

# Bài tập chương 5. Cây

**Bài 5.1.** Cho hai cây  $T_1 = (X_1, E_1)$ , và  $T_2 = (X_2, E_2)$  với  $n_i = |X_i|$  và  $m_i = |E_i|$ . Tính  $n_1, n_2, m_1$  biết  $m_1 = 17$  và  $n_2 = 2n_1$ .

**Bài 5.2.** Cho  $G$  là rừng có 7 cây và 40 cạnh. Tìm số đỉnh của  $G$ .

**Bài 5.3.** Cho  $G$  là cây gồm 4 đỉnh bậc 2, 1 đỉnh bậc 3, 2 đỉnh bậc 4, 1 đỉnh bậc 5. Hỏi  $G$  có bao nhiêu đỉnh treo?

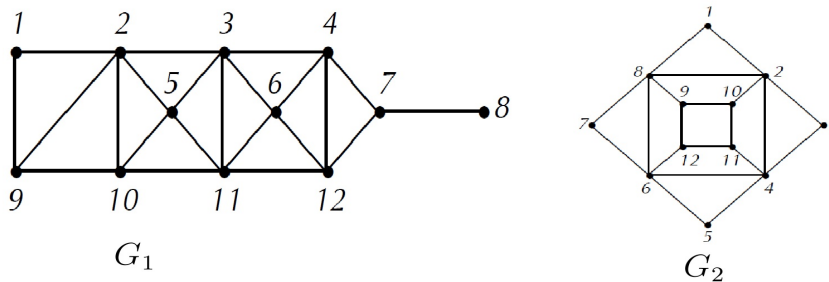
**Bài 5.4.** Cho  $T = (X, E)$  là cây với  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Chứng minh rằng, số đỉnh treo của  $T$  là

$$2 + \sum_{d(i) \geq 3} (\deg(i) - 2).$$

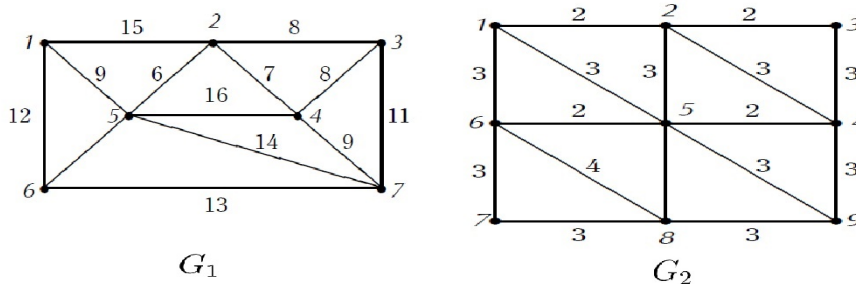
**Bài 5.5.** Cho  $G$  là một đồ thị vô hướng gồm  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh và  $p$  thành phần liên thông. Chứng minh rằng

- $m \geq n - p$ .
- $G$  là một rừng nếu và chỉ nếu  $m - n + p = 0$ .

**Bài 5.6.** Hãy tìm cây khung của hai đồ thị sau bằng thuật toán BFS và DFS.



**Bài 5.7.** Cho hai đồ thị sau



Hãy dùng thuật toán Kruskal và Prim để

- tìm cây khung ngắn nhất
- tìm cây khung ngắn nhất chứa cạnh 34
- tìm cây khung dài nhất
- tìm cây khung dài nhất chứa cạnh 34

**Bài 5.8.** Vẽ một cây nhị phân đủ có chiều cao  $h = 3$ , có 4 đỉnh trong và 5 lá.

**Bài 5.9.** Cho  $T$  là cây  $k$ -phân đủ có  $m$  đỉnh trong. Chứng minh rằng số đỉnh của  $T$  là  $km + 1$ .

**Bài 5.10.** Cho  $T = (X, E)$  là một cây tam phân đầy đủ có 34 đỉnh trong. Tính số cạnh và số lá của  $T$ .

**Bài 5.11.** Cho  $T = (X, E)$  là một cây ngũ phân đủ có 817 lá. Hỏi  $T$  có bao nhiêu đỉnh trong?

**Bài 5.12.** Cho  $T$  là một cây tứ phân đủ có chiều cao 8. Hỏi  $T$  có nhiều nhất là bao nhiêu đỉnh trong? Còn nếu  $T$  là  $k$ -phân đầy đủ có chiều cao  $h$  thì số đỉnh trong tối đa của  $T$  là bao nhiêu?

**Bài 5.13.** Một cây  $k$ -phân tử có chiều cao  $h$  được gọi là cây  $k$ -phân tử đầy nếu tất cả các lá của nó đều ở mức  $h$ . Tìm số lá của cây nhị phân đầy trong các trường hợp

- a)  $h = 3$ .                      b)  $h = 7$ .                      c)  $h = 12$ .

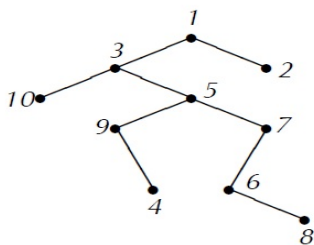
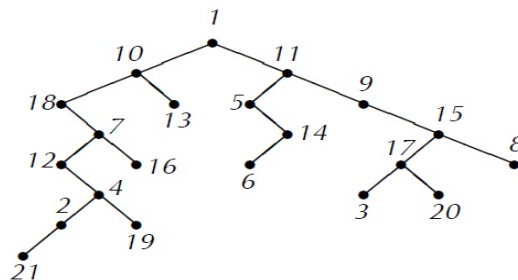
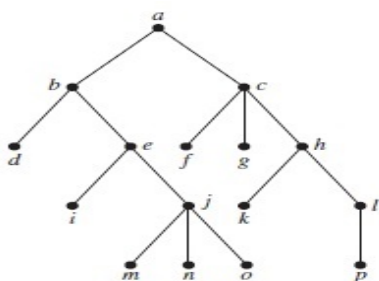
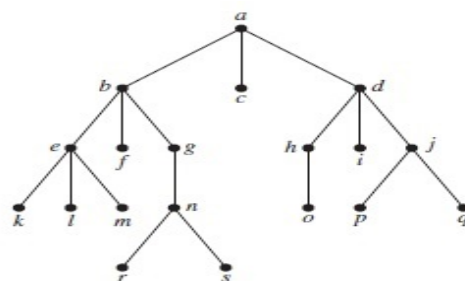
**Bài 5.14.** Cho  $T$  là cây nhị phân đầy. Tính số đỉnh trong và số cạnh của  $T$  biết chiều cao của  $T$  là  $h = 5$ .

**Bài 5.15.** Cho  $T$  là cây  $k$ -phân đầy có chiều cao 7 và 279 936 lá. Hỏi  $T$  có bao nhiêu đỉnh trong?

**Bài 5.16.** Ta bảo một cây có chiều cao  $h$  là *cân bằng* nếu mọi lá đều ở mức  $h$  hoặc  $h - 1$ . Gọi  $n_h$  là số đỉnh ít nhất của cây nhị phân cân bằng và có chiều cao  $h$ .

- Chứng minh  $n_0 = 1, n_1 = 2, n_2 = 4$ .
- Chứng minh  $n_h = 1 + n_{h-1} + n_{h-2}$  với  $h > 1$ .
- Chứng minh  $n_h = f_{h+1} - 1, \forall h \geq 0$ , trong đó  $f_1, f_2, f_3 \dots$  là dãy Fibonacci.

**Bài 5.17.** Cho các cây sau

 $T_1$  $T_2$ 
$$T_3$$
 $T_4$ 

Hãy liệt kê các đỉnh của các cây khi dùng các phép duyệt tiền thứ tự, hậu thứ tự và trung thứ tự.

**Bài 5.18.** Viết các biểu thức sau đây bằng ký pháp Balan và ký pháp Balan ngược. Vẽ cây nhị phân của biểu thức tương ứng.

$$a) \frac{w+x-y}{\pi x^3}$$

$$b) (n^n)^n(mn-q)$$

$$c) (((a+b)*c+d)*e) - ((a+b)*c+d).$$

**Bài 5.19.** Tính giá trị biểu thức được viết bằng ký pháp Balan sau

$$a) +4/ * 2 3 + 1 - 9 \uparrow 2 3$$

$$b) / \uparrow 2 - 4 2 + 2 * 2 4$$

**Bài 5.20.** Tính giá trị biểu thức được viết bằng ký pháp Balan ngược sau

$$a) 1 2 + 3 4 * 1 1 / - - 2 *$$

$$b) 1 2 1 2 * + * 4 *$$

$$c) 1 4 2 3 4 * - + *$$

Lưu ý:  $\uparrow$  là phép toán lấy lũy thừa.

## Phần 2. Thực hành

**Bài 5.1.** Cho ma trận kề của đồ thị đơn vô hướng  $G$ . Hãy viết chương trình kiểm tra  $G$  có là cây không?

**Bài 5.2.** Cho ma trận kề của đồ thị đơn vô hướng liên thông  $G$ . Hãy viết chương trình tìm cây khung của  $G$  bằng

a) thuật toán BFS

b) thuật toán DFS

**Bài 5.3.** Cho danh sách các cạnh và trọng lượng tương ứng của chúng của một đồ thị  $G$ . hãy viết chương trình tìm ma trận trọng số của  $G$ .

**Bài 5.4.** Cho ma trận trọng số của đồ thị vô hướng liên thông  $G$ . Hãy tìm cây khung ngắn nhất và cây khung dài nhất của  $G$  bằng

a) thuật toán Kruskal

b) thuật toán Prim

**Bài 5.5.** Cho biểu thức số học dưới dạng tiền tố (hậu tố, trung tố). Hãy viết chương trình tính giá trị của nó.