

Chương 3. Nguyên lý bù trừ

Phần 1. Bài tập

Bài 3.1. Tung một đồng xu 8 lần, hãy tính xác suất để có ít nhất 2 mặt ngửa?

Bài 3.2. Một lớp có 50 nam và 60 nữ, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 20 bạn sao cho có ít nhất một nam và một nữ?

Bài 3.3. Chọn một số từ 1 đến 10000. Tính xác suất để số đó là chẵn hoặc chia hết cho 7.

Bài 3.4. Có bao nhiêu chuỗi số có độ dài 5 trong đó chữ số 1 xuất hiện đúng một lần và không có chữ số nào xuất hiện đúng 3 lần.

Bài 3.5. Theo cuộc khảo sát 150 người thì có 83 người có xe hơi, 97 người có xe máy, 28 người có xe đạp, 53 người có xe hơi và xe máy, 14 người có xe hơi và xe đạp, 7 người có xe máy và xe đạp, và 2 người có tất cả ba.

- a) Hỏi có bao nhiêu người chỉ có xe đạp?
- b) Hỏi có bao nhiêu người có xe hơi và xe máy nhưng không có xe đạp?

Bài 3.6. Có bao nhiêu hoán vị của 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 sao cho có xuất hiện 12 hoặc 34, hoặc 56.

Bài 3.7. Tìm số các số nguyên n với $1 \leq n \leq 20000$ thỏa điều kiện

- a) n không là bội số của 2, 3 hay 5.
- b) n nguyên tố cùng nhau với 210.
- c) n nguyên tố cùng nhau với 30 nhưng chia hết cho 7.

Bài 3.8. Xét từ INFORMATION, hỏi có bao nhiêu hoán vị của từ này sao cho không có 2 chữ cái liên tiếp nào xuất hiện quá 1 lần (chẳng hạn ta không tính hoán vị **INFORINMOTA** vì **IN** xuất hiện 2 lần).

Bài 3.9. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ biết rằng

- a) $0 \leq x_i < 8 \forall i, 1 \leq i \leq 4$.
- b) $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 3 \leq x_3 \leq 7, 3 \leq x_4 \leq 8$.
- c) $-5 \leq x_i \leq 10, \forall i, 1 \leq i \leq 4$.

Bài 3.10. Tung một con xúc xắc 5 lần. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trong 5 lần là 20.

Bài 3.11. Có bao nhiêu số nguyên n từ 1 đến 9999999 sao cho tổng các chữ số của n bằng 31.

Bài 3.12. Một bài thi có 10 câu hỏi với tổng số điểm là 100. Có bao nhiêu cách phân phối điểm cho 10 câu hỏi ấy biết rằng:

- a) Số điểm của mỗi câu ít nhất là 5 và nhiều nhất là 15 điểm.
- b) Số điểm của mỗi câu ít nhất là 5, nhiều nhất là 15 điểm và là bội số của 5.

Bài 3.13. Tung 8 con xúc xắc khác nhau, tính xác suất để 6 mặt đều xuất hiện?

Bài 3.14. Có bao nhiêu chuỗi số có độ dài 5 và không có chữ số nào xuất hiện đúng 2 lần.

Bài 3.15. Với n là số nguyên dương, ta gọi $\varphi(n)$ là số các số nguyên giữa 1 và n nguyên tố cùng nhau với n (hay còn gọi là phi hàm Euler). Tìm phi hàm Euler $\varphi(n)$ với

a) $n = 50$.

c) $n = 12.300$.

b) $n = 420$.

d) $n = 5187$.

Bài 3.16. Trong dãy $x_1 x_2 \dots x_n$, ta bảo x_i đứng trước x_j nếu $i < j$. Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ TAMELY sao cho T đứng trước A, hoặc A đứng trước M, hoặc M đứng trước E?

Bài 3.17. Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ MATHEMATICS sao cho 2 chữ T đứng trước 2 chữ A, hoặc 2 chữ A đứng trước 2 chữ M, hoặc 2 chữ M đứng trước E?

Bài 3.18. Tìm số cách sắp xếp các chữ cái của từ CORRESPONDENTS biết rằng

- a) Hai chữ cái kề nhau thì khác nhau.
- b) Có đúng 2 cặp chữ cái dạng XX xuất hiện (như trong CORREOTSSPDEN).
- c) Có ít nhất 3 cặp chữ cái dạng XX xuất hiện (như trong CORREOTSSPDENN).

Bài 3.19. Cho $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ và $B = \{1, 2, \dots, 7\}$. Hỏi có bao nhiêu ánh xạ f từ A vào B thỏa:

- a) $|f(A)| = 4$;
- b) $|f(A)| \leq 4$.

Bài 3.20. Có bao nhiêu cách chia 10 cuốn sách khác nhau cho 4 sinh viên sao cho:

- a) Có đúng 2 sinh viên không nhận được cuốn sách nào.
- b) Có ít nhất 2 sinh viên không nhận được cuốn sách nào.

Bài 3.21. Chọn 13 lá bài từ 1 bộ bài 52 lá. Tìm xác suất để trong 13 lá bài này có

- a) đủ 4 nước cơ, rô, chuồn, bích;
- b) đúng 1 nước không xuất hiện;
- c) đúng 2 nước xuất hiện.

Bài 3.22. Một xáo trộn (derangement) là một hoán vị các phần tử của tập hợp sao cho không có phần tử nào xuất hiện đúng vị trí ban đầu. Ví dụ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, khi đó 21453 là một xáo trộn, nhưng 21543 không là một xáo trộn vì 4 trùng với vị trí ban đầu. Hãy

- a) tìm số xáo trộn của các phần tử của tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
- b) tìm số xáo trộn của các phần tử của tập hợp $A = \{1, 2, \dots, n\}$ với n là nguyên dương.

Bài 3.23. 10 bài thi trả lại ngẫu nhiên cho 10 sinh viên trong lớp. Tính xác suất để không có sinh viên nào nhận đúng bài của mình. Hãy tổng quát hóa bài toán trong trường hợp n bất kỳ.

Bài 3.24. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Hỏi có bao nhiêu song ánh f từ A vào A sao cho có ít nhất một phần tử a thỏa $f(a) = a$.

Bài 3.25. Cho 2 tập hợp A và B với $|A| = m \geq n = |B|$. Tìm số toàn ánh từ A vào B .

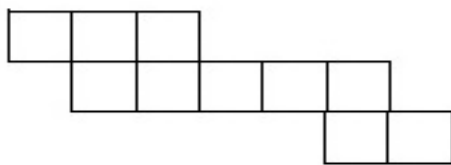
Bài 3.26. Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 công việc khác nhau cho 5 người sao cho mỗi người đều có ít nhất một việc.

Bài 3.27. Có bao nhiêu cách cắm 15 bông hoa vào 5 bình hoa biết rằng mỗi bình có ít nhất 1 và nhiều nhất là 4 bông hoa trong trường hợp

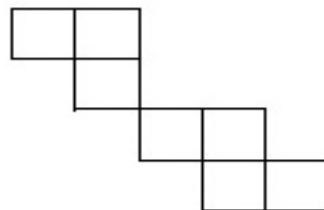
a) các bông hoa giống nhau

b) các bông hoa khác nhau.

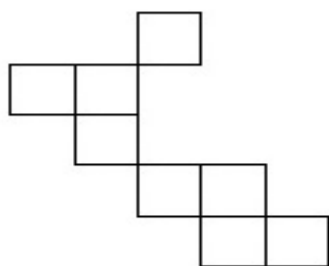
Bài 3.28. Tìm đa thức quân xe của các bàn cờ sau:



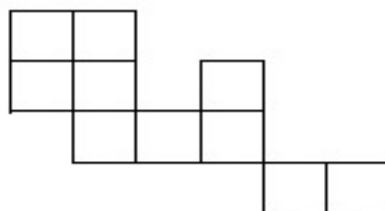
(a)



(b)



(c)



(d)

Bài 3.29. Có 7 công nhân A, B, C, D, E, F, G mà mỗi người được giao một việc trong số 7 việc a, b, c, d, e, f, g. Hỏi có bao nhiêu cách phân công thích hợp, biết rằng A không thể làm các việc b và c; B không thể làm các việc a và e; D không thể làm các việc c và f; E không thể làm các việc b và g; G không thể làm việc d.

Bài 3.30. Một đội bóng có 6 cầu thủ A, B, C, D, E, F chơi ở 6 vị trí 1, 2, 3, 4, 5, 6. Cầu thủ A không thích hợp ở vị trí 1 hay 2, B không thích hợp ở vị trí 4, C không thích hợp ở vị trí 1 hay 5, D không thích hợp ở vị trí 2, E không thích hợp ở vị trí 4, F không thích hợp ở vị trí 4 hay 6. Hỏi có bao nhiêu cách bố trí đội hình thích hợp?

Bài 3.31. Trong một bữa tiệc, người ta muốn sắp 4 người khách R_1, R_2, R_3, R_4 vào các bàn $T_i, i = 1, \dots, 5$. Hỏi có bao nhiêu cách sắp thỏa các điều kiện sau:

- R_1 không ngồi ở bàn T_1 hay ở T_2 ;
- R_2 không ngồi ở bàn T_2 ;
- R_3 không ngồi ở bàn T_3 hay ở T_4 ;
- R_4 không ngồi ở bàn T_4 hay ở T_5 .

Bài 3.32. Một văn phòng môi giới hôn nhân muốn ghép đôi 1 nam với 1 nữ trong số 5 nam A, B, C, D, E và 4 nữ a, b, c, d. Tìm số cách ghép đôi thích hợp biết rằng a không thích hợp với B và C, b không thích hợp với C, c không thích hợp với A và E, d không thích hợp với B.

Bài 3.33. Có hai xúc xắc gồm một đỏ và một đen. Người ta cùng lúc tung 2 xúc xắc này và tung sáu lần và biết rằng các cặp số sau đây không xuất hiện: (1,2), (2,1), (2,5), (3,4), (4,1), (4,5), (6,6), trong đó cặp (x, y) chỉ số x xuất hiện ở xúc xắc đỏ và số y xuất hiện ở xúc xắc đen. Tính xác suất để tất cả 6 số 1, 2, 3, 4, 5, 6 đều xuất hiện ở mỗi xúc xắc.

Bài 3.34. Người ta muốn phân phối 5 món quà A, B, C, D cho 5 người a, b, c, d, e sao cho A không nhận a hay c; B không nhận d; C không nhận b hay e; D không nhận b; E không nhận a hay c. Tính xác suất để:

a) A nhận e.

b) B hoặc E nhận e.

Phần 2. Thực hành

Bài 3.1. Viết chương trình tính $\varphi(n)$ với n là số nguyên dương.

Bài 3.2. Cho phương trình nghiệm nguyên không âm $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ với điều kiện $x_i \leq b_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$ và b_i là các số nguyên dương không âm. Hãy viết chương trình với hai tham số k và danh sách $L = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ để

- a) tính số nghiệm của phương trình;
- b) liệt kê tất cả các nghiệm của phương trình.

Bài 3.3. Cho phương trình nghiệm nguyên $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ với điều kiện $a_i \leq x_i \leq b_i$ với mọi $1 \leq i \leq k$ và a_i, b_i là các số nguyên. Hãy viết chương trình với hai tham số k và danh sách $L = [[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_k, b_k]]$ để

- a) tính số nghiệm của phương trình;
- b) liệt kê tất cả các nghiệm của phương trình.

Bài 3.4. Cho n, m là hai số nguyên dương và tập hợp $A = \{1, 2, \dots, n\}$ và $B = \{1, 2, \dots, m\}$. Hãy viết chương trình với hai tham số là n và m để

- a) tính có bao nhiêu toàn ánh từ A vào B ;
- b) liệt kê tất cả các toàn ánh dưới dạng danh sách $[b_1, b_2, \dots, b_n]$, trong đó b_i là ảnh của i .

Bài 3.5. Hãy viết chương trình với tham số nguyên dương n để

- a) tính tất cả các xáo trộn của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$;
- b) liệt kê tất cả các xáo trộn của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Bài 3.6. Cho một bàn cờ $n \times n$ ô vuông với các vị trí cấm. Hãy viết chương trình tìm đa thức quân xe

Bài 3.7. Cho một bàn cờ $n \times n$ ô vuông với các vị trí cấm. Hãy viết chương trình liệt kê tất cả cách đặt các quân xe.