Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên TP.HCM

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Lưu hành nội bộ
2020

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc

Tài liệu tham khảo:

- Đinh Văn Gắng, *Lý thuyết xác suất và thống kê toán*, NXB Giáo dục, 1999.
- Đ.H. Hồ, *Xác suất thống kê*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2012.
- N.T. M. Ngọc, N.V. Thìn, N.T.H. Nhung, N.Đ. Minh, *Giáo trình bài tập Xác suất thống kê*, lưu hành nội bộ, 2019.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

Nội dung:

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

1.1.1 Khái niệm về tập hợp

- Tập hợp là một khái niệm không có định nghĩa. Tập hợp có thể hiểu tổng quát là sự tựu tập của một số hữu hạn hay vô hạn các đối tượng nào đó. Các đối tượng này đgl phần tử của tập hợp.
- Ta thường dùng các chữ cái in hoa $A, B, Cm, \ldots$ để kí hiệu tập hợp.
- Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng; kí hiệu $\emptyset$.
- Nếu a là phần tử thuộc tập A ta kí hiệu $a \in A$. Ngược lại, a là phần tử không thuộc tập A ta kí hiệu $a \notin A$.

1.1.2 Biễu diễn tập hợp

Có hai cách biễu diễn tập hợp:

- Liệt kê các phần tử của nó.
  Ví dụ 1.1: Tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 7 là
  $$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp đó.
  Ví dụ 1.2: Tập hợp các số thực lớn hơn 0 và bé hơn 1 là
  $$C = \{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad 0 < x < 1\}$$

1.1.3 Quan hệ giữa các tập hợp

- Tập hợp con: Tập hợp A là con tập hợp B nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B. Kí hiệu: $A \subset B$ hoặc $B \supset A$.
  $$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$
- Tập hợp bằng nhau: Hai tập hợp A và B bằng nhau nếu mỗi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B và ngược lại.
  $$A = B \Leftrightarrow (x \in A \;\text{ và }\; x \in B)$$

- Giao của hai tập hợp : Giao của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử đồng thời thuộc cả hai tập hợp này. Kí hiệu $A \cap B$.
  $$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \;\text{ và }\; x \in B)$$
- Hợp của hai tập hợp : Hợp của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp này. Kí hiệu $A \cup B$.
  $$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \;\text{ hoặc }\; x \in B)$$
- Hiệu của hai tập hợp : Hiệu của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử thuộc tập hợp A mà không thuộc tập hợp B . Kí hiệu $A \mid B$.
  $$A \mid B \Leftrightarrow (x \mid x \in A \;\text{ và }\; x \notin B)$$

1.1.4 Các phép toán trên các tập hợp

- Tính giao hoán : .
  $$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A$$
- Tính kết hợp:
  $$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
- Tính phân phối:
  $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
- Công thức De Morgan:
  $$A \bar{\cup} B = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$$

1.2 Giải tích tổ hợp

1.2.1 Quy tắc đếm cơ bản

a. Quy tắc nhân: Để hoàn thành một công việc, ta phải thực hiện một dãy liên tiếp k hành động,
- hành động thứ nhất: có 1 trong n_1 cách thực hiện
- hành động thứ hai: có 1 trong n_2 cách thực hiện
...
- hành động thứ k: có 1 trong n_k cách thực hiện
Vậy số cách hoàn thành công việc nói trên là:

$$n = n_1 n_2 \ldots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○Ví dụ 1.3: Để đi từ thành phố A tới thành phố C phải qua thành phố B. Có 3 cách đi từ A tới B và có 2 cách đi từ B tới C. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C?
Để thực hiện việc đi từ A tới C ta phải thực hiện một dãy liên tiếp hành động:
- hành động I: chọn cách đi từ A tới B có $n_1 = 3$ *cách*
- hành động II: chọn cách đi từ B tới C có $n_2 = 2$ *cách*
Vậy số cách đi từ A đến C là: $n = 3.2 = 6$ *cách*

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○Ví dụ 1.4: Các nhóm I, II, III, IV lần lượt có: $8, 9, 10, 12$ sinh viên. Cần chọn 4 sinh viên, mỗi nhóm 1 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

....
....
....

○Ví dụ 1.5: Dùng các chữ số: $1, 2, 3, 4, 5$ để viết các số x gồm 3 chữ số khác nhau. Hỏi có thể viết được tất cả bao nhiêu số x?

....
....
....

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

b. Quy tắc cộng:
Để hoàn thành một công việc, có thể chọn một trong k phương án,
- phương án thứ nhất: có 1 trong n_1 cách thực hiện
- phương án thứ hai: có 1 trong n_2 cách thực hiện
...
- phương án thứ k: có 1 trong n_k cách thực hiện
Vậy số cách hoàn thành công việc nói trên là:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

○Ví dụ 1.6: Một nhóm sinh viên gồm 2 sinh viên Long An, 3 sinh viên Tiền Giang và 3 sinh viên Long Xuyên. Cần chọn 2 sinh viên cùng tỉnh tham gia đội bóng bàn trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

- *phương án I: chọn 2 sinh viên Long An có* $n_1 = 1$ *cách*
- *phương án II: chọn 2 sinh viên Tiền Giang có* $n_2 = 3$ *cách*
- *phương án III: chọn 2 sinh viên Long Xuyên có* $n_3 = 3$ *cách*

Vậy số cách chọn theo yêu cầu là
$n = 1 + 3 + 3 = 7$ *cách*

○Ví dụ 1.7: Hoặc là 1 giảng viên của khoa XSTK, hoặc là 1 sinh viên của khoa XSTK sẽ là đại diện của trường. Như vậy nếu có 19 giảng viên, 415 sinh viên thì có bao nhiêu cách chọn lựa đại diện?

....

....

○Ví dụ 1.8: Một sinh viên chọn tiểu luận trong nhóm 4 ngành: kế toán, quản trị kinh doanh, tài chính ngân hàng, kỹ thuật máy tính. Mỗi nhóm có số lượng đề tài tương ứng 10, 11, 12, 10 Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

....

....

....

Lưu ý:

- Bộ (nhóm) có thứ tự: khi đổi vị trí các phần tử khác nhau của bộ này ta nhận được bộ khác.
- Bộ (nhóm) không có thứ tự: khi đổi vị trí các phần tử khác nhau của bộ này ta không nhận được bộ khác.
- Bộ (nhóm) lặp: Các phần tử của bộ có mặt nhiều lần trong bộ.
- Bộ (nhóm) không lặp: Các phần tử của bộ chỉ có mặt một lần trong bộ.

1.1.2 Chỉnh hợp

a. Chỉnh hợp (không lặp):

○ Định nghĩa: Chỉnh hợp chập k của n phần tử ($k \leq n$) là một bộ (nhóm) có thứ tự gồm k phần tử khác nhau được chọn từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử

$$\boldsymbol{A}_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

○ Số chỉnh hợp chập k của n có thể được xây dựng qua k bước kế tiếp như sau:
- Chọn phần tử đầu: có n khả năng,
- Chọn phần tử thứ hai: có $n-1$ khả năng,

...

- Chọn phần tử thứ k: có $n-k+1$ khả năng,

Vậy theo quy tắc nhân, số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là:

$$\boldsymbol{A}_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○Ví dụ 1.9: Trong lớp học có 100 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng và một lớp phó?

Số cách chọn là số chỉnh hợp chập 2 của 100:

$$\mathbf{A}_{100}^2 = \frac{100!}{(100-2)!} = 100 * 99 = 9900 \textit{ cách}.$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○Ví dụ 1.10: Cho $\boldsymbol{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên bao gồm hai chữ số phân biệt được thành lập từ $\boldsymbol{E}$?

....

....

....

○Ví dụ 1.11: Cho $\boldsymbol{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên bao gồm bốn chữ số phân biệt được thành lập từ $\boldsymbol{E}$?

....

....

....

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

b. Chỉnh hợp lặp:

○ Định nghĩa: Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ (nhóm) có thứ tự gồm k phần tử được chọn từ n phần tử đã cho, trong đó các phần tử trong nhóm có thể lặp lại $2, 3, \dots, k$ lần.

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử

$$\hat{\mathcal{A}}_n^k = n^k$$

○ Số chỉnh hợp lặp chập k của n có thể được xây dựng qua k bước kế tiếp như sau:
- Chọn phần tử đầu: có n khả năng,
- Chọn phần tử thứ hai: có n khả năng,
...
- Chọn phần tử thứ k: có n khả năng,

Vậy theo quy tắc nhân, số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là:

$$\hat{\mathcal{A}}_n^k = n^k$$

○ Chú ý: Trong chỉnh hợp không lặp thì $k \leq n$ nhưng trong chỉnh hợp lặp thì có thể $k > n$.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○Ví dụ 1.12: Cho $\boldsymbol{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên bao gồm bốn chữ số được thành lập từ $\boldsymbol{E}$?

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số được thành lập từ **E** *là:* $\hat{\mathcal{A}}_5^4 = 5^4 = 625$ *số.*

○*Ví dụ 1.13a: Xếp ngẫu nhiên 3 cuốn sách khác nhau vào 2 ngăn kéo* N_2, N_1. *Hỏi có bao nhiêu cách xếp?*

○*Ví dụ 1.13b: Có bao nhiêu cách sắp xếp 15 người lên tàu lửa có 3 toa?*

○*Ví dụ 1.14: Mỗi vé số của mỗi tỉnh gồm có 6 chữ số. Hỏi mỗi tỉnh khi phát hành mỗi đợt sẽ phát hành được bao nhiêu vé số khác nhau?*

....

....

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

1.1.3 Hoán vị

○ Định nghĩa: Hoán vị của n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đó.

Số hoán vị của n phần tử

$$\mathcal{P}_n = n(n-1)\dots 2.1 = n!$$

○ Chú ý:
Hoán vị n phần tử cũng là chỉnh hợp n lấy n.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○Ví dụ 1.15: Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 sinh viên A, B, C ngồi cùng một bàn học có 3 chỗ ngồi?

Số cách sắp xếp là $\mathcal{P}_3 = 3! = 6$

○*Ví dụ 1.16: Có 6 người xếp hàng ngang để chụp hình. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp kiểu khác nhau?*

....

....

1.1.4 Tổ hợp

a. Tổ hợp (không lặp):

○ Định nghĩa: Tổ hợp chập k của n phần tử $k \leq n$ là một bộ (nhóm) không kể thứ tự gồm k phần tử khác nhau được chọn từ n phần tử đã cho. *Ta có thể coi tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con có k phần tử của n phần tử đó.*
○ Một tổ hợp khác với chỉnh hợp ở yếu tố thứ tự.

Số tổ hợp (không lặp) chập k của n phần tử

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○ Chú ý: $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_n^0 = C_n^n = 1$

Nhị thức Newton:
$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + \cdots + C_n^0 b^n$
$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Các hệ số trong khai triển nhị thức Newton được xác định từ tam giác Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & . & & . & & . & & . & & . & \\
C_n^0 & & C_n^1 & & \cdots & & \cdots & & C_n^{n-1} & & C_n^n
\end{array}$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○Ví dụ 1.17: Có 5 sinh viên, ta muốn chọn 3 người lập thành một nhóm. Hỏi có bao nhiêu nhóm khác nhau?
Số nhóm như yêu cầu là: $C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$

○*Ví dụ 1.18: Có 10 đội banh thi đấu vòng tròn một lượt. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu tất cả ?*

. . . .

○*Ví dụ 1.19: Lớp có 22 sinh viên theo hướng thống kê trong đó có 10 nam và 12 nữ. Ta chọn ngẫu nhiên 9 sinh viên trong đó có 4 nam và 5 nữ. Tính số khả năng có thể xảy ra?*

. . . .
. . . .
. . . .

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

1.1.4 Tổ hợp

b. Tổ hợp lặp:

○ Định nghĩa: Tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ (nhóm) không kể thứ tự gồm k phần tử được chọn từ n phần tử đã cho, trong đó các phần tử trong nhóm có thể lặp lại $2, 3, \ldots, k$ lần.

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử

$$\hat{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$$

∘Ví dụ 1.15: Một trại giống gà có ba loại gà A, B, C (số lượng mỗi loại đều lớn hơn 10 con). Một khách hàng vào định mua 10 con. Hỏi có bao nhiêu cách mua?

Ta thấy, mỗi một cách mua 10 con gà chính là một tổ hợp lặp chập 10 của 3 phần tử.

Số cách mua là: $\hat{C}_3^{10} = C_{12}^{10} = \frac{12!}{10!(2)!} = 66$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

2.1 Phép thử và biến cố

2.1.1 Định nghĩa

- **Phép thử** là sự thực hiện một nhóm điều kiện xác định, có thể là một thí nghiệm cụ thể, quan sát đo đạc hay thu thập dữ liệu về một hiện tượng nào đó.
- **Biến cố (hay sự kiện)** là kết quả của phép thử.
- **Không gian mẫu** là tập hợp tất cả các biến cố của phép thử. Kí hiệu Ω. Vậy biến cố là tập con của không gian mẫu.

Ví dụ 2.1: Phép thử tung đồng xu có không gian mẫu là $\Omega = \{S, N\}$.

Ví dụ 2.2: Tung con xúc xắc là phép thử còn việc lật lên một mặt nào đó là biến cố và $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ví dụ 2.3: Phép thử tung 2 đồng xu có không gian mẫu là $\Omega = \{(S, S), (S, N), (N, S), (N, N)\}$.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

2.1.2 Các loại biến cố

- **Biến cố chắc chắn** là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi thực hiện một phép thử. Không gian mẫu là Ω là biến cố chắc chắn.
  VD 2.4: Phép thử tung con xúc xắc, biến cố " Xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn hoặc bằng 6" là biến cố chắc chắn.
- **Biến cố không thể (∅)** là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện một phép thử . VD 2.5: Phép thử tung con xúc xắc, biến cố " Xuất hiện mặt có 7 chấm " là biến cố không thể.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

- **Biến cố ngẫu nhiên** là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện một phép thử. Các biến cố ngẫu nhiên được kí hiệu là A, B, C . . . .
  VD 2.6: Phép thử tung con xúc xắc, gọi A là biến cố " Xuất hiện mặt có 2 chấm ", A là biến cố ngẫu nhiên.

2.1.3 Quan hệ và phép tính giữa các biến cố

- **Quan hệ kéo theo:** Biến cố A kéo theo biến cố B, kí hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra.

  Ví dụ 2.7: Phép thử tung con xúc xắc, gọi A là biến cố " Xuất hiện mặt có 6 chấm" và B là biến cố " Xuất hiện mặt chẵn". Khi đó ta có $A \subset B$.

- Đặc biệt: Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì A và B là hai biến cố tương đương. Kí hiệu $A = B$

  VD 2.8: Mỗi số chấm trên mặt xúc xắc tương ứng 5 điểm, gọi A là biến cố " Xuất hiện mặt có 6 chấm" và B là biến cố " được 30 điểm". Khi đó ta có $A = B$.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc

- **Tổng của hai biến cố:** Tổng của hai biến cố A và B, kí hiệu $A \cup B$, biến cố $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất A hoặc B xảy ra.
  ∘Tổng của một dãy các biến cố $\{A_1, \dots, A_n\}$ là biến cố $\cup_{i=1}^n A_i$, biến cố này xảy ra khi có ít nhất một trong các biến cố A_i xảy ra.
- **Tích của hai biến cố:** Tích của hai biến cố A và B, kí hiệu $A \cap B$, biến cố $A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi cả hai A và B cùng xảy ra.
  ∘Tích của một dãy các biến cố $\{A_1, \dots, A_n\}$ là biến cố $\cap_{i=1}^n A_i$, biến cố này xảy ra khi tất cả các biến cố A_i cùng xảy ra.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc

VD 2.9 : Một thợ săn bắn hai viên đạn vào một con thú và con thú sẽ chết nếu nó bị trúng cả hai viên đạn.

Gọi A_i: " viên đạn thứ i trúng con thú", $i = 1, 2$;
A: "con thú bị trúng đạn";
B: "con thú bị chết".
Khi đó, ta có: $A = A_1 \cup A_2$ và $B = A_1 \cap A_2$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc

- **Biến cố đối lập:** Biến cố đối của A là biến cố được kí hiệu là $\bar{A}$, và được xác định như sau: A xảy ra khi và chỉ khi $\bar{A}$ không xảy ra.

A và $\bar{A}$ gọi là đối lập $\Longleftrightarrow$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$ và $A \cup \bar{A} = \Omega$.

VD 2.10: Phép thử tung con xúc xắc, gọi A là biến cố "Xuất hiện mặt chẵn", khi đó $\bar{A}$ là biến cố "Xuất hiện mặt lẽ".

- **Biến cố xung khắc:** Hai biến cố A và B gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra trong một phép thử.

  A và B gọi là xung khắc nếu $A \cap B = \emptyset$.

  VD 2.11: Phép thử tung con xúc xắc, gọi A là biến cố "Xuất hiện mặt chẵn", B là biến cố "Xuất hiện mặt 3 chấm". Khi đó, A và B xung khắc.

Chú ý: *Hai biến cố đối lập thì xung khắc nhưng ngược lại hai biến cố xung khắc thì chưa chắc đối lập.*

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

- **Biến cố độc lập:** Hai biến cố A và B gọi là độc lập nếu biến cố này xảy ra hay không thì không phụ thuộc vào biến cố kia.

  VD 2.13: Bắn 2 phát đạn vào bia, gọi A là biến cố "phát thứ I trúng bia ", B là biến cố " phát thứ II trúng bia". Khi đó A và B là hai biến cố độc lập.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

2.2.1 Định nghĩa xác suất

Xác suất của một biến cố là một con số đặc trưng khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử.

2.2.2 Định nghĩa cổ điển về xác suất

a. Định nghĩa: Giả sử phép thử thỏa mãn 2 điều kiện sau:

- Không gian mẫu có một số hữu hạn phân tử,
- Các kết quả xảy ra đồng khả năng (các kết quả có khả năng xuất hiện như nhau).

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

Khi đó ta định nghĩa xác suất của biến cố A $(A \subset \Omega)$ là

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{số trường hợp xảy ra thuận lợi đối với A}}{\text{số trường hợp có thể xảy ra}} = \frac{n_A}{n}$$

VD 2.14: Tính xác suất của biến cố A "xuất hiện mặt chẵn" trong phép thử tung con xúc xắc (đều đặn và đồng nhất).

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

b. Phương pháp tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển:

- Phương pháp suy luận trực tiếp

  VD 2.15: Trong bình có a trái banh xanh và b trái banh đỏ. Lấy ngẫu nhiên một trái, tính xác suất để lấy được trái banh xanh .
  Giải : *Gọi A biến cố "lấy được trái banh xanh",*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{a}{a+b}$$

- Phương pháp dùng sơ đồ:
  ○ sơ đồ hình cây
  ○ sơ đồ dạng bảng
  ○ sơ đồ dạng tập hợp (sơ đồ Venn)

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○ sơ đồ hình cây:
VD 2.16: Giả sử xác suất sinh con trai và con gái là như nhau. Một gia đình có 3 con, tính xác suất để gia đình đó có 2 con gái.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○ sơ đồ dạng bảng:
VD 2.17: Tung một con xúc xắc đồng nhất 2 lần. Tính xác suất để có một lần được 6 chấm.
Theo sơ đồ hình bảng, ta có xác suất để trong đó có một lần được 6 chấm là $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

○ sơ đồ dạng tập hợp (sơ đồ Venn):
VD 2.18: Trong một lớp 50 sinh viên có 20 người chơi bóng đá , 15 người chơi bóng chuyền, 10 người chơi bóng rổ, 8 người chơi bóng đá và bóng chuyền, 5 người chơi bóng đá và bóng rổ, 3 người chơi bóng chuyền và bóng rổ, 1 người chơi 3 môn bóng đá, bóng chuyền và bóng rổ. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên, tính xác suất để người đó chơi ít nhất 1 môn bóng.

- Phương pháp dùng các công thức của giải tích tổ hợp

  VD 2.19: Một người gọi điện thoại nhưng lại quên hai số cuối của số điện thoại và chỉ nhớ rằng hai số đó khác nhau. Tính xác suất để người đó chỉ quay ngẫu nhiên một lần đúng số cần gọi.

  VD 2.20: Một hộp gồm 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp, tính xác suất để:
  a. Có 1 bi xanh. b. Có 2 bi xanh.
  VD 2.21: Trong bình có 6 bi được đánh số từ 1 đến 6. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi, tính xác suất để số của bi được lấy ra trùng với số thứ tự của lần lấy.

Ưu điểm: tính được tính chính xác giá trị của xác suất và không cần tiến hành phép thử.

Nhược điểm: do đòi hỏi phải có hữu hạn các biến cố và tính đồng khả năng của chúng mà trong thực tế lại có nhiều phép thử không có tính chất đó.

Do đó, cần đưa ra định nghĩa khác về xác suất để khắc phục những hạn chế trên.

2.2.3 Định nghĩa thống kê về xác suất (bằng tần suất)

Định nghĩa: Giả sử thực hiện một phép thử nào đó n lần độc lập trong cùng điều kiện (kết quả của phép thử sau không phụ thuộc vào kết quả của phép thử trước), trong đó biến cố A xảy ra k lần.
Khi đó, k gọi là tần số xuất hiện của biến cố A và

$f(A) = f_n(A) = \dfrac{k}{n}$ là tần suất xuất hiện của biến cố A trong n phép thử.

Khi số phép thử tăng lên vô hạn ($n \to \infty$), tần suất $f_n(A)$ tiến đến một giới hạn xác định. Ta định nghĩa giới hạn này là xác suất của biến cố A.

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n}$$

Trong thực tế, khi số phép thử đủ lớn thì $\mathbb{P}(A) \approx f(A)$

Ví dụ: Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu, người ta tiến hành tung đồng xu nhiều lần độc lập trong cùng điều kiện và thu được kết quả sau:

Người làm thí nghiệm	Số lần tung (n)	Số lần được mặt sấp (k)	Tần suất $f(A) = \frac{k}{n}$
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

Nhận xét: Qua ví dụ này ta thấy khi số phép thử tăng lên thì tần suất xuất hiện mặt sấp dao động ngày càng ít hơn xung quanh giá trị không đổi là 0.5. Điều này cho phép hi vọng là khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất sẽ hội tụ về giá trị 0.5.

Ưu điểm: không đòi hỏi phép thử có hữu hạn các biến cố đồng khả năng, tính xác suất dựa trên quan sát thực tế vì vậy được ứng dụng rộng rãi.

Nhược điểm: do đòi hỏi phải lặp lại nhiều lần phép thử. Trong nhiều bài toán thực tế điều này không cho phép do điều kiện và kinh phí làm phép thử, ...

2.2.4 Định nghĩa tiên đề về xác suất (tiên đề Kolmogorov)

Cho không gian đo được $(\Omega, \mathcal{A})$,ta nói $\mathbb{P}$ là độ đo xác suất trên $(\Omega, \mathcal{A})$ nếu
$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$, thỏa mãn 3 tiên đề sau:

- 1) $\forall A \in \mathcal{A}$: $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
- 2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- 3) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ xung khắc từng đôi một, $A_i \in \mathcal{A}$ thì
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$
Khi đó $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ được gọi là không gian xác suất.

Từ các tiên đề trên, ta có thể suy ra các kết quả sau:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Nếu A, B hai biến cố xung khắc thì $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subset B$, ta có: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

2.3. Các công thức xác suất

Cho không gian mẫu Ω, và đã định nghĩa biến cố, xác suất của biến cố.

2.3.1 Công thức cộng

- Nếu A, B là hai biến cố xung khắc thì
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xung khắc từng đôi một thì
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$
- Nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là một nhóm đầy đủ các biến cố thì
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

VD 2.22: Xác suất để một xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 là 0.1, trúng điểm 9 là 0.2, trúng điểm 8 là 0.25 và ít hơn điểm 8 là 0.45. Xạ thủ ấy bắn một viên đạn. Tính xác suất để xạ thủ được ít nhất 9 điểm.

- Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- Nếu A, B, C là ba biến cố bất kì thì

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

- Nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là dãy các biến cố bất kì thì

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 A_1 \ldots A_n)$$

VD 2.23: Một cửa hàng giày dép thống kê được trong số các khách đến cửa hàng có 50% khách mua giày, 40% khách mua dép, 20% khách mua giày và dép. Tính xác suất để một khách đến cửa hàng có mua sản phẩm.

2.3.2 Xác suất có điều kiện

○ **Định nghĩa:** Xác suất của biến cố A được tính với điều kiện biến cố B đã xảy ra gọi là xác suất có điều kiện của biến cố A đối với biến cố B . Kí hiệu là $\mathbb{P}(A|B)$ và được xác định bởi

Xác suất có điều kiện

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \text{với } \mathbb{P}(B) > 0$$

VD 2.24: Tung đồng thời hai con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc ≥ 10 biết rằng ít nhất một con đã ra 5 chấm.

Giải: *Gọi A là biến cố "tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc ≥ 10"; B là biến cố " khi tung đồng thời hai con xúc xắc cân đối thì ít nhất xuất hiện một con 5 chấm".*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{3}{11}$$

○ VD 2.25: Một bộ bài có 52 lá bài. Tính xác suất để rút được lá "as", biết rằng lá bài rút ra là lá bài màu đen.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

2.3.3 Công thức nhân

Công thức nhân

- Hai biến cố A, B độc lập với nhau khi và chỉ khi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- Các biến cố $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ độc lập toàn phần khi và chỉ khi $\forall \mathrm{I} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(\cap_{i \in \mathrm{I}} A_i) = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathbb{P}(A_i)$

Công thức nhân

Từ định nghĩa xác suất có điều kiện, ta suy ra

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

VD 2.26: Có hai túi, túi I đựng 3 bi trắng, 7 bi đỏ, 15 bi xanh; túi II đựng 10 bi trắng, 6 bi đỏ, 9 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 1 bi từ mỗi túi. Tìm xác suất để 2 bi được lấy ra từ 2 túi là cùng màu.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

VD 2.27: Một lô hàng gồm 20 sản phẩm trong đó có 2 phế phẩm. Người ta lần lượt lấy mỗi lần 1 sản phẩm để kiểm tra (không hoàn lại) cho đến khi phát hiện đủ 2 phế phẩm thì dừng.
a.Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần II.
b.Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần III.

2.3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Công thức xác suất đầy đủ

Cho không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, nếu

- $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$ và
- $B_i \cap B_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$ và $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

thì với mọi biến cố A cùng một phép thử, ta có

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)$$

VD 2.28: Một lớp học có 100 sinh viên trong đó có 60 nam và 40 nữ. Số sinh viên đạt môn toán cho ở bảng sau:

	Đạt	Không đạt
Nam	46	14
Nữ	34	6

Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp này. Tính xác suất (bằng công thức xác suất đầy đủ) để chọn được sinh viên đạt môn toán.

VD 2.29:

Một nông trường có 4 đội sản xuất. Đội 1 sản xuất 1/3 tổng sản lượng nông sản của nông trường. Đội 2 sản xuất 1/4 tổng sản lượng, đội 3 sản xuất 1/4 tổng sản lượng và đội 4 sản xuất 1/6 tổng sản lượng. Tỉ lệ phế phẩm tương ứng với các đội sản xuất là 0.15; 0.08; 0.05 và 0.01.

Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho của nông trường. Tìm xác suất để lấy phải một phế phẩm.

2.3.5 Công thức Bayes

Từ giả thuyết để tính xác suất đầy đủ, nếu A xảy ra thì xác suất biến cố B_i bằng bao nhiêu?

Công thức Bayes

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}{\mathbb{P}(A)} \quad \text{với } \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$$

với $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(\bar{B} \cap A)$
$= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(A|\bar{B})$

VD 2.30: Có 3 hộp đựng sản phẩm, mỗi hộp có 10 sản phẩm, trong đó số phế phẩm lần lượt là $2, 3, 4$. Chọn ngẫu nhiên một hộp, rồi từ hộp đó rút ra ngẫu nhiên một sản phẩm.
a. Tính xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm.
b. Nếu sản phẩm rút ra là phế phẩm, thì theo bạn phế phẩm đó có khả năng thuộc hộp nào nhiều nhất, tại sao ?

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

VD 2.30 bis: Một hộp có 10 bi đỏ và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, mỗi lần 1 bi không hoàn lại. Tính xác suất
a. được 2 bi đỏ.
b. bi lấy ra lần sau là đỏ.
c. lần đầu lấy được bi đỏ, biết rằng lần sau cũng được bi đỏ.

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

2.3.6 Công thức Bernoulli

Xét một dãy n phép thử độc lập giống nhau, trong mỗi phép thử chỉ xảy ra hai trường hợp: hoặc biến cố A xảy ra với xác suất p $(0 \leq p \leq 1)$ hoặc biến cố A không xảy ra với xác suất $q = 1 - p$. Những bài toán thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là tuân theo lược đồ Bernoulli. Khi đó xác suất để trong n phép thử độc lập nói trên, biến cố A xuất hiện đúng k lần là :

$$\mathbb{P}_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

XÁC SUẤT THỐNG KÊ
N.T.M.Ngọc
1. Giải tích tổ hợp
1.1 Tập hợp
1.2 Giải tích tổ hợp
2. Biến cố và xác suất
2.1 Phép thử và biến cố
2.2 Các định nghĩa xác suất
2.3 Các công thức xác suất

VD 2.30: Bắn 6 viên đạn vào bia, xác suất trúng bia của mỗi viên là 0.7. Tính xác suất để có đúng 3 viên trúng bia.

Giải: *Ta thấy rằng việc bắn 6 viên đạn vào bia là 6 phép thử như nhau và độc lập nhau. Và mỗi lần bắn 1 viên đạn vào bia hoặc trúng bia với xác suất $p = 0.7$ hoặc không trúng bia với xác suất $p = 0.3$. Vậy rõ ràng bài toán này tuân theo lược đồ Bernoulli.*
Xác suất để có đúng 3 viên trúng bia khi bắn 6 viên đạn vào bia là

$$\mathbb{P}_6(3) = C_6^3 0.7^3 (1-0.7)^{6-3} = 0.18522$$

VD 2.31: Một sinh viên thi trắc nghiệm môn XSTK gồm có 10 câu hỏi, mỗi câu có 4 phần lựa chọn trả lời, trong đó chỉ có 1 phần đúng. Giả sử sinh viên làm bài bằng cách lựa chọn ngẫu nhiên các phần của câu hỏi. Tính xác suất để
a. Sinh viên vừa đủ điểm đậu.
b. Sinh viên chọn đúng ít nhất 1 câu hỏi.