CHƯƠNG I

MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

N là tập hợp các số nguyên không âm và **N* = N** \ {0}.

Z là tập hợp các số nguyên và **Z* = Z** \ {0}.

Q là tập hợp các số hữu tỉ và **Q* = Q** \ {0}.

R là tập hợp các số thực và **R* = R** \ {0}.

I. MA TRẬN:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $m, n \in \mathbf{N}^*$. *Một ma trận thực* A *có kích thước* $(m \times n)$ là một bảng số thực hình chữ nhật có m dòng và n cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ hay } A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \text{ với } a_{ij} \in \mathbf{R}\ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n).$$

Khi $m = n$ thì A là *ma trận vuông thực cấp* n và ta viết $A = = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$.

Ký hiệu : $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ là *tập hợp các ma trận thực* $(m \times n)$.

$M_n(\mathbf{R})$ là *tập hợp các ma trận vuông thực cấp* n.

Ví dụ:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 4}} = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} & 4 & -5 \\ \sqrt[3]{7} & 0 & -1 & \cos 8 \\ -2 & \ln 9 & 6 & -\pi \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R}) \text{ có } a_{14} = -5,\ a_{33} = 6 \text{ và } a_{21} = \sqrt[3]{7}.$$

$$B = \left(b_{ij}\right)_{1\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} 7 & -1/2 & 0 \\ -5/3 & 4 & -9 \\ 6 & -8 & 2/7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Q}) \text{ có } b_{13} = 0,\ b_{22} = 4 \text{ và } b_{32} = -8.$$

$C = (-9 \quad 4 \quad 0 \quad 7 \quad -1) \in M_{1\times 5}(\mathbf{Z}).$ $\quad D = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbf{N}).$

1.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> *Ma trận không* là ma trận có tất cả các hệ số bằng 0.

Ký hiệu ma trận không là $\mathbf{O}$ (hiểu ngầm kích thước) hoặc $\mathbf{O}_{m\times n}$ hoặc $\mathbf{O}_n$.

<u>Ví dụ:</u>

$$\mathbf{O}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R}) \quad \text{và} \quad \mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

1.3/ <u>CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG CHO MA TRẬN:</u>

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \ne j \le m$.

Có 3 hình thức *biến đổi sơ cấp trên dòng* cho ma trận:

a) Hoán vị dòng (i) với dòng (j). Ta ghi $(i) \leftrightarrow (j)$.

b) Nhân dòng (i) với số $c \in \mathbf{R}^*$. Ta ghi $(i) \to c(i)$.

c) Thế dòng (i) bằng [dòng (i) + c.dòng (j)] với số $c \in \mathbf{R}$. Ta ghi $(i) \to [\,(i) + c(j)\,]$.

Các phép biến đổi đảo ngược của các phép biến đổi sơ cấp trên dòng trên lần lượt là $(i) \leftrightarrow (j)$, $(i) \to c^{-1}(i)$ và $(i) \to [\,(i) - c(j)\,]$.

<u>Ví dụ:</u>

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -6 & -4 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ qua phép biến đổi } (1) \leftrightarrow (3).$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ -21/4 & 0 & 3/4 & -6 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \text{ qua phép biến đổi } (2) \to -\frac{3}{4}(2).$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ 12 & 9 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$ qua phép biến đổi $(3) \to [\,(3) + 2(2)\,]$.

Các phép biến đổi đảo ngược của các phép biến đổi sơ cấp trên dòng nói trên lần lượt là

$(1) \leftrightarrow (3)$, $(2) \to -\frac{4}{3}(2)$ và $(3) \to [\,(3) - 2(2)\,]$.

1.4/ <u>SỰ TƯƠNG ĐƯƠNG DÒNG:</u>

Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. Ta nói A và B là *tương đương dòng với nhau* nếu A có thể biến đổi thành B (và ngược lại) bằng một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Ký hiệu $A \sim B$ để chỉ A và B là *tương đương dòng với nhau*.

Quan hệ tương đương dòng là *một quan hệ tương đương* trên $M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

<u>Ví dụ:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -5 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 16 & 5 & 16 & 1 \end{pmatrix} = B.$$ Để ý A biến thành B qua các phép biến đổi sơ cấp trên dòng liên tiếp $(2) \to [\,(2) + 2(1)\,]$, $(1) \leftrightarrow (3)$, $(1) \to -\frac{1}{4}(1)$ và $(3) \to [\,(3) - 8(1)\,]$.

Như vậy B lại có thể biến thành A qua các phép biến đổi sơ cấp trên dòng liên tiếp $(3) \to [\,(3) + 8(1)\,]$, $(1) \to -4(1)$, $(1) \leftrightarrow (3)$ và $(2) \to [\,(2) - 2(1)\,]$. Vậy $A \sim B$.

II. <u>HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:</u>

2.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $m, n \in \mathbf{N}^*$. *Một hệ phương trình tuyến tính thực với* m *phương trình và* n *ẩn số* là một hệ phương trình có dạng như sau:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ với a_{ij}, b_i là các số thực cho trước $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$

và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (đều xuất hiện dưới *dạng bậc nhất*) là n ẩn số thực cần tìm.

Đặt $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$, $B = (b_i)_{1\le i\le m} \in M_{m\times 1}(\mathbf{R})$ và $X = (x_j)_{1\le j\le n} \in M_{n\times 1}(\mathbf{R})$ thì

hệ (*) được viết gọn thành các dạng $AX = B$ hoặc $(A \mid B)$ [hiểu ngầm ma trận X].

<u>Ví dụ:</u>

Xét hệ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 8x_3 - 7x_4 - 3x_1 = 0 \\ 9x_2 - 6x_3 + x_4 + 2x_1 = -4 \end{cases}$. Hệ trên được viết gọn thành $AX = B$ hoặc $(A \mid B)$ với

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 8 & -7 \\ 2 & 9 & -6 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

2.2/ <u>NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THỰC:</u>

Xét hệ phương trình tuyến tính thực $AX = B$ (*) đã nêu trong **(2.1)**.

Ta nói bộ $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ là *một nghiệm* của hệ (*) nếu tất cả các phương trình của hệ (*) đều được thỏa khi thế $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, … và $x_n = c_n$.

<u>Ví dụ:</u> Ta có $(x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 1)$ thỏa các phương trình của hệ dưới đây:

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -22 \\ -x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases}$. Do đó ta nói $(-2, 0, 3, 1)$ là một nghiệm của hệ đã cho.

2.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (*số lượng nghiệm* của một hệ phương trình tuyến tính thực).

Xét hệ phương trình tuyến tính thực $AX = B$.

Có đúng một trong 3 trường hợp sau xảy ra :

a) Hệ *vô nghiệm.* b) Hệ có *nghiệm duy nhất.* c) Hệ có *vô số nghiệm.*

Ví dụ:

a) Phương trình $0x = 5$ vô nghiệm. Phương trình $2x = -6$ có nghiệm duy nhất $x = -3$.

Phương trình $0x = 0$ có vô số nghiệm (x thực tùy ý).

b) Hệ $(-3x + 7y = 15 \;\&\; 9x - 21y = 4)$ vô nghiệm.

Hệ $(-3x + 7y = 15 \;\&\; 4x - 5y = -7)$ có nghiệm duy nhất $(x = 2, y = 3)$.

Hệ $(-3x + 7y = 15 \;\&\; 6x - 14y = -30)$ có vô số nghiệm với một ẩn tự do là x hoặc y.

Viết nghiệm : [x thực tùy ý, $y = (3x + 15) / 7$] hoặc [y thực tùy ý, $x = (7y - 15) / 3$].

2.4/ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (HPTTT ĐẲNG CẤP):

Xét hệ phương trình tuyến tính *thuần nhất* $AX = \mathbf{O}$ (có vế phải triệt tiêu).

Hệ này có ít nhất *một nghiệm tầm thường* là $(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0)$.

Do đó khi giải hệ, chỉ có đúng một trong hai trường hợp sau xảy ra :

a) Hệ có *nghiệm duy nhất* (chính là nghiệm tầm thường).

b) Hệ có *vô số nghiệm* (ngoài nghiệm tầm thường, hệ có vô số nghiệm không tầm thường)..

Ví dụ:

a) Hệ $(9x + 7y = 0 \;\&\; 4x - 5y = 0 \;\&\; 3x + 8y = 0)$ có nghiệm duy nhất là $(x = 0, y = 0)$.

b) Hệ $(5x + 8y - 4z = 0)$ có vô số nghiệm với hai ẩn tự do là (x, y) hoặc (x, z) hoặc (y, z). Ta ghi kết quả theo một trong ba dạng sau : [$x, y \in \mathbf{R}$, $z = \dfrac{5x+8y}{4}$] hoặc [$x, z \in \mathbf{R}$, $y = \dfrac{4z-5x}{8}$] hoặc [$y, z \in \mathbf{R}$, $x = \dfrac{4z-8y}{5}$].

III. PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

3.1/ MỆNH ĐỀ:

a) Nếu hai hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ và $CX = D$ có các ma trận $(A \mid B)$ và $(C \mid D)$ *tương đương dòng với nhau* thì hai hệ trên là *tương đương với nhau* (nghĩa là hai hệ trên có cùng *một tập hợp nghiệm*).

b) Suy ra trong quá trình giải một hệ phương trình tuyến tính, ta có thể *sử dụng tùy ý các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* mà không làm thay đổi tập hợp nghiệm của nó.

3.2/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ NGHIỆM DUY NHẤT:

Xét hệ phương trình tuyến tính với 4 ẩn số x, y, z và t :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & -16 & 26 \\ 0 & 1^* & -2 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -90 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1^* & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1^* & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array}\right) \end{array}.$$

Từ hệ sau cùng, ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $(x = 1, y = 2, z = -1, t = -2)$.

Bảng 1: $(2) \to [\ (2) + 2(1)\ ]$, $(3) \to (3) - 3(1)$, $(4) \to [\ (4) - 2(1)\ ]$.

Bảng 2: $(2) \to [(2) + (3)]$, $(1) \to [(1) - 2(2)]$, $(3) \to [(3) + 4(2)]$, $(4) \to [(4) + 7(2)]$.

Bảng 3: $(4) \to [(4) - (3)]$, $(3) \to -18^{-1}(3)$, $(1) \to [(1) - 7(3)]$, $(2) \to [(2) + 2(3)]$.

Bảng 4: $(4) \to 18^{-1}(4)$, $[(1) \to (1) + 2(4)]$, $[(2) \to (2) - 3(4)]$, $[(3) \to (3) + 2(4)]$.

3.3/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÔ NGHIỆM:

Xét hệ phương trình tuyến tính với 5 ẩn số x, y, z, t và u:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$: Ta thấyhệ vô nghiệm.

Bảng 1: (4) → [(4) – (1)], (1) → [(1) – (2)], (2) → [(2) – 2(3)], (3) → [(3) – (1)].

Bảng 2: (2) ↔ (3).

Bảng 3: (1) → [(1) – 2(2)], (3) → [(3) + 7(2)], (4) → [(4) + 3(2)].

Bảng 4: (4) → [(4) – 2^{-1}(3)].

3.4/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ VÔ SỐ NGHIỆM:

Xét hệ phương trình tuyến tính với 5 ẩn số x_1, x_2, x_3, x_4 và x_5:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & -2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1^* & -1 & -1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$: Ta thấy các cột (3) và (5) không biến đổi được.

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do là x_3 và x_5 như sau:

$x_3 = a$, $x_5 = b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $x_1 = (7b - 6a + 5)/6$, $x_2 = (6a - 5b - 5)/6$, $x_4 = (b + 2)/3$.

Bảng 1: (2) $\rightarrow$ [(2) – (1)], (3) $\rightarrow$ [(3) – 4(1)], (4) $\rightarrow$ [(4) – 2(1)].

Bảng 2: (3) $\rightarrow$ [(3) – 3(2)], (4) $\rightarrow$ [(4) + (2)], (2) $\rightarrow -2^{-1}$(2) , (1) $\rightarrow$ [(1) – (2)].

Bảng 3: (3) $\rightarrow 9^{-1}$(3), (4) $\rightarrow$ [(4) – 12(3)], (1) $\rightarrow$ [(1) + 2(3)], (2) $\rightarrow$ [(2) + (3)].

3.5/ <u>CÁC CỘT CHUẨN (có m DÒNG):</u>

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1^* \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ E_{m-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^* \end{pmatrix}.$$

3.6/ <u>PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN</u>

<u>(GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH)</u>:

Xét hệ phương trình tuyến tính thực (A | B) có m phương trình và n ẩn số.

Ta thực hiện các bước sau đây:

* Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để *xây dựng tuần tự các cột chuẩn* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ trong A (từ trái qua phải). Việc *chuẩn hóa các cột* phải tuân thủ các qui định sau :

- Khi xây dựng E_k, *không làm thay đổi* các cột $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$ đã có trước đó.
- Nếu cột đang xét không thể chuẩn hóa thành E_k thì xét qua *cột kế cận bên phải*.
- Sau khi xây dựng xong E_k, phải tiến hành ngay việc xây dựng E_{k+1}(nếu được).

* Quá trình chuẩn hóa các cột *sẽ kết thúc* khi *gặp sự mâu thuẫn* hoặc khi *đã chuẩn hóa xong cột cuối* của A mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*.

* Khi kết thúc quá trình chuẩn hóa các cột của A, có đúng 1 trong 3 trường hợp sau đây xảy ra:

a) Trường hợp 1: Ta gặp *sự mâu thuẫn* khi đang chuẩn hóa [nghĩa là gặp một dòng có dạng $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & | a \end{pmatrix}$ với a ≠ 0. Dòng này là hệ quả của hai dòng nào đó *có sự tỉ lệ không tương thích giữa vế trái và vế phải*]. Khi đó hệ *vô nghiệm*.

b) Trường hợp 2: Ta xây dựng được *n cột chuẩn liên tiếp* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ trong A mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*. Khi đó hệ *có nghiệm duy nhất* bằng cách dùng *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự *từ trên xuống dưới* của *hệ cuối cùng* trong quá trình chuẩn hóa để thấy lần lượt các ẩn *từ trái qua phải.*

c) Trường hợp 3: Ta chỉ xây dựng được *k cột chuẩn* $E_1, E_2, \ldots, E_k$ $(k < n)$ trong A *xen kẽ với* $(n - k)$ *cột khác không chuẩn hóa được* mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*. Khi đó hệ có *vô số nghiệm với* $(n - k)$ *ẩn tự do* như sau :

* Các ẩn ứng với *các cột không chuẩn hóa được* là *các ẩn tự do* lấy giá trị thực tùy ý.

* Các ẩn còn lại (ứng với *các cột chuẩn hóa được*) được tính theo các ẩn tự do dựa theo *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự *từ trên xuống dưới* của *hệ cuối cùng* trong quá trình chuẩn hóa.

3.7/ ĐIỀU KIỆN CHUẨN HÓA CỦA MỘT CỘT:

Ta muốn chuẩn hóa cột $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ thành $E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (số 1^* ở vị trí dòng k).

a) Nếu $u_k = u_{k+1} = \ldots = u_m = 0$ thì U không thể chuẩn hóa thành E_k .

(không sử dụng $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ để tạo 1^* cho E_k vì cần bảo toàn $E_1, E_2, \ldots,$ E_{k-1} đã có trước đó. Còn $u_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$ không thể tạo 1^* cho E_k được).

b) Nếu có ít nhất một hệ số $\neq 0$ trong các số $u_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$ thì U có thể chuẩn hóa thành E_k [hệ số $\neq 0$ tự chia cho chính nó để tạo 1^* cho E_k. Dùng 1^* đó để tạo các hệ số 0 ở các vị trí khác cho E_k. Nếu 1^* đó nằm ở dòng thứ j với $j \neq k$ thì ta hoán vị các dòng (j) và (k) với nhau].

Ví dụ:

a) Ta muốn chuẩn hóa các cột $U = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ và $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ thành E_4.

U không thể chuẩn hóa thành E_4 được (vì $u_4 = u_5 = u_6 = 0$).

V có thể chuẩn hóa thành E_4 được (vì có $v_5 = 7 \neq 0$) bằng các phép biến đổi

$(5) \to [(5) + 2(6)]$, $(1) \to [(1) - 2(5)]$, $(3) \to [(3) + 8(5)]$, $(6) \to [(6) + 3(5)]$, $(4) \leftrightarrow (5)$.

b) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm:

$$(A \mid B) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 4 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 9 & -5 \end{array}\right) \\ E_1 \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 4 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$: sự mâu thuẫn và hệ vô nghiệm.

Dòng (3) và (4) có sự tỉ lệ không tương thích ở vế trái và vế phải : $(4) \to [(4) + \frac{3}{2}(3)]$.

c) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính (3 ẩn x, y, z) có nghiệm duy nhất:

$$(A \mid B) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1^* & 0 & -\ln 3 \\ 0 & 0 & 1^* & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \end{array}$$: hệ có nghiệm duy nhất ($x = \sqrt{2}$, $y = -\ln 3$, $z = 4/9$).

d) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính (9 ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_9$) có vô số nghiệm:

$$(A \mid B) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1^* & 0 & -5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & -3 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & \sin 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & -4 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 6 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccccc} E_1 & E_2 & & & E_3 & & E_4 & E_5 & \end{array} \end{array}.$$

Các cột (3), (4), (6), (9) không chuẩn hóa được và hệ có vô số nghiệm với 4 ẩn tự do $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_6 = c$, $x_9 = d$, $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$, $x_1 = 5a - 8b - 7d$,

$x_2 = -2a + 3b - 9c + \sin 8$, $x_5 = 4c + d - \sqrt{3}$, $x_7 = \pi$ và $x_8 = -6d - \dfrac{4}{7}$.

3.8/ <u>VÍ DỤ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THỰC CÓ THAM SỐ:</u>

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính với 3 ẩn số x, y, z theo tham số thực m

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} E_1 & & \end{array} \end{array} (*).$$

Bảng 1: (2) → [(2) – (3)], (3) → [(3) – (1)], (4) → [(4) – m(1)].

a) Nếu $m = 1$ thì hệ tương đương với đúng một phương trình là $x + y + z = 1$.

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do ($y, z \in \mathbf{R}$, $x = 1 - y - z$).

b) Nếu $m \neq 1$, ta tiếp tục biến đổi hệ (*):

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{array}\right) \\ E_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & m \\ 0 & 1^* & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 2(1-m) & 1-m^2 \end{array}\right) \\ E_1 \; E_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x \;\; y \;\; z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-m)(m+3) \end{array}\right) \\ E_1 \; E_2 \; E_3 \end{array}.$$

Khi $m = -3$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x = y = z = -1)$.

Khi $1 \neq m \neq -3$ thì hệ vô nghiệm.

Bảng 1: $(3) \to [(3) + (2)]$, $(4) \to [(4) - (2)]$, $(2) \to (1 - m)^{-1}(2)$, $(1) \to [(1) - (2)]$.

Bảng 2: $(4) \to [(4) + 2(3)]$, $(3) \to (m - 1)^{-1}(3)$, $(1) \to [(1) - 2(3)]$, $(2) \to [(2) + (3)]$.

3.9/ <u>CÁC CỘT BÁN CHUẨN (có m DÒNG):</u>

Dạng tổng quát của các cột bán chuẩn có m dòng là

$$F_1 = \begin{pmatrix} a^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F_2 = \begin{pmatrix} b \\ c^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F_3 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f^* \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots ,\ F_{m-1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{m-1}^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } F_m = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ v_m^* \end{pmatrix} \text{ trong đó}$$

$a^*, c^*, f^*, \dots , u_{m-1}^*, v_m^*$ là các số thực tùy ý $\neq 0$ và

$b, d, e, \dots , u_1, u_2, \dots , u_{m-2}, v_1, v_2, \dots , v_{m-1}$ là các số thực tùy ý.

Các cột chuẩn (có m dòng) chính là các cột bán chuẩn (có m dòng) đặc biệt.

<u>Ví dụ:</u> Một số cột bán chuẩn có 5 dòng :

$$F_1 = \begin{pmatrix} -2^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{5}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F_4 = \begin{pmatrix} -\ln 6 \\ 0 \\ \sqrt[3]{4} \\ -4/7^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } F_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -e \\ 8/\sqrt{3} \\ 0 \\ \sin 9^* \end{pmatrix}.$$

3.10/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS (GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH):

Xét hệ phương trình tuyến tính thực $(A \mid B)$ có m phương trình và n ẩn số.

Phương pháp Gauss có *những sự tương tự nhất định* với phương pháp Gauss – Jordan nhưng ta xây dựng *các cột bán chuẩn* (thay vì *cột chuẩn*). Điều kiện để một cột *bán chuẩn hóa được* y hệt như điều kiện *chuẩn hóa được* (xem **3.7**).

Phương pháp Gauss được thực hiện cụ thể như sau :

* Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để *xây dựng tuần tự các cột bán chuẩn* $F_1, F_2, F_3, \ldots$ trong A (từ trái qua phải). Việc *bán chuẩn hóa các cột* phải tuân thủ các qui định sau :

  - Khi xây dựng F_k, *không làm thay đổi* các cột $F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}$ đã có trước đó.
  - Nếu cột đang xét không thể bán chuẩn hóa thành F_k thì xét qua *cột kế cận bên phải*.
  - Sau khi xây dựng xong F_k, phải tiến hành ngay việc xây dựng F_{k+1}(nếu được)

* Quá trình bán chuẩn hóa các cột *sẽ kết thúc* khi *gặp sự mâu thuẫn* hoặc khi *đã bán chuẩn hóa xong cột cuối* của A mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*.

* Khi kết thúc quá trình bán chuẩn hóa các cột của A, có đúng 1 trong 3 trường hợp sau đây xảy ra:

a) Trường hợp 1: Ta gặp *sự mâu thuẫn* [nghĩa là gặp một dòng có dạng $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad |a\right)$ với $a \neq 0$. Dòng này là hệ quả của hai dòng nào đó *có sự tỉ lệ không tương thích giữa vế trái và vế phải*]. Khi đó hệ *vô nghiệm*.

b) Trường hợp 2: Ta xây dựng được *n cột bán chuẩn liên tiếp* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ trong A mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*. Khi đó hệ *có nghiệm duy nhất* được xác định như sau: dùng *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự từ dưới lên trên của *hệ cuối cùng* trong quá trình bán chuẩn hóa để tính lần lượt các ẩn *từ phải qua trái* (dùng các ẩn *đã biết* để tính các ẩn *chưa biết*).

c) Trường hợp 3: Ta xây dựng được k *cột bán chuẩn* $F_1, F_2, \ldots, F_k$ $(k < n)$ trong A *xen kẽ với* $(n - k)$ *cột khác không bán chuẩn hóa được* mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*.

Khi đó hệ có *vô số nghiệm với* $(n - k)$ *ẩn tự do* được xác định như sau:

* Các ẩn ứng với *các cột không bán chuẩn hóa được* là *các ẩn tự do* lấy giá trị thực tùy ý.

* Các ẩn còn lại (ứng với *các cột bán chuẩn hóa được*) được tính theo các ẩn tự do bằng cách dùng *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự *từ dưới lên trên* của *hệ cuối cùng* trong quá trình bán chuẩn hóa để tính lần lượt các ẩn *từ phải qua trái* (dùng các ẩn *đã biết* để tính các ẩn *chưa biết*).

<u>Ví dụ:</u>

a) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất (các ẩn là x, y, z, t):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 4 & -12 & 18 \\ -2 & -5 & 7 & -6 & 38 \\ 6 & 0 & -3 & 20 & -14 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 24 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 41 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -23 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} F_1 & & & \end{array} \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & & \end{array} \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* & 6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array} \end{array}$$: hệ có nghiệm duy nhất như sau:

t = [6/(–6)] = –1, z = –9t – 5 = 4, y = [(4z – 2t – 24)/3] = –2, x = [(y – 5t + 3)/2 = 3].

Bảng 1: (2) → [(2) + 2(1)],   (3) → [(3) + (1)],   (4) → [(4) – 3(1)].

Bảng 2: (3) → [(3) + 2(4)],   (4) → [(4) + (2)].

Bảng 3 : (4) → [(4) – (3)].

b) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm (các ẩn là x, y, z, t):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 18 & 16 \\ 0 & -6 & -3 & -11 & -14 \end{array}\right) \\ F_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -5 \end{array}\right) \\ F_1 \;\; F_2 \end{array} \rightarrow$$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$: hệ vô nghiệm.

Bảng 1: (3) → [(3) + 2(2)], (1) → [(1) + 2(2)], (2) → [(2) + 2(1)], (4) → [(4) + 7(1)].

Bảng 2: (3) → [(3) – 4(2)],   (4) → [(4) + 3(2)].

Bảng 3 : (4) → [(4) + 2(3)].

c) Trường hợp hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm (các ẩn là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & -20 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 10 & 1 & -4 & 12 & -31 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 & -12 \end{array}\right) \\ F_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ F_1 \;\; F_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ F_1 \;\; F_2 \;\; F_3 \end{array}$$: các cột (4) và (5) không bán chuẩn hóa được.

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $x_4 = a$, $x_5 = b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $x_3 = (2a - b + 2) / 3$,

$x_2 = (x_3 - 2b - 7) / 2 = (2a - 7b - 19) / 6$, $x_1 = x_2 - 3x_3 + 2a + 4 = (2a - b - 7) / 6$.

Bảng 1: (2) $\rightarrow$ [(2) – 3(1)], (3) $\rightarrow$ [(3) + (4)], (4) $\rightarrow$ [(4) + 2(1)].

Bảng 2: (3) $\rightarrow$ [(3) – 5(2)], (4) $\rightarrow$ [(4) – 2(2)].

Bảng 3 : (3) $\rightarrow 2^{-1}$(3), (4) $\rightarrow$ [(4) – (3)].

IV. HẠNG CỦA MA TRẬN:

4.1/ DẠNG BẬC THANG VÀ DẠNG BẬC THANG RÚT GỌN CỦA MA TRẬN:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

a) Bán chuẩn hóa tối đa các cột của A, ta được ma trận $S_A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ (biến đổi Gauss). Trong S_A, các dòng không tầm thường (dòng $\neq \mathbf{O}$) nằm phía trên các dòng **O** và số hạng $\neq 0$ đầu tiên của các dòng chính là số hạng có đánh dấu * của *các cột bán chuẩn*. Ta nói S_A là *dạng bậc thang* của A hay *ma trận rút gọn theo dòng* của A. Dạng bậc thang S_A của A *không duy nhất.*

b) Chuẩn hóa tối đa các cột của A, ta được ma trận $R_A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ (biến đổi Gauss - Jordan). Trong R_A, các dòng không tầm thường (dòng $\neq \mathbf{O}$) nằm phía trên các dòng **O** và số hạng $\neq 0$ đầu tiên của các dòng chính là số 1* của *các cột chuẩn*. Ta nói R_A là *dạng bậc thang rút gọn* của A hay *ma trận rút gọn theo dòng từng bậc* của A. Dạng bậc thang R_A của A là *duy nhất*.

R_A là *một trường hợp đặc biệt* của S_A.

4.2/ HẠNG CỦA MA TRẬN:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và các dạng S_A và R_A của A.

Đặt r(A) = (hạng của A) = số dòng không tầm thường (dòng $\neq \mathbf{O}$) của S_A(hay R_A)

hay r(A) = (hạng của A) = số cột (bán) chuẩn hiện diện trong R_A (hay S_A).

Ta có $0 \le r(A) \le \min\{ m, n \}$.

Khi $A = \mathbf{O}_{m \times n}$ thì $r(A) = 0$. Khi $A \neq \mathbf{O}_{m \times n}$ thì $r(A) \ge 1$.

<u>Ví dụ:</u> Xét $A \in M_{4 \times 5}(\mathbf{R})$ như sau:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -16 & 32 \\ 3 & -1 & -4 & 13 & -24 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -10 & -10 & 16 & -45 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} F_1 & & & & \end{array} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} F_1 & F_2 & & & \end{array} \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2^* & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} F_1 & F_2 & & F_3 & \end{array} \end{array} = S_A \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & & & \end{array} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & & E_3 & \end{array} \end{array} = R_A.$$

Ta có $r(A) = 3$ vì S_A (hay R_A) có 3 dòng không tầm thường (3 dòng $\neq \mathbf{O}$).

Ta có $r(A) = 3$ vì R_A (hay S_A) có 3 cột (bán) chuẩn.

$0 \le r(A) = 3 \le \min\{ m = 4, n = 5 \} = 4$.

Bảng 1: $(2) \to [\,(2) + 2(1)\,]$, $(3) \to [\,(3) + (4)\,]$, $(4) \to [\,(4) + 3(1)\,]$.

Bảng 2: $(4) \to [\,(4) - 2(2)\,]$, $(2) \to -\,5^{-1}(2)$, $(3) \to [\,(3) - (2)\,]$.

Bảng 3 : $(4) \to [\,(4) + 3(3)\,]$.

Bảng 4 : $(1) \to [\,(1) + 3(2)\,]$, $(1) \to -\,(1)$.

Bảng 5 : $(1) \to [\,(1) + (3)\,]$, $(3) \to -2^{-1}(3)$, $(2) \to [\,(2) + (3)\,]$.

4.3/ <u>ĐỊNH LÝ KRONECKER – CAPELLI:</u>

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ có m phương trình và n ẩn số.

Đặt $\overline{A} = (A \mid B) \in M_{m \times (n+1)}(\mathbf{R})$. Ta gọi $\overline{A}$ là *ma trận bổ sung* của hệ $(A \mid B)$.

Ta có $r(A) = k \le n$ và $[\ r(\overline{A}) = r(A)$ hay $r(\overline{A}) = r(A) + 1\ ]$.

a) Nếu $r(\overline{A}) = r(A) + 1$ thì hệ $(A \mid B)$ *vô nghiệm*.

b) Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = n$ thì hệ *có nghiệm duy nhất*.

c) Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = k < n$ thì hệ *có vô số nghiệm* với *số ẩn tự do* là $(n - k)$.

Ví dụ:

a) Xem lại hệ $AX = B$ trong (**3.2**):

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \to (R_A \mid B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array}\right) \\ E_1\ E_2\ E_3\ E_4\qquad \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = n = 4$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) Xem lại hệ $AX = B$ trong (**3.3**):

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right) \to (S_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ F_1\ F_2\ \ F_3\qquad\qquad\quad F_4 \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$ nên hệ vô nghiệm.

c) Xem lại hệ $AX = B$ trong (**3.4**):

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \to (R_A \mid B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ E_1\ E_2\qquad E_3\qquad\qquad\qquad \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = k = 3 < n = 5$ nên hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là

$(n - k) = (5 - 3) = 2$.

d) Xem lại hệ AX = B trong (**3.8**) :

* Khi m = 1:

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to (R_A \mid B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{llll} E_1 & & & \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = k = 1 < n = 3$ nên hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là $(n - k) = (3 - 1) = 2$.

* Khi m = – 3:

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to (R_A \mid B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = n = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

* Khi $-3 \neq m \neq 1$:

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to (R_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-m)(m+3) \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$ nên hệ vô nghiệm.

e) Xem lại các hệ AX = B trong **Ví dụ** của (**3.10**):

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 4 & -12 & 18 \\ -2 & -5 & 7 & -6 & 38 \\ 6 & 0 & -3 & 20 & -14 \end{array}\right) \to (S_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* & 6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = n = 4$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array}\right) \to (S_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} F_1 & F_2 & F_3 & \quad & F_4 \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$ nên hệ vô nghiệm.

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & -20 \end{array}\right) \to (S_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} F_1 & F_2 & F_3 & & & \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = k = 3 < n = 5$ nên hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là

$(n - k) = (5 - 3) = 2.$
