Chương 4. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

$O(\hat{\lambda})$	NHÂT	SAU
CAI	MIT	5AU

Bài tập thực hành

Xem ma trận như là mảng hai chiều. Hãy viết chương trình để thực hiện những yêu cầu của những bài sau.

- **4.1** Cho ma trận kề của đồ thị G. Hãy kiểm tra
 - a) G là đồ thị vô hướng.

c) G có khuyên.

b) G là đồ thị có hướng.

- d) G có cạnh song song.
- **4.2** Cho ma trận kề của đồ thị G. Hãy tính số cạnh và bậc của các đỉnh của G.
- **4.3** Cho danh sách các cặp đỉnh (không thứ tự) tương ứng với các cạnh của đồ thị vô hướng G. Hãy tính số bậc của các đỉnh của G.
- 4.4 Cho danh sách các cặp đỉnh (có thứ tự) tương ứng với các cạnh của đồ thị có hướng G. Hãy tính số nữa bậc ngoài, nữa bậc trong của các đỉnh của G.
- **4.5** Cho danh sách các cạnh của đồ thị vô hướng G. Hãy kiểm tra xem đồ thị đó có phải là đồ thị lưỡng phân không? Nếu có, hãy phân hoạch tập đỉnh của G thành 2 phần.
- **4.6** Cho danh sách các cạnh của đồ thị vô hướng G. Hãy xây dựng ma trận kề cho G. (Làm tương tự cho đồ thị có hướng)
- **4.7** Cho ma trận kề của đồ thị G. Hãy liệt kê danh sách các cạnh của G.
- 4.8 Cho danh sách các cạnh của hai đồ thị có không quá 6 đỉnh. Hãy xác định xem hai đồ thị này có đẳng cấu không? Nếu có, hãy tìm song ánh tương ứng.
- **4.9** Cho ma trận kề của đồ thị G, hai đỉnh u, v của G và số nguyên k. Hãy tìm tất cả những đường đi có độ dài k giữa hai đỉnh u, v.
- **4.10** Cho danh sách các cạnh của đồ thị vô hướng G. Hãy xác định xem đồ thị có liên thông không? Nếu không hãy tìm các thành phần liên thông của G.

Phần II. Bài tập

- **4.1** Trong 1 giải đấu cờ theo thể thức vòng tròn 1 lượt, chứng minh rằng tại mọi thời điểm của giải đấu luôn luôn có 2 đấu thủ có số ván đã thi đấu bằng nhau.
- **4.2** Một bữa tiệc có 6 người tham dự. Chứng minh rằng có 3 người quen nhau hoặc có 3 người không quen nhau.
- **4.3** Bốn người bất kỳ trong số n người $(n \ge 4)$ đều có 1 người quen biết với 3 người còn lại. Chứng minh rằng có 1 người quen với tất cả n-1 người còn lại.
- **4.4** Cho G = (X, E) là một đồ thị và $A \subset X$. Gọi k là số cạnh của G mà mỗi cạnh có đúng 1 đỉnh nằm trong A (1 đỉnh ở ngoài A) và h là số đỉnh bậc lẻ trong A. Chứng minh rằng tính chẵn lẻ của k và của h là như nhau.
- **4.5** Trong 1 giải thi đấu có n đội tham dự và đã có n+1 trận đấu được tiến hành. Chứng minh rằng có 1 đội đã thi đấu ít nhất 3 trận.
- 4.6 Một đồ thị có bao nhiều đỉnh nếu có
 - a) 12 canh và các đỉnh đều có bâc 3
 - b) 10 cạnh và các đỉnh đều có bậc 4
 - c) 21 cạnh, 3 đỉnh bậc 4 và các đỉnh còn lại có bậc 3
- d) 24 cạnh và các đỉnh có bậc giống nhau.
- **4.7** Cho G là đồ thị có 19 cạnh và các đỉnh có bậc tối thiểu là 3. Hỏi G có nhiều nhất là bao nhiêu đỉnh?
- **4.8** Chứng minh rằng một đồ thị đủ m cạnh có $\frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}$ đỉnh?
- ${\bf 4.9}~$ Cho đồ thị vô hướng G có m cạnh và n đỉnh. Chứng minh rằng, nếu
- a) m < n thì G có 1 đỉnh treo hoặc đỉnh cô lập.
- b) $m \ge n$ thì G có 1 chu trình.
- **4.10** Cho G là đồ thị liên thông. Chứng minh G có 2 đỉnh không là điểm khớp.
- ${\bf 4.11}~$ ChoG là đồ thị đơn gồm n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông. Chứng minh rằng

$$n-p \le m \le \frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$$

Suy ra rằng, nếu 2m > (n-1)(n-2) thì G liên thông.

4.12 Có 2k trạm điện thoại (k > 0), mỗi trạm nổi trực tiếp với ít nhất k trạm khác. Chứng minh rằng bất kỳ 2 trạm nào cũng liên lạc được với nhau.

2

4.13 Cho 2k điểm trong mặt phẳng nằm trong những đường tròn, mỗi đường tròn chứa ít nhất k điểm. Chứng minh rằng giữa 2 điểm bất kỳ đều tồn tại một đường tròn chứa cả hai điểm đó.

4.14 Đồ thị bù \overline{G} của đồ thị G là một đồ thị có cùng tập đỉnh như G, hai đỉnh kề trong \overline{G} khi và chỉ khi chúng không kề trong G. Cho G là đồ thị đơn, chứng minh rằng G hoặc \overline{G} liên thông.

4.15 Cho đồ thị đơn G có 15 cạnh và \overline{G} có 13 cạnh. Khi đó G có bao nhiều đỉnh?

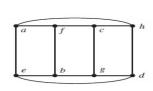
4.16 Cho G là đồ thị liên thông. Chứng minh rằng 2 đường đi sơ cấp dài nhất trong G có 1 đỉnh chung.

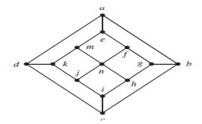
4.17 Cho G là đồ thị đơn vô hướng và có n đỉnh. Nếu G đẳng cấu với \overline{G} thì G có bao nhiêu cạnh?

4.18 Cho G là đồ thị không khuyên và mỗi đỉnh đều có bậc ≥ 3 . Chứng minh G có 1 chu trình đơn với độ dài chẵn.

4.19 Chứng minh đồ thị G là lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của G đều có độ dài chẵn.

4.20 Đồ thị sau có lưỡng phân không, nếu có phân hoạch lại tập đỉnh thành 2 phần.





4.21 Cho G = (X, E) là đồ thị liên thông và $i \in X$. Chứng minh rằng i là điểm khớp nếu và chỉ nếu có 2 đỉnh x, y sao cho mọi dây chuyền nối x và y đều qua i.

4.22 Có bao nhiêu đồ thị đơn vô hướng không đẳng cấu có n đỉnh với n bằng

a) 2?

b) 3?

c) 4?

 $\mathbf{4.23}^*$ Có bao nhiêu đồ thị đơn có hướng không đẳng cấu có n đỉnh với n bằng

a) 2?

b) 3?

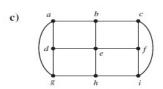
c) 4?

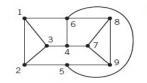
4.24 Có bao nhiêu đồ thị đơn không đẳng cấu có 5 đỉnh và có 4 hoặc 6 cạnh?

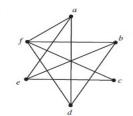
4.25 Có bao nhiêu đồ thị đơn vô hướng không đẳng cấu có

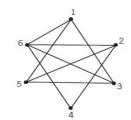
- a) 5 đỉnh và 3 cạnh?
- b) 6 đỉnh 4 cạnh?

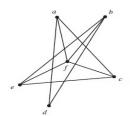
4.26 Những đồ thị sau có đẳng cấu không? Tại sao?

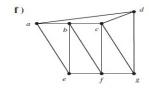


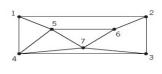






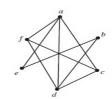


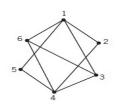




i)







4.27 Có tồn tại đồ thị đơn có 5 đỉnh với bậc các đỉnh lần lượt được cho dưới đây không?. Nếu có, hãy vẽ đồ thị đó.

j)

a) 3, 3, 3, 3, 2

c) 4, 4, 3, 2, 1

e) 3, 2, 2, 1, 0

b) 5, 4, 3, 2, 1

d) 4, 4, 3, 3, 3

f) 4, 3, 3, 2, 2

4.28 Có tồn tại đồ thị đơn có 6 đỉnh với bậc các đỉnh lần lượt được cho dưới đây không?. Nếu có, hãy vẽ đồ thị đó.

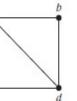
- a) 5, 4, 3, 2, 1, 0
- d) 3, 3, 3, 2, 2, 2
- g) 5, 3, 3, 3, 3, 3

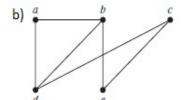
- b) 6, 5, 4, 3, 2, 1
- e) 3, 3, 2, 2, 2, 2
- h) 5, 5, 4, 3, 2, 1

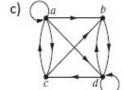
- c) 2, 2, 2, 2, 2, 2
- f) 1, 1, 1, 1, 1, 1
- i) 5, 2, 2, 2, 2, 1

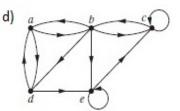
4.29 Tìm ma trận kề và ma trận liên kết (nếu có) của những đồ thị sau:

a)



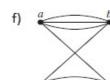


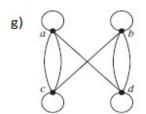




e)





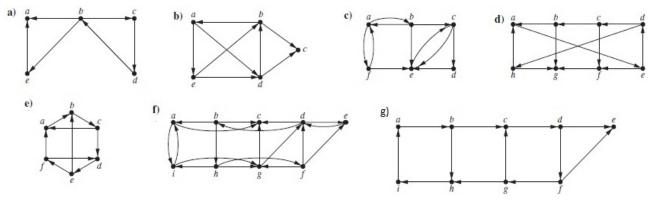


4.30 Hãy vẽ đồ thị G nếu ma trận kề của G là:

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

4.31 Những đồ thị có ma trận kề đã cho sau đây có đẳng cấu không?

4.32 Những đồ thị G nào sau đây là liên thông mạnh. Nếu không, hãy phân hoạch G thành các thành phần liên thông mạnh.



4.33 Cho đồ thị đơn vô hướng G=(V,E) gồm 10 đỉnh được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như sau:

Ke(1) = 2, 9, 10	Ke(6) = 4, 5, 7
Ke(2) = 1, 3, 4, 8, 9, 10	Ke(7) = 4, 6, 8
Ke(3) = 2, 4, 5, 10	Ke(8) = 2, 4, 7, 9
Ke(4) = 2, 3, 5, 6, 7, 8	Ke(9) = 1, 2, 8, 10
Ke(5) = 3, 4, 6	Ke(10) = 1, 2, 3, 9

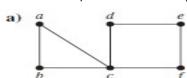
- a) Hãy tìm deg(u) với mọi $u \in V$?
- b) Hãy tìm ma trận kề của G?

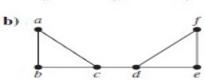
4.34 Cho đồ thị đơn vô hướng G = (V, E) gồm 10 đỉnh được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như sau:

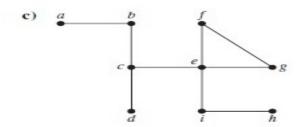
5

Ke(1) = 4, 10	Ke(6) = 1, 4, 7
Ke(2) = 4, 5, 6	Ke(7) = 3, 9
Ke(3) = 8	Ke(8) = 7, 9
Ke(4) = 2, 10	Ke(9) = 8
Ke(5) = 7, 8	Ke(10) = 1, 2

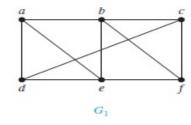
- a) Hãy tìm deg(u) với mọi $u \in V$?
- b) Hãy tìm ma trận kề của G?
- $\bf 4.35~\rm X\'{a}c$ định số liên thông đỉnh và liên thông cạnh của những đồ thị sau:

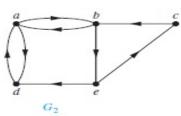






4.36 Cho đồ thị G_1 và G_2 như sau:





- Hãy tìm số đường đi từ c đến d trong đồ thị G_1 và đường đi từ a đến e trong đồ thị G_2 có độ dài
 - a) 2;
- b) 3;
- c) 4;
- d) 5;
- e) 6;
- f) 7.