

# 1 Tính toán và sai số

1. 1. Nêu khái niệm sai số tuyệt đối và sai số tương đối.
1. 2. Trình bày và phân loại các loại sai số.
1. 3. Trình bày công thức biểu diễn sai số của hàm  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  qua sai số của các biến  $x_1, \dots, x_n$ .
1. 4. Tính sai số tuyệt đối và tương đối của các đại lượng sau
  - a)  $a^* = 0.9, \bar{a} = 0.95$ .
  - b)  $b^* = 5.27, \bar{b} = 5.21$ .
  - c)  $c^* = 15000, \bar{c} = 15024$ .
  - d)  $d^* = 30, \bar{d} = 28$ .
1. 5. Tìm số chính xác, số xấp xỉ, sai số tương đối, sai số tuyệt đối nếu biết:
  - a)  $a^* = 7.56, \Delta a = 0.35$ .
  - b)  $b^* = 2.87, \delta b = 2.5\%$ .
  - c)  $\bar{c} = 1.156, \delta c = 0.05$ .
  - d)  $\Delta d = 3.72, \delta d = 1.05\%$ .
1. 6. Cho  $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}$ . Chọn  $S^*$  là giá trị làm tròn 4 số thập phân và  $\bar{S}$  là giá trị làm tròn 2 số thập phân. Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của  $S$ .
1. 7. Cho  $P = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ . Chọn  $P^*$  ứng với  $n = 6$  và  $\bar{P}$  ứng với  $n = 4$ . Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của  $P$ .
1. 8. Đường kính của một đường tròn được đo chính xác tới  $1mm$  là  $d = 0,842m$ . Tìm diện tích hình tròn đó.
1. 9. Khi đo một góc người ta được giá trị  $27^\circ 5' 18''$ . Biết phép đo chính xác tới  $1''$ . Tính sin của góc đó.
1. 10. Tính thể tích khối cầu có đường kính  $d = 3.7 \pm 0.03cm$  và  $\pi = 3.14 \pm 0.0016$ .
1. 11. Một hình cầu có bán kính đáy  $R = 5.87cm$  với  $\Delta R = 0.01cm$ . Tính thể tích hình cầu.
1. 12. Một hình trụ có bán kính  $R = 2m$ , chiều cao  $h = 3m$ . Hỏi  $\Delta R$  và  $\Delta h$  bằng bao nhiêu để thể tích  $V$  có sai số lớn nhất là  $0.1m^3$ .
1. 13. Một hình hộp chữ nhật có kích thước cạnh là chiều dài  $a = 5 \pm 0.2$ , chiều rộng  $b = 3 \pm 0.1$  và chiều cao  $c = 2.5 \pm 0.15$ . Đơn vị là  $m$ . Hãy tính
  - a) Diện tích mặt đáy.
  - b) Diện tích mặt bên.
  - c) Diện tích toàn phần.
  - d) Thể tích hình hộp.
1. 14. Tìm công thức tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của các đại lượng sau biết  $a, b, c$  là tham số (không có sai số) còn  $x, y, z$  là biến số (có sai số):
  - a)  $A = \frac{ab(x+1)}{x^2 + b^2}$ .
  - b)  $B = \frac{a+b}{x^2 + y}$ .
  - c)  $C = \frac{ax(y+z)}{x^2 + y^2 + z^2}$ .
  - d)  $D = \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{z}$ .
1. 15. Tìm giá trị xấp xỉ và sai số tuyệt đối, tương đối của các đại lượng sau:
  - a)  $X = \frac{1}{2}at^2 + (v - v_0)t + x_0$  với  $x_0 = 2, v_0 = 5.14 \pm \pm 0.03, v = 7.78 \pm 0.15, a = 1 \pm 0.001, t = 5 \pm 0.5$ .
  - b)  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  với  $G = 6.78 \pm 0.01, m_1 = 12.67 \pm 0.01, m_2 = 1 \pm 0.01, r = 2.48 \pm 0.02$ .
  - c)  $D = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$  với  $x_A = 5 \pm 0.02, x_B = 3 \pm 0.02, y_A = 4 \pm 0.01, y_B = 6 \pm 0.01$ .
  - d)  $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$  với  $m = 1 \pm 0.05, v = 5 \pm 0.1, g = 9.82 \pm 0.03, h = 2 \pm 0.001$ .

## 2 Giải phương trình siêu việt

2. 1. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp chia đôi.
2. 2. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp lặp.
2. 3. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp tiếp tuyến.
2. 4. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp cát tuyến.
2. 5. Tìm khoảng phân ly nghiệm của các phương trình sau
  - a)  $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ .
  - b)  $x^3 - x - 1 = 0$ .
  - c)  $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ .
  - d)  $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ .
  - e)  $x^2 - x + \sqrt{\sin x + 2} = 0$ .
  - f)  $\frac{1}{x^2 + 1} + \sqrt{x + 2} = x^2$ .
  - g)  $\ln(x^2 + 1) = x^3 - \cos x$ .
  - h)  $\sqrt{x^2 + 2x} = 2 - x \sin x$ .
2. 6. Giải các phương trình sau bằng phương pháp chia đôi, lặp, tiếp tuyến và cát tuyến với ba bước lặp. So sánh kết quả tìm được từ các phương pháp
  - a)  $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ .
  - b)  $x^3 - x - 1 = 0$ .
  - c)  $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ .
  - d)  $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ .
  - e)  $x^2 - x + \sqrt{\sin x + 2} = 0$ .
  - f)  $\frac{1}{x^2 + 1} + \sqrt{x + 2} = x^2$ .
  - g)  $\ln(x^2 + 1) = x^3 - \cos x$ .
  - h)  $\sqrt{x^2 + 2x} = 2 - x \sin x$ .
2. 7. Giải các phương trình sau bằng phương pháp chia đôi và lặp sao cho sai số nhỏ hơn  $10^{-4}$ .
  - a)  $e^x + 2^{-x} + 2 \cos x = 6$ .
  - b)  $\ln(x - 1) + \cos(x - 1) = 0$ .
  - c)  $(x - 2)^2 - \ln x = 0$ .
  - d)  $\sin x = e^{-x}$ .
  - e)  $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2} + \frac{3}{(x + 1)^3} = 4$ .
  - f)  $2x^5 - 3x^2 - 4 = 0$ .
  - g)  $x \ln(2x + 3) = x^3 - 2$ .
  - h)  $x^3 - 2x - 6 = 0$ .
2. 8. Giải các phương trình sau bằng phương pháp tiếp tuyến và pháp tuyến sao cho sai số nhỏ hơn  $10^{-6}$ .
  - a)  $e^x + 2^{-x} + 2 \cos x = 6$ .
  - b)  $\ln(x - 1) + \cos(x - 1) = 0$ .
  - c)  $(x - 2)^2 - \ln x = 0$ .
  - d)  $\sin x = e^{-x}$ .
  - e)  $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2} + \frac{3}{(x + 1)^3} = 4$ .
  - f)  $2x^5 - 3x^2 - 4 = 0$ .
  - g)  $x \ln(2x + 3) = x^3 - 2$ .
  - h)  $x^3 - 2x - 6 = 0$ .

### 3 Giải hệ phương trình

3. 1. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp khử Gauss.

3. 2. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp phân tích LU.

3. 3. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp lặp.

3. 4. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp Seidel.

3. 5. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp và Seidel với ba bước lặp. So sánh kết quả tìm được từ hai phương pháp

$$a) \begin{cases} 5x + y + 2z = 5 \\ 3x + 8y + z = 8 \\ x - 3y + 10z = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -10x + y - z = -10 \\ 2x + 20y - z = 21 \\ -x + 3y + 16z = 18 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 0.5x + 0.01y + 0.2z = 0.4 \\ 0.2x + 0.8y + 0.1z = 0.98 \\ 0.2x + y + 2z = 3.2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^5 y^2 z^3 = 90 \\ x^2 y^7 z^2 = 82 \\ x^3 y^4 z^{10} = 18 \end{cases}$$

3. 6. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp với sai số  $10^3$  và phương pháp Seidel với sai số  $10^6$

$$a) \begin{cases} -10x + y - z = -10 \\ 2x + 20y - z = 21 \\ -x + 3y + 16z = 18 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 1.2x + 0.2y - 0.3z = 2.1 \\ x + 4y - 2.1z = 2.2 \\ -0.2x + 0.3y + 1.6z = 1.8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 10x + y + 2z = 15 \\ x + 10y + z = 28 \\ x + y + 10z = 10 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^{20} y^2 z^6 = 190 \\ x^5 y^{25} z^2 = 882 \\ x y^2 z^{16} = 320 \end{cases}$$

3. 7. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss và phân tích LU

$$a) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + 4z = 5 \\ -x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + -y = 1 \\ 2x + y - 1z = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -x + 2y + 2z = 3 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ 3x - 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 4y - 2z = 6 \\ 3y - 3z = 6 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

## 4 Xấp xỉ và nội suy

4. 1. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp nội suy đa thức tổng quát.
4. 2. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp nội suy đa thức Lagrange.
4. 3. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp nội suy đa thức Newton.
4. 4. Trình bày ý tưởng và thuật toán Phương pháp nội suy bình phương nhỏ nhất.
4. 5. Tìm giá trị của  $\bar{f}(1), \bar{f}(3), \bar{f}(6)$  biết bảng giá trị của  $f(x)$  như sau

x	0	2	5	6.5
f(x)	5	3.7	5.3	4.2

- a) Dùng đa thức bậc nhất.
  - b) Dùng đa thức bậc hai (sử dụng 3 dữ liệu đầu).
  - c) Dùng đa thức bậc hai (sử dụng 3 dữ liệu sau).
  - d) Dùng đa thức bậc ba.
4. 6. Tìm giá trị của  $\bar{f}(2), \bar{f}(4), \bar{f}(6)$  biết bảng giá trị của  $f(x)$  như sau

x	1	3	5	7
f(x)	1	8	12	16

- a) Dùng đa thức Lagrange bậc nhất.
  - b) Dùng đa thức Lagrange bậc hai (sử dụng 3 dữ liệu đầu).
  - c) Dùng đa thức Lagrange bậc hai (sử dụng 3 dữ liệu sau).
  - d) Dùng đa thức Lagrange bậc ba.
4. 7. Thực hiện lại bài tập trên sử dụng đa thức Newton.
4. 8. Sử dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất để tìm  $\bar{f}(x)$ .
- a) Biết  $\bar{f}(x) = ax + b$  tương ứng với bảng dữ liệu sau

x	1	2	3	6	7	10
f(x)	0	1	2	4	8	12

- b) Biết  $\bar{f}(x) = ae^{bx}$  tương ứng với bảng dữ liệu sau

x	1	2	3	6	7	10
f(x)	2.1	4.8	21.1	112.1	400.1	1000.2

4. 9. Xây dựng thuật toán Phương pháp nội suy bình phương nhỏ nhất.

- a) Biết  $\bar{f}(x) = a + bx + cx^2$ .
- b) Biết  $\bar{f}(x) = a + b \sin x + c \cos x$ .
- c) Biết  $\bar{f}(x) = ax^b$ .
- d) Biết  $\bar{f}(x) = ae^{bx^2}$ .

4. 10. Xây dựng hàm Spline tự nhiên bậc ba với các bộ dữ liệu sau

a) 

x	1	1.3	1.6	1.9
f(x)	2.2	8.1	12.2	17.4

b) 

x	1	3	5	7
f(x)	1	8	12	16

c) 

x	0	2	5	6.5
f(x)	5	3.7	5.3	4.2

## 5 Tích phân số

5. 1. Trình bày ý tưởng và công thức tích phân hình thang.  
 5. 2. Trình bày ý tưởng và công thức tích phân Simpson 1/3.  
 5. 3. Trình bày ý tưởng và công thức tích phân Simpson 3/8.  
 5. 4. Trình bày ý tưởng và công thức tích phân Newton - Cotes.  
 5. 5. Trình bày ý tưởng và công thức tích phân Gauss.  
 5. 6. Sử dụng công thức hình thang (6 khoảng chia), công thức Simpson 1/3 (3 khoảng chia) và công thức Simpson 3/8 (2 khoảng chia) để tính các Tích phân sau. Sau đó tìm giá trị chính xác của tích phân tìm sai số tuyệt đối.

a)  $\int_1^3 x dx.$                       b)  $\int_1^3 x^2 dx.$

c)  $\int_1^3 x^3 dx.$                       d)  $\int_1^3 x^4 dx.$

e)  $\int_1^3 x^5 dx.$                       f)  $\int_1^3 x^6 dx.$

5. 7. Sử dụng công thức hình thang (6 khoảng chia), công thức Simpson 1/3 (3 khoảng chia) và công thức Simpson 3/8 (2 khoảng chia) để tính các Tích phân sau.

a)  $\int_2^3 \frac{x^3}{x+1} dx$                       b)  $\int_1^3 \frac{\ln(x+2)}{x+1} dx.$

c)  $\int_1^3 \frac{e^x}{x+1} dx$                       d)  $\int_1^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx.$

e)  $\int_1^2 x^{2x} dx$                       f)  $\int_1^3 \frac{\sin(x^2)}{x+1} dx.$

5. 8. Cho  $\int_1^2 \frac{4x^2 + 1}{2x + 1} dx.$

- a) Tính tích phân trên bằng công thức thang với 5 khoảng chia. Đánh giá sai số  
 b) Phải chia khoảng  $[1, 2]$  thành bao nhiêu khoảng để sai số nhỏ hơn  $10^{-3}$ .

5. 9. Cho  $\int_2^3 \frac{x^3 + x}{x - 1} dx.$

- a) Tính tích phân trên bằng công thức Simpson 1/3 với 2 khoảng chia. Đánh giá sai số  
 b) Phải chia khoảng  $[2, 3]$  thành bao nhiêu khoảng để sai số nhỏ hơn  $10^{-4}$ .

5. 10. Cho  $\int_{2.2}^{3.4} \frac{x^4 - x}{x + 1} dx.$

- a) Tính tích phân trên bằng công thức Simpson 1/3 với 2 khoảng chia. Đánh giá sai số  
 b) Phải chia khoảng  $[2.2, 3.4]$  thành bao nhiêu khoảng để sai số nhỏ hơn  $10^{-6}$ .

5. 11. Sử dụng công thức tính tích phân Gauss 3 điểm nút để tính các tích phân sau

a)  $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$                       b)  $\int_{-1}^1 e^x + x^2 dx.$

c)  $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x^2 + 1} dx$                       d)  $\int_{-1}^1 \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

e)  $\int_{-1}^1 \sin x^2 + 1 dx$                       f)  $\int_{-1}^1 \cos(x^2 - x) dx.$

5. 12. Sử dụng công thức tính tích phân Gauss 3 điểm nút để tính các tích phân sau

a)  $\int_0^1 x^3 - 2x^2 dx$                       b)  $\int_{-1}^3 e^x + x^2 dx.$

c)  $\int_{-2}^2 \ln(x^2 + 1) dx$                       d)  $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 1} dx.$

## 6 Phương trình vi phân

6. 1. Trình bày ý tưởng và phương pháp lặp.
6. 2. Trình bày ý tưởng và phương pháp Euler.
6. 3. Trình bày ý tưởng và phương pháp Euler cải tiến.
6. 4. Trình bày ý tưởng và phương pháp Runge-Kutta
6. 5. Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp lặp

a)  $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad x \in [0, 1]$

b)  $\begin{cases} y' = (x+1)y \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, 3]$

c)  $\begin{cases} y' = x + xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [-2, 2]$

d)  $\begin{cases} y' = x^2 + y/x \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad x \in [1, 3]$

6. 6. Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp Euler và Euler cải tiến

a)  $\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + xy + 1} + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 0.8] \text{ với } h = 0.2 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

b)  $\begin{cases} y' = x \ln 2x^2 + y^2 + 1 \\ y(0.5) = 1 \end{cases} \quad x \in [0.5, 1.1] \text{ với } h = 0.2 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

c)  $\begin{cases} y' = xy \cos x^2 + y^2 \\ y(0.1) = 1 \end{cases} \quad x \in [0.1, 0.5] \text{ với } h = 0.1 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

d)  $\begin{cases} y' = (x+1)/y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1] \text{ với } h = 0.2 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

6. 7. Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp Runge-Kutta bậc hai và bậc ba.

a)  $\begin{cases} y' = x \sin(x + 2y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1] \text{ với } h = 0.2 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

b)  $\begin{cases} y' = x \ln(1 + 2y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 2] \text{ với } h = 0.4 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

c)  $\begin{cases} y' = \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1] \text{ với } h = 0.25 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

d)  $\begin{cases} y' = (x+y)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 0.5] \text{ với } h = 0.1 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

6. 8. Tính  $y(0.8)$  của hệ phương trình sau bằng các phương pháp đã biết.

a)  $\begin{cases} y' = x^2 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} y' = xy^2 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

6. 9. Sử dụng phương pháp Euler cải tiến để xây dựng thuật toán giải hệ phương trình vi phân. Sau đó giải các hệ phương trình sau và so sánh với nghiệm chính xác.

a)  $\begin{cases} u' = 1 + v \\ v' = -u - x \\ u(0) = 0; v(0) = 1 \end{cases} \quad \text{với nghiệm chính xác là } u = x + \sin x, v = \cos x \text{ trên khoảng } [0, 1]$

b)  $\begin{cases} u' = v/(2x^2) + 1 \\ v' = 3xu - 3x^2 - 3x \\ u(0) = 1; v(0) = 0 \end{cases} \quad \text{với nghiệm chính xác là } u = x^2 + x + 1, v = x^3 \text{ trên khoảng } [0, 1]$