

CHƯƠNG II

CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN
MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCHI. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN:1.1/ PHÉP CHUYỂN VỊ MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

Đặt $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ sao cho $b_{ij} = a_{ji}$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$), nghĩa là ma trận B được suy từ A bằng cách viết các dòng (hay cột) của A lần lượt thành thành các cột (hay dòng) của B .

Ta nói B là *ma trận chuyển vị* của A và ký hiệu $B = A^t$ (t = transposition).

Đề ý $(A^t)^t = B^t = A$. Nếu $C \in M_n(\mathbf{R})$ thì $C^t \in M_n(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ có } B = A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \\ 8 & -4 & 2 \\ -5 & 9 & -6 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbf{R}).$$

Ta có $b_{13} = a_{31} = 5$, $b_{22} = a_{22} = 0$ và $b_{41} = a_{14} = -5$. Đề ý $(A^t)^t = B^t = A$.

$$\text{b) } C = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ -7 & 8 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ có } D = C^t = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Ta có $d_{12} = c_{21} = -7$, $d_{33} = c_{33} = -3$ và $d_{23} = c_{32} = 6$. Đề ý $(C^t)^t = D^t = C$.

1.2/ PHÉP NHÂN SỐ THỰC VỚI MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Đặt $c.A = (ca_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

Ta có $1.A = A$, $0.A = \mathbf{O}_{m \times n}$ và $(-1).A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Đặt $-A = (-1).A$ và gọi $-A$ là *ma trận đối* của A .

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \quad \text{có} \quad -\frac{4}{3}A = \begin{pmatrix} 8/3 & -28/3 & -32/3 & 20/3 \\ -4/3 & 0 & 16/3 & -12 \\ -20/3 & 4 & -8/3 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.3/ PHÉP CỘNG MA TRẬN:

$$\text{Cho } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ và } B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R}).$$

$$\text{Đặt } A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ và } A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R}).$$

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & 7 \\ -4 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}).$$

$$\text{Ta có } A + B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 17 & -5 \\ -2 & 6 & -6 & 16 \\ 1 & -8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \text{ và } A - B = \begin{pmatrix} -10 & 8 & -1 & -5 \\ 4 & -6 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}).$$

1.4/ TÍNH CHẤT: Cho $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $c, d \in \mathbf{R}$. Khi đó:

$$\text{a) } c.(d.A) = (c.d).A \qquad (c.A)^t = c.A^t \qquad (A \pm B)^t = A^t \pm B^t.$$

b) Phép cộng ma trận giao hoán và kết hợp:

$$B + A = A + B \qquad (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C.$$

$$\text{c) } \mathbf{O}_{m \times n} + A = A + \mathbf{O}_{m \times n} = A \qquad (-A) + A = A + (-A) = \mathbf{O}_{m \times n}.$$

$$\text{d) } (c + d).A = c.A + d.A \qquad c.(A \pm B) = c.A \pm c.B$$

Ví dụ: Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. Ta có

$$(-4A)^t = -4A^t. \qquad (-7)(6A) = [(-7)6]A = -42A.$$

$$(5 + 8)A = 5A + 8A = 13A. \qquad (-9)(A + B) = (-9)A + (-9)B.$$

1.5/ TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA DÒNG VỚI CỘT:

Cho dòng $U = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \in M_{1 \times n}(\mathbf{R})$ và cột $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$.

Đặt $U.V = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ thì $U.V \in \mathbf{R}$.

Ví dụ:

$$U = (-3 \ 8 \ -6 \ 9 \ 2) \in M_{1 \times 5}(\mathbf{R}) \text{ và } V = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in M_{5 \times 1}(\mathbf{R}).$$

Ta có $U.V = (-3)7 + 8.0 + (-6)(-5) + 9.1 + 2(-4) = 10 \in \mathbf{R}$.

1.6/ PHÉP NHÂN MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$ thỏa điều kiện

(số cột của A) = n = (số dòng của B).

Ta quan tâm m dòng A_1, A_2, \dots, A_m của A (mỗi dòng có n số hạng) và quan tâm p cột B_1, B_2, \dots, B_p của B (mỗi cột có n số hạng).

Ta thực hiện *phép nhân ma trận* $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ với $B \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$ bằng cách nhân vô hướng mỗi dòng của A với mỗi cột của B để được ma trận tích

$C = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{m \times p}(\mathbf{R})$ như sau:

$$C = A.B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_p) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & \dots & A_1 B_p \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & \dots & A_2 B_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_m B_1 & A_m B_2 & \dots & A_m B_p \end{pmatrix} = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{m \times p}(\mathbf{R})$$

$$\text{với } c_{ik} = (\text{dòng } A_i)(\text{cột } B_k) = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}).$$

Như vậy $C = A.B = AB = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}$ với $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p$).

Ví dụ:

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ và } B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbf{R}).$$

$$\text{Ta có } C = AB = \begin{pmatrix} -28 & 0 & -13 \\ 67 & 7 & -15 \\ -11 & 1 & 13 \end{pmatrix} \text{ và } D = BA = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -7 & -23 \\ 0 & 31 & 45 & -38 \\ -5 & 1 & 11 & 5 \\ -12 & 34 & 70 & -32 \end{pmatrix} \text{ với}$$

$C \in M_3(\mathbf{R})$ và $D \in M_4(\mathbf{R})$. Như vậy $C = AB \neq D = BA$.

1.7/ MA TRẬN ĐƠN VỊ:

Ma trận đơn vị cấp n là ma trận vuông cấp n có dạng như sau:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(tất cả các hệ số trên đường chéo chính đều bằng 1, bên ngoài đều bằng 0).

Ví dụ:

$$I_1 = (1) \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.8/ TÍNH CHẤT:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$, $B, C \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$, $D \in M_{p \times q}(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Khi đó:

a) $(AB)D = A(BD) = ABD$ (phép nhân ma trận có *tính kết hợp*).

b) $(AB)^t = B^t A^t$. $(cA)B = A(cB) = c(AB)$.

c) $A(B \pm C) = AB \pm AC$. $(B \pm C)D = BD \pm CD$.

(phép nhân ma trận *phân phối trái và phải* với các phép cộng trừ ma trận).

d) $O_{k \times m} A = O_{k \times n}$ và $A O_{n \times k} = O_{m \times k}$. $I_m A = A$ và $A I_n = A$.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$.

Ta có $\mathbf{O}_{5 \times 2} A = \mathbf{O}_{5 \times 3}$, $A \mathbf{O}_{3 \times 8} = \mathbf{O}_{2 \times 8}$, $\mathbf{I}_2 A = A$ và $A \mathbf{I}_3 = A$.

1.9/ GHI CHÚ:

a) Phép nhân ma trận *không giao hoán*. Nếu AB và BA cùng xác định thì không nhất thiết $BA = AB$.

Nếu $AB = BA$ thì A và B là *hai ma trận vuông có cùng kích thước*.

b) Có thể nhân liên tiếp nhiều ma trận nếu số cột của ma trận đi trước bằng số dòng của ma trận đi ngay liền sau.

c) Có thể xảy ra khả năng

$$A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}), B \in M_{n \times p}(\mathbf{R}), A \neq \mathbf{O} \neq B \text{ nhưng } AB = \mathbf{O}_{m \times p}.$$

Ví dụ:

a) Trong Ví dụ của (1.7), $C = AB \neq D = BA$ vì $C \in M_3(\mathbf{R})$ và $D \in M_4(\mathbf{R})$.

b) Cho $A \in M_{3 \times 7}(\mathbf{R})$, $B \in M_{7 \times 4}(\mathbf{R})$, $C \in M_{4 \times 1}(\mathbf{R})$ và $D \in M_{1 \times 8}(\mathbf{R})$.

Đặt $E = ABCD$ thì $E \in M_{3 \times 8}(\mathbf{R})$.

c) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}_{3 \times 2}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}_{2 \times 3}$ nhưng $AB = \mathbf{O}_3$.

II. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN VUÔNG:

2.1/ PHÉP NHÂN VÀ LŨY THỪA: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta có $AB \in M_n(\mathbf{R})$, $BA \in M_n(\mathbf{R})$ và *không nhất thiết* $AB = BA$.

b) Đặt $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, ..., $A^{k+1} = AA^k$, $\forall k \in \mathbf{N}$.

Ta có $\forall k \in \mathbf{N}$, $A^k \in M_n(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

a) Cho $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ và $K = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

Ta có $HK = \begin{pmatrix} -17 & 25 \\ -30 & 44 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, $KH = \begin{pmatrix} 18 & -8 \\ -20 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ và $HK \neq KH$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. Tính A^k , $\forall k \in \mathbf{N}$.

Ta có $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dự đoán $\forall k \in \mathbf{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và kiểm chứng bằng phép qui nạp.

2.2/ TÍNH CHẤT: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

a) $\forall k$ nguyên ≥ 1 , $O_n^k = O_n$ và $I_n^k = I_n$.

b) $\forall r, s \in \mathbf{N}$, $A^r A^s = A^{r+s}$ và $(A^r)^s = A^{rs}$.

c) $O_n A = A O_n = O_n$ và $I_n A = A I_n = A$.

d) Có thể xảy ra khả năng ($A \neq O_n$ và $\exists r$ nguyên ≥ 2 thỏa $A^r = O_n$).

Ví dụ:

a) $O_n^{2000} = O_n$ và $I_n^{3000} = I_n$.

b) $\forall A \in M_n(\mathbf{R})$, $A^9 A^{16} = A^{9+16} = A^{25}$ và $(A^9)^{16} = A^{9 \times 16} = A^{144}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ và $A \neq O_3$. Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_3 = A^3$.

2.3/ CÁC MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT:

Cho $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{R})$.

Đường chéo (chính) của A bao gồm các hệ số a_{ii} ($1 \leq i \leq n$).

a) A là ma trận (*đường*) *chéo* nếu các hệ số ở ngoài đường chéo đều bằng 0

và các hệ số của đường chéo thì tùy ý (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq i \neq j \leq n$).

- b) A là ma trận *tam giác trên* nếu các hệ số ở *phía dưới đường chéo* đều bằng 0 và các hệ số khác thì tùy ý (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq j < i \leq n$).
- c) A là ma trận *tam giác dưới* nếu các hệ số ở *phía trên đường chéo* đều bằng 0 và các hệ số khác thì tùy ý (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq i < j \leq n$).
- d) A là ma trận *tam giác trên ngặt* nếu A là ma trận *tam giác trên* có đường chéo gồm toàn các hệ số bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq j \leq i \leq n$).
- e) A là ma trận *tam giác dưới ngặt* nếu A là ma trận *tam giác dưới* có đường chéo gồm toàn các hệ số bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq i \leq j \leq n$).

Ví dụ: Các ma trận dạng đặc biệt (ma trận đường chéo, tam giác trên, tam giác dưới, tam giác trên ngặt và tam giác dưới ngặt) :

$$A = \begin{pmatrix} 3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7^* \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4^* & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1^* & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 9^* & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0^* & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -8^* & 0 \\ -9 & 6 & 0 & 5^* \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 9 & -5 \\ 0 & 0^* & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0^* & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0^* \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0^* & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0^* & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0^* \end{pmatrix}.$$

2.4/ **MỆNH ĐỀ:**

- a) Tổng, hiệu, tích và lũy thừa nguyên dương các ma trận *đường chéo* cũng là ma trận *đường chéo*. Các phép toán thực hiện tự nhiên trên đường chéo.
- b) Tổng, hiệu, tích và lũy thừa nguyên dương các ma trận *tam giác cùng loại* cũng là ma trận *tam giác cùng loại*.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ta có } A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{10} \end{pmatrix} \quad C + D = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 0 & 17 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C - D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} -2 & -30 & -11 \\ 0 & 72 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 1 & -219 & -84 \\ 0 & 512 & 208 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

2.5/ MỆNH ĐỀ: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB = BA$.

Ta có các hằng đẳng thức trong \mathbf{R} vẫn có hiệu lực đối với A và B .

$$\forall k \geq 2, (AB)^k = A^k B^k, \quad (A + B)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i A^i B^{k-i} \quad \text{và}$$

$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1}).$$

Ví dụ: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB = BA$. Khi đó

$$(AB)^4 = (AB)(AB)(AB)(AB) = ABABABAB = AAAABBBB = A^4 B^4.$$

$$A^5 + B^5 = A^5 - (-B)^5 = (A + B)(A^4 - A^3 B + A^2 B^2 - AB^3 + B^4).$$

$$\begin{aligned} (4A - 5I_n)^3 &= (4A)^3 - 3(4A)^2(5I_n) + 3(4A)(5I_n)^2 - (5I_n)^3 \\ &= 64A^3 - 240A^2 + 300A - 125I_n. \end{aligned}$$

2.6/ GHI CHÚ: Nếu $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB \neq BA$ thì các hằng đẳng thức trong

\mathbf{R} không thể áp dụng cho A và B . Các phép tính phải dùng định nghĩa.

Ví dụ: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB \neq BA$. Ta có

$$(AB)^4 = (AB)(AB)(AB)(AB) = ABABABAB \neq AAAABBBB = A^4 B^4.$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2 \quad \text{vì } (-AB + BA) \neq \mathbf{O}_n.$$

$$(A \pm B)^2 = (A \pm B)(A \pm B) = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2 \quad \text{vì}$$

$$(\pm AB \pm BA) \neq \pm 2AB.$$

III. SỰ KHẢ NGHỊCH CỦA MA TRẬN VUÔNG:

3.1/ VẤN ĐỀ:

a) $\forall A \in M_n(\mathbf{R})$, ta có $I_n A = A I_n = A$.

b) Cho trước $A \in M_n(\mathbf{R})$. Có hay không $A' \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A'A = AA' = I_n$?

Nếu có thì A' được xác định ra sao? Ta trả lời dễ dàng khi $n = 1$.

Khi $n = 1$: Nếu $a = 0 \in \mathbf{R} = M_1(\mathbf{R})$ thì không có $a' \in \mathbf{R}$ thỏa $a'a = aa' = 1$

và ta nói $a = 0$ là *số không khả nghịch*. Nếu $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ thì có

$a' = a^{-1} \in \mathbf{R}$ thỏa $a'a = aa' = 1$ và ta nói a là *số khả nghịch* cũng như ký

hiệu $a^{-1} = a'$ là *số nghịch đảo* của số a .

Ta sẽ trả lời cho câu hỏi trên khi $n \geq 2$.

3.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta nói A là ma trận *khả nghịch* nếu có $A' \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A'A = AA' = I_n$.

b) A' (nếu có) thì *duy nhất* và lúc đó ta ký hiệu $A' = A^{-1}$ là *ma trận nghịch đảo* của ma trận A .

c) Nếu A *khả nghịch* (có A^{-1}) thì ta định nghĩa thêm các lũy thừa nguyên âm

cho A như sau: $A^{-2} = (A^{-1})^2, A^{-3} = (A^{-1})^3, \dots, A^{-k} = (A^{-1})^k, \forall k \in \mathbf{N}^*$.

Ta có $A^m \in M_n(\mathbf{R}), \forall m \in \mathbf{Z}$. Hơn nữa $\forall r, s \in \mathbf{Z}, A^r A^s = A^{r+s}, (A^r)^s = A^{rs}$.

Ví dụ:

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Ta có $AB = BA = I_3$. Do đó A khả nghịch và $A^{-1} = B$. Tương tự B khả nghịch

và $B^{-1} = A$. Hơn nữa $\forall k \in \mathbf{N}^*, A^{-k} = (A^{-1})^k = B^k$ và $\forall m \in \mathbf{Z}, A^m \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $A^7 A^{-12} = A^{7+(-12)} = A^{-5} = (A^{-1})^5$ và $(A^7)^{-12} = A^{7(-12)} = A^{-84} = (A^{-1})^{84}$.

3.3/ **ĐỊNH LÝ:** (nhận diện ma trận *khả nghịch*).

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Ta xác định được S_A, R_A và $r(A) \leq n$.

Các phát biểu sau đây là *tương đương với nhau*:

- a) A *khả nghịch*.
- b) S_A có các hệ số trên đường chéo đều $\neq 0$.
- c) $R_A = I_n$.
- d) $r(A) = n$.

3.4/ **HỆ QUẢ:** (nhận diện ma trận *không khả nghịch*).

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Ta xác định được S_A, R_A và $r(A) \leq n$.

Các phát biểu sau đây là *tương đương với nhau*:

- a) A *không khả nghịch*.
- b) S_A có ít nhất một hệ số 0 trên đường chéo.
- c) $R_A \neq I_n$.
- d) $r(A) < n$.

Ví dụ:

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -5 & 2 & 16 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 3 \\ 0 & -1^* & 2 \\ 0 & 0 & -13^* \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 5 \\ 0 & 1^* & -2 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow R_A = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1^* \end{pmatrix} = I_3.$$

Bảng 1: $(2) \rightarrow [(2) + (1)]$, $(1) \rightarrow [(1) - (3)]$, $(3) \rightarrow [(3) - 2(1)]$.

Bảng 2: $(3) \rightarrow [(3) - 4(2)]$. Bảng 3: $(1) \rightarrow [(1) + (2)]$, $(2) \rightarrow -(2)$.

Bảng 4: $(3) \rightarrow -13^{-1}(3)$, $(1) \rightarrow [(1) - 5(3)]$, $(2) \rightarrow [(2) + 2(3)]$.

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 3 & 7 \\ 0 & 17 & 51 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \rightarrow S_B = \begin{pmatrix} 1^* & 3 & 7 \\ 0 & 17^* & 51 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow R_B = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -2 \\ 0 & 1^* & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3.$$

Bảng 1: $(1) \rightarrow [(1) - (3)]$, $(2) \rightarrow [(2) + 5(1)]$, $(3) \rightarrow [(3) - 2(1)]$.

Bảng 2: $(3) \rightarrow [(3) + 17^{-1}.5(2)]$. Bảng 3: $(2) \rightarrow 17^{-1}(2)$, $(1) \rightarrow [(1) - 3(2)]$.

Ta thấy A khả nghịch [để ý các hệ số trên đường chéo của S_A đều $\neq 0$, $R_A = I_3$ và $r(A) = 3$] và B không khả nghịch [để ý có hệ số 0 trên đường chéo của S_B , $R_B \neq I_3$ và $r(B) = 2 < 3$].

3.5/ ĐỊNH LÝ: (tìm ma trận nghịch đảo cho ma trận khả nghịch)

Cho A khả nghịch $\in M_n(\mathbf{R})$ (nghĩa là $R_A = I_n$).

Nếu các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ biến A thành $R_A = I_n$ thì chính các phép biến đổi đó, theo đúng thứ tự như vậy, sẽ biến I_n thành A^{-1} .

Cụ thể như sau:

Nếu $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k = R_A = I_n$ (dùng các phép biến đổi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$) thì $I_n \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k = A^{-1}$ (cũng dùng các phép biến đổi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$).

3.6/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO:

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Ta thường kiểm tra A khả nghịch và tìm A^{-1} cùng một lúc theo sơ đồ sau (*phương pháp Gauss – Jordan*):

$(A | I_n) \rightarrow (A_1 | B_1) \rightarrow (A_2 | B_2) \rightarrow \dots \rightarrow (A_k | B_k)$ trong đó $A_k = R_A$.

(dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ biến A thành R_A)

Nếu $R_A \neq I_n$ thì A không khả nghịch.

Nếu $R_A = I_n$ thì A khả nghịch và $A^{-1} = B_k$.

Ví dụ:

Xét tính khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -11 \\ 3 & 5 & 15 \end{pmatrix} \text{ và } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

$$(B | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -11 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 10 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1^* & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Bảng 1: $(2) \rightarrow [(2) + 2(1)]$, $(3) \rightarrow [(3) - 3(1)]$.

Bảng 2: $(1) \rightarrow [(1) - 2(2)]$, $(3) \rightarrow [(3) + (2)]$.

Ta thấy $R_B \neq I_3$ nên B không khả nghịch ($\forall B' \in M_3(\mathbf{R}), B'B \neq I_n \neq BB'$).

$$(A | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 22 & 53 & 7 & -7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -2 & 16 & -55 & -9 \\ 0 & 1^* & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -31 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 22 & -75 & -12 \\ 0 & 0 & 1^* & -9 & 31 & 5 \end{array} \right).$$

Bảng 1: $(1) \rightarrow [(1) - (2)]$, $(2) \rightarrow [(2) - 2(1)]$, $(3) \rightarrow [(3) + 7(1)]$.

Bảng 2: $(3) \rightarrow [(3) + 4(2)]$, $(2) \rightarrow [(2) + 3(3)]$.

Bảng 3: $(1) \rightarrow [(1) - 3(2)]$, $(3) \rightarrow [(3) - 2(2)]$.

Bảng 4: $(1) \rightarrow [(1) - 2(3)]$, $(2) \rightarrow [(2) + 3(3)]$, $(3) \rightarrow -(3)$.

Do $R_A = I_3$ nên A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}$.

Kiểm chứng lại, ta thấy $A^{-1}A = I_3$ (hay kiểm chứng $AA^{-1} = I_3$).

3.7/ MỆNH ĐỀ: Cho $A, B, A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

a) Nếu A khả nghịch thì

* A^{-1} cũng khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.

* A^t cũng khả nghịch và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

* cA ($c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) cũng khả nghịch và $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.

* A^r ($r \in \mathbf{Z}$) cũng khả nghịch và $(A^r)^{-1} = A^{-r}$.

b) AB khả nghịch \Leftrightarrow (A và B đều khả nghịch). Lúc đó $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

AB không khả nghịch \Leftrightarrow (A hay B không khả nghịch).

c) $(A_1 A_2 \dots A_k)$ khả nghịch $\Leftrightarrow (A_1, A_2, \dots, A_k)$ đều khả nghịch).

Lúc đó $(A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$ (thứ tự bị đảo ngược).

$(A_1 A_2 \dots A_k)$ không khả nghịch $\Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2, \dots, k\}, A_j$ không khả nghịch.

Ví dụ:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Suy ra

* A^{-1} cũng khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.

* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ cũng khả nghịch và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

* $-\frac{5}{2}A$ cũng khả nghịch và $(-\frac{5}{2}A)^{-1} = -\frac{2}{5}A^{-1}$.

* A^{-4} cũng khả nghịch và $(A^{-4})^{-1} = A^4$.

b) $H = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ và $K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ khả nghịch có $H^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ và $K^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ không khả nghịch (để ý $R_H = R_K = I_2$ và $R_L = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$).

Ta có $HK = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ -19 & -15 \end{pmatrix}$ khả nghịch và $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -19 & -14 \end{pmatrix}$.

Ta có $KH = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ khả nghịch và $(KH)^{-1} = H^{-1}K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Các ma trận HKL, KHL, HLK, KLH, LHK và LKH đều không khả nghịch.

3.8/ MỆNH ĐỀ: (nhận diện 2 ma trận đều khả nghịch và là nghịch đảo của nhau).

Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Các phát biểu sau là tương đương với nhau:

a) A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

b) B khả nghịch và $B^{-1} = A$.

c) $AB = I_n$.

d) $BA = I_n$.

Ví dụ:

a) Cho $P \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $P^5 = \mathbf{O}_n$.

Đặt $A = (I_n - P)$ và $B = (I_n + P + P^2 + P^3 + P^4)$. Chứng minh

A khả nghịch và $A^{-1} = B$ (lúc đó B cũng khả nghịch và $B^{-1} = A$).

Theo **3.8**, ta chỉ cần chứng minh $AB = I_n$ là xong. Ta có

$$\begin{aligned} AB &= (I_n - P)(I_n + P + P^2 + P^3 + P^4) \\ &= I_n + P + P^2 + P^3 + P^4 - (P + P^2 + P^3 + P^4 + P^5) = I_n - P^5 = I_n - \mathbf{O}_n = I_n. \end{aligned}$$

b) Cho $H, K \in M_n(\mathbf{R})$ sao cho $C = (I_n + HK)$ khả nghịch. Chứng minh

$D = (I_n + KH)$ cũng khả nghịch và $D^{-1} = E$ trong đó $E = (I_n - KC^{-1}H)$.

Theo **3.8**, ta chỉ cần chứng minh $DE = I_n$ là xong. Ta có

$$\begin{aligned} DE &= (I_n + KH)(I_n - KC^{-1}H) = I_n + KH - KC^{-1}H - KHKC^{-1}H \\ &= I_n + KH - K(I_n + HK)C^{-1}H = I_n + KH - KCC^{-1}H = I_n + KH - KH = I_n. \end{aligned}$$

**3.9/ LIÊN HỆ GIỮA TÍNH KHẢ NGHỊCH CỦA MA TRẬN VUÔNG VÀ
NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:**

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ với $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $B \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$

[hệ có số phương trình bằng với số ẩn là n].

a) Nếu A khả nghịch thì hệ trên có nghiệm duy nhất.

Nếu A không khả nghịch thì hệ trên vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

b) Suy ra: Nếu A khả nghịch thì hệ $AX = \mathbf{O}$ có nghiệm duy nhất là $X = \mathbf{O}$.

Nếu A không khả nghịch thì hệ $AX = \mathbf{O}$ có vô số nghiệm.

Ví dụ: Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \quad \text{và} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbf{R}).$$

$$\begin{aligned}
AX = B &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & u \\ -2 & 0 & -3 & v \\ 2 & 1 & 3 & w \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & u \\ 0 & 1 & 0 & v+w \\ 0 & -3 & -1 & w-2u \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & u-2v-2w \\ 0 & 1^* & 0 & v+w \\ 0 & 0 & -1 & 3v+4w-2u \end{array} \right) \rightarrow \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 4v+6w-3u \\ 0 & 1^* & 0 & v+w \\ 0 & 0 & 1^* & 2u-3v-4w \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Bảng 1: (2) \rightarrow [(2) + (3)], (3) \rightarrow [(3) - 2(1)].

Bảng 2: (1) \rightarrow [(1) - 2(2)], (3) \rightarrow [(3) + 3(2)].

Bảng 3: (1) \rightarrow [(1) + 2(3)], (3) \rightarrow -(3).

Do $R_A = I_3$ nên A khả nghịch và hệ $AX = B$ có nghiệm duy nhất

($x_1 = 4v + 6w - 3u$, $x_2 = v + w$, $x_3 = 2u - 3v - 4w$), $\forall u, v, w \in \mathbf{R}$.

Suy ra hệ $AX = \mathbf{O}$ ($u = v = w = 0$) có nghiệm duy nhất ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

$$\begin{aligned}
CX = B &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & u \\ 2 & 2 & 2 & v \\ -1 & -3 & 1 & w \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 3 & u \\ 0 & 4 & -4 & v-2u \\ 0 & -4 & 4 & u+w \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & \frac{v+2u}{4} \\ 0 & 1^* & -1 & \frac{v-2u}{4} \\ 0 & 0 & 0 & v+w-u \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Bảng 1: (2) \rightarrow [(2) - 2(1)], (3) \rightarrow [(3) + (1)].

Bảng 2: (3) \rightarrow [(3) + (2)], (2) $\rightarrow 4^{-1}(2)$, (1) \rightarrow [(1) + (2)].

Do $R_C \neq I_3$ nên C không khả nghịch.

Nếu $v + w - u \neq 0$ thì hệ $CX = B$ vô nghiệm.

Nếu $v + w - u = 0$ thì hệ $CX = B$ có vô số nghiệm với một ẩn tự do

[$x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = -2a + \frac{v+2u}{4}$, $x_2 = a + \frac{v-2u}{4}$], $\forall u, v, w \in \mathbf{R}$.

Suy ra hệ $CX = \mathbf{O}$ ($u = v = w = 0$) có vô số nghiệm với một ẩn tự do

[$x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = -2a$, $x_2 = a$].

IV. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN:

4.1/ CÁC PHƯƠNG TRÌNH ỨNG DỤNG MA TRẬN KHẢ NGHỊCH:

Cho các ma trận *khả nghịch* $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $C \in M_m(\mathbf{R})$.

a) Phương trình $AX = B$ [$B \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ và *ma trận ẩn* $X \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$].

Ta có $AX = B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ (*nghiệm duy nhất*).

Đặc biệt $AX = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = A^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$ (*nghiệm duy nhất tầm thường*).

b) Phương trình $XA = B$ [$B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và *ma trận ẩn* $X \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$].

Ta có $XA = B \Leftrightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}$ (*nghiệm duy nhất*).

Đặc biệt $XA = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = \mathbf{O}A^{-1} = \mathbf{O}$ (*nghiệm duy nhất tầm thường*).

c) Phương trình $AXC = B$ [$B \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ và *ma trận ẩn* $X \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$].

Ta có $AXC = B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X(CC^{-1}) = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}$ (*duy nhất*).

Đặc biệt $AXC = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = A^{-1}\mathbf{O}C^{-1} = \mathbf{O}$ (*nghiệm duy nhất tầm thường*).

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ khả nghịch và ta có } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \text{ khả nghịch và ta có } C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Phương trình } AX = B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ có nghiệm duy nhất } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 14 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Phương trình } AX = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ có nghiệm duy nhất } X = A^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Phương trình } XC = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ có nghiệm duy nhất } X = DC^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 23 & -9 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Phương trình $XC = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ có nghiệm duy nhất $X = \mathbf{O}C^{-1} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Phương trình $CXA = E = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ có nghiệm duy nhất

$$X = C^{-1}EA^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & 8 & 7 \\ -35 & 17 & 16 \end{pmatrix}A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -21 & -31 \\ -37 & -54 & -73 \end{pmatrix}.$$

Phương trình $CXA = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có nghiệm duy nhất

$$X = C^{-1}\mathbf{O}A^{-1} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2/ PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN TỔNG QUÁT:

Xét phương trình ma trận tổng quát $f(X) = \mathbf{O}$ với X là ma trận ẩn và f là một hàm theo X .

Ta xác định kích thước $(m \times n)$ của X và đặt

$X = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ bao gồm mn ẩn số thực x_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$).

Viết $f(X) = \mathbf{O}$ thành một hệ phương trình thực theo mn ẩn số thực x_{ij}

($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$). Nếu hệ này *giải được* (chẳng hạn nó là một hệ phương trình tuyến tính) thì ta tìm được các ma trận X thỏa phương trình ma trận đã cho.

Ví dụ: Giải các phương trình ma trận sau:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} (X^t \text{ là ma trận chuyển vị của } X) \quad b) Y^2 = \mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a) X^t \in M_{3 \times 2}(\mathbf{R}) \text{ nên } X \in M_{2 \times 3}(\mathbf{R}). \text{ Đặt } X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \text{ và } X^t = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix}, \text{ ta có}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 6 \\ 3x + y - 4z = -1 \\ 2u - 3v + 5w = -5 \\ 3u + v - 4w = 2 \end{cases}.$$

Ta có hai hệ phương trình tuyến tính [hệ (I) theo x, y, z và hệ (II) theo u, v, w] và có thể giải chung trong cùng một bảng ma trận như sau (vì ma trận hệ số ở vế trái của hai hệ trùng nhau) :

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & (I) & (II) \\ 3 & 1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 6 & -5 \\ u & v & w & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & (I) & (II) \\ 1^* & 4 & -9 & -7 & 7 \\ 0 & -11 & 23 & 20 & -19 \\ u & v & w & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & (I) & (II) \\ 1^* & 0 & -7/11 & 3/11 & 1/11 \\ 0 & 1^* & -23/11 & -20/11 & 19/11 \\ u & v & w & & \end{array} \right).$$

Bảng 1 : (1) \rightarrow [(1) - (2)], (2) \rightarrow [(2) - 2(1)].

Bảng 2 : (2) \rightarrow $-11^{-1}(2)$, (1) \rightarrow [(1) - 4(2)].

Hệ (I) : $z \in \mathbf{R}$, $x = (7z + 3) / 11$, $y = (23z - 20) / 11$.

Hệ (II) : $w \in \mathbf{R}$, $u = (7w + 1) / 11$, $v = (23w + 19) / 11$.

Vậy phương trình ma trận có vô số nghiệm $X = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7z+3 & 23z-20 & 11z \\ 7w+1 & 23w+19 & 11w \end{pmatrix}$ với $z, w \in \mathbf{R}$.

$$\text{b) } Y \in M_2(\mathbf{R}). \text{ Đặt } Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \text{ ta có } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 0(PT1) \\ y(x+t) = 0(PT2) \\ z(x+t) = 0(PT3) \\ t^2 + yz = 0(PT4) \end{cases}.$$

Từ (PT 2), ta xét

* Nếu $y = 0$: từ (PT1) và (PT4), ta có $x = t = 0$. Lúc này (PT 3) cũng thỏa với $z \in \mathbf{R}$.

* Nếu y thực tùy ý $\neq 0$: $t = -x$ (PT 2), $z = -x^2/y$ (PT 1) với x thực tùy ý. Lúc này (PT 3) và (PT 4) cũng thỏa.

Vậy phương trình ma trận có vô số nghiệm như sau :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \text{ và } Y = \begin{pmatrix} x & y \\ -x^2/y & -x \end{pmatrix} \text{ với } x, y, z \in \mathbf{R} \text{ và } y \neq 0.$$