Bài toán 285

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{khi } x < 0, \\ 3 - x & \text{khi } 0 \leq x < 3, \\ (x-3)^2 & \text{khi } x > 3. \end{cases}$

Khảo sát các giới hạn $\lim_{x \to 0} f(x)$, $\lim_{x \to 3} f(x)$ và $\lim_{x \to 2} f(x)$. Tính giới hạn nếu tồn tại.

Bài toán 286

Cho hàm số $q(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{for} \quad x < -3 \\ x^2 + x & \text{for} \quad -3 \leq x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{for} \quad x \geq 1. \end{cases}$

(a) Khảo sát sự liên tục của q tại mỗi $a \in \mathbb{R}$.

(b) Khảo sát sự liên tục của q trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 23 Cho bộ hai số $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ và hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Xét hai giới hạn

(a) Tìm giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

(b) Tìm giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Hãy đưa ra cơ sở lý thuyết rõ ràng để thấy mối liên hệ giữa hai giới hạn trên.

Bài toán 24 Tìm giới hạn (nếu tồn tại; nếu không tồn tại thì đưa ta giải thích) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x} \sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

Lời giải thích phải dựa trên cơ sở lý thuyết rõ ràng.

Bài toán 287 **Hàm số có liên tục trên $\mathbb{R}^2$ hay không**

Cho hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Hàm số có liên tục trên $\mathbb{R}^2$ hay không?

Bài toán 288 **Bài tập 29, 31, 33, 37, 38 page 900, section 14.2[Ste12]**

Tìm tất cả các điểm mà tại đó f liên tục trong mỗi trường hợp sau:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$;

(b) $f(x,y) = \arctan(x+\sqrt{y})$;

(c) $f(x,y) = e^{x^2y} + \sqrt{x+y^2}$;

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+e^{x-y}}$;

(e) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$;

(f) $f(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$;

(g) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-4\right)$;

(h) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{nếu} (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{nếu} (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(j) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Gợi ý (h&j).

(h) Tại $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, ta có $P(x,y) = x^2y^3, Q(x,y) = 2x^2+y^2$ là các hàm liên tục và $Q(x_0,y_0) \neq 0$ nên $\dfrac{P}{Q}$ liên tục tại (x_0,y_0). Suy ra f liên tục tại (x_0,y_0).

Tại $(x_0,y_0) = (0,0)$, ta có thể chỉ ra hàm liên tục tại đó vì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$(why?).
Tóm lại, tập hợp những điểm mà hàm liên tục tại đó là $\mathbb{R}^2$.

(j) Tại $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, ta có $P(x,y) = xy, Q(x,y) = x^2+xy+y^2$ là các hàm liên tục và $Q(x_0,y_0) \neq 0$ nên $\dfrac{P}{Q}$ liên tục tại (x_0,y_0). Suy ra f liên tục tại (x_0,y_0).

Tại $(x_0,y_0) = (0,0)$, ta có thể chỉ ra hàm không liên tục tại đó vì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ không tồn tại (why?).
Tóm lại, tập hợp những điểm mà hàm liên tục tại đó là $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Lưu ý. "Suy ra" ở lời giải trên là điều không đơn giản. Tuy nhiên, dừng lại ở chương trình môn học này, ta sẽ tạm chấp nhận lý luận ẩn phía sau đó.

VÍ DỤ 4 Cho bộ hai số thực $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ và hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{nếu} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{nếu} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Hãy tìm một hình tròn B tâm (x_0, y_0) với bán kính thích hợp sao cho hình tròn này không chứa điểm $(0,0)$. Tìm $f_{|B}$.

Bài toán 289 **Bài tập 2.2 [?]**

Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$ và $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ánh xạ thu hẹp $f_{|D}$ của f là ánh xạ được xác định: $f_{|D} : D \to \mathbb{R}$ và $f_{|D}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x} \in D$. Giả sử $\mathbf{x}_0$ là điểm tụ của D. Chứng minh rằng với mỗi , $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_{|D}(\mathbf{x})$ tồn tại khi và chỉ khi $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ tồn tại. Hơn nữa, khi các giới hạn tồn tại, ta có $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_{|D}(\mathbf{x})$.

Bài toán 290 **Bài tập 2.2 [?]**

Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$ và $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ánh xạ thu hẹp của $f_{|D}$ của f là ánh xạ được xác định: $f_{|D} : D \to \mathbb{R}$ và $f_{|D}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x} \in D$. Chứng minh rằng với mỗi $\mathbf{x}_0 \in D$, $f_{|D}$ **liên tục** tại $\mathbf{x}_0$ khi và chỉ khi f liên tục tại $\mathbf{x}_0$. Chứng minh giả thiết D mở không thể bỏ qua.

Bài toán 291 **Bài tập 2.14 [?]**

Cho $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và tập mở U trong $\mathbb{R}^2$ chứa trong D. Giả sử $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x} \in U$. Chứng minh rằng với mỗi $\mathbf{x}_0 \in U$, f **liên tục** tại $\mathbf{x}_0$ khi và chỉ khi g liên tục tại $\mathbf{x}_0$.

Bài toán 292

Cho D là tập mở trong $\mathbb{R}^2$ và $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ánh xạ thu hẹp $f_{|D}$ của f là ánh xạ được xác định: $f_{|D} : D \to \mathbb{R}$ và $f_{|D}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x} \in D$. Chứng minh rằng với mỗi $\mathbf{x}_0 \in D$, $f_{|D}$ **khả vi** tại $\mathbf{x}_0$ khi và chỉ khi f khả vi tại $\mathbf{x}_0$.