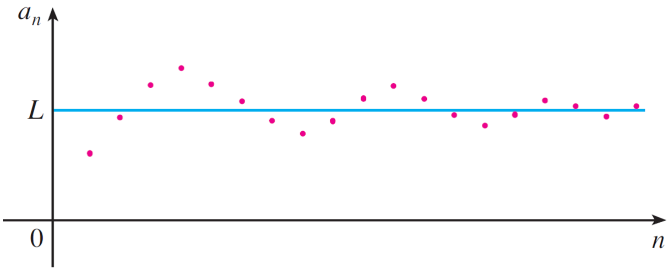
Số L thỏa (1) được gọi là giới hạn của dãy (a_n) và ta viết $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ (viết tắt $\lim a_n = L$), hoặc $a_n \to L$ khi $n \to \infty$ (đọc là "a_n tiến về L khi n càng lớn, hoặc là dãy (a_n) hội tụ về L).

Nếu dãy số (a_n) không hội tụ thì ta nói dãy (a_n) **phân kỳ**.

Ghi chú. Một cách trực quan, (1) có nghĩa là ta có thể xấp xỉ $L \approx a_n$ với sai số nhỏ hơn số dương ε tùy ý, miễn là lấy n đủ lớn.

Dãy số





Dãy số

Ví dụ khảo sát tính hội tụ

- Với dãy (a_n) định bởi $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, thì $\lim a_n = 0$.
  Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, lấy $p \in \mathbb{N}$ đủ lớn để $p > \frac{1}{\varepsilon}$. Khi đó,
  $$\text{nếu } n \geq p \text{ thì } |a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$
- Sinh viên tự kiểm chứng rằng với $a_n = (-1)^n$ thì (a_n) không hội tụ.

Các tính chất của dãy hội tụ

Tính duy nhất

Nếu (a_n) hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.

Chứng minh. Sinh viên dựa theo kỹ thuật trong chứng minh của tính chất tiếp theo để tự chứng minh tính duy nhất, xem như là một bài tập.

Tính bảo toàn thứ tự

Giả sử $a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} b_n$ và $a_n \geq b_n$ với mọi $n \geq n_0$ nào đó. Khi ấy $a \geq b$.

Các tính chất của dãy hội tụ

Chứng minh tính bảo toàn thứ tự.

Giả sử phản chứng rằng $a < b$. Xét số $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Theo định nghĩa của sự hội tụ, tồn tại hai số $p_1,\ p_2 \in \mathbb{N}$ đủ lớn để

$$\forall n \geq p_1, a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$
$$\forall n \geq p_2, b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

Do đó, khi $n \geq \max\{n_0, p_1, p_2\}$ thì

$$a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < b_n,$$

mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $a \geq b$. $\square$

Việc chứng minh các kết quả còn lại sau đây, nếu cần thiết, được xem như là bài tập.

Các tính chất của dãy hội tụ

Định lý giới hạn kẹp

Giả sử (a_n), (b_n) và (c_n) là ba dãy số thỏa $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \leq c_n$ (với n_0 là số tự nhiên nào đó). Khi đó, nếu $\lim a_n = \lim c_n = L$ thì $\lim b_n = L$.

Tính bị chặn

Nếu dãy số (a_n) hội tụ thì nó là dãy bị chặn. Hệ quả là dãy nào không bị chặn thì dãy đó phân kỳ.

Các tính chất của dãy hội tụ

Tính bảo toàn phép tính

Nếu $\lim a_n = a$ và $\lim b_n = b$ thì

- $\lim(a_n + b_n) = a + b$
- $\lim(a_n - b_n) = a - b$
- $\lim(a_n b_n) = ab$
- $\lim(a_n/b_n) = a/b$ (giả thiết thêm $b \neq 0$)

Dãy số

Dãy nhỏ vô cùng

Ta nói (a_n) là dãy **nhỏ vô cùng** nếu nó hội tụ tới 0.

Ta dễ dàng kiểm chứng các tính chất sau:

- (a_n) hội tụ tới a khi và chỉ khi dãy $(a_n - a)$ nhỏ vô cùng.
- Giả sử (a_n) là dãy nhỏ vô cùng. Khi đó:
  - **i.** Nếu (b_n) là dãy nhỏ vô cùng thì $(a_n b_n)$ cũng là nhỏ vô cùng;
  - **ii.** Nếu (b_n) bị chặn thì $(a_n b_n)$ là dãy nhỏ vô cùng.

Dãy số

Dãy lớn vô cùng

Ta gọi (a_n) là dãy lớn vô cùng nghĩa là

$$\forall \alpha > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |a_n| > \alpha \tag{2}$$

Nói một cách đại khái, (2) có nghĩa là giá trị tuyệt đối của a_n có thể lớn tùy ý, miễn là ta cho n đủ lớn.

Dãy số

Dãy dương lớn vô cùng

Dãy (a_n) được gọi là **dãy dương lớn vô cùng** nếu nó có hai tính chất

- lớn vô cùng
- Có số tự nhiên n_0 sao cho $\forall n \geq n_0, a_n > 0$.

Khi đó ta viết $\lim a_n = +\infty$ (mặc dù dùng ký hiệu lim, nhưng đừng nhầm lẫn cho rằng dãy này hội tụ).

Dãy số

Dãy âm lớn vô cùng

Dãy (a_n) được gọi là **dãy âm lớn vô cùng** nếu nó có hai tính chất

- lớn vô cùng
- Có số tự nhiên n_0 sao cho $\forall n \geq n_0, a_n < 0$.

Khi đó ta viết $\lim a_n = -\infty$.

Dãy số

Mệnh đề về dãy vô cùng

- (a_n) là dãy lớn vô cùng khi và chỉ khi $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ là dãy nhỏ vô cùng.
- Nếu (a_n) và (b_n) là những dãy lớn vô cùng đồng dấu (dương hoặc âm), thì $(a_n + b_n)$ là dãy lớn vô cùng và $(a_n b_n)$ là dãy dương lớn vô cùng.
- Nếu (a_n) là dãy lớn vô cùng và (b_n) hội tụ với giới hạn khác không thì $(a_n b_n)$ là dãy lớn vô cùng.

Chứng minh. Xem như là bài tập, không bắt buộc.

Dãy số

Sử dụng định nghĩa sự hội tụ và định lý giới hạn kẹp, người ta chứng minh được kết quả sau

Các giới hạn cơ bản của dãy số

- Với $r > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$.
- Với $r > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} = 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
- Với $r > 0$ và α cho trước tùy ý, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+r)^n} = 0$.
- Với số r cho trước thỏa $|r| < 1$, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

Bài tập về giới hạn dãy số I

1. Sử dụng các ký hiệu $\forall$ và $\exists$, hãy diễn đạt các phát biểu sau: dãy (a_n) bị chặn trên; bị chặn dưới; giới nội.
2. Cho A là tập con của $\mathbb{R}$, khác rỗng và bị chặn trên. Chứng minh rằng có dãy số $(a_n) \subset A$ sao cho $a_n \to \sup A$ khi $n \to \infty$. Phát biểu kết quả tương tự khi A bị chặn dưới.
3. Cho dãy số (a_n) bị chặn trên và thỏa $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+1}$. Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn là $\sup x_n$ (biên trên của miền giá trị dãy (x_n)).
4. Cho dãy số (a_n) bị chặn dưới và thỏa $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq x_{n+1}$. Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn là $\inf x_n$ (biên dưới của miền giá trị dãy (x_n)).
5. [Bài tập không bắt buộc] Cho dãy số (x_n) hội tụ về 0 và dãy số (y_n) bị chặn. Chứng minh rằng dãy số $(x_n y_n)$ hội tụ về 0 (tích của một dãy hội tụ về 0 với một dãy bị chặn là một dãy hội tụ về 0).

Bài tập về giới hạn dãy số II

6. [Bài tập không bắt buộc] Cho (x_n) là dãy số dương hội tụ về $x > 0$. Chứng minh rằng $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Nếu $x = 0$ thì kết quả còn đúng không?

7. Sử dụng định lý giới hạn kẹp và hai giới hạn cơ bản

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} = 1; \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

hãy tìm các giới hạn sau

$$\begin{array}{ll} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2}; & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2}; \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}; & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n+1}. \end{array}$$

8. [Bài tập không bắt buộc] Với số thực a tùy ý, chứng minh rằng có dãy (r_n) bao gồm các số vô tỉ và có dãy (q_n) bao gồm các số hữu tỉ cùng hội tụ về a.

Bài tập về giới hạn dãy số III

9. [Bài tập không bắt buộc] Cho hai dãy số (e_n) và (E_n) định bởi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Chứng minh rằng
a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, e_{n+1} \geq e_n$. Hướng dẫn:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

dùng bất đẳng thức Bernouli.
b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n \geq E_{n+1}$. Hướng dẫn:

$$\frac{E_n}{E_{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+2}.$$

c) Chứng minh hai dãy đã cho có cùng giới hạn. Giới hạn đó được ký hiệu bởi e, hằng số Népère.

Dãy số đơn điệu

Định nghĩa

- Dãy số (a_n) được gọi là **dãy tăng** (còn gọi là **dãy đồng biến** hay **dãy tiến**) có nghĩa là $\forall n, a_n \leq a_{n+1}$.
- Dãy số (a_n) được gọi là **dãy giảm** (còn gọi là **dãy nghịch biến** hay **dãy lùi**) có nghĩa là $\forall n, a_n \geq a_{n+1}$.
- Dãy số tăng hoặc giảm được gọi chung là **dãy đơn điệu**.

Dãy số đơn điệu

Trong các bài tập trước, ta đã chứng minh hai kết quả sau

Định lý 1

- Nếu (a_n) là dãy tăng (đương nhiên bị chặn dưới) và bị chặn trên thì nó hội tụ về $\sup a_n$, là biên trên của miền giá trị dãy.
- Nếu (a_n) là dãy giảm (đương nhiên bị chặn trên) và bị chặn dưới thì nó hội tụ về $\inf a_n$, là biên dưới của miền giá trị dãy.

Nói chung, nếu dãy số đơn điệu và bị chặn (giới nội) thì nó hội tụ.

Dãy số đơn điệu

Định lý 2

Giả sử (e_n) và (E_n) là hai dãy số định bởi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Khi đó dãy (e_n) là dãy tăng, dãy (E_n) là dãy giảm, $e_n < E_n \ \forall n$, hai dãy này có cùng giới hạn được ký hiệu bởi e (hằng số Népère).

Bài tập về dãy số đơn điệu I

1. Cho dãy số (a_n) định bởi $a_n = 1,5\dots5$ có biểu diễn thập phân gồm n chữ số 5.
   a) Chứng minh dãy (a_n) có giới hạn.
   b) Tìm hệ thức giữa a_{n+1} và a_n để tính giới hạn của dãy (giá trị của giới hạn này thường được viết là $1,\overline{5}$ mà ta gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn.
2. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = 1$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = 3 + \frac{1}{a_n}$. Chứng minh dãy (a_n) tăng và bị chặn chặn trên bởi 3. Tính giới hạn của dãy.
3. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = 2$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$. Chứng minh dãy (a_n) thỏa $\forall n, 0 < a_n \leq 2$ và là dãy tăng. Tính giới hạn của dãy.

Bài tập về dãy số đơn điệu II

4. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = a > 0$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ Chứng minh dãy (a_n) đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy. Hướng dẫn: phân hai trường hợp, $0 < a \leq 2$; $a > 2$.
5. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = \sqrt{a}$ $(a > 0)$, và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ Chứng minh dãy (a_n) đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy này (người ta hay viết giới hạn đó dưới dạng $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$).
6. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = \frac{5}{2}$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 6)$. Chứng minh dãy (a_n) đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy.
7. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = 10$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$. Chứng minh dãy (a_n) đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy.

Bài tập về dãy số đơn điệu III

8. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = 1$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{[a_n]}$ ($[a_n]$ là số nguyên lớn nhất nhưng không vượt quá a_n). Chứng minh dãy (a_n) đơn điệu và bị chặn. Tính giới hạn của dãy.

Khái niệm chuỗi số

Định nghĩa và ký hiệu chuỗi số

Cho trước dãy số $(a_n)_{n\geq n_0}$. Với mỗi $n \geq n_0$, xét tổng gồm hữu hạn số hạng

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n.$$

Các tổng s_n như trên được gọi là **tổng riêng phần**. Dãy $(s_n)_{n\geq n_0}$ được gọi là chuỗi số và được ký hiệu bởi

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \text{ hay là}$$

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_n + \cdots$$

Các số a_n được gọi **số hạng tổng quát** của chuỗi.

Khái niệm chuỗi số

Ghi chú. Nếu số hạng đầu tiên a_{n_0} đã được hiểu ngầm thì chuỗi trên được ký hiệu ngắn gọn là $\sum a_n$.

Chuỗi số hội tụ, tổng chuỗi

Nếu dãy các tổng riêng phần của chuỗi hội tụ về s thì ta nói chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hội tụ và ta gọi s là tổng của chuỗi. Lúc đó ta có thể viết

$$s = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Nếu dãy các tổng riêng phần của chuỗi phân kỳ thì ta nói chuỗi phân kỳ.

Khái niệm chuỗi số

Ghi chú.

- Mặc dù ký hiệu của chuỗi có dấu "$\sum$", có dấu "$+$", nhưng chúng không hề mang ý nghĩa của tổng hay của phép cộng thông thường.
- Nếu chuỗi hội tụ thì ký hiệu của chuỗi cũng là ký hiệu cho tổng chuỗi.
- Nếu chuỗi phân kỳ thì "$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$" chỉ đơn thuần là ký hiệu chuỗi, không phải là tổng chuỗi.
- Hai chuỗi $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ có cùng bản chất, nghĩa là việc thêm hay bỏ vài số hạng đầu của chuỗi sẽ không ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

Khái niệm chuỗi số

Chuỗi hình học

- Chuỗi hình học là chuỗi có dạng $\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n$ (với $a \neq 0$), nghĩa là mỗi số hạng tổng quát khi nhân với số r sẽ cho số hạng tiếp theo. Số r giống như **công bội** trong cấp số nhân.
- Chuỗi hình học hội tụ khi $|r| < 1$, lúc đó
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n = \frac{ar^{n_0}}{1-r}$$
(tổng chuỗi bằng số hạng đầu chia cho "1 trừ công bội").
- Nếu $|r| \geq 1$ thì chuỗi hình học phân kỳ.

Khái niệm chuỗi số

Chứng minh.

Xét s_n, với $n = n_0 + p$, là tổng riêng phần

$$s_n = ar^{n_0} + ar^{n_0+1} + \cdots + ar^{n_0+p}$$
$$rs_n = ar^{n_0+1} + ar^{n_0+2} + \cdots + ar^{n_0+p+1}$$

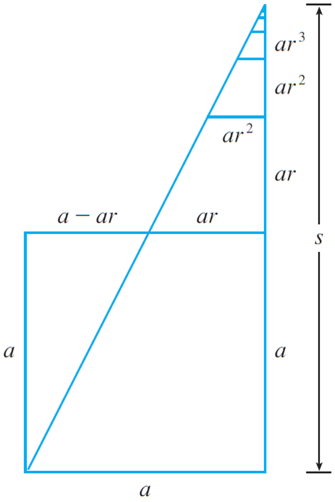
Trừ vế theo vế ta được $s_n(1-r) = ar^{n_0}(1-r^{p+1})$. Nếu $r \neq 1$ thì ta có

$$s_n = \frac{ar^{n_0}(1-r^{p+1})}{1-r}$$

Với $|r| < 1$, $r^{p+1} \to 0$ khi $n \to \infty$; với $|r| \geq 1$ thì không tồn tại giới hạn này. Từ đó ta có điều cần chứng minh. $\square$

Khái niệm chuỗi số

Cái tên chuỗi hình học bắt nguồn từ minh họa sau cho sự hội tụ của $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, với $a > 0$ và $0 < r < 1$:



Với các tam giác được xây dựng như hình bên và s là tổng chuỗi, thì, do tính chất đồng dạng của các tam giác, ta có

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar},$$

vì thế $s = \dfrac{a}{1 - r}$

Khái niệm chuỗi số

Chuỗi điều hòa

- Chuỗi điều hòa là chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Chuỗi điều hòa thì phân kỳ.

Khái niệm chuỗi số

Chứng minh.

Ta xét các tổng riêng phần s_{2^m} gồm 2^m số hạng đầu tiên. Ta sẽ chứng minh $s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$ theo kiểu qui nạp.
Với $m = 1$ thì $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$. Giả sử đã có $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, khi đó

$$s_{2^{k+1}} = s_{2^k} + \sum_{p=1}^{2^k} \frac{1}{2^k + p} > \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \sum_{p=1}^{2^k} \frac{1}{2^k + 2^k}$$
$$= 1 + \frac{k}{2} + \frac{2^k}{2^k + 2^k} = 1 + \frac{k+1}{2}.$$

Theo phép qui nạp, ta có $\forall m, s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$. Từ đây ta thấy dãy các tổng riêng phần là dãy lớn vô cùng, do đó chuỗi điều hòa phân kỳ. $\square$

Tính chất của chuỗi số

Mệnh đề 1

- Nếu $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi tổng $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n + b_n)$ là hội tụ và

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- Nếu $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hội tụ thì với mọi số α, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ là hội tụ và

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

Tính chất của chuỗi số

Ghi chú của mệnh đề 1

- Nếu $\sum a_n$ hội tụ, trong khi $\sum b_n$ phân kỳ, thì chuỗi tổng $\sum(a_n + b_n)$ là phân kỳ, chuỗi $\sum \alpha b_n$ cũng phân kỳ.
- Nếu cả hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng phân kỳ thì ta không có kết luận gì về chuỗi tổng $\sum(a_n + b_n)$.

Tính chất của chuỗi số

Điều kiện cần (chưa đủ) để chuỗi hội tụ

Nếu $\sum a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Do đó, nếu dãy (a_n) phân kỳ hoặc có giới hạn khác 0 thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

Chú ý: Điều kiện $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ chưa đủ để suy ra chuỗi $\sum a_n$ hội tụ. Ví dụ, chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n}$ phân kỳ, mặc dù $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Chứng minh.

Giả sử chuỗi $\sum a_n$ hội tụ về tổng s, nghĩa là hai tổng riêng phần liên tiếp s_{n-1} và s_n cùng hội tụ về s khi $n \to \infty$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0,$$

kết thúc chứng minh. $\square$

Các dấu hiệu hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh dạng bất đẳng thức

Cho hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ thỏa: $\forall n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq b_n$.

(i) Nếu chuỗi (lớn) $\sum b_n$ hội tụ thì chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ hội tụ.

(ii) Nếu chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ phân kỳ thì chuỗi (lớn) $\sum b_n$ phân kỳ.

Chứng minh.

Gọi (s_n) và (S_n) lần lượt là dãy các tổng riêng phần của $\sum a_n$ và $\sum b_n$ tương ứng. Từ giả thiết, ta thấy (s_n) và (S_n) cùng tăng, đồng thời $\forall n \geq n_0, s_n \leq S_n$. Nếu chuỗi $\sum b_n$ hội tụ thì dãy (S_n) hội tụ về $S = \sup b_n$, đồng thời $\forall n, s_n \leq S_n \leq S$. Do đó dãy (s_n), tăng bị chặn trên bởi S, sẽ hội tụ, nghĩa là $\sum a_n$ hội tụ. Vậy ta chứng minh xong kết luận (i). Kết luận (i) là phản đảo của kết luận (ii), tương đương nhau. $\square$

Các dấu hiệu hội tụ

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh bất đẳng thức và định nghĩa giới hạn, người ta chứng minh được

Tiêu chuẩn so sánh dạng lim

Giả sử hai chuỗi $\sum a_n, \sum b_n$ thỏa điều kiện $\forall n \geq n_0, a_n \geq 0,\ b_n > 0$, đồng thời

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

1. Nếu K là số thực dương thì hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
2. Nếu $K = 0$ ($\sum a_n$ "giống chuỗi nhỏ") và chuỗi $\sum b_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ.
3. Nếu $K = \infty$ ($\sum a_n$ "giống chuỗi lớn") và chuỗi $\sum a_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum b_n$ hội tụ.

Các dấu hiệu hội tụ

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh bất đẳng thức và kỹ thuật tương tự như chứng minh về chuỗi điều hòa, người ta chứng minh được kết quả sau

Chuỗi Dirichlet

- Cho số thực α. Chuỗi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ được gọi là chuỗi Dirichlet (nếu $\alpha = 1$ thì nó là chuỗi điều hòa).
- Chuỗi Dirichlet hội tụ khi $\alpha > 1$; phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

Chú ý: trong thực hành khảo sát sự hội tụ của chuỗi, người ta thường so sánh với chuỗi hình học và chuỗi Dirichlet.

Các dấu hiệu hội tụ

Chuỗi đan dấu

Cho dãy số (a_n) sao cho $\forall n, a_n \geq 0$. Khi đó chuỗi $\sum(-1)^n a_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} a_n$ được gọi là chuỗi đan dấu, vì các số hạng tổng quát được sắp theo thứ tự âm dương xen kẽ.

Chuỗi Leibnitz

Chuỗi đan dấu $\sum(-1)^n a_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} a_n$ $(\forall n, a_n > 0)$ được gọi là chuỗi Leibnitz, nếu:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. Dãy (a_n) là dãy (dương) giảm.

Định lý (Leibnitz)

Chuỗi Leibnitz hội tụ và có tổng s thỏa $|s| \leq a$, trong đó a là giá trị tuyệt đối của số hạng đầu tiên.

Chứng minh

Chứng minh định lý Leibnitz

] Không mất tính tổng quát, ta xét chuỗi Leibnitz có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(1-)^{n-1}a_n$ $(\forall n, a_n > 0)$, nghĩa là số hạng đầu của chuỗi là $a_1 > 0$. Ta xét các tổng riêng phần có số số-hạng là chẵn, gồm

$$s_2 = a_1 - a_2 \geq 0, \text{ vì } a_1 \geq a_2$$
$$s_4 = s_2 + (a_3 - a_4) \geq s_2, \text{ vì } a_3 \geq a_4$$

Nói chung, $s_{2n} = s_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq s_{2n-2}$, vì $a_{2n-1} \geq a_{2n}$. Do đó

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n+2} \leq \ldots$$

Hơn nữa, ta có thể viết

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Chứng minh

Chứng minh định lý Leibnitz (tiếp theo).

Mỗi số hạng trong dấu ngoặc ở trên đều không âm nên $s_{2n} \leq a_1$ với mọi n. Vậy dãy số $(s_{2n})_{n\geq 1}$ là dãy tăng bị chặn trên, do đó hội tụ về biên trên $s \leq a_1$. Với các tổng riêng phần lẻ, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) \\ &= s + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \\ &= s + 0 = s. \end{aligned}$$

Vì cả hai dãy tổng riêng phần chẵn và lẻ cùng hội tụ về s nên ta chứng minh được chuỗi Leibnitz hội tụ. □

Xấp xỉ tổng chuỗi Leibnitz

Đánh giá sai số trong xấp xỉ tổng chuỗi Leibnitz

Giả sử $\sum(-1)^n a_n$ hay $\sum(-1)^{n-1} a_n$ là chuỗi Leibnitz ($\forall n, a_n > 0$), có tổng s và các tổng riêng phần là s_n. Khi đó, sai số trong phép xấp xỉ $s \approx s_n$ được đánh giá bởi bất đẳng thức

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}.$$

Chứng minh.

Khi ta bỏ đi tổng s_n trong chuỗi Leibnitz ban đầu, ta được chuỗi Leibnitz mới mà trị tuyệt đối của số hạng đầu tiên trong chuỗi mới là a_{n+1}. Hơn nữa chuỗi mới sẽ hội tụ về $s - s_n$ thỏa $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ (theo định lý trước đó về sự hội tụ của chuỗi Leibnitz). □

Các dấu hiệu hội tụ

Hội tụ tuyệt đối

Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ.

Hội tụ có điều kiện

Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là **hội tụ có điều kiện** khi chuỗi này hội tụ, nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Định lý

Nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ (hội tụ tuyệt đối kéo theo hội tụ).

Ví dụ: sinh viên tự giải thích các điều sau

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ hội tụ tuyệt đối.
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ có điều kiện.

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn d'Alembert)

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.
3. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ thì, nói chung, ta không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum a_n$.

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn Cô-si)

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.
3. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ thì, nói chung, ta không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum a_n$.

Các dấu hiệu hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{(n+1)}.(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{3.3^n.(n+1).n!}{(n+1)^n.(n+1)} = \frac{3.3^n.n!}{(n+1)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3.3^n.n!}{(n+1)^n}.\frac{n^n}{3^n.n!} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1$$

Vậy chuỗi phân kỳ theo tiêu chuẩn d'Alembert.

Các dấu hiệu hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+3}.\sqrt[n]{n^5} = \frac{3}{4} < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Cô si.

Các dấu hiệu hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với

$$a_n = \frac{2.5.8.\ldots.(3n-1)}{1.6.11.\ldots.(5n-4)}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2.5.8.\ldots.(3(n+1)-1)}{1.6.11.\ldots.(5(n+1)-4)} = a_n = \frac{2.5.8.\ldots.(3n+2)}{1.6.11.\ldots.(5n+1)} \\ &= a_n = \frac{2.5.8.\ldots.(3n-1)(3n+1)}{1.6.11.\ldots.(5n-4)(5n+1)} = a_n.\frac{(3n+2)}{(5n+1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)}{(5n+1)} = \frac{3}{5} < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn d'Alembert.

Các dấu hiệu hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)\cos 3n}{\sqrt[3]{n^7+n+1}}$$

Chuỗi trên có dấu tùy ý. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ là chuỗi dương

$$|a_n| = \frac{(2n+3)|\cos 3n|}{\sqrt[3]{n^7+n+1}} \leq \frac{(2n+3)}{\sqrt[3]{n^7+n+1}} \sim \frac{2n}{n^{7/3}} = \frac{2}{n^{4/3}}$$

Vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối (ký hiệu $\sim$ có nghĩa là hai dãy số hạng tổng quát trên tạo nên hai chuỗi cùng bản chất).

Hàm số liên tục

Hàm số liên tục

- Ánh xạ và Hàm số
- Giới hạn hàm số
- Hàm số liên tục

Ánh xạ

Ánh xạ

Cho hai tập hợp A và B khác rỗng. **Ánh xạ** f từ tập A vào tập B, viết là $f : A \to B$ là một phép liên kết mỗi phần tử x của tập A với một và chỉ một phần tử, được ký hiệu là $f(x)$, của tập B mà thôi. Khi đó ta nói $f(x)$ là **ảnh** của x qua ánh xạ f, và x là **tiền ảnh** của $f(x)$.

Ghi chú. Nếu đã ngầm hiểu về A và B thì ánh xạ trên còn được ký hiệu bởi $x \mapsto f(x)$.

Toàn ánh

Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là **toàn ánh** khi mà mỗi phần tử y của tập B đều có (**ít nhất**) một tiền ảnh x trong A, nghĩa là có (**ít nhất**)một phần tử x của A sao cho $y = f(x)$.

Ánh xạ

Đơn ánh, hay ánh xạ 1-1

Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là **đơn ánh** khi mà bất kỳ hai phần tử x_1 và x_2 khác nhau của tập A đều có ảnh $f(x_1)$ và $f(x_2)$ khác nhau.

Song ánh

Song ánh là ánh xạ có hai tính chất: vừa là toàn ánh, vừa là đơn ánh.

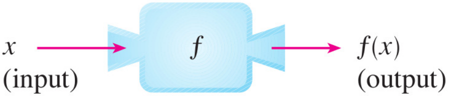
Song ánh ngược

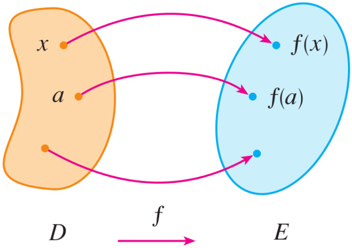
Nếu có một song ánh f từ A tới B thì ta có thể xây dựng một song ánh từ B tới A bằng cách cho mỗi $y \in B$ liên kết với $x \in A$ sao cho $f(x) = y$. Song ánh này có tên gọi là **song ánh ngược** của f và thường được ký hiệu là f^{-1}.

Hàm số

Cho D và E là hai tập con khác rỗng của tập số thực $\mathbb{R}$.

- Ánh xạ $f : D \to E$ được gọi là **hàm số**. D được gọi là **miền xác định** của f.
- Nếu x là ký hiệu đại diện cho một số tùy ý trong D thì x được gọi là **biến độc lập** (hay **đối số**), và nếu ta viết $y = f(x)$ thì y được gọi là **biến phụ thuộc** (theo x). Số $f(x)$ là **giá trị của** f **tại** x, hay gọi tắt là f **của** x.
- Tập $R_f = \{y \in E | \exists x \in D, f(x) = y\}$ được gọi là **miền giá trị** (hay **tập ảnh**) của hàm f.





Hàm số

Các phương pháp biểu diễn hàm số

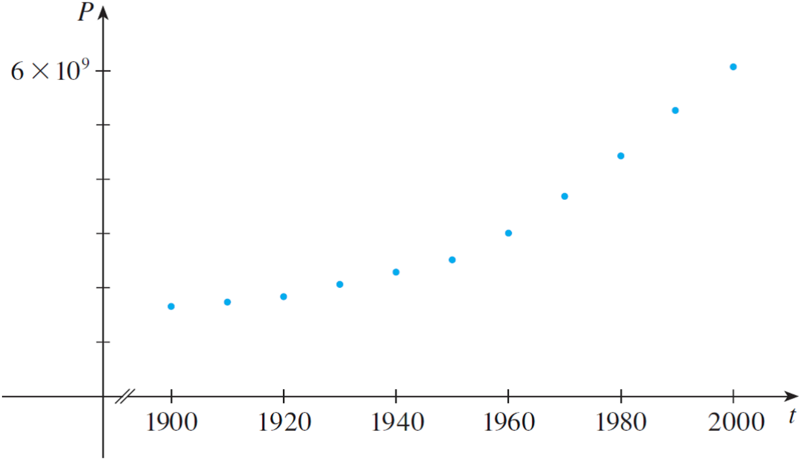
1. Mô tả bằng lời
2. Trưng bảng giá trị
3. Biểu diễn đồ thị hàm số
4. Biểu diễn bởi công thức tường minh

Ví dụ: dân số thế giới tại thời điểm t (chỉ năm) là $P(t)$, nghĩa là P là hàm số với biến độc lập t. Người ta biểu diễn hàm số này bằng cách trưng bảng giá trị như hình bên.

Year	Population (millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

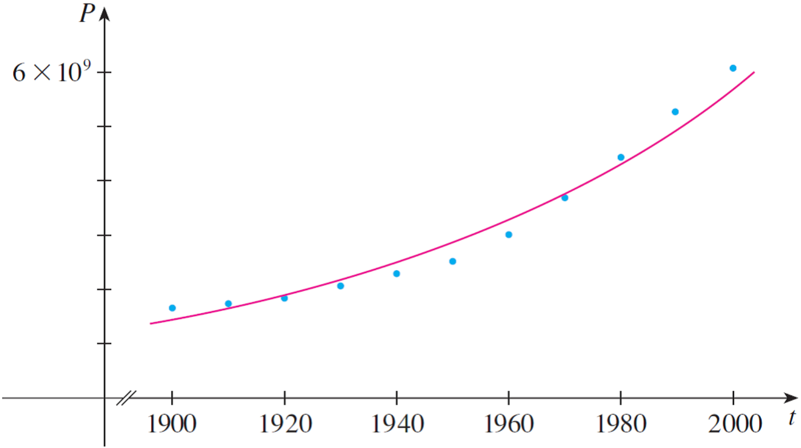
Hàm số

Dựa vào bảng dữ liệu, ta chấm các điểm trên mặt phẳng đồ thị, ta có cách biểu diễn hàm số bằng đồ thị như sau



Hàm số

Ngoài ra, bằng các phương pháp lập mô hình trong toán học, người ta xấp xỉ $P(t) \approx f(t) = (0,008079266).(1.013731)^t$, và ta có biểu diễn hàm số bởi công thức tường minh của hàm số f. Sau đây là đồ thị của f



Hàm số

Một ví dụ về cách biểu diễn hàm số bằng lời: Ký hiệu $C(w)$ là cước phỉ gửi nhanh cho thư có trọng lượng w (nghĩa là C là hàm số theo biến w). Luật tính phí ở bưu điện Mỹ năm 2007 như sau: 39 xu cho trọng lượng lên đến tối đa 1 ounce đầu tiên, cộng thêm 24 xu cho mỗi ounce tiếp theo trong số tối đa 13 ounces. Dựa vào lời mô tả này, ta có thể biểu diễn hàm C với bảng giá trị như hình bên.

w (ounces)	$C(w)$ (dollars)
$0 < w \leqslant 1$	0.39
$1 < w \leqslant 2$	0.63
$2 < w \leqslant 3$	0.87
$3 < w \leqslant 4$	1.11
$4 < w \leqslant 5$	1.35
$\vdots$	$\vdots$
$12 < w \leqslant 13$	3.27

Hàm số

Các phép toán trên hàm số. Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên tập D.

- $f = g$ nếu $f(x) = g(x)$ với mọi x thuộc D
- $f \neq g$ nếu tồn tại x thuộc D mà $f(x) \neq g(x)$
- $f > g$ nếu $f(x) \geq g(x)$ với mọi x thuộc D
- $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$
- $(f.g)(x) := f(x).g(x)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (khi $g(x) \neq 0$)

Hàm số

Hàm hợp

Cho hai hàm $g : X \to Y, f : Y \to Z$.

Khi đó tồn tại hàm hợp $f \circ g : X \to Z$ định bởi

$$h(x) = f \circ g(x) = f[g(x)]$$

Ví dụ

$$g(x) = x - 3; \quad f(x) = x^2$$

- $\Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2$
- $\Rightarrow g \circ f(x) = g(g(f)) = g(x^2) = x^2 - 3$

Cần lưu ý rằng nói chung $f \circ g \neq g \circ f$

Hàm số

Ví dụ

Cho $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{2-x}$. Tìm các hàm số sau và miền xác định của nó:

$$a) f \circ g; \qquad b) g \circ f; \qquad c) f \circ f; \qquad d) g \circ g$$

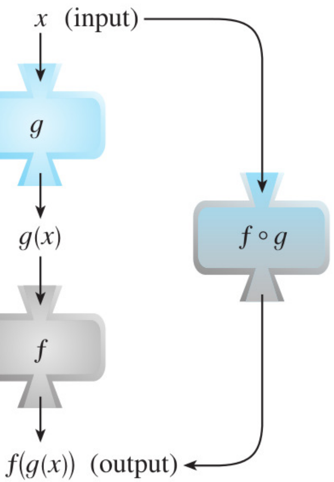
a) $f \circ g(x) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x} \quad \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, 2]$

b) $g \circ f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}} \quad \to D_{g \circ f} = [0, 4]$

c) $f \circ f(x) = \sqrt[4]{x} \quad \to D_{f \circ g} = [0, +\infty)$

d) $g \circ g(x) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}} \quad \to D_{f \circ g} = [-2, 2]$

Hàm số



Hình: Hàm hợp

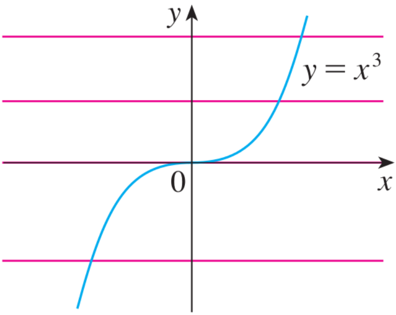
Hàm số

Hàm $1-1$, còn gọi hàm đơn ánh

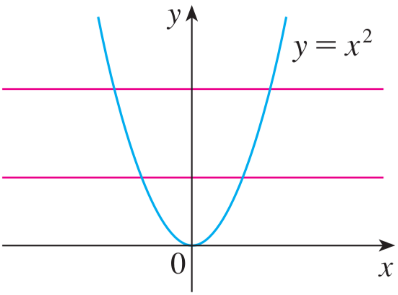
- Hàm f được gọi là hàm $1-1$ (hàm đơn ánh), nếu $\forall x_1 \neq x_2 \in D_f, f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Hàm f là hàm $1-1$ khi và chỉ khi không tồn tại đường thẳng nằm ngang cắt đồ thị nhiều hơn một điểm. Nói cách khác, $\forall m$, phương trình $f(x) = m$ có tối đa một nghiệm, nghĩa là vô nghiệm hoặc có duy nhất nghiệm.

Hàm số

Ví dụ:



Hình: Hàm $1-1$



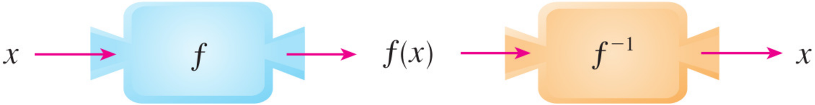
Hình: Không là hàm $1-1$

Hàm số

Hàm ngược

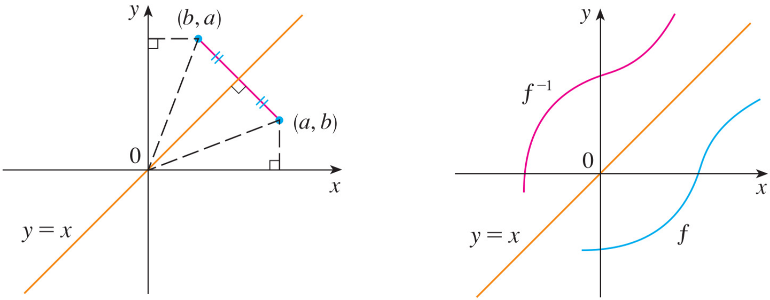
Cho $y = f(x)$ là hàm $1-1$ với miền xác định D và miền giá trị E. Hàm ngược của $y = f(x)$ là hàm từ E vào D, ký hiệu $x = f^{-1}(y)$, xác định bởi

$$x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$



Chú ý

Vì $a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$, nên (a, b) thuộc đồ thị $y = f(x)$ khi và chỉ khi (b, a) thuộc đồ thị của f^{-1}.

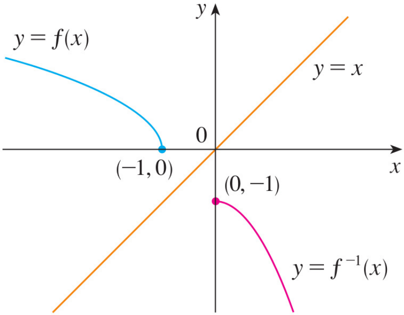


Đồ thị $y = f(x)$ và đồ thị f^{-1} đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Hàm số

Ví dụ

Vẽ đồ thị của $y = \sqrt{-x-1}$ và đồ thị hàm ngược.



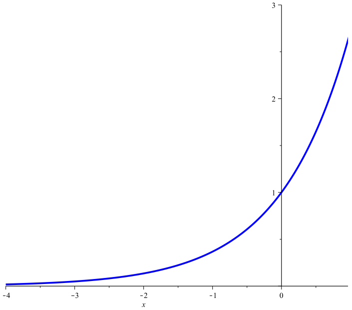
Hàm số

Các hàm sơ cấp thường gặp

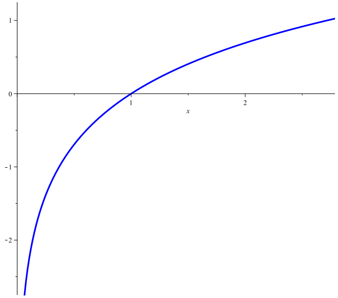
Phạm vi của giáo trình giải tích B1 không trình bày cơ sở lý thuyết xây dựng nên các hàm sơ cấp, mà xem như sinh đã làm quen với các hàm số này ở bậc phổ thông. Các hàm đó bao gồm hàm đa thức; hàm phân thức; hàm lũy thừa; hàm số mũ; hàm logarit; các hàm lượng giác; hàm lượng giác ngược; các hàm là kết quả của tổng hợp các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, hàm hợp v.v.. giữa các hàm nói trên.
Sau đây là đồ thị mô tả vài hàm sơ cấp.

Hàm số

Hàm số $x \mapsto a^x$ (với $a > 0$) là song ánh với miền xác định $\mathbb{R}$ và miền giá trị là $\mathbb{R}^+$. Hàm ngược của nó là $x \mapsto \log_a x$. Sau đây là đồ thị của hai hàm số này ứng với $a = e$ (e là số Népère) (nếu để chung một mặt phẳng tọa độ, chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$)



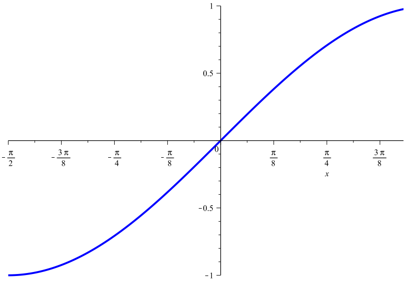
Đồ thị hàm $x \mapsto a^x$



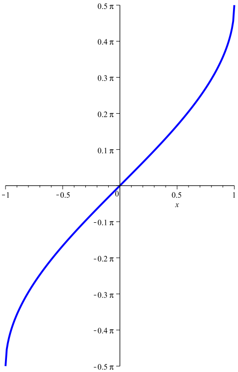
Đồ thị hàm $x \mapsto \log_a x$

Hàm số

Hàm số $x \mapsto \sin x$ là song ánh với miền xác định $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ và miền giá trị là $[-1, 1]$. Hàm ngược của nó là $x \mapsto \arcsin x$. Sau đây là đồ thị của hai hàm số này (nếu để chung một mặt phẳng tọa độ, chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$)



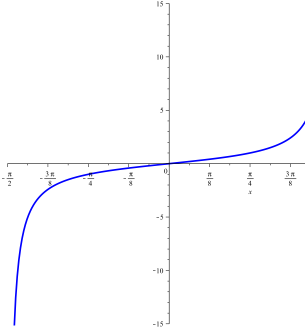
Đồ thị hàm $x \mapsto \sin x$



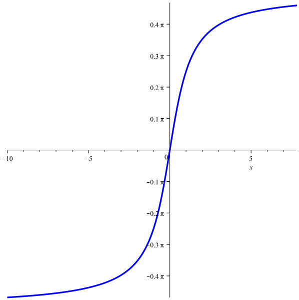
Đồ thị hàm $x \mapsto \arcsin x$

Hàm số

Hàm số $x \mapsto \tan x$ là song ánh với miền xác định $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ và miền giá trị là $\mathbb{R}$. Hàm ngược của nó là $x \mapsto \arctan x$. Sau đây là đồ thị của hai hàm số này (nếu để chung một mặt phẳng tọa độ, chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$)



Đồ thị hàm $x \mapsto \tan x$



Đồ thị hàm $x \mapsto \arctan x$

Giới hạn hàm số

Điểm tụ

Cho D là tập số thực. Điểm a được gọi là điểm tụ của tập D nếu trong mọi khoảng $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ đều chứa vô số các phần tử của tập D.

Ví dụ

- Với $D = (0, 1)$ thì điểm tụ của D là $[0, 1]$.
- Với

$$D = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Thì D có duy nhất một điểm tụ là 0

Giới hạn hàm số

Định nghĩa giới hạn tại a (Ngôn ngữ ε_δ)

Cho a là điểm tụ của miền xác định. Ta nói f có giới hạn bằng L tại a, viết là $\lim_{x\to a} f(x) = L$, nghĩa là

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D_f, \tag{3}$$

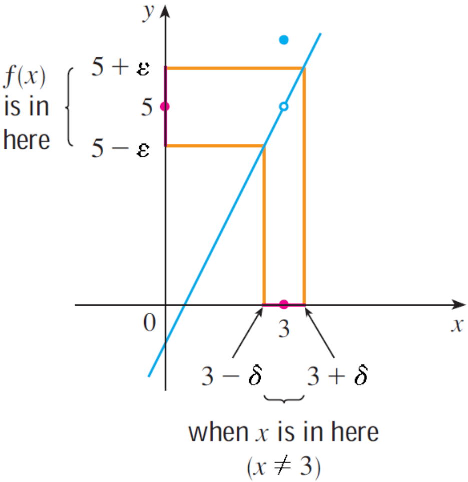
$$\text{nếu } 0 < |x-a| < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ghi chú:

- Trong định nghĩa trên, **không nhất thiết** f phải **xác định** tại điểm a. Ví dụ, người ta chứng minh được $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, mặc dù $\frac{\sin x}{x}$ không xác định tại điểm 0.
- Phát biểu (3) được hiểu đại khái là ta có thể xấp xỉ $f(x) \approx L$ với sai số bé hơn số dương ε cho trước tùy ý, miễn là lấy x đủ gần a.

Giới hạn hàm số

Hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số, gồm một đường bị khuyết một điểm (chấm trắng) và một chấm xanh đậm. Tung độ của chấm xanh đậm là $f(3)$, tung độ chấm trắng là 5. Đồ thị này minh họa cho phát biểu $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.



Giới hạn hàm số

Giới hạn trái

Số L gọi giới hạn trái của f tại điểm a, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Lúc đó ta viết $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

Giới hạn phải

Số L gọi giới hạn trái của f tại điểm a, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Lúc đó ta viết $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

Giới hạn hàm số

Định lý

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại a khi và chỉ khi nó có giới hạn trái và giới hạn phải tại a và chúng bằng nhau.

Chú ý

Dùng định lý trên để chứng tỏ hàm không có giới hạn, nghĩa là, nếu không tồn tại một trong hai giới hạn trái và phải; hoặc tồn tại cả hai giới hạn trái và phải nhưng khác nhau, thì hàm số không có giới hạn.

Giới hạn hàm số

Giới hạn tại a (Ngôn ngữ dãy)

Giả sử a là điểm tụ của miền xác định của hàm f. Khi đó, hai điều sau là tương đương

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
- $\forall (x_n) \subset D_f \setminus \{a\}$, nếu $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$ thì $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} L$

Hệ quả

Nếu một trong hai điều sau xảy ra

- Có hai dãy (x_n) và (x_n') trong $D_f \setminus \{a\}$, cùng hội tụ về a mà hai dãy $(f(x_n))$ và $\big(f(x_n')\big)$ hội tụ về hai số khác nhau
- Có một dãy (x_n) trong $D_f \setminus \{a\}$, hội tụ về a, nhưng dãy $(f(x_n))$ phân kỳ

thì hàm f không có giới hạn tại a.

Giới hạn hàm số

Ví dụ

Chứng tỏ không tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

Chọn hai dãy (x_n) và (x_n') định bởi:

$$\forall n, x_n = \frac{1}{2n\pi}, \ x_n' = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}.$$

Khi đó

- $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và $f(x_n) = \sin 2n\pi = 0 \to 0$
- $x_n' \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và $f(x_n') = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$

Suy ra không tồn tại giới hạn tại 0.

Giới hạn hàm số

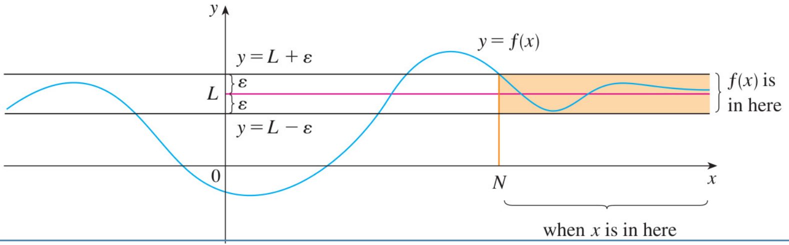
Giới hạn tại ∞

Ta viết $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ có nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in D_f, x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (4)$$

Lúc đó, ta nói đồ thị của f có đường $y = L$ là tiệm cận ngang.

Nói đại khái, (4) có nghĩa là ta xấp xỉ $f(x) = L$ với sai số bé hơn ε cho trước tùy ý, miễn là lấy x **dương** đủ lớn.



Giới hạn hàm số

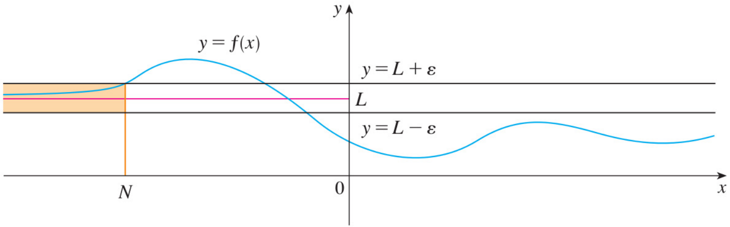
Giới hạn tại $-\infty$

Ta viết $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ có nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N < 0, \forall x \in D_f, x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (5)$$

Lúc đó, ta nói đồ thị của f có đường $y = L$ là tiệm cận ngang.

Nói đại khái, (5) có nghĩa là ta xấp xỉ $f(x) = L$ với sai số bé hơn ε cho trước tùy ý, miễn là lấy x **âm** đủ bé.



Giới hạn hàm số

Hàm tiến ra ∞

Ta viết $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ có nghĩa là

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \text{ nếu } 0 < |x - a| < \delta \text{ thì } f(x) > M \tag{6}$$

Khi đó, ta nói đồ thị của f có đường $x = a$ là tiệm cận đứng.

Hàm tiến ra $-\infty$

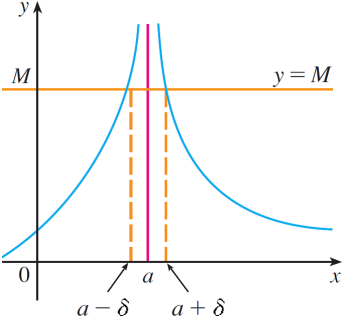
Ta viết $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ có nghĩa là

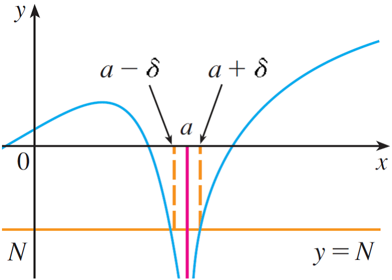
$$\forall N < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \text{ nếu } 0 < |x - a| < \delta \text{ thì } f(x) < N \tag{7}$$

Khi đó, ta nói đồ thị của f có đường $x = a$ là tiệm cận đứng.

Giới hạn hàm số

Hai hình vẽ sau minh họa cho phát biểu (6) và (7)





Giới hạn hàm số

Tính chất của gới hạn hàm số

Giả sử $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ và $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$. Khi đó

1. $\lim\limits_{x \to a} [\alpha f(x)] = \alpha L_1, \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x).g(x)] = L_1.L_2$
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$
5. Tính chất bảo toàn thứ tự: nếu $f(x) \leq g(x)$ với mọi x trong một khoảng mở chứa a (lân cận của a), thì $L_1 \leq L_2$

Giới hạn hàm số

Định lý giới hạn kẹp

Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ với mọi x trong một khoảng mở chứa a (lân cận của a), đồng thời $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, thì

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Hàm số liên tục

Hàm số liên tục

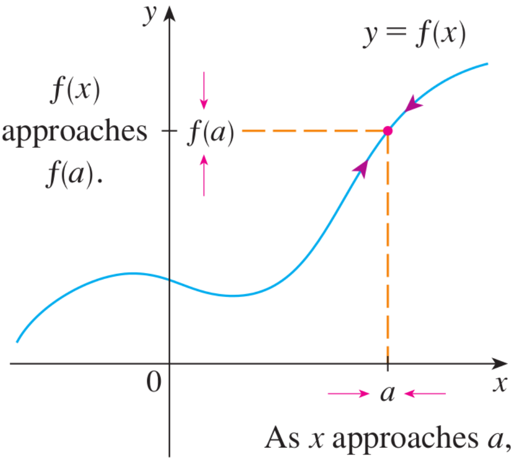
Hàm số f được gọi là **liên tục** tại điểm a nếu:

1. $a \in D_f$;
2. Tồn tại giới hạn $\lim_{x\to a} f(x)$;
3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Qui ước.

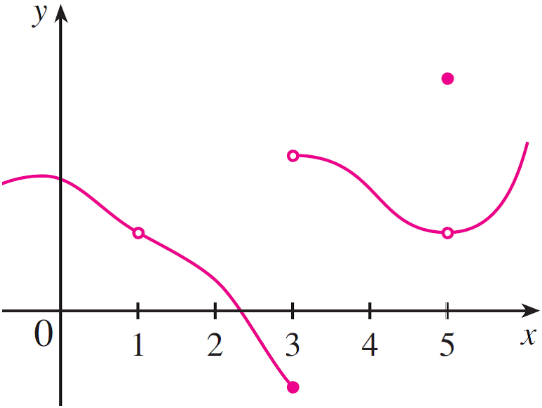
Nếu a không là điểm tụ của D_f (cũng được gọi là **điểm của cô lập** của D_f), và dĩ nhiên không thể xét đến mục 2. và 3. trong định nghĩa trên, thì người ta vẫn qui ước rằng f liên tục tại a.

Hàm số liên tục



Đồ thị liền nét (không đứt đoạn) tại điểm $(a, f(a))$.

Hàm số liên tục



Đồ thị hàm số gián đoạn tại điểm $a = 1$, $a = 3$ và $a = 5$.

Hàm số liên tục

Một định nghĩa khác tương đương

Định nghĩa sự liên tục theo dãy

Hàm f được gọi là liên tục tại a khi và chỉ khi, với mọi dãy (x_n) trong D_f mà hội tụ về a, ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

Nếu hàm không liên tục tại a, ta nói hàm gián đoạn tại điểm này.

Hàm số liên tục

Dấu hiệu nhận biết gián đoạn

(i) Nếu a không thuộc miền xác định của f thì f gián đoạn tại a.

(ii) Nếu có một dãy số (x_n) trong D_f, hội tụ đến $a \in D_f$ và thỏa một trong hai điều sau

- Dãy $(f(x_n))$ phân kỳ
- $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$

thì hàm số f gián đoạn tại a.

Hàm số liên tục

Định nghĩa sự liên tục kiểu $\varepsilon - \delta$

Hàm f được gọi là **liên tục** tại $a \in D_f$ nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \text{ nếu } |x-a| < \delta \text{ thì } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Hàm số liên tục trái

Hàm f được gọi là **liên tục trái** tại $a \in D_f$ nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \text{ nếu } 0 < a - x < \delta \text{ thì } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

nghĩa là $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ (nếu a cũng là điểm tụ của D_f).

Hàm số liên tục

Hàm số liên tục phải

Hàm f được gọi là **liên tục phải** tại $a \in D_f$ nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \text{ nếu } 0 < x - a < \delta \text{ thì } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

nghĩa là $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (nếu a cũng là điểm tụ của D_f).

Mệnh đề

- Hàm số f liên tục tại $a \in D_f$ khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại a.
- Tương tự dấu hiệu nhận biết sự gián đoạn thông qua dãy đã nói ở trước, ta có thể khảo sát sự gián đoạn trái hay phải.

Hàm số liên tục

Hàm liên tục trên một tập hợp

- Hàm số f được gọi là liên tục, nghĩa là nó liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.
- Hàm f liên tục trên đoạn-khoảng nghĩa là f liên tục tại mọi điểm thuộc đoạn-khoảng đó (Nếu f xác định tại các điểm biên, ta hiểu ngầm là f liên tục phải tại điểm biên trái của đoạn-khoảng; và f liên tục trái tại điểm biên phải của đoạn-khoảng).
- Đồ thị của hàm liên tục trên một đoạn-khoảng không bị "đứt" ở chỗ nào, nghĩa là ta có thể vẽ đồ thị với một nét mà không nhấc bút lên.

Định lý: Tính liên tục của hàm sơ cấp

Mọi hàm sơ cấp đều liên tục tại mọi điểm mà chúng xác định.

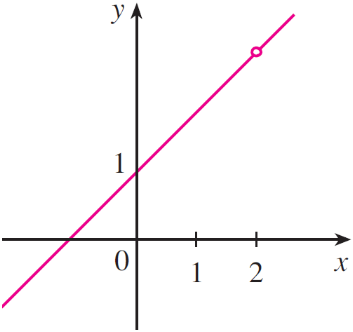
Hàm số liên tục

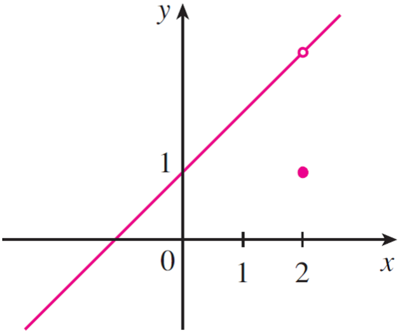
Phân loại điểm gián đoạn

Cho x_0 là điểm gián đoạn của hàm số f. Ta phân loại điểm gián đoạn như sau

1. **Điểm gián đoạn loại một**: giới hạn trái $f(x_0^-)$ và phải $f(x_0^+)$ tồn tại và hữu hạn.
   - x_0 là **điểm khử được**: $f(x_0^-) = f(x_0^+)$
   - x_0 là **điểm nhảy**: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$
   - **bước nhảy**: $h = f(x_0^+) - f(x_0^-)$
2. **Điểm gián đoạn loại hai**: Không phải loại một. Một trong hai giới hạn (trái hoặc phải) không tồn tại hoặc hàm tiến ra vô cực tại x_0.

Hàm số liên tục



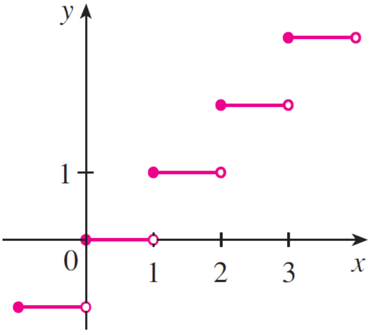


(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{if } x \neq 2 \\ 1 & \text{if } x = 2 \end{cases}$

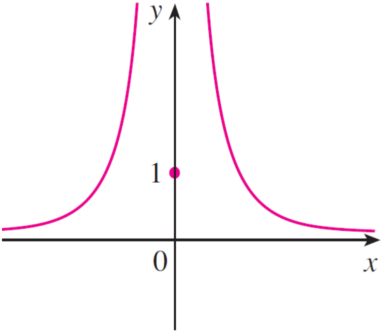
Đồ thị trên minh họa "$x_0 = 2$ là điểm gián đoạn khử được".

Hàm số liên tục



(d) $f(x) = [\![x]\!]$

Đồ thị minh họa điểm gián đoạn bước nhảy. Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.



(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

Đồ thị minh họa $x_0 = 0$ là điểm gián đoạn vô cực (thuộc loại 2).

Hàm số liên tục

Tính chất của hàm số liên tục

Cho f và g là hai hàm số liên tục tại x_0, khi đó

- Các hàm số αf; $f + g$; $f.g$ liên tục tại x_0
- Nếu $g \neq 0$ trong một lân cận của x_0, thì $\frac{f}{g}$ liên tục tại x_0
- Nếu h là hàm số có tập xác định chứa miền giá trị của f, và h liên tục tại $f(x_0)$, thì hàm hợp $h \circ f$ liên tục tại x_0.

Tính bảo toàn dấu trên một miền

Nếu hàm f liên tục tại x_0 và $f(x_0) > 0$, thì tồn tại một lân cận của x_0, sao cho $f(x) > 0$ với mọi x thuộc lân cận này.

Hàm số liên tục

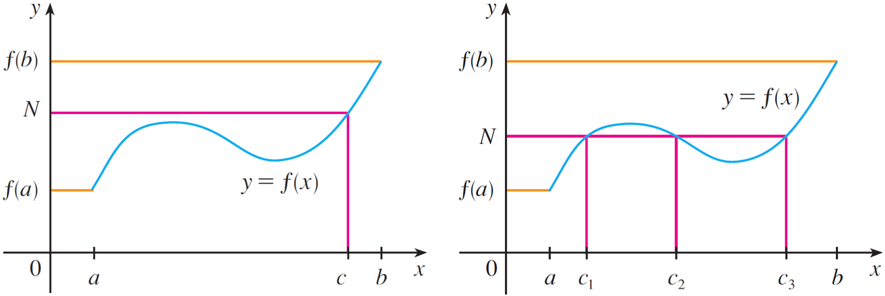
Định lý giá trị trung gian (Bozano-Côsi)

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) \neq f(b)$. Khi đó, với mọi số N nằm giữa (giá trị trung gian) $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một số $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = N$.

Hệ quả

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó tồn tại ít nhất một $x_0, a < x_0 < b$, sao cho $f(x_0) = 0$. Nói cách khác, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng (a, b).

Hàm số liên tục



Hình minh họa nội dung định lý giá trị trung gian

Hàm số liên tục

Ví dụ. Xét hàm số f định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Ta thấy

- Hàm số $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ là hàm sơ cấp xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nên nó liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$.
- Tại điểm $x = 0$, người ta chứng minh được

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

Vậy hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số liên tục

Ví dụ. Xét hàm số f định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Ta thấy

- Hàm số $x \mapsto \dfrac{\sin x}{|x|} = \dfrac{\sin x}{x}$ là hàm sơ cấp xác định trên $\mathbb{R}^+$ nên nó liên tục tại mọi điểm $x > 0$.
- Hàm số $x \mapsto \dfrac{\sin x}{|x|} = -\dfrac{\sin x}{x}$ là hàm sơ cấp xác định trên $\mathbb{R}^-$ nên nó liên tục tại mọi điểm $x < 0$.
- Tại $x = 0$, người ta chứng minh được

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = -1$$

Vậy hàm f không liên tục tại $x = 0$ mà liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hàm số liên tục

Hàm số liên tục đều

Hàm số f được gọi là **liên tục đều** trên tập $E \subset D_f$ nếu như với mỗi số dương ε (nhỏ bao nhiêu tùy ý), ta tìm được số dương δ sao cho

$$\forall x, y \in E, \text{ nếu } |x - y| \leq \delta \text{ thì } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Nhận xét:

- Nếu hàm f là liên tục đều trên E thì nó liên tục tại mọi điểm x thuộc E (vì trong định nghĩa trên, nếu ta xét điểm x cố định thì sẽ suy ra ngay hàm liên tục tại điểm x).
- Về mặt hình học, nếu hàm f liên tục đều trên E thì, với đường kính ống là ε, ta có thể cắt ống với độ ngắn bằng δ để có thể đặt ống nằm ngang và "xỏ" qua đồ thị của f mà không bị vướng. Nói cách khác, đồ thị của f không có độ dốc ngày càng lớn kiểu như có tiệm cận đứng.

Hàm số liên tục

Định lý (Cantor)

Hàm số **liên tục** trên đoạn $[a, b]$ thì cũng **liên tục đều** trên đoạn đó.

Hệ quả (Weierstrass 1)

Hàm **liên tục** trong đoạn $[a, b]$ thì **bị chặn** trong đó.

Hệ quả (Weierstrass 2)

Hàm **liên tục** trên đoạn thì đạt được các **giá trị lớn nhất và nhỏ nhất** (tại những điểm nằm trên đoạn đó).

Hàm số liên tục

Chú ý: Các định lý trên sẽ không còn đúng nếu ta thay *đoạn* $[a, b]$ bằng *khoảng* (a, b). Thật vậy, hàm f định bởi $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0, 1)$, nhưng nó không bị chặn và không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng này, đồng thời cũng không liên tục đều trên khoảng đó.

Đạo hàm

Đạo hàm

- Định nghĩa
- Ý nghĩa đạo hàm
- Công thức tính
- Liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục
- Các định lý về giá trị trung bình
- Đạo hàm cấp cao
- Công thức Taylor, Maclaurint
- Quy tắc Lopital

Định nghĩa đạo hàm

Đạo hàm

Xét hàm số f xác định trong lân cận của điểm a (khoảng mở chứa a). Ta ký hiệu

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ (nếu tồn tại giới hạn),} \qquad (8)$$

và $f'(a)$ được gọi là **đạo hàm** của f tại điểm a. Ta cũng nói rằng f có đạo hàm tại a.
Nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói f không có đạo hàm tại a.

Hình thức (8) còn được viết dưới dạng sau đây

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (9)$$

Định nghĩa đạo hàm

Ví dụ

Tính đạo hàm của hàm f định bởi $f(x) = x^3$, tại điểm a.

Nếu dùng định nghĩa (8) thì ta có

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} (x^2+xa+a^2) = a^2+a.a+a^2 = 3a^2. \end{aligned}$$

Định nghĩa đạo hàm

Ví dụ

Tính đạo hàm của hàm f định bởi $f(x) = \dfrac{1}{x}$, tại điểm $a \neq 0$.

Nếu dùng định nghĩa dạng (9) thì ta có

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a - (a+h)}{ha(a+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Định nghĩa

Ví dụ

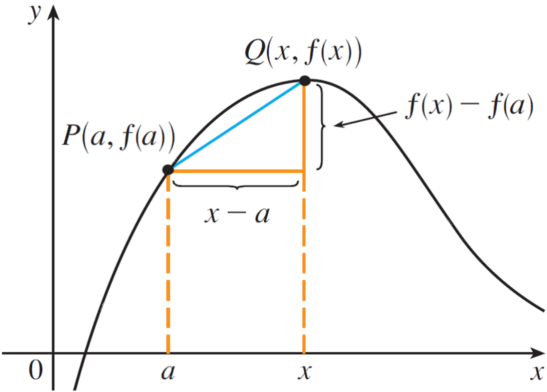
Tìm $f'(0)$, biết $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0, \end{aligned}$$

kết quả 0 sau cùng là do định lý giới hạn kẹp áp dụng vào bất đẳng thức $\forall h \neq 0, -|h| \leq h \sin\frac{1}{h} \leq |h|$.

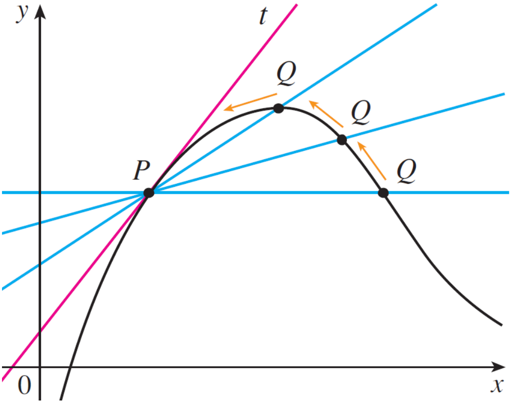
Ý nghĩa: Đạo hàm & Tiếp tuyến

Xem lại định nghĩa (8), nếu ta gọi $P(a, f(a))$ và $Q(x, f(x))$ là hai điểm thuộc đồ thị của f như hình vẽ bên, thì $m_{PQ} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ là **độ dốc** (hệ số góc) của cát tuyến PQ.



Ý nghĩa: Đạo hàm & Tiếp tuyến

Khi $x \to a$ thì điểm Q tiến dần về điểm P. Nếu tồn tại $f'(a)$, nghĩa là tồn tại $\lim_{Q \to P} m_{PQ}$, thì cát tuyến PQ sẽ di chuyển đến một vị trí cố định, là một đường thẳng qua P, có độ dốc (hệ số góc) là $f'(a)$, mà ta sẽ định nghĩa là **tiếp tuyến** với đồ thị của f tại điểm $P(a, f(a))$.



Ý nghĩa: Đạo hàm & Tiếp tuyến

Định nghĩa tiếp tuyến _ Tuyến tính hóa

Giả sử hàm số f có đạo hàm tại a. Khi đó, ta định nghĩa tiếp tuyến với đồ thị của f tại điểm $P(a, f(a))$ là đường thẳng đi qua P, có độ dốc (hệ số góc) là $f'(a)$. Nói cách khác, phương trình tiếp tuyến tại P được định nghĩa là

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Hàm số bậc nhất L định bởi $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ được gọi là **tuyến tính hóa** của f tại a.

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến với parabol $y = x^2$ tại điểm $P(1, 1)$.
Ta đặt $f(x) = x^2$ thì

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2. \end{aligned}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại P là: $y = 1 + 2(x-1)$ hay $y = 2x - 1$.

Ý nghĩa: Xấp xỉ tuyến tính & Vi phân

Từ định nghĩa, ta có thể viết

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nếu ta đặt $y = f(x)$,
$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$,
$\varepsilon = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$, thì ta thấy:

$$\varepsilon \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0 \qquad (10)$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon.\Delta x \qquad (11)$$

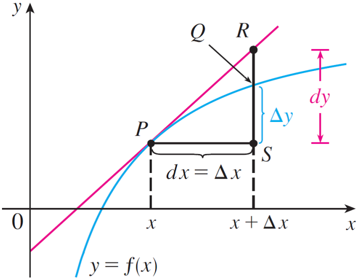
Từ (10) và (11), ta thấy

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \text{ nếu } \Delta x \text{ “bé”} \qquad (12)$$

Người ta thường ký hiệu dx là số tùy ý, **thường là rất bé**. Do đó, nếu $\Delta x \to 0$ thì ta thay ký hiệu $\Delta x = dx$. Lúc đó (12) được viết lại là

$\Delta y \approx f'(x)dx := dy$, hoặc là

$\overline{SQ} \approx \overline{SR}$ (xem hình dưới)



Ý nghĩa: Xấp xỉ tuyến tính & Vi phân

Ký hiệu khác của đạo hàm

Từ việc gán $dy := f'(x)dx$ mà người ta có ký hiệu khác cho đạo hàm

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tuy nhiên, ký hiệu $\dfrac{dy}{dx}$ không phải là phân số, mà đơn thuần nó chỉ là đạo hàm của f tại x nói chung. Nếu muốn chỉ đạo hàm $f'(2)$, ta có thể viết $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$.

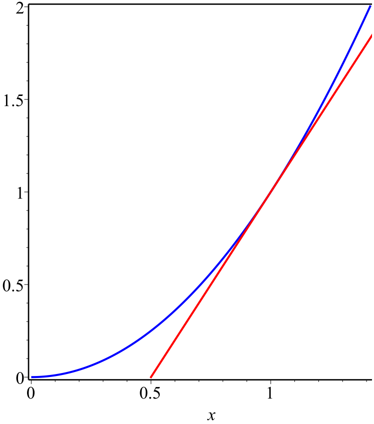
Ý nghĩa: Xấp xỉ tuyến tính & Vi phân

Xấp xỉ tuyến tính & Vi phân.

- Xét $y = f(x)$, đặt $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$, $dy = f'(x)dx$. Phép xấp xỉ
$$\Delta y \approx dy \tag{13}$$
được gọi là phép xấp xỉ tuyến tính. Phép xấp xỉ này càng chính xác khi dx càng nhỏ (cần lưu ý rằng dx chỉ là ký hiệu cho một số tùy ý, thường là nhỏ, không liên quan gì đến x ở trong ký hiệu $f'(x)$).
- $dy = f'(x)dx$ được gọi là **vi phân** của f. Đôi khi ta cũng viết là df.
- Ngoài ra, $f(x) \approx L(x)$, với $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ và x gần a (L là tuyến tính hóa của f tại a).

Ý nghĩa: Xấp xỉ tuyến tính & Vi phân

Ý tưởng của phép xấp xỉ tuyến tính là khi ta thu hẹp tầm nhìn vào gần tiếp điểm, ta thấy đường cong đồ thị và đường tiếp tuyến dường như gần khít nhau . Ví dụ, xét parabol $y = x^2$ và tiếp tuyến tại điểm $P(1, 1)$ như hình sau



Ý nghĩa: Xấp xỉ tuyến tính & Vi phân

Ví dụ

Tính xấp xỉ $\ln(1,05)$, biết $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, trong đó $f(x) = \ln(x)$.

Đặt $y = f(x) = lnx$ và xét $x = 1$, $dx = 0,05$ (khá nhỏ). Khi đó $\Delta y \approx f'(1)dx$, nghĩa là

$$f(1,05) - f(1) = \ln(1,05) - \ln(1) \approx \frac{1}{1}(0,05).$$

Vậy $\ln(1,05) \approx 0,05$.

Ý nghĩa: Xấp xỉ tuyến tính & Vi phân

Ví dụ

Người ta muốn làm lon sữa có đường kính đáy và chiều cao là 1dm. Nhưng kích thước khi gia công thực tế có sai số. Hãy ước tính sai số thể tích lon sữa, biết sai số chiều cao và đường kính đáy không quá 1mm.

Với lon sữa có đường kính và chiều cao là h (dm) thì thể tích là $V = f(h) = 3,14(\frac{h}{2})^2 h = 0,785h^3$ (dm^3). Thể tích mong muốn là $f(1)$. Nhưng với sai số của chiều cao và đường kính là dh thì độ lớn sai số thể tích được ước tính là

$$|f(1+dh) - f(1)| = |\Delta V| \approx |dV| = |f'(1)dh| = 2,355|dh|$$

Nếu sai số kích thước không quá 1mm, nghĩa là $|dh| \leq 0,01$ (dm), thì

$$|dV| \leq 2,355.(0,01) = 0,02355 \text{ dm}^3,$$

nghĩa là theo **ước tính** thì sai số thể tích không quá 0,02355dm^3.

Ý nghĩa: Đạo hàm & Vận tốc tức thời

Vận tốc tức thời

Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $s = f(t)$, s là **chuyển dịch** (khoảng cách có hướng) của chất điểm so với điểm mốc O (hệ qui chiếu) tại thời điểm t. Hàm f mô tả chuyển động của chất điểm được gọi là **hàm vị trí** của của chất điểm. Trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến $t = a + h$, chất điểm đi được quãng đường (có hướng) là $f(a+h) - f(a)$, với **vận tốc trung bình** là

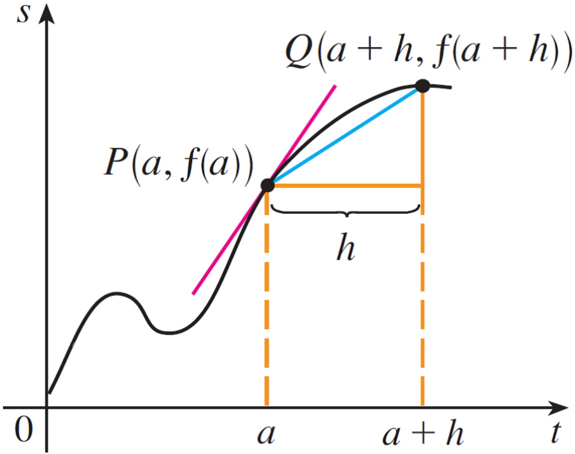
$$\textit{vận tốc trung bình} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Vận tốc tức thời tại thời điểm a được định nghĩa là

$$v(a) = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=a} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ (nếu lim tồn tại).}$$

Ý nghĩa: Đạo hàm & Vận tốc tức thời

Hình dưới đây là đồ thị mô tả sự chuyển động của chất điểm. Độ dốc của cát tuyến PQ là vận tốc trung bình trong khoảng thời gian $[a, a+h]$. Độ dốc của tiếp tuyến tại P là vận tốc tức thời tại thời điểm $t = a$



Ý nghĩa: Đạo hàm & Tốc độ biến thiên

Tốc độ biến thiên

Xét một đại lượng y phụ thuộc vào một đại lượng x thông qua quan hệ hàm số $y = f(x)$. Nếu x thay đổi giá trị từ x_1 đến x_2 thì **biến thiên** (hay **số gia**) của x là $\Delta x = x_2 - x_1$, *biến thiên* tương ứng của y là $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Người ta định nghĩa **tốc độ biến thiên trung bình của y theo x** trên đoạn $[x_1, x_2]$ là tỉ số

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

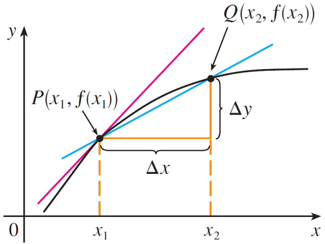
Giới hạn của tỉ số trên khi $\Delta x \to 0$, hay $x_2 \to x_1$, được gọi là **tốc độ biến thiên tức thời của y theo x** tại $x = x_1$, nói cách khác

$$\textit{tốc độ biến thiên tức thời tại } x_1 = f'(x_1).$$

Ý nghĩa: Đạo hàm & Tốc độ biến thiên

Ghi chú.

- **Biến thiên** của một đại lượng ám chỉ **một lượng tăng hay giảm** giá trị của đại lượng đó.
- **Tốc độ biến thiên của y theo x** nói lên **mức độ tăng-giảm nhanh hay chậm** của đại lượng y so với đại lượng x. Tốc độ này được minh thị bằng độ dốc của cát tuyến PQ và độ dốc của tiếp tuyến với đồ thị hàm f tại P như hình dưới



Ý nghĩa: Đạo hàm & Tốc độ biến thiên

Ví dụ

Một nhà máy sản xuất những cuộn vải với khổ nhất định. Chi phí sản xuất ra x mét vải là $C = f(x)$ (USD).

a) Hãy cho biết ý nghĩa của đạo hàm $f'(x)$ và đơn vị đo của nó.

b) Ý nghĩa thực tế là gì khi nói $f'(1000) = 9$?

c) Theo quan điểm kinh tế học, giữa $f'(50)$ và $f'(500)$, cái nào lớn hơn? Với $f'(5000)$ thì sao?

GIẢI ĐÁP

a) Đạo hàm $f'(x)$ là tốc độ biến thiên tức thời của C theo x, nghĩa là tốc độ biến thiên chi phí sản xuất theo lượng vải được làm ra. Thuật ngữ kinh tế học của đại lượng này là **chi phí biên** (marginal cost). Vì $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$ nên đơn vị đo của $f'(x)$ là đô-la trên mét (USD/m).

Ý nghĩa: Đạo hàm & Tốc độ biến thiên

b) Khi nói $f'(1000) = 9$, điều đó có nghĩa là sau khi sản xuất 1000 mét vải đầu tiên, tốc độ tăng phí sản xuất tại đó (chi phí biên tại $x = 1000$) là 9 USD/m.
Vì $\Delta x = 1$ là rất nhỏ so với sản lượng $x = 1000$ nên

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

(nói theo nghĩa vi phân, với $dx = 1$, ta xấp xỉ
$\Delta C \approx dC = f'(1000)dx = f'(1000)$).
Như vậy, chi phí sản xuất thêm mét vải thứ 1000 (hoặc thứ 1001) là khoảng (tính xấp xỉ) 9 USD.

Ý nghĩa: Đạo hàm & Tốc độ biến thiên

c) Theo kinh tế học, sẽ có sự giảm chi phí sản xuất từng món hàng khi sản xuất hàng loạt (thuật ngữ là "economies of scale"), nghĩa là nhà sản xuất sẽ sử dụng chi phí sản xuất hiệu quả hơn khi sản xuất có qui mô hơn. Vì lẽ đó, $f'(500) < f'(50)$.
Nhưng nếu việc sản xuất bành trướng, qui mô vận hành quá lớn có thể kém hiệu quả, dẫn đến hiện tượng đội chi phí (overtime costs), do đó có thể $f'(5000) > f'(500)$.
Phụ chú. Để dễ hiểu hiện tượng trên, ta xét chi phí khai thác vàng ở quặng mỏ. Chi phí sản xuất 50 lượng vàng đầu tiên rất lớn (vì đầu tư vốn ban đầu cho máy móc, xăng dầu, hóa chất, công nghệ). Nhưng vốn đầu tư để sản xuất những lượng vàng thứ 500 trở đi không nhiều (chỉ thêm phí xăng dầu, hóa chất, không phải tốn tiền mua thêm thiết bị). Khi sản xuất đến lượng vàng thứ 5000, trữ lượng vàng ở quặng nghèo dần, chắt lọc càng khó khăn, chi phí đội lên.

Đạo hàm một phía

Đạo hàm bên phải, bên trái

Hàm số f xác định trong lân cận của điểm a.

- Giới hạn sau (nếu tồn tại)

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

được gọi là **đạo hàm phải** của f tại điểm a.

- Giới hạn sau (nếu tồn tại)

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

được gọi là **đạo hàm trái** của f tại điểm a.

Đạo hàm một phía

Định lý

Hàm f có đạo hàm tại a khi và chỉ khi nó có đạo hàm bên trái và bên phải tại a, đồng thời hai đạo hàm này bằng nhau.

Ví dụ

Khảo sát đạo hàm của hàm f định bởi $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$.

GIẢI

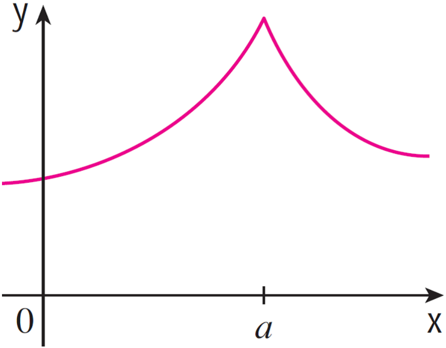
Ta có

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x > 0 \\ 2x + 3, & x < 0 \end{cases}$$

Tại $x = 0$, $f'_+(0) = -3 \neq f'_-(0) = 3$. Đạo hàm trái và phải không bằng nhau, suy ra không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

Đạo hàm một phía

Đồ thị của một hàm số f như dưới đây, minh họa rằng f có đạo hàm bên trái và bên phải tại a, nhưng hai đạo hàm này khác nhau, vì tiếp tuyến của nhánh bên trái và phải khác nhau. Đồ thị bị "gãy góc" tại điểm $P(a, f(a))$.



Đạo hàm vô cực

Đạo hàm vô cực

Nếu

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\pm\infty$$

(có thể chỉ xét giới hạn một phía), thì ta nói hàm f có **đạo hàm vô cực** tại điểm a. Khi đó, tiếp tuyến với đồ thị tại điểm $P(a, f(a))$ cùng phương với trục tung.

Đạo hàm vô cực

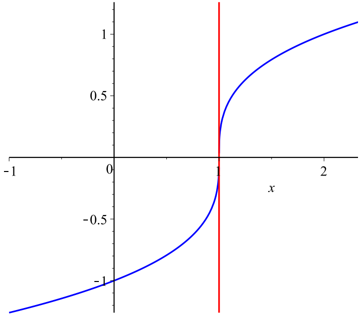
Ví dụ

Khảo sát đạo hàm của f định bởi $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ tại $a = 1$.

Ta có

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty.$$

Do đó, tiếp tuyến với đồ thị của f tại $P(1, 0)$ sẽ cùng phương với trục tung như hình bên.



Liên hệ đạo hàm và sự liên tục

Định lý

Nếu hàm số f có đạo hàm tại a thì nó liên tục tại a.

Chứng minh.

Giả sử f có đạo hàm tại a. Theo tính chất giới hạn và định nghĩa đạo hàm, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right]\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x\to a}(x-a)\\ &= f'(a).0=0,\end{aligned}$$

nghĩa là $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Vậy f liên tục tại a. $\square$

Các qui tắc tính đạo hàm

Sinh viên tự chứng minh các qui tắc sau, nếu thấy cần thiết, như là bài tập

Quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Trong các công thức dưới đây, u, v, w là các hàm số theo biến x, dấu phẩy ám chỉ đạo hàm theo biến x.

- $(\alpha u)' = \alpha u'$, với α là hằng số.
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u.v)' = u'.v + u.v'$
- $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$
- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Các qui tắc tính đạo hàm

Quy tắc đạo hàm của hàm hợp

Giả sử tồn tại các đạo hàm của f và g dưới đây. Khi đó

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)].g'(x)$$

Nếu viết $y = f(u)$ và $u = g(x)$ (y là biến phụ thuộc theo u và u là biến phụ thuộc theo x), thì hình thức trên cũng được viết dưới dạng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u).g'(x).$$

Các qui tắc tính đạo hàm

Chứng minh qui tắc đạo hàm hàm hợp.

Theo định nghĩa đạo hàm

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f[g(x)]-f[g(a)]}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\left\{\frac{f[g(x)]-f[g(a)]}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right\}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f[g(x)]-f[g(a)]}{g(x)-g(a)}.\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= f'[g(a)].g'(a)
\end{aligned}
$$

□

Các qui tắc tính đạo hàm

Ví dụ. Nếu $y = u^2$ và $u = x^3 + x$ thì

$$y = (x^3 + x)^2 = x^6 + 2x^4 + x^2.$$

Dựa theo các công thức đạo hàm ở phổ thông, ta so sánh hai cách tính sau

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5 + 8x^3 + 2x \text{ (Tính trực tiếp)}$$

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u(3x^2 + 1) = 2(x^3 + x)(3x^2 + 1) = 2(3x^5 + 4x^3 + x)$$

(Tính theo qui tắc đạo hàm hàm hợp),

kết quả là như nhau.

Các công thức tính đạo hàm

Giả sử u là biến phụ thuộc x thông qua hàm số nào đó, $u = g(x)$, thì người ta chứng minh được các công thức sau (dấu phẩy ám chỉ đạo hàm theo biến x, không phải theo biến u):

Đạo hàm

1. $(a)' = 0$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\sin x)' = \cos x$
5. $(\cos x)' = -\sin x$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

Đạo hàm hàm hợp

1.
2. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$
3. $(e^u)' = e^u.u'$
4. $(\sin u)' = \cos(u).u'$
5. $(\cos u)' = -\sin(u).u'$
6. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
7. $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
8. $(\cot u)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$

Đạo hàm của hàm ngược

Định lý: đạo hàm hàm ngược

Giả sử hàm f là hàm song ánh, có hàm ngược là g. Nếu f có đạo hàm hữu hạn khác 0 tại x thì hàm g sẽ có đạo hàm tại $y = f(x)$ và

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ hay là } g'(y) = \frac{1}{y'}$$

Chứng minh.

Vì g là hàm ngược của f nên $\forall x, g \circ f(x) = x$. Lấy đạo hàm hai vế theo x và dùng qui tắc đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$g'(f(x)).f'(x) = 1, \text{ suy ra } g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

$\square$

Đạo hàm của hàm ngược

Ví dụ

- Hàm sin là song ánh từ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vào $[-1, 1]$. Hàm ngược của sin, ký hiệu là **arcsin**, là song ánh từ $[-1, 1]$ vào $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Hãy lập công thức đạo hàm của arcsin.
- Hàm tan là song ánh từ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ vào $\mathbb{R}$. Hàm ngược của tan, ký hiệu là **arctan**, là song ánh từ $\mathbb{R}$ vào $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Hãy lập công thức đạo hàm của arctan.

GIẢI.
Với $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, đặt $y = \sin x$ thì
$y' = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$. Theo công thức đạo hàm của hàm ngược thì

$$\frac{d}{dy}(\arcsin y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Đạo hàm của hàm ngược

Nếu đổi hình thức, ta viết lại $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tương tự, với $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, đặt $y = \tan x$, thì $y' = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$. Theo công thức đạo hàm hàm ngược thì

$$\frac{d}{dy}(\arctan y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Nếu đổi hình thức, ta có thể viết lại

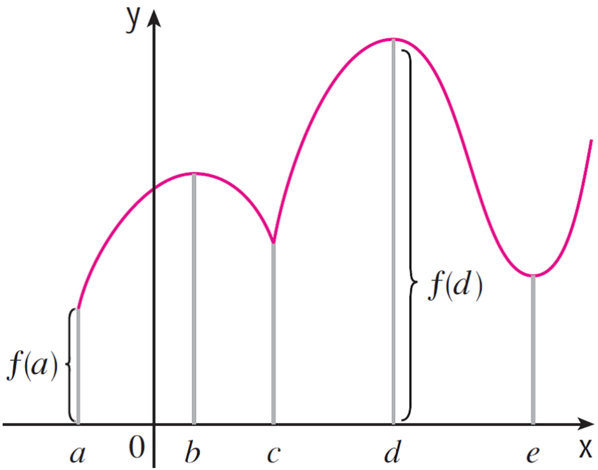
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Đạo hàm và cực trị

Định nghĩa cực trị

- f có **cực đại tuyệt đối** (hay **cực đại toàn cục**) tại điểm c nghĩa là $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc miền xác định của f, (nếu đổi chiều bất đẳng thức thì ta có khái niệm **cực tiểu tuyệt đối** hay **cực tiểu toàn cục**). Lúc đó, số $f(c)$ được gọi là **giá trị lớn nhất** (hoặc nhỏ nhất) của f.
- f có **cực đại tương đối** (hay **cực đại địa phương**) tại điểm c nghĩa là $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc một lân cận của c giao với miền xác định của f, (nếu đổi chiều bất đẳng thức thì ta có khái niệm **cực tiểu tương đối** hay **cực tiểu địa phương**).
- Đạt cực đại hay cực tiểu (tuyệt đối hay tương đối) tại c được gọi chung là **đạt cực trị** tại c.

Đạo hàm và cực trị



Ở trên là đồ thị của hàm số f, f đạt cực tiểu tại a, c, e; đạt cực đại tại b, d; đạt giá trị lớn nhất tại d và giá trị nhỏ nhất tại a.

Đạo hàm và Cực trị

Định lý Fermat

Nếu hàm f đạt cực trị tại c, đồng thời f có đạo hàm tại c, thì $f'(c) = 0$.

Điểm dừng và điểm tới hạn

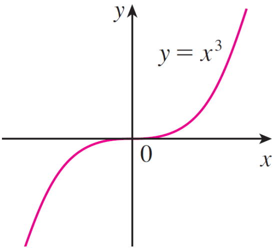
- Số c thỏa $f'(c) = 0$ được gọi là **điểm dừng** (stationary point) của hàm f.
- Số c thỏa một trong hai tính chất: hoặc $f'(c) = 0$; hoặc f không có đạo hàm tại c, thì số c được gọi là **điểm tới hạn** (critical point).

Định lý

Nếu hàm f đạt cực trị tại số c thì c là điểm tới hạn của f.

Đạo hàm và cực trị

Chiều đảo của định lý Fermat không đúng, nghĩa là có thể $f'(c) = 0$ nhưng f không đạt cực trị tại c. Ví dụ, hàm số f định bởi $f(x) = x^3$, có $f'(0) = 0$, nhưng f không đạt cực trị tại 0. Xem đồ thị minh họa ở bên.



Đạo hàm và cực trị

Trong phạm vi giáo trình giải tích B1, ta thừa nhận kết quả sau mà không chứng minh

Định lý cực trị tuyệt đối

Nếu hàm số f liên tục trên một **đoạn đóng** $[a, b]$ thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó. Ta theo các bước sau để tìm cực trị tuyệt đối của f trên $[a, b]$

1. Tìm giá trị của f tại các điểm tới hạn bên trong khoảng mở (a, b).
2. Tính giá trị của f tại hai điểm biên a và b của đoạn.
3. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất ở các bước 1 và 2 chính là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của f trên toàn cục $[a, b]$.

Các định lý giá trị trung bình

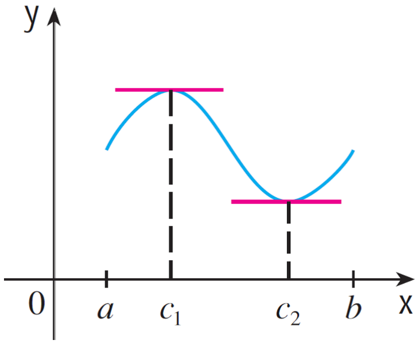
Các định lý giá trị trung bình nêu lên mối quan hệ giữa đạo hàm f' với tính chất của hàm f.

Định lý Rolle

Cho hàm $y = f(x)$ thỏa

1. Liên tục trên đoạn $[a, b]$
2. Có đạo hàm trong khoảng (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Thì $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.



Nếu cần thiết, sinh tự chứng minh định lý trên như bài tập, sử dụng định lý cực trị tuyệt đối và định lý Fermat.

Các định lý về giá trị trung bình

Định lý Lagrange

Cho hàm f thỏa

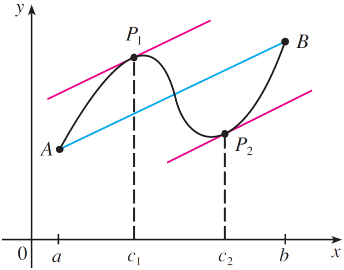
1. Liên tục trên đoạn $[a, b]$
2. Có đạo hàm trong khoảng (a, b)

Thì

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

hay $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

$f'(c)$ được gọi là **giá trị trung bình của đạo hàm** trên khoảng (a, b).



Chứng minh. Áp dụng định lý Rolle cho hàm g định bởi

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Các định lý về giá trị trung bình

Hệ quả của định lý Lagrange

- Nếu hàm số f có đạo hàm dương (chấp nhận đạo hàm bằng 0 tại hữu hạn điểm) trong khoảng (a, b), và f liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì f tăng (đồng biến) trên đoạn $[a, b]$.
- Nếu hàm số f có đạo hàm âm (chấp nhận đạo hàm bằng 0 tại hữu hạn điểm) trong khoảng (a, b), và liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì f giảm (nghịch biến) trên đoạn $[a, b]$.

Chứng minh.
Giả sử $f' > 0$ trên (a, b) và $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Khi đó hàm f thỏa giả thiết định lý Lagrange trên đoạn $[x_1, x_2]$, do đó tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, suy ra $f(x_1) > f(x_1)$. Vậy hàm f là tăng trên $[a, b]$. Các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự.

Các định lý về giá trị trung bình

Ví dụ

Kiểm tra tính đúng đắn của định lý Rolle đối với hàm f định bởi $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, trên các đoạn $[1,2]$ và $[2,3]$.

Hàm $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1,3]$, vì $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, và f bằng 0 tại các điểm $x = 1, x = 2, x = 3$. Do đó f thỏa các giả thiết của định lý Rolle trên đoạn $[1,2]$ và $[2,3]$. Theo định lý Rolle, tồn tại ít nhất hai điểm của khoảng $(1,3)$ mà tại đó $f'(x) = 0$. Ta xác minh điều này bằng cách giải phương trình ẩn c sau đây

$$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow c = c_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \in [1,2], \text{ hay } c = c_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \in [2,3].$$

Vậy tính đúng đắn của định lý Rolle được xác minh qua ví dụ trên.

Các định lý về giá trị trung bình

Ví dụ

Xác định giá trị trung gian c trong định lý Lagrange đối với hàm
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & 1 < x < \infty \end{cases}$$ trên đoạn $[0, 2]$.

Khảo sát tính khả vi tại $x = 1$. Dùng định nghĩa, ta tính được

$$f'_-(1) = -1 = f'_+(1)$$

Vậy f khả vi (có đạo hàm) và liên tục trên đoạn $[0, 2]$. Theo định lý Lagrange

$$\exists c \in (0, 2), f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \tag{14}$$

Các định lý về giá trị trung bình

Ta có

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } 0 < x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{khi } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Do đó phương trình (14) tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = -c(2-0) \\ 0 < c \leq 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{c^2}(2-0) \\ 1 < c < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2} \text{ hoặc } c = \sqrt{2}$$

Các định lý về giá trị trung bình

Ví dụ

Giả sử

$$f(0) = -3 \text{ và } \forall x, f'(x) \leq 5.$$

Hỏi giá trị lớn nhất của $f(2)$ có thể là bao nhiêu?

Trên đoạn $[0, 2]$ hàm khả vi và liên tục. Áp dụng định lý Lagrange ta có:

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) = 2f'(c)$$

$$\Rightarrow f(2) = f(0) + 2f'(c)$$

$$\Rightarrow f(2) \leq -3 + 2.5 = 7$$

Các định lý về giá trị trung bình

Định lý Cauchy

Cho hai hàm f và g thỏa

1. Liên tục trên đoạn $[a, b]$
2. Có đạo hàm trong khoảng (a, b)
3. $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$

Thì

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Các định lý về giá trị trung bình

Chứng minh định lý Cauchy.

Hàm số h định bởi

$$h(x) = \big[f(b) - f(a)\big]g(x) - \big[g(b) - g(a)\big]f(x)$$

thỏa giả thiết của định lý Rolle, nghĩa là h liên tục trên $[a, b]$, $h(b) = h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, h có đạo hàm trên (a, b). Do đó, tồn tại số $c \in (a, b)$ sao cho

$$h'(c) = 0, \text{ hay}\big[f(b) - f(a)\big]g'(c) - \big[g(b) - g(a)\big]f'(c) = 0,$$

suy ra điều phải chứng minh. □

Qui tắc L' Hospital (Lô-pi-tal)

Định lý Cauchy ở trên sẽ suy ra một kết quả hữu dụng sau đây trong việc tính giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$; $0.\infty$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lý (Quy tắc Lô-pi-tal)

Cho hai hàm số f và g thỏa

1. Khả vi trong khoảng (a, b)
2. $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$
3. Xảy ra một trong hai trường hợp:
   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$; hoặc
   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
4. Tồn tại $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ hữu hạn hay vô hạn.

Khi đó $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Chứng minh quy tắc Lô-pi-tal I

Ghi chú

Trong định lý trên, các thiết về giới hạn với "$x \to a$" có thể thay bởi "$x \to b$". Hơn nữa a có thể là $-\infty$, và b có thể là ∞.

Chứng minh qui tắc Lô-pi-tal.
Để đơn giản, ta chỉ chứng minh cho trường hợp lấy giả thiết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, a là số thực (không phải $-\infty$), và

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,\ \ L \text{ là số thực} \qquad (15)$$

Với số $\varepsilon > 0$ bất kỳ, do giả thiết (15), ta có số $\delta > 0$ thỏa:

$$\text{Nếu } a < \xi < a + \delta \text{ thì } \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| < \varepsilon \qquad (16)$$

Chứng minh quy tắc Lô-pi-tal II

Xét x bất kỳ thỏa $a < x < a + \delta$. Với số $c \in (a, x)$ tùy ý, theo định lý Cauchy, tồn tại $\xi \in (c, x)$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Từ (16) và bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &\leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L\right| \\
&= \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}\right| + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}\right| + \varepsilon,
\end{aligned}$$

Chứng minh quy tắc Lô-pi-tal III

viết gọn lại là

$$\forall c \in (a, x), \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}\right| + \varepsilon \qquad (17)$$

Trong (17), cho $c \to a$ thì $f(c),\ g(c) \to 0$, và do tính bảo toàn thứ tự của giới hạn, ta suy ra

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \varepsilon.$$

Theo định nghĩa giới hạn, ta đã chứng minh được $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Quy tắc Lopital

Chú thích các dạng vô định khác của giới hạn

- Nếu giới hạn của $f(x)g(x)$ có dạng $0.\infty$ thì ta viết $f(x).g(x) = \dfrac{f(x)}{(1/g(x))}$, đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$.
- Nếu giới hạn của $f(x)^{g(x)}$ có dạng vô định 1^∞; ∞^0 hoặc 0^0 thì ta đều đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ bằng cách sử dụng công thức $a^b = e^{b\ln a}$.

Bài tập về quy tắc Lô-pital I

Tính giới hạn(Sử dụng quy tắc Lopital)

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{\tan^2 x}$, $\quad \dfrac{-1}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}$, $\quad -1$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \arcsin x^2}{x\cos x - \sin x}$, $\quad -3$
4. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\arctan(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$, $\quad 0$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{\arcsin x - \ln(1+x)}$, $\quad 0.$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$, $\quad e^{-1/2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\tan x}$, $\quad 1$

Bài tập về quy tắc Lô-pital II

8. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\ln(\sinh x)}$, $\quad e$
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^x - 1)\ln x$, $\quad 0$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$, $\quad 3$.
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x - e^x}}{\sin x - x}$, $\quad 1$.
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n e^{-x^3}$, $\quad 0$.
13. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arcsin x}\right)$, $\quad 0$.
14. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x\arctan x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, $\quad \dfrac{1}{3}$.
15. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$, $\quad e^{-1/2}$.

Bài tập về quy tắc Lô-pital III

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$, $\quad -2$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\tanh x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$, $\quad \dfrac{2}{3}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$, $\quad e^{-1}$.

19. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\tan \dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$, $\quad 1$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$, $\quad e$.

Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ là một hàm số .

Có thể lấy đạo hàm một lần nữa của đạo hàm cấp một, ta được khái niệm đạo hàm cấp hai, với các ký hiệu sau

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

Tiếp tục quá trình ta có đạo hàm cấp n cùng các ký hiệu sau

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Đạo hàm cấp cao

Giả sử $y = f.g$. Dùng phép quy nạp, ta chứng minh được công thức sau

Công thức Leibnitz (tính đạo hàm cấp cao)

Với qui ước $f^{(0)} = f$, $g^{(0)}$ (đạo hàm cấp 0 nghĩa là không lấy đạo hàm), ta có

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}.g^{(n-k)}, \text{ hay là}$$

$$(f.g)^{(n)} = C_n^0 f^{(0)}.g^{(n)} + C_n^1 f^{(1)}.g^{(n-1)} + \ldots + C_n^n f^{(n)}.g^{(0)}$$

Đạo hàm cấp cao

Phương pháp tính đạo hàm cấp cao

1. Sử dụng các đạo hàm cấp cao của một số hàm đã biết.
2. Phân tích thành tổng các hàm "đơn giản".
3. Phân tích thành tích của hai hàm $f.g$, trong đó f là hàm đa thức, sau đó sử dụng công thức *Leibnitz*. Lưu ý, nếu f là đa thức bậc n thì mọi đạo hàm cấp lớn hơn n đều triệt tiêu.
4. Sử dụng khai triển Maclaurint, Taylor (ở phần sau)

Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp cao của một hàm thường gặp

1. $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(x+a)^\alpha\right] = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(x+a)^{\alpha-n}$.

   Trường hợp riêng, $\alpha = -1$ thì ta có

   $$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x+a}\right) = (-1)^n n!\frac{1}{(x+a)^{n+1}}.$$

2. $(e^x)^{(n)} = e^x$.
3. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}.\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.
4. $\dfrac{d^n}{dx^n}(\sin x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
5. $\dfrac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Từ các công thức trên và đạo hàm hàm hợp, ta có hệ quả sau

Đạo hàm cấp cao

Công thức thường gặp

1. $$\frac{d^n}{dx^n}\left[(ax+b)^\alpha\right] = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)a^n(ax+b)^{\alpha-n}.$$

   Trường hợp riêng, $\alpha = -1$ thì ta có

   $$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = (-1)^n n! \frac{a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

2. $$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)} = a^n e^{ax+b}.$$

3. $$[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1}.\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$$

4. $$\frac{d^n}{dx^n}[\sin(ax+b)] = a^n \sin\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right).$$

5. $$\frac{d^n}{dx^n}[\cos(ax+b)] = a^n \cos\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ. Tính đạo hàm cấp 100 như sau

$$\left[\ln(2x+3)\right]^{(100)} = (-1)^{99} 99! \frac{2^{100}}{(2x+3)^{100}}.$$

Ví dụ. Tìm $y^{(n)}(x)$ biết $y = \dfrac{1}{x^2-4}$.

Giải: Ta phân tích như sau

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$$

Sử dụng công thức nêu trên, ta suy ra

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4}.\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ. Tìm $y^{(n)}(x)$ biết $y = \sin^2 x$.
Giải: Ta dùng công thức hạ bậc

$$y = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(x) = -\frac{1}{2}2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right), \text{ hay}$$

$$y^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa: chuỗi lũy thừa

Chuỗi số có dạng sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

được gọi là **chuỗi lũy thừa theo** $(\mathbf{x}-\mathbf{a})$, hoặc là **chuỗi lũy thừa xung quanh điểm a**.

Các số c_n được gọi là **hệ số** của chuỗi lũy thừa.

Qui ước

Chúng ta qui ước rằng $(x-a)^0 = 1$, ngay cả trường hợp $x = a$. Nghĩa là qui ước $0^0 = 1$, và qui ước này chỉ trong phạm vi lý thuyết chuỗi lũy thừa mà thôi.

Chuỗi lũy thừa

Vấn đề sẽ được khảo sát tiếp theo là với những giá trị nào của x thì chuỗi lũy thừa ở trên sẽ hội tụ.

Định lý

Với mọi chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, chỉ xảy ra một trong ba khả năng sau:

(i) Chuỗi chỉ hội tụ tại $x = a$ mà thôi.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Có số dương R sao cho chuỗi hội tụ khi $|x-a| < R$, và phân kỳ khi $|x-a| > R$.

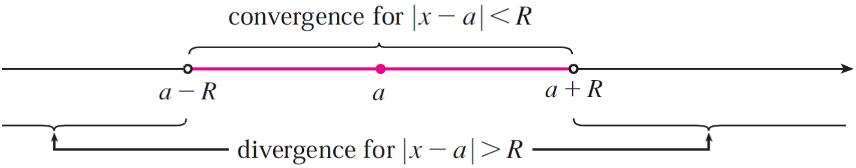
Bán kính hội tụ

Số R trong trường hợp (iii) được gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi lũy thừa. Theo qui ước, $R = 0$ trong trường hợp (i); và $R = \infty$ trong trường hợp (ii).

Chuỗi lũy thừa

Miền hội tụ là tập hợp mọi giá trị của x làm cho chuỗi lũy thừa hội tụ. Trong trường hợp (i) của định lý, miền hội tụ chỉ có một điểm a. Trong trường hợp (ii), miền hội tụ là $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Riêng trường hợp (iii), không có kết luận tổng quát về sự hội của chuỗi khi $|x-a| = R$. Do đó, ở trường hợp (iii), có bốn khả năng miền hội tụ là

$$(a-R, a+R) \qquad [a-R, a+R) \qquad (a-R, a+R] \qquad [a-R, a+R]$$



Chuỗi lũy thừa

Để tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa, ta có định lý sau

Định lý

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Đặt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L \text{ (hữu hạn hoặc vô hạn).}$$

Khi đó,

1. Nếu $L=\infty$ thì bán kính hội tụ là $R=0$.
2. Nếu $L=0$ thì bán kính hội tụ là $R=\infty$.
3. Nếu $L>0$ là số dương hữu hạn thì bán kính hội tụ là $R=\frac{1}{L}$.

Chuỗi lũy thừa

Chú ý

Khi tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, ngoài việc tìm bán kính hội tụ R, ta phải xét hai điểm biên $x = a \pm R$ (nếu $R > 0$ hữu hạn).

Ví dụ. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{(x-3)^n}{n+1}$.
Giải: Hệ số chuỗi lũy thừa là $c_n = \frac{2^n}{n+1}$ và

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(n+1)}{n+2} \right| = 2.$$

Chuỗi có bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$. Khi $x = 3 + \frac{1}{2}$ thì chuỗi trở thành chuỗi điều hòa, phân kỳ. Khi $x = 3 - \frac{1}{2}$ thì chuỗi trở thành chuỗi đan dấu Leibnitz, hội tụ. Vậy miền hội tụ của chuỗi là

$$[3 - R, 3 + R) = [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}).$$

Chuỗi lũy thừa

Định lý: đạo hàm của tổng chuỗi lũy thừa

Nếu chuỗi lũy thừa $\sum c_n(x-a)^n$ có bán kính hội tụ là $R > 0$ thì tổng của chuỗi

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

là hàm số có đạo hàm trên khoảng $(a-R, a+R)$ và

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \tag{18}$$

Hơn nữa, chuỗi lũy thừa ở (18) cũng có bán kính hội tụ là R. Đẳng thức (18) có thể được viết dưới dạng

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right].$$

Chuỗi lũy thừa

Chú ý

Mặc dù định lý trên nói rằng chuỗi lũy thừa sẽ giữ nguyên bán kính hội tụ khi ta lấy đạo hàm từng số hạng của nó, nhưng không có nghĩa là miền hội tụ vẫn giữ nguyên.

Ví dụ. Ta có tổng chuỗi hình học sau đây

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in (-1,1)$$

bán kính hội tụ là 1. Lấy đạo hàm, ta được

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

Trong ví dụ này, hai chuỗi có cùng miền hội tụ.

Chuỗi lũy thừa

Sinh viên tự kiểm chứng, như là bài tập, rằng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ có miền hội tụ là $[-1, 1]$, trong khi lấy đạo hàm từng số hạng, ta được chuỗi mới $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ có miền hội tụ là $[-1, 1)$.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Từ định lý đạo hàm tổng chuỗi lũy thừa nói trên, ta dễ dàng suy ra kết quả sau

Định lý

Nếu một hàm số f được khai triển thành, nói cách khác, là tổng của một chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ với bán kính hội tụ $R > 0$, thì f có đạo hàm mọi cấp trong khoảng $(a-R, a+R)$ và

$$\forall n, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ (với qui ước rằng } 0! = 1,\ f^{(0)} = f).$$

Như vậy, khai triển thành chuỗi lũy thừa xung quanh điểm a của một hàm số là duy nhất (không có khai triển thứ hai).

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Ví dụ. Hàm số f định bởi

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{với } x \in (-1, 1),$$

là tổng của chuỗi hình học $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ với bán kính hội tụ $R = 1$. Nói cách khác, chuỗi hình học này là khai triển của f thành chuỗi lũy thừa xung quanh điểm $a = 1$. Do đó $\forall n$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$, là các hệ số của chuỗi hình học.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Định nghĩa chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Chiều đảo của định lý trên có thể không đúng, nghĩa là:

Nếu f là một hàm số có đạo hàm mọi cấp trong khoảng $(a-R, a+R)$, thì chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ được gọi là **chuỗi Taylor của f xung quanh điểm** a, viết là

$$f \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

và chuỗi Taylor nói trên chưa hẳn hội tụ về $f(x)$.

Trường hợp $a = 0$, chuỗi nói trên được gọi là **chuỗi Mac-Laurin** của f.

Sau đây, ta khảo sát sự hội tụ của chuỗi Taylor xung quanh điểm a của hàm f và xấp xỉ f bằng đa thức Taylor.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Định nghĩa lượng vô cùng bé (VCB)

Người ta ký hiệu $\mathbf{o}(\varepsilon)$ là bất cứ biểu thức nào phụ thuộc vào ε và thỏa

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathbf{o}(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Lúc đó, $\mathbf{o}(\varepsilon)$ cũng được gọi là **lượng vô cùng bé cấp cao hơn $\boldsymbol{\varepsilon}$** khi $\varepsilon \to 0$.

Tính chất của lượng VCB

Khi $\varepsilon \to 0$ thì

- $\mathbf{o}(\varepsilon) \pm \mathbf{o}(\varepsilon) = \mathbf{o}(\varepsilon)$
- Với hằng số k bất kỳ, $k\mathbf{o}(\varepsilon) = \mathbf{o}(\varepsilon)$
- $\mathbf{o}(\varepsilon_1).\mathbf{o}(\varepsilon_2) = \mathbf{o}(\varepsilon_1.\varepsilon_2)$, khi $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \to 0$.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Đa thức Taylor

Giả sử f là hàm số có đạo hàm đến cấp n tại điểm a. Khi đó, đa thức Taylor bậc n xung quanh điểm a của f được định nghĩa là

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

tức là tổng riêng phần bậc n của chuỗi Taylor.

Lượng chênh lệch $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ được gọi là **phần dư** của chuỗi Taylor của f.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Công thức Taylor với dư số Peano.

Giả sử f là hàm số có đạo hàm đến cấp $n-1$ trong lân cận của điểm a và có đạo hàm đến cấp n tại a. Lúc đó

1. Đa thức **xấp xỉ tốt nhất** của f đến bậc n xung quanh điểm a là đa thức Taylor T_n, theo nghĩa

$$f(x) = T_n(x) + \mathbf{o}\big((x-a)^n\big), \text{ hay là}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathbf{o}\big((x-a)^n\big).$$

2. Ngược lại, nếu P_n là đa thức bậc n xấp xỉ tốt nhất cho f xung quanh điểm a, theo nghĩa

$$f(x) - P_n(x) = \mathbf{o}\big((x-a)^n\big),$$

thì P_n là đa thức Taylor của f.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Định lý trên muốn nói rằng **đa thức xấp xỉ tối hảo của** f **đến bậc** n **xung quanh điểm** a là duy nhất.

Sở dĩ có thuật ngữ "*xấp xỉ tối hảo (tốt nhất)*" là vì lượng chênh lệch giữa f và đa thức Taylor T_n, tức là dư số R_n, là lượng VCB bậc cao hơn $(x-a)^n$ khi $x \to a$.

Tuy nhiên, khi thực hiện phép xấp xỉ xung quanh điểm a, $f(x) \approx T_n(x)$, với dư số Peano có dạng $R_n(x) = \mathbf{o}\big((x-a)^n\big)$, thì ta không đánh giá được độ chính xác phép xấp xỉ, nghĩa là không biết độ lớn sai số $|R_n(x)|$ nhỏ đến mức nào. Do đó, ta có công thức Taylor với dư số Lagrange sau đây

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Công thức Taylor với dư số Lagrange

Giả sử hàm f có đạo hàm đến cấp $n+1$ liên tục trong khoảng $(a-R, a+R)$. Khi đó, với mỗi số $x \in (a-R, a+R)$, luôn tồn tại số ξ_x nằm giữa a và x sao cho

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ với } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

T_n là ký hiệu của đa thức Taylor bậc n của f xung quanh điểm a như đã nói ở trên, tức là

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Công thức Taylor, Mac-laurin

Hệ quả từ công thức Taylor với dư số Lagrange

(i) **Bất đẳng thức Taylor.** Nếu có hằng số $M > 0$ (chỉ phụ thuộc n) sao cho: $\forall x \in (a-R, a+R), |f^{(n+1)}(x)| \leq M$, thì

$$\forall x \in (a-R, a+R), |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

(ii) Nếu hằng số M ở (i) không phụ thuộc vào n thì

$$\forall x \in (a-R, a+R), \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

và chuỗi Taylor của f xung quanh điểm a sẽ hội tụ về f trong khoảng $(a-R, a+R)$.

Sau đây là (không bắt buộc đọc) phần chứng minh định lý

Chứng minh công thức Taylor với dư số Peano I

1. Dùng phép qui nạp, ta sẽ chứng minh

$$f(x) - T_n(x) = \mathbf{o}\big((a-x)^n\big) \qquad (19)$$

Thật vậy, với $n = 1$, từ định nghĩa của đạo hàm, ta có

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right] = 0,$$

nghĩa là $f(x) - T_1(x) = \mathbf{o}(x-a)$, (19) đúng với $n = 1$.

Giả sử định lý đúng với $n = m$, theo nghĩa, với hàm số bất kỳ g thỏa giả thiết như hàm f, ta có $g(x) - P_m(x) = \mathbf{o}((x-a)^m)$, trong đó P_m là đa thức Taylor bậc m của hàm g xung quanh điểm a. Ta sẽ chứng minh (19) đúng với $n = m+1$, nghĩa là $f(x) - T_{m+1}(x) = \mathbf{o}((x-a)^{m+1})$. Thật vậy, áp dụng định lý

Chứng minh công thức Taylor với dư số Peano II

Lagrange cho hàm $F = f - T_{m+1}$ trên đoạn $[a, x]$ (hoặc đoạn $[x, a]$), tồn tại số t nằm giữa a và x sao cho

$$f(x) - T_{m+1}(x) = F(x) = F(x) - F(a) = F'(t)(x - a)$$

(lưu ý là $F(a) = 0$). Viết lại đẳng thức trên, ta có

$$f(x) - T_{m+1}(x) = \left[f'(t) - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{f^k(a)}{(k-1)!}(t-a)^{k-1} \right](x - a) \quad (20)$$

Nếu đặt hàm $g = f'$ và P_m là đa thức Taylor bậc m của g xung quanh điểm a thì (20) có dạng

$$f(x) - T_{m+1}(x) = [g(t) - P_m(t)](x - a).$$

Chứng minh công thức Taylor với dư số Peano III

Suy ra

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{m+1}(x)}{(x-a)^{m+1}}=\lim_{x\to a}\frac{g(t)-P_m(t)}{(x-a)^m}$$
$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{g(t)-P_m(t)}{(t-a)^m}\cdot\frac{(t-a)^m}{(x-a)^m}\right]=0.$$

Kết quả 0 sau cùng có được là do các yếu tố sau đây

- Giả thiết qui nạp "$g(t)-P_m(t)=\mathbf{o}((t-a)^m)$",
- $\left|\dfrac{t-a}{x-a}\right|<1$ (vì t nằm giữa a và x),
- Định lý giới hạn kẹp.

Chứng minh công thức Taylor với dư số Peano IV

Vậy ta chứng minh được (19) đúng với $n = m + 1$, kết thúc chứng minh theo phép qui nạp.

2. Giả sử P_n là đa thức bậc n thỏa $f(x) - P_n(x) = \mathbf{o}((x-a)^n)$. Khi đó, đa thức P_n luôn được biểu diễn dưới dạng

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n.$$

Theo chứng minh ở phần 1., ta có $f(x) = T_n(x) + \mathbf{o}((x-a)^n)$, suy ra $T_n(x) - P_n(x) = \mathbf{o}((x-a)^n)$. Vậy, với mỗi số tự nhiên k từ 0 đến n, ta luôn có

$$\lim_{x\to a} \frac{T_n(x) - P_n(x)}{(x-a)^k} = 0 \tag{21}$$

Chứng minh công thức Taylor với dư số Peano V

Thay $k = 0$ vào (21), ta suy ra $c_0 = f(a)$. Sau đó thay $k = 1$ vào (21), ta lại có $c_1 = f'(a)$. Cứ tiếp tục tiến trình đó, ta suy ra

$$\forall k = \overline{0, n}, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

nghĩa là đa thức P_n đồng nhất với đa thức Taylor T_n. Kết thúc chứng minh.

Chứng minh công thức Taylor với dư số Lagrange

Chứng minh công thức Taylor với dư số Lagrange.

Đặt $Q(x)$ là biểu thức sao cho $f(x) = T_n(x) + \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.
Xét hàm số F (biến t) định bởi

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}.$$

Lưu ý số hạng đầu tiên của tổng $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ ở trên là $f(t)$, do đó $F(x) = F(a) = 0$ và

$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{Q(x)}{n!}(x-t)^n$ (sv tự kiểm chứng),

nghĩa là F thỏa giả thiết của định lý Rolle trên đoạn $[a, x]$ (hay đoạn $[x, a]$). Vậy có số ξ_x nằm giữa a và x sao cho $F'(\xi_x) = 0$, suy ra $Q(x) = f^{(n+1)}(\xi_x)$, ta có đpcm. □

Vài công thức Mac-Laurin cơ bản I

Sau đây là vài công thức Mac-Laurin của một số hàm cơ bản, dạng dư số Peano

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathbf{o}(x^n)$
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathbf{o}(x^n)$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathbf{o}(x^{2n+2})$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{o}(x^{2n+1})$
5. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathbf{o}(x^{2n+2})$
6. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{o}(x^{2n+1})$

Vài công thức Mac-Laurin cơ bản II

7. $(1+x)^\alpha =$
$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+\mathbf{o}(x^n)$$

8. $\arctan x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathbf{o}(x^{2n+2})$

Công thức Taylor, Mac-Laurin

Các ứng dụng của công thức Taylor, Mac-Laurin

1. Xấp xỉ hàm f bởi một đa thức bậc n.
2. Tìm đạo hàm cấp cao của f tại điểm a
3. Tìm giới hạn của hàm số.
4. Tính gần đúng với độ chính xác cho trước.

Công thức Taylor, Mac-Laurin

Ví dụ

1. Viết công Mac-Laurin đến bậc n của hàm số f_1 và f_2 định bởi $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$ và $f_2(x) = \frac{1}{1+x}$.
2. Viết công thức Mac-Laurin đến bậc 3 của hàm f định bởi $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$.
3. Tính $f'''(0)$.

GIẢI

1. Trên miền $(-1, 1)$, f_1 và f_2 là tổng của hai chuỗi hình học $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ tương ứng, cũng là chuỗi Mac-Laurin của chúng. Hai hàm f_1 và f_2 thỏa các giả thiết của công thức Mac-Laurin (công thức Taylor xung quanh điểm $a = 0$). Do đó

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathbf{o}(x^n),$$

$$f_2(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathbf{o}(x^n).$$

Công thức Taylor, Mac-Laurin

2. Tách phân thức và áp dụng khai triển của f_1 ở trên, ta có

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x/3} \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \mathbf{o}(x^3)\right] \\
&\quad - \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 \mathbf{o}(x^3)\right] \\
&= \frac{1}{6} + \frac{5x}{36} + \frac{19x^2}{216} + \frac{65x^3}{1296} + \mathbf{o}(x^3).
\end{aligned}$$

3. Theo hệ số của x^3 ở trên thì $\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{65}{1296}$. Suy ra $f'''(0) = \frac{65}{216}$.

Công thức Taylor, Mac-Laurin

Ví dụ

Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 5 của hàm f định bởi $f(x) = e^{2x-x^2}$.

GIẢI. Lưu ý rằng $\mathbf{o}((2x-x^2)^k) = \mathbf{o}(x^k)$. Áp dụng công thức Mac-Laurin cơ bản, ta có

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} + \mathbf{o}(x^5).$$

Khi khai triển các nhị thức $(2x-x^2)^k$, ta chỉ giữ lại hạng tử chứa bậc không vượt quá 5, các hạng tử còn lại có dạng $\mathbf{o}(x^5)$, sau đó rút gọn, sắp xếp các số hạng theo bậc tăng dần, ta được

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \mathbf{o}(x^5)$$

Công thức Taylor, Mac-Laurin

Ví dụ

Tính giới hạn

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - sinx}{x^3}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \mathbf{o}(x^3) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathbf{o}(x^3)$$

$$\Rightarrow \tan x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{3} + \mathbf{o}(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^3)\right)$$

$$\Rightarrow \tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + \mathbf{o}(x^3)$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + \mathbf{o}(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{o}(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + 0.$$

Tích phân

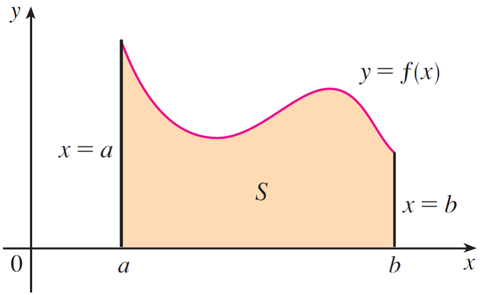
Tích phân

- Bài toán tính diện tích và tính quãng đường
- Tích phân
- Định lý Cơ Bản Của Giải Tích
- Qui tắc tính tích phân
- Tích phân suy rộng
- Ứng dụng của tích phân

Bài toán diện tích và quãng đường

Bài toán diện tích hình thang cong

Chúng ta đã biết khái niệm và cách tính diện tích của các hình đơn giản như: hình chữ nhật, tam giác, đa giác (ghép của nhiều tam giác). Nhưng làm sao định nghĩa diện tích của một hình có biên cong, cụ thể là miền S được bao quanh bởi các đường: đồ thị của hàm số $f \geq 0$; hai đường thẳng đứng $x = a$, $x = b$; và trục hoành như hình bên.



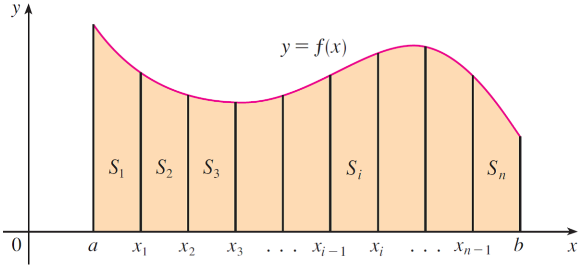
Bài toán diện tích và quãng đường

Trước tiên, ta chia hình S thành n dải băng có chiều rộng đều nhau như hình dưới. Chiều rộng mỗi dải là $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Các dải băng này chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn con

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

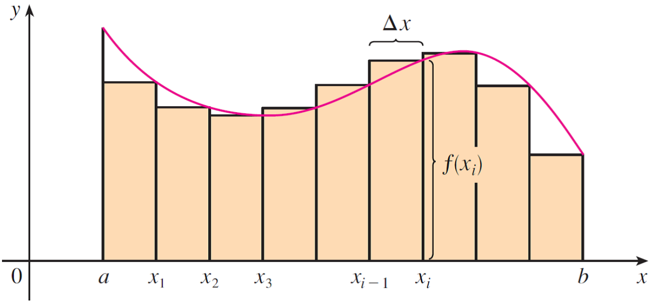
trong đó $x_0 = a$, $x_n = b$ và các điểm biên của những đoạn con là

$$x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2\Delta x$$
$$x_3 = a + 3\Delta x$$
$$\vdots$$



Bài toán diện tích và quãng đường

Chúng ta xấp xỉ diện tích dải băng thứ i bởi diện tích hình chữ nhật có bề rộng Δx, chiều cao là giá trị của f tại điểm biên phải của đoạn con.



Ta đặt tổng diện tích các hình chữ nhật này là R_n (chữ R ám chỉ "right", biên phải)

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

Bài toán diện tích và quãng đường

Với cách tương tự, nếu ta chọn chiều cao hình chữ nhật là giá trị của f tại điểm biên trái của mỗi đoạn con, thì ta có tổng diện tích các hình chữ nhật là

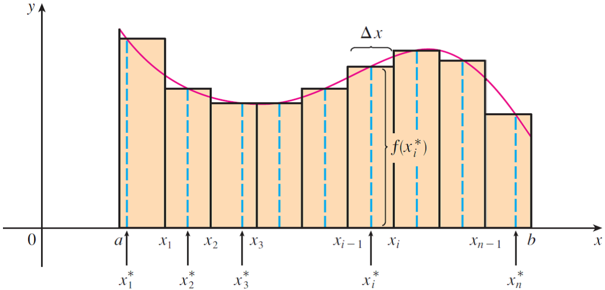
$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x.$$

Thay vì lấy điểm biên trái hoặc phải, ta cũng có thể chọn chiều cao hình chữ nhật là giá trị của f tại điểm bất kỳ x_i^* của đoạn con thứ i, $[x_{i-1}, x_i]$. Ta gọi các điểm $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ là các **điểm mẫu** và ta có tổng diện tích các hình chữ nhật là

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x.$$

Bài toán diện tích và quãng đường

Hình sau minh họa các hình chữ nhật với chiều cao $f(x_i^*)$



Người ta chứng minh được nếu f liên tục thì ba giới hạn sau tồn tại và bằng nhau

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

và người ta định nghĩa giá trị A là diện tích của hình S đã nói lúc đầu.

Bài toán diện tích và quãng đường

Bài toán tính quãng đường đi

Quãng đường đi của một vật chuyển động thẳng đều bằng vận tốc nhân thời gian. Nhưng thực tế, vận tốc của vật luôn thay đổi. Vậy làm sao ta tính được quãng đường đi của vật. Ta xét ví dụ sau: Giả sử đồng hồ khoảng cách của xe bị hư. Ta muốn ước tính quãng đường xe chạy trong khoảng thời gian 30 giây bằng cách ghi nhận số liệu trên đồng hồ tốc độ trong bảng sau

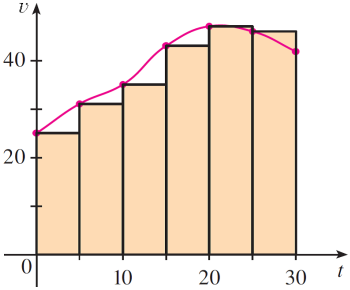
Time (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocity (ft/s)	25	31	35	43	47	46	41

Trong mỗi khoảng thời gian 5 giây khá ngắn, ta xem như vận tốc thay đổi rất ít, và xấp xỉ vận tốc xe là đều trong mỗi khoảng 5 giây với giá trị trong bảng trên. Vậy ta ước tính được quãng đường đi trong 30 giây của xe là

$$(25 \times 5) + (31 \times 5) + (35 \times 5) + \cdots + (46 \times 5) = 1135 \text{ ft}.$$

Bài toán diện tích và quãng đường

Giả sử ta biết được vận tốc (tức thời) của xe tại mỗi thời điểm t (giây) là $v(t)$, thì đồ thị của hàm vận tốc cùng với tổng diện tích các hình chữ nhật như hình bên tương đồng với quãng đường ước tính ở trên. Quãng đường chính xác có thể được định nghĩa là



$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(t_i^*)\Delta t$$

như cách làm của bài toán diện tích.

Hai bài toán mở đầu nói trên có cùng bản chất, và người ta mô hình hóa bản chất đó thành khái niệm tích phân như dưới đây

Tích phân

Định nghĩa tích phân

Với hàm f xác định trên $[a, b]$, ta chia $[a, b]$ thành n đoạn con có độ dài $\Delta x = (b-a)/n$ với các điểm biên là $x_0 = a$, $x_i = a + i\Delta x$ $(i = \overline{1, n})$. Gọi x_i^* là **điểm mẫu** bất kỳ trong đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$. **Tích phân từ** a **đến** b **của** f được định nghĩa là

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

miễn là giới hạn trên tồn tại, và khi giới hạn tồn tại ta nói f **khả tích** trên $[a, b]$.

Qui ước

Người ta qui ước rằng $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Tích phân

Chú thích 1. Nghĩa chính xác của giới hạn trong định nghĩa tích phân ở trên là:
Với số $\varepsilon > 0$ bấy kỳ cho trước, luôn tồn tại số tự nhiên N sao cho bất đẳng thức

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \right| < \varepsilon$$

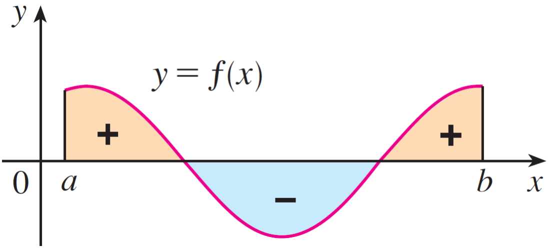
đúng với mọi số tự nhiên $n > N$ và với mọi cách chọn điểm mẫu x_i^* trong đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$.

Định lý

Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, hoặc có hữu hạn điểm gián đoạn kiểu bước nhảy (loại 1), luôn khả tích trên $[a, b]$.

Tích phân

Chú thích 2. Tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ được gọi là tổng tích phân, có vẻ như là tổng diện tích của những hình chữ nhật. Nếu hàm f không âm trên đoạn $[a, b]$ thì tích phân của f mang ý nghĩa là diện tích của hình thang cong như đã giới thiệu ở đầu chương. Nhưng nếu hàm f đổi dấu trên đoạn $[a, b]$ thì tích phân của f là hiệu của phần diện tích nằm trên trục hoành với phần diện tích nằm dưới trục hoành như hình vẽ dưới đây



Tích phân

Chú thích 3. Ký hiệu $\int_a^b f(x)dx$ là một số, không phụ thuộc vào x, nghĩa là

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr \text{ v.v..}$$

Chú thích 4. Mặc dù trong định nghĩa tích phân, ta chia đoạn $[a, b]$ thành những đoạn con đều nhau. Nhưng trong thực tế, người ta không nhất thiết làm thế, nghĩa là chia $[a, b]$ thành những đoạn con có độ dài Δx_i không đều nhau, miễn là khi $n \to \infty$ thì các độ dài đó nhỏ dần về 0.

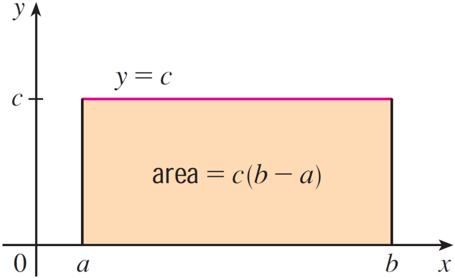
Tích phân

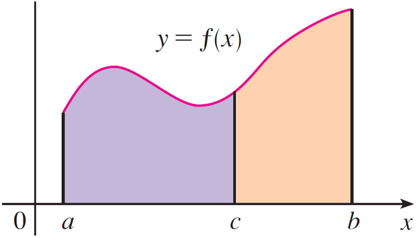
Tính chất của tích phân

1. $\displaystyle\int_a^b cdx = c(b-a)$, trong đó c là hằng số bất kỳ.
2. $\displaystyle\int_a^b \Big[f(x) \pm (x)\Big]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, c là hằng số bất kỳ.
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Tích phân

Hai hình sau minh họa cho tính chất 1 và 4



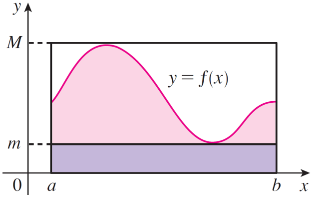


Tích phân

Tính chất so sánh tích phân

5. Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
6. Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
7. Nếu $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Minh họa tính chất 7: 

Định lý cơ bản của Giải tích

Định lý cơ bản của Giải tích, như tên gọi của nó, nói lên mối liên giữa hai phép tính cơ bản quan trọng của giải tích là đạo hàm và tích phân.

Ta xét lại bài toán chuyển động trước đây. Giả sử một vật chuyển động với hàm vị trí là s, nghĩa là tại thời điểm t, vật dịch chuyển khoảng cách (có hướng) là $s(t)$ so với mốc (vật ở mốc tại thời điểm $t = 0$). Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t là $s'(t)$.

Ngược lại, nếu biết trước vận tốc tức thời $v(t)$ của xe tại mỗi thời điểm t, thì quãng đường xe đi được trong khoảng thời gian $[0, x]$ là

$$s(x) = \int_0^x v(t)dt.$$

Như vậy bài toán tính vận tốc tức thời (đạo hàm) và bài toán tính quãng đường (tích phân) là hai tiến trình ngược nhau. Tổng quát, ta có định lý sau đây

Định lý cơ bản của Giải tích

Định lý cơ bản của Giải Tích

Giả sử f là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.

1. Hàm số g định bởi

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

   liên tục trên $[a, b]$, có đạo hàm trên (a, b) và $g'(x) = f(x)$.
   Viết cách khác là $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

2. Nếu F là nguyên hàm bất kỳ của f, nghĩa là $F' = f$, thì

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a).$$

Định lý cơ bản của giải tích

Hệ quả

Giả sử f là hàm số có đạo hàm f' cũng là hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Định lý cơ bản của Giải tích

Chứng minh (có thể bỏ qua)

1. Xét x và $x+h$ thuộc khoảng (a,b), ta có

$$
\begin{aligned}
g(x+h)-g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\
&= \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt\right) - \int_a^{x+h} f(t)dt \\
&= \int_x^{x+h} f(t)dt,
\end{aligned}
$$

do đó, với $h \neq 0$, ta có

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Để đơn giản, ta giả sử $h>0$ (trường hợp $h<0$ tương tự). Do f liên tục trên đoạn $[x,x+h]$, định lý cực trị tuyệt đối nói rằng

Định lý cơ bản của Giải tích

$\exists u, v \in [x, x+h]$ sao cho

$$\forall t \in [x, x+h], m = f(u) \leq f(t) \leq M = f(v).$$

Từ tính chất 7 của tích phân, ta suy ra $mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh$, hay

$$m = f(u) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v) = M.$$

Khi $h \to 0$ thì $f(u),\ f(v) \to f(x)$ (do tính liên tục của f tại x). Áp dụng định lý giới hạn kẹp và theo định nghĩa đạo hàm, ta suy ra

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Định lý cơ bản của Giải tích

2. Vì $F' = g' = f$, suy ra $F' - g' = 0$. Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $\Phi = F - g$, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(c)(b-a) = \Big[F'(c) - g'(c)\Big](b-a) = 0.$$

Suy ra $\Phi(b) = \Phi(a)$, nghĩa là $F(b) - F(a) = g(b) - g(a)$. Lưu ý $g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, do đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a) = F(b) - F(a).$$

Kết thúc chứng minh.

Quy tắc tính tích phân

Ký hiệu nguyên hàm

- Người ta ký hiệu $\int f(x)dx$ là nguyên hàm bất kỳ, theo biến x, của f. Tương tự, $\int f(u)du$ là nguyên hàm của f theo biến u.
- Ký hiệu trên còn được gọi là **tích phân bất định** của f.
- Dùng định lý Lagrange, ta chứng minh được hai nguyên hàm của f luôn sai khác một hằng số, nghĩa là nếu F và G cùng là hai nguyên hàm của f thì $F = G + c$, với c là hằng số không phụ thuộc x.

Định lý cơ bản của giải tích cho phép ta dễ dàng tính tích phân của một hàm nếu biết được một biểu thức tường minh nguyên hàm của nó. Sau đây là bảng công thức vài nguyên hàm thông dụng

Quy tắc tính tích phân

Một số nguyên hàm thường gặp

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, với $a \neq 1$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C,\ a > 0$
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + C,\ a > 0$

Quy tắc tính tích phân

Định lý: Quy tắc đổi biến

1. Nếu g là hàm số khả vi mà miền giá trị của g là một khoảng, và hàm f liên tục trên khoảng này, thì

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du,$$

trong đó $u = g(x)$, và vô hình trung, công thức trên phù hợp với hình thức vi phân "$du = g'(x)dx$".

2. Nếu g' liên tục trên $[a, b]$ và f liên tục trên miền giá trị của g, thì

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

trong đó $u = g(x)$.

Quy tắc tính tích phân

Hệ quả

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn đối xứng $[-a, a]$.

- Nếu f là hàm số chẵn, nghĩa là $\forall x \in [-a, a], f(-x) = f(x)$, thì
$$\int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$
- Nếu f là hàm số lẻ, nghĩa là $\forall x \in [-a, a], f(-x) = -f(x)$, thì
$$\int_{-a}^{a} f(x) = 0.$$

Quy tắc tính tích phân

Định lý: Quy tắc tích phân từng phần

1. Nếu hai hàm số f và g có đạo hàm thì

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Một hình thức khác dễ nhớ hơn nếu đặt $u = f(x)$ và $v = g(x)$, ta có

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

2. Nếu hai đạo hàm f' và g' liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Tính xấp xỉ tích phân

Có hai tình huống mà ta không thể biết chính xác giá trị của tích phân:

- Tình huống thứ nhất là không thể tìm được biểu thức tường minh, như là biểu thức của hàm sơ cấp, của nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân, ví dụ như hai tích phân sau đây

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \text{ và } \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx.$$

- Tình huống thứ hai là hàm dưới dấu tích phân được cho bởi bảng giá trị các dữ liệu thu thập được từ việc đo đạc bởi các dụng cụ thiết bị trong khoa học, kỹ thuật. Nghĩa là những hàm này không được biểu diễn bởi biểu thức hàm tường minh.

Trong cả hai tình huống trên, chúng ta buộc phải tính xấp xỉ giá trị của tích phân.

Tính xấp xỉ tích phân

Có nhiều phương pháp tính xấp xỉ tích phân trong Toán học, như là quy tắc hình thang, qui tắc trung điểm, qui tắc Simpson v.v.. Trong phạm vi của giáo trình giải tích B1, chúng ta chỉ nghiên cứu quy tắc trung điểm.

Ý chính của phương pháp xấp xỉ tích phân là dựa vào định nghĩa của tích phân, đó là giới hạn của tổng Riemann. Vậy ta có thể lấy tổng Riemann làm giá trị xấp xỉ cho tích phân

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

trong đó $\Delta x = (b-a)/n$, x_i^* là điểm mẫu bất kỳ trong đoạn con thứ i, $[x_{i-1}, x_i]$, và $x_i = a + i\Delta x$ với $i = \overline{0, n}$.

Tính xấp xỉ tích phân

Tổng Riemann ứng với các điểm mẫu là biên trái được ký hiệu bởi $L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$. Tương tự cho tổng Riemann với các điểm biên phải $R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Hai phép xấp xỉ

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n \text{ và } \int_a^b f(x)dx \approx R_n$$

lần lượt được gọi là **phép xấp xỉ theo biên trái** và **phép xấp xỉ theo biên phải**. Nếu tổng Riemann với các điểm mẫu là trung điểm của hai biên trái và phải thì ta có quy tắc trung điểm.

Tính xấp xỉ tích phân

Quy tắc trung điểm

Phép xấp xỉ tích phân theo quy tắc trung điểm là

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = \Delta x\big[f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) + \cdots + f(\overline{x}_n)\big]$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

và $\overline{x}_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ "trung điểm" của $[x_{i-1}, x_i]$.

Sau đây là đánh giá sai số trong phép xấp xỉ ở trên

Quy tắc tính tích phân

Đánh giá sai số của phép xấp xỉ

Đặt $E_M = \int_a^b f(x)dx - M_n$ là sai số trong phép xấp xỉ theo qui tắc trung điểm. Nếu có hằng số $K > 0$ sao cho $\forall x \in [a, b], |f''(x)| \leq K$ thì độ lớn sai số được đánh giá bởi

$$|E_M| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}.$$

Việc chứng minh của bất đẳng thức đánh giá trên nằm trong phạm vi của môn Giải Tích Số. Sau đây, ta làm một ví dụ áp dụng.

Quy tắc tính tích phân

Ví dụ

Hãy tính xấp xỉ giá trị của $\int_0^1 \cos(x^2)dx$ chính xác đến bốn chữ số ở phần thập phân.

GIẢI

Nhắc lại rằng hai số r_1 và r_2 khớp nhau đến bốn chữ số ở hàng thập phân có nghĩa là $|r_1 - r_2| \leq 0,0001$. Để dễ giải thích, ta lấy ví dụ $r_1 = 2,3157\overline{a_1 a_2 \dots}$ và $r_2 = 2,3157\overline{b_1 b_2 \dots}$, thì ta có

$$|r_1 - r_2| = 0,0000\overline{c_1 c_2 c_3 \dots} \leq 0,0001.$$

Ta xét hàm số f định bởi $f(x) = \cos(x^2)$ thì $f''(x) = -4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2)$. Ta có

$$\forall x \in [0,1], |f''(x)| \leq 4x^2|\cos(x^2)| + 2|\sin(x^2)| \leq 4 + 2 = 6.$$

Vậy nếu ta xấp xỉ tích phân theo quy tắc trung điểm thì độ lớn sai số E_M được đánh giá bởi

Tích phân

$$|E_M| \le \frac{6(1-0)^3}{24n^2} = \frac{1}{4n^2}.$$

Để phép xấp xỉ đạt độ chính xác như yêu cầu thì ta chọn một giá trị của n sao cho

$$\frac{1}{4n^2} \le 0,0001 \Leftrightarrow 4n^2 \ge 10^4 \Leftrightarrow n \ge 50.$$

Ta lấy $n = 50$ thì $\Delta x = (1-0)/50 = 1/50$, $x_i = 0 + i\Delta x = i/50$, $\overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = (2i-1)/100$ và

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^{50} f(\overline{x}_i) = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} \cos\left[\frac{(2i-1)^2}{100^2}\right]$$

$$= 0,9045 \text{ (dùng máy Casio với toán tử } \textstyle\sum\text{)}.$$

Tích phân suy rộng

TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Trong định nghĩa của tích phân $\int_a^b f(x)dx$, hàm số f xác định tại mọi điểm của đoạn hữu hạn $[a, b]$.

- Nếu cận tích phân a hay b được thay bởi vô cực thì tích phân đó được gọi là tích phân suy rộng loại I. Ví dụ, $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$.
- Nếu cận tích phân a và b là số thực hữu hạn, nhưng đoạn $[a, b]$ chứa điểm gián đoạn vô cực của hàm f, hoặc f không xác định tại một điểm thuộc $[a, b]$, thì tích phân đó được gọi là tích phân suy rộng loại II. Ví dụ, $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$.

Nhưng nghĩa của các tích phân suy rộng là gì?

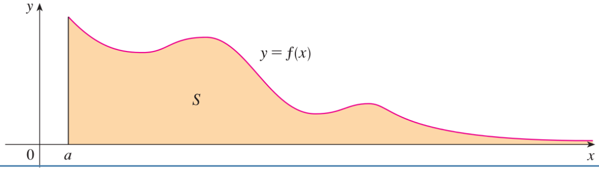
Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 1

1. Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ.



Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 1

2. Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 1

3. Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ký hiệu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Nếu **một trong hai** tích phân, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hay $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ phân kỳ, thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Chú ý

Trong trường hợp các tích phân suy rộng loại 1 nói trên phân kỳ, thì các ký hiệu tích phân đó **không có nghĩa** là một số nào cả.

Tích phân

Định lý

Tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ $(a > 0)$ hội tụ khi $p > 1$, phân kỳ khi $p \leq 1$.

Chứng minh. Với $p = 1$ thì

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln a) = \infty,$$

nghĩa là giới hạn không tồn tại như một số thực hữu hạn. Vậy tích phân phân kỳ trong trường hợp $p = 1$.

Tích phân

Xét $p \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{1}{x^p}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_a^t x^{-p}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right) \\
&= \begin{cases} \infty & \text{nếu } p < 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}} & \text{nếu } p > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Tích phân suy rộng

Ví dụ

Tính $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$ và $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2x+1}{e^{3x}} dx$.

Giải. Dùng qui tắc tích phân từng phần, ta tính được

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x + C \text{ và } \int \frac{2x+1}{e^{3x}} = -\frac{6x+5}{9e^{3x}} + C.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} xe^x dx &= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 xe^x dx = \lim_{t\to-\infty}\left(-1 - \frac{t-1}{e^{-t}}\right)\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(-1 - \frac{1}{-e^{-t}}\right) \text{ (qui tắc Lô-pi-tal)}\\ &= -1.\end{aligned}$$

Tích phân suy rộng

Tiếp theo

$$\int_0^\infty \frac{2x+1}{e^{3x}}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{2x+1}{e^{3x}}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{5}{9} - \frac{6t+5}{9e^{3t}}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{5}{9} - \frac{6}{27e^{3t}}\right) = \frac{5}{9} \text{ (qui tắc Lôpital).}$$

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 2

1. Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \in [a, b)$ (f không xác định tại b hoặc có giới hạn vô cực tại b) và tồn tại giới hạn $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$
Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 2

2. Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \in (a, b]$ (f không xác định tại a hoặc có giới hạn vô cực tại a), và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 2

3. Giả sử f xác định trên (a, b). Với $c \in (a, b)$ bất kỳ, nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ký hiệu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Nếu **một trong hai** tích phân, $\int_a^c f(x)dx$ hay $\int_c^b f(x)dx$ phân kỳ, thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 2

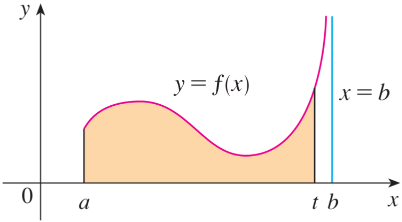
4. Giả sử f xác định trên $[a, c) \cup (c, b]$. (thông thường f có giới hạn vô cực tại c). Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, và ta có các khái niệm như định nghĩa ở mục 3.

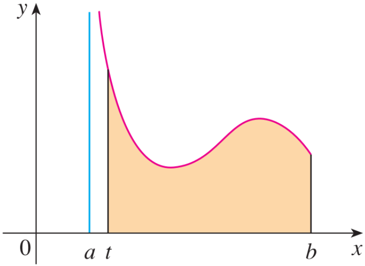
Chú ý

Trong trường hợp các tích phân suy rộng loại 2 nói trên phân kỳ, thì các ký hiệu tích phân đó **không có nghĩa** là một số nào cả.

Tích phân suy rộng

Hai hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = a$ và $x = b$, nghĩa là hàm số có giới hạn vô cực tại a hay b. Lúc đó, giá trị tích phân suy rộng (nếu hội tụ) là diện tích phần tô màu khi t tiến về a hay b.





Tích phân suy rộng

Chú ý

Mặc dù ta có công thức nguyên hàm $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|$, nhưng đẳng thức sau đây là vô nghĩa

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

lý do là hàm dưới dấu tích phân không xác định tại 1 trong miền lấy tích phân. Nói cách khác $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ là tích phân suy rộng loại 2 phân kỳ (sẽ được kiểm chứng sau đây)

Tích phân suy rộng

Ví dụ

Chứng minh tích phân suy rộng $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ phân kỳ.

Giải

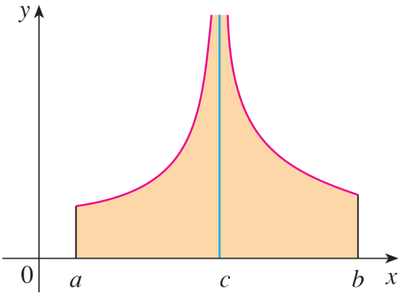
Hàm dưới dấu tích phân không xác định tại $1 \in (0,3)$. Ta chỉ cần chứng minh tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$ là phân kỳ. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t\to 1^+} \int_t^3 \frac{dx}{x-1} \\ &= \lim_{t\to 1^+} (\ln 2 - \ln|t-1|) = \infty,\end{aligned}$$

nghĩa là giới hạn không tồn tại (như là số hữu hạn). Vậy tích phân suy rộng $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ phân kỳ, với ý nghĩa trong hình minh họa kế bên là diện tích phần tô màu vô hạn.



Tích phân suy rộng

Định lý

Với số $c \in (a, b)$, tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-c|^p}$ hội tụ khi $p < 1$, phân kỳ khi $p \geq 1$.

Sinh viên tự chứng minh định lý trên.

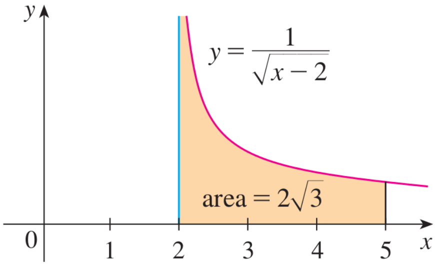
Hệ quả

Với $a < c < b$, hai tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^c \frac{1}{(c-x)^p}$ và $\displaystyle\int_c^b \frac{1}{(x-c)^p}$ cùng hội tụ khi $p < 1$, cùng phân kỳ khi $p \geq 1$.

Tích phân suy rộng

Ví dụ

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\Big|_t^5$$
$$= \lim_{t\to 2^+} 2(\sqrt{3}-\sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3}.$$



Sau đây thêm hai ví dụ dành cho sinh viên: Tính tích phân suy rộng (nếu nó hội tụ)

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$.
- $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

1. Nếu $\displaystyle\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ và

$$\left|\int_a^{\infty} f(x)dx\right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)|dx.$$

   Ta cũng có kết quả tương tự như trên đối với những hình thức khác của tích phân suy rộng loại 1.

2. Giả sử $\int_a^b f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 2. Nếu $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ và

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Chú ý: Chiều ngược lại của tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối không đúng. Chẳng hạn $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ hội tụ, trong khi $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn so sánh 1: Dạng bất đẳng thức

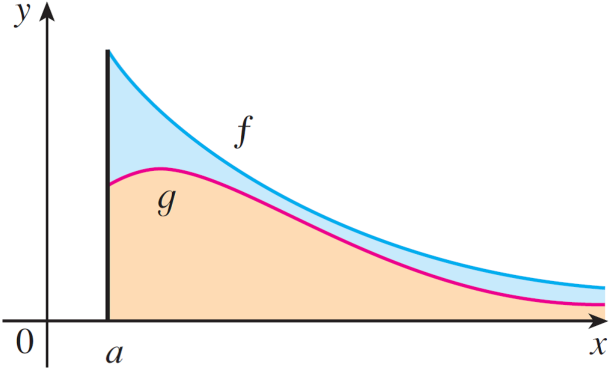
1. Giả sử f, g là hai hàm số thỏa $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với mọi $x \geq M$ (M là một số nào đó). Khi đó
   - Nếu $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ cũng hội tụ.
   - Nếu $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ phân kỳ thì $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ cũng phân kỳ.

   Ta cũng có cách so sánh tương tự đối với tích phân $\int_{-\infty}^a$.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Ghi chú. Để dễ áp dụng, ta nhớ một cách đại khái rằng "*Nếu lớn hội tụ thì nhỏ hội tụ; Nếu nhỏ phân kỳ thì lớn phân kỳ*".

Chứng minh của định lý trên khá dễ, ta bỏ qua, tuy nhiên hình ảnh minh họa sau cho thấy điều đó có vẻ hiển nhiên



Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh 1: dạng bất đẳng thức

2. Giả sử $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ là hai tích phân suy rộng loại 2, trong đó $c \in [a, b]$ là **điểm kỳ dị** của tích phân, nghĩa là tại đó hai hàm f và g không xác định hoặc có giới hạn vô cực. Hơn nữa $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với mọi x thuộc một lân cận của c. Khi đó,
   - Nếu $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ cũng hội tụ.
   - Nếu $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ cũng phân kỳ.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Sinh viên làm bài tập ví dụ sau đây

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+1} dx$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+\sin^2 x} dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x\sin x} dx$

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh 2

Cho f, g là các hàm số **dương**.

1. Nếu
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$
thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

   Ta cũng có cách so sánh tương tự đối với $\int_{-\infty}^{a}$.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh 2

Cho f, g là các hàm số **dương**.

2. Nếu $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 2 với $c \in [a, b]$ là **điểm kỳ dị** của tích phân, và nếu

$$\lim_{x \to \mathbf{c}} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$

thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Sinh viên làm các bài tập ví dụ sau

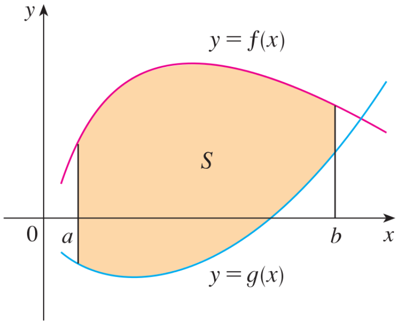
Ví dụ

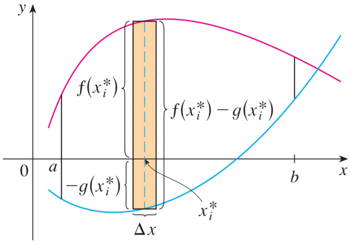
Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+\ln x+1}{x^5+3x^2+3}dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3+2x-1}{x^4+x^3+\sqrt{x^3+1}+2}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2(2+x)}}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$

Ứng dụng hình học của tích phân

Tích phân được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực: Kỹ thuật, sinh học, xác suất, kinh tế v.v.. Sau đây ta chỉ xét một khía cạnh ứng dụng của tích phân trong hình học, đó là tính diện tích hình phẳng, mở đầu với hình vẽ sau

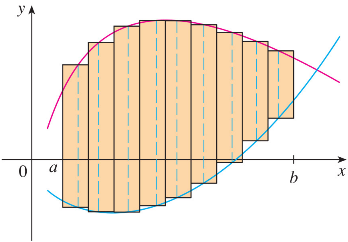




Ứng dụng hình học của tích phân

Diện tích hình S là

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$



Như vậy

Diện tích của miền giới hạn bởi các đường cong $y = f(x), y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b$ trong đó f, g là các hàm liên tục $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ là:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Ứng dụng hình học của tích phân

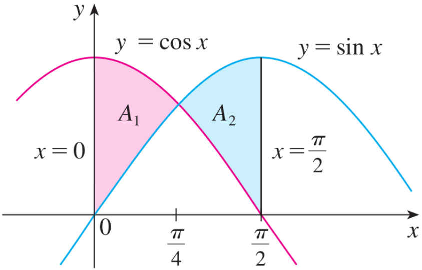
Tổng quát, diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x)$ và nằm giữa $x = a, x = b$ là

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Ứng dụng hình học của tích phân

Ví dụ

Tính diện tích giới hạn bởi $y = \sin x, y = \cos x$ và $x = 0, x = \pi/2$



Ứng dụng hình học của tích phân

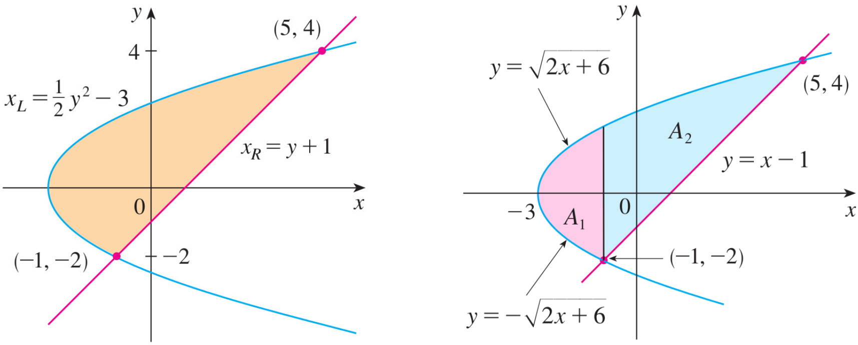
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $x = f(y), x = g(y)$ và nằm giữa $y = c, y = d$, với f, g liên tục $f(y) \geq g(y)$ là

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)| dy$$

Ứng dụng hình học của tích phân

Ví dụ

Tính diện tích giới hạn bởi $y = x - 1$ và $y^2 = 2x + 6$



SƠ LƯỢC VỀ CHUỖI FOURIER

Ta đã biết về việc một hàm số, dưới điều kiện nào đó, có thể được khai triển thành một chuỗi lũy thừa, tức là chuỗi Taylor. Trong chương này, chúng ta tìm hiểu một kiểu khai triển khác, khai triển thành chuỗi các hàm sin và cos.

Chuỗi Fourier

- Định nghĩa chuỗi Fourier
- Sự hội tụ của chuỗi Fourier
- Khai triển chuỗi Fourier của hàm số xác định trên $[0, \pi]$
- Khai triển chuỗi Fourier của hàm số xác định đoạn $[a, b]$

Định nghĩa chuỗi Fourier

Định nghĩa chuỗi Fourier

Xét f là hàm số khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Đặt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{22}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, 3\ldots \tag{23}$$

Chuỗi $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ được gọi là chuỗi Fourier (cũng được gọi là chuỗi lượng giác) của hàm số f, và ta viết

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{24}$$

Các hệ số a_k, b_k được tính theo công thức (22)–(23) được gọi là các hệ số Fourier của hàm số f.

Sự hội tụ của chuỗi Fourier

Cũng như chuỗi Taylor, quan hệ (24) không nói lên điều gì về sự hội tụ của chuỗi Fourier. Hơn nữa, cho dù chuỗi Fourier của f có hội tụ thì tổng của chuỗi này cũng chưa hẳn đã bằng $f(x)$.

Ta có kết quả sau

Sự hội tụ của chuỗi Fourier

Định lý 1 (Dirichlet)

Nếu hàm số f đơn điệu từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$, bị chặn trên đoạn đó, nghĩa là $\forall x \in [-\pi, \pi], |f(x)| \leq M$ (M là hằng số độc lập với x), thì chuỗi Fourier của f hội tụ tại từng điểm $x \in [-\pi, \pi]$ và tổng của chuỗi này bằng

(i) $f(x)$ *nếu f liên tục tại x, $-\pi < x < \pi$.*

(ii) $\dfrac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+)\right]$ *nếu x là điểm gián đoạn kiểu bước nhảy của f, $-\pi < x < \pi$.*

(iii) $\dfrac{1}{2}\left[f(-\pi^+) + f(\pi^-)\right]$, *nếu $x = \pm\pi$.*

Nhắc lại. x là điểm gián đoạn kiểu bước nhảy nghĩa là tồn tại $f(x^-)$ và $f(x^+)$ nhưng $f(x^-) \neq f(x^+)$.

Sự hội tụ của chuỗi Fourier

Nhận xét

1. Chuỗi Fourier của f xác định với $x \in \mathbb{R}$, trong khi ta đang xét miền xác định của f là $[-\pi, \pi]$. Tuy nhiên, nếu ta thác triển miền giá trị của f trên $(-\pi, \pi]$ thành hàm số tuần hoàn, chu kỳ 2π, xác định trên toàn $\mathbb{R}$, thì trong phát biểu của định lý 1 ở trên, ta bỏ đi mục (iii) và xem như $x \in \mathbb{R}$.
2. Nếu f là hàm số lẻ, nghĩa là $\forall x, f(-x) = -f(x)$, thì từ (22)-(23), ta có

$$a_k = 0 \quad \forall k \geq 0, \text{ và}$$
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad \forall k \geq 1.$$

Lúc đó chuỗi Fourier của hàm lẻ chỉ bao gồm các hàm sin.

Sự hội tụ của chuỗi Fourier

Nhận xét

3. Tương tự, nếu f là hàm chẵn, nghĩa là $\forall x, f(-x) = f(x)$, thì chuỗi Fourier của f chỉ gồm các hàm cos với các hệ số

$$\forall k \geq 0, a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x.$$

Dĩ nhiên $b_k = 0$ với mọi k.

Khai triển Fourier của hàm số xác định trên $[0, \pi]$

Khai triển Fourier của f xác định trên $[0, \pi]$

Nếu hàm số f chỉ xác định trên $[0, \pi]$ và thỏa giả thiết giống định lý 1 (Dirichlet), thì ta thác triển f thành hàm F tuần hoàn, chu kỳ 2π, xác định trên $\mathbb{R}$ theo ba cách sau

1. **Thác triển chẵn** bằng cách đặt

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [0, \pi] \\ f(-x) & \text{nếu } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

   và F là hàm số tuần hoàn xác định trên $\mathbb{R}$, chu kỳ 2π. Lưu ý rằng $F \equiv f$ trên đoạn $[0, \pi]$ và chuỗi Fourier của F chỉ gồm các hàm cos.

Khai triển Fourier của hàm số xác định trên $[0, \pi]$

Khai triển Fourier của f xác định trên $[0, \pi]$

2. **Thác triển lẻ** bằng cách đặt

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [0, \pi] \\ -f(-x) & \text{nếu } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

   và F là hàm số tuần hoàn xác định trên $\mathbb{R}$, chu kỳ 2π. Lưu ý rằng $F \equiv f$ trên đoạn $[0, \pi]$ và chuỗi Fourier của F chỉ gồm các hàm sin.

3. Đặt

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{nếu } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

   và F là hàm số tuần hoàn xác định trên $\mathbb{R}$, chu kỳ 2π. Lưu ý rằng $F \equiv f$ trên đoạn $[0, \pi]$ và chuỗi Fourier của F có cả hàm sin và cos.

Khai triển Fourier của hàm số xác định trên $[0, \pi]$

Ví dụ

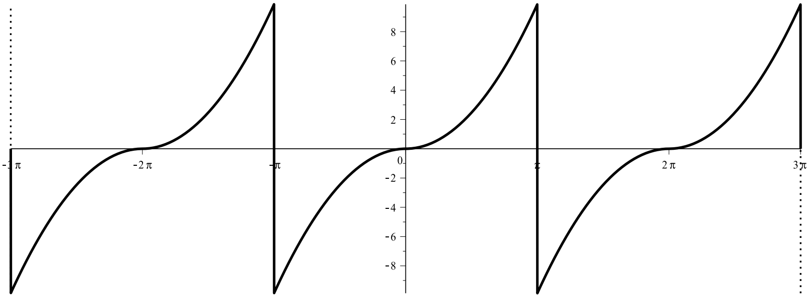
Khai triển hàm số f định bởi $f(x) = x^2$

1. thành chuỗi chỉ gồm các hàm sin trên đoạn $[0, \pi]$. Sau đó khảo sát sự hội tụ của chuỗi tại từng điểm $x \in [0, \pi]$.
2. thành chuỗi chỉ gồm các hàm cos trên đoạn $[0, \pi]$. Sau đó khảo sát sự hội tụ của chuỗi tại từng điểm $x \in [0, \pi]$.
3. thành chuỗi gồm các hàm sin và cos trên đoạn $[0, \pi]$. Sau đó khảo sát sự hội tụ của chuỗi tại từng điểm $x \in [0, \pi]$.

Giải.

1. Ta thác triển f thành hàm số F_1 tuần hoàn, chu kỳ 2π, lẻ và $F_1 \equiv f$ trên $[0, \pi]$ theo cách 1 ở trên (xem hình 4). Do đó, chuỗi Fourier của F_1 chỉ gồm các hàm sin với các hệ số b_k được tính bằng quy tắc tích phân từng phần

Chuỗi Fourier



Hình: Đồ thị hàm F_1.

Chuỗi Fourier

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin kx \mathrm{d}x = \ldots \text{ (lấy tích phân từng phần)} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{k} & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ \dfrac{2(k^2\pi^2-4)}{k^3\pi} & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3\ldots \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Vậy chuỗi sin của F_1 là $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ với b_k được tính ở (25).

Tiếp theo ta khảo sát sự hội tụ của chuỗi này. Ta thấy F_1 tăng trên từng khúc $(m\pi, m\pi + 2\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$ và m là số lẻ; hơn nữa $\forall x \in \mathbb{R}, |F_1(x)| \leq \pi^2$. Vậy F_1 thỏa giả thiết của định lý 1, suy ra chuỗi các hàm sin của F_1 có tổng là $F_1(x)$ mọi điểm $x \in (m\pi, m\pi + 2\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$ và m lẻ (vì tại các điểm đó F_1 liên tục).

Chuỗi Fourier

Ngoài ra, F_1 gián đoạn kiểu bước nhảy tại các điểm $x_0 = (2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ và $F_1(x_0^-) + F_1(x_0^+) = 0$. Do đó chuỗi này hội tụ về 0 tại x_0, vì từng số hạng của chuỗi bằng 0 $(\forall k \in \mathbb{Z}, \sin kx_0 = 0)$.

Nếu chỉ xét riêng trên đoạn $[0, \pi]$ thì $F_1(x) = f(x) = x^2$, ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{nếu } x = \pi \end{cases} \quad (b_k \text{ ở } (25)). \tag{26}$$

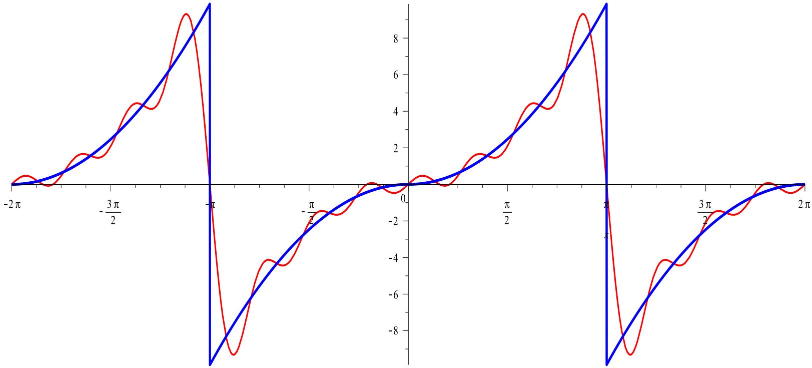
Chú thích thêm: Nếu ta xấp xỉ

$$F_1(x) \approx S_7(x) = \sum_{k=1}^{7} b_k \sin kx \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$$

với các hệ số b_k được tính ở (25), thì hình 5 trình bày đồ thị của F_1 màu xanh và đồ thị của S_7 màu đỏ.

Chuỗi Fourier

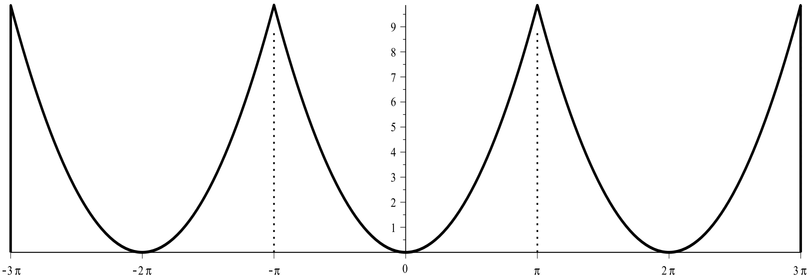
Ta thấy đồ thị của S_7 đi theo hình dáng đồ thị của F_1, ý muốn nói rằng đồ thị của S_n sẽ ngày càng "khít" với đồ thị của F_1 khi $n \to \infty$.



Hình: Đồ thị hàm F_1 ghép chung với đồ thị hàm số $S_7 = \sum_{k=1}^{7} b_k \sin kx$.

Chuỗi Fourier

2. Ta thác triển f thành hàm số F_2 chẵn, tuần hoàn, chu kỳ 2π và $F_2 \equiv f$ trên $[0, \pi]$ theo cách 2 (xem hình 6 dưới đây).



Hình: Đồ thị hàm F_2.

Chuỗi Fourier

Khi đó các hệ số cos được tính theo công thức

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{4}{k^2} & \text{nếu } k \geq 1 \\ \dfrac{2\pi^2}{3} & \text{nếu } k = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Lưu ý hàm F_2 thỏa giả thiết của định lý 1 và F_2 liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$. Do đó chuỗi cos của F_2 hội tụ về F_2 trên $\mathbb{R}$, suy ra

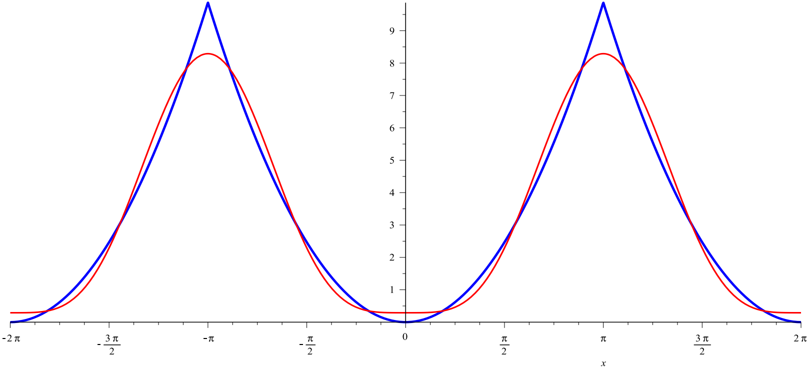
$$\forall x \in [0,\pi], \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx = x^2.$$

Chú thích thêm: Nếu ta xấp xỉ

$$F_2(x) \approx C_n(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Chuỗi Fourier

thì đồ thị của C_n ngày càng "gần sát" đồ thị của F_2 khi $n \to \infty$. Hình 7 trình bày đồ thị của F_2 màu xanh và đồ thị của C_2 màu đỏ.



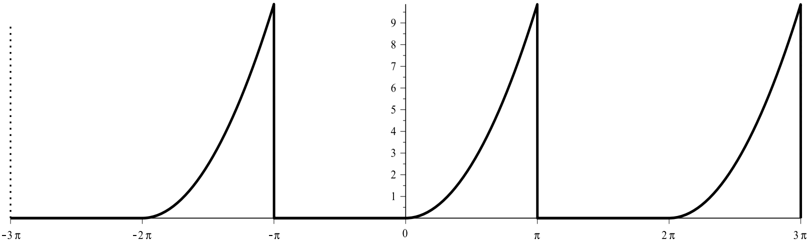
Hình: Đồ thị hàm F_2 ghép chung với đồ thị hàm số C_2.

Chuỗi Fourier

3. Nếu ta đặt F là hàm số tuần hoàn, chu kỳ 2π, xác định trên $\mathbb{R}$ và được cho bởi công thức

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{nếu } -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

Xem hình dưới, ta thấy F liên tục tại mọi điểm $x \neq (2m-1)\pi,\ m \in \mathbb{Z}$ và chuỗi Fourier của F sẽ hội về F tại mọi điểm $x \neq (2m-1)\pi$.



Chuỗi Fourier

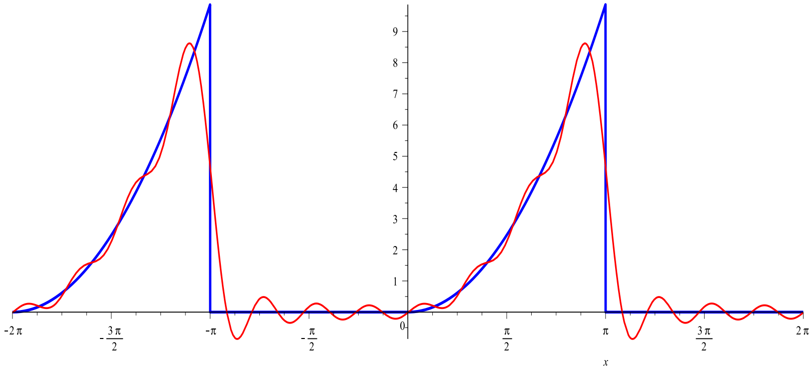
Theo định lý 1 (Dirichlet) thì

$$\forall x \neq (2m-1)\pi,\ \ m \in \mathbb{Z}, F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

trong đó ta chưa tính cụ thể giá trị các hệ số a_k và b_k (nếu muốn tính a_k và b_k thì lưu ý rằng F triệt tiêu trên đoạn $[-\pi, 0]$. Do đó $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx \mathrm{d}x$ và $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin kx \mathrm{d}x$). Tuy nhiên, ta xem hình sau đây trình bày đồ thị của F (màu xanh) và đồ thị tổng riêng phần thứ $n = 7$ của chuỗi (màu đỏ). Nếu $n \to \infty$ thì đồ thị tổng riêng phần ngày càng "khít" với đồ thị F trình bày hai đồ thị xấp xỉ nhau.

Chuỗi Fourier

Đồ thị hai hàm số F và $T_7(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{7}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ghép chung



Ta cũng chú ý thêm rằng tại $x_0 = (2m-1)\pi$ thì chuỗi Fourier của F hội tụ về $\frac{1}{2}[F(x_0^-) + F(x_0^+)] = \frac{1}{2}(\pi^2 + 0) = \frac{\pi^2}{2}$.

Chuỗi Fourier

Sinh viên tự làm bài tập sau

Bài tập

Hỏi giống ví dụ trên với hàm f xác định trên $[0, \pi]$ được cho bởi

- $f(x) = 1 - x$
- $f(x) = x$

Chuỗi Fourier

KHAI TRIỂN THÀNH CHUỖI FOURIER CỦA HÀM SỐ XÁC ĐỊNH TRÊN ĐOẠN $[a, b]$

Với một hàm số f xác định trên đoạn $[a, b]$, ta có ba cách liên kết f với một hàm mới F như sau

Cách 1. F là hàm lẻ, tuần hoàn, chu kỳ 2π được định bởi

$$\forall t \in [0, \pi], F(t) = f\left(a + \frac{t(b-a)}{\pi}\right).$$

Khi đó, ta khai triển $F(t)$ thành chuỗi chỉ gồm các hàm $\sin kt$ rồi tính f theo công thức

$$\forall x \in [a, b], f(x) = F\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right),$$

nghĩa là ta thay $t = \frac{\pi}{b-a}(x-a)$.

Chuỗi Fourier

Cách 2. F là hàm chẵn, tuần hoàn, chu kỳ 2π được xác định như cách 1. Khi đó, ta khai triển $F(t)$ thành chuỗi chỉ gồm các hàm $\cos kt$ rồi tính f theo công thức như cách 1.

Cách 3. F là hàm tuần hoàn, chu kỳ 2π được định bởi

$$\forall t \in [-\pi, \pi], F(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{t(b-a)}{2\pi}\right).$$

Khai triển Fourier của $F(t)$ theo các hàm $\cos kt$ và $\sin kt$. Sau đó f được tính bởi công thức

$$\forall x \in [a, b], f(x) = F\left(\frac{2\pi}{b-a}(x - \frac{a+b}{2})\right),$$

nghĩa là thay thế $t = \frac{2\pi}{b-a}(x - \frac{a+b}{2})$.