

Bài 7 (Thuần nhất- đồng bậc- thuần nhất hóa). Tìm giới hạn (nếu có). Nếu không tồn tại thì giải thích vì sao không tồn tại.

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{x^2 + 2y^2}.$$

$$3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x + y}.$$

$$4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$5) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

$$6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$7) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4}.$$

$$8) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^4 + 3y^4}.$$

$$9) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{2x^4 + y^4}.$$

$$10) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^3 y}{2x^4 + y^4}.$$

$$11) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}.$$

$$12) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2.$$

$$13) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + x^2 y^2 + y^4}.$$

$$14) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$15) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}.$$

$$16) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$17) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}.$$

$$18) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \frac{\pi x}{2x + y}.$$

$$19) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y}{x - 1}.$$

$$20) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y}{x + y - 1}.$$

$$21) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}.$$

$$22) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{xy + x - y - 1}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}.$$

$$23) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$24) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$25) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

$$26) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}.$$

$$27) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5y^4 \cos^2 x}{x^4 + y^4}.$$

$$28) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}.$$

$$29) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(x^2 + y^2)}{x^4 + y^4}.$$

$$30) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}.$$

$$31) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2}.$$

$$32) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x^2 - \sin y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$33) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - \sin^2 y}{x^2 + 2y^2}.$$

$$34) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4 + y^4}.$$

$$35) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \sqrt{xy}}{x + y}.$$

$$36) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

$$37) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^3 + y^3}.$$

$$38) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 - y^4}.$$

$$39) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}.$$

$$40) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

$$41) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}.$$

$$42) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 - y}.$$

$$43) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}.$$

$$44) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

$$45) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}.$$

$$46) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x^2 + y^2)}{x^2 + (x^2 + y^2)^2}.$$

$$47) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

$$48) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$$

$$49) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| + |y|}{x^2 + 5y^2}.$$

$$50) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y^2}.$$

$$51) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

$$52) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$53) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^4}.$$

$$54) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} (x^4 + y^2).$$

Gợi ý chung. Sử dụng các họ đường cong tham số đặc biệt $y = kx, x = ky, y = kx^n, x = ky^n, y = b + k(x - a), \dots$ để tìm chỉ ra giới hạn theo họ đường cong phụ thuộc tham số. Khi đó, giới hạn không tồn tại. Một số giới hạn đòi hỏi sử dụng họ đường cong phức tạp. Các họ đường cong phức tạp có thể tìm ra nhờ vào phiên bản 'thuần nhất hóa'.

Gợi ý cho giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Giới hạn không tồn tại vì giới hạn $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường cong $(C_k) : y = kx$ phụ thuộc vào k .

Gợi ý cho giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y}{x - 1}$.

Giới hạn không tồn tại vì giới hạn $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường cong $(C_k) : y = k(x - 1)$ phụ thuộc vào k .

Gợi ý cho giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$.

Giới hạn không tồn tại vì giới hạn $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường cong $(C_k) : x = ky^3$ phụ thuộc