Đạo hàm số

*** Công thức sai phân**

- Xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân tiến

$$\boxed{\overline{f'_{SPT}}(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân lùi

$$\boxed{\overline{f'_{SPL}}(x_0) \simeq \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}}$$

Quan hệ giữa đạo hàm và sai phân

$$f'(x_0) = \overline{f'_{SP}}(x_0) - \frac{h}{2}f''(\varepsilon)$$

VD:

Giá trị đạo hàm chính xác

$f'(x) =$, $f'(x_0) =$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng sai phân tiến và sai số tương đối

$\overline{f'_{SPT}}(x_0) \simeq$, $\delta\overline{f'_{SPT}}(x_0) =$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng sai phân lùi và sai số tương đối

$\overline{f'_{SPL}}(x_0) \simeq$, $\delta\overline{f'_{SPL}}(x_0) =$

*** Công thức ba điểm**

- Công thức ba điểm cuối:

$$\overline{f'_{3DC}}(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h))$$

Công thức ba điểm giữa:

$$\overline{f'_{3DG}}(x_0) = \frac{1}{2h}(-f(x_0-h) + f(x_0+h))$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng công thức 3 điểm

$$f'(x_0) = \overline{f'_{3DC}}(x_0) + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\varepsilon) \quad \varepsilon \in (x_0, x_0+2h)$$

$$= \overline{f'_{3DG}}(x_0) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\eta) \quad \eta \in (x_0-h, x_0+h)$$

VD:

Giá trị đạo hàm chính xác

$f'(x) =$, $f'(x_0) =$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng công thức ba điểm cuối và sai số tương đối

$\overline{f'_{3DC}}(x_0) \simeq$, $\delta\overline{f'_{3DC}}(x_0) =$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng công thức ba điểm giữa và sai số tương đối

$\overline{f'_{3DG}}(x_0) \simeq$, $\delta\overline{f'_{3DG}}(x_0) =$

*** Đạo hàm cấp hai**

- Công thức xấp xỉ đạo hàm cấp hai

$$\overline{f''}(x_0) = \frac{1}{h^2}(f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h))$$

- Giá trị đạo hàm xấp xỉ có sai số tương đối

$$f''(x_0) = \overline{f''}(x_0) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\varepsilon) \quad \varepsilon \in (x_0-h, x_0+4h)$$

VD:

Giá trị đạo hàm chính xác

$f'(x) =$, $f'(x_0) =$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ cấp hai và sai số tương đối

$\overline{f''}(x_0) \simeq$, $\delta\overline{f''}(x_0) =$

*** Công thức năm điểm**

- Công thức năm điểm cuối

$$\overline{f'_{5DC}}(x_0) = \frac{1}{12h}(-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h))$$

Công thức 5 điểm giữa

$$\overline{f'_{5DG}}(x_0) = \frac{1}{12h}(f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h))$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng công thức năm điểm và sai số tương đối

$$f'(x_0) = \overline{f'_{5DC}}(x_0) + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(\varepsilon) \quad \varepsilon \in (x_0, x_0+4h)$$

$$= \overline{f'_{5DG}}(x_0) - \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\eta) \quad \eta \in (x_0-2h, x_0+2h)$$

Tích phân số

*** Tích phân hình thang**

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq \frac{x_c - x_d}{2}(y_d + y_c)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{i-1}}{2}(y_{i-1} + y_i)$$

VD. $\int_0^9 f(x)dx \simeq \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{2,5} f(x)dx + \dots$

$\simeq \dots \qquad \simeq \dots$

*** Tích phân Simpson 1/3** (các bộ có thể ≠)

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq \frac{x_c - x_d}{6}(y_d + 4y_g + y_c)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{i-1}}{6}(y_{i-1} + 4y_{i-1/2} + y_i)$$

*** Tích phân Simpson 3/8**

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq \frac{(x_c - x_d)}{8}(y_d + 3y_t + 3y_p + y_c)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - x_{i-1})}{8}(y_{i-1} + 3y_{i-2/3} + 3y_{i-1/3} + y_i)$$

KLONG

+ Tích phân Gauss

$$\int f(x)dx \simeq \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$

$b-a = w_1 + w_2 + \dots + w_n$, $\quad f(x) = 1$

$\frac{b^2-a^2}{2} = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n$, $\quad f(x) = x$

...

$\frac{b^n-a^n}{n} = w_1x_1^{n-1} + w_2x_2^{n-1} + \dots + w_nx_n^{n-1}$, $\quad f(x) = x^{n-1}$

...

$\frac{b^{2n}-a^{2n}}{2n} = w_1x_1^{2n-1} + w_2x_2^{2n-1} + \dots + w_nx_n^{2n-1}$, $\quad f(x) = x^{2n-1}$

VD 1

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + \dots = 2 \\ w_1x_1 + w_2x_2 + \dots = \\ \dots \end{cases}$$

Nghiệm của hpt trên là $w_1 =$, $w_2 =$, ...

Như vậy công thức tích phân Gauss với $n = \dots$ là:

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \dots$

2

Đặt $t = ax + b$

x	x_d	x_c
t	-1	1

$\Rightarrow \begin{cases} x_d a + b = -1 \\ x_c a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \\ b \end{cases}$

Ta có công thức tích phân Gauss với $n = \dots$ là:

$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq \dots$

$\frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

Phương trình vi phân

* Phương pháp lặp

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds \end{cases}$$

VD

Ta lần lượt thực hiện các phép lặp sau:

$y_0(x) =$

$y_1(x) = \quad + \int \dots$

...

* Phương pháp Euler

$y'' = f_x(x,y) + f_y(x,y)y'$

$y''' = f_{xx}(x,y) + 2f_{xy}.y' + f_{yy}(x,y)(y')^2 + f_y(x,y)y''$

$y^{(4)} = \dots$

$y_{k+1} \simeq y_k + (x_{k+1} - x_k) f(x_k, y_k)$

* Phương pháp Euler cải tiến

$$\begin{cases} \tilde{y}_{k+1} \simeq y_k + (x_{k+1} - x_k).f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} \simeq y_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})) \end{cases}$$

VD.

Ta xây dựng phân hoạch [ ]. Khi đó

$h_0 =$; $\tilde{y}_1 = \dots$

$y_1 = \dots$

...

$h_3 =$

KI.ONG

* Phương pháp Runge - Kutta

Công thức Runge - Kutta bậc hai

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2 = h_i f(x_{i+1}, y_i + k_1) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

Công thức Runge - Kutta bậc ba

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2 = h_i f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = h_i f(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases}$$

VD:

Sử dụng Runge - Kutta bậc với phân hoạch [...]. Khi đó:

$h_0 =$; $k_1 = \dots$

...

...

$h_3 =$

Hệ phương trình vi phân

* Phương pháp Euler

$x_{k+1} = x_k + h$

$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k, z_k)h$

$z_{k+1} = z_k + g(x_k, y_k, z_k)h$

* Phương pháp Euler cải tiến

$x_{k+1} = x_k + h_k$

$\tilde{y}_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k, z_k)h_k$

$\tilde{z}_{k+1} = z_k + g(x_k, y_k, z_k).h_k$

$y_{k+1} = y_k + \frac{f(x_k, y_k, z_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1})}{2} h_k$

$z_{k+1} = z_k + \frac{g(x_k, y_k, z_k) + g(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1})}{2} h_k$

VD

Sử dụng phương pháp Euler cải tiến với phân hoạch [ ]. Ta có hệ nghiệm số:

$h_0 =$; $\tilde{y}_1 = \dots$

$\tilde{z}_1 = \dots$

...

* Phương pháp Runge - Kutta bậc ba

$k_1 = h_i f(x_i, y_i, z_i)$; $l_1 = h_i g(x_i, y_i, z_i)$

$k_2 = h_i f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1)$; $l_2 = h_i g(\dots)$

$k_3 = h_i f(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2, z_i - l_1 + 2l_2)$; $l_3 = h_i g(\dots)$

$y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$; $z_{i+1} \simeq z_i + \frac{1}{6}(l_1 + 4l_2 + l_3)$

* Phương trình vi phân bậc hai

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Đặt $z = y'$, khi đó $z' = y''$

$$\begin{cases} y' = z, & y(x_0) = y_0 \\ z' = f(x, y, z), & z(x_0) = z_0 \end{cases}$$