Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên TP. HCM

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Lưu hành nội bộ
2020

3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.

3.1.1 Định nghĩa

Cho không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, biến ngẫu nhiên X (hay còn gọi là đại lượng ngẫu nhiên) là ánh xạ

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega) = x$$

Giá trị x đgl một giá trị của biến ngẫu nhiên X.

- Kí hiệu: $X, Y, \ldots$ là các biến ngẫu nhiên, $x, y, \ldots$ là giá trị của các biến ngẫu nhiên đó.

VD 3.1: Các đại lượng sau là biến ngẫu nhiên:
- Số chấm xuất hiện khi thực hiện phép thử tung con xúc xắc.
- Tuổi thọ của một thiết bị đang hoạt động.
- Số cuộc gọi đến tổng đài. thiết bị VD 3.2: Xét phép thử

tung hai đồng xu. Không gian mẫu của phép thử này là

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$$

Gọi X là số mặt ngửa xuất hiện. Khi đó, X là một ánh xạ từ không gian mẫu Ω vào $\mathbb{R}$ như:

ω	SS	NS	SN	NN
$X(\omega)$	0	1	1	2

3.1.2 Phân loại biến ngẫu nhiên

Dựa vào miền giá trị của biến ngẫu nhiên mà ta phân thành 2 loại chính như:

i) Biến ngẫu nhiên rời rạc

Biến ngẫu nhiên X gọi là biến ngẫu nhiên rời rạc, nếu $X(\Omega)$ là một tập hợp hữu hạn $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ hoặc vô hạn đếm được.
Nói cách khác, biến ngẫu nhiên sẽ rời rạc nếu ta có thể liệt kê tất cả các giá trị có thể của nó.

VD 3.3: Trong phép thử tung con xúc xắc, nếu ta gọi X là "số điểm xuất hiện" thì X là biến ngẫu nhiên rời rạc vì $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ là một tập hợp hữu hạn.

VD 3.4: Gọi Y là "số người vào mua hàng tại một siêu thị trong một ngày" thì Y là biến ngẫu nhiên rời rạc vì $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ là một tập hợp vô hạn đếm được.

ii) Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên X gọi là biến ngẫu nhiên liên tục, nếu $X(\Omega)$ lấy đầy một khoảng nào đó của $\mathbb{R}$ (hoặc cả $\mathbb{R}$).
Đối với biến ngẫu nhiên liên tục ta không thể liệt kê được tất cả các giá trị có thể của nó.

VD 3.5: Trong phép thử bắn một phát súng vào bia, nếu ta gọi X là" khoảng cách từ điểm chạm của viên đạn đến tâm bia" thì X là biến ngẫu nhiên liên tục.
Vì ta không thể liệt kê được tất cả các giá trị có thể của nó mà ta chỉ có thể nói rằng các giá trị có thể của X nằm trong khoảng (a, b) nào đó với $a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

VD 3.6: Chọn ngẫu nhiên một bóng đèn, gọi Y là "tuổi thọ của bóng đèn đó" thì Y là biến ngẫu nhiên, $Y(\Omega)$ lấy đầy một khoảng giá trị.

3.2 Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

3.3.1 Định nghĩa:

Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên là sự tương ứng giữa các giá trị có thể có của nó và các xác suất tương ứng với các giá trị đó.

3.3.2 Bảng phân phối xác suất

dùng để mô tả quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc.

Giả sử biến ngẫu nhiên X có thể nhận các giá trị có thể có là $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với các xác suất tương ứng là $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X có dạng:

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Trong p_i phải thoả mãn hai điều kiện:

$$\begin{cases} \forall i, \ \ 0 \le p_i \le 1, \ \text{ với } p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

<u>VD 3.7</u>: Một lô hàng có 10 sản phẩm trong đó có 8 sản phẩm tốt. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô hàng này. Tìm quy luật phân phối xác suất của số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm được lấy ra.

Gọi X là "số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm được lấy ra". Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị có thể có $0, 1, 2$; và các xác suất tương ứng được tính theo định nghĩa cổ điển như sau:

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}; \ \mathbb{P}(X=1) = \frac{C_8^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$
$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Như vậy, quy luật phân phối xác suất của X được biểu thị bởi phân phối xác suất sau:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Kiểm tra ta có: $\forall i, \ \ 0 \le p_i \le 1$ và $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = 1.$

<u>VD 3.8</u>: Xác suất để xạ thủ bắn trúng bia là 0.8. Xạ thủ được phát từng viên đạn để bắn cho đến khi trúng bia. Tìm quy luật phân phối xác suất của số viên đạn được phát.

Gọi X là "số viên đạn được phát". Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị có thể có $1, 2, \ldots, k, \ldots$; và các xác suất tương ứng

$\mathbb{P}(X=1) = 0.8$; *(ngay phát đầu tiên xạ thủ đã bắn trúng bia).*
$\mathbb{P}(X=2) = 0.2 \times 0.8$; *(phát I bắn không trúng bia và phát II bắn trúng).*
...
$\mathbb{P}(X=k) = (0.2)^{k-1} \times 0.8$; *($(k-1)$ phát đầu bắn không trúng bia và phát thứ k bắn trúng).*

Như vậy bảng phân phối xác suất của X có dạng:

X	1	2	...	k	...
P	0.8	0.2×0.8	...	$(0.2)^{k-1} \times 0.8$	...

Kiểm tra ta có: $\forall i, \ \ 0 \le p_i \le 1$ *và*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{k=1}^{\infty} 0.2^{k-1} 0.8 = \frac{0.8}{1-0.2} = 1.$$

3.3.3 Hàm mật độ xác suất

dùng để mô tả quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục.

Luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X được biểu thị bởi hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

- $f(x) \ge 0, \forall x$
- $\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f(x)dx; \ \forall I \subset \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$f(x)$ gọi là hàm mật độ xác suất của X.

Nhận xét:

Mọi hàm $f(x)$ không âm và thỏa mãn điều kiện $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X nào đó.

Tính chất:

X là biến ngẫu nhiên liên tục

- $\mathbb{P}(X = x_0) = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$;
- $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

VD 3.9: Cho hàm

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \in [0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,1] \end{cases}$$

i) Chứng tỏ rằng $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X nào đó.

ii) Tính xác suất $\mathbb{P}(0 < X \le \frac{1}{2})$.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

3.3.4 Hàm phân phối xác suất

áp dụng được cho cả biến ngẫu nhiên rời rạc và biến ngẫu nhiên liên tục.

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X là xác suất để biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x, với x là một số thực bất kỳ,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

- Trường hợp X rời rạc: $F(x) = \sum_{x_i \le x} \mathbb{P}(X = x_i)$

  $F(x)$ có đồ thị dạng bậc thang.

- Trường hợp X liên tục: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ trong đó $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của X.

  Ta có: $F'(x) = f(x)$ tại các điểm liên tục của hàm $f(x)$.

Tính chất:

- $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x$
- $F(x)$ là hàm không giảm, nếu $x_2 > x_1$ thì : $F(x_2) \geq F(x_1)$
- $F(x)$ liên tục bên phải mọi nơi
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

◦ Nếu biết $F(x)$ ta có thể tính các xác suất liên quan đến X :

- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F(a)$
- ...

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Giả sử biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	x_{i+1}	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_i	p_{i+1}	$\cdots$

- Nếu $x < x_1$ thì $(X \leq x) = \emptyset$ và ta có
$$F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$$
- Nếu $x_k \leq x < x_{i+1}$ thì,
$$(X \leq x) = (X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}) = (X = x_1) \cup \ldots \cup (X = x_i)$$
Mặt khác, do các biến cố $(X = x_i)$ xung khắc nhau từng đôi một nên
$$F(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_i)$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc (tt)

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_i) \\ &= p_1 + p_2 + \ldots + p_i \end{aligned}$$

Vậy hàm phân phối xác suất của X là

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < x_1 \\ p_1 & \text{nếu } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{nếu } x_2 \leq x < x_3 \\ \ldots & \ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_i & \text{nếu } x_i \leq x < x_{i+1} \\ \ldots & \ldots \end{cases}$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

VD 3.10: Tung ba đồng xu (cân đối) cùng lúc. Tìm quy luật phân phối xác suất của số mặt sấp "S" xuất hiên.

Gọi X là "số mặt sấp "S" xuất hiên". Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị có thể có $0, 1, 2, 3$; *và ta có:*

- *Bảng phân phối xác suất của X:*

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- *Hàm phân phối xác suất của X:* $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{với } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & \text{với } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{với } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{với } \geq 3 \end{cases}$

VD 3.10a: Tung đồng thời 4 con xúc xắc (đồng nhất). Gọi X là số mặt chẵn xuất hiện.
a. Lập bảng phân phối xác suất của X.
b. Xác định hàm phân phối xác suất của X.
....
....
....
....

VD 3.10b: Tung 1 đồng xu cân đối đồng nhất. Gọi X là số mặt sấp xuất hiện.
a. Lập bảng phân phối xác suất của X.
b. Xác định hàm phân phối xác suất của X.
....
....
....
....

VD 3.10c: Tuổi thọ Y của một thiết bị (đơn vị: giờ) có hàm mật độ xác suất có dạng

$$f(y) = \begin{cases} \frac{a}{y^2} & \text{nếu } y \geq 100 \\ 0 & \text{nếu } y < 100 \end{cases}$$

với $a \in \mathbb{R}$.

i) Hãy xác định hàm phân phối của Y.
ii) Thiết bị được gọi là loại A nếu tuổi thọ của nó kéo dài ít nhất 400 giờ. Tính tỉ lệ loại A.

3.3 Các tham số đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên:

- Các tham số đặc trưng cho xu hướng trung tâm của biến ngẫu nhiên: kỳ vọng toán, trung vị, mốt, ...
- Các tham số đặc trưng cho độ phân tán của biến ngẫu nhiên: phương sai, độ lệch chuẩn, hệ số biến thiên,
- Các tham số đặc trưng cho dạng phân phối xác suất.

3.3.1 Kỳ vọng toán

Định nghĩa

- Trường hợp X rời rạc: đại lượng ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Kỳ vọng của X: $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

- Trường hợp X liên tục: đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất $f(x)$.
Kỳ vọng của X: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

VD 3.11: Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

X	−1	0	2	3
P	0.1	0.2	0.4	0.3

Tính kỳ vọng của X?

VD 3.12: Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

X	1	2	4	5	7
P	a	0.2	b	0.2	0.1

Tìm giá trị của tham số a và b để $\mathbb{E}(X) = 3.5$?

....

VD 3.13: Tìm kì vọng của biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x) & \text{với } x \in [0;1] \\ 0 & \text{với } x \notin [0;1] \end{cases}$$

....

VD 3.14: Thời gian điều trị một loại bệnh để bệnh nhân mắc bệnh này khỏi bệnh là đại lượng ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}x^2 & \text{với } x \in [0;4] \\ 0 & \text{với } x \notin [0;4] \end{cases}$$

Tính thời gian điều trị trung bình để một bệnh nhân mắc bệnh này khỏi bệnh.

....
....

Tính chất của kỳ vọng

- $\mathbb{E}(c) = c$ với c là hằng số.
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$ với $a \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- Nếu X và Y độc lập thì $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)$

Ý nghĩa của kỳ vọng

- Kỳ vọng là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiênX.
- Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

VD 3.15: Tính thu nhập trung bình của nhân viên trong một công ty có 600 nhân viên, bảng sau đây cho biết thu nhập trong một tháng của nhân viên trong công ty này.

Thu nhập (triệu/tháng)	3	3.5	4	5	6	10
Số người cùng thu nhập	48	100	150	200	60	42

Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của công ty, gọi X là " thu nhập một tháng của nhân viên này". Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc bảng phân phối xác suất sau:

X	3	3.5	4	5	6	10
P	$\frac{48}{600}$	$\frac{100}{600}$	$\frac{150}{600}$	$\frac{200}{600}$	$\frac{60}{600}$	$\frac{42}{600}$

và ta có kỳ vọng của X: $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 4.79$ *(triệu đồng/tháng).*

Vậy thu nhập trung bình của nhân viên trong công ty này là 4.79 triệu đồng/tháng; và ta thấy có nhiều nhân viên thu nhập gần thu nhập trung bình.

○ **Ứng dụng thực tế của kỳ vọng toán**

- Lúc đầu, kỳ vọng toán xuất hiện trong các trò chơi may rủi để tính giá trị mà người chơi mong đợi sẽ nhận được. Trong lý thuyết trò chơi, $\mathbb{E}(X) = 0$ là trò chơi công bằng.
- Hiện nay, kỳ vọng toán được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực kinh doanh và quản lý như một tiêu chuẩn để quyết định trong tình huống cần lựa chọn giữa nhiều chiến lược khác nhau.
  Trong thực tế sản xuất hay kinh doanh, khi cần chọn phương án cho năng suất hay lợi nhuận cao, người ta thường chọn phương án sao cho kỳ vọng năng suất hay kì vọng lợi nhuận cao.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

VD 3.16 : Một cửa hàng sách dự định nhập vào một số sách XSTK. Nhu cầu hàng năm về loại sách này được cho trong bảng phân phối xác suất sau:

Nhu cầu j (cuốn)	20	21	22	23	24	25
Xác suất P	0.3	0.25	0.18	0.14	0.1	0.03

Cửa hàng này mua vào với giá 7 USD/cuốn và bán ra với giá 10 USD/cuốn, đến cuối năm thì phải bán hạ giá còn 4 USD/cuốn trước khi XSTK của năm tới được xuất bản.

Cửa hàng muốn xác định số lượng nhập vào sao cho lợi nhuận kỳ vọng là lớn nhất.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

Gọi i là " số lượng sách cần nhập ",
j là " số lượng sách theo nhu cầu ".

Gọi X_{ij} là " lợi nhuận ", hiển nhiên lợi nhuận sẽ phụ thuộc vào số lượng sách cần nhập và nhu cầu thực tế về loại sách này.

Theo đề bài ta có: $X_{ij} = \begin{cases} 10 \times j - 7 \times i + 4 \times (i - j) & \text{với } j \le i \\ 10 \times j - 7 \times i & \text{với } j > i \end{cases}$

Vậy ta có bảng lợi nhuận của X_{ij} sau:

i \ j	20	21	22	23	24	25
20	60	60	60	60	60	60
21	57	63	63	63	63	63
22	54	60	66	66	66	66
23	51	57	63	69	69	69
24	48	54	60	66	72	72
25	45	51	57	63	69	75

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

Chiến lược của cửa hàng sách là phải chọn số lượng sách cần nhập i để cực đại lợi nhuận kỳ vọng. Với số lượng nhập i lợi nhuận kỳ vọng được tính như sau:

$$\mathbb{E}(X_i) = \sum_j x_{ij} p_j$$

Từ đó ta có bảng giá trị lợi nhuận kỳ vọng tùy thuộc vào số lượng nhập như sau:

Số lượng nhập i	Lợi nhuận kỳ vọng $\mathbb{E}(X_i)$
20	60.00
21	61.20
22	60.90
23	59.52
24	57.30
25	54.48

Vậy chiến lược mang lại lợi nhuận kỳ vọng tối đa là nhập 21 cuốn sách.

3.3.2 Trung vị m_d

Trung vị của biến ngẫu nhiên X bất kỳ, kí hiệu $Med(X)$ là giá trị m_d của biến ngẫu nhiên X sao cho :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta viết : $Med(X) = m_d$

Nhận xét (trung vị) : Khi X là biến ngẫu nhiên liên tục thì trung vị của X chính là điểm chia phân phối xác suất thành hai phần bằng nhau. Nghĩa là

$$\mathbb{P}(X \geq m) = \mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$$

tương đương với

$$\mathbb{P}(X \geq m) = 1/2 \text{ hoặc } \mathbb{P}(X \leq m) = 1/2.$$

Chứng minh :
Thật vậy, từ điều kiện $P(X \geq m) \geq 1/2$ suy ra $P(X \leq m) = P(X < m) \leq 1/2$. Kết hợp với điều kiện $P(X \leq m) \geq 1/2$ ta phải có $P(X \leq m) = 1/2$.

VD 3.17 a): Trung vị của biến ngẫu nhiên rời rạc
Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất như sau

X	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	0.1	0.2	0.3	0.4

Tìm $Med(X)$.

VD 3.17 b) : Trung vị của biến ngẫu nhiên rời rạc cho trường hợp không duy nhất Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất như sau

X	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	0.1	0.4	0.3	0.2

Tìm $Med(X)$.

VD 3.18 a) : Trung vị của biến ngẫu nhiên liên tục Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $Med(X)$.

VD 3.18 b) : Trung vị của biến ngẫu nhiên liên tục cho trường hợp không duy nhất Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{khi } 2.5 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $Med(X)$.

3.3.3 Mốt m_0

Mod của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu $Mod(X)$, là giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận được với xác suất lớn nhất.

Từ định nghĩa,

i) nếu biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

thì

$$Mod(X) = x_i \Leftrightarrow p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \max\{p_1, p_2 \ldots\}.$$

ii) nếu X có phân phối liên tục với hàm mật độ xác suất $f(x)$ thì

$$Mod(X) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

VD 3.19 :Trường hợp rời rạc Tìm *Mod* của biến ngẫu nhiên X có phân phối rời rạc với bảng phân phối xác suất

X	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}$	0,3	0,25	0,18	0,14	0,13

VD 3.20 :Trường hợp liên tục Tìm *Mod* của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất sau

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{khi } 0 \le x \le 2; \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

3.3.4 Phương sai $\mathbb{V}(X)$

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ thì phương sai $\mathbb{V}(X)$ hay $\mathbb{V}ar(X)$ được định nghĩa là:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$$

Lưu ý:

- Trong tính toán, để tính phương sai của biến ngẫu nhiên X ta thường dử dụng công thức

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X)^2 - (\mathbb{E}(X))^2$$

- Phương sai còn được kí hiệu là: $D(X)$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

3.3.5 Độ lệch chuẩn $\sigma(X)$

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X là căn bậc hai của phương sai $\mathbb{V}(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{(\mathbb{V}(X))}$$

Tính chất của phương sai:

- $\mathbb{V}(c) = 0$ với c là hằng số.
- $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$ với $a \in \mathbb{R}$
- Nếu X và Y độc lập thì

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Ý nghĩa của phương sai:

- Phương sai là kỳ vọng của bình phương các sai lệch giữa X và $\mathbb{E}(X)$. Nói cách khác phương sai là trung bình bình phương sai lệch. Phương sai phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biên ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.
- Trong công nghiệp, phương sai biểu thị độ chính xác trong sản xuất.
- Trong canh tác, phương sai biểu thị mức độ ổn định của năng xuất.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
3. Biến ngẫu nhiên
3.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
3.2 Quy luật phân phối xác suất
3.3 Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

<u>VD 3.21a</u>: Một hộp có 10 bi, trong đó có 3 bi nặng 10g, 5 bi nặng 50g và 2 bi nặng 20g. Chọn ngẫu nhiên 1 bi, gọi X là khối lượng của bi đó. Tính $\mathbb{E}(X)$ và $\mathbb{V}(X)$.

....
....
....

<u>VD 3.21b</u>: Cho biến ngẫu nhiên Y có hàm mật độ xác suất $g(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^2} & \text{nếu } y \in [1,2] \\ 0 & \text{nếu } y \notin [1,2] \end{cases}$

Tính $\mathbb{E}(Y)$ và $\mathbb{V}(Y)$.

....
....
....