

CHƯƠNG V

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

Trong chương này, m và n là các số nguyên ≥ 1 .

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho ánh xạ $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, nghĩa là

$$\forall \alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \exists! f(\alpha) = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m.$$

a) Nếu $H \subset \mathbf{R}^n$ thì ảnh của H qua ánh xạ f là $f(H) = \{ f(\alpha) \mid \alpha \in H \} \subset \mathbf{R}^m$

b) Nếu $K \subset \mathbf{R}^m$ thì ảnh ngược của K bởi ánh xạ f là

$$f^{-1}(K) = \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid f(\alpha) \in K \} \subset \mathbf{R}^n.$$

1.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho ánh xạ $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.

a) f là ánh xạ tuyến tính (từ \mathbf{R}^n vào \mathbf{R}^m) nếu f thỏa

$$* \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n, f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) \quad (1).$$

$$* \forall \alpha \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}, f(c.\alpha) = c.f(\alpha) \quad (2).$$

b) Suy ra f là ánh xạ tuyến tính nếu f thỏa

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}, f(c.\alpha + \beta) = c.f(\alpha) + f(\beta) \quad (3).$$

c) Ký hiệu $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) = \{ g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m \mid g \text{ tuyến tính} \}$.

Khi $m = n$, ta viết gọn $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) = L(\mathbf{R}^n) = \{ g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \mid g \text{ tuyến tính} \}$.

Nếu $g \in L(\mathbf{R}^n)$ thì g còn được gọi là một toán tử tuyến tính trên \mathbf{R}^n .

Ví dụ:

a) Ánh xạ tuyến tính $\mathbf{O}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ và toán tử tuyến tính $\mathbf{O}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

$$\alpha \mapsto \mathbf{O}$$

$$\alpha \mapsto \mathbf{O}$$

b) Toán tử tuyến tính đồng nhất trên \mathbf{R}^n là $Id_{\mathbf{R}^n} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

$$\alpha \mapsto \alpha$$

c) $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ có $f(X) = (3x - 8y + z - 4t, -7x + 5y + 6t, 4x + y - 9z - t)$

$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Ta có thể kiểm tra f thỏa (3) nên $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$.

Thật vậy, $\forall X = (x, y, z, t), Y = (u, v, w, h) \in \mathbf{R}^4, \forall c \in \mathbf{R}, f(c.X + Y) =$

$$= f(cx + u, cy + v, cz + w, ct + h) = [3(cx + u) - 8(cy + v) + (cz + w) - 4(ct + h),$$

$$- 7(cx + u) + 5(cy + v) + 6(ct + h), 4(cx + u) + (cy + v) - 9(cz + w) - (ct + h)]$$

$$= c(3x - 8y + z - 4t, -7x + 5y + 6t, 4x + y - 9z - t) + (3u - 8v + w - 4h,$$

$$-7u + 5v + 6h, 4u + v - 9w - h) = c.f(X) + f(Y).$$

Ngoài ra ta có thể giải thích $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ do các thành phần của $f(X)$ đều là các biểu thức bậc nhất theo các biến x, y, z và t .

d) $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ có $g(X) = (-2x + 9y + 6z, 8x - 5y + z, 3x + 7y - 4z)$,

$\forall X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Ta có thể kiểm tra g thỏa (3) nên $g \in L(\mathbf{R}^3)$.

Thật vậy, $\forall X = (x, y, z), Y = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3, \forall c \in \mathbf{R},$

$$g(c.X + Y) = g(cx + u, cy + v, cz + w) = [-2(cx + u) + 9(cy + v) + 6(cz + w),$$

$$8(cx + u) - 5(cy + v) + (cz + w), 3(cx + u) + 7(cy + v) - 4(cz + w)]$$

$$= c(-2x + 9y + 6z, 8x - 5y + z, 3x + 7y - 4z) + (-2u + 9v + 6w, 8u - 5v + w,$$

$$3u + 7v - 4w) = c.g(X) + g(Y).$$

Ngoài ra ta có thể giải thích $g \in L(\mathbf{R}^3)$ do các thành phần của $g(X)$ đều là các biểu thức bậc nhất theo các biến x, y và z .

1.3/ TÍNH CHẤT :

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Khi đó, $\forall \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R}^n, \forall c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$, ta có

a) $f(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ và $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.

$$b) f(c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k) = c_1f(\alpha_1) + \dots + c_kf(\alpha_k).$$

(ảnh của một tổ hợp tuyến tính bằng tổ hợp tuyến tính của các ảnh tương ứng).

Ví dụ: Cho $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ và $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}^3$ thỏa $f(\alpha_1) = (-1, 3)$, $f(\alpha_2) = (2, -5)$

và $f(\alpha_3) = (4, 4)$. Khi đó $f(0, 0, 0) = (0, 0)$, $f(-\alpha_1) = -f(\alpha_1) = (1, -3)$ và

$$f(3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3) = 3f(\alpha_1) - 4f(\alpha_2) + 2f(\alpha_3) = 3(-1, 3) - 4(2, -5) + 2(4, 4) = (-3, 37).$$

1.4/ NHẬN DIỆN ÁNH XẠ VÀ TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH:

Cho ánh xạ $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.

Nếu có $A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ thỏa $f(X) = X.A, \forall X \in \mathbf{R}^n$ thì $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Thật

vậy, $\forall X, Y \in \mathbf{R}^n, f(c.X + Y) = (c.X + Y).A = c.(X.A) + Y.A = c.f(X) + f(Y)$,

nghĩa là f thỏa (3) của (1.2).

Ví dụ: Xét lại các ánh xạ $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ và $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ trong Ví dụ của (1.2) :

$f(X) = (3x - 8y + z - 4t, -7x + 5y + 6t, 4x + y - 9z - t), \forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ và

$g(X) = (-2x + 9y + 6z, 8x - 5y + z, 3x + 7y - 4z), \forall X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ -8 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -9 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbf{R}) \text{ và } B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 9 & -5 & 7 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Ta có $f(X) = X.A, \forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ nên $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$.

Ta có $g(X) = X.B, \forall X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ nên $g \in L(\mathbf{R}^3)$.

1.5/ MỆNH ĐỀ: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

a) Nếu $H \leq \mathbf{R}^n$ thì $f(H) \leq \mathbf{R}^m$.

b) Nếu ($H \leq \mathbf{R}^n$ và H có cơ sở A) thì

$[f(H) \leq \mathbf{R}^m \text{ và } f(H) \text{ có tập sinh } f(A)]$.

c) Nếu $K \leq \mathbf{R}^m$ thì $f^{-1}(K) \leq \mathbf{R}^n$.

1.6/ KHÔNG GIAN ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ và xét trường hợp đặc biệt $H = \mathbf{R}^n \leq \mathbf{R}^n$.

a) Ta có $f(H) = f(\mathbf{R}^n) = \{ f(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}^n \} \leq \mathbf{R}^m$.

Ta đặt $f(\mathbf{R}^n) = \text{Im}(f)$ và gọi $\text{Im}(f)$ là *không gian ảnh* của f .

b) Tìm một cơ sở cho $\text{Im}(f)$: Chọn cơ sở A tùy ý của \mathbf{R}^n (ta thường chọn A là cơ sở chính tắc B_0) thì $\langle f(A) \rangle = \text{Im}(f)$. Từ đó ta có thể tìm được một cơ sở cho $\text{Im}(f)$ từ tập sinh $f(A)$ [dùng (5.7) của CHƯƠNG IV].

Ví dụ: $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ có $f(X) = (x + 2y + 4z - 7t, -3x - 2y + 5t, 2x + y - z - 2t)$,

$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Ta kiểm tra dễ dàng $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$.

Đặt $A = B_0 = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1) \}$ là cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^4 thì $\langle f(A) \rangle = \text{Im}(f) = f(\mathbf{R}^4)$. Ta có

$f(A) = \{ f(\varepsilon_1) = (1, -3, 2), f(\varepsilon_2) = (2, -2, 1), f(\varepsilon_3) = (4, 0, -1), f(\varepsilon_4) = (-7, 5, -2) \}$.

$$\text{Khi đó } \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -16 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 2 \\ 0 & 4^* & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra}$$

$\text{Im}(f)$ có cơ sở $C = \{ \gamma_1 = (1, -3, 2), \gamma_2 = (0, 4, -3) \}$ và $\dim \text{Im}(f) = |C| = 2$.

1.7/ KHÔNG GIAN NHÂN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ và xét trường hợp đặc biệt $K = \{\mathbf{O}\} \leq \mathbf{R}^m$.

a) Ta có $f^{-1}(K) = f^{-1}(\mathbf{O}) = \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid f(\alpha) = \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^n$.

Ta đặt $f^{-1}(\mathbf{O}) = \text{Ker}(f)$ và gọi $\text{Ker}(f)$ là *không gian nhân* của f .

b) Tìm một cơ sở cho $\text{Ker}(f)$: Ta thấy $\text{Ker}(f)$ chính là *không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $f(\alpha) = \mathbf{O}$ với ẩn $\alpha \in \mathbf{R}^n$. Từ đó ta có thể tìm được một cơ sở cho $\text{Ker}(f)$ [dùng (5.8) của CHƯƠNG IV].

Ví dụ: Xét lại ánh xạ tuyến tính f trong **Ví dụ (1.5)**.

$$\text{Ker}(f) = \{ \alpha = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid f(\alpha) = \mathbf{0} \}$$

$$= \{ \alpha = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid (x + 2y + 4z - 7t, -3x - 2y + 5t, 2x + y - z - 2t) = \mathbf{0} \}$$

$$= \{ \alpha = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y + 4z - 7t = -3x - 2y + 5t = 2x + y - z - 2t = 0 \}.$$

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính trên:

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1^* & 2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & -16 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1^* & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $z, t \in \mathbf{R}, x = 2z - t, y = 4t - 3z$.

$\text{Ker}(f) = \{ \alpha = (2z - t, 4t - 3z, z, t) = z(2, -3, 1, 0) + t(-1, 4, 0, 1) \mid z, t \in \mathbf{R} \}$. Như vậy

$\text{Ker}(f) = \langle D \rangle$ với $D = \{ \delta_1 = (2, -3, 1, 0), \delta_2 = (-1, 4, 0, 1) \}$ độc lập tuyến tính.

Do đó $\text{Ker}(f)$ có một cơ sở là $D = \{ \delta_1, \delta_2 \}$ và $\dim \text{Ker}(f) = |D| = 2$.

1.8/ MỆNH ĐỀ: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Khi đó

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim \mathbf{R}^n = n.$$

$\dim \text{Ker}(f)$ gọi là *số khuyết* của f và $\dim \text{Im}(f)$ gọi là *hạng* của f .

Ví dụ: Xét lại ánh xạ tuyến tính f trong **Ví dụ (1.5)** và **(1.6)**.

$$\text{Ta có } \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbf{R}^4.$$

II. MA TRẬN BIỂU DIỄN ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ với \mathbf{R}^n và \mathbf{R}^m lần lượt có các cơ sở là

$$A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \} \text{ và } B = \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \}.$$

$$\text{a) Đặt } [f]_{A,B} = ([f(\alpha_1)]_B \ [f(\alpha_2)]_B \ \dots \ [f(\alpha_n)]_B) \in M_{m \times n}(\mathbf{R}).$$

Ta nói $[f]_{A,B}$ là *ma trận biểu diễn của ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở*

A (của \mathbf{R}^n) và B (của \mathbf{R}^m).

Như vậy khi biết f thì ta viết được *ma trận biểu diễn*

$$[f]_{A,B} = ([f(\alpha_1)]_B \ [f(\alpha_2)]_B \ \dots \ [f(\alpha_n)]_B) \quad (1).$$

b) $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$, ta có $[f(\alpha)]_B = [f]_{A,B} [\alpha]_A \quad (2).$

Như vậy khi biết $[f]_{A,B}$ thì ta xác định được *biểu thức* của f theo (2).

(từ $[f(\alpha)]_B$ ta sẽ tính được ngay $f(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$).

c) Nếu A và B lần lượt là các cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^n và \mathbf{R}^m thì $[f]_{A,B}$ được gọi là *ma trận chính tắc* của f . Biểu thức của f và ma trận chính tắc của f có thể suy ra lẫn nhau một cách dễ dàng.

Ví dụ:

a) Xét $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ với $f(u, v, w) = (-3u + 4v - w, 2u + v + 3w)$, $\forall (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

Cho $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ và B lần lượt là các cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^3 và \mathbf{R}^2 .

Ta có $f(\varepsilon_1) = f(1, 0, 0) = (-3, 2)$, $f(\varepsilon_2) = f(0, 1, 0) = (4, 1)$ và

$f(\varepsilon_3) = f(0, 0, 1) = (-1, 3)$ nên có ngay ma trận chính tắc

$$[f]_{A,B} = ([f(\varepsilon_1)]_B \ [f(\varepsilon_2)]_B \ [f(\varepsilon_3)]_B) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbf{R}).$$

b) Xét $g \in L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ có ma trận chính tắc $[g]_{B,A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbf{R}).$

với B và A lần lượt là các cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^2 và \mathbf{R}^3 .

$$\forall \alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2, [g(\alpha)]_A = [g]_{B,A} [\alpha]_B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 5x \\ 7x - y \\ 4x + 9y \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra $\forall \alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g(\alpha) = g(x, y) = (-5x + 2y, 7x - y, 4x + 9y)$.

2.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n)$.

\mathbf{R}^n có một cơ sở là $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

a) Đặt $[f]_A = [f]_{A,A} = ([f(\alpha_1)]_A [f(\alpha_2)]_A \dots [f(\alpha_n)]_A) \in M_n(\mathbf{R})$.

Ta nói $[f]_A$ là *ma trận biểu diễn của toán tử tuyến tính f theo cơ sở A* .

Như vậy khi biết f thì ta viết được *ma trận biểu diễn*

$$[f]_A = ([f(\alpha_1)] [f(\alpha_2)] \dots [f(\alpha_n)])(1).$$

b) $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$, ta có $[f(\alpha)]_A = [f]_A [\alpha]_A$ (2).

Như vậy khi biết $[f]_A$ thì ta xác định được *biểu thức* của f theo (2).

(từ $[f(\alpha)]_A$ ta tính được ngay $f(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$).

c) Nếu A là cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^n thì $[f]_A$ được gọi là *ma trận chính tắc* của f . Biểu thức của f và ma trận chính tắc của f có thể suy ra lẫn nhau một cách dễ dàng.

Ví dụ:

a) Xét $f(u, v, w) = (2u - v, -u + 3v + w, u + 2v - w)$, $\forall (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$ thì $f \in L(\mathbf{R}^3)$.

Cho $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^3 . Ta có $f(\varepsilon_1) = f(1, 0, 0) = (2, -1, 1)$,

$f(\varepsilon_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 3, 2)$ và $f(\varepsilon_3) = f(0, 0, 1) = (0, 1, -1)$ nên có ngay ma

$$\text{trận chính tắc } [f]_A = ([f(\varepsilon_1)]_A [f(\varepsilon_2)]_A [f(\varepsilon_3)]_A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

b) Xét $g \in L(\mathbf{R}^2)$ có ma trận chính tắc $[g]_B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ [B là cơ sở

chính tắc của \mathbf{R}^2].

$$\forall \alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2, [g(\alpha)]_B = [g]_B [\alpha]_B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 4y \\ -2x + 9y \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra ngay $\forall \alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g(\alpha) = g(x, y) = (7x - 4y, -2x + 9y)$.

2.3/ CÔNG THỨC THAY ĐỔI CƠ SỞ TRONG MA TRẬN BIỂU DIỄN:

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

\mathbf{R}^n có các cơ sở lần lượt là A và C với $S = (A \rightarrow C) \in M_n(\mathbf{R})$.

\mathbf{R}^m có các cơ sở lần lượt là B và D với $T = (B \rightarrow D) \in M_m(\mathbf{R})$.

a) Ta có công thức $[f]_{C,D} = T^{-1} \cdot [f]_{A,B} \cdot S$ và do đó $[f]_{A,B} = T \cdot [f]_{C,D} \cdot S^{-1}$.

b) Suy ra $[f]_{C,B} = [f]_{A,B} \cdot S$ (lúc này $T = (B \rightarrow B) = I_m$ và $T^{-1} = I_m$).

$$[f]_{A,D} = T^{-1} \cdot [f]_{A,B} \text{ (lúc này } S = (A \rightarrow A) = I_n \text{)}.$$

c) Suy ra $[f]_{A,B} = [f]_{C,B} \cdot S^{-1}$ và $[f]_{A,B} = T \cdot [f]_{A,D}$.

Ghi chú : Nếu A và B lần lượt là các cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^n và \mathbf{R}^m thì dễ dàng có được S và T .

Ví dụ:

a) Xét $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ với $f(u, v, w) = (-3u + 4v - w, 2u + v + 3w)$, $\forall (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

Cho $A = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$ và B lần lượt là các cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^3 và \mathbf{R}^2 .

$$\text{Ta có ma trận chính tắc } [f]_{A,B} = ([f(\varepsilon_1)]_B \ [f(\varepsilon_2)]_B \ [f(\varepsilon_3)]_B) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cho các cơ sở của \mathbf{R}^3 và \mathbf{R}^2 lần lượt là

$$C = \{ \gamma_1 = (1, 2, 4), \gamma_2 = (5, 1, 2), \gamma_3 = (3, -1, 1) \} \text{ và } D = \{ \delta_1 = (7, -2), \delta_2 = (4, -1) \}.$$

$$\text{Ta có } S = (A \rightarrow C) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } T = (B \rightarrow D) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ có } T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Từ đó } [f]_{C,D} = T^{-1} [f]_{A,B} S = \begin{pmatrix} -65 & -55 & -18 \\ 114 & 93 & 28 \end{pmatrix},$$

$$[f]_{C,B} = [f]_{A,B} S = \begin{pmatrix} 1 & -13 & -14 \\ 16 & 17 & 8 \end{pmatrix} \text{ và } [f]_{A,D} = T^{-1} [f]_{A,B} = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -11 \\ 8 & 15 & 19 \end{pmatrix}.$$

b) Xét $h \in L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ có $[h]_{D,C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ với A, B, C, D, S và T được hiểu

như trên. Ta có ma trận chính tắc $[h]_{B,A} = S[h]_{D,C} T^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 56 \\ 3 & 10 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall \alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $h(\alpha) = h(x, y) = (14x + 56y, 3x + 10y, 9x + 29y)$.

Hơn nữa $[h]_{B,C} = [h]_{D,C} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $[h]_{D,A} = S[h]_{D,C} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2.4/ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n)$.

\mathbf{R}^n có các cơ sở lần lượt là A và C với $S = (A \rightarrow C) \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta có công thức $[f]_C = S^{-1} \cdot [f]_A \cdot S$ và do đó $[f]_A = S \cdot [f]_C \cdot S^{-1}$.

b) Suy ra $[f]_{C,A} = [f]_A \cdot S$ và $[f]_{A,C} = S^{-1} \cdot [f]_A$.

c) Suy ra $[f]_{A,C} = [f]_C \cdot S^{-1}$ và $[f]_{C,A} = S \cdot [f]_C$.

Ghi chú : Nếu A là cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^n thì dễ dàng có được S .

Ví dụ:

a) Xét $f \in L(\mathbf{R}^3)$ với

$$f(u, v, w) = (2u - v, -u + 3v + w, u + 2v - w), \forall (u, v, w) \in \mathbf{R}^3.$$

Cho $A = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$ là cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^3 .

Ta có ma trận chính tắc $[f]_A = ([f(\varepsilon_1)]_A \ [f(\varepsilon_2)]_A \ [f(\varepsilon_3)]_A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Cho $C = \{ \gamma_1 = (1, -2, 2), \gamma_2 = (2, 0, 1), \gamma_3 = (2, -3, 3) \}$ là một cơ sở của \mathbf{R}^3 với

$S = (A \rightarrow C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ qua các phép biến đổi

$$(S \mid \mathbf{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -3 & -4 \end{array} \right) = (\mathbf{I}_3 | \mathbf{S}^{-1}). \text{ Ta có } [\mathbf{f}]_C = \mathbf{S}^{-1} \cdot [\mathbf{f}]_A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -62 & -10 & -95 \\ -10 & 0 & -15 \\ 43 & 7 & 66 \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{f}]_{C,A} = [\mathbf{f}]_A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -5 & -1 & -8 \\ -5 & 1 & -7 \end{pmatrix} \text{ và } [\mathbf{f}]_{A,C} = \mathbf{S}^{-1} \cdot [\mathbf{f}]_A = \begin{pmatrix} -4 & 27 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -19 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Xét $\mathbf{h} \in L(\mathbf{R}^3)$ có $[\mathbf{h}]_C = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 21 \\ 2 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & -14 \end{pmatrix}$ với A, C, S và \mathbf{S}^{-1} được hiểu như

trên. Ta có ma trận chính tắc $[\mathbf{h}]_A = \mathbf{S} \cdot [\mathbf{h}]_C \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Suy ra $\forall \alpha = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \mathbf{h}(\alpha) = \mathbf{h}(x, y, z) = (x + y, y + z, z).$

Ta có $[\mathbf{h}]_{A,C} = [\mathbf{h}]_C \cdot \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ và $[\mathbf{h}]_{C,A} = \mathbf{S} \cdot [\mathbf{h}]_C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

III. XÁC ĐỊNH ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TỪ ẢNH CỦA MỘT CƠ SỞ :

3.1/ MỆNH ĐỀ: \mathbf{R}^n có cơ sở là $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \}$. Cho $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m).$

Khi đó $\mathbf{f} = \mathbf{g} \Leftrightarrow \forall j \in \{ 1, 2, \dots, n \}, \mathbf{f}(\alpha_j) = \mathbf{g}(\alpha_j).$

3.2/ MỆNH ĐỀ: \mathbf{R}^n có cơ sở là $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \}.$

Chọn tùy ý $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbf{R}^m.$

Khi đó có duy nhất $\mathbf{f} \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ thỏa $\mathbf{f}(\alpha_j) = \beta_j \quad \forall j \in \{ 1, 2, \dots, n \}.$

3.3/ XÁC ĐỊNH ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TỪ ẢNH CỦA MỘT CƠ SỞ:

Ta trình bày cách xác định ánh xạ tuyến tính \mathbf{f} trong (3.2).

a) Cách 1: dùng tọa độ vector theo cơ sở.

$\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$, tìm $[\alpha]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ để có biểu diễn $\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n.$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } f(\alpha) &= f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n) = c_1f(\alpha_1) + c_2f(\alpha_2) + \dots + c_nf(\alpha_n) = \\ &= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n.\end{aligned}$$

b) Cách 2: dùng ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính.

Gọi C và D lần lượt là các cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^n và \mathbf{R}^m với $S = (C \rightarrow A)$.

Viết $[f]_{A,D} = ([f(\alpha_1)]_D \ [f(\alpha_2)]_D \ \dots \ [f(\alpha_n)]_D) = (\beta'_1 \ \beta'_2 \ \dots \ \beta'_m)$. Ta có

ma trận chính tắc $[f]_{C,D} = [f]_{A,D} \cdot S^{-1}$. Từ đó suy ra ngay $f(\alpha), \forall \alpha \in \mathbf{R}^n$.

Ví dụ:

\mathbf{R}^3 có cơ sở $A = \{ \alpha_1 = (1, -1, 1), \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_3 = (3, -1, 2) \}$.

a) Tìm $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ thỏa

$$f(\alpha_1) = (3, 0, -1, 2), f(\alpha_2) = (1, -2, 4, 0) \text{ và } f(\alpha_3) = (-4, 1, 0, -3).$$

b) Tìm $g \in L(\mathbf{R}^3)$ thỏa $g(\alpha_1) = (-2, 1, 3), g(\alpha_2) = (-3, 2, 1)$ và $g(\alpha_3) = (-7, 5, 3)$.

Cách 1: $\forall \alpha = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, tìm $[\alpha]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-x-y \\ y+2z-x \\ x-z \end{pmatrix}$ bằng cách giải hệ

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \alpha : (\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \alpha'_3 \mid \alpha^t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & y+z \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & -y \\ 0 & 1^* & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & z-x-y \\ 0 & 1^* & 0 & y+2z-x \\ 0 & 0 & 1^* & x-z \end{array} \end{array}$$

Từ đó $f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1f(\alpha_1) + c_2f(\alpha_2) + c_3f(\alpha_3)$

$$= (z-x-y)(3, 0, -1, 2) + (y+2z-x)(1, -2, 4, 0) + (x-z)(-4, 1, 0, -3)$$

$$= (-8x - 2y + 9z, 3x - 2y - 5z, -3x + 5y + 7z, -5x - 2y + 5z).$$

và $g(\alpha) = g(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1g(\alpha_1) + c_2g(\alpha_2) + c_3g(\alpha_3)$

$$= (z-x-y)(-2, 1, 3) + (y+2z-x)(-3, 2, 1) + (x-z)(-7, 5, 3)$$

$$= (-2x - y - z, 2x + y, -x - 2y + 2z).$$

Cách 2: Gọi C và D lần lượt là các cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^3 và \mathbf{R}^4 với

$$S = (C \rightarrow A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ qua các phép biến đổi}$$

$$\begin{aligned} (S | \mathbf{I}_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) = (\mathbf{I}_3 | S^{-1}). \end{aligned}$$

$$\text{Viết } [f]_{A,D} = ([f(\alpha_1)]_D \ [f(\alpha_2)]_D \ [f(\alpha_3)]_D) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ và ta có ma trận}$$

$$\text{chính tắc } [f]_{C,D} = [f]_{A,D} \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 9 \\ 3 & -2 & -5 \\ -3 & 5 & 7 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra } \forall \alpha = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

$$f(\alpha) = f(x, y, z) = (-8x - 2y + 9z, 3x - 2y - 5z, -3x + 5y + 7z, -5x - 2y + 5z).$$

$$\text{Viết } [g]_{A,C} = ([g(\alpha_1)]_C \ [g(\alpha_2)]_C \ [g(\alpha_3)]_C) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ và ta có ma trận}$$

$$\text{chính tắc } [g]_C = [g]_{A,C} \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Suy ra } \forall \alpha = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, g(\alpha) = g(x, y, z) = (-2x - y - z, 2x + y, -x - 2y + 2z).$$