

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG I: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.

Dùng phương pháp *Gauss* hay *Gauss – Jordan* để biến đổi các hệ phương trình thành dạng

$$1/ a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 31 \\ 0 & 1 & 2 & | & 14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & | & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & | & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & | & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & | & -7 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -43/18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 13/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -7/18 \end{pmatrix}.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: a), b) $r(\bar{A}) = r(A) = 3 = n$.

c), d) $r(\bar{A}) = r(A) = 4 = n$.

$$2/ a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 4 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -9 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & | & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & | & -17 \\ 0 & 0 & 9 & 17 & | & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: a), b), c) $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 4$.

d) $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 3$.

$$3/ a) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 7 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/7 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 & | & 0 \\ 0 & 17 & -19 & 20 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/17 & 13/17 & | & 0 \\ 0 & 1 & -19/17 & 20/17 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & | & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 & | & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & | & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -5/6 & | & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: a) $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < n = 3$.

b) $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < n = 4$.

c) $r(\bar{A}) = r(A) = 3 < n = 4$.

d), e) $r(\bar{A}) = r(A) = 3 < n = 5$.

f) $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < n = 5$.

$$4/ a) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -14/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17m-4 \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -9/17 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -14/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17m-4 \end{array} \right) : \text{ Xét } (17m-4) = 0 \text{ hoặc } (17m-4) \neq 0.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $m = 4/17$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < n = 4$.

Khi $m \neq 4/17$ thì $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 3$.

$$b) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \text{ Xét } (m-1) = 0 \text{ hoặc } (m-1) \neq 0.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $m = 1$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < n = 4$.

Khi $m \neq 1$ thì $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 3$.

$$c) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m(m-7) \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -m-1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2m+3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m(m-7) \end{array} \right) : \text{ Xét } (m-7) = 0 \text{ hoặc } (m-7) \neq 0.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $m = 7$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = 3 < n = 4$.

Khi $m \neq 7$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = n = 4$.

$$d) \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 13/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 7/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 9/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array} \right) : \text{ Xét } (m-1) = 0 \text{ hoặc } (m-1) \neq 0.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $m = 1$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = 3 < n = 5$.

Khi $m \neq 1$ thì $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 4$.

$$e) \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -2a-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-c-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+2d \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 9 & -14 & 3a+d \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -2a-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-c-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+2d \end{array} \right) :$$

Xét $[(2a-c-d) = 0 = (a+b+2d)]$ hoặc $[(2a-c-d) \neq 0 \text{ hay } (a+b+2d) \neq 0]$.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $(2a-c-d) = 0 = (a+b+2d)$ thì

$r(\bar{A}) = r(A) = 2 < n = 5$. Khi $[(2a-c-d) \neq 0 \text{ thì } (a+b+2d) \neq 0]$ thì $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 3$.

$$f) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & m-8 & -12 \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & m-8 & -12 \end{array} \right) : \text{ Xét } (m-8) = 0 \text{ hoặc } (m-8) \neq 0.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $m = 8$ thì $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 4$.

Khi $m \neq 8$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = n = 4$.

$$g) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & (m+3)(m-2) & (m-2) \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -m-3 & 0 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & (m+3)(m-2) & (m-2) \end{array} \right) : \text{ Xét } \begin{cases} (m-2)=0 \\ (m+3)=0 \\ (m-2)(m+3) \neq 0 \end{cases}.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $m = 2$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < n = 3$.

Khi $m = -3$ thì $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 3$. Khi $-3 \neq m \neq 2$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = n = 3$.

$$h) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -3/5 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5m+3 \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 2/15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5m+3 \end{array} \right) : \text{ Xét } (5m+3)=0 \text{ hoặc } (5m+3) \neq 0.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $m = -3/5$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < n = 4$.

Khi $m \neq -3/5$ thì $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 3$.

$$i) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 1 & m^2+m \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1-m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 1 & m^2+m \end{array} \right) : \text{ Xét } (m-1)=0 \text{ hoặc } (m-1) \neq 0.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $m = 1$ thì $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 3$.

Khi $m \neq 1$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = n = 3$.

$$j) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -m-6 & -m-3 \\ 0 & 0 & m(m+5) & m(m+2) \end{array} \right) \text{ hay } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+3 & m+2 \\ 0 & 1 & -m-6 & -m-3 \\ 0 & 0 & m(m+5) & m(m+2) \end{array} \right) : \text{ Xét } \begin{cases} m=0 \\ (m+5)=0 \\ m(m+5) \neq 0 \end{cases}.$$

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi $m = 0$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < n = 3$.

Khi $m = -5$ thì $r(\bar{A}) = r(A) + 1 = 3$. Khi $-5 \neq m \neq 0$ thì $r(\bar{A}) = r(A) = n = 3$.

CHƯƠNG II: CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN – MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

2/ a) Tính A^2 để suy ra A^{2m} và A^{2m+1} , $\forall m \geq 0$. Tổng quát hóa cho trường hợp $A \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A^2 = I_n$.

b) Tính đến A^4 để suy ra A^k , $\forall k \geq 0$ (phân biệt $a = b$ và $a \neq b$ để dễ rút gọn biểu thức).

c) Tính đến A^3 để suy ra A^k , $\forall k \geq 0$ (để ý các công thức lượng giác $\cos(mx + x)$ và $\sin(mx + x)$, $\forall m \geq 0$).

d), e) Tính đến A^3 để suy ra A^k , $\forall k \geq 0$. f) Tính đến A^4 để suy ra A^k , $\forall k \geq 0$.

g) Tính đến A^5 để suy ra A^k , $\forall k \geq 0$ [để ý tổng $0 + 1 + 2 + \dots + (k-1) = 2^{-1}k(k-1)$, $\forall k \geq 1$].

h) Tính đến A^5 để suy ra A^k , $\forall k \geq 0$ [để ý tổng $1 + 2 + 3 + \dots + k = 2^{-1}k(k+1)$, $\forall k \geq 1$].

i) Tính đến A^3 để suy ra A^k , $\forall k \geq 0$ (để ý nếu $A^m = \mathbf{O}_3$ thì $A^k = \mathbf{O}_3$, $\forall k \geq m$).

3/ Tính đến A^3 để suy ra $f(A) = 2A^3 - 5A^2 + 4A - 3I_2$.

$$4/ a) X = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ -1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ u & v & w & & he(2) \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ 1 & 0 & 3/4 & 1 & 5/4 \\ 0 & 1 & 11/4 & 4 & 1/4 \\ u & v & w & & he(2) \end{array} \right) : \text{ vô số nghiệm.}$$

$$b) X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ u & v & w & & he(2) \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -7/2 & 17/2 & -5/2 \\ u & v & w & & he(2) \end{array} \right) : \text{ vô số nghiệm.}$$

$$\text{c) } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 0 \end{array} \right) : \text{ vô số nghiệm.}$$

$$\text{d) } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 1 = t^2 + yz \\ y(x+t) = 0 = z(x+t) \end{cases}. \text{ Xét } \begin{cases} y=0 \\ y \neq 0 = (x+t) \end{cases} \text{ để thấy hệ có vô số nghiệm là}$$

$$X = \pm I_2, X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & -1 \end{pmatrix} \text{ với } z \in \mathbf{R} \text{ và } X = \begin{pmatrix} x & y \\ (1-x^2)/y & -x \end{pmatrix} \text{ với } x \in \mathbf{R} \text{ và } y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

$$\text{e) } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -5 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) : \text{ nghiệm duy nhất.}$$

$$\text{f) } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 5/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array} \right) : \text{ nghiệm duy nhất.}$$

$$\text{g) } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x + yz = 0 = t^2 - t + yz \\ y(x+t-1) = 0 = z(x+t-1) \end{cases}. \text{ Xét } \begin{cases} y=0 \\ y \neq 0 = (x+t-1) \end{cases} \text{ để thấy hệ có vô số nghiệm là}$$

$$X = \mathbf{O}_2, I_2, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \text{ với } z \in \mathbf{R} \text{ và } X = \begin{pmatrix} x & y \\ (x-x^2)/y & 1-x \end{pmatrix} \text{ với } x \in \mathbf{R} \text{ và } y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

$$\text{h) } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & -7 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & -8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & -11 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) : \text{ nghiệm duy nhất.}$$

$$\text{i) } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 3 & -4 & 11 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : \text{ hệ vô nghiệm.}$$

5/ a) Tính A^2 để suy ra A^k và $A^k B^k$, $\forall k \geq 2$. Tính AB , $(AB)^2$ để suy ra $(AB)^k$, $\forall k \geq 2$.

b) Tính C^2 và D^2 để suy ra C^k , D^k và $C^k D^k$, $\forall k \geq 2$. Tính CD , $(CD)^2$ để suy ra $(CD)^k$, $\forall k \geq 2$.

6/ a) Nhân trực tiếp bằng định nghĩa. b) Nhân trực tiếp bằng định nghĩa và rút gọn. c) Tương tự a) của 2/.

d) Tính B^2 để suy ra B^k , $\forall k \geq 1$. e) Tính C^k ($k \geq 2$) bằng nhị thức Newton để suy ra S_k , $\forall k \geq 1$.

f) $A^m = A^k A^{m-k}$, $\forall m \geq k$. g) Chỉ cần chứng minh $(BA)^2 = \mathbf{O}_n$ rồi dùng f). Chọn ví dụ $A, B \in M_2(\mathbf{R})$.

h) Dùng nhị thức Newton và f) khi tính $(cA + dB)^6$. Khi tổng quát hóa, tính $(cA + dB)^{r+s-1}$ bằng nhị thức

Newton. Đề ý tính chất “ nếu p, q là 2 số nguyên ≥ 0 thỏa $p + q = r + s - 1$ thì ($p \geq r$ hay $q \geq s$) ”.

i) Đặt $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $AB = H = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ và $BA = K = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Tính mỗi vế của đẳng thức theo các hệ số của A và B rồi so sánh. Kiểm tra $\forall c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\text{Tr}(AB - BA) \neq \text{Tr}(c \cdot I_n)$.

$$7/ A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = 4^{-1} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$D^{-1} = D.$$

$$R_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3.$$

$$R_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3.$$

Dùng các tính chất cơ bản của ma trận khả nghịch để tính nhanh các kết quả.

8/ a) Nhân trực tiếp hoặc dùng qui nạp theo $k \geq 1$. Đề ý $(A + B) = A(I_n + A^{-1}B) = (I_n + BA^{-1})A$.

b) Tìm các số nguyên p và q thỏa $9p + 20q = 1$. Suy ra $A = A^1 = (A^9)^p (A^{20})^q$.

c) Dùng $PQ = I_n \Leftrightarrow (P \text{ khả nghịch và } P^{-1} = Q) \Leftrightarrow (Q \text{ khả nghịch và } Q^{-1} = P)$.

$$9/ a) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ -17 & -10 & -22 \end{pmatrix}.$$

$$b) A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -16 \\ 15 & 15 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$c) A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} -118 & -95 \\ -200 & -161 \end{pmatrix}.$$

$$d) A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ -3 & -1 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$e) A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} -21 & 9 \\ 5 & -2 \\ 24 & -10 \end{pmatrix}. f) A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -53 & -22 & -12 \\ 22 & 9 & 5 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} -39 & -52 \\ 411 & 549 \\ -170 & -227 \end{pmatrix}.$$

g) và h) Xét tính khả nghịch hoặc không khả nghịch ở 2 vế của phương trình để thấy phương trình vô nghiệm.

10/ a) Tính HL. Đề ý $K = (I_n - B)$ với $B = -A$ và $B^k = O_n$. Từ đó áp dụng điều vừa chứng minh.

b) Tính PQ. c) $X = -7(A^{-5})^{-1}(A^{-3}C^2B^4)(B^6)^{-1}$ và $Y = 2(A^9C^8)^{-1}(A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2})(B^{-4}C^{-2})^{-1}$ rồi rút gọn.

CHƯƠNG III: ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG.

Ký hiệu (i) là dòng thứ i và $(i)'$ là cột thứ i của ma trận đang xét.

1/ a) 100.

b) $242m(1 - m)$.

c) -324 .

d) $18ab(a - b)$.

e) Dùng các tính chất của định thức.

2/ a) $(x + 1)^2(2x - 1)$. b) $2(x + 3)(x - 2)$. c) $(x - a)(x - b)(a - b)(x + a + b)$. d) $(x - a)(x - b)(b - a)(ax + bx + ab)$.

e) $(1) + (2) + (3)$. Sau đó $(2)' - (1)'$ và $(3)' - (1)'$. Ta có $|A| = -2^{-1}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$.

f) $(1) + (2) + (3) + (4)$. Sau đó $(2)' - (1)'$, $(3)' - (1)'$ và $(4)' - (1)'$. Khai triển dòng (1). Tiếp theo $(1) + (2)$ và $(2)' - (1)'$. Ta có $|A| = -(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$.

g) $(2) - (1)$ và $(3) - (1)$. Khai triển cột (4). Sau đó $(1) + (3)$. Ta có $|A| = (2a - b - c - d)$.

h) $(1) + (2) + (3) + (4)$. Sau đó $(4)' - (1)'$. Khai triển cột (4). Tiếp theo $(2)' - (1)'$ và $(3)' - (1)'$.

Ta có $|A| = (a - b)^2(a + b + 2x)(a + b - 2x)$.

- i) $(4)' - (3)'$, $(3)' - (2)'$ và $(2)' - (1)'$. Sau đó $(4)' - (3)'$ và $(3)' - (2)'$. Để ý ma trận có 2 cột giống nhau.
j) $(1)' + (2)' + (3)'$. Để ý ma trận có 2 cột tỉ lệ với nhau.

3/ a), b), c) và d) $|A| \neq 0$ và $A^{-1} = |A|^{-1} C^t$.

e) và f) $|A| = 0$.

4/ a) $|A| = (m+1)(m+2)$.

b) $(1)' - (2)' - (3)'$. Sau đó $(3) - (1)$. Ta có $|A| = m^2(m-1)$.

c) $|A| = (c-a)(c-b)(a-b)$.

d) $|A| = 1, \forall a \in \mathbf{R}$.

5/ $\Delta \neq 0$ và hệ có nghiệm duy nhất là $x_j = \Delta_j / \Delta$ với $j = 1, 2, 3$.

6/ a) $\Delta = (m+1)(m-1) = \Delta_2$ và $\Delta_1 = 0$: nghiệm duy nhất hay vô số nghiệm.

b) $\Delta = -(m+1)(m+4)$, $\Delta_1 = -(m+1)$, $\Delta_2 = -(m+1)(m+2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm

c) $\Delta = m(m+2)$, $\Delta_1 = (m+1)(m+2)$ và $\Delta_2 = -(m+2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm.

d) $\Delta = (2m^2 - 3m + 7) > 0 \quad \forall m \in \mathbf{R}$, $\Delta_1 = (m^2 + 5m - 9)$ và $\Delta_2 = (5 - 2m^2)$: nghiệm duy nhất.

e) $\Delta = (m+1)(m+3)$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 2(m+3)$, $\Delta_3 = -(m+3)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm.

f) $\Delta = 8(m+1)(m-2)$, $\Delta_1 = -2(2m^2 + 4m - 25)$, $\Delta_2 = 12(m+1)$ và $\Delta_3 = 18$: nghiệm duy nhất hay vô nghiệm

g) $\Delta = -m(m+5)$, $\Delta_1 = -2m(m+2)$, $\Delta_2 = 3m$, $\Delta_3 = -m(m+2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm

h) $\Delta = m(m+2)(m-1)^2$, $\Delta_1 = (m-1)(m+2)$, $\Delta_2 = 0$ và $\Delta_3 = m(1-m)(m+2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm.

CHƯƠNG IV : KHÔNG GIAN VECTOR \mathbf{R}^n .

1/ c), d), g) và h) $W \leq \mathbf{R}^n$ tương ứng. a), b), e) và f) W không phải là không gian vector con của \mathbf{R}^n tương ứng.

2/ a) $3u - v - w = 0$. b) $u - 10v - 7w = 0$. c) $u - v + w - t = 0$. d) $(4u - v + 3w = 0 = u - 7v - 9t)$.

3/ a), b) và e) S phụ thuộc tuyến tính. c) và d) S độc lập tuyến tính. f) Tính $\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$ và biện luận theo m .

4/ a), b), c) và f) S không phải là cơ sở của \mathbf{R}^3 . d) và e) S là một cơ sở của \mathbf{R}^3 .

5/ Cách bổ sung vector vào cơ sở B của W để được một cơ sở C của \mathbf{R}^n : Lập ma trận mà các dòng của nó là các vector của B . Nếu ma trận này chưa có dạng bậc thang thì ta biến đổi nó về dạng bậc thang.

Nếu thấy cột thứ j của ma trận dạng bậc thang này không bán chuẩn hóa được thì ta thêm vector ε_j (trong cơ sở chính tắc B_0 của \mathbf{R}^n) vào B ($1 \leq j \leq n$).

a) $3u - 2v = 0$ và $C = B \cup \{\varepsilon_2\}$.

b) $u = 0 = v - 3w$ và $C = B \cup \{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$.

c) $u + v - 9w - 3t = 0$ và $C = B \cup \{\varepsilon_4\}$.

d) $u = 0 = 25v + 8w - 6t$ và $C = B \cup \{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}$.

e) $3u - w + 4t = 0 = 9u + 6t + z$ và $C = B \cup \{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$.

6/ Cách bổ sung vector vào cơ sở B của W để được một cơ sở C của \mathbf{R}^n : Làm như bài 5/. Để ý trong bài toán đang xét, ma trận mà các dòng của nó là các vector của B đã có sẵn dạng bậc thang nên không cần biến đổi.

a) Cơ sở $B = \{(1, 2, 4), (0, 1, 1)\}$ và $2u + v - w = 0$. Ta có $C = B \cup \{\varepsilon_3\}$.

b) Cơ sở $B = \{(1, 2, -3), (0, 3, -2)\}$ và $5u + 2v + 3w = 0$. Ta có $C = B \cup \{\varepsilon_3\}$.

c) Cơ sở $B = \{(1, 2, -4, 0), (0, 1, -11, 1), (0, 0, 20, -1)\}$ và $22u - 9v + w + 20t = 0$. Ta có $C = B \cup \{\varepsilon_4\}$.

d) Cơ sở $B = \{(1, -1, 29, -3), (0, 5, 5, 2)\}$ và $(30u + v - w = 0 = 13u - 2v + 5t)$. Ta có $C = B \cup \{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

7/ Dùng cách tách biến và đặt thừa số chung theo mỗi biến, ta tìm được một tập sinh hữu hạn S cho W . Sau đó làm hoàn toàn tương tự như bài 6/.

8/ Cách bổ sung vector vào cơ sở B của W để được một cơ sở C của \mathbf{R}^n : Có thể làm như bài 5/ (nhưng sẽ mất thời gian biến đổi ma trận về dạng bậc thang). Trong bài toán đang xét, ta có thể làm nhanh như sau : Khi giải xong hệ $AX = \mathbf{0}$ (phương pháp Gauss hay Gauss – Jordan), nếu thấy cột thứ j của ma trận A bán chuẩn hóa được (hoặc chuẩn hóa được) thì ta thêm vector ε_j (trong cơ sở chính tắc B_0 của \mathbf{R}^n) vào B ($1 \leq j \leq n$).

a) Cơ sở $B = \{ (-19, 6, 0, 1) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$.

b) Cơ sở $B = \{ (-1, -1, 1, 2, 0), (7, 5, -5, 0, 8) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$.

c) Cơ sở $B = \{ (-2, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$.

d) Cơ sở $B = \{ (1, -1, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 1, 0), (2, -3, 0, 0, 1) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$.

9/ Cách 1: $(S \rightarrow T) = (S \rightarrow B_0)(B_0 \rightarrow T)$ với B_0 là cơ sở chính tắc của \mathbf{R}^3 . Suy ra $(T \rightarrow S) = (S \rightarrow T)^{-1}$

Cách 2: Tìm $(S \rightarrow T)$ và $(T \rightarrow S)$ bằng cách biến đổi theo phương pháp Gauss – Jordan

$$(X'_1 \ X'_2 \ X'_3 \mid Y'_1 \ Y'_2 \ Y'_3) \rightarrow (I_3 \mid (S \rightarrow T)) \text{ và } (Y'_1 \ Y'_2 \ Y'_3 \mid X'_1 \ X'_2 \ X'_3) \rightarrow (I_3 \mid (T \rightarrow S)).$$

Khi tính tọa độ của vector, có thể dùng công thức đổi tọa độ hay dùng định nghĩa.

10/ a) Lập $A = ([E]_S \mid [F]_S \mid [G]_S) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ thì $|A| \neq 0$ nên T cũng là một cơ sở của \mathbf{R}^3 và ta có

$$(S \rightarrow T) = A. \text{ Suy ra } (T \rightarrow S) = A^{-1}.$$

b) **Cách 1:** Do $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix}$ và $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ nên T cũng là một cơ sở của \mathbf{R}^3

$$\text{và } (T \rightarrow S) = ([X]_T \mid [Y]_T \mid [Z]_T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra } (S \rightarrow T) = (T \rightarrow S)^{-1}.$$

Cách 2: Đặt $W = \langle T \rangle$ thì $W \leq \mathbf{R}^3$. Do $S \subset \langle T \rangle$ nên $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$, nghĩa là $\mathbf{R}^3 \leq W$.

Vậy $W = \langle T \rangle = \mathbf{R}^3$. T là một tập sinh có 3 vector của \mathbf{R}^3 (3 chiều) nên T cũng là một cơ sở của \mathbf{R}^3

$$\text{Ta có } (T \rightarrow S) = ([X]_T \mid [Y]_T \mid [Z]_T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } (S \rightarrow T) = (T \rightarrow S)^{-1}.$$

11/ Lập $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ và $\Delta = |A| = (ad - bc)$. Dựa vào giả thiết, hãy chỉ ra $\Delta^2 = 1$.

Đặt $[Z]_S = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ thì ta được hệ phương trình tuyến tính $pX + qY = Z$. Giải hệ bằng qui tắc Cramer.

12/ a) Giải thích S là một cơ sở của W để thấy $\dim W = |S| = 2$. $X = (u, v, w) \in W \Leftrightarrow 3u - 7v + 5w = 0$ (*)

Nếu $X = (u, v, w) \in W$ thì $[X]_S = 3^{-1} \begin{pmatrix} 2v - w \\ 2w - v \end{pmatrix}$ (**). Từ (*), ta có $T \subset W$.

Ta giải thích được T cũng là một cơ sở của W. Từ (**), ta có $P(S \rightarrow T) = ([E]_S \mid [F]_S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Suy ra } (T \rightarrow S) = (S \rightarrow T)^{-1}.$$

Có thể tìm trực tiếp $(S \rightarrow T)$ và $(T \rightarrow S)$ bằng cách biến đổi theo phương pháp Gauss – Jordan

$$(Y' \ Z' \mid E' \ F') \rightarrow (I_3 \mid (S \rightarrow T)) \text{ và } (E' \ F' \mid Y' \ Z') \rightarrow (I_3 \mid (T \rightarrow S)).$$

Ta có $[X]_T = (T \rightarrow S) [X]_S$.

b) Hoàn toàn tương tự như a), trong đó $X = (u, v, w, t) \in W \Leftrightarrow 7u - 2v + 5w = 0 (*)$.

$$\text{Nếu } X \in W \text{ thì } [X]_S = 3^{-1} \begin{pmatrix} v-u-w-t \\ 2v-6u-4w-t \\ 3u-v+2w+t \end{pmatrix} (**).$$

$$(S \rightarrow T) = ([E]_S \ [F]_S \ [G]_S) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } (T \rightarrow S) = (S \rightarrow T)^{-1}.$$

Có thể tìm trực tiếp $(S \rightarrow T)$ và $(T \rightarrow S)$ bằng cách biến đổi theo phương pháp Gauss – Jordan
 $(Y' \ Z' \ U' \mid E' \ F' \ G') \rightarrow (I_3 \mid (S \rightarrow T))$ và $(E' \ F' \ G' \mid Y' \ Z' \ U') \rightarrow (I_3 \mid (T \rightarrow S))$.

13/ a) Giải thích S và T lần lượt là một cơ sở của H và K .

$(H + K)$ có một cơ sở là $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$. $(H \cap K)$ có một cơ sở là $\{(2, 3, 1, 1)\}$.

b) H có một cơ sở là $\{(1, 2, 1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\}$ và K có một cơ sở là $\{(1, 2, 0, 1), (0, 3, -3, 1), (0, 0, 1, 0)\}$.

$(H + K)$ có một cơ sở là $\{(1, 2, 1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Do $\dim(H + K) = 4$ nên $(H + K) = \mathbf{R}^4$. $(H \cap K)$ có một cơ sở là $\{(2, 4, 3, 2), (0, 3, 2, 1)\}$.

c) H có một cơ sở là $A = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ và K có một cơ sở là $B = \{(1, 2, 0, 2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$.

Ta có $H \subset K$ (mỗi vector trong A là một tổ hợp tuyến tính của B) nên $(H + K) = K$ và $(H \cap K) = H$.

d) H có một cơ sở là $\{(0, -1, 0, 1)\}$ và K có một cơ sở là $\{(1, 1, -3, -3), (0, 1, 8, 10), (0, 0, 15, 19)\}$.

$(H + K)$ có một cơ sở là $\{(1, 1, -3, -3), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 8, 11), (0, 0, 0, 1)\}$.

Do $\dim(H + K) = 4$ nên $(H + K) = \mathbf{R}^4$. Suy ra $\dim(H \cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H + K) = 0$
 nên $(H \cap K) = \{\mathbf{0}\}$ có cơ sở duy nhất là \emptyset .

e) H có một cơ sở là $\{(-17, 10, 1, 0), (29, -17, 0, 1)\}$ và K có một cơ sở là $\{(-1, 1, 0, 0), (11, 0, 1, 1)\}$.

$(H + K)$ có một cơ sở là $\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Do $\dim(H + K) = 4$ nên $(H + K) = \mathbf{R}^4$. Suy ra $\dim(H \cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H + K) = 0$
 nên $(H \cap K) = \{\mathbf{0}\}$ có cơ sở duy nhất là \emptyset .

14/ a) Chiều (\Rightarrow): phản chứng. Nếu $(H \not\subset K \text{ và } K \not\subset H)$ thì có $X \in (H \setminus K)$ và có $Y \in (K \setminus H)$.

Vậy $Z = (X + Y) \in L$, nghĩa là $Z \in H$ hay $Z \in K$: từ đây suy ra sự mâu thuẫn. Chiều (\Leftarrow): hiển nhiên.

b) Chọn H và K lần lượt là các không gian con dạng đường thẳng cắt nhau tại gốc $\mathbf{0}$ của \mathbf{R}^2 .

CHƯƠNG V: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH.

$$1/ a) \forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3, f(X) = XA \text{ với } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ nên } f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4) \text{ và } [f]_{B, C} = A^t.$$

$\text{Im}(f)$ có cơ sở $\{(1, 3, -2, 5), (0, 1, -1, 1)\}$. $\text{Ker}(f)$ có cơ sở $\{(-1, 10, 7)\}$. $Y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow y + z - x = 0 = z + t - 3x$.

b) $\begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ và $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên D và E lần lượt là các cơ sở của \mathbf{R}^2 và \mathbf{R}^3 .

$$S = (A \rightarrow D) = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, T = (B \rightarrow E) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ta viết được dễ dàng biểu thức của g từ $[g]_{A,B}$.

$$[g]_{D,B} = [g]_{A,B} S, \quad [g]_{A,E} = T^{-1} [g]_{A,B}, \quad [g]_{D,E} = T^{-1} [g]_{A,B} S.$$

c) $[h]_{D,B} = T [h]_{D,E}, \quad [h]_{A,E} = [h]_{D,E} S^{-1}, \quad [h]_{A,B} = T [h]_{D,E} S^{-1}$ rồi viết được dễ dàng biểu thức của h.

2/ a) $\forall X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4, f(X) = XA$ với $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbf{R})$ nên $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ và $[f]_{C,B} = A^t$.

$\text{Im}(f)$ có cơ sở $\{(1, -2, -3), (0, 1, 2)\}$ và $\text{Ker}(f)$ có cơ sở $\{(8, -6, 5, 0), (-13, 1, 0, 5)\}$. $Y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow x + 2y - z = 0$.

b) $\begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ và $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ nên D và E lần lượt là các cơ sở của \mathbf{R}^2 và \mathbf{R}^3 .

$$S = (A \rightarrow D) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad T = (B \rightarrow E) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ta viết được dễ dàng biểu thức của g từ $[g]_{B,A}$.

$$[g]_{B,D} = S^{-1} [g]_{B,A}, \quad [g]_{E,A} = [g]_{B,A} T, \quad [g]_{E,D} = S^{-1} [g]_{B,A} T.$$

c) $[h]_{B,D} = [h]_{E,D} T^{-1}, \quad [h]_{E,A} = S [h]_{E,D}, \quad [h]_{B,A} = S [h]_{E,D} T^{-1}$ rồi viết được dễ dàng biểu thức của h.

3/ a) $\forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3, f(X) = XA$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -12 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ nên $f \in L(\mathbf{R}^3)$ và $[f]_B = A^t$.

$\text{Im}(f)$ có cơ sở $\{(1, 2, -10), (0, 1, -6)\}$ và $\text{Ker}(f)$ có cơ sở $\{(-6, 7, 5)\}$. $Y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow 6y + z - 2x = 0$.

b) $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên E là cơ sở của \mathbf{R}^3 . $S = (B \rightarrow E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ có $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Từ $[g]_B$, ta viết được dễ dàng biểu thức của g.

$$[g]_{E,B} = [g]_B S, \quad [g]_{B,E} = S^{-1} [g]_B, \quad [g]_E = S^{-1} [g]_B S.$$

c) $[h]_{E,B} = S [h]_E, \quad [h]_{B,E} = [h]_E S^{-1}, \quad [h]_B = S [h]_E S^{-1}$ rồi viết được dễ dàng biểu thức của h.
Ta có $\text{Im}(h) = \mathbf{R}^3$ và $\text{Ker}(h) = \mathbf{O}$.

4/ a) $\forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3, f(X) = XA$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ nên $f \in L(\mathbf{R}^3)$ và $[f]_B = A^t$.

$\text{Im}(f)$ có cơ sở $\{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$ và $\text{Ker}(f)$ có cơ sở $\{(5, -3, 2)\}$. $Y = (x, y, z) \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

b) $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên E là cơ sở của \mathbf{R}^3 . $S = (B \rightarrow E) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ có $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Từ $[g]_B$, ta viết được dễ dàng biểu thức của g .

$$[g]_{E,B} = [g]_B S. \quad [g]_{B,E} = S^{-1} [g]_B. \quad [g]_E = S^{-1} [g]_B S.$$

c) $[h]_{E,B} = S [h]_E$. $[h]_{B,E} = [h]_E S^{-1}$. $[h]_B = S [h]_E S^{-1}$ rồi viết được dễ dàng biểu thức của h .
Ta có $\text{Im}(h) = \mathbf{R}^3$ và $\text{Ker}(h) = \mathbf{O}$.

5/ a) $[\alpha]_E = \begin{pmatrix} 5v + 2w - 2u \\ 22v + 8w - 9u \\ u - 3v - w \end{pmatrix}$ nên $\alpha = (5v + 2w - 2u)\alpha_1 + (22v + 8w - 9u)\alpha_2 + (u - 3v - w)\alpha_3$ (1).

Ta có $P = (B \rightarrow E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $Q = (E \rightarrow B) = P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Cách 1: $\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, từ (1) ta có

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (5v + 2w - 2u)f(\alpha_1) + (22v + 8w - 9u)f(\alpha_2) + (u - 3v - w)f(\alpha_3) \\ &= (3v + w - 2u, 3v + 2w - 2u, 26u - 64v - 23w) \end{aligned} \quad (2).$$

Cách 2: $[f]_B = [f]_{E,B} P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 26 & -64 & -23 \end{pmatrix}$ rồi suy ra (2).

c) Cách 1: $\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, từ (1) ta có

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= (5v + 2w - 2u)g(\alpha_1) + (22v + 8w - 9u)g(\alpha_2) + (u - 3v - w)g(\alpha_3) \\ &= (19u - 48v - 17w, 17v + 6w - 7u, 78v + 28w - 31u, 8v + 3w - 3u) \end{aligned} \quad (3).$$

Cách 2: $[g]_{B,C} = [g]_{E,C} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -48 & -17 \\ -7 & 17 & 6 \\ -31 & 78 & 28 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ rồi suy ra (3).