ĐÁP ÁN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Năm 2016-2017

Câu 1

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m+2 \\ -3 & 2 & 3m-3 \\ m-1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |A| &= [1 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (3m-3) \cdot (m-1) + 6 \cdot (m+2)] \\ &\qquad - [2 \cdot (m+2) \cdot (m-1) + 6 - 2 \cdot (3m-3)] \\ &= (-4 + 3m^2 - 6m + 3 + m + 12) - (3m^2 + 2m - 4 + 6 - 6m + 6) \\ &= m^2 + 4m + 3 \end{aligned}$$

$A \xrightarrow[a \cdot d_1]{-b \cdot c_2} B \Rightarrow |B| = (-b) \cdot a \cdot |A| = -ab(m^2 + 4m + 3)$

A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -3 \end{cases}$

b. $(D^{-1})^T \cdot D^4 \cdot (D^T)^2 = -8 \cdot D^{-2} \cdot D^T \cdot D^3 \qquad (1)$

Lưu ý: (Nhắc lại lý thuyết) $|D^T| = |D|; |\alpha D| = \alpha^n |D|; |D^\alpha| = |D|^\alpha$.

Xét định thức hai vế của (1) ta có:

$$\frac{1}{|D|} \cdot |D|^4 \cdot |D|^2 = (-8)^4 \frac{1}{|D|^2} \cdot |D| \cdot |D|^3$$

$\Rightarrow |D|^5 = 4096 \cdot |D|^2$

$\Rightarrow |D|^3 = 1096 \qquad$ (D khả nghịch nên $|D| \neq 0$)

$\Rightarrow |D| = 16$

Vậy $|D| = 16$

Câu 2

a. $V = \{X = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid -3(2u - v + 5w)^2 - 8(u + 4v - 6w)^2 \geq 0\}$

Ta có: $x = (u, v, w) \in V$

$\Leftrightarrow -3(2u - v + 5w)^2 - 8(u + 4v - 6w)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v + 5w = 0 \\ u + 4v - 6w = 0 \end{cases}$

Xét $x_1 = (u_1, v_1, w_1) \in W; x_2 = (u_2, v_2, w_2) \in W$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 - v_1 + 5w_1 = 0 \\ u_1 + 4v_1 - 6w_1 = 0 \\ 2u_2 - v_2 + 5w_2 = 0 \\ u_2 + 4v_2 - w_2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u_1+u_2)-(v_1+v_2)+5(w_1+w_2)=0 \\ (u_1+u_2)+4(v_1+v_2)-6(w_1+w_2)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=(u_1+u_2, v_1+v_2, w_1+w_2)\in V \tag{2}$$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}, u_1\in V$

$$\begin{cases} 2u_1-v_1+5w_1=0 \\ u_1+4v_1-6w_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha u_1-\alpha v_1+5\alpha w_1=0 \\ \alpha u_1+4\alpha v_1-6\alpha w_1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha u\in V \tag{3}$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow V$ là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$

Xét $x=(1,3,1): 1^2-3\cdot 3+8\cdot 1^3=0\Rightarrow x\in W$

Mà $2x=(2,6,2): 2^2-3\cdot 6+2\cdot 8^3>0\Rightarrow 2x\notin W$

Vậy W không là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$

b. $K=\{x\in\mathbb{R}^4 \mid MX=0\}$

Xét $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in K\Rightarrow Mx=0$

Hay x là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-4x_4=0 \\ -2x_1-x_2+x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+x_2+3x_3-x_4=0 \end{cases}$$

Xét M ta có:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-3d_1]{\substack{d_4+2d_2 \\ d_2+2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & 10 & 10 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+2d_2]{d_4+d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_2+3x_3+4x_4=-2x_3-x_4 \\ x_2=5x_3+5x_4 \\ x_3,x_4\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$x_3=1, x_4=0\Rightarrow x_1=-2, x_2=5\Rightarrow x=(-2,5,1,0)$$

$$x_3=0, x_4=1\Rightarrow x_1=-1, x_2=5\Rightarrow x=(-1,5,0,1)$$

Vậy cơ sở của K là $\{(-2,5,1,0),(-1,5,0,1)\},\ \dim K=2$

Câu 3

G, E lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} G = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ E = \{(1,0),(0,1)\} \end{cases}$$

a. Tìm cơ sở cho $f(X)$

$$f(1,0,0) = (1,-4,2)$$

$$f(0,1,0) = (6,4,2)$$

$$f(0,0,1,) = (4,-2,3)$$

Do $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Nên $\{(1,-4,2),(6,4,2),(4,-2,3)\}$ là tập sinh của $\operatorname{im} f$.

Xét ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-4d_1]{d_2-6d_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 28 & -10 \\ 0 & 14 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-2d_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 14 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy cơ sở $\operatorname{im} f = \{(1,-4,2),(6,4,2)\}$

(hoặc cơ sở $\operatorname{im} f = \{(1,-4,2),(0,14,-5)\}$)

$$\Rightarrow \dim \operatorname{im} f = 2$$

$$\Rightarrow \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{im} f = 3 - 2 = 1$$

b. $[g]_{E,G} = (G \to H) \cdot [f]_{F,H} \cdot (F \to E)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g(x,y) = (4x-2y, -2x+y, 7x-3y)$$

c. Xét ma trận $\left(Y_1^T \quad Y_2^T \quad Y_3^T \;\middle|\; X^T\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[d_2-d_1]{d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y \end{array}\right) \xrightarrow[d_1-d_3]{d_2+d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x+y-z \\ 0 & 1 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow X = (x+y-z)Y_1 + (z-x)Y_2 + (z-y)Y_3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(X) &= (x+y-z)h(Y_1) + (z-x)h(Y_2) + (z-y)h(Y_3) \\ &= (x+y-z)(2,-1) + (z-x)(-4,3) + (x-z)(0,4) \\ &= (6x+2y-6z, -4x-5y+8z) \end{aligned}$$