CHƯƠNG IV

KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

1.1/ KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$:

Cho số nguyên $n \geq 1$ và $\mathbf{R}^n = \{ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \}$.

Ta gọi $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là *vector X* trong $\mathbf{R}^n$. Ta thường ‘‘ hình học hóa ’’ X bằng một đoạn thẳng có gốc, ngọn, phương, chiều và độ dài. Ta định nghĩa các phép toán *cộng vector* (+) và *nhân số thực với vector* (.) trên $\mathbf{R}^n$ như sau:

$\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}$,

$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$ và $c.X = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) \in \mathbf{R}^n$.

Về mặt hình học, phép *nhân số thực với vector* có thể thay đổi chiều và độ dài nhưng không thay đổi phương của vector. Phép *cộng vector* có thể tạo ra ra các vector có phương mới so với hai vector ban đầu.

Cấu trúc đại số $(\mathbf{R}^n, +, .)$ gọi là *không gian vector* $\mathbf{R}^n$ (*trên* $\mathbf{R}$).

Ta cũng có thể đồng nhất $\mathbf{R}^n$ với $M_{1 \times n}(\mathbf{R})$ trong đó phép *nhân số thực với vector* và phép *cộng vector* chính là phép *nhân số thực với ma trận* và phép *cộng ma trận* .

Ví dụ:

Với $X = (-5, 1, -4, 9), Y = (8, 0, -2, -7) \in \mathbf{R}^4$ và $c = \frac{2}{3} \in \mathbf{R}$, ta có

$X + Y = (3, 1, -6, 2) \in \mathbf{R}^4$ và $cX = \frac{2}{3}(8, 0, -2, -7) = (\frac{16}{3}, 0, -\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}) \in \mathbf{R}^4$.

1.2/ MINH HỌA HÌNH HỌC:

a) $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ được đồng nhất với ‘‘ Không gian các vector gốc O trên trục x’Ox ’’.

b) $\mathbf{R}^2 = \{ X = (a, b) \mid a, b \in \mathbf{R} \}$ được đồng nhất với ‘‘ Không gian các vector gốc O trên mặt phẳng (Oxy) ’’.

c) $\mathbf{R}^3 = \{ X = (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R} \}$ được đồng nhất với ‘‘ Không gian các vector gốc O trên trong hệ trục tọa độ (Oxyz) ’’.

1.3/ TÍNH CHẤT:

Không gian vector $(\mathbf{R}^n, +, .)$ trên $\mathbf{R}$ thỏa 7 tính chất sau đây:

(A_1) Phép (+) *giao hoán* và *kết hợp*, nghĩa là $\forall X, Y, Z \in \mathbf{R}^n$,

$X + Y = Y + X$ và $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$.

(A_2) $\exists \mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n, \forall X \in \mathbf{R}^n, \mathbf{O} + X = X + \mathbf{O} = X$.

Ta nói $\mathbf{O}$ là ‘‘ vector không ’’ và $\mathbf{O}$ là *phần tử trung hòa* của phép (+)

(A_3) $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\exists X' = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbf{R}^n$ thỏa

$X' + X = X + X' = \mathbf{O}$. Ký hiệu $X' = -X = (-1)X$ là *vector đối* của X.

(A_1), (A_2) và (A_3) là các tính chất riêng của phép (+).

(B_1) $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $1.X = X$.

(B_2) $\forall X \in \mathbf{R}^n, \forall c, d \in \mathbf{R}, c.(d.X) = (c.d).X$

(B_1) và (B_2) là các tính chất riêng của phép (.).

(C_1) $\forall X \in \mathbf{R}^n, \forall c, d \in \mathbf{R}, (c + d).X = c.X + d.X$

(C_2) $\forall X, Y \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}, c.(X + Y) = c.X + c.Y$

(C_1) và (C_2) là các tính chất liên quan giữa phép (+) và phép (.).

1.4/ HỆ QUẢ: $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\forall c \in \mathbf{R}$,

a) $c.X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (c = 0 \text{ hay } X = \mathbf{O})$.

b) $c.X \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow (c \neq 0 \text{ và } X \neq \mathbf{O})$.

II. KHÔNG GIAN VECTOR CON TRONG $\mathbf{R}^n$:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $W \subset \mathbf{R}^n$.

Các phép toán (+) và (.) trên $\mathbf{R}^n$ vẫn được sử dụng trên W.

a) Ta nói W là *một không gian vector con* của $\mathbf{R}^n$ (ký hiệu $W \leq \mathbf{R}^n$) nếu W thỏa các điều kiện sau đây:

* $\mathbf{O} \in W$ (1)

* $\forall \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \in W$ (2)

* $\forall \alpha \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha \in W$ (3).

b) Suy ra $W \leq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha + \beta \in W$ (4).

c) $\mathbf{R}^n$ luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{\mathbf{O}\}$ và chính $\mathbf{R}^n$.

Nếu $W \leq \mathbf{R}^n$ và $\{\mathbf{O}\} \neq W \neq \mathbf{R}^n$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của $\mathbf{R}^n$.

Nếu $W \leq \mathbf{R}^n$ và $W \neq \mathbf{R}^n$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của $\mathbf{R}^n$ và ký hiệu $W < \mathbf{R}^n$.

Không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^n$ cũng là không gian con thực sự của $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ:

a) $\mathbf{R}^1$ chỉ có hai không gian con là $\{\mathbf{O}\}$ và chính $\mathbf{R}^1$.

(chúng đều là các không gian con tầm thường).

b) $\mathbf{R}^2$ luôn luôn có hai không gian con tầm thường là $\{\mathbf{O}\}$ và chính $\mathbf{R}^2$.

Ta mô tả dưới dạng hình học các không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^2$.

Xét đường thẳng tùy ý (D) trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ sao cho (D) đi qua gốc O.

Đặt H = { các vector gốc O trên đường thẳng (D) }. Ta có $H \subset \mathbf{R}^2$ và H thỏa (4) trong (**2.1**). Do đó $H \le \mathbf{R}^2$ và H được gọi là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^2$. Suy ra $\mathbf{R}^2$ có vô số không gian con kiểu đường thẳng vì có vô số đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ đi qua gốc O.

c) $\mathbf{R}^3$ luôn luôn có hai không gian con tầm thường là $\{\mathbf{O}\}$ và chính $\mathbf{R}^3$.

Ta mô tả dưới dạng hình học các không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^3$.

– $\mathbf{R}^3$ có vô số không gian con kiểu đường thẳng (mỗi đường thẳng thuộc về không gian $\mathbf{R}^3$ và đi qua gốc O).

– Xét mặt phẳng (P) tùy ý trong $\mathbf{R}^3$ sao cho (P) đi qua gốc O.

Đặt K = { các vector gốc O trên mặt phẳng (P) }. Ta có $K \subset \mathbf{R}^3$ và K thỏa (4) trong (**2.1**). Do đó $K \le \mathbf{R}^3$ và K được gọi là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^3$. Suy ra $\mathbf{R}^3$ có vô số không gian con kiểu mặt phẳng vì có vô số mặt phẳng trong $\mathbf{R}^3$ đi qua gốc O.

d) Tổng quát, $\mathbf{R}^n$ ($n \ge 4$) có các không gian con như sau:

– Không gian con tầm thường $\{\mathbf{O}\}$ (ta gọi là không gian con *0 phẳng*).

– Vô số không gian con kiểu đường thẳng (ta gọi là không gian con *1 phẳng*).

– Vô số không gian con kiểu mặt phẳng (ta gọi là không gian con *2 phẳng*).

– Vô số không gian con *3 phẳng*, … , vô số không gian con *(n – 1) phẳng.*

Các không gian con *(n – 1) phẳng* của $\mathbf{R}^n$ được gọi là *các siêu phẳng* trong $\mathbf{R}^n$.

– Không gian con tầm thường $\mathbf{R}^n$ (gọi là không gian con *n phẳng*).

2.2/ MỆNH ĐỀ: Khi $W \leq \mathbf{R^n}$ thì W cũng được gọi là không gian vector (W, +, .)

trên **R** và nó cũng thỏa 7 tính chất sau đây [tương tự như ($\mathbf{R^n}$, +, .)] :

(A_1) $\forall X, Y, Z \in W, X + Y = Y + X$ và $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$.

(A_2) $\exists \mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0) \in W, \forall X \in W, \mathbf{O} + X = X + \mathbf{O} = X$.

(A_3) $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W, \exists X' = -X = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in W$ thỏa

$X' + X = X + X' = \mathbf{O}$.

(B_1) $\forall X \in W, 1.X = X$.

(B_2) $\forall X \in W, \forall c, d \in \mathbf{R}, c.(d.X) = (c.d).X$

(C_1) $\forall X \in W, \forall c, d \in \mathbf{R}, (c + d).X = c.X + d.X$

(C_2) $\forall X, Y \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.(X + Y) = c.X + c.Y$

Suy ra $\forall X \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (c = 0$ hay $X = \mathbf{O})$

$c.X \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow (c \neq 0$ và $X \neq \mathbf{O})$.

2.3/ MỆNH ĐỀ: (nhận diện không gian con của $\mathbf{R^n}$).

Cho $W \subset \mathbf{R^n}$. Khi đó

$$W \leq \mathbf{R^n} \Leftrightarrow \exists A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) : W = \{ X \in \mathbf{R^n} \mid AX = \mathbf{O} \}.$$

Như vậy mỗi không gian con của $\mathbf{R^n}$ đều là k*hông gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* nào đó.

Ví dụ: Giải thích tập hợp sau là một không gian con của $\mathbf{R^4}$:

$$W = \{ X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R^4} \mid 4u - v + 5w - 8t = -7u + 2w + t = 6u + 9v - 3w = -9u - 4v + 7w + 3t \}.$$

Ta có thể sử dụng [(1), (2), (3)] hoặc (4) của (**2.1**) để giải thích $W \leq \mathbf{R^4}$.

Tuy nhiên ta sẽ sử dụng (**2.3**) để giải thích $W \leq \mathbf{R^4}$ một cách đơn giản hơn.

Ta viết lại (bằng cách lần lượt phối hợp các vế sau với vế đầu tiên)

W = { X = (u, v, w, t) $\in$ $\mathbf{R}^4$ | 11u – v + 3w – 9t = 2u + 10v – 8w + 8t

= 13u + 3v – 2w – 11t = 0 }, nghĩa là

W = { X = (u, v, w, t) $\in$ $\mathbf{R}^4$ | AX = **O** } với $A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -4 & 4 \\ 13 & 3 & -2 & -11 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$.

Do đó $W \le \mathbf{R}^4$.

2.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (phủ nhận không gian con của $\mathbf{R}^n$).

Cho $W \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó

a) $W \not\le \mathbf{R}^n$ (W *không phải là không gian con của* $\mathbf{R}^n$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} O \notin W (5) \\ hay \\ \exists \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \notin W (6) \\ hay \\ \exists \alpha \in W, \exists c \in R, c\alpha \notin W (7) \end{array}\right.$.

b) $W \not\le \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in W, \exists c \in \mathbf{R}, c\alpha + \beta \notin W$.

Khi giải thích $W \not\le \mathbf{R}^n$, ta thường sử dụng a), nghĩa là chỉ ra W thỏa (5) hay thỏa (6) hay thỏa (7) là đủ.

<u>Ví dụ:</u> Giải thích các tập hợp sau đây không phải là không gian con của $\mathbf{R}^3$:

a) H = { X = (u, v, w) $\in$ $\mathbf{R}^3$ | uvw = 0 }. Để ý H không thỏa (5) và (7).

H thỏa (6) vì $\exists \alpha = (1, 0, 0), \beta = (0, 1, 1) \in H, \alpha + \beta = (1, 1, 1) \notin H$. Vậy $H \not\le \mathbf{R}^3$.

b) K = { X = (u, v, w) $\in$ $\mathbf{R}^3$ | 2u – 5v + 8w $\ge$ 1 }. K thỏa (5) vì **O** = (0, 0, 0) $\notin$ K.

Vậy $K \not\le \mathbf{R}^3$. Để ý K cũng thỏa (7) nhưng không thỏa (6).

c) L = { X = (u, v, w) $\in$ $\mathbf{R}^3$ | $u^2 + 3v - 4w^3 = -3$ }.

L thỏa (7) vì $\exists \alpha = (0, -1, 0) \in L, \exists c = -1 \in \mathbf{R}, c\alpha = (0, 1, 0) \notin L$. Vậy $L \not\le \mathbf{R}^3$.

Để ý L cũng thỏa (5) và (6).

2.5/ KHÔNG GIAN GIAO VÀ KHÔNG GIAN TỔNG:

Cho $V, W, V_1, V_2, \ldots, V_k$ là *các không gian vector con* của $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ $(k \geq 2)$.

a) Đặt $V \cap W = \{ \alpha \mid \alpha \in V \text{ và } \alpha \in W \}$ và

$V + W = \{ \alpha = \beta + \gamma \mid \beta \in V \text{ và } \gamma \in W \}$.

Dùng (4) của **(2.1)**, ta kiểm chứng được $(V \cap W)$ và $(V + W)$ đều là *các không gian vector con* của $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Ta nói $(V \cap W)$ và $(V + W)$ lần lượt là các *không gian giao* và *không gian tổng* của V và W.

b) Đặt $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k = \bigcap_{j=1}^{k} V_j = \{ \alpha \mid \alpha \in V_j, \forall j = 1, 2, \ldots, k \}$ và

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_k = \sum_{j=1}^{k} V_j = \{ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \mid \alpha_j \in V_j, \forall j = 1, 2, \ldots, k \}.$$

Dùng (4) của **(2.1)**, ta kiểm chứng được $\bigcap_{j=1}^{k} V_j$ và $\sum_{j=1}^{k} V_j$ đều là *các không gian vector con* của $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Ta nói $\bigcap_{j=1}^{k} V_j$ và $\sum_{j=1}^{k} V_j$ lần lượt là các *không gian giao* và *không gian tổng* của $V_1, V_2, \ldots$ và V_k.

c) Đặt $V \cup W = \{ \alpha \mid \alpha \in V \text{ hay } \alpha \in W \}$ và

$$V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = \bigcup_{j=1}^{k} V_j = \{ \alpha \mid \exists j = 1, 2, \ldots, k \text{ thỏa } \alpha \in V_j \}.$$

d) Ta có $V \cup W$ và $\bigcup_{j=1}^{k} V_j$ *không nhất thiết* là các không gian vector con của $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

Ví dụ:

a) V và W là các không gian con kiểu đường thẳng của $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}$ sao cho hai đường thẳng tương ứng giao nhau tại O. Ta có $V \cap W = \{\mathbf{O}\}$ và $V + W = \mathbf{R}^{\mathbf{2}}$.

b) H và K lần lượt là các không gian con kiểu đường thẳng và mặt phẳng của $\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$ sao cho đường thẳng và mặt phẳng tương ứng giao nhau tại O.

Ta có $H \cap K = \{\mathbf{O}\}$ và $H + K = \mathbf{R}^3$.

c) P và Q là các không gian con kiểu mặt phẳng của $\mathbf{R}^3$ sao cho hai mặt phẳng tương ứng giao nhau theo giao tuyến (D) qua O. Ta có $P \cap Q = Z$ (Z là không gian con kiểu đường thẳng tương ứng với (D) của $\mathbf{R}^2$) và $P + Q = \mathbf{R}^3$.

d) E, F và G là các không gian con kiểu đường thẳng của $\mathbf{R}^3$ sao cho ba đường thẳng tương ứng không đồng phẳng và giao nhau tại O. Ta có $E \cap F \cap G = \{\mathbf{O}\}$ và $E + F + G = \mathbf{R}^3$.

2.6/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho V và W là các không gian vector con của $\mathbf{R}^n$.

a) Nếu $W \subset V$ thì ta cũng nói W là *một không gian vector con* (*trên* $\mathbf{R}$) của V và ký hiệu $W \leq V$.

b) Không gian $\{\mathbf{O}\}$ chỉ có duy nhất một không gian con là chính $\{\mathbf{O}\}$.

Nếu $V \neq \{\mathbf{O}\}$ thì V luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{\mathbf{O}\}$ và V.

Nếu $W \leq V$ và $\{\mathbf{O}\} \neq W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của V.

Nếu $W \leq V$ và $W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của V và ký hiệu là $W < V$.

Không gian con không tầm thường của W cũng là không gian con thực sự của W.

<u>Ví dụ:</u>

W và V lần lượt là các không gian con kiểu đường thẳng và mặt phẳng của $\mathbf{R}^3$ sao cho đường thẳng chứa trong mặt phẳng và chúng đều qua O. Ta có $\{\mathbf{O}\} < W < V < \mathbf{R}^3$.

III. KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP HỢP HỮU HẠN:

3.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

a) Chọn tùy ý $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ và đặt $\alpha = (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k) \in \mathbf{R}^n$.

Ta nói α là *một tổ hợp tuyến tính của* S (hay *của* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ và α_k).

Như vậy từ một số hữu hạn các vector cho trước, ta có thể tạo ra được nhiều tổ hợp tuyến tính khác nhau của các vector đó.

b) Cho $\gamma \in \mathbf{R}^n$. Khi đó

* γ là *một tổ hợp tuyến tính của* $S \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}, \gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) *có nghiệm trên* $\mathbf{R}$.

* γ *không là tổ hợp tuyến tính của* $S \Leftrightarrow \forall c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}, \gamma \neq c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) *vô nghiệm trên* $\mathbf{R}$.

Ví dụ: Cho $S = \{ \alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (2, 3, -1, 0), \alpha_3 = (-1, -1, 1, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

a) $\alpha = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 = -2(1,1,1,1) + 3(2,3,-1,0) - 5(-1,-1,1,1) = (9,12,-10,-7) \in \mathbf{R}^4$.

$\beta = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4(1, 1, 1, 1) - 3(2, 3, -1, 0) + 2(-1,-1, 1, 1) = (-4,-7, 9, 6) \in \mathbf{R}^4$.

b) Cho $\gamma = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

γ là một tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}, \gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \gamma \Leftrightarrow c_1(1,1,1,1) + c_2(2,3,-1,0) + c_3(-1,-1,1,1) = (u, v, w, t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = u \\ c_1 + 3c_2 - c_3 = v \\ c_1 - c_2 + c_3 = w \\ c_1 + c_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & t \\ 1 & 3 & -1 & v \\ 1 & 2 & -1 & u \\ 1 & -1 & 1 & w \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & 0 & v-u \\ 0 & 2 & -2 & u-t \\ 0 & -1 & 0 & w-t \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & t \\ 0 & 1^* & 0 & v-u \\ 0 & 0 & -2^* & u+2w-3t \\ 0 & 0 & 0 & v+w-u-t \end{array} \right) \end{array}.$$

Như vậy : $\gamma = (u, v, w, t)$ là một tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow v + w - u - t = 0$ (*).

Lúc đó ta có biểu diễn duy nhất

$\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$ với $c_3 = 2^{-1}(3t - u - 2w)$, $c_2 = v - u$ và $c_1 = 2^{-1}(u + 2w - t)$ (□)

Suy ra $\gamma = (u, v, w, t)$ không là tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow v + w - u - t \neq 0$ (**).

Xét cụ thể $\varepsilon = (9, 10, -2, -1)$ và $\theta = (-7, 1, 4, -8) \in \mathbf{R}^4$.

Ta có ε thỏa (*) và θ thỏa (**) nên ε là một tổ hợp tuyến tính của S với

$\varepsilon = (3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3)$ do (□) và θ không là tổ hợp tuyến tính của S.

3.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

a) Đặt W là *tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính có từ* S (ký hiệu $W = < S >$),

nghĩa là $W = < S > = \{ \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R} \} \subset \mathbf{R}^n$.

Ta chứng minh được $W = < S >$ là một không gian vector con của $\mathbf{R}^n$ [sử dụng (4) của (**2.1**)].

Ta nói $W = < S >$ là *không gian vector con* (*của* $\mathbf{R}^n$) *sinh bởi tập hợp* S.

b) Nếu $S = \varnothing$ thì ta qui ước $< S > = \{\mathbf{O}\}$($\varnothing$ sinh ra không gian con $\{\mathbf{O}\}$ của $\mathbf{R}^n$).

c) $< S >$ là *không gian vector con nhỏ nhất chứa được S* của $\mathbf{R}^n$, nghĩa là

$\forall V \leq \mathbf{R}^n, S \subset V \Rightarrow < S > \subset V$.

d) Cho $\gamma \in \mathbf{R}^n$. Khi đó

$\gamma \in W = < S > \Leftrightarrow \gamma$ là một tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Suy ra : $\gamma \notin W = < S > \Leftrightarrow \gamma$ không là tổ hợp tuyến tính của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) vô nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Ví dụ:

Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3,2,1,5), \alpha_2 = (4,-3,-1,-7), \alpha_3 = (1,-3,2,-4), \alpha_4 = (-2,5,-3,7) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Ta mô tả $W = < S >$ và tìm điều kiện để vector $\gamma = (u, v, w, t) \in W$.

a) $W = < S > = \{ \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R} \}$

$= \{\alpha = c_1(-3,2,1,5) + c_2(4,-3,-1,-7) + c_3(1,-3,2,-4) + c_4(-2,5,-3,7) \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R} \}$

$= \{ \alpha = (-3c_1 + 4c_2 + c_3 - 2c_4, 2c_1 - 3c_2 - 3c_3 + 5c_4, c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4, 5c_1 - 7c_2 - 4c_3 + 7c_4)$

$\mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R} \}$.

b) Cho $\gamma = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

$\gamma \in W = < S > \Leftrightarrow \gamma$ là một tổ hợp tuyến tính của S

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \gamma$

$\Leftrightarrow$ $c_1(-3, 2, 1, 5) + c_2(4, -3, -1, -7) + c_3(1, -3, 2, -4) + c_4(-2, 5, -3, 7) = (u, v, w, t)$.

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & w \\ -3 & 4 & 1 & -2 & u \\ 2 & -3 & -3 & 5 & v \\ 5 & -7 & -4 & 7 & t \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -1 & 2 & -3 & w \\ 0 & 1 & 7 & -11 & u+3w \\ 0 & -1 & -7 & 11 & v-2w \\ 0 & -2 & -14 & 22 & t-5w \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 9 & -14 & u+4w \\ 0 & 1^* & 7 & -11 & u+3w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u+v+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u+w+t \end{array}\right) \end{array}$$

$\gamma = (u,v,w,t) \in W = < S > \Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow (u + v + w = 0 = 2u + w + t)$ (*).

Lúc đó ta có vô số biểu diễn $\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4$ với $c_3 = a, c_4 = b$ ($a, b \in \mathbf{R}$),

$c_1 = 14b - 9a + u + 4w$ và $c_2 = 11b - 7a + u + 3w$ (□).

$\gamma = (u,v,w,t) \notin W \Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow (u + v + w \neq 0$ hay $2u + w + t \neq 0)$ (**).

Xét cụ thể $\varepsilon = (5, -6, 1, -11)$ và $\theta = (-3, 2, 7, -4) \in \mathbf{R}^4$.

Ta có ε thỏa (*) và θ thỏa (**) nên $\theta \notin W = < S >$ và $\varepsilon \in W = < S >$ với vô số biểu diễn $\varepsilon = (14b - 9a + 9)\alpha_1 + (11b - 7a + 8)\alpha_2 + a\alpha_3 + b\alpha_4$ $(a, b \in \mathbf{R})$ do (□).

3.3/ <u>MINH HỌA:</u> Các vector β, γ, δ trong $\mathbf{R}^n$ dưới đây đều có gốc là O.

a) Nếu $S = \{\mathbf{O}\} \subset \mathbf{R}^n$ thì $< S > = \{ \alpha = c\mathbf{O} = \mathbf{O} \mid c \in \mathbf{R} \} = \{\mathbf{O}\} = S$.

b) Nếu $S = \{ \beta\} \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{O}\}$ thì $< S > = \{ \alpha = c\beta \mid c \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^n$ và đường thẳng này chứa β.

c) Nếu $S = \{ \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^n$ (β, γ *khác phương*) thì $< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma \mid c, d \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^n$ và mặt phẳng này chứa β, γ.

d) Nếu $S = \{ \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^n \setminus\{\mathbf{O}\}$ (β, γ *cùng phương*) thì $< S > = \{\alpha = c\beta + d\gamma \mid c, d \in \mathbf{R}\}$ là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^n$ và đường thẳng này chứa β và γ.

e) Nếu $S = \{ \beta, \gamma, \delta \} \subset \mathbf{R}^3$ (β, γ, δ *không đồng phẳng*) thì

$< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d, e \in \mathbf{R} \}$ và $< S > = \mathbf{R}^3$.

f) Nếu $S = \{ \beta, \gamma, \delta \} \subset \mathbf{R}^n$ (β, γ, δ *khác phương đôi một nhưng đồng phẳng*) thì

$< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d, e \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^n$ và mặt phẳng này chứa β, γ và δ.

g) Nếu $S = \{ \beta, \gamma, \delta \} \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{O}\}$ (β, γ, δ *cùng phương với nhau*) thì

$< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d, e \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^n$ và đường thẳng này chứa β, γ và δ.

3.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u>

Cho các tập hợp hữu hạn $S_1, S_2, \ldots, S_k \subset \mathbf{R}^n$ $(k \geq 2)$ và $< S_j > = W_j \leq \mathbf{R}^n$ $(1 \leq j \leq k)$.

Đặt $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$. Ta có $< S > = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $S_1 = \{\alpha\}$, $S_2 = \{ \beta, \gamma \}$, $S_3 = \{ \delta, \varepsilon, \theta \} \subset \mathbf{R}^n$ và $< S_j > = W_j \leq \mathbf{R}^n$ $(1 \leq j \leq 3)$.

Đặt $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta \}$. Ta có $< S > = W_1 + W_2 + W_3$.

IV. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH:

4.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

Xét phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \mathbf{O}$ (*) với các ẩn số thực $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

(*) có ít nhất một nghiệm thực là $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ (*nghiệm tầm thường*).

a) Nếu (*) có *nghiệm thực duy nhất* (*nghiệm tầm thường*) thì ta nói S *độc lập tuyến tính* (nghĩa là không có vector nào của S được tính theo các vector khác trong S dưới dạng tổ hợp tuyến tính).

b) Nếu (*) có *vô số nghiệm thực* (có *nghiệm tầm thường* và *vô số nghiệm không tầm thường*) thì ta nói S *phụ thuộc tuyến tính* (nghĩa là có ít nhất một vector của S được tính theo các vector khác trong S dưới dạng tổ hợp tuyến tính).

c) Nếu $S = \varnothing$ thì ta qui ước S *độc lập tuyến tính.*

Ví dụ:

a) Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3, 1, 2, 7), \alpha_2 = (1, -2, 5, -4), \alpha_3 = (2, 4, 1, 6) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \mathbf{O} \Leftrightarrow c_1(-3,1,2,7) + c_2(1,-2,5,-4) + c_3(2,4,1,6) = (0, 0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 14 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -22 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 182 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$) nên S độc lập tuyến tính.

b) Cho $T = \{ \beta_1 = (3, -4, 1, 7), \beta_2 = (-2, 6, 8, -1), \beta_3 = (-13, 24, 13, -23) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Phương trình $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 = \mathbf{O} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c_1(3, -4, 1, 7) + c_2(-2, 6, 8, -1) + c_3(-13, 24, 13, -23) = (0, 0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 13 & 0 \\ 3 & -2 & -13 & 0 \\ -2 & 3 & 12 & 0 \\ 7 & -1 & -23 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 8 & 13 & 0 \\ 0 & -26 & -52 & 0 \\ 0 & 19 & 38 & 0 \\ 0 & -57 & -114 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Phương trình có vô số nghiệm là $[\, c_3 = a\ (a \in \mathbf{R}),\ c_1 = 3a,\ c_2 = -2a \,]$ nên T phụ thuộc tuyến tính. Trích ra một nghiệm không tầm thường (bằng cách chọn $a = 1$), ta có $(c_1 = 3,\ c_2 = -2,\ c_3 = 1)$ và được hệ thức $3\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3 = \mathbf{O}$. Suy ra $\beta_3 = 2\beta_2 - 3\beta_1$, nghĩa là β_3 được tính theo β_1 và β_2 dưới dạng tổ hợp tuyến tính.

4.2/ <u>NHẬN XÉT:</u>

a) $S = \{ \alpha \} \subset \mathbf{R}^n$ **.**

Nếu $\alpha = \mathbf{O}$ thì S *phụ thuộc tuyến tính.*

(phương trình $c.\mathbf{O} = \mathbf{O}$ có vô số nghiệm $c \in \mathbf{R}$).

Nếu $\alpha \neq \mathbf{O}$ thì S *độc lập tuyến tính*.

(phương trình $c.\alpha = \mathbf{O}$ có nghiệm thực duy nhất $c = 0$).

b) $S = \{ \alpha, \beta \} \subset \mathbf{R}^n$.

Nếu α cùng phương với β (α và β có các thành phần tỉ lệ với nhau) thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

Nếu α khác phương với β (α và β có các thành phần không tỉ lệ với nhau) thì S *độc lập tuyến tính*.

c) $S = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^3$.

Nếu α, β, γ đồng phẳng thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

Nếu α, β, γ không đồng phẳng thì S *độc lập tuyến tính*.

d) Cho $S \subset T \subset \mathbf{R}^n$.

Nếu S phụ thuộc tuyến tính thì T cũng phụ thuộc tuyến tính.

Nếu T độc lập tuyến tính thì S cũng độc lập tuyến tính.

Nếu $\mathbf{O} \in S$ thì S phụ thuộc tuyến tính (vì $\{\mathbf{O}\}$ phụ thuộc tuyến tính).

Nếu S độc lập tuyến tính thì $\mathbf{O} \notin S$.

Ví dụ:

Xét $S = \{\alpha = (-2,4,-8,6), \beta = (3,-6,12,-9)\}$ và $T = \{\gamma = (5,1,-4,7), \delta = (-1,8,2,-3)\} \subset \mathbf{R}^4$.

Ta có S phụ thuộc tuyến tính ($\beta = \frac{-3}{2}\alpha$) và T độc lập tuyến tính (γ không tỉ lệ với δ).

4.3/ MỆNH ĐỀ: (xác định sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính)

Cho $m \geq 3$ và $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbf{R}^n$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và ta có thể hoán đổi các dòng của A.

Ta tìm S_A (dạng bậc thang của A) để xác định $r(A)$ với $r(A) \leq m$.

a) Nếu $m > n$ thì S phụ thuộc tuyến tính.

b) Xét trường hợp $m \leq n$.

Nếu $r(A) < m$ thì S phụ thuộc tuyến tính.

Nếu $r(A) = m$ thì S độc lập tuyến tính.

c) Xét trường hợp đặc biệt $m = n$ và $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Nếu A không khả nghịch ($|A| = 0$) thì S phụ thuộc tuyến tính.

Nếu A khả nghịch ($|A| \neq 0$) thì S độc lập tuyến tính.

Ví dụ:

a) Cho $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \} \subset \mathbf{R}^3$. Do $m = |Z| = 5 > n = 3$ nên Z phụ thuộc tuyến tính.

b) Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3, 1, 2, 7), \alpha_2 = (1, -2, 5, -4), \alpha_3 = (2, 4, 1, 6) \} \subset \mathbf{R}^4$ và

$T = \{ \beta_1 = (3, -4, 1, 7), \beta_2 = (-2, 6, 8, -1), \beta_3 = (-13, 24, 13, -23) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 7 \\ -2 & 6 & 8 & -1 \\ -13 & 24 & 13 & -23 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 & -4 \\ 0 & -5 & 17 & -5 \\ 0 & 8 & -9 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 & -4 \\ 0 & -5^* & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 91^* & 30 \end{pmatrix} = S_A \text{ có } r(A) = 3 = m = 3 < n = 4.$$

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 9 & 6 \\ 0 & 10 & 26 & 11 \\ 0 & 50 & 130 & 55 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 9 & 6 \\ 0 & 10^* & 26 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_B \text{ có } r(B) = 2 < m = 3 < n = 4.$$

Do đó S độc lập tuyến tính và T phụ thuộc tuyến tính.

c) Cho $H = \{ \gamma_1 = (a, 1, 1), \gamma_2 = (1, a, 1), \gamma_3 = (1, 1, a) \} \subset \mathbf{R}^3$ ($m = n = 3$).

Đặt $C = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ và

$$|C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1^* & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (a-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2).$$

Như vậy H độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ C khả nghịch $\Leftrightarrow |C| \neq 0 \Leftrightarrow -2 \neq a \neq 1$.

H phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow$ C không khả nghịch $\Leftrightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow$ ($a = -2$ hoặc $a = 1$).

V. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTOR:

5.1/ VẤN ĐỀ: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$. Có nhiều tập hợp hữu hạn của $\mathbf{R}^n$ sinh ra W. Ta muốn tìm một tập sinh S nào đó của W sao cho S *có số lượng vector là ít nhất*. Khi đó ta nói

S là *một tập sinh tối ưu* của W.

5.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ và $W = < S >$ với S là một tập hợp hữu hạn của $\mathbf{R}^n$.

a) Nếu S *độc lập tuyến tính* thì S chính là *một tập sinh tối ưu* của W.

(nghĩa là $\forall T \subset S, T \neq S \Rightarrow < T > \neq W$)

b) Nếu S *phụ thuộc tuyến tính* thì S là *một tập sinh chưa tối ưu* của W.

(nghĩa là $\exists T \subset S, T \neq S$ và $< T > = W$)

<u>Ví dụ:</u> $W = \mathbf{R}^2$.

a) $S = \{ \alpha, \beta \} \subset \mathbf{R}^2$ (α khác phương với β). Ta có $< S > = \mathbf{R}^2$ và S độc lập tuyến tính nên S chính là một tập sinh tối ưu của $\mathbf{R}^2$. Xét $T = \{ \alpha \} \subset S$ và $T \neq S$. Ta có $< T > \neq \mathbf{R}^2$ vì $< T >$ là một không gian con kiểu đường thẳng của $\mathbf{R}^2$.

b) $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^2$ (α, β, γ đôi một khác phương nhau).

Ta có $< Z > = \mathbf{R}^2$ và Z phụ thuộc tuyến tính nên Z là một tập sinh chưa tối ưu của $\mathbf{R}^2$. Xét $T = \{ \alpha, \beta \} \subset S$ thì $T \neq S$ và $< T > = \mathbf{R}^2$.

5.3/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $W \leq \mathbf{R}^n$.

Một cơ sở của W là *một tập sinh độc lập tuyến tính* (*một tập sinh tối ưu)* của W.

5.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $W \leq \mathbf{R}^n$.

a) Nếu $W \neq \{\mathbf{O}\}$ thì W *có vô số cơ sở.*

b) Nếu $W \neq \{\mathbf{O}\}$ và W có cơ sở B gồm m vector thì mọi cơ sở khác cũng có m vector. Ta gọi m là *số chiều của không gian vector* W và ký hiệu m = dimW (dim = dimension). Như vậy *số chiều của một không gian vector* là *số lượng các vector hiện diện trong mỗi cơ sở* của nó.

Ví dụ:

a) $<\varnothing> = \{\mathbf{O}\}$ và $\varnothing$ độc lập tuyến tính (theo qui ước) nên không gian $\{\mathbf{O}\}$ có *cơ sở duy nhất* là $\varnothing$ và $\dim\{\mathbf{O}\} = |\varnothing| = 0$. Ta nói $\{\mathbf{O}\}$ là không gian 0 chiều.

b) $\mathbf{R}^1$ có vô số cơ sở khác nhau. Mỗi cơ sở B của $\mathbf{R}^1$ gồm một vector $\alpha \neq \mathbf{O}$ tùy ý vì $B = \{\alpha\}$ độc lập tuyến tính và $<B> = \mathbf{R}^1$.

Suy ra $\dim\mathbf{R}^1 = |B| = 1$ và ta nói $\mathbf{R}^1$ là không gian 1 chiều.

c) $\mathbf{R}^2$ có vô số cơ sở khác nhau. Mỗi cơ sở B của $\mathbf{R}^2$ gồm hai vector α, β *khác phương nhau* tùy ý vì $B = \{\alpha, \beta\}$ độc lập tuyến tính và $<B> = \mathbf{R}^2$.

Suy ra $\dim\mathbf{R}^2 = |B| = 2$ và ta nói $\mathbf{R}^2$ là không gian 2 chiều.

d) $\mathbf{R}^3$ có vô số cơ sở khác nhau. Mỗi cơ sở B của $\mathbf{R}^3$ gồm ba vector α, β, γ *không đồng phẳng* tùy ý vì $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ độc lập tuyến tính và $<B> = \mathbf{R}^3$.

Suy ra $\dim\mathbf{R}^3 = |B| = 3$ và ta nói $\mathbf{R}^3$ là không gian 3 chiều.

e) $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$ có vô số cơ sở khác nhau. Trong đó có một cơ sở đơn giản thông dụng gọi là *cơ sở chính tắc* $B_o = \{\varepsilon_1 = (1,0, ...,0), \varepsilon_2 = (0,1,0, ...,0), ..., \varepsilon_n = (0,0, ...,0,1)\}$.

Suy ra $\dim\mathbf{R}^n = |B_o| = n$ và ta nói $\mathbf{R}^n$ là không gian n chiều.

f) $S = \{\alpha = (8,7)\} \subset \mathbf{R}^2$ và $V = <S> = \{\delta = a\alpha \mid a \in \mathbf{R}\} \leq \mathbf{R}^2$. Do $\alpha \neq \mathbf{O}$ nên S độc lập tuyến tính và cũng là một cơ sở của V. Ta có V là một không gian con kiểu đường thẳng của $\mathbf{R}^2$ có $\dim V = |S| = 1 < \dim\mathbf{R}^2 = 2$. Như vậy $\{\mathbf{O}\} < V < \mathbf{R}^2$ và V là một không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^2$.

g) $T = \{\beta = (5,-2,4), \gamma = (-3,1,8)\} \subset \mathbf{R}^3$ và $W = <T> = \{\delta = b\beta + c\gamma \mid b, c \in \mathbf{R}\} \leq \mathbf{R}^3$

Do β không tỉ lệ với γ nên T độc lập tuyến tính và cũng là một cơ sở của W. Ta có W là một không gian con kiểu mặt phẳng của $\mathbf{R}^3$ có $\dim W = |T| = 2 < \dim\mathbf{R}^3 = 3$.

Như vậy $\{\mathbf{O}\} < W < \mathbf{R}^3$ và W là một không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^3$.

5.5/ NHẬN DIỆN CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^n$:

Cho $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \} \subset \mathbf{R}^n$ với $|S| = n$. Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

a) S là một cơ sở của $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow$ A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

b) S không là cơ sở của $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow$ A không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 0$.

Ví dụ:

a) Cho $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ và $T = \{ \delta, \varepsilon, \theta, \eta, \lambda \}$ trong $\mathbf{R}^4$. Ta có $|Z| = 3$ và $|T| = 5$ nên Z và T không phải là cơ sở của $\mathbf{R}^4$ vì mỗi cơ sở của $\mathbf{R}^4$ có 4 vector.

b) Cho $S = \{ \alpha = (1, -2, a), \beta = (2, a-2, 1), \gamma = (2, a-5, a+1) \} \subset \mathbf{R}^3$ có $|S| = 3$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & a-2 & 1 \\ 2 & a-5 & a+1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & a-2 & 1 \\ 2 & a-5 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & -2 & a \\ 0 & 3 & -a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 3 & -a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-3).$$

S là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow$ A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$.

S không là cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow$ A không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow$ (a = 1 hoặc a = 3).

5.6/ Ý NGHĨA CỦA CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU:

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ và W có cơ sở $B = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$ ($\dim W = |B| = m$).

a) $\forall \alpha \in W$, có duy nhất $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ thỏa $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m$ (*).

Muốn tìm $c_1, c_2, \ldots, c_m$, ta phải giải phương trình vector (*).

Như vậy không gian W hoàn toàn được xác định bởi một cơ sở bất kỳ của nó (vì mỗi vector trong W được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính theo các vector trong cơ sở). Do đó muốn xác định một không gian vector trong $\mathbf{R^n}$, ta chỉ cần giới thiệu một cơ sở của nó là đủ. Điều này rất thuận lợi vì các không gian vector $\neq \{\mathbf{O}\}$ có vô hạn vector trong khi mỗi cơ sở của nó chỉ có hữu hạn vector.

b) Các không gian vector ($\neq \{\mathbf{O}\}$) có vô hạn vector nên ta không thể so sánh " tầm vóc (độ lớn) '' của các không gian dựa trên số lượng vector của chúng được. Chúng ta dùng đại lượng " số chiều " để thấy được " tầm vóc (độ lớn) '' của các không gian. Không gian có số chiều càng cao thì " tầm vóc " càng lớn.

Ví dụ:

a) Cho $B = \{X_1 = (7,-2), X_2 = (-4,1)\}$ là một cơ sở của $\mathbf{R^2}$ (vì $\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$).

$\forall X = (u, v) \in \mathbf{R^2}$, ta có biểu diễn tổ hợp tuyến tính duy nhất $X = (-u - 4v)X_1 + (-2u - 7v)X_2$ bằng cách giải hệ $X = c_1X_1 + c_2X_2$ với các ẩn số thực c_1 và c_2:

$$(X_1^t \ X_2^t \mid X^t) = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & u \\ -4 & 1 & v \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & -1 & u+3v \\ 0 & -1 & 2u+7v \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & 0 & -u-4v \\ 0 & 1^* & -2u-7v \end{array}\right) \end{array}.$$

b) Cho $S = \{ \alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (2, 3, -1, 0), \alpha_3 = (-1, -1, 1, 1) \} \subset \mathbf{R^4}$.

Xét $W = \langle S \rangle = \{ \alpha = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 \mid a, b, c \in \mathbf{R} \} \leq \mathbf{R^4}$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1^* & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2^* & 2 \end{pmatrix} = S_A$$ thì $r(A) = 3$ nên S độc lập tuyến tính và cũng là một cơ sở của W với $\dim W = |S| = 3 < \dim \mathbf{R^4} = 4$. Suy ra $W < \mathbf{R^4}$.

Theo **Ví dụ** của (**3.1**), $\forall \gamma = (u, v, w, t) \in W$ (γ thỏa $v + w - u - t = 0$), ta có biểu diễn duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính $\gamma = \frac{u+2w-t}{2}\alpha_1 + (v-u)\alpha_2 + \frac{3t-u-2w}{2}\alpha_3$.

5.7/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN SINH BỞI MỘT TẬP HỢP HỮU HẠN:

a) Vấn đề: Cho $W = < S > \leq \mathbf{R}^4$ với $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$.

Tìm một cơ sở cho W.

b) Giải quyết:

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và tìm ma trận dạng bậc thang S_A của A.

S_A có k dòng *không tầm thường* tạo thành các vector $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$.

$C = \{ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \}$ là một cơ sở của $W = < S >$ và $\dim W = | S | = k = r(A)$.

Ta cũng nói W là *không gian dòng* của ma trận A.

<u>Ví dụ:</u> Trong $\mathbf{R}^4$, cho tập hợp (được mô tả theo các tham số thực a, b, c, d)

$W = \{X = (a + 4b - 2c + 3d, 2a + 7b - 3c + 7d, 2a + b + 4c + 15d, -a - 2b - 5d) \mid a,b,c,d \in \mathbf{R}\}$

Hãy tìm một tập hợp hữu hạn S của $\mathbf{R}^4$ thỏa $W = < S > \leq \mathbf{R}^4$ và tìm một cơ sở cho W.

Dùng cách tách riêng các tham số và đặt mỗi tham số làm thừa số chung, ta có

$$W = \{ X = (a,2a,2a,-a) + (4b,7b,b,-2b) + (-2c,-3c,4c,0) + (3d,7d,15d,-5d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$$
$$= \{ X = a(1, 2, 2, -1) + b(4, 7, 1, -2) + c(-2, -3, 4, 0) + d(3, 7, 15, -5) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}.$$

Vậy $W = < S >$ với $S = \{\alpha_1 = (1,2,2,-1), \alpha_2 = (4,7,1,-2), \alpha_3 = (-2,-3,4,0), \alpha_4 = (3,7,15,-5)\}$.

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 15 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1^* & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}.$$

W có cơ sở là $C = \{ \gamma_1 = (1,2,2,-1), \gamma_2 = (0,1,9,-2), \gamma_3 = (0,0,-1,0) \}$ và $\dim W = | C | = 3$.

5.8/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT:

a) *Vấn đề*: Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $W = \{ X \in \mathbf{R}^n \mid AX = \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^n$.

Tìm một cơ sở cho W.

b) *Giải quyết*: Giải hệ $AX = \mathbf{O}$ để mô tả không gian nghiệm W.

- Nếu $W = \{\mathbf{O}\}$ thì W có cơ sở (duy nhất) là $\varnothing$ và $\dim W = |\varnothing| = 0$.
- Nếu hệ có vô số nghiệm với k ẩn tự do thì ta mô tả W theo k ẩn tự do đó.

Dùng cách tách riêng các ẩn tự do và đặt mỗi ẩn tự do làm thừa số chung, ta có được môt tập sinh D (gồm k vector) cho W. Tập sinh D độc lập tuyến tính (kết quả này đã được chứng minh trong lý thuyết) nên D là *một cơ sở* của W.

Ta có $\dim W = |D| = k =$ (Số ẩn tự do của hệ $AX = \mathbf{O}$).

Ví dụ:

a) Cho $V = \{ X \in \mathbf{R}^4 \mid HX = \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^4$ với $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$.

Ta tìm một cơ sở cho V. Trước hết ta giải hệ $HX = \mathbf{O}$ với $X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Ta có

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & 5 & -10 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5^* & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5^* & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6^* & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -28^* \end{vmatrix} = 840 \neq 0.$$

Vậy H khả nghịch và hệ $HX = \mathbf{O}$ chỉ có nghiệm tầm thường $X = \mathbf{O} = (0, 0, 0, 0)$.

Do đó $V = \{\mathbf{O}\}$ và V có cơ sở là $\varnothing$ với $\dim V = |\varnothing| = 0$.

b) Cho $W = \{ X \in \mathbf{R}^5 \mid AX = \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^5$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 \\ -4 & 20 & 7 & 40 & -15 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbf{R})$.

Ta tìm một cơ sở cho W. Trước ta giải hệ $AX = \mathbf{O}$ với $X = (x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5$.

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 & 0 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 & 0 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 & 0 \\ -4 & 20 & 7 & 40 & -15 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -5 & -1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -5 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hệ có vô số nghiệm với 3 ẩn tự do : $y, t, u \in \mathbf{R}$, $x = 5y + 3t - 2u$, $z = u - 4t$.

$W = \{ X = (5y + 3t - 2u, y, u - 4t, t, u) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$

$= \{ X = y(5, 1, 0, 0, 0) + t(3, 0, -4, 1, 0) + u(-2, 0, 1, 0, 1) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$.

$W = < D >$ với $D = \{ \delta_1 = (5, 1, 0, 0, 0), \delta_2 = (3, 0, -4, 1, 0), \delta_3 = (-2, 0, 1, 0, 1) \} \subset \mathbf{R}^5$.

D độc lập tuyến tính nên D là một cơ sở của W và $\dim W = | D | = 3$ = số ẩn tự do của hệ.

5.9/ <u>TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN TỔNG:</u>

a) <u>Vấn đề:</u> Cho $V = < S > \leq \mathbf{R}^n$ và $W = < T > \leq \mathbf{R}^n$ với S, T là các tập hợp con hữu hạn của $\mathbf{R}^n$. Ta có $(V + W) \leq \mathbf{R}^n$. Ta tìm một cơ sở cho $V + W$.

b) <u>Giải quyết:</u> Đặt $Z = S \cup T$ thì $V + W = < Z >$. Sử dụng (**5.6**) , ta tìm được một cơ sở cho $V + W$ từ tập sinh Z của nó.

<u>Ví dụ:</u> Cho $S = \{ \alpha = (5,-2,-5,4), \beta = (2,0,-5,3), \gamma = (-4,4,-5,1) \} \subset \mathbf{R}^4$, $V = < S > \leq \mathbf{R}^4$,

$T = \{ \delta = (4, -6, 4, 1), \varepsilon = (1, 6, -8, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$, $W = < T > \leq \mathbf{R}^4$.

Tìm một cơ sở cho $V + W$.

Đặt $Z = S \cup T = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \}$ thì $V + W = < Z >$. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ -4 & 4 & -5 & 1 \\ 4 & -6 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & -12 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & -15 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -32 & 35 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -11 \\ 0 & 0 & -17 & 11 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 51 & -33 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & 2^* & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 17^* & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$V + W$ có cơ sở $E = \{ \lambda = (1, 6, -8, 1), \mu = (0, 2, 1, -2), \nu = (0, 0, 17, -11) \}$.

5.10/ <u>TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN GIAO:</u>

a) *<u>Vấn đề</u>:* Cho $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^n$ và $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^n$ với $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \} \subset \mathbf{R}^n$ và $T = \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q \} \subset \mathbf{R}^n$ ($p \geq q$). Tìm một cơ sở cho $V \cap W$.

b) *<u>Giải quyết</u>:* Xét $\alpha \in \mathbf{R}^n$. Ta có

$\alpha \in V \cap W \Leftrightarrow (\alpha \in V$ và $\alpha \in W) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbf{R}, \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_p\alpha_p$ và phương trình

$d_1\beta_1 + d_2\beta_2 + \cdots + d_q\beta_q = \alpha$ (ẩn số $d_1, d_2, \ldots$ và d_q) có nghiệm thực.

Ta sẽ thấy $c_1, c_2, \ldots, c_p$ bị ràng buộc bởi một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Giải hệ này để chỉ ra các ẩn tự do và mô tả $\alpha \in V \cap W$ theo các ẩn tự do này.

Từ đó ta tìm được một tập sinh độc lập tuyến tính (một cơ sở) cho $V \cap W$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $S = \{ \alpha = (-2,4,3,0), \beta = (4,-1,-2,2), \gamma = (-1,4,1,1) \} \subset \mathbf{R}^4$, $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$,

$T = \{ \delta = (0, 5, 1,-1), \varepsilon = (1, 5,-1, 0), \theta = (3, 4, 1, 0) \} \subset \mathbf{R}^4$, $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^4$.

Tìm một cơ sở cho $V \cap W$.

Ta có $\alpha \in V \cap W \Leftrightarrow (\alpha \in V$ và $\alpha \in W) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbf{R}, \alpha = a\alpha + b\beta + c\gamma$ và phương trình $r\delta + s\varepsilon + t\theta = \alpha$ (ẩn số r, s, t) có nghiệm thực.

Phương trình $r(0, 5, 1, -1) + s(1, 5, -1, 0) + t(3, 4, 1, 0) =$
$= a(-2, 4, 3, 0) + b(4, -1, -2, 2) + c(-1, 4, 1, 1)$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & s & t \end{array} \\ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1 & 3 & 4b-2a-c \\ -1 & 0 & 0 & 2b+c \\ 5 & 5 & 4 & 4a-b+4c \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1 & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & -1 & 1 & 3a+2c \\ 0 & 5 & 4 & 4a+9b+9c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1^* & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & 0 & 4 & a+4b+c \\ 0 & 0 & 9 & 19a+9b+19c \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & s & t \end{array} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1^* & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & 0 & 4^* & a+4b+2c \\ 0 & 0 & 0 & 67a+67c \end{array}\right) \end{array}$$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ a + c = 0 $\Leftrightarrow$ c = – a.

Vậy $V \cap W = \{ \alpha = a\alpha + b\beta - a\gamma = a(\alpha - \gamma) + b\beta \mid a, b \in \mathbf{R} \} = \langle Z \rangle$ với

$Z = \{\lambda = (\alpha - \gamma) = (-1,0,2,-1), \beta = (4,-1,-2,2)\}$ độc lập tuyến tính vì λ không tỉ lệ với β.

Do đó $V \cap W$ có một cơ sở là $Z = \{ \lambda, \beta \}$ và $\dim(V \cap W) = | Z | = 2$.

5.11/ SO SÁNH SỐ VECTOR TRONG MỘT TẬP HỢP ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ TRONG MỘT TẬP SINH VỚI SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTOR:

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ có $\dim W = m$.

a) Nếu S độc lập tuyến tính $\subset W$ thì $| S | \leq m$.

Nếu (S độc lập tuyến tính $\subset W$ và $| S | = m$) thì S là một cơ sở của W.

b) Nếu $\langle S \rangle = W$ thì $| S | \geq m$.

Nếu ($\langle S \rangle = W$ và $| S | = m$) thì S là một cơ sở của W.

c) Nếu ($S \subset W$ và $| S | > m$) thì S phụ thuộc tuyến tính.

d) Nếu ($S \subset W$ và $| S | < m$) thì $\langle S \rangle \neq W$.

Ví dụ:

a) Nếu S độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^4$ thì $| S | \leq \dim\mathbf{R}^4 = 4$.

Nếu (S độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^4$ và $| S | = \dim\mathbf{R}^4 = 4$) thì S là một cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

b) Nếu $< S > = \mathbf{R}^4$ thì $| S | \geq \dim\mathbf{R}^4 = 4$.

Nếu $(< S > = \mathbf{R}^4$ và $| S | = \dim\mathbf{R}^4 = 4)$ thì S là một cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

c) Nếu $(S \subset \mathbf{R}^5$ và $| S | > \dim\mathbf{R}^5 = 5)$ thì S phụ thuộc tuyến tính.

d) Nếu $(S \subset \mathbf{R}^5$ và $| S | < \dim\mathbf{R}^5 = 5)$ thì $< S > \neq \mathbf{R}^5$.

5.12/ <u>NHẬN DIỆN CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN VECTOR:</u>

Trong (**5.5**) , ta đã nêu ra cách nhận diện một cơ sở cho không gian $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{R}^n$ được gọi là *không gian đầy*). Bây giờ ta giới thiệu cách nhận diện cơ sở cho không gian W mà $W < \mathbf{R}^n$ (W được gọi là *không gian vơi*).

a) Khi chưa biết dimW: Ta dùng định nghĩa (**5.3**) nói về cơ sở.

B là một cơ sở của W $\Leftrightarrow$ ($< B > = W$ và B độc lập tuyến tính).

b) Khi đã biết $\dim W = m$: Ta dùng phần a) của (**5.11**).

B là một cơ sở của W $\Leftrightarrow$ ($B \subset W$, B độc lập tuyến tính và $| B | = \dim W = m$).

<u>Ví dụ:</u> Cho $S = \{\alpha = (-2,1,3,0), \beta = (3,4,-1,5)\}$, $T = \{\gamma = (4,9,1,10), \delta = (9,1,-10,5)\} \subset \mathbf{R}^4$

Đặt $W = < S > = \{ X = a\alpha + b\beta \mid a, b \in \mathbf{R} \} \leq \mathbf{R}^4$. Theo (**5.11**), $\dim W \leq | S | = 2$ nên $W \neq \mathbf{R}^4$, nghĩa là $W < \mathbf{R}^4$. Ta giải thích S và T là các cơ sở của W.

Giải thích S là một cơ sở của W (chưa biết dimW) : Do $< S > = W$ và S độc lập tuyến tính (α không tỉ lệ với β) nên S là một cơ sở của W và $\dim W = | S | = 2$.

Giải thích T là một cơ sở của W (đã biết $\dim W = 2$):

* $T = \{\gamma, \delta\} \subset W = < S = \{\alpha, \beta\} >$ vì các phương trình $c_1\alpha + c_2\beta = \gamma$ (ẩn là c_1 và c_2) và $d_1\alpha + d_2\beta = \delta$ (ẩn là d_1 và d_2) đều có nghiệm thực là $c_1 = 1, c_2 = 2, d_1 = -3, d_2 = 1$.

Các phương trình trên có vế trái như nhau nên có thể giải chung trong một bảng :

$$(\alpha^t\ \beta^t \mid \gamma^t \mid \delta^t) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1^* & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \end{array}.$$

* $T = \{ \gamma, \delta \}$ độc lập tuyến tính (γ không tỉ lệ với δ) và $| T | = 2 = \dim W$.

5.13/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> Cho $V, W \leq \mathbf{R}^n$.

a) Nếu $W \leq V$ thì $\dim W \leq \dim V$. Nếu $W < V$ thì $\dim W < \dim V$.

b) Nếu ($W \leq V$ và $\dim W = \dim V$) thì $V = W$.

c) $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$ nên $\dim(V + W) \leq \dim V + \dim W$.

d) Suy ra $\dim(V + W) = \dim V + \dim W \Leftrightarrow \dim(V \cap W) = 0 \Leftrightarrow V \cap W = \{\mathbf{O}\}$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xét lại **Ví dụ** của (**2.5**) mục a), b), c) về các không gian giao và không gian tổng.

Thử lại $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$, ta thấy $2 = 1 + 1 - 0$.

$\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K)$, ta thấy $3 = 1 + 2 - 0$.

$\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$, ta thấy $3 = 2 + 2 - 1$.

b) Xét lại **Ví dụ** của (**2.6**). Do $\{\mathbf{O}\} < W < V < \mathbf{R}^3$ nên

$\dim\{\mathbf{O}\} = 0 < \dim W = 1 < \dim V = 2 < \dim \mathbf{R}^3 = 3$.

c) Nếu ($W \leq \mathbf{R}^4$ và $\dim W = \dim \mathbf{R}^4 = 4$) thì $W = \mathbf{R}^4$.

5.14/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \}$ độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^n$ với $m < n$.

Đặt $W = < S >$ thì S là một cơ sở của W và $\dim W = | S | = m$ và $W < \mathbf{R}^n$.

Ta có thể chọn $(n - m)$ vector (từ cơ sở chính tắc $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \}$) thêm vào S để được một cơ sở B của $\mathbf{R}^n$ và $S \subset B$. cách chọn như sau :

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và tìm ma trận dạng bậc thang S_A của A. S_A có $(n - m)$ cột không bán chuẩn hóa được là các cột thứ $i_1, i_2, \ldots, i_{n-m}$ $(1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-m} \le n)$.

Ta thêm $\{ \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-m}} \}$ vào S để có $B = S \cup \{ \varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-m}} \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^n$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $S = \{\alpha_1 = (3,1,-2,5), \alpha_2 = (-2,0,4,-3)\}$ độc lập tuyến tính $\subset \mathbf{R}^4$ $(m = 2 < n = 4)$.

$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2^* & 8 & 1 \end{pmatrix}$ có cột 3 và 4 không bán chuẩn hóa được

Đặt $B = S \cup \{ \varepsilon_3 = (0,0,1,0), \varepsilon_4 = (0,0,0,1) \} = \{ \alpha_1, \alpha_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \}$ thì B là một cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

VI. <u>TỌA ĐỘ CỦA VECTOR THEO CƠ SỞ CÓ THỨ TỰ:</u>

Trong mục **VI** này, ta qui định tất cả các cơ sở được sử dụng đều *có thứ tự*.

6.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^n$ và W có cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \}$.

a) $\forall \alpha \in W$, có duy nhất $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ thỏa $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m$ (*).

Muốn tìm $c_1, c_2, \ldots, c_m$, ta phải giải phương trình vector (*) [theo (**5.6**)].

Ta ký hiệu $[\alpha]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ và $[\alpha]_A$ gọi là *tọa độ của vector* α *theo cơ sở* A

b) $\forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}$, $[c\alpha]_A = c[\alpha]_A$ và $[\alpha \pm \beta]_A = [\alpha]_A \pm [\beta]_A$.

<u>Ví dụ:</u> $W = \mathbf{R}^3$ có cơ sở $A = \{ \alpha_1 = (1, -2, 2), \alpha_2 = (2, -3, 6), \alpha_3 = (1, 1, 7) \}$(có thứ tự).

a) Xét $\alpha \in \mathbf{R}^3$ có $[\alpha]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ta có $\alpha = 4\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4(1, -2, 2) - (2, -3, 6) + 3(1, 1, 7) = (5, -2, 23)$.

b) Tìm $[\,\beta\,]_A$ nếu $\beta = (3, 11, 35) \in \mathbf{R}^3$. Đặt $[\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$,

nghĩa là $c_1(1,-2,2) + c_2(2,-3,6) + c_3(1,1,7) = (3,11,35)$. Ma trận hóa phương trình trên

$$\begin{array}{ccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & \\ \end{array}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 11 \\ 2 & 6 & 7 & 35 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 17 \\ 0 & 3 & 8 & 46 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -5 & -31 \\ 0 & 1^* & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1^* & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 5 \end{array}\right) \Rightarrow [\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

c) Ta có $[\,-\sqrt{3}\,\alpha\,]_A = -\sqrt{3}\;[\,\alpha\,]_A = -\sqrt{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ và

$$[\,\alpha \pm \beta\,]_A = [\,\alpha\,]_A \pm [\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ hoặc } \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

6.2/ <u>MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ:</u>

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ và W có các cơ sở $A = \{\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\,\}$ và $B = \{\,\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\,\}$.

Lập ma trận $(A \to B) = (\,[\,\beta_1\,]_A\;\;[\,\beta_2\,]_A \ldots [\,\beta_m\,]_A\,) \in M_m(\mathbf{R})$.

Ta nói $(A \to B)$ là *ma trận đổi cơ sở từ A qua B*.

[mỗi vector của cơ sở B (đi sau) được lấy tọa độ theo cơ sở A (đi trước)].

<u>Ví dụ:</u>

a) Không gian W có các cơ sở $A = \{\,\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\,\}$ và $B = \{\,\beta_1, \beta_2, \beta_3\,\}$ thỏa các hệ thức

$\beta_1 = \pi\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{3}\,\alpha_3$, $\beta_2 = -\,2\alpha_1 - (\ln 5)\alpha_3$ và $\beta_3 = 4\alpha_1 + e\alpha_2 - (9/7)\alpha_3$.

Ta có $(A \to B) = (\,[\,\beta_1\,]_A\;\;[\,\beta_2\,]_A\;\;[\,\beta_3\,]_A\,) = \begin{pmatrix} \pi & -2 & 4 \\ -1 & 0 & e \\ \sqrt{3} & -\ln 5 & -9/7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

b) $\mathbf{R}^2$ có các cơ sở $A = \{\,\alpha_1 = (-2,5), \alpha_2 = (1,-3)\,\}$ và $B = \{\,\beta_1 = (-1, 1), \beta_2 = (6, -17)\,\}$.

Ta có $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ và $\beta_2 = -\,\alpha_1 + 4\alpha_2$ bằng cách giải hai phương trình vector

$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \beta_1$ (ẩn là c_1 và c_2) và $d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 = \beta_2$ (ẩn là d_1 và d_2) mà khi ma trận hóa sẽ có vế trái y hệt nhau trong cùng một bảng :

$$(\alpha_1^t\ \alpha_2^t \mid \beta_1^t \mid \beta_2^t) = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 1 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -17 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} d_1 & d_2 \end{matrix} \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1^* & 3 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} d_1 & d_2 \end{matrix} \end{array}.$$ Như vậy

$$(A \to B) = (\,[\,\beta_1\,]_A\ \ [\,\beta_2\,]_A\,) = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}).$$

6.3/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^n$ với $\dim W = m$ và W có các cơ sở A, B, C. Khi đó

a) $(A \to B)$ là ma trận vuông cấp m *khả nghịch* và $(A \to B)^{-1} = (B \to A)$.

b) $(A \to A) = I_m$.

c) $(A \to C) = (A \to B).(B \to C)$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho không gian W có cơ sở $A = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 \}$ và $\dim W = |\,A\,| = 3$. Hiển nhiên

$\alpha_1 = \mathbf{1}.\alpha_1 + \mathbf{0}.\alpha_2 + \mathbf{0}.\alpha_3$, $\alpha_2 = \mathbf{0}.\alpha_1 + \mathbf{1}.\alpha_2 + \mathbf{0}.\alpha_3$ và $\alpha_3 = \mathbf{0}.\alpha_1 + \mathbf{0}.\alpha_2 + \mathbf{1}.\alpha_3$

nên $$(A \to A) = (\,[\,\alpha_1\,]_A\ \ [\,\alpha_2\,]_A\ \ [\,\alpha_3\,]_A\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in M_3(\mathbf{R}).$$

b) Cho không gian V có các cơ sở A, B, C và $(A \to B) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $(B \to C) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Ta có $(B \to A) = (A \to B)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ và

$$(A \to C) = (A \to B).(B \to C) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 23 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}.$$

6.4/ <u>CÔNG THỨC ĐỔI TỌA ĐỘ THEO CƠ SỞ:</u>

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ có các cơ sở A và B.

Khi đó ta có *công thức đổi tọa độ theo cơ sở*

$$\forall\alpha \in W, [\,\alpha\,]_A = (A \to B).[\,\alpha\,]_B$$

<u>Ví dụ:</u> Không gian W có các cơ sở $A = \{\,\alpha, \beta\,\}$ và $B = \{\,\gamma, \delta\,\}$ thỏa

$(A \to B) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ và $(B \to A) = (A \to B)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

Cho $\varepsilon, \theta \in W$ thỏa $[\,\varepsilon\,]_B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ và $[\,\theta\,]_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$. Tính $[\,\varepsilon\,]_A$ và $[\,\theta\,]_B$.

Ta có $[\,\varepsilon\,]_A = (A \to B).[\,\varepsilon]_B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 57 \end{pmatrix}$

(nghĩa là $\varepsilon = -6\gamma + 5\delta \Rightarrow \varepsilon = 40\alpha + 57\beta$).

Ta có $[\,\theta\,]_B = (B \to A).[\,\theta\,]_A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -61 \end{pmatrix}$

(nghĩa là $\theta = 3\alpha - 8\beta \Rightarrow \theta = -25\gamma - 61\delta$).

6.5/ <u>MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ TRONG KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^n$:</u>

a) $\mathbf{R}^n$ có cơ sở chính tắc $B_o = \{\varepsilon_1 = (1,0, \dots ,0), \varepsilon_2 = (0,1, 0, \dots ,0), \dots, \varepsilon_n = (0, \dots ,0,1)\}$.

$$\forall\alpha \in \mathbf{R}^n, \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow \alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n \Leftrightarrow [\alpha]_{B_o} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha^t.$$

Chẳng hạn $\alpha = (7, -\sqrt{2}, e, -\pi) \in \mathbf{R}^4$ có $[\alpha]_{B_o} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\sqrt{2} \\ e \\ -\pi \end{pmatrix} = \alpha^t$.

b) Giả sử $\mathbf{R}^n$ có các cơ sở $A = \{\,\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\,\}$ và $B = \{\,\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\,\}$.

Ta muốn viết $L = (A \to B)$.

<u>*Cách 1*</u>: (tìm gián tiếp thông qua cơ sở chính tắc B_o).

Viết $H = (B_o \to A) = ([\alpha_1]_{B_o}\ [\alpha_2]_{B_o} \ldots [\alpha_n]_{B_o}) = (\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \ldots\ \alpha_n^t) \in M_n(\mathbf{R})$.

$K = (B_o \to B) = ([\beta_1]_{B_o}\ [\beta_2]_{B_o} \ldots [\beta_n]_{B_o}) = (\beta_1^t\ \beta_2^t\ \ldots\ \beta_n^t) \in M_n(\mathbf{R})$.

Ta có $L = (A \to B) = (A \to B_o)(B_o \to B) = H^{-1}K$. Ở đây ta tìm L dựa vào H^{-1}.

Cách 2: (tìm trực tiếp theo định nghĩa).

Ta có $L = (A \to B) = ([\beta_1]_A\ \ [\beta_2]_A \ldots [\beta_n]_A)$. Muốn tìm tọa độ của các vector $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ theo cơ sở A, ta phải giải n hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ có n phương trình và n ẩn số. Các hệ này cùng có vế trái là $(\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \ldots\ \alpha_n^t) = H$ và các vế phải của chúng lần lượt là các cột $\beta_1^t, \beta_2^t, \ldots, \beta_n^t$. Do đó ta có thể giải đồng thời n hệ trên trong cùng một bảng là $\left(\alpha_1^t\quad \alpha_2^t\quad \ldots\quad \alpha_n^t \middle|\ \beta_1^t \middle|\ \beta_2^t \middle|\ \ldots \middle|\ \beta_n^t\right)$, nghĩa là n hệ trên được viết thành dạng ma trận là $(H \mid K)$ và khi giải xong bằng phương pháp Gauss – Jordan, ta thu được $(I_n \mid H^{-1}K)$. Ta có $L = (A \to B) = H^{-1}K$.

Ở đây ta tìm được $L = H^{-1}K$ mà không cần phải tìm riêng H^{-1}.

<u>Ví dụ:</u> $W = \mathbf{R}^3$ có các cơ sở $A = \{ \alpha_1 = (-3, 4, 6), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (2, -3, -4) \}$,

$B = \{ \beta_1 = (3, 4, 9), \beta_2 = (2, 1, 2), \beta_3 = (-7, 1, 4) \}$ và cơ sở chính tắc $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$.

a) Viết $L = (A \to B)$.

Cách 1:

$H = (B_o \to A) = (\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \alpha_3^t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ có $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ theo sơ đồ sau

$$(H \mid \mathbf{I_3}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -6 & -6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1^* & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -3 & 3 \end{array}\right) = (\,\mathbf{I_3} \mid H^{-1}) \text{ (cần tìm trực tiếp } H^{-1}\text{).}$$

$$K = (B_o \to B) = (\beta_1^t\ \ \beta_2^t\ \ \beta_3^t\ ) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } L = H^{-1}K = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Cách 2:

$$(H \mid K) = \left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \middle| \ \beta_1^t \middle| \ \beta_2^t \middle| \ \beta_3^t\right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -3 & 0 & 2 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 9 & 2 & 4 \end{array}\right) \to (\,I_3 \mid H^{-1}K) \text{ như sau:}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -3 & 0 & 2 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 9 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 1 & -1 & 7 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -24 & -11 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 6 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & -1 & -8 & -3 & 4 \\ 0 & 1^* & 0 & 15 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & 7 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & 13 & 4 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & 15 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1^* & 21 & 7 & -5 \end{array}\right). \text{ Vậy } L = H^{-1}K = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix} \text{(không tìm trực tiếp } H^{-1}\text{).}$$

b) Tìm $\alpha \in \mathbf{R}^3$ nếu $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ta có

$\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 = 2(-3, 4, 6) + (0, 1, 1) - 5(2, -3, -4) = (-16, 24, 33)$.

c) Tìm $[\,\beta\,]_A$ nếu $\beta = (4, -3, -2) \in \mathbf{R}^3$.

Cách 1: dùng định nghĩa của tọa độ. Đặt $[\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$.

Ma trận hóa phương trình vector trên, ta có $\left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \middle| \ \beta^t\right) = (\,H \mid \beta^t\,) \to (\,I_3 \mid H^{-1}\beta^t\,)$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 & -3 \\ 6 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} {}^*1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1^* & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1^* & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1^* & 11 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow [\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Cách 2: dùng công thức đổi tọa độ theo cơ sở.

Ta có $[\beta]_{B_o} = \beta^t = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ và $[\,\beta\,]_A = (A \to B_o)\ [\beta]_{B_o} = H^{-1}\beta^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$.

d) Xét $\gamma \in \mathbf{R}^3$ có $[\,\gamma\,]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tính $[\,\gamma\,]_A$.

Ta có $[\,\gamma\,]_A = (A \to B)\ [\,\gamma\,]_B = L\ [\,\gamma\,]_B = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79 \\ 100 \\ 131 \end{pmatrix}$

(nghĩa là $\gamma = 6\beta_1 - \beta_3 \Rightarrow \gamma = 79\alpha_1 + 100\alpha_2 + 131\alpha_3$).

6.6/ MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ TRONG KHÔNG GIAN $W < \mathbf{R}^n$:

Cho $W < \mathbf{R}^n$ (nghĩa là $W \le \mathbf{R}^n$ và $\dim W = m < n$). Ta có $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \} \not\subset W$.

Giả sử W có các cơ sở $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \}$ và $B = \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \}$.

Ta có $L = (A \to B) = (\ [\,\beta_1\,]_A\ \ [\,\beta_2\,]_A \ldots [\,\beta_m\,]_A\ )$. Muốn tìm $[\,\beta_j\,]_A$ $(1 \le j \le m)$, ta phải giải m hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ có n phương trình và m ẩn số. Các hệ này cùng có vế trái là $(\alpha_1^t\ \ \alpha_2^t\ \ldots\ \alpha_m^t)$ và các vế phải của chúng lần lượt là các cột $\beta_1^t, \beta_2^t, ..., \beta_m^t$. Do đó ta có thể giải đồng thời m hệ trên trong cùng một bảng là

$\left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \ldots \quad \alpha_m^t \middle| \ \beta_1^t \middle| \ \beta_2^t \middle| \ \ldots \middle| \ \beta_m^t \right)$.

Khi giải xong hệ trên bằng phương pháp Gauss - Jordan, ta xóa bỏ $(n - m)$ dòng tầm thường ở phía dưới và thu được $L = (A \to B)$ ở các vế bên phải.

Ví dụ: Cho $W \le \mathbf{R}^4$ nhận $A = \{ \alpha_1 = (-1,1,5,0), \alpha_2 = (2,-5,-4,1), \alpha_3 = (-3,0,-2,4) \}$ và $B = \{ \beta_1 = (-1,7,16,-5), \beta_2 = (11,-17,3,-4), \beta_3 = (-19,13,15,14) \}$ là các cơ sở.

Ta có $\dim W = |\,A\,| = 3 < \dim \mathbf{R}^4 = 4$ nên $W < \mathbf{R}^4$ và $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \} \not\subset W$.

Do đó $L = (A \to B) = ([\beta_1]_A \ [\beta_2]_A \ [\beta_3]_A)$. Để tìm $[\beta_1]_A$, $[\beta_2]_A$ và $[\beta_3]_A$,

ta giải đồng thời 3 hệ $\left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \middle| \ \beta_1^t \middle| \ \beta_2^t \middle| \ \beta_3^t\right)$(mỗi hệ 3 phương trình, 4 ẩn số):

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 2 & -3 & -1 & 11 & -19 \\ 1 & -5 & 0 & 7 & -17 & 13 \\ 5 & -4 & -2 & 16 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -4 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & -2 & 3 & 1 & -11 & 19 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & -17 & 11 & 58 & -80 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -4 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 5 & -3 & -7 & 23 \\ 0 & 1^* & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -23 & 23 & 46 & -92 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Xóa dòng cuối tầm thường, từ các cột ở vế bên phải ta có

$$L = (A \to B) = ([\beta_1]_A \ [\beta_2]_A \ [\beta_3]_A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.7/ NHẬN DIỆN MỘT CƠ SỞ DỰA THEO MỘT CƠ SỞ KHÁC:

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ có cơ sở $A = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots, \alpha_m \}$ (dimW = m).

Xét tập hợp $B = \{ \beta_1 , \beta_2 , \ldots, \beta_m \} \subset \mathbf{R}^n$ có $| B | = m$.

a) Nếu có ma trận khả nghịch $P \in M_m(\mathbf{R})$ thỏa $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ thì B cũng là một cơ sở của W. Lúc đó $(A \to B) = P^t$.

b) Nếu có ma trận khả nghịch $P \in M_m(\mathbf{R})$ thỏa $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ thì B cũng là một cơ sở của W. Lúc đó $(B \to A) = P^t$.

Ví dụ: Cho $W \le \mathbf{R}^5$ có cơ sở $A = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 \}$ (dimW = 3).

Giả sử có các tập hợp $B = \{ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \}$ và $C = \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \}$ trong $\mathbf{R}^5$ thỏa

$\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$, $\beta_2 = -\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3$ và $\beta_3 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3$,

$\alpha_1 = 2\gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3$, $\alpha_2 = -\gamma_1 + 4\gamma_2 - 2\gamma_3$ và $\alpha_3 = -\gamma_1 - 2\gamma_2 + 4\gamma_3$. Như vậy

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ với } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ta có $|P| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$ nên P khả nghịch.

Do đó B và C đều là các cơ sở của W với

$$(A \to B) = (C \to A) = P^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

VII. KHÔNG GIAN VECTOR THỰC TỔNG QUÁT:

Từ cấu trúc không gian vector $\mathbf{R}^n$ trên $\mathbf{R}$, ta có thể xây dựng *một cấu trúc không gian vector tổng quát* trên $\mathbf{R}$.

7.1. ĐỊNH NGHĨA: Cho tập hợp $V \neq \varnothing$ và mỗi phần tử của V được gọi là " *một vector* ". Giả sử rằng

– Trên V có một phép toán ký hiệu hình thức là + (*được gọi là phép cộng vector*), nghĩa là $\forall \alpha, \beta \in V$, ta có duy nhất $(\alpha + \beta) \in V$.

– Có một qui tắc liên kết từ $\mathbf{R}$ vào V ký hiệu hình thức là . (*được gọi là phép nhân số thực với vector*), nghĩa là $\forall c \in \mathbf{R}, \forall \alpha \in V$, ta có duy nhất $c.\alpha \equiv c\alpha \in V$.

Ta nói cấu trúc đại số (V, +, .) là một không gian vector trên $\mathbf{R}$ (không gian vector thực) nếu nó thỏa 7 tính chất sau đây:

(A_1) Phép (+) *giao hoán* và *kết hợp*, nghĩa là $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$,

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ và $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$.

(A_2) $\exists \theta \in V, \forall \alpha \in V, \theta + \alpha = \alpha + \theta = \alpha$. Ta nói θ là “ *vector không* ’’ và ký hiệu

$\theta = \mathbf{O}$. Ta có θ là *phần tử trung hòa* của phép (+).

(A_3) $\forall \alpha \in V, \exists \alpha' \in V$ thỏa $\alpha' + \alpha = \alpha + \alpha' = \mathbf{O}$.

Ký hiệu $\alpha' = -\alpha = (-1).\alpha$. Ta nói $-\alpha$ là “ *vector đối* ’’ của vector α.

(A_1), (A_2) và (A_3) là các tính chất riêng của phép (+).

(B_1) $\forall \alpha \in V, 1.\alpha = \alpha$.

(B_2) $\forall \alpha \in V, \forall c, d \in \mathbf{R}, c.(d.\alpha) = (c.d).\alpha$

(B_1) và (B_2) là các tính chất riêng của phép (.).

(C_1) $\forall \alpha \in V, \forall c, d \in \mathbf{R}, (c + d).\alpha = c.\alpha + d.\alpha$

(C_2) $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in \mathbf{R}, c.(\alpha + \beta) = c.\alpha + c.\beta$

(C_1) và (C_2) là các tính chất liên quan giữa phép (+) và phép (.).

Ví dụ:

a) $\mathbf{R}[x] = \{ f(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbf{N}, a_o, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \}$ là tập hợp các đa thức thực. Ta có phép cộng (+) tự nhiên hai đa thức thực và phép nhân (.) tự nhiên một số thực với một đa thức thực. Khi đó $(\mathbf{R}[x], +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$.

Phần tử $\mathbf{O}$ của $\mathbf{R}[x]$ là đa thức hằng 0. $\forall f(x) \in \mathbf{R}[x]$, $f(x)$ có vector đối là $-f(x)$.

b) Với phép cộng (+) tự nhiên hai ma trận thực cùng kích thước $m \times n$ và phép nhân (.) tự nhiên một số thực với một ma trận thực $m \times n$, ta có $(M_{m \times n}(\mathbf{R}), +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Phần tử $\mathbf{O}$ của $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ là ma trận $\mathbf{O}_{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}$. $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$, A có vector đối là $-A$.

c) $F(\mathbf{R}) = \{ f \mid f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \}$ là tập hợp các hàm số từ $\mathbf{R}$ vào $\mathbf{R}$. Với phép cộng $(+)$ tự nhiên hai hàm số thực và phép nhân $(.)$ tự nhiên một số thực với một hàm số thực, ta có $(F(\mathbf{R}), +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Phần tử $\mathbf{O}$ của $F(\mathbf{R})$ là hàm hằng 0. $\forall f(x) \in F(\mathbf{R})$, $f(x)$ có vector đối là $-f(x)$.

d) $S(\mathbf{R}) = \{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \mid a_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N} \}$ là tập hợp các dãy số thực. Với phép cộng $(+)$ tự nhiên hai dãy số thực và phép nhân $(.)$ tự nhiên một số thực với một dãy số thực, ta có $(S(\mathbf{R}), +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Phần tử $\mathbf{O}$ của $S(\mathbf{R})$ là dãy số hằng 0. $\forall (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R})$, $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ có vector đối là $(-a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

e) $\Sigma(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mid a_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N} \}$ là tập hợp các chuỗi số thực. Với phép cộng $(+)$ tự nhiên hai chuỗi số thực và phép nhân $(.)$ tự nhiên một số thực với một chuỗi số thực, ta có $(\Sigma(\mathbf{R}), +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Phần tử $\mathbf{O}$ của $\Sigma(\mathbf{R})$ là chuỗi số hằng 0. $\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \Sigma(\mathbf{R})$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ có vector đối là $\sum_{n=0}^{+\infty} (-a_n)$.

7.2. <u>HỆ QUẢ:</u> $\forall \alpha \in V, \forall c \in \mathbf{R}$, ta có

a) $c.\alpha = \mathbf{O} \Leftrightarrow (c = 0 \text{ hay } \alpha = \mathbf{O})$.

b) $c.\alpha \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow (c \neq 0 \text{ và } \alpha \neq \mathbf{O})$.

c) Vector $\mathbf{O}$ là duy nhất. $\forall \alpha \in V$, vector đối $-\alpha$ là duy nhất.

7.3. <u>KHÔNG GIAN VECTOR CON:</u>

Cho không gian vector $(V, +, .)$ trên $\mathbf{R}$ và $W \subset V$.

Các phép toán $(+)$ và $(.)$ trên V vẫn được sử dụng trên W.

a) Ta nói W là *một không gian vector con* của V (ký hiệu $W \leq V$) nếu W thỏa các điều kiện sau đây:

* $\mathbf{O} \in W$ (1)

* $\forall \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \in W$ (2)

* $\forall \alpha \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha \in W$ (3).

b) Suy ra $W \leq V \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha + \beta \in W$ (4).

c) V luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{\mathbf{O}\}$ và chính V.

Nếu $W \leq V$ và $\{\mathbf{O}\} \neq W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của V.

Nếu $W \leq V$ và $W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của V và ký hiệu $W < V$.

Một không gian con không tầm thường của V đương nhiên là một không gian con thực sự của V (nhưng đảo lại không đúng).

Ví dụ:

a) Trong $(\mathbf{R}[x], +, .)$, ta có các không gian con thực sự như

$\mathbf{R}_n[x] = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid f$ có bậc $\leq n$ [ký hiệu $\deg(f) \leq n$] $\}$ $(n \in \mathbf{N})$,

$P = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid f(1) = 0 \}$, $Q = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid f(1) = f(2) = 0 \}$ và

$T = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid f(1) = f(2) \}$. Khi $m, n \in \mathbf{N}$ và $m < n$ thì $\mathbf{R}_m[x] < \mathbf{R}_n[x]$.

Hơn nữa $Q < P$ và $Q < T$.

b) Trong $(M_{m \times n}(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự như

$H = \{ A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \mid a_{11} = 0 \}$, $K = \{ A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \mid a_{11} = a_{mn} = 0 \}$ và

$L = \{ A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \mid a_{11} = a_{mn} \}$. Hơn nữa $K < H$ và $K < L$.

c) Trong $(M_n(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự như

$H = \{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A^t = A \}$, $K = \{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A$ là ma trận đường chéo$\}$ và

$L = \{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A$ là ma trận tam giác trên $\}$. Hơn nữa $K < H$ và $K < L$.

d) Trong $(F(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự như

$\mathbf{R}[x]$, $C(\mathbf{R}) = \{ f \in F(\mathbf{R}) \mid f$ liên tục trên $\mathbf{R} \}$ và

$C^{(n)}(\mathbf{R}) = \{ f \in F(\mathbf{R}) \mid f$ có đạo hàm cấp n trên $\mathbf{R} \}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Khi $m, n \in \mathbf{N}^*$ và $m < n$ thì $\mathbf{R}[x] < C^{(n)}(\mathbf{R}) < C^{(m)}(\mathbf{R}) < C(\mathbf{R})$.

e) Trong $(S(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự

$S_1(\mathbf{R}) = \{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R}) \mid (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ $\}$ và

$S_2(\mathbf{R}) = \{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R}) \mid (a_n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ $\}$ với $S_1(\mathbf{R}) < S_2(\mathbf{R})$.

f) Trong $(\Sigma(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự

$\Sigma_1(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \Sigma(\mathbf{R}) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ hội tụ $\}$ và $\Sigma_2(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \Sigma(\mathbf{R}) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ hội tụ $\}$.

7.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (phủ nhận không gian con của V).

Cho không gian vector $(V, +, .)$ trên $\mathbf{R}$ và $W \subset V$.

Các phép toán $(+)$ và $(.)$ trên V vẫn được sử dụng trên W. Khi đó

a) $W \not\leq V$ (W *không phải là không gian con của* V) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} O \notin W \ (5) \\ hay \\ \exists \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \notin W \ (6) \\ hay \\ \exists \alpha \in W, \exists c \in R, c\alpha \notin W \ (7) \end{array}\right.$.

b) $W \not\leq V \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in W, \exists c \in \mathbf{R}, c\alpha + \beta \notin W$.

Khi giải thích $W \not\leq V$, ta thường sử dụng a), nghĩa là chỉ ra W thỏa (5) hay thỏa (6) hay thỏa (7) là đủ.

<u>Ví dụ:</u>

a) $\forall n \in \mathbf{N}, W_n = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid \deg(f) = n \} \not\leq \mathbf{R}[x]$ ($\deg(\mathbf{O}) = -\infty$ nên $\mathbf{O} \notin W_n$).

b) $Z = \{ A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \mid a_{11} > 0 \} \not\leq M_{m \times n}(\mathbf{R})$ [$I_n \in Z$ và $-I_n \notin Z$].

c) $G = \{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid |A| \neq 0 \} \not\leq M_n(\mathbf{R})$ [$I_n, -I_n \in G$ và $I_n + (-I_n) = \mathbf{O}_n \notin G$].

d) $T = \{ f \in F(\mathbf{R}) \mid f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \} \not\leq F(\mathbf{R})$ [$g(x) = x^2 \in T$ và $-g(x) = -x^2 \notin T$].

e) $S_d(\mathbf{R}) = \{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R}) \mid (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ phân kỳ $\} \not\leq S(\mathbf{R})$ [$\mathbf{O} = (a_n = 0)_{n \in \mathbf{N}} \notin S_d(\mathbf{R})$].

f) $\Sigma_d(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \Sigma(\mathbf{R}) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ phân kỳ $\} \not\leq \Sigma(\mathbf{R})$ [$\mathbf{O} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n = 0) \notin \Sigma_d(\mathbf{R})$].

7.5. <u>GHI CHÚ:</u>

Các khái niệm *không gian giao* của các không gian con, *không gian tổng* của các không gian con, *tổ hợp tuyến tính* của hữu hạn vector, *không gian con sinh bởi* một tập hợp hữu hạn, tập hợp hữu hạn *độc lập tuyến tính* (hoặc *phụ thuộc tuyến tính*), *cơ sở* và *số chiều hữu hạn* trong không gian vector thực tổng quát được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong không gian vector $\mathbf{R}^n$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $S = \{\mathbf{1}, x, e^x, \sin x, \ln(x^2 + 1), \arctan x, 1/\sqrt{x^2+1} \} \subset F(\mathbf{R})$.

Ta giải thích S độc lập tuyến tính trên $\mathbf{R}$ như sau : Xét a, b, c, d, u, v, w $\in \mathbf{R}$ sao cho $a + bx + ce^x + d\sin x + u\ln(x^2 + 1) + v.\arctan x + w/\sqrt{x^2+1} = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ (*). Ta sẽ chỉ ra $a = b = c = d = u = v = w = 0$.

Chia hai vế của (*) cho e^x và cho $x \to +\infty$, ta có $c = 0$ và xóa ce^x trong (*).

Chia hai vế của (*) cho x và cho $x \to +\infty$, ta có $b = 0$ và xóa bx trong (*).

Chia hai vế của (*) cho $\ln(x^2 + 1)$ và cho $x \to +\infty$, ta có $u = 0$ và xóa $u\ln(x^2 + 1)$ trong (*). Thế $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) vào (*) và lần lượt cho $k \to +\infty$, $k \to -\infty$, ta có $a + (v\pi/2) = a - (v\pi/2) = 0$, nghĩa là $a = v = 0$ và xóa a cùng v.acrtanx trong (*).

Cho $x = 0$, ta có $w = 0$ và xóa $w/\sqrt{x^2+1}$ trong (*). Cho $x = (\pi / 2)$, ta có $d = 0$.

Xét $W = < S > \leq F(\mathbf{R})$ thì ta có

$W = \{f(x) = a + bx + ce^x + d\sin x + u\ln(x^2 + 1) + v.\arctan x + w / \sqrt{x^2+1} \mid a,b,c,d,u,v,w \in \mathbf{R}\}$.

S là một cơ sở của W vì S là môt tập sinh độc lập tuyến tính của W và dimW = | S | = 7.

b) Cho $T = \{ \sin 2x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x \} \subset U = \{ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x \} \subset F(\mathbf{R})$.

Ta giải thích T độc lập tuyến tính và U phụ thuộc tuyến tính trên **R** như sau :

Xét $u, v, w \in \mathbf{R}$ sao cho $u\sin 2x + v\sin^2 x + w\cos^2 x = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ (*). Ta sẽ chỉ ra|

$u = v = w = 0$.

Cho $x = 0$, ta được $w = 0$. Cho $x = \pi / 2$, ta được $v = 0$. Cho $x = \pi / 4$, ta được $u = 0$.

Ta có $0, 1, 1, -1 \in \mathbf{R}$ sao cho $0.\sin 2x + 1.\cos 2x + 1.\sin^2 x + (-1)\cos^2 x = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Xét $H = < U > = < T > = \{ f(x) = u\sin 2x + v\sin^2 x + w\cos^2 x \mid u, v, w \in \mathbf{R}\} \leq F(\mathbf{R})$.

($< U > = < T >$ vì $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ là một tổ hợp tuyến tính của $\cos^2 x$ và $\sin^2 x$).

T là một cơ sở của H vì T là một tập sinh độc lập tuyến tính của H và dimH = | T | = 3.

U không phải là một cơ sở của H vì U là một tập sinh phụ thuộc tuyến tính của H.

7.6. CÁC KHÔNG GIAN VECTOR THỰC HỮU HẠN CHIỀU:

a) $\mathbf{R_n}[x]$ có một cơ sở chính tắc là $B = \{ \mathbf{1}, x, x^2, \ldots , x^n \}$ và $\dim\mathbf{R_n}[x] = | B | = n + 1$.

$\mathbf{R_n}[x]$ có thể đồng nhất với $\mathbf{R^{n+1}}$ về cấu trúc không gian vector.

$f(x) = (a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n) \in \mathbf{R_n}[x]$ được đồng nhất với $\alpha = (a_o , a_1 , \ldots , a_n) \in \mathbf{R^{n+1}}$.

b) $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ có một cơ sở chính tắc là $B = \{ E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \}$

(E_{ij} là ma trận có hệ số = 1 tại vị trí dòng i và cột j, còn các hệ số khác đều = 0).

Ta có $\dim M_{m \times n}(\mathbf{R}) = | B | = mn$.

$M_{m \times n}(\mathbf{R})$ có thể đồng nhất với $\mathbf{R^{mn}}$ về cấu trúc không gian vector.

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ được đồng nhất với

$\alpha = (a_{11} , a_{12} , \ldots , a_{1n} , a_{21} , a_{22} , \ldots , a_{2n} , \ldots , a_{m1} , a_{m2} , \ldots, a_{mn}) \in \mathbf{R^{mn}}$.

c) $M_n(\mathbf{R})$ có một cơ sở chính tắc là $B = \{ E_{ij} \mid 1 \le i, j \le n \}$

(E_{ij} là ma trận có hệ số = 1 tại vị trí dòng i và cột j, còn các hệ số khác đều = 0).

Ta có $\dim M_n(\mathbf{R}) = |B| = n^2$.

$M_n(\mathbf{R})$ có thể đồng nhất với $\mathbf{R}^{n^2}$ về cấu trúc không gian vector.

$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbf{R})$ được đồng nhất với

$\alpha = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \in \mathbf{R}^{n^2}$.

d) Khi giải quyết các vấn đề trong các không gian hữu hạn chiều $\mathbf{R_n}[x]$, $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ và $M_n(\mathbf{R})$, ta chuyển đổi các vector có liên quan trong $\mathbf{R_n}[x]$, $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ và $M_n(\mathbf{R})$ thành các vector tương ứng trong $\mathbf{R^{n+1}}$, $\mathbf{R^{mn}}$ và $\mathbf{R}^{n^2}$. Dùng các kỹ năng tính toán quen thuộc trong $\mathbf{R^{n+1}}$, $\mathbf{R^{mn}}$ và $\mathbf{R}^{n^2}$ để giải quyết các vấn đề được yêu cầu. Sau khi thu được kết quả trong $\mathbf{R^{n+1}}$, $\mathbf{R^{mn}}$ và $\mathbf{R}^{n^2}$, ta lại chuyển đổi chúng về các vector tương ứng trong $\mathbf{R_n}[x]$, $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ và $M_n(\mathbf{R})$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xét tính độc lập hoặc phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp sau trong $\mathbf{R_3}[x]$ và $M_2(\mathbf{R})$:

$H = \{ f_1(x) = -3 + x + 2x^2 + 7x^3, f_2(x) = 1 - 2x + 5x^2 - 4x^3, f_3(x) = 2 + 4x + x^2 + 6x^3 \}$

và $K = \{ A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -13 & 24 \\ 13 & -23 \end{pmatrix} \}$.

Ta có $\mathbf{R_3}[x] \equiv \mathbf{R}^4$ và $M_2(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^4$,

$H \equiv S = \{ \alpha_1 = (-3, 1, 2, 7), \alpha_2 = (1, -2, 5, -4), \alpha_3 = (2, 4, 1, 6) \} \subset \mathbf{R^4}$ và

$K \equiv T = \{ \beta_1 = (3, -4, 1, 7), \beta_2 = (-2, 6, 8, -1), \beta_3 = (-13, 24, 13, -23) \} \subset \mathbf{R^4}$.

Trong **Ví dụ (4.3)**, ta đã thấy S độc lập tuyến tính và T phụ thuộc tuyến tính trên **R**.

Suy ra H độc lập tuyến tính và K phụ thuộc tuyến tính trên **R**.

b) $G = \{ g_1(x) = 1 - 2x + ax^2 , g_2(x) = 2 + (a - 2)x + x^2 , g_3(x) = 2 + (a - 5)x + (a + 1)x^2 \}$

(a là tham số thực) có phải là một cơ sở của $\mathbf{R_2}[x]$ không ?

Ta có $\mathbf{R_2}[x] \equiv \mathbf{R}^3$ và $G \equiv S = \{\alpha = (1,-2, a), \beta = (2, a - 2,1), \gamma = (2, a - 5, a + 1)\} \subset \mathbf{R}^3$.

Trong **Ví dụ (5.5)**, ta đã thấy S là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$.

Suy ra G là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$.

c) $Z = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}\} \subset M_2(\mathbf{R})$ và

$U = < Z > \leq M_2(\mathbf{R})$. Tìm một cơ sở của U và chỉ ra dimU.

Ta có $M_2(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^4$,

$Z \equiv S = \{\alpha_1 = (1, 2, 2,-1), \alpha_2 = (4, 7, 1,-2), \alpha_3 = (-2,-3, 4, 0), \alpha_4 = (3, 7, 15,-5)\} \subset \mathbf{R}^4$

và $U \equiv W = < S > \leq \mathbf{R}^4$. Trong **Ví dụ (5.7)**, ta đã thấy W có một cơ sở là

$C = \{ \gamma_1 = (1, 2, 2,- 1), \gamma_2 = (0, 1, 9,- 2), \gamma_3 = (0, 0,- 1, 0) \}$. Suy ra U có một cơ sở là

$T = \{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \}$ và $\dim U = | T | = 3$.

d) $\mathbf{R_2}[x]$ có các cơ sở là

$G = \{ g_1(x) = - 3 + 4x + 6x^2 , g_2(x) = x + x^2 , g_3(x) = 2 - 3x - 4x^2 \}$ và

$H = \{ h_1(x) = 3 + 4x + 9x^2 , h_2(x) = 2 + x + 2x^2 , h_3(x) = - 7 + x + 4x^2 \}$.

Viết $P = (G \to H)$.

Ta có $\mathbf{R_2}[x] \equiv \mathbf{R}^3$, $G \equiv A = \{ \alpha_1 = (- 3, 4, 6), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (2, - 3, - 4) \}$ và

$H \equiv B = \{ \beta_1 = (3, 4, 9), \beta_2 = (2, 1, 2), \beta_3 = (- 7, 1, 4) \} \subset \mathbf{R}^3$. Trong **Ví dụ (6.5)**, ta đã

thấy $L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Suy ra $P = (G \to H) \equiv L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

e) $V \leq M_2(\mathbf{R})$, $\dim V = 3$ và V có các cơ sở

$$Z = \{ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \} \text{ và}$$

$$T = \{ B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 16 & -5 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 11 & -17 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -19 & 13 \\ 15 & 14 \end{pmatrix} \}.$$ Viết $Q = (Z \to T)$.

Ta có $M_2(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^4$, $Z \equiv A = \{\alpha_1 = (-1, 1, 5, 0), \alpha_2 = (2,-5,-4, 1), \alpha_3 = (-3, 0,-2, 4)\}$

và $T \equiv B = \{\beta_1 = (-1, 7, 16,-5), \beta_2 = (11,-17, 3,-4), \beta_3 = (-19, 13, 15, 14)\} \subset \mathbf{R}^4$.

Ta có $V \equiv W$ trong đó W có các cơ sở A và B. Trong **Ví dụ (6.6)**, ta đã thấy

$$L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra } Q = (Z \to T) \equiv L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
