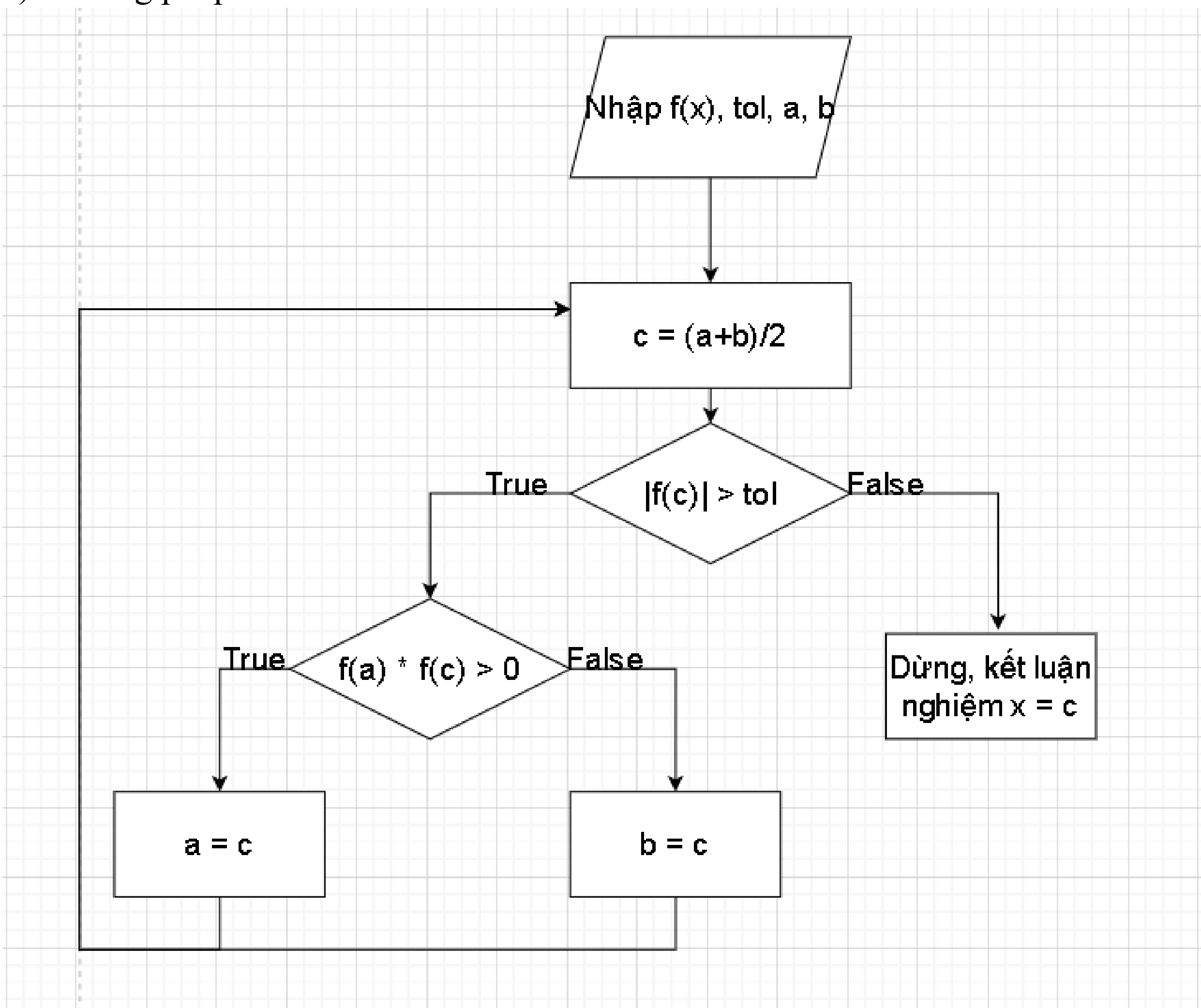
# CHƯƠNG 2

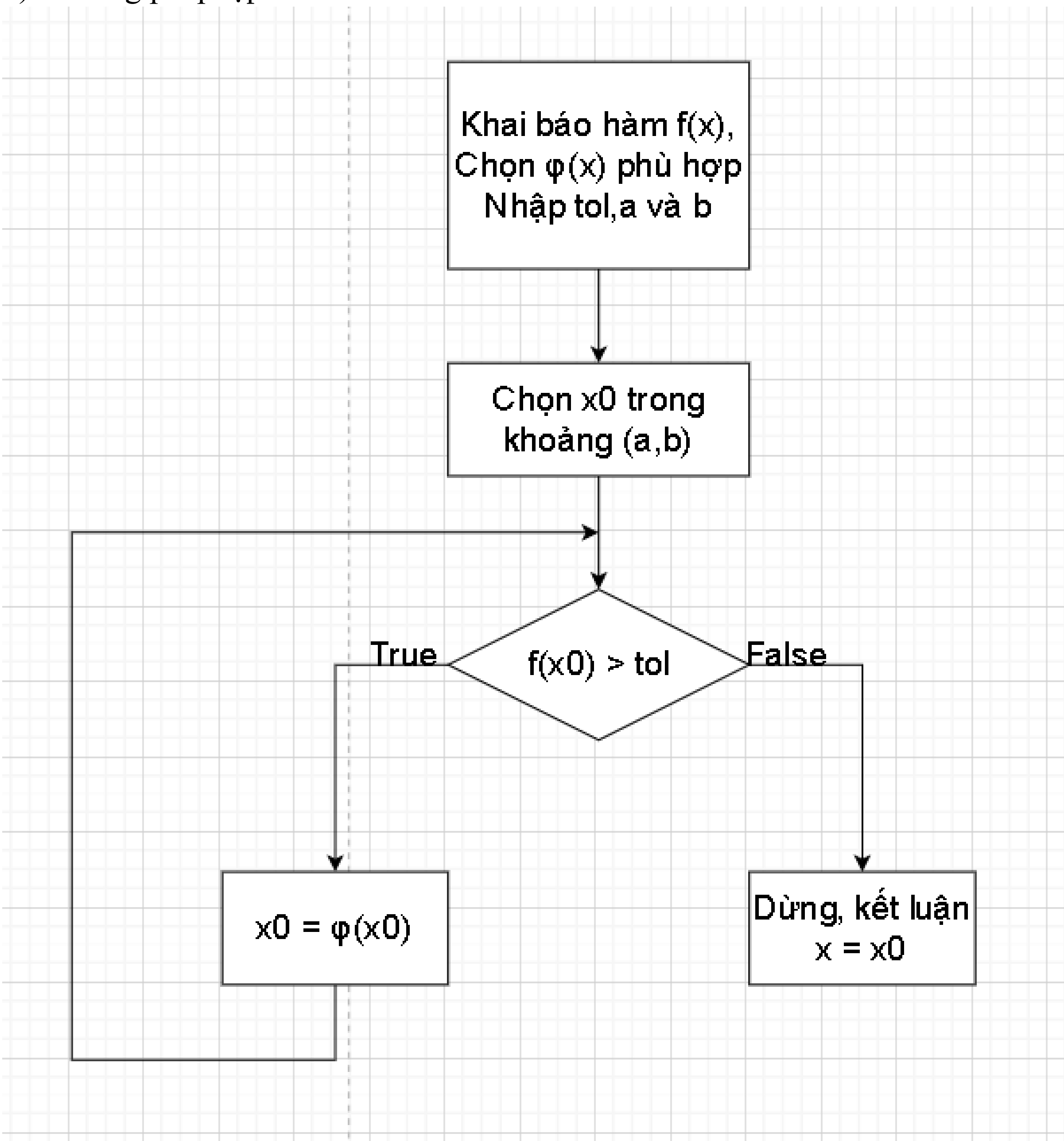
## 2.1

Trần Thái Bảo - 19120458

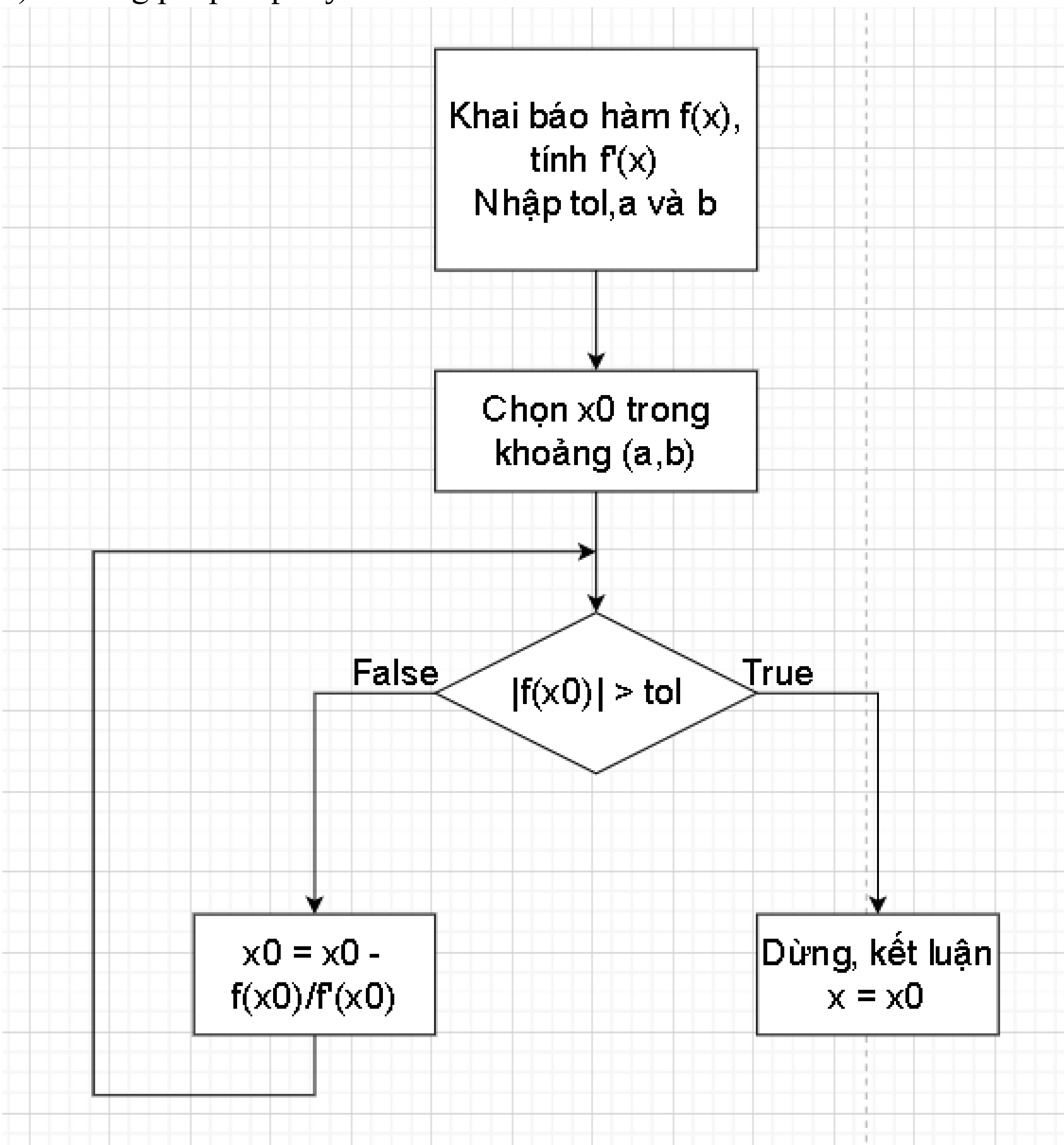
a) Phương pháp chia đôi



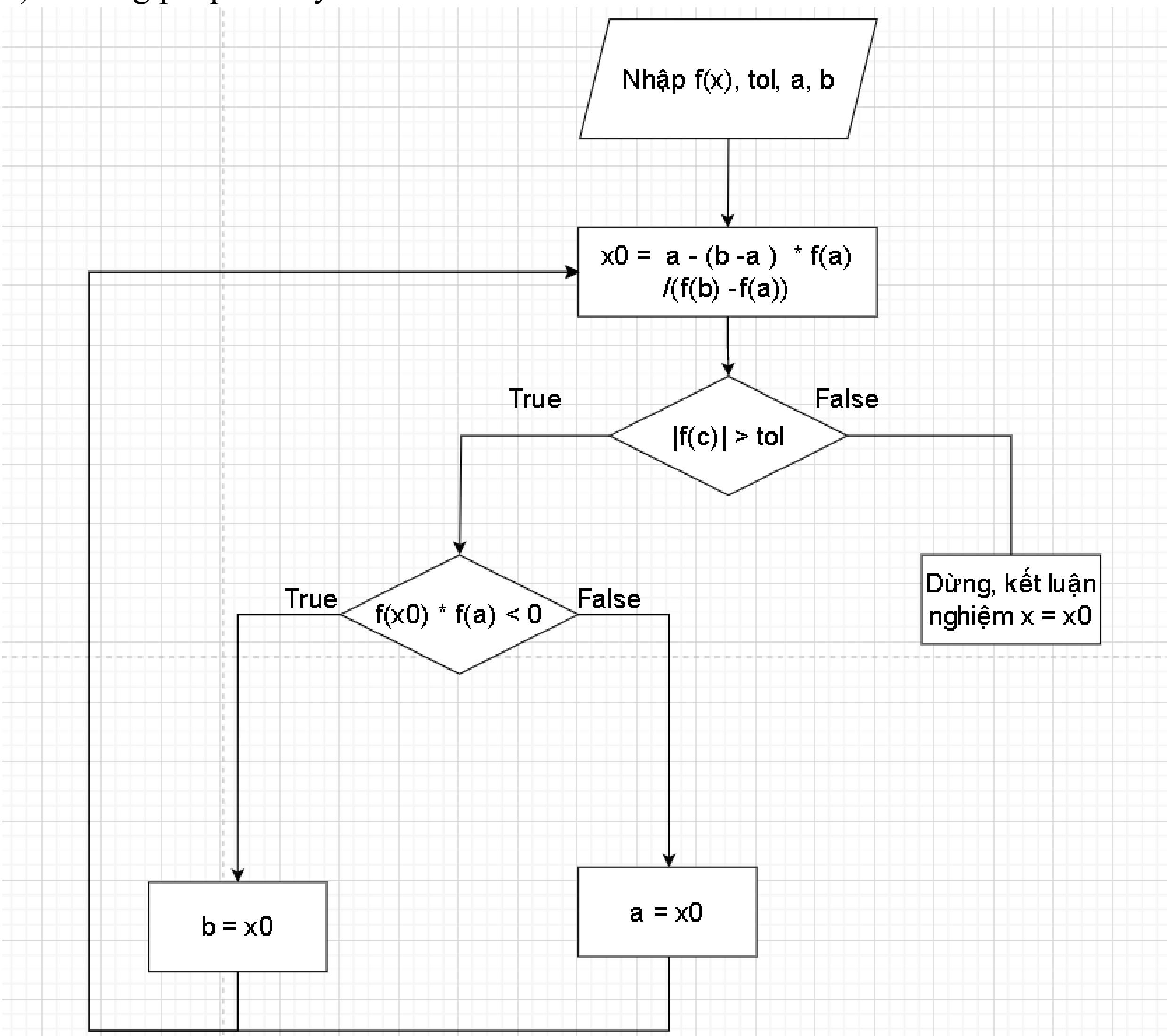
b) Phương pháp lặp



c) Phương pháp tiếp tuyến



d) Phương pháp cát tuyến



# 2.2

Hà Bảo Khang – 19120252

a) $x^3 - 2x - 6 = 0$

Chọn đoạn [2;3], $\gamma = 3.10^{-3}$

**Phương pháp chia đôi**

Đặt $f(x) = x^3 - 2x - 6 = 0$

Vì f(2).f(3)<0 nên f(x) liên tục

| Bước | a | b | c | f(c) | f(c)<γ | f(a).f(c) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2.5 | 4.625 | N | - |
| 2 | 2 | 2.5 | 2.25 | 0.891 | N | - |
| 3 | 2 | 2.25 | 2.125 | -0.654 | N | + |

**Phương pháp lặp**

Đặt $f(x) = x^3 - 2x - 6 = 0$; $\varphi(x) = \sqrt[3]{2x + 6}$

Hàm f liên tục có f(2).f(3)<0 và $|\varphi'(x)| < 1$ với x thuộc [2,3]

Chọn $x_0 = 2.5$

| Bước | $x_k = \varphi(x_{k-1})$ | $f(x_k)$ | $f(x_k) < \gamma$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2.5 | 4.625 | N |
| 2 | 2.224 | 0.552 | N |
| 2 | 2.186 | 0.074 | N |
| 3 | 2.181 | 0.012 | N |

**Phương pháp tiếp tuyến**

Đặt $f(x) = x^3 - 2x - 6; f'(x) = 3x^2 - 2; f''(x) = 6x$

$f'(x)$ và $f''(x)$ không đổi dấu trên [2,3]

f(2).f(3)<0 => Chọn $x_0 = 2$

| Bước | $x_k$ | f($x_k$) | f($x_k$) < γ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2.2 | 0.248 | N |
| 2 | 2.18019 | $2.10^{-3}$ | N |
| 3 | 2.17998 | $-8.8.10^{-7}$ | Y |

**Phương pháp cát tuyến**

Đặt $f(x) = x^3 - 2x - 6$ và f(x) liên tục trên [2;3]

f(2).f(3)<0 => Chọn a = 2, b = 3

| Bước | a | b | $x_k$ | f($x_k$) | \|f($x_k$)\|< γ | f(a)f($x_k$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2.118 | -0.739 | N | + |
| X | 2.118 | 3 | 2.159 | 0.253 | N | - |
| 3 | 2.118 | 2.159 | 2.181 | $8.806 \times 10^{-3}$ | N | + |

b) $x^4 - x^2 + 5 = 0$

Vì phương trình vô nghiệm nên bài toán không có lời giải

c) $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$

Chọn đoạn [0;1], $\gamma = 3.10^{-3}$

**Phương pháp chia đôi**

Đặt $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$

Vì f(0).f(1)<0 nên f(x) liên tục

| Bước | a | b | c | f(c) | f(c)<γ | f(a).f(c) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0.5 | 0.6875 | N | + |
| 2 | 0.5 | 1 | 0.75 | 0.051 | N | + |
| 3 | 0.75 | 1 | 0.875 | -0.424 | N | - |

**Phương pháp lặp**

Đặt $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$; $\varphi(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^4 + 1}$

Hàm f liên tục có f(0).f(1) < 0 mà $|\varphi'(x)| < 1$ không thỏa nên bài toán không thể giải bằng phương pháp lặp.

**Phương pháp tiếp tuyến**

Đặt $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1 \to f'(x) = 4x^3 - 9x^2, f''(x) = 12x^2 - 18x$

$f'(x)$ và $f''(x)$ không đổi dấu trên [0,1]

f(0).f(1)<0 => Chọn $x_0 = 0.5$

| Bước | $x_k$ | f($x_k$) | f($x_k$) < γ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.893 | -0.499 | N |
| 2 | 0.777 | -0.044 | N |
| 3 | 0.765 | $-5.162 \times 10^{-4}$ | Y |

**Phương pháp cát tuyến**

Đặt $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$ và f(x) liên tục trên [0.5;1]

f(0.5).f(1)<0 => Chọn a = 0.5, b = 1

| Bước | a | b | $x_k$ | f($x_k$) | \|f($x_k$)\|< γ | f(a)f($x_k$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 1 | 0.703 | 0.199 | N | + |
| 2 | 0.703 | 1 | 0.753 | 0.04 | N | + |
| 3 | 0.753 | 1 | 0.763 | $7.75 \times 10^{-3}$ | N | + |

d) $2x^5 - 3x^2 - 4 = 0$

Chọn đoạn [1;2], $\gamma = 3.10^{-3}$

**Phương pháp chia đôi**

Đặt $f(x) = 2x^5 - 3x^2 - 4$

Vì f(1).f(2)<0 nên f(x) liên tục

| Bước | a | b | c | f(c) | f(c)<γ | f(a).f(c) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1.5 | 4.4375 | N | - |
| 2 | 1 | 1.5 | 1.25 | -2.534 | N | + |
| 3 | 1.25 | 1.5 | 1.375 | 0.158 | N | - |

**Phương pháp lặp**

Đặt $f(x) = 2x^5 - 3x^2 - 4$; $\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt[5]{3x^2 + 4}$

Hàm f liên tục có f(1).f(2) < 0 và $|\varphi'(x)| < 1$ với x thuộc [1,2]

Chọn $x_0 = 1.3$

| Bước | $x_k = \varphi(x_{k-1})$ | $f(x_k)$ | $f(x_k) < \gamma$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.3 | 4.625 | N |
| 2 | 2.224 | 0.552 | N |
| 2 | 2.186 | 0.074 | N |
| 3 | 2.181 | 0.012 | N |

**Phương pháp tiếp tuyến**

Đặt $f(x) = 2x^5 - 3x^2 - 4 \rightarrow f'(x) = 10x^4 - 6x, f''(x) = 40x^3 - 6$

$f'(x)$ và $f''(x)$ không đổi dấu trên [1,2]

f(1).f(2)<0 => Chọn $x_0 = 1$

| Bước | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f(x_k) < \gamma$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2.25 | 96.1425 | N |
| 2 | 1.854 | 29.499 | N |
| 3 | 1.578 | 8.119 | N |

**Phương pháp cát tuyến**

Đặt $f(x) = 2x^5 - 3x^2 - 4$ và f(x) liên tục trên [1;2]

f(1).f(2)<0 => Chọn a = 1, b = 2

| Bước | a | b | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \gamma$ | $f(a)f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1.111 | -4.317 | N | + |
| 2 | 1.111 | 2 | 1.21 | -3.204 | N | + |
| 3 | 1.21 | 2 | 1.295 | -1.743 | N | + |

# 2.3

Ngô Trọng Đức - 19120061

CHƯƠNG 2.

Bài 2.3

a) $2x = \sin(x+1)$, $x \in [0,1]$

Dễ thấy $f(x) = \sin(x+1) - 2x$ liên tục

Phương pháp chia đôi:

| k | a | b | c | f(c) | $\lvert f(c)\rvert < \delta$ | $f(a)f(c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0,5 | −0,9738 | NO | < 0 |
| 1 | 0 | 0,5 | 0,25 | 0,4782 | NO | > 0 |
| 2 | 0,25 | 0,5 | 0,375 | −0,726 | NO | > 0 |
| 3 | 0,375 | 0,5 | 0,4375 | −0,85 | NO | > 0 |

Phương pháp lặp:

$\varphi(x) = \frac{\sin(x+1)}{2}$, $\lvert \varphi'(x)\rvert < 1$ trên $[0, 1]$. Chọn $x_0 = 0,5$

| k | $x_k = \varphi(x_{k-1})$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,4987 | 0,000002 | |

=> Nguyên Nghiệm của pt $2x = \sin(x+1)$ là 0,4987

Phương pháp tiếp tuyến:

$f' = \cos(x+1) - 2$; $f'' = -\sin(x+1)$, $f'$ và $f''$ không đổi dấu trên $[0,1]$

| k | $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,5 | −0,0025 | NO |
| 1 | 0,4987 | 0,000002 | YES |

=> Ng. của pt $2x = \sin(x+1)$ là 0,4987

Phương pháp cát tuyến:

| k | a | b | $x_k = a - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ | $f(x_k)$ | $\lvert f \rvert < \delta$ | $f(a) \cdot f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\cancel{1}$ 0 | $\cancel{2}$ 1 | 0,4355 | 0,1197 | NO | $> 0$ |
| 1 | 0,4355 | 1 | 0,4914 | 0,014 | NO | $> 0$ |
| 2 | 0,4914 | 1 | 0,4979 | 0,001 | NO | $> 0$ |
| 3 | 0,4979 | 1 | 0,4986 | 0,0001 | YES | $> 0$ |

Vậy nghiệm của pt $2x = \sin(x+1)$ là 0,4986

Kết luận: ở câu a, phương pháp chia đôi không cho ra nghiệm sau 3 bước lặp, phương pháp lặp và tiếp tuyến cho ra nghiệm có sai số nhỏ hơn so với phương pháp cát tuyến.

b). $x^2 - \sin(3x) - 40 = 0$ , $x \in [6,7]$

Dễ thấy $f(x) = x^2 - \sin(3x) - 40$ liên tục

Phương pháp chia đôi:

| k | a | b | c | f(c) | $\|f(c)\| < \delta$ | $f(a).f(c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 7 | 6,5 | 1,6445 | NO | < 0 |
| 1 | 6 | 6,5 | 6,25 | −0,8381 | NO | > 0 |
| 2 | 6,25 | 6,5 | 6,375 | 0,3687 | NO | < 0 |
| 3 | 6,25 | 6,375 | 6,3125 | −0,24 | NO | > 0 |

Phương pháp lặp:

$\varphi(x) = \sqrt{\sin 3x + 40}$ , $|\varphi'(x)| < 1$ $\forall x \in [6,7]$ , Chọn $x_0 = 6,5$

| k | $x_k = \varphi(x_{k-1})$ | $f(x_k)$ | $\|f(x_k)\| < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6,3722 | 0,3411 | NO |
| 2 | 6,3454 | 0,0785 | NO |
| 3 | 6,3392 | 0,0182 | NO |
| 4 | 6,3378 | 0,0046 | NO |

Phương pháp tiếp tuyến:

$f' = 2x - 3\cos 3x$ ; $\cancel{f'' = 2 + 9\sin 3x}$ Chọn $x_0 = 6,5$

| k | $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$ | $f(x_k)$ | $\|f(x_k)\| < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6,345 | 0,0746 | NO |
| 2 | 6,3373 | −0,0002 | YES |

Vậy ng. của pt $x^2 - \sin 3x - 40 = 0$ là 6,3373.

Phương pháp cát tuyến

| $k$ | $a$ | $b$ | $x_k = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ | $f(x_k)$ | $\lvert f \rvert < \delta$ | $f(a).f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 7 | 6,2847 | -0,507 | NO | >0 |
| 1 | 6,2847 | 7 | 6,3265 | -0,1046 | NO | >0 |
| 2 | 6,3265 | 7 | 6,3350 | -0,0223 | NO | >0 |
| 3 | 6,3350 | 7 | 6,3368 | -0,005 | NO | >0 |

Kết luận: phương pháp chia đôi, lặp, cát tuyến không cho ra nghiệm sau 3 lần lặp, phương pháp tiếp tuyến cho ra nghiệm của pt $x^2 - \sin^3 x - 40 = 0$ là 6,3373

c) $x\cos x - 2x^3 + 2 = 0$ , $x \in [1,2]$

Dễ thấy $f(x) = x\cos x - 2x^3 + 2$ liên tục

Phương pháp chia đôi:

| k | a | b | c | f(c) | $\lvert f(c)\rvert < \delta$ | f(a).f(c) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1,5 | −4,6439 | NO | <0 |
| 1 | 1 | 1,5 | 1,25 | −1,5121 | NO | <0 |
| 2 | 1 | 1,25 | 1,125 | −0,3626 | NO | <0 |
| 3 | 1 | 1,125 | 1,0625 | 0,1182 | NO | >0 |

Phương pháp lặp:

$\varphi(x) = \sqrt[3]{\frac{x\cos x + 2}{2}}$ ; $|\varphi'(x)| < 1$, $\forall x \in [1,2]$. Chọn $x_0 = 1,5$

| k | $x_k = \varphi(x_{k-1})$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,0174 | 0,4285 | NO |
| 2 | 1,0822 | −0,0269 | NO |
| 3 | 1,0784 | 0,0016 | YES |

Vậy nghiệm của ptr $x\cos x - 2x^3 + 2 = 0$ là 1,0784

Phương pháp tiếp tuyến

$f' = \cos x - x\sin x - 6x^2$ Chọn $x_0 = 1,5$

| k | $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,1889 | −0,9179 | NO |
| 2 | 1,0893 | −0,0806 | NO |
| 3 | 1,0787 | −0,0007 | YES |

Vậy nghiệm của ptr $x\cos x - 2x^3 + 2 = 0$ là 1,0787

Phương pháp cát tuyến

| k | a | b | $x_k = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ | $f(x_k)$ | $\|f\| < \delta$ | $f(a).f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1,0351 | 0,3103 | NO | >0 |
| 1 | 1,0351 | 2 | 1,0549 | 0,1726 | NO | >0 |
| 2 | 1,0549 | 2 | 1,0658 | 0,0943 | NO | >0 |
| 3 | 1,0658 | 2 | 1,0717 | 0,0512 | NO | >0 |

Kết luận: phương pháp chia đôi, cát tuyến không cho ra nghiệm sau ba bước lặp, phương pháp tiếp tuyến cho ra nghiệm có sai số nhỏ hơn so với phương pháp lặp.

d) $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$, $x \in [1,2]$

Dễ thấy $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x - 1$ liên tục

Phương pháp chia đôi

| k | a | b | c | f(c) | \|f(c)\| < δ | f(a) f(c) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1,5 | −0,8939 | NO | < 0 |
| 1 | 1 | 1,5 | 1,25 | 0,0192 | NO | > 0 |
| 2 | 1,25 | 1,5 | 1,375 | −0,3887 | NO | < 0 |
| 3 | 1,25 | 1,375 | 1,3125 | −0,1726 | NO | < 0 |

Phương pháp lặp

$x = \sqrt{\dfrac{x\cos x + 3x - 1}{2}}$ Chọn $x_0 = 1,5$

| k | $x_k = \varphi(x_{k-1})$ | $f(x_k)$ | $\|f(x_k)\| < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,3428 | −0,2743 | NO |
| 2 | 1,2907 | −0,1029 | NO |
| 3 | 1,2706 | −0,0413 | NO |

Phương pháp tiếp tuyến

$f' = \cos x - x\sin x - 4x + 3$ Chọn $x_0 = 1,5$

| k | $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$ | $f(x_k)$ | $\|f(x_k)\| < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,298 | −0,1259 | NO |
| 2 | 1,2583 | −0,005 | NO |
| 3 | 1,2566 | 0,00007 | YES |

Vậy ngo của ptr $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ là 1,2566

Phương pháp cát tuyến

| k | a | b | $x_k = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ | $f(x_k)$ | $\lvert f \rvert < \delta$ | $f(a).f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1,1236 | 0,3317 | NO | >0 |
| 1 | 1,1236 | 2 | 1,1934 | 0,1716 | NO | >0 |
| 2 | 1,1934 | 2 | ~~1,2279~~ 1,228 | 0,0808 | NO | >0 |
| 3 | 1,228 | 2 | 1,2439 | 0,0365 | NO | >0 |

Kết luận, Chỉ ~~có~~ cả 3 phương pháp chia đôi, lặp, cát tuyến không cho ra nghiệm sau 3 lần lặp, phương pháp tiếp tuyến cho ra nghiệm của pt: $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ là 1,2566

# 2.4

Phan Đặng Diễm Uyên – 19120426

**Bài 2.4a** $\frac{1}{x^2+1} + \sqrt{x+2} = x^2$

Đặt $f(x) = \frac{1}{x^2+1} + \sqrt{x+2} - x^2$

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $[-2, +\infty)$

Chọn $a = 0$ thì $f(a) = \frac{1}{0^2+1} + \sqrt{0+2} - 0^2 = (1 + \sqrt{2}) > 0$

Chọn $b = 2$ thì $f(b) = \frac{1}{2^2+1} + \sqrt{2+2} - 2^2 = \frac{-9}{5} < 0$

Vậy khoảng phân ly nghiệm là [0, 2]

- Phương pháp chia đôi

| Bước | a | b | c | $f(c)$ | $\lvert f(c) \rvert < \delta$ | $f(a)f(c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 1 | 1,2321 | No | $> 0$ |
| 2 | 1 | 2 | 1,5 | $-0{,}0715$ | No | $< 0$ |
| 3 | 1 | 1,5 | 1,25 | 0,6305 | No | $> 0$ |

- Phương pháp lặp

$\varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1} + \sqrt{x+2}}$, $|\varphi'(x)| < 1\ \forall x \in [0,2]$. Chọn $x_0 = 1$

| **Bước** | $\boldsymbol{x_k = \varphi(x_{k-1})}$ | $\boldsymbol{f(x_k)}$ | $\boldsymbol{|f(x_k)| < \delta}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1,2321 | No |
| 1 | 1,4940 | −0,0534 | No |
| 2 | 1,4760 | 0,0004 | Yes |
| 3 | 1,4761 | 0,0001 | Yes |

- Phương pháp tiếp tuyến

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 2x$$

| **Bước** | $\boldsymbol{x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}$ | $\boldsymbol{f(x_k)}$ | $\boldsymbol{|f(x_k)| < \delta}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1,2321 | No |
| 1 | 1,5572 | −0,2468 | No |
| 2 | 1,4780 | −0,0055 | Yes |
| 3 | 1,4761 | 0,0001 | Yes |

- Phương pháp cát tuyến

| **Bước** | $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{x_k = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)}$ | $\boldsymbol{f(x_k)}$ | $\boldsymbol{|f(x_k)| < \delta}$ | $\boldsymbol{f(x_k)f(a)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 1,1457 | 0,8934 | No | $> 0$ |
| 2 | 1,1457 | 2 | 1,4291 | 0,1382 | No | $> 0$ |
| 3 | 1,4291 | 2 | 1,4697 | 0,0191 | Yes | $> 0$ |

**So sánh**: ở bài 2.4a, trừ phương pháp chia đôi, cả 3 phương pháp lặp, phương pháp tiếp tuyến, phương pháp cát tuyến đều cho ra nghiệm sau 3 bước lặp. Tuy nhiên, nghiệm tìm được ở phương pháp lặp và phương pháp tiếp tuyến cho giá trị hàm số gần bằng 0 hơn so với phương pháp cát tuyến.

**Bài 2.4b** $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3} = 4$

Đặt $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3} - 4$

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Chọn $a = 0$ thì $f(a) = \frac{1}{0+1} + \frac{2}{(0+1)^2} + \frac{3}{(0+1)^3} - 4 = 2 > 0$

Chọn $b = 1$ thì $f(b) = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{(1+1)^2} + \frac{3}{(1+1)^3} - 4 = \frac{-21}{8} < 0$

Vậy khoảng phân ly nghiệm của $f(x)$ là $[0,1]$

- Phương pháp chia đôi

| **Bước** | **a** | **b** | **c** | $\boldsymbol{f(c)}$ | $\boldsymbol{\vert f(c)\vert < \delta}$ | $\boldsymbol{f(a)f(c)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0,5 | $-1{,}5556$ | No | $< 0$ |
| 2 | 0 | 0,5 | 0,25 | $-0{,}384$ | No | $< 0$ |
| 3 | 0 | 0,25 | 0,125 | 0,5761 | No | $> 0$ |

- Phương pháp lặp

$\varphi(x) = \frac{-4x^3-11x^2+2}{8}$, $|\varphi'(x)| < 1\ \forall x \in [0,1]$. Chọn $x_0 = 0$

| **Bước** | $\boldsymbol{x_k = \varphi(x_{k-1})}$ | $\boldsymbol{f(x_k)}$ | $\boldsymbol{\vert f(x_k)\vert < \delta}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | No |
| 1 | 0,25 | $-0{,}384$ | No |
| 2 | 01563 | 0,3012 | No |
| 3 | 0,2145 | $-0{,}1460$ | No |

- Phương pháp tiếp tuyến

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^3} - \frac{9}{(x+1)^4}$$

| **Bước** | $\boldsymbol{x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}$ | $\boldsymbol{f(x_k)}$ | $\boldsymbol{\vert f(x_k)\vert < \delta}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | No |
| 1 | 0,1429 | 0,4156 | No |
| 2 | 0,1906 | 0,0284 | Yes |
| 3 | 0,1944 | $-0{,}0001$ | Yes |

- Phương pháp cát tuyến

| Bước | $a$ | $b$ | $x_k = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ | $f(x_k)f(a)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0,4324 | $-1{,}3063$ | No | $< 0$ |
| 2 | 0 | 0,4324 | 0,2616 | $-0{,}4568$ | No | $< 0$ |
| 3 | 0 | 0,2616 | 0,2130 | $-0{,}1354$ | No | $< 0$ |

**<u>So sánh</u>**: ở bài 2.4b, chỉ có phương pháp tiếp tuyến cho ra nghiệm sau 3 bước lặp.

**Bài 2.4c** $\boldsymbol{x^2 - x + \sqrt{\sin x + 2} = 0}$

Đặt $f(x) = x^2 - x + \sqrt{\sin x + 2}$

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

- Xét $g(x) = x^2 - x$

  $=> g(x) = x^2 - 2.\frac{1}{2}.x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

  Ta có $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 => \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} => x^2 - x \geq -\frac{1}{4} (\forall x \in \mathbb{R})$

- Xét $h(x) = \sqrt{\sin x + 2}$

  Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 => 1 \leq \sin x + 2 \leq 3 => 1 \leq \sqrt{\sin x + 2} \leq \sqrt{3} (\forall x \in \mathbb{R})$

- Xét $f(x) = x^2 - x + \sqrt{\sin x + 2}$

  Ta có $\begin{cases} x^2 - x \geq -\frac{1}{4} \\ \sqrt{\sin x + 2} \geq 1 \end{cases} => x^2 - x + \sqrt{\sin x + 2} \geq -\frac{1}{4} + 1$

  $$=> x^2 - x + \sqrt{\sin x + 2} \geq \frac{3}{4} > 0 (\forall x \in \mathbb{R})$$

  Vì $f(x) > 0 (\forall x \in \mathbb{R})$

  Suy ra $f(x) = 0$ vô nghiệm

**Bài 2.4d** $\boldsymbol{\sqrt{x^2 + 2x} = 2 - x sinx}$

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - 2 + x sinx$

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Chọn $a = 3$ thì $f(a) = \sqrt{3^2 + 2.3} - 2 + 3.sin3 = 2{,}2963 > 0$

Chọn $b = 4$ thì $f(b) = \sqrt{4^2 + 2.4} - 2 + 4.sin4 = -0{,}1282 < 0$

Vậy khoảng phân ly nghiệm của $f(x)$ là [3,4]

- Phương pháp chia đôi

| **Bước** | **a** | **b** | **c** | $f(c)$ | $\lvert f(c)\rvert < \delta$ | $f(a)f(c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 3,5 | 1,1597 | No | $> 0$ |
| 2 | 3,5 | 4 | 3,75 | 0,5002 | No | $> 0$ |
| 3 | 3,75 | 4 | 3,875 | 0,1774 | No | $> 0$ |

- Phương pháp lặp

$\varphi(x) = \frac{2-\sqrt{x^2+2x}}{sinx}, |\varphi'(x)| < 1\ \forall x \in [3,4]$. Chọn $x_0 = 4$

| **Bước** | $x_k = \varphi(x_{k-1})$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 4 | $-0,1282$ | No |
| 1 | 3,8306 | 0,2906 | No |
| 2 | 4,2876 | $-0,7144$ | No |
| 3 | 3,5036 | 1,1504 | No |

- Phương pháp tiếp tuyến

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} + sinx + xcosx$$

| **Bước** | $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 4 | $-0,1282$ | No |
| 1 | 3,9455 | 0,0023 | Yes |
| 2 | 3,9464 | 0,0001 | Yes |
| 3 | 3,9464 | 0,0001 | Yes |

- Phương pháp cát tuyến

| **Bước** | $a$ | $b$ | $x_k = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ | $f(x_k)f(a)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 3,9471 | $-0,0016$ | Yes | $< 0$ |
| 2 | 3 | 3,9471 | 3,9464 | 0,0001 | Yes | $> 0$ |
| 3 | 3,9464 | 3,9471 | 3,9464 | 0,0001 | Yes | $> 0$ |

**So sánh**: ở bài 2.4d, phương pháp chia đôi và phương pháp lặp không cho ra nghiệm sau 3 bước lặp, phương pháp tiếp tuyến và phương pháp cát tuyến cho ra nghiệm ngay sau bước lặp 1. Tuy nhiên, nghiệm tìm được ở phương pháp cát tuyến cho giá trị hàm số gần bằng 0 hơn so với phương pháp tiếp tuyến.

**2.5**

Đinh Huỳnh Tiến Phú - 19120325

a) Chia đôi:

| k | a | b | c | f(c) | \|f(c)\|<eps | f(c)*f(a) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 1 | 0 | -1 | no | + |
| 2 | 0 | 1 | 0.5 | 0.39 | no | + |
| 3 | 0 | 0.5 | 0.25 | -0.15 | no | + |

Tiếp tuyến:

| k | xk | f(xk) | \|f(xk)\|<eps |
|---|---|---|---|
| 0 | -1 | -7 | no |
| 1 | 0.8 | 0.7 | no |
| 2 | 1.32 | 0.4 | no |
| 3 | -0.53 | 0.4 | no |

Cát tuyến

| k | a | b | xk | f(xk)<eps | f(xk)*f(a) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 1 | 0.83 | no | <0 |
| 2 | -1 | 0.83 | 0.67 | no | <0 |
| 3 | -1 | 0.67 | 0.54 | no | <0 |

Lặp:

| k | xk | \|f(xk)\|<eps |
|---|---|---|
| 0 | 1 | no |
| 1 | 0.6931 | no |
| 2 | 0.3089 | yes |

b)

Chia đôi

| k | a | b | c | fc | \|fc\|<eps | fc*fa |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1.5 | -2.16 | no | + |
| 2 | 1.5 | 2 | 1.75 | 10 | no | - |
| 3 | 1.5 | 1.75 | 1.625 | 3.14 | no | - |

Tiếp tuyến

| k | xk | f(xk)` | \|f\|<eps |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | -13 | no |
| 2 | 1.74 | 10.038 | no |
| 3 | 1.5897 | 1.5036 | no |

Cát tuyến

| k | a | b | xk | |f(xk)|<eps | f(xk)*f(a) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 0.766 | no | >0 |
| 2 | 0..766 | 2 | 1.1891 | no | >0 |
| 3 | 1.1891 | 2 | 1.3981 | no | >0 |

Lặp

x=ln(x^2+20)*½

| k | xk | |f(xk)|<eps |
|---|---|---|
| 0 | 1 | no |
| 1 | 1.5223 | no |
| 2 | 1.5527 | no |
| 3 | 1.5548 | yes |

c) Chia đôi:

| k | a | b | c | f(c) | |`f(c)|<eps | f(c)*f(a) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 2.5 | -0.6663 | no | - |
| 2 | 1 | 2.5 | 1.75 | -0.4971 | no | - |
| 3 | 1 | 1.75 | 1.375 | 0.0721 | no | + |

Tiếp tuyến:

| k | xk | f(xk) | \|f(xk)\|<eps |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | no |
| 1 | 1.3333 | 0.1568 | no |
| 2 | 1.4086 | 7.19*e-3 | no |
| 3 | 1.4124 | 0 | yes |

Cát tuyến :

| k | a | b | xk | \|f(xk)\|<eps | f(xk)f(a) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 2.8205 | no | <0 |
| 2 | 1 | 2.8205 | 2.3349 | no | <0 |
| 3 | 1 | 2.3349 | 1.7691 | no | <0 |

Lặp:

x= sqrt(ln(x)) + 2

| k | xk | \|ff(xk)\|<eps |
|---|---|---|
| 0 | 1 | no |
| 1 | 2.8326 | no |
| 2 | 3.0204 | no |
| 3 | 3.0514 | yes |

d) Chia đôi

| k | a | b | c | f(c) | f(c)<eps | f(c)*f(a) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 40 | 30 | 6.8035 | no | - |
| 2 | 20 | 30 | 25 | 1.4394 | no | - |
| 3 | 20 | 25 | 22 | -1.27 | no | + |

Tiếp tuyến

| k | xk | f(xk) | $\lvert f(xf)\rvert$<eps |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 | -4.006 | no |
| 1 | 23.643 | -0.029 | no |
| 2 | 23.670 | 0 | yes |

Cát tuyến

| k | a | b | x | $\lvert f(xk\rvert$<eps | f(xk)f(a) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 40 | 23.747 | no | - |
| 2 | 20 | 23.747 | 23.670 | yes | |

Lặp

x= -ln(x^2+1)+30

| k | xk | $\lvert f(xk)\rvert$<eps |
|---|---|---|
| 0 | 20 | no |
| 1 | 24.006 | no |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 23.642 | no |
| 3 | 23.674 | yes |

## 2.6

Huỳnh Tấn Thọ - 19120383

**Bài 2.6a**

$e^x + 2^{-x} + 2cosx = 6; x \in [1,2]$. Dễ thấy, $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2cosx - 6$ liên tục

Phương pháp chia đôi:

| k | a | b | c | f(c) | $\|f(c)\| < \delta$ | f(a).f(c) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1,5 | -1,0233 | NO | $> 0$ |
| 1 | 1,5 | 2 | 1,75 | -0,3046 | NO | $> 0$ |
| 2 | 1,75 | 2 | 1,875 | 0,1944 | NO | $< 0$ |
| 3 | 1,75 | 1,875 | 1,8125 | -0,0683 | NO | $> 0$ |

Phương pháp lặp:

$\varphi(x) = \ln(6 - 2\cos(x) - 2^{-x}), |\varphi'(x)| < 1 \ \forall x \in [1,2]$. Chọn $x_0 = 1,5$

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\|f(x_k)\| < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,5 | -1,0233 | NO |
| 1 | 1,7057 | -0,4572 | NO |
| 2 | 1,7855 | -0,1735 | NO |
| 3 | 1,8142 | -0,0615 | NO |

Phương pháp tiếp tuyến:

$f'(x) = e^x - 2\sin(x) - \frac{\ln(2)}{2^x}$; f'(x) và f''(x) không đổi dấu trên [1,2]

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,5 | -1,0233 | NO |
| 1 | 1,9565 | 0,5798 | NO |
| 2 | 1,8415 | 0,0502 | NO |
| 3 | 1,8295 | 0,0005 | YES |

Vậy nghiệm của phương trình $e^x + 2^{-x} + 2cosx = 6$ là 1,8295

Phương pháp cát tuyến:

| k | a | b | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert f\rvert < \delta$ | $f(a).f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1,6783 | -0,5457 | NO | $> 0$ |
| 1 | 1,6783 | 2 | 1,8081 | -0,0858 | NO | $> 0$ |
| 2 | 1,8081 | 2 | 1,8265 | -0,0118 | YES | $> 0$ |
| 3 | 1,8265 | 2 | 1,829 | -0,0016 | YES | $> 0$ |

Vậy nghiệm của phương trình $e^x + 2^{-x} + 2cosx = 6$ là 1,829

Kết luận: ở bài 2.6a, phương pháp chia đôi và phương pháp lặp không cho ra nghiệm sau 3 bước lặp, phương pháp tiếp tuyến cho nghiệm với sai số nhỏ hơn so với phương pháp cát tuyến.

**Bài 2.6b**

$\sin(x) = e^{-x}; x \in [0,1]$. Dễ thấy, $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$ liên tục

Phương pháp chia đôi:

| k | a | b | c | f(c) | $\lvert f(c)\rvert < \delta$ | f(a).f(c) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0,5 | -0,1271 | NO | $> 0$ |
| 1 | 0,5 | 1 | 0,75 | 0,2093 | NO | $< 0$ |
| 2 | 0,5 | 0,75 | 0,625 | 0,0498 | NO | $< 0$ |
| 3 | 0,5 | 0,625 | 0,5625 | -0,0365 | NO | $> 0$ |

Phương pháp lặp:

$\varphi(x) = -\ln(\sin(x))$. Chọn $x_0 = 0{,}5$

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,5 | -0,1271 | NO |
| 1 | 0,7352 | 0,1913 | NO |
| 2 | 0,3994 | -0,2819 | NO |
| 3 | 0,9445 | 0,4214 | NO |

Phương pháp tiếp tuyến:

$f'(x) = \cos(x) + e^{-x}$; f'(x) và f''(x) không đổi dấu trên [0,1]

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,5 | -0,1271 | NO |
| 1 | 0,5856 | -0,004 | YES |

Vậy nghiệm của phương trình $\sin(x) = e^{-x}$ là 0,5856

Phương pháp cát tuyến:

| k | a | b | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert f\rvert < \delta$ | $f(a).f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0,6786 | 0,1204 | NO | $< 0$ |
| 1 | 0 | 0,6786 | 0,6057 | 0,0236 | YES | $< 0$ |

Vậy nghiệm của phương trình $\sin(x) = e^{-x}$ là 0,6057

Kết luận: ở bài 2.6b, phương pháp chia đôi và phương pháp lặp không cho ra nghiệm sau 3 bước lặp, phương pháp tiếp tuyến cho nghiệm với sai số nhỏ hơn so với phương pháp cát tuyến.

**Bài 2.6c**

$\ln(x-1)+\cos(x-1)=0; x \in [1{,}25;\ 1{,}5]$. Dễ thấy, $f(x)=\ln(x-1)+\cos(x-1)$ liên tục

Phương pháp chia đôi:

| k | a | b | c | f(c) | $\lvert f(c)\rvert < \delta$ | f(a).f(c) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,25 | 1,5 | 1,375 | -0,0503 | NO | $> 0$ |
| 1 | 1,375 | 1,5 | 1,4375 | 0,0791 | NO | $< 0$ |
| 2 | 1,375 | 1,4375 | 1,4062 | 0,0178 | YES | $< 0$ |

Vậy nghiệm của phương trình $\ln(x-1)+\cos(x-1)$ là 1,4062

Phương pháp lặp:

$\varphi(x)=e^{-\cos(x-1)}+1;\ |\varphi'(x)|<1\ \forall x \in [1{,}25;\ 1{,}5]$. Chọn $x_0 = 1{,}3$

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,3 | -0,2486 | NO |
| 1 | 1,3847 | -0,0284 | YES |

Vậy nghiệm của phương trình $\ln(x-1)+\cos(x-1)$ là 1,3847

Phương pháp tiếp tuyến:

$f'(x)=\frac{1}{x-1}-\sin(x-1)$; f'(x) và f''(x) không đổi dấu trên [1,25;1,5]

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert f(x_k)\rvert < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,3 | -0,2486 | NO |
| 1 | 1,3818 | -0,0348 | NO |
| 2 | 1,3973 | -0,0009 | YES |

Vậy nghiệm của phương trình $\ln(x-1)+\cos(x-1)$ là 1,3973

Phương pháp cát tuyến:

| k | a | b | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\lvert f\rvert < \delta$ | $f(a).f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,25 | 1,5 | 1,4234 | 0,0522 | NO | $< 0$ |
| 1 | 1,25 | 1,4234 | 1,4041 | 0,0134 | YES | $< 0$ |

Vậy nghiệm của phương trình $\ln(x-1)+\cos(x-1)$ là 1,4041

Kết luận: ở bài 2.6c, cả 4 phương pháp đều cho ra nghiệm, phương pháp tiếp tuyến cho ra nghiệm với sai số nhỏ nhất.

**Bài 2.6d**

$\ln(x^2+1) = x^3 - \cos(x); x \in [1; 1{,}2]$. Dễ thấy, $f(x) = \ln(x^2+1) - x^3 + \cos(x)$ liên tục

Phương pháp chia đôi:

| k | a | b | c | f(c) | \|f(c)\|< δ | f(a).f(c) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1,2 | 1,1 | -0,0844 | NO | < 0 |
| 1 | 1 | 1,1 | 1,05 | 0,0831 | NO | > 0 |
| 2 | 1,05 | 1,1 | 1,075 | 0,0015 | YES | > 0 |

Vậy nghiệm của phương trình $\ln(x^2+1) = x^3 - \cos(x)$ là 1,075

Phương pháp lặp:

$\varphi(x) = \sqrt[3]{\ln(x^2+1) + \cos(x)}$; $|\varphi'(x)| < 1 \ \forall x \in [1; 1{,}2]$. Chọn $x_0 = 1{,}1$

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\|f(x_k)\| < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,1 | -0,0844 | NO |
| 1 | 1,0762 | -0,0026 | YES |

Vậy nghiệm của phương trình $\ln(x^2+1) = x^3 - \cos(x)$ là 1,0762

Phương pháp tiếp tuyến:

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \sin(x) - 3x^2$; f'(x) và f''(x) không đổi dấu trên [1;1,2]

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\|f(x_k)\| < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,1 | -0,0844 | NO |
| 1 | 1,0761 | -0,002 | YES |

Vậy nghiệm của phương trình $\ln(x^2+1) = x^3 - \cos(x)$ là 1,0761

Phương pháp cát tuyến:

| k | a | b | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\|f\| < \delta$ | $f(a).f(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1,2 | 1,066 | 0,0313 | NO | > 0 |
| 1 | 1,066 | 1,2 | 1,0743 | 0,0038 | YES | > 0 |

Vậy nghiệm của phương trình $\ln(x^2+1) = x^3 - \cos(x)$ là 1,0743

Kết luận: ở bài 2.6d, cả 4 phương pháp đều cho ra nghiệm, phương pháp chia đôi cho ra nghiệm với sai số nhỏ nhất.