TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ & ĐÁP ÁN

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
ĐỀ THI CUỐI KỲ II NĂM HỌC 2019-2020
Môn: Thực hành Vi tích phân 2B
(Đáp án – Thang điểm)

<table>
<tr><th>Bài</th><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td>Bài 1 (3.0đ)</td><td></td></tr>
<tr><td>(a) Tìm cực trị hàm $f(x,y) = xy(1-x-y)$.
(b) Chỉ ra rằng mọi mặt tiếp xúc với mặt $(S): \ x^2+y^2-z^2 = 2y-2z$ đều đi qua một điểm cố định I. Hãy tìm điểm I.</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td>(Lời giải cho 1a)</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td>Xác định điểm dừng.
Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0. \end{cases} \quad (1)$$
Hệ (1) tương đương hệ $\begin{cases} y-2xy-y^2 &= 0, \\ x-x^2-2xy &= 0. \end{cases}$
Ta thấy phương trình thứ nhất của hệ (1) tương đương $y=0 \vee 2x+y=1$. Và phương trình thứ hai của hệ (1) tương đương $x=0 \vee x+2y=1$.
• Khi $y=0$, hệ (1) tương đương $\begin{cases} y=0, \\ x-x^2=0 \end{cases}$.
Do đó, $(x,y)=(0,0) \vee (x,y)=(1,0)$.
• Khi $x=0$ và $y\neq 0$, hệ (1) tương đương $\begin{cases} x=0, \\ y\neq 0 \\ y-y^2=0 \end{cases}$.
Do đó, $(x,y)=(0,1)$.
• Khi $xy\neq 0$, hệ (1) tương đương $\begin{cases} 2a+y=1, \\ x+2y=1 \end{cases}$.
Do đó, $(x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.
Do đó, hàm f có 4 điểm dừng.</td><td>1.0</td></tr>
</table>

LaTeX by LE VAN CHANH

<table>
<tr><th>Bài</th><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td>

Kiểm tra điều kiện đủ.

$$\begin{aligned} A = f_{xx}(x,y) &= -2y \\ B = f_{xy}(x,y) &= 1-2x-2y, \\ C = f_{yy}(x,y) &= -2x. \end{aligned}$$

Đặt $D(x,y) := AC - B^2 = 4xy - (1-2x-2y)^2$.

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>

Bảng phân loại điểm dừng của hàm f.

Điểm dừng	D và dấu	A và dấu	Phân loại
$(0,0)$	$-1<0$	(không cần)	Điểm yên ngựa
$(0,1)$	$-1<0$	(không cần)	Điểm yên ngựa
$(1,0)$	$-1<0$	(không cần)	Điểm yên ngựa
$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}>0$	$-\frac{2}{3}<0$	Cực đại

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>

(Lời giải 1b)

</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td></td><td>

Ta có $x^2+y^2-z^2 = 2y-2z \iff x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$.

Ta xét hàm $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-2y+2z$. Tại mỗi điểm $M(a,b,c)$ không trùng với $(0,1,1)$ và thuộc (S), mặt tiếp xúc với (S) tại M nhận $\nabla F(a,b,c) = (2a, 2b-2, -2c+2)$ làm vector pháp tuyến. Do đó, mặt tiếp xúc với (S) tại M là

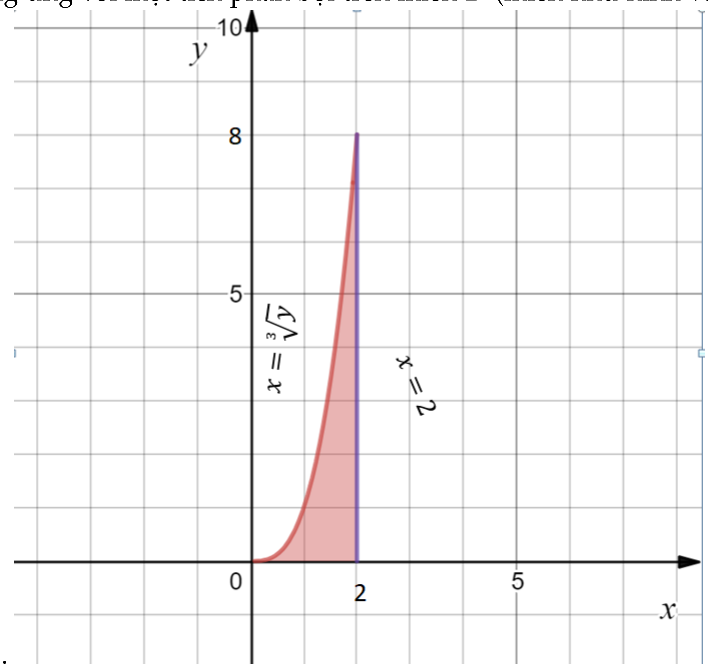
$$\begin{aligned} & 2a(x-a)+(2b-2)(y-b)+(-2c+2)(z-c)=0. \\ \iff\ & 2ax+(2b-2)(y-1)+(-2c+2)(z-1)-2\left(a^2+b^2-c^2-2b+2c\right)=0 \\ \iff\ & 2ax+(2b-2)(y-1)+(-2c+2)(z-1)=0. \end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra mặt phẳng này luôn qua cố định $I(0,1,1)$ với mọi $(a,b,c)\neq(0,1,1)$. Hiển nhiên, mặt tiếp xúc với (S) tại điểm $I(0,1,1)$ (nếu có) thì đi qua điểm I. Từ đó, ta thu được điều cần chứng minh.

Lưu ý. Sinh viên có thể nhầm lẫn giữa (a,b,c) với (x,y,z) : điều ta cần chỉ ra là tồn tại (x,y,z) cố định để $2ax+(2b-2)(y-1)+(-2c+2)(z-1)=0$ với mọi $(a,b,c)\neq(0,1,1)$; hoàn toàn không phải chỉ ra (a,b,c) sao cho $2ax+(2b-2)(y-1)+(-2c+2)(z-1)=0$ đúng với mọi $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Lưu ý. Khi $(a,b,c)\neq(0,1,1)$, vector $\nabla F(a,b,c)$ mới có thể là vector pháp tuyến với mặt tiếp xúc với (S) tại (a,b,c).

</td><td>1.0</td></tr>
</table>

Bài	*Đáp án*	*Điểm*
	Một số nhận xét và hướng chấm điểm. (a) (b) Một số lỗi sai của sinh viên: • •	
2	**Bài 2** (2.0đ)	
	Tính tích phân lặp $$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\, dx dy.$$	
	(Lời giải)	3.0
	Tích phân lặp tương ứng với một tích phân bội trên miền D (miền như hình vẽ bên dưới,  phần được tô màu).	0.5
	Miền D được biểu diễn như miền đơn giản loại II: $$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 8, \sqrt[3]{y} \le x \le 2\right\}.$$	0.25
	Miền D có thể biểu diễn lại như miền đơn giản loại I: $$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^3\right\}.$$	0.25

<table>
<tr><th>Bài</th><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td>Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}\int_0^8\int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2\int_0^{x^3} \sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 y\sqrt{x^4+1}\Big|_{y=0}^{y=x^3}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 x^3\sqrt{x^4+1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{6}\left(17^{3/2}-1\right).\end{aligned}$$</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td></td><td>Một số nhận xét và hướng chấm điểm.

1. Vẽ hình là điều bắt buộc.
2. Một số sai sót của sinh viên:
   -
   -</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Bài 3 (2.0đ, Giá trị nhỏ nhất)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Tính tích phân $\int_C (2x^2+y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$, trong đó C là biên của miền D và được định hướng âm, với D là miền giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=x$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>(Lời giải)</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td></td><td>Cách 1: Tính trực tiếp

Ta có $C=C_1\bigcup C_2$ với $C_1: y=x^2, x: 1\to 0$ và $C_2: y=x, x: 0\to 1$ (C_1 và C_2 được định hướng tương thích với C.)</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Do đó,

$$\begin{aligned}\int_C (2x^2+y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y &= \int_{C_1}(2x^2+y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + \int_{C_2}(2x^2+y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y\\ &= \int_1^0 (2x^2+x^2-2x^2)\mathrm{d}x + \int_0^1 (2x^2+x-x)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^0 x^2\mathrm{d}x + \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Cách 2: Áp dụng công thức Green (ngược chiều dương)

Dựa trên hình vẽ (sinh viên cần phác thảo miền D), ta thấy miền $D = \left\{(x.y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2\le y\le\sqrt{x}, 0\le x\le 1\right\}.$</td><td>0.5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Bài</th><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td>Với $P(x,y)=2x^2+y,\ Q(x,y)=-x$, áp dụng công thức Green, ta có

$$\begin{aligned}\int_C (2x^2+y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y &= -\int_D \left(Q_x-P_y\right)\mathrm{d}A = -\int\int_D(-2)\mathrm{d}A\\ &= 2\int_0^1\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Một số nhận xét và hướng chấm điểm.

1. s
2. Một số sai sót của sinh viên:
   -
   -</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Bài 4 (3.0đ)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Carbon C^{14} là một chất phóng xạ. Theo một mô hình hóa học, số lượng nguyên tử bị phân rã trong một đơn vị thời gian trên một đơn vị số lượng nguyên tử là không đổi. Như vậy, nếu gọi $C(t)$ là số lượng nguyên tử ở thời điểm t (năm) tính từ lúc Carbon C^{14} bắt đầu phân rã, $t\geq 0$, thì

$$\frac{C'(t)}{C(t)}=k,\ \forall t>0,$$

trong đó k là một hằng số thực.

(a) Chứng tỏ

$$C(t)=C_0e^{kt},$$

trong đó $C_0=C(0)$.

(b) Người ta biết C^{14} phân rã theo quy luật số lượng giảm đi phân nửa sau 5730 năm. Từ đó, hãy kiểm rằng $k\approx -0,00012$. Hãy cho biết đơn vị của k.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>(Lời giải 4a)</td><td>2.0</td></tr>
</table>

LaTeX by LE VAN CHANH

Bài	Đáp án	Điểm
	Ta có $\dfrac{C'(t)}{C(t)} = k.$ Lấy nguyên hàm 2 vế ta được $\displaystyle\int \frac{C'(t)}{C(t)}dt = \int kdt$ $\Longrightarrow \ln C(t) = kt + C$ $\Longrightarrow C(t) = e^{kt+C}$ $\Longrightarrow C(t) = e^{kt}e^{C}$ $\Longrightarrow C(0) = e^{C}.$ Vậy $C(t) = C(0)e^{kt} = C_0e^{kt}$.	2.0
	(Lời giải 4b)	1.0
	Cho đơn vị của t là năm. Số lượng nguyên tử giảm đi phân nửa sau 5730 năm $\Longrightarrow C(5730) = \dfrac{1}{2}C(0)$ $\Longrightarrow C(0)e^{5730k} = \dfrac{1}{2}C(0)$ $\Longrightarrow e^{5730k} = \dfrac{1}{2}$ $\Longrightarrow 5730k = \ln\dfrac{1}{2}$ $\Longrightarrow k \approx -0,00012(1/\text{năm})$	1.0
	Một số nhận xét và hướng chấm điểm. 1. **Lưu ý.** Phương trình vi phân (PTVP) trên là PTVP tuyến tính cấp một; đồng thời đó cũng là PTVP dạng tách biến. Sinh viên không nên dùng phương pháp tách biến để giải vì nhiều vấn đề sẽ phát sinh. 2. Có nhiều cách ghi đơn vị ở dạng chưa thu gọn. 3. Đề có sai sót về đơn vị (trong đáp án này đã sửa lại cho đúng). Đơn vị của C đều tính theo **năm**. Nếu sinh viên chỉ ra k khác $-0,00012$ khi dùng đơn vị thời gian khác thì cũng tính đủ điểm. 4. Một số sai sót của sinh viên: • •	