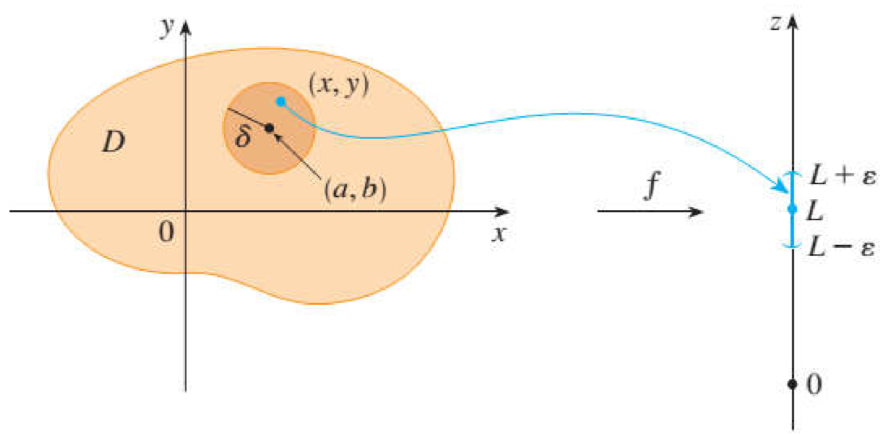
1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa và một số kết quả

Từ định nghĩa giới hạn hàm một biến, quá trình trừu tượng hóa dẫn đến khái niệm giới hạn cho hàm nhiều biến.

Định nghĩa 1. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ là một điểm tụ của $D \subset \mathbb{R}^m$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, $(B_\epsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap D \neq \emptyset$.

Định nghĩa 2 (Định nghĩa theo ngôn ngữ $\epsilon - \delta$). Cho $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ và $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ là một điểm tụ của $\mathbf{a}$. Ta nói $f(\mathbf{x})$ tiến về số thực L khi $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ nếu với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\mathbf{a}, \epsilon) > 0$ sao cho: nếu với mọi $x \in D : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta$ thì $|f(\mathbf{x}) - L| \leq \epsilon$.
Khi đó, ta ký hiệu $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$.

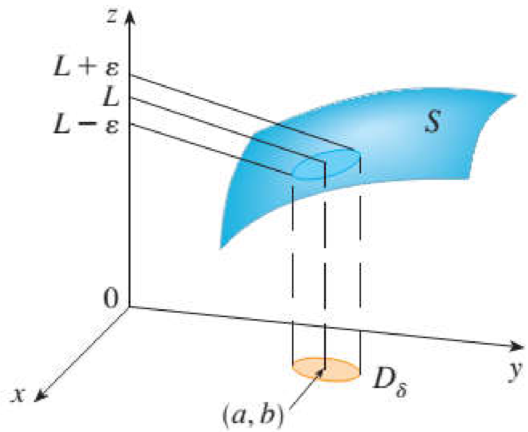


Hình 1: Minh họa giới hạn hàm 2 biến [?]

Định nghĩa 3 (Định nghĩa theo ngôn ngữ dãy). Cho $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ và $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ là một điểm tụ của D. Ta nói $f(\mathbf{x})$ tiến về số thực L khi $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ nếu mọi $\{x_n\} \subset D \setminus \{\mathbf{a}\}$: $\mathbf{x}_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{a}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = L$.
Khi đó, ta ký hiệu $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$.

Nhận xét: Hai định nghĩa 2 và 3 là tương đương nhau (đây là một kết quả quan trọng của giải tích).

Hệ quả 1. Giả sử giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi $(x, y) \to (a, b)$ theo đường cong C_1 là L_1 và giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi $(x, y) \to (a, b)$ theo đường cong C_2 là L_2. Nếu $L_1 \neq L_2$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ không tồn tại.



Hình 2: Minh họa giới hạn hàm 3 biến [?]

Lưu ý. Nếu $L_1 = L_2$ thì ta không đủ cơ sở để kết luận giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ có tồn tại hay không. Trong trường hợp này, ta cần tìm một giải pháp khác.

Hệ quả 2. Giả sử giới hạn của hàm $f(x,y)$ khi $(x,y) \to (a,b)$ theo họ đường cong C_k (trong D) là L. Nếu L phụ thuộc vào k thì $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ không tồn tại.

Lưu ý. Nếu L không phụ thuộc vào k thì không đủ cơ sở để kết luận giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ có tồn tại hay không. Trong trường hợp này, ta cần tìm một giải pháp khác.

Hệ quả 3. Cho $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Giả sử giới hạn của hàm $f(x,y)$ khi $(x,y) \to (a,b)$ theo đường cong (C_1) (trong D) là L_1 và giới hạn của hàm $f(x,y)$ khi $(x,y) \to (a,b)$ theo đường cong (C_2) (trong D) là L_2. Nếu $L_1 \neq L_2$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ không tồn tại.

Nhận xét 1. Giới hạn của hàm $f(x,y)$ khi $(x,y) \to (a,b)$ theo đường cong (C) (trong D) là L được hiểu một cách chính xác: Với E được gọi là vết của đường cong, nghĩa là $E = \{(x,y) : (x,y) \in (C)\} \subset D$, ta xét hàm f hạn chế trên E, $f_{|E} : E \to \mathbb{R}$; ta giả sử (a,b) là điểm tụ của E; khi đó, giới hạn của hàm $f(x,y)$ khi $(x,y) \to (a,b)$ chính là $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_{|E}(x,y) = L$.

Thí dụ 1 (Thí dụ về $f_{|E}$).

Thí dụ, xét đường cong $(C) : y = x^2, x \neq 0$, $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ và $E = \{(x,y) \in C\}$. Khi đó, $f_E(x,y) = f(y^2, y) = \dfrac{y^2.y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \dfrac{1}{2}$.

Hệ quả 4. Cho $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và (a,b) là điểm tụ của D. Giả sử $\mathbf{u}_n = (x_n, y_n)$, $\mathbf{v}_n = (x'_n, y'_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$ thỏa $\{\mathbf{u}_n\}, \{\mathbf{v}_n\} \subset D$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{u}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{v}_n = (a,b)$. Khi đó, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ không tồn tại nếu **một trong hai** điều sau xảy ra

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{u}_n)$ không tồn tại.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{u}_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{v}_n)$.

Lưu ý. Khi $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{u}_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{v}_n)$, ta không thể kết luận giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ có tồn tại hay không. Trong trường hợp này, ta cần tìm một giải pháp khác.

Định lý 1 (Định lý kẹp (Squeeze Th.) hay còn gọi là Sandwich/ Pinching theorem). Giả sử $f, g, h : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ và $\mathbf{a} \in D$ là điểm tụ của D thỏa các điều kiện

(a) $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x}$ trong $D \cap B_r^*(a)$, với $B_r^*(a) = B_r^*(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$ là quả cầu thủng tâm $\mathbf{a}$ bán kính r,

(b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = L$.

Khi đó $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ tồn tại và $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = L$.

Định lý kẹp có thể phát biểu ở một dạng khác:

Định lý 2. Giả sử $f, g : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a}$ là điểm tụ của D, và $L \in \mathbb{R}$ thỏa các điều kiện

(a) $|f(\mathbf{x}) - L| \leq g(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x}$ trong một lân cận của $\mathbf{a}$.

(b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$.

Khi đó $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ tồn tại và $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$.

Định lý 3. Giả sử $f, g : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a}$ là điểm tụ của D, thỏa các điều kiện

(a) $|f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x}$ trong một lân cận của $\mathbf{a}$.

(b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$.

Khi đó $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ tồn tại và $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$.

VÍ DỤ 1 Tính các giới hạn sau (nếu tồn tại):

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{y}$.

2 Góc nhìn đa chiều cho một bài toán

2.1 Bảy kỹ thuật chứng minh giới hạn không tồn tại (1)

Bài toán 1

Tính giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Việc giải bài toán không phải là vấn đề chính ở đây. Vấn đề ở đây là các kỹ thuật khác nhau ở mỗi lời giải cho bài toán có thể áp dụng để tìm kiếm lời giải cho những bài toán khác.

Đặt $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ với $(x,y) \in D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Lời giải 1 (Sử dụng đường cong tham số- Sử dụng Hệ quả 3).

Cho (x,y) tiến về $(0,0)$ dọc theo đường cong phụ thuộc tham số k: $(C_k) : y = kx$ (nằm trong trong D).

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.kx}{x^2+(kx)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k}{1+k^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$ phụ thuộc vào k.

Do đó, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

■

Nhận xét 8. Họ đường cong $(C_k) : y = kx$ là họ đường cong cơ bản, đơn giản mà ta nên nghĩ đến đầu tiên. Ngoài ra việc sử dụng đường cong này để chỉ ra giới hạn trên không tồn tại, nhiều hướng tiếp cận khác có thể sử dụng để chỉ ra giới hạn không tồn tại: giới hạn tỷ số hai hàm thuần nhất (xem trang 43), Định lý Sertöz (Định lý 11). Từ Định lý 10, ta cũng nhận thấy được nguồn gốc ý tưởng chọn họ đường cong $(C_k) : y = kx$ trong bài toán này. Hơn nữa, hàng loạt bài tập có thể giải quyết theo hướng này được đưa ra ở các trang 46 và 47.

Ngoài họ đường cong đơn giản $(C_k) : x = ky^2$, ta có thể chọn các đường cong khác phức tạp hơn như $y = k\sin x$, $y = \sin(kx)$, hoặc $y = \dfrac{e^{kx}-1-x}{x}$, ... để chỉ ra giới hạn không tồn tại. Các đường cong này được đưa ra để minh họa tính đa dạng cho việc lựa chọn đường cong. Khi tính toán, ta không nên sử dụng các đường cong phức tạp này.

Lời giải 2 (Sử dụng Định lý Sertöz - Định lý 11)

■

Lời giải 3 (Sử dụng 2 đường cong- Sử dụng Hệ quả 3) Cho (x,y) tiến về $(0,0)$ dọc theo 2 đường cong: $(C_1) : y = 0$, và $(C_2) : y = x$ (nằm trong trong D) Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$. Vì thế, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

■

Lời giải 4 (Chọn 2 dãy- Sử dụng hệ quả 4)

Xét $\{\mathbf{u}_n\} := \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$, $\{\mathbf{v}_n\} := \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\} \subset D$ thỏa $\mathbf{u}_n \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ và $\mathbf{v}_n \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$.

Hơn nữa, $f(\mathbf{u}_n) = f\left(0, \frac{1}{n}\right) = 0$ và $f(\mathbf{v}_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{u}_n) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{v}_n)$. Suy ra giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

■

Nhận xét 9. Vì sao ta chọn các dãy trên? Có thể ta trả lời: vì chúng là các dãy đơn giản, cơ bản nhất. Tuy nhiên, đối với những bài giới hạn khó, các dãy như thế không thể dùng để chỉ ra giới hạn không tồn tại. Ngoài ra cơ sở lựa chọn dãy như vậy có thể được giải thích nhờ vào **Lời giải 1.** Chính vì thế, ta nên tiếp cận theo **Lời giải 1** thay vì lời giải này.

Lời giải 5.

Xét họ đường cong tham số $(C_k): x = t^a, y = kt^b, t \to 0$ hoặc $t \to 0^+$ (tùy thuộc $a, b \in \mathbb{N}$ hay $\mathbb{R}^+$), trong đó a và b được chọn thích hợp sau. Khi đó, $f\left(kt^a, t^b\right) = \frac{kt^{a+b}}{t^{2a}+k^2t^{2b}}$.

Ta chọn a, b thỏa $a + b = \min\{2a, 2b\}$ (?, tìm số hạng có lũy thừa bé nhất để giản ước t^α ở tử và mẫu). Khi đó, ta có $a = b$ và $f\left(kt^a, t^b\right) = \frac{k}{k^2+1}$. Suy ra, $\lim\limits_{t\to 0} f\left(kt^a, t^b\right)$ phụ thuộc vào k. Suy ra giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại. ■

Lời giải 6.

Trong tọa độ cực, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, với $\theta \in [0, 2\pi)$.

Ta có $\lim\limits_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$ phụ thuộc vào θ. Do đó, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

■

Nhận xét.

(a) Dùng tọa độ cực sẽ tương tự dùng đường $y = kx$ với $k = \tan\theta, \cos\theta \neq 0$, là hệ số góc của đường thẳng.

(b) Kỹ thuật này thành công khi tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^4+y^4}$. Vì $x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2$ nên ta chọn $x^2 = r\cos\theta, y^2 = r\sin\theta$, với $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$; chọn $x = \sqrt{r\cos\theta}, y = \sqrt{r\sin\theta}$.

Lời giải 7.

Xét đường cong $(C_k): \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{k}, k \neq 0$, với hi vọng có thể thiết kế đường cong đảm bảo $(x,y) \to (0,0)$. Đây là hướng tiếp cận để xử lý một số bài toán giới hạn khó (bởi vì không thể sử dụng họ các đường cong thông dụng: $y = kx, y = kx^n, \ldots$, xem trang 60). Xem xét đường cong (C_k) như phương trình bậc hai theo y, $x^2 - kxy + y^2 = 0$, ta có $y = \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}x \vee x = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}y, k^2 \geq 4$.

Như vậy, ta có thể chỉ ra giới hạn không tồn tại nhờ vào họ đường cong $(C_k): y = \dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}x := \ell x, k \geq 2$. Họ đường cong này cũng chính là họ đường cong xuất hiện trong **Lời giải 1.**

■

Nhận xét 10. Một số bài toán có thể tiếp cận theo hướng **Lời giải 7** bài toán trên:

Bài toán 2 **Thiết kế đường cong tham số "thông minh"**

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8-4}$.

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2-y}$.

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy+x-1}{\sqrt{x^2+y^2}-1}$.

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^6}$.

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{2y^2-2}{x^2+2(y+1)^2}$.

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x+y}$.

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^4}{x+y^2}$.

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$.

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2+x+y^2}$.

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^3}$.

Hướng dẫn cho $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x+y}$ **:** Cho (x,y) tiến về $(0,0)$ theo đường cong $2x+y=kx^2$ hay $y=kx^2-x$.

Hướng dẫn khác cho $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x+y}$ **:**

Chọn $(x,y)\to(0,0)$ sao cho $\dfrac{x^2+y^2}{2x+y}=k$, nên ta chọn $x=k-\sqrt{k^2+ky-y^2}$ (chọn $k>0, y\in(0,k)$ và cho $y\to 0^+$).

Hướng dẫn cho $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ **:** $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$, cho (x,y) tiến về $(0,0)$ theo đường cong $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=k$, hay $y=\dfrac{x}{kx-1}$ và $x\to 0$.

Hướng tiếp cận thứ hai để tìm kiếm lời giải: cho (x,y) tiến về $(0,0)$ theo đường cong $\dfrac{xy}{x+y}=k \iff y=\dfrac{kx}{x-k}$.

Hướng dẫn cho $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8-4}$ **:** $\dfrac{xy^4}{x^2+y^8-4}=\dfrac{x}{(x+2)\frac{x-2}{y^4}+y^4}$. Cho (x,y) tiến về $(0,0)$ theo đường cong $\dfrac{x-2}{y^4}=k$. (Các biến đổi trên nhằm 'giảm' các phần vô định!)

2.2 Bảy kỹ thuật chứng minh giới hạn không tồn tại (3)

Bài toán 3 **Đề thi CK, 2016-2017**

Tính giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}$.

Đặt $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ với $(x,y) \in D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Lời giải 1 (Sử dụng Định lý Sertöz). Giới hạn thỏa điều kiện Định lý Sertöz. Vì $\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} < 1$ nên giới hạn không tồn tại.

■

Lời giải 2 (Sử dụng họ đường cong tham số).

Cho (x,y) tiến về $(0,0)$ dọc theo đường cong phụ thuộc tham số k: $(C_k) : x = ky$, $k > 0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} f(x,kx) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2k}{(1+k^4)x} = \infty$, và $\lim\limits_{x\to0^-} f(x,kx) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{2k}{(1+k^4)x} = -\infty$. Suy ra, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}$ không tồn tại.

■

Lời giải 3 (Sử dụng họ đường cong tham số).

Xét đường cong $(C_k) : \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4} = \dfrac{1}{k}, k \neq 0$. Ta có thể xét đường cong $y = \sqrt{kx + x\sqrt{k^2-x^2}}, k > 0, x \in (0,$

Khi đó, $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x, \sqrt{kx + x\sqrt{k^2-x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k}$ phụ thuộc vào k.

Do đó, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}$ không tồn tại.

■

Lời giải 4 (Sử dụng họ đường cong đặc biệt).

Cho (x,y) tiến về $(0,0)$ dọc theo đường cong phụ thuộc tham số k: $(C_k) : x = ky^2$.

Ta có $\lim\limits_{y\to0} f(ky^2,y) = \lim\limits_{y\to0} \dfrac{2ky^4}{k^2y^8+y^4} = \lim\limits_{y\to0} \dfrac{2k}{k^2y^4+1} = 2k$ phụ thuộc tham số k. Suy ra, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}$ không tồn tại.

■

Lời giải 5 (Sử dụng một đường cong đặc biệt).

Cho (x,y) tiến về $(0,0)$ dọc theo đường cong: $(C) : y = x$.

Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} f(x,x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$, và $\lim\limits_{x\to0^-} f(x,kx) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$. Suy ra, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}$ không tồn tại.

■

Lời giải 6 (Sử dụng 2 đường cong).

Cho (x,y) tiến về $(0,0)$ dọc theo 2 đường cong: $(C_1) : y = 0$, và $(C_2) : x = y^2$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^4} = 0$ và $\lim\limits_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2y^2y^2}{y^8+y^4} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2}{y^4+1} = 2$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim\limits_{y\to 0} f(y^2,y)$. Vì thế, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}$ không tồn tại.

■

Lời giải 7 (Chọn 2 dãy).

Xét $\{\mathbf{u}_n\} := \left\{\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$, $\{\mathbf{v}_n\} := \left\{\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)\right\} \subset D$ thỏa $\mathbf{u}_n \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ và $\mathbf{v}_n \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$.

Hơn nữa, $f(\mathbf{u}_n) = f\left(0, \dfrac{1}{n}\right) = 0$ và $f(\mathbf{v}_n) = f\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{2}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^8}+\left(\frac{1}{n}\right)^4} = \dfrac{2}{\frac{1}{n^4}+1}$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{u}_n) = 0 \neq 2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{v}_n)$. Suy ra giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}$ không tồn tại.

■

2.4 Sáu lời giải - năm kỹ thuật để xác định hàm squeeze cho một bài toán

Bài toán 5

Tính giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}.$$

Có thể nói tất cả các lời giải bên dưới đều sử dụng Định lý kẹp. Bằng các kỹ thuật đánh giá khác nhau để tìm ra 'hàm kẹp'. Các lời giải cồng kềnh được 'đẩy' xuống dưới (lời giải được sắp theo thứ tự phức tạp dần).

Đặt $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$

Lời giải 1.

Với $(x,y) \neq (0,0)$, dùng bất đẳng thức trị tuyệt đối và bất đẳng thức $0 \le \dfrac{a^2}{a^2+b^2} \le 1, a, b \in \mathbb{R}$, ta thu được

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}\right| &= \left|\frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} \\ &\le \frac{x^2}{x^2+y^2}.x^2 + \frac{y^2}{x^2+y^2}.|y| \\ &\le x^2+|y|.\end{aligned}$$

Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+|y|) = 0.$

Như vậy, theo Định lý kẹp, ta nhận được $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2} = 0.$

Lời giải 2. (Tìm hàm kẹp bằng tọa độ cực)

Dùng tọa độ cực $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\cos^4\theta + r\sin^3\theta.$

Vì $|\sin\theta|, |\cos\theta| \le 1$ nên

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \le r^2 + r = x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}, \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Do đó, ta thu được

$$|f(x,y)| \le x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}\,\forall (x,y) \neq (0,0).$$

Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0.$

Do đó, theo Định lý kẹp, ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2} = 0.$

Lời giải 3. (Dùng bất đẳng thức BCS để làm trội tử)

Với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, áp dụng BĐT BCS, ta nhận được

$$\begin{aligned}\left|x^4 + y^3\right| &= \left|x^2.x^2 + y^2.y\right| \leq \sqrt{(x^4 + y^4)(x^4 + y^2)} \\ &\leq (x^2 + y^2)\sqrt{x^4 + y^2}.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\left|\frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}\right| \leq \sqrt{x^4 + y^2}, \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^4 + y^2} = 0.$

Do đó, theo Định lý kẹp, ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$

Lời giải 4.

Với $(x, y) \neq (0, 0)$, ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}\right| &= \left|\frac{(x^2(x^2 + y^2)) + y^2\,(y - x^2)}{x^2 + y^2}\right| \leq x^2 + \left|\frac{y^2\,(y - x^2)}{x^2 + y^2}\right| \\ &\leq x^2 + \frac{y^2}{x^2 + y^2}.\left|y - x^2\right| \leq x^2\left| + \right|y - x^2|.\end{aligned}$$

Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + |y - x^2|\right) = 0.$

Do đó, theo Định lý kẹp, ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$

Lời giải 5.

Với $(x, y) \neq (0, 0)$,ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}\right| &= \left|\frac{(x^4 - y^4) + (y^3 + y^4)}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|x^2 - y^2\right| + \left|\frac{y^2\,(y + y^2)}{x^2 + y^2}\right| \\ &\leq \left|x^2 - y^2\right| + \frac{y^2}{x^2 + y^2}.\left|y - y^2\right| \leq \left|x^2 - y^2\right| + \left|y + y^2\right|.\end{aligned}$$

Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left|x^2 - y^2\right| + \left|y + y^2\right|\right) = 0.$

Do đó, theo Định lý kẹp, ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$

3. **Nhận xét 11 (Một số bình luận).** Các lập luận sau **SAI**:

   (a) Vì $\lim\limits_{x\to 0} f(x, kx) = 0$ (không phụ thuộc k) nên $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$

   (b) Vì $\lim\limits_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$ (không phụ thuộc θ) nên $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$

Lời giải 6 (Dùng Định lý Sertöz).

Giới hạn không thể áp dụng Định lý Sertöz. Tuy nhiên, ta có thể chỉ ra sự tồn tại và tính giới hạn vì các giới hạn các giới hạn thành phần $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2 + y^2}$ đều tồn tại và đều bằng 0 (nhờ Định lý Sertöz). Suy ra giới hạn cần tìm tồn tại và bằng 0.

2.5 Năm lời giải- bốn kỹ thuật để xác định hàm squeeze cho một bài toán

Thí dụ 5. Tìm giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$.

Nhận xét:

(a) Giới hạn dọc theo đường cong $y = kx, k \neq 0$, bằng 0.

(b) Hiển nhiên, giới hạn dọc theo đường cong $y = kx^n, k \neq 0, n \geq 1$, bằng 0.

Từ đó, ta thử cố gắng dùng định lý kẹp để chứng minh giới hạn của hàm khi $(x,y) \to (0,0)$ bằng 0.

Lời giải 1 (Dùng BĐT Cauchy-lời giải cần nhiều kỹ thuật nhất): Làm trội cho tử sổ để làm xuất hiện đại lượng giống mẫu. Điều đó giúp triệt tiêu mẫu. Với $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| &= \frac{|x-y|\left(x^2+xy+y^2\right)}{x^2+y^2}\\ &\leq \frac{|x-y|x^2+\frac{x^2+y^2}{2}+y^2}{x^2+y^2} = \frac{3}{2}|x-y|.\end{aligned}$$

Lời giải 2 (Đánh giá trội tử): Với $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| &\leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\\ &\leq \frac{x^2}{x^2+y^2}.|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}.|y|\\ &\leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}.|x| + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}.|y| = |x|+|y|.\end{aligned}$$

Lời giải 3 (Dùng bất đẳng thức BCS): Làm trội cho tử sổ để làm xuất hiện đại lượng giống mẫu. Điều đó giúp triệt tiêu mẫu. Với $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2}\\ &\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Lời giải 4 (Dùng tọa độ cực để tìm ra đánh giá):

Đặt $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$, với $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Với $(x,y) \neq 0$, dùng tọa độ cực với $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r > 0$, ta có

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\left(\cos^3\theta - \sin^3\theta\right).$$

Từ đó và BĐT $|\sin\theta|, |\cos\theta| \le 1$, ta dễ dàng thu được đánh giá sau

$$f(x,y) \le 2r = 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Rõ ràng, nhờ tọa độ cực, chúng ta có thể tìm ra một **squeezing function** thích hợp. Ta có thể tìm được **squeezing function** hơn so với Lời giải 1, Lời giải 2 và Lời giải 3.

Lời giải 5 (Dùng Định lý Sertöz).

Giới hạn không thể áp dụng Định lý Sertöz. Tuy nhiên, ta có thể chỉ ra sự tồn tại và tính giới hạn vì các giới hạn các giới hạn thành phần $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$ đều tồn tại và đều bằng 0 (nhờ Định lý Sertöz). Suy ra giới hạn cần tìm tồn tại và bằng 0.

2.6 Sáu lời giải - năm kỹ thuật để xác định hàm squeeze cho một bài toán

Thí dụ 6. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (nếu tồn tại).

Đặt $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1. **Hướng 1** (BĐT Cauchy)

   Ta có
   $$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\ \forall (x,y) \ne (0,0).$$

   Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0$. Do đó, theo Định lý kẹp, ta thu được
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

2. **Hướng 2** (Làm trội tử)

   Ta có
   $$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.|y| = |y|\ \forall (x,y) \ne (0,0).$$

   Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$. Do đó, theo Định lý kẹp, ta thu được
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

   Nhận xét: Tương tự vậy, ta cũng thu được một cách đánh giá khác $|f(x,y)| \le |x|\ \forall (x,y) \ne (0,0)$.

3. **Hướng 3** (Tìm hàm kẹp bằng tọa độ cực)

   Dùng tọa độ cực $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\theta\cos\theta$. Vì $|\sin\theta|, |\cos\theta| \le 1$ nên $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \le r = \sqrt{x^2+y^2}$. Do đó, ta thu được

   $$|f(x,y)| \le \sqrt{x^2+y^2}\,\forall (x,y) : x \ne 0.$$

   Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$. Do đó, theo định lý kẹp, ta có

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

4. **Hướng 4** (Làm 'giảm' mẫu 2) Từ BĐT $x^2+y^2 \ge 2|xy| > 0\forall x,y : xy \ne 0$, ta thu được

   $$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|xy|}{\sqrt{2|xy|}} = \frac{|xy|}{\sqrt{2}}\forall (x,y) : xy \ne 0.$$

   Và khi $(x,y) \ne (0,0) : xy = 0$, ta có $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0 \le 0 = \frac{|xy|}{\sqrt{2}}$. Suy ra,

   $$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|xy|}{\sqrt{2}}\forall (x,y) \ne (0,0).$$

   Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{2}} = 0$. Do đó, theo định lý Sandwich, ta có

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

5. **Hướng 5** (Làm 'giảm' mẫu 2)

   $$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}} = |y|\forall (x,y) : x \ne 0.$$

   Suy ra,

   $$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le |y|\forall (x,y) \ne (0,0).$$

   (Bất đẳng thức được 'mở rộng' vì với $(x,y) = (0,y), y \ne 0$, $VT = 0 \le |y| = VP$.) Hơn nữa, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$. Do đó, theo định lý Sandwich, ta có

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

6. **Hướng 6** Dùng Định lý Sertöz cho $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)]^2$.)

   Xét $[f(x,y)]^2 = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Áp dụng Định lý Sertöz, ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)]^2 = 0$. Do đó, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Bài toán 6 **Một số bài tập 'tương tự'**

Tính các giới hạn sau (nếu tồn tại). Nếu không tồn tại thì giải thích lý do.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+\sin(y^3)}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^4+y^3\right)}{x^2+y^2}$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y^5}{x^2+y^2}$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$.

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x^2+y^3}{x^2+y^2}$.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^34+\sin(y^2)}{2x^2+y^2}$.

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x-\sin y}{x+y}$.

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x-y}{x+y}$.

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x-y\right)}{x+y}$.

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2)-y}{x+y}$.

Bài toán 7

Tính giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{x^2y^4}{x^2+y^4}} = \sqrt{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^2+y^4}}.$$

Sử dụng Định lý Sertöz - Định lý 11, ta nhận được $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^4} = 0$. Từ nhận xét này, ta có thể viết lại lời giải thông qua định lý kẹp.

Bài tập tương tự.

Bài toán 8

Tính giới hạn

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^4}$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|x|+|y|}$.