CHƯƠNG III

ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG

I. ĐỊNH THỨC:

1.1/ KHÁI NIỆM: Với mỗi $A \in M_n(\mathbf{R})$, người ta xác định duy nhất *một giá trị thực* c_A gắn liền với A và gọi c_A là *định thức* (determinant) của A.

Ta ký hiệu $c_A = \det(A)$ hay $c_A = |\,A\,|$.

Giá trị $\det(A) = |\,A\,|$ thể hiện *tính khả nghịch* hoặc *không khả nghịch* của A.

Nếu $|\,A\,| \neq 0$ thì A *khả nghịch*. Nếu $|\,A\,| = 0$ thì A *không khả nghịch*.

1.2/ ĐỊNH THỨC MA TRẬN CẤP 1, 2, 3:

a) Nếu $A = (\,a\,) \in M_1(\mathbf{R})$ thì $|\,A\,| = a$.

b) Nếu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ thì A có *đường chéo xuôi* (\ ) là $\begin{array}{cc} a & \\ & d \end{array}$ và *đường chéo ngược* (/) là $\begin{array}{cc} & b \\ c & \end{array}$. Ta đặt $|\,A\,| = ad - bc$.

c) Nếu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ thì ta viết lại cột 1 và 2 bên cạnh A như

sau $\left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right)\begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array}$ để hình thành 6 *đường chéo* [3 *đường chéo xuôi* (\ )

$\begin{array}{ccc} a & & \\ & e & \\ & & i \end{array}$ $\begin{array}{ccc} b & & \\ & f & \\ & & g \end{array}$ $\begin{array}{ccc} c & & \\ & d & \\ & & h \end{array}$ và 3 *đường chéo ngược* (/) $\begin{array}{ccc} & & c \\ & e & \\ g & & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & & a \\ & f & \\ h & & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & & b \\ & d & \\ i & & \end{array}$].

Ta có qui tắc SARRUS tính định thức của A theo 6 *đường chéo* như sau:

$$|\,A\,| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

Ví dụ:

a) $A = (-\sqrt{6}) \in M_1(\mathbf{R})$ có $|A| = -\sqrt{6}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ có $|A| = (-8)2 - 7(-5) = 19$.

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ thì ta viết lại $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{matrix}$ và có

$|A| = [\,4.3(-6) + (-1).1.(-5) + 2(-2).2\,] - [\,2.3(-5) + 4.1.2 + (-1)(-2)(-6)\,]$

$= (-72 + 5 - 8) - (-30 + 8 - 12) = (-75) - (-34) = -41.$

1.3/ KÝ HIỆU:

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ với $n \geq 2$ và $1 \leq i, j \leq n$.

Đặt $A(i, j)$ là ma trận A *xóa dòng* (i) *và cột* (j), nghĩa là $A(i, j) \in M_{n-1}(\mathbf{R})$.

Ta nói $A(i, j)$ là *ma trận đồng thừa của* A *tại vị trí* (i, j).

Đặt $C_{ij}^{A} = (-1)^{i+j}\,|A(i, j)|$. Nếu không có sự ngộ nhận, ta viết gọn $C_{ij}^{A} = C_{ij}$.

Ta nói C_{ij}^{A} là *hệ số đồng thừa của* A *tại vị trí* (i, j).

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $A(2, 3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ và $C_{23}^{A} = C_{23} = (-1)^{2+3}\,|A(2, 3)| = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3$.

Ta có $A(3, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $C_{31}^{A} = C_{31} = (-1)^{3+1}\,|A(3, 1)| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$.

1.4/ ĐỊNH THỨC MA TRẬN CẤP n ($n \geq 2$):

Cho $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \leq i, j \leq n$.

$|A|$ được tính theo định thức của các ma trận đồng thừa [cấp $(n-1)$] của A

[*hình thức đệ qui* : định thức cấp n được tính theo các định thức cấp (n – 1)].

Ta có thể tính | A | theo *bất kỳ một dòng hay một cột nào* của A.

| A | được tính *theo dòng* (i) như sau :

$$| A | = a_{i1} C_{i1}^{A} + a_{i2} C_{i2}^{A} + \cdots + a_{in} C_{in}^{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}^{A} .$$

| A | được tính *theo cột* (j) như sau :

$$| A | = a_{1j} C_{1j}^{A} + a_{2j} C_{2j}^{A} + \cdots + a_{nj} C_{nj}^{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}^{A} .$$

<u>Ví dụ:</u>

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

| A | được tính theo dòng (1) như sau : $| A | = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$

$= 4(-1)^{1+1}| A(1, 1) | - (-1)^{1+2}| A(1, 2) | + 2(-1)^{1+3}| A(1, 3) |$

$= 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4(-20) + 17 + 2(11) = -41.$

| A | được tính theo cột (2) như sau : $| A | = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32}$

$= -(-1)^{1+2}| A(1, 2) | + 3(-1)^{2+2}| A(2, 2) | + 2(-1)^{3+2}| A(3, 2) |$

$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 17 - 3(14) - 2(8) = -41.$

1.5/ <u>NHẬN XÉT:</u>

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i, j \le n} \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le r, s \le n$.

Nếu $a_{rs} = 0$ thì $a_{rs} C_{rs}^{A} = 0$ mà không cần tính C_{rs}^{A} .

Như vậy ta sẽ tính | A | theo một dòng hay một cột nào đó *có số lượng hệ số bằng 0 là nhiều nhất*.

Ví dụ:

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le 4} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$ [dòng (2) có nhiều hệ số 0 nhất],

$B = A(2, 2) = \left(b_{ij}\right)_{1\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 7 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ [cột (3) có nhiều hệ số 0 nhất]

và $D = B(1, 3) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

Ta có $|A| = a_{22} C_{22}^{A} = -2|B| = -2b_{13} C_{13}^{B} = -2(-3)|D| = 6(-12) = -72$.

[| A | được tính theo dòng (2) và | B | được tính theo cột (3)].

1.6/ MỆNH ĐỀ:

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Nếu A có một dòng (hay một cột) nào đó *toàn hệ số 0* thì $|A| = 0$.

b) Nếu A có hai dòng (hay hai cột) nào đó *tỉ lệ với nhau* (đặc biệt *bằng nhau*) thì $|A| = 0$.

c) Nếu A là *ma trận tam giác trên* hoặc *dưới* (đặc biệt là *ma trận đường chéo*) thì $|A| = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ [tích các hệ số trên đường chéo chính (\ )].

d) $|A^t| = |A|$.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & 0 & x \\ b & 0 & y \\ c & 0 & z \end{vmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4(-3)(-2) = 24. \qquad \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 9.0.(-6) = 0.$$

Cho $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ và $A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $| A^t | = (aei + dhc + gbf) - (gec + ahf + dbi) = | A |$.

II. <u>ĐỊNH THỨC VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG VÀ CỘT CỦA MA TRẬN:</u>

2.1/ <u>CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN CỘT:</u>

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. Xét $1 \leq i \neq j \leq n$.

Có 3 hình thức *biến đổi sơ cấp trên cột* cho ma trận:

a) Hoán vị cột (i) với cột (j). Ta ghi (i)’ $\leftrightarrow$ (j)’.

b) Nhân cột (i) với số $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Ta ghi (i)’ $\rightarrow$ c(i)’.

c) Thế cột (i) bằng [cột (i) + c.cột (j)] với $c \in \mathbf{R}$.

Ta ghi (i)’ $\rightarrow$ [(i)’ + c(j)’].

Các phép biến đổi đảo ngược của các phép biến đổi sơ cấp trên cột trên lần lượt là (i)’ $\leftrightarrow$ (j)’, (i)’ $\rightarrow c^{-1}$(i)’ và (i)’$\rightarrow$ [(i)’ − c(j)’].

<u>**Ví dụ:**</u>

$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 4^* & 2 & -3^* & 5 \\ -1^* & 0 & 7^* & 8 \\ -6^* & 9 & -2^* & -4 \end{pmatrix}$ qua phép biến đổi (1)’ $\leftrightarrow$ (3)’.

$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -6^* & 4 & 5 \\ 7 & 0^* & -1 & 8 \\ -2 & -27^* & -6 & -4 \end{pmatrix}$ qua phép biến đổi (2)’ $\rightarrow$ −3(2)’.

$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 14^* & 5 \\ 7 & 0 & 15^* & 8 \\ -2 & 9 & -14^* & -4 \end{pmatrix}$ qua phép biến đổi sơ cấp trên cột

(3)’ $\rightarrow$ [(3)’ + 2(4)’].

Các phép biến đổi đảo ngược của các phép biến đổi sơ cấp trên cột nói trên lần lượt là (1)’ $\leftrightarrow$ (3)’, (2)’ $\to -\frac{1}{3}$(2)’ và (3)’ $\to$ [(3)’ – 2(4)’].

2.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \ne j \le n$.

Giả sử $A \to A'$ bằng phép biến đổi sơ cấp (i) $\leftrightarrow$ (j) [hoặc (i)’ $\leftrightarrow$ (j)’].

Khi đó $| A' | = - | A |$ (*đổi dấu*).

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $| A | = - 41$.

$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -5^* & 2^* & -6^* \\ -2^* & 3^* & 1^* \end{pmatrix}$[(2) $\leftrightarrow$ (3)] và $A \to A_2 = \begin{pmatrix} 2^* & -1 & 4^* \\ 1^* & 3 & -2^* \\ -6^* & 2 & -5 \end{pmatrix}$[(1)’ $\leftrightarrow$ (3)’].

Ta có $| A_1 | = - | A | = 41$ và $| A_2 | = - | A | = 41$.

b) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} a & c^* & b^* \\ d & f^* & e^* \\ g & i^* & h^* \end{pmatrix} \to C = \begin{pmatrix} g^* & i^* & h^* \\ d & f & e \\ a^* & c^* & b^* \end{pmatrix}$

do [(2)’ $\leftrightarrow$ (3)’] và [(1) $\leftrightarrow$ (3)]. Ta có $| C | = - | B | = - (- | A |) = | A |$.

2.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \le n$ và $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Giả sử $A \to A'$ bằng phép biến đổi sơ cấp (i) $\to$ c(i) [hoặc (i)’ $\to$ c(i)’].

Khi đó $| A' | = c.| A |$ (*bội c*).

<u>Ví dụ:</u>

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $| A | = - 41$.

$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -6^* & 9^* & 3^* \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$[(2) $\to$ 3(2)] và $A \to A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4^* \\ -2 & 3 & -2^* \\ -5 & 2 & 12^* \end{pmatrix}$[(3)’ $\to$ – 2(3)’].

Ta có $| A_1 | = 3| A | = - 123$ và $| A_2 | = - 2| A | = 82$.

2.4/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Khi đó

a) $|cA| = c^n |A|$ (vì $A \to cA$ bằng cách nhân n dòng của A với c).

b) Có thể *rút thừa số chung ở mỗi dòng* (hay *mỗi cột*) của A ra ngoài dấu định thức.

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41$ và $B = -2A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -4 \\ 4 & -6 & -2 \\ 10 & -4 & 12 \end{pmatrix}$.

Ta có $|B| = (-2)^3 |A| = -8(-41) = 328$.

b) $\begin{vmatrix} 28^* & -40^* & 76^* & -12^* \\ -1 & 25 & 6 & -3 \\ 4 & 10 & -5 & 2 \\ -7 & -35 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 7 & -10^* & 19 & -3 \\ -1 & 25^* & 6 & -3 \\ 4 & 10^* & -5 & 2 \\ -7 & -35^* & 9 & 1 \end{vmatrix} = (4 \times 5)\begin{vmatrix} 7^* & -2^* & 19^* & -3^* \\ -1 & 5^* & 6 & -3 \\ 4 & 2^* & -5 & 2 \\ -7 & -7^* & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

bằng cách rút các thừa số chung từ dòng (1) và cột (2).

2.5/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \neq j \le n$ và $c \in \mathbf{R}$.

Giả sử $A \to A'$ bằng phép biến đổi sơ cấp $(i) \to [\,(i) + c(j)\,]$ (hoặc $[\,(i)' \to (i)' + c(j)'\,]$).

Khi đó $|A'| = |A|$ (*không thay đổi và độc lập với* c).

<u>Ví dụ:</u>

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41$.

$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3^* & 0^* & -2^* \end{pmatrix}$ và $A \to A_2 = \begin{pmatrix} 7^* & -1 & 2 \\ -11^* & 3 & 1 \\ -11^* & 2 & -6 \end{pmatrix}$. Ta có

$|A_1| = |A|$ do $(3) \to [\,(3) + 2(1)\,]$ và $|A_2| = |A|$ do $(1)' \to [\,(1)' - 3(2)'\,]$.

2.6/ MỆNH ĐỀ: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Ta có thể phân tích $|A|$ thành *tổng của 2 định thức* dựa theo *một dòng* (hay *một cột*) *nào đó*. Chẳng hạn phân tích đối với định thức cấp 3 như dưới đây:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$ [phân tích theo dòng (1)].

$$\begin{vmatrix} a & b+b' & c \\ d & e+e' & f \\ g & h+h' & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' & c \\ d & e' & f \\ g & h' & i \end{vmatrix}$$ [phân tích theo cột (2)].

Ví dụ: Rút gọn định thức sau đây (trước khi tính bằng qui tắc SARRUS):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & b-ax & c \\ d+ex & e-dx & f \\ g+hx & h-gx & i \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b-ax & c \\ d & e-dx & f \\ g & h-gx & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b-ax & c \\ ex & e-dx & f \\ hx & h-gx & i \end{vmatrix}$$ [phân tích theo cột (1)].

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -ax & c \\ d & -dx & f \\ g & -gx & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b & c \\ ex & e & f \\ hx & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & -ax & c \\ ex & -dx & f \\ hx & -gx & i \end{vmatrix}$$ [phân tích theo cột (2)].

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 + 0 - x^2 \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = (x^2+1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

(để ý sự hoán vị và sự tỉ lệ của các cột trong các ma trận trên).

2.7/ ÁP DỤNG: Trước khi tính định thức một ma trận, ta có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hay cột) thích hợp để *tạo nhiều hệ số* 0 *trên một dòng* (hay *cột*) *nào đó*. Các hệ số 0 này được tạo ra dựa vào *hệ số* ± 1 *có trên dòng* (hay *cột*) *tương ứng* hoặc dựa vào *quan hệ bội số - ước số*. Nếu không có sẵn hệ số ± 1, ta lại dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hay cột) thích hợp để tạo ± 1.

Ví dụ:

a) $\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 & -20 \\ 2 & -4 & 3 & 16 \\ 5 & -8 & 8 & 28 \\ 4 & -8 & 5 & 24 \end{vmatrix} = \frac{4.4}{480}\begin{vmatrix} 3 & 2^* & -2 & -5^* \\ 2 & -1^* & 3 & 4^* \\ 5 & -2^* & 8 & 7^* \\ 4 & -2^* & 5 & 6^* \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 7 & 0^* & 3 & 1 \\ 2 & -1^* & 3 & 4 \\ 1 & 0^* & 3 & 1 \\ 0 & 0^* & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1^* & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0^* & -1^* & 0^* \end{vmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 1.$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 7 & -4 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2^* & 2^* & 1^* \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 5 & 5 \\ 0^* & 0^* & 1^* \\ -1 & 11 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -13 & 5 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = 138$ hay

$\begin{vmatrix} -3 & 2^* & 5 \\ 7 & -4^* & 3 \\ -5 & 6^* & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2^* & 5 \\ 1 & 0^* & 13 \\ 4 & 0^* & -17 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 4 & -17 \end{vmatrix} = 138.$

c) $\begin{vmatrix} a^* & a^* & a^* & a^* \\ b & x & b & b \\ c & c & y & c \\ d & d & d & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^* & 0^* & 0^* & 0^* \\ b & x-b & 0 & 0 \\ c & 0 & y-c & 0 \\ d & 0 & 0 & z-d \end{vmatrix} = a(x-b)(y-c)(z-d).$

d) $\begin{vmatrix} \cos 2a & d & 2\sin^2 a \\ (\sin b-\cos b)^2 & 2d & (\sin b+\cos b)^2 \\ -2\cos^2 c & -d & \cos 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & d^* & 2\sin^2 a \\ 2^* & 2d^* & (\sin b+\cos b)^2 \\ -1^* & -d^* & \cos 2c \end{vmatrix} = 0$ (có 2 cột tỉ lệ).

e) $\begin{vmatrix} 657419 & 656419 \\ 928308 & 927308 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1000^* & 656419 \\ 1000^* & 927308 \end{vmatrix} = 1000\begin{vmatrix} 1 & 656419 \\ 1 & 927308 \end{vmatrix} =$

$= 1000(927308 - 656419) = 270889000.$

III. ĐỊNH THỨC VÀ MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH:

3.1/ MỆNH ĐỀ: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

a) A *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$. b) A *không khả nghịch* $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$.

Ghi chú: Khi xét tính khả nghịch của A, ta tìm $|A|$ thì thuận lợi hơn là tìm R_A.

Ví dụ:

Xét tính khả nghịch của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ (a, b, c là các tham số thực).

Ta có $|A| = \begin{vmatrix} 1^* & 1^* & 1^* \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 0^* & 0^* \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1^* & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b). = (a-b)(b-c)(c-a).$

Suy ra: A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b \neq c \neq a$.

A không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow (a = b)$ hay $(b = c)$ hay $(c = a)$.

3.2/ MỆNH ĐỀ: Giả sử $A \in M_n(\mathbf{R})$ và A khả nghịch (nghĩa là $|A| \neq 0$).

Ta xác định *ma trận nghịch đảo* A^{-1} bằng *phương pháp định thức* như sau:

* Tính các hệ số đồng thừa $C_{ij}^A = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$ $(1 \leq i, j \leq n)$ của A.

* Lập ma trận $C = \left(C_{ij}^A\right)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbf{R})$ [ma trận của n^2 hệ số đồng thừa].

* Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}C^t$ (t = transposition).

.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41 \neq 0$ nên A khả nghịch.

Ta tính đầy đủ $3^2 = 9$ hệ số đồng thừa $C_{ij}^A = C_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ như sau:

$C_{11} = (-1)^{1+1}|A(1,1)| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -20$ $\quad C_{12} = (-1)^{1+2}|A(1,2)| = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -17$

$C_{13} = (-1)^{1+3}|A(1,3)| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 11$ $\quad C_{21} = (-1)^{2+1}|A(2,1)| = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -2$

$C_{22} = (-1)^{2+2}|A(2,2)| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -14$ $\quad C_{23} = (-1)^{2+3}|A(2,3)| = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$C_{31} = (-1)^{3+1}|\,A(3,1)\,| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$ $\qquad C_{32} = (-1)^{3+2}|\,A(3,2)\,| = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -8$

$C_{33} = (-1)^{3+3}|\,A(3,3)\,| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10.$

Lập $C = \left(C_{ij}\right)_{1\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} -20 & -17 & 11 \\ -2 & -14 & -3 \\ -7 & -8 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}C^t = -\dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} -20 & -2 & -7 \\ -17 & -14 & -8 \\ 11 & -3 & 10 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} 20 & 2 & 7 \\ 17 & 14 & 8 \\ -11 & 3 & -10 \end{pmatrix}$.

3.3/ <u>GHI CHÚ:</u> Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ và A *khả nghịch.*

[nghĩa là $\Delta = |\,A\,| = (ad - bc) \neq 0$].

Ta có thể *tính nhẩm* ma trận nghịch đảo A^{-1} *một cách nhanh chóng* như sau:

$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (*hoán vị* đường chéo xuôi và *đổi dấu* đường chéo ngược).

<u>Ví dụ:</u> $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ có $|\,A\,| = 60 \neq 0$ nên A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$ với $k \ge 2$. Khi đó:

a) $|\,AB\,| = |\,A\,|.|\,B\,|$ và $|\,A_1A_2 \ldots A_k\,| = |\,A_1\,|.|\,A_2\,| \ldots |\,A_k\,|$.

b) Suy ra $\forall k \ge 2, |\,A^k\,| = |\,A\,|^k$ (áp dụng khi $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$).

c) Nếu A *khả nghịch* thì $|\,A^{-1}\,| = \dfrac{1}{|A|}$ và $\forall r \in \mathbf{Z}, |\,A^r\,| = |\,A\,|^r$.

<u>Ví dụ:</u> $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$ có $|\,A\,| = -3$, $|\,B\,| = 4$ và $|\,C\,| = -6$. Ta có

$|\,AB\,| = |\,A\,|.|\,B\,| = (-3)4 = -12$ và $|\,ABC\,| = |\,A\,|.|\,B\,|.|\,C\,| = (-3)4(-6) = 72.$

$|\,A^4\,| = |\,A\,|^4 = (-3)^4 = 81$, $|\,A^{-1}\,| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{-1}{3}$ và $|\,A^{-5}\,| = |\,A\,|^{-5} = (-3)^{-5} = \dfrac{-1}{243}$.

IV. QUI TẮC CRAMER:

Định thức được áp dụng vào việc khảo sát các hệ phương trình tuyến tính có *số phương trình và số ẩn bằng nhau.*

4.1/ KÝ HIỆU: Xét hệ phương trình tuyến tính thực $AX = B$ (có n phương trình và n ẩn số) trong đó $A \in M_n(\mathbf{R})$, $B \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$ và $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Với $1 \le j \le n$, đặt

$\Delta = |A|$ và $\Delta_j = |A_j|$ trong đó A_j là A *xóa cột* (j) và *thay bằng cột* B.

4.2/ MỆNH ĐỀ: Với các ký hiệu như trên:

a) $\Delta x_j = \Delta_j$ khi $1 \le j \le n$.

b) Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ *có nghiệm duy nhất* là $x_j = (\Delta_j / \Delta)$ khi $1 \le j \le n$.

c) Nếu $\Delta = 0$ và $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Delta_k \neq 0$ thì hệ *vô nghiệm.*

(lúc đó đẳng thức $\Delta x_k = \Delta_k$ vô nghĩa).

d) Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ thì hệ *vô nghiệm* hoặc *vô số nghiệm.*

Khi đó ta phải giải hệ bằng *phương pháp Gauss* hay *Gauss – Jordan* để có kết quả chính xác (vì lúc này qui tắc CRAMER *không còn hiệu lực nữa*).

Ví dụ:

a) Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số thực *m*:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ (m-2)x_2 + (m-5)x_3 - 2x_1 = 2 \\ (m+1)x_3 + mx_1 + x_2 = -2 \end{cases}.$$

Hệ phương trình trên có dạng $AX = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ta tính $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ và Δ_3 .

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 0^* & 0^* \\ -2 & 3 & m-1 \\ m & -m & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ -m & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ 3-m & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (m-1)(m-3).$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0^* & 2 & 2 \\ 2^* & m-2 & m-5 \\ -2^* & 1 & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^* & 2 & 2 \\ 2^* & m-2 & m-5 \\ 0^* & m-1 & 2m-4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ m-1 & 2m-4 \end{vmatrix} = 4(3-m).$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0^* & 2 \\ -2 & 2^* & m-5 \\ m & -2^* & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0^* & 2 \\ -2 & 2^* & m-5 \\ m-2 & 0^* & 2m-4 \end{vmatrix} = 0 \text{ [dòng (1) tỉ lệ với dòng (3)].}$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0^* \\ -2 & m-2 & 2^* \\ m & 1 & -2^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0^* \\ -2 & m-2 & 2^* \\ m-2 & m-1 & 0^* \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m-2 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-3).$$

* Nếu $1 \neq m \neq 3$ thì $\Delta \neq 0$ nên hệ *có nghiệm duy nhất* là

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{1-m},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0 \text{ và } x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{m-1}.$$

* Nếu $m = 1$ thì $\Delta = 0 \neq \Delta_1 = 8$ nên hệ vô nghiệm.

* Nếu $m = 3$ thì $\Delta = 0 = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, ta thế $m = 3$ vào hệ và giải hệ bằng phương pháp Gauss – Jordan :

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & 0 \\ 0^* & 5 & 2 & 2 \\ 0^* & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0^* & 6/5 & -4/5 \\ 0^* & 1^* & 2/5 & 2/5 \\ 0^* & 0^* & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hệ có vô số nghiệm như sau: $x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = -(6a + 4)/5$ và $x_2 = (2 - 2a)/5$.

b) Xét 4 hệ phương trình tuyến tính (2 ẩn số x, y và m, p, q là các hằng số thực)

$$\begin{array}{cc} \text{x} & \text{y} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} m-3 & -1 & p \\ 5-m & m & q \end{array}\right)(1) \quad \begin{array}{cc} \text{x} & \text{y} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 1 \end{array}\right)(2) \quad \begin{array}{cc} \text{x} & \text{y} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \end{array}\right)(3) \quad \begin{array}{cc} \text{x} & \text{y} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)(4)$$

Hệ (1) : $\forall m, p, q \in \mathbf{R}, \Delta = \begin{vmatrix} m-3 & -1 \\ 5-m & m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 5 = (m-2)^2 + 1 \geq 1 > 0,$

$\Delta_{\text{x}} = \begin{vmatrix} p & -1 \\ q & m \end{vmatrix} = mp + q$ và $\Delta_{\text{y}} = \begin{vmatrix} m-3 & p \\ 5-m & q \end{vmatrix} = m(p+q) - (5p+3q)$

nên hệ có nghiệm duy nhất

$$\text{x} = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{mp+q}{m^2-4m+5} \text{ và } \text{y} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{m(p+q)-(5p+3q)}{m^2-4m+5}.$$

Hệ (2) : $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \neq \Delta_{\text{y}} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -21$ nên hệ vô nghiệm.

Hệ (3) : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 0 = \Delta_{\text{x}} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = \Delta_{\text{y}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$ và hệ $\Leftrightarrow$ (2x – 3y = 1).

Ta thấy hệ có vô số nghiệm với một ẩn tự do $\text{y} \in \mathbf{R}, \text{x} = \frac{3y+1}{2}$.

Hệ (4) : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 = \Delta_{\text{x}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \Delta_{\text{y}} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Ta thấy hệ vô nghiệm vì hệ có phương trình $0\text{x} + 0\text{y} = 2 \neq 0$.
