

# CHƯƠNG 7

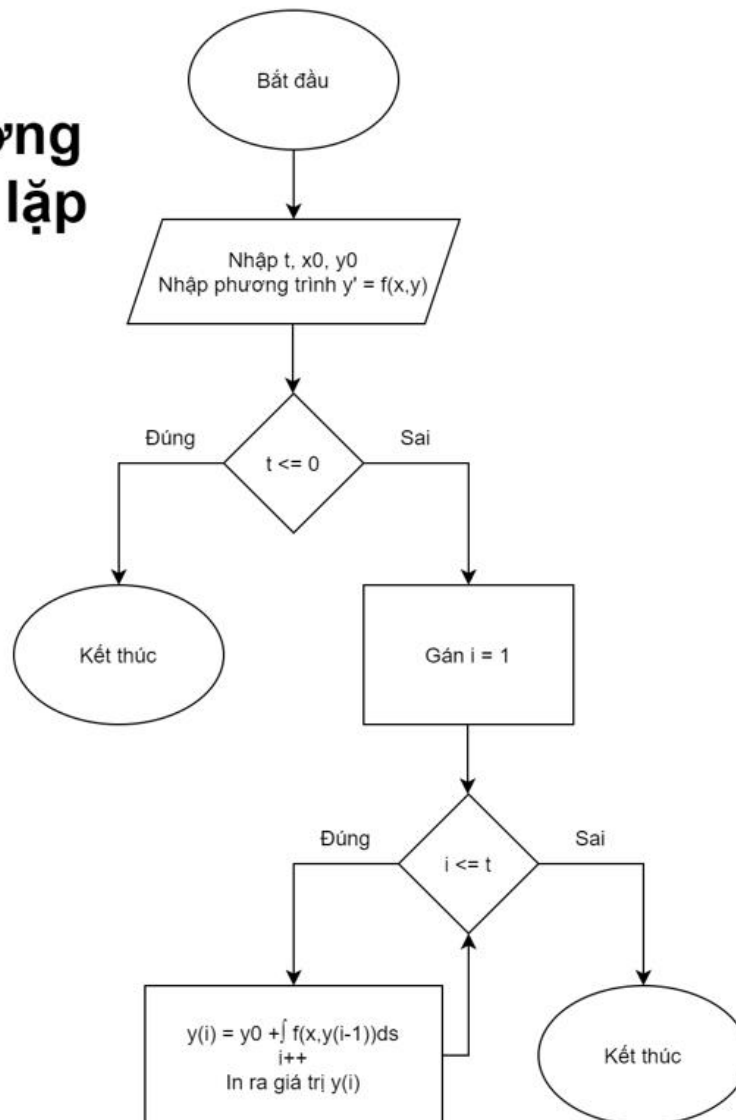
## 7.1

Lưu Đức Vũ - 19120433

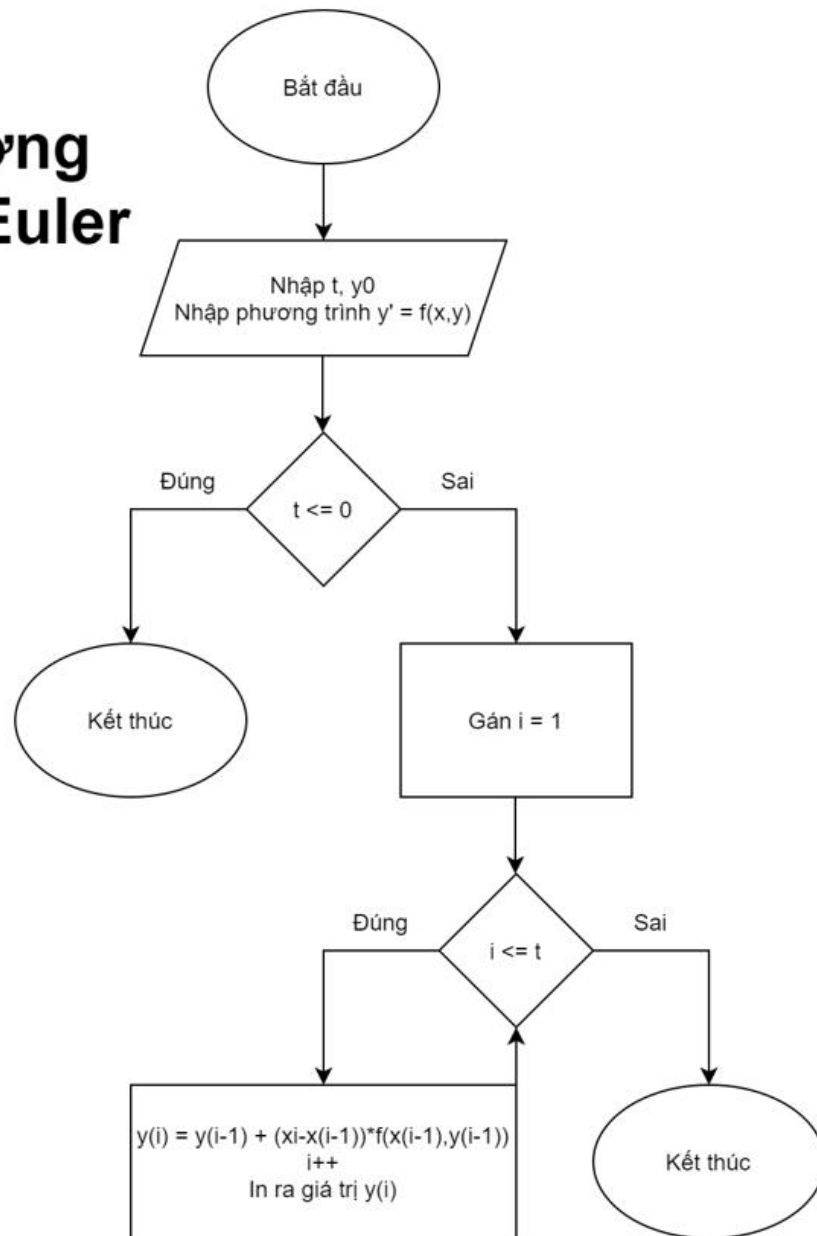
Link diagram:

<https://drive.google.com/file/d/1WhfYbsnsEnS0d8nga3s6dsikDWw0IJFW/view?usp=sharing>

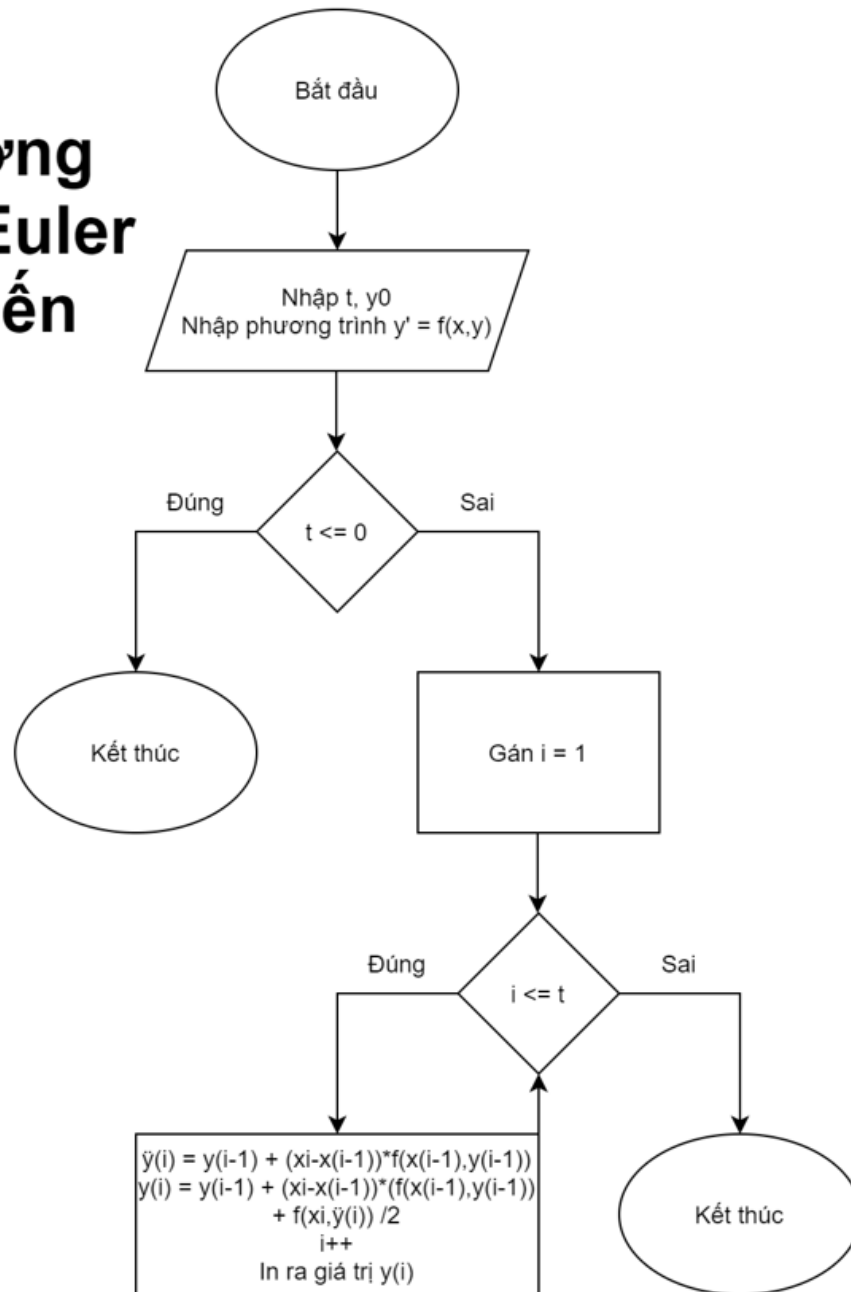
### Phương pháp lặp



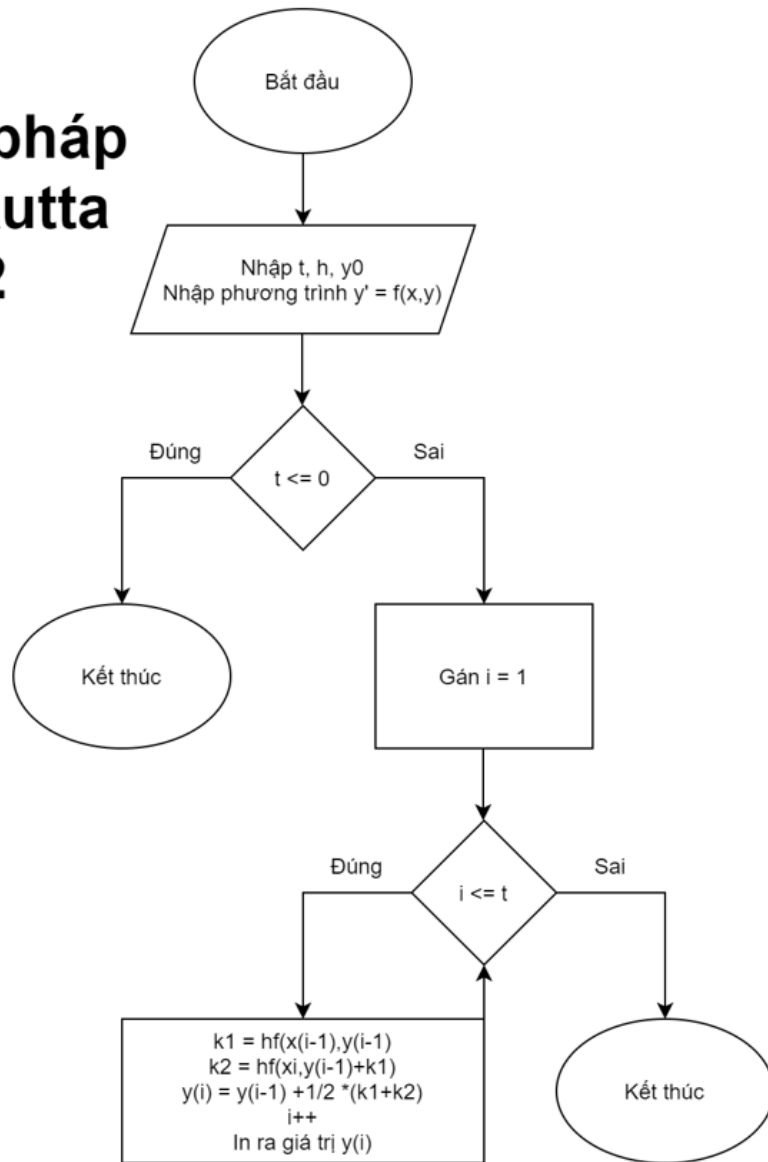
# Phương pháp Euler



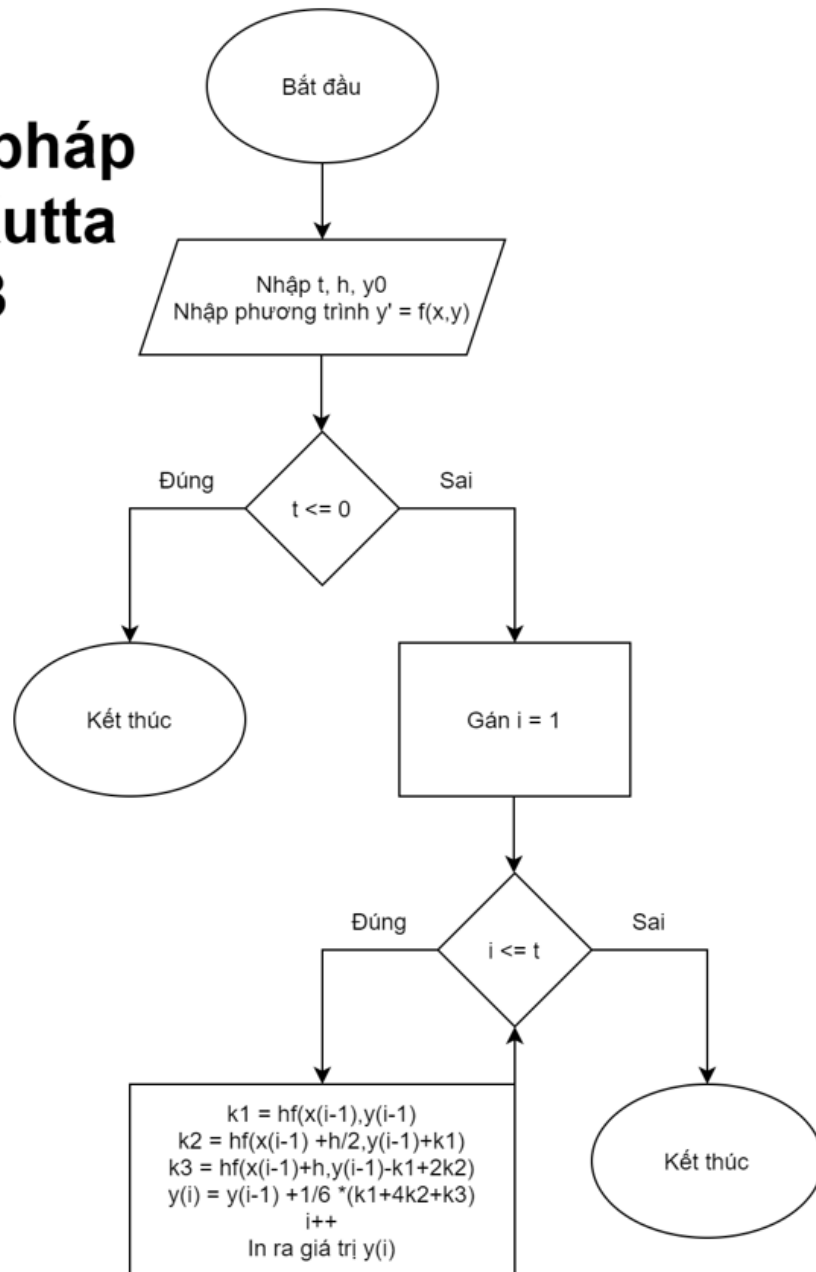
# Phương pháp Euler cải tiến



# Phương pháp Runge-Kutta bậc 2



# Phương pháp Runge-Kutta bậc 3



## 7.2

Đoàn Thu Ngân - 19120302

a)

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

$$y_0(x) = y(0) = 2$$

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x 2s ds = 2 + x^2$$

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x s(2 + s^2) ds = 2 + \int_0^x (2s + s^3) ds = 2 + x^2 + \frac{x^4}{4}$$

$$y_3(x) = 2 + \int_0^x s(2 + s^2 + \frac{s^4}{4}) ds = 2 + \int_0^x (2s + s^3 + \frac{s^5}{4}) ds = 2 + x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{24}$$

b)

$$\begin{cases} y' = (x+1)y \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, 3]$$

$$y_0(x) = y(1) = 0$$

$$y_1(x) = \int_1^x ((s+1) * 0) ds = 0$$

$$y_2(x) = \int_1^x ((s+1) * 0) ds = 0$$

$$y_3(x) = \int_1^x ((s+1) * 0) ds = 0$$

c)

$$\begin{cases} y' = x + xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [-2, 2]$$

$$y_0(x) = y(0) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2s ds = 1 + x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x [s + s(1 + s^2)^2] ds = 1 + \int_0^x (s^5 + 2s^3 + 2s) ds = 1 + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left[ s + s \left( 1 + \frac{s^6}{6} + \frac{s^4}{2} + s^2 \right)^2 \right] ds = 1 + \int_0^x \left( \frac{s^{13}}{36} + \frac{s^{11}}{6} + \frac{7s^9}{12} + \frac{4s^7}{3} + 2s^5 + 2s^3 + 2s \right) ds = 1 + \frac{x^{14}}{504} + \frac{x^{12}}{72} + \frac{7x^{10}}{120} + \frac{x^8}{6} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^4}{2} + x^2$$

d)

$$\begin{cases} y' = x^2 + \frac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad x \in [1, 3]$$

$$y_0(x) = y(1) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_1^x \left( s^2 + \frac{1}{s} \right) ds = 1 + \frac{x^3}{3} + \ln x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_1^x \left( s^2 + \frac{1 + \frac{s^3}{3} + \ln s}{s} \right) ds = 1 + \int_1^x \left( \frac{1}{s} + \frac{4}{3}s^2 + \frac{\ln s}{s} \right) ds = 1 + \ln x + \frac{4x^3}{9} + \frac{\ln^2 x}{2}$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 1 + \int_1^x \left( s^2 + \frac{1 + \ln s + \frac{4s^3}{9} + \frac{\ln^2 s}{2}}{s} \right) ds = 1 + \int_1^x \left( s^2 + \frac{1}{s} + \frac{\ln s}{s} + \frac{4}{9}s^2 + \frac{\ln^2 s}{2s} \right) ds \\ &= 1 + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{13x^3}{27} + \frac{\ln^3 x}{6} \end{aligned}$$

### 7.3

Ngô Trọng Đức - 19120061

Chương 7

Bài 7.3

a)  $y' = \sqrt{x^2 + xy + 1} + y$   $x \in [0, 0.8]$ ,  $h = 0.2$ , sai số  $\leq 10^{-5}$   
 $y(0) = 1$

PP Euler

Xây dựng phân hoạch  $[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8]$

$h_0 = 0.2$ ;  $y_1 = 1 + 0.2(\sqrt{0^2 + 0 \cdot 1 + 1} + 1) = 1.4$

$h_1 = 0.2$ ;  $y_2 = 1.4 + 0.2(\sqrt{0.2^2 + 0.2 \cdot 1.4 + 1} + 1.4) = 1.9098$

$h_2 = 0.2$ ;  $y_3 = 1.9098 + 0.2(\sqrt{0.4^2 + 0.4 \cdot 1.9098 + 1} + 1.9098) = 2.5692$

$h_3 = 0.2$ ;  $y_4 = 2.5692 + 0.2(\sqrt{0.6^2 + 0.6 \cdot 2.5692 + 1} + 2.5692) = 3.4237$

PP Euler cải tiến

$h_0 = 0.2$ ;  $\tilde{y}_1 = 1 + 0.2(\sqrt{0^2 + 0 \cdot 1 + 1} + 1) = 1.4$

$y_1 = 1 + \frac{0.2}{2} \left( 2 + \frac{7 + \sqrt{33}}{5} \right) = 1.4549$

$h_1 = 0.2$ ;  $\tilde{y}_2 = 1.4549 + 0.2(\sqrt{0.2^2 + 0.2 \cdot 1.4549 + 1} + 1.4549) = 1.9766$

$y_2 = 1.4549 + 0.1 \left( 2.6086 + \sqrt{0.4^2 + 0.4 \cdot 1.9766 + 1} + 1.9766 \right) = 2.0531$

$h_2 = 0.2$ ;  $\tilde{y}_3 = 2.0531 + 0.2(\sqrt{0.4^2 + 0.4 \cdot 2.0531 + 1} + 2.0531) = 2.7452$

$y_3 = 2.0531 + 0.1(3.1607 + 4.4793) = 2.8471$

$h_3 = 0.2$ ;  $\tilde{y}_4 = 2.8471 + 0.2(\sqrt{0.6^2 + 0.6 \cdot 2.8471 + 1} + 2.8471) = 3.7668$

$y_4 = 2.8471 + 0.1(4.5987 + 5.9240) = 3.8994$



$$b) \begin{cases} y' = x \ln x^2 + y^2 + 1 \\ y(0.5) = 1 \end{cases} \quad x \in [0.5, 1.1], h = 0.2, \text{ sai số } \leq 10^{-5}$$

Xây dựng phân hoạch  $[0.5 \quad 0.7 \quad 0.9 \quad 1.1]$

PP Euler

$$h_0 = 0.2, \quad y_1 = 1 + 0.2(0.5 \ln 0.5^2 + 1^2 + 1) = 1.3307$$

$$h_1 = 0.2, \quad y_2 = 1.3307 + 0.2(0.7 \ln 0.7^2 + 1.3307^2 + 1) = 1.8820$$

$$h_2 = 0.2, \quad y_3 = 1.8820 + 0.2(0.9 \ln 0.9^2 + 1.8820^2 + 1) = 2.8772$$

PP Euler cải tiến

$$h_0 = 0.2, \quad \tilde{y}_1 = 1 + 0.2(0.5 \ln 0.5^2 + 1^2 + 1) = 1.3307$$

$$y_1 = 1 + 0.1(1.6534 + 2.7566) = 1.441$$

$$h_1 = 0.2, \quad \tilde{y}_2 = 1.441 + 0.2(0.7 \ln 0.7^2 + 1.441^2 + 1) = 2.0535$$

$$y_2 = 1.441 + 0.1(2.0623 + 5.6510) = 2.3123$$

$$h_2 = 0.2, \quad \tilde{y}_3 = 2.3123 + 0.2(0.9 \ln 0.9^2 + 2.3123^2 + 1) = 3.6685$$

$$y_3 = 2.3123 + 0.1(6.7809 + 15.43) = 4.5334$$



$$c) \begin{cases} y' = xy \cos x^2 + y^2 & x \in [0,1,0.5], h=0,1, \text{ sai số } \leq 10^{-5} \\ y(0,1) = 1 \end{cases}$$

Xây dựng phân hoạch  $[0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5]$

PP Euler

$$h_0 = 0,1; y_1 = 1 + 0,1(0,1 \cdot 1 \cdot \cos 0,1^2 + 1^2) = 1,11$$

$$h_1 = 0,1; y_2 = 1,11 + 0,1(0,2 \cdot 1,11 \cdot \cos 0,2^2 + 1,11^2) = 1,2554$$

$$h_2 = 0,1; y_3 = 1,2554 + 0,1(0,3 \cdot 1,2554 \cdot \cos 0,3^2 + 1,2554^2) = 1,4505$$

$$h_3 = 0,1; y_4 = 1,4505 + 0,1(0,4 \cdot 1,4505 \cdot \cos 0,4^2 + 1,4505^2) = 1,7182$$

PP Euler cải tiến

$$h_0 = 0,1; \tilde{y}_1 = 1 + 0,1(0,1 \cdot 1 \cdot \cos 0,1^2 + 1^2) = 1,11$$

$$y_1 = 1,1 + 0,05(1,1 + 1,4539) = 1,1277$$

$$h_1 = 0,1; \tilde{y}_2 = 1,1277 + 0,1(0,2 \cdot 1,1277 \cos 0,2^2 + 1,1277^2) = 1,2774$$

$$y_2 = 1,1277 + 0,05(1,1277 + 2,0134) = 1,3032$$

$$h_2 = 0,1; \tilde{y}_3 = 1,3032 + 0,1(0,3 \cdot 1,3032 \cos 0,3^2 + 1,3032^2) = 1,512$$

$$y_3 = 1,3032 + 0,05(2,0877 + 2,8832) = 1,5517$$

$$h_3 = 0,1; \tilde{y}_4 = 1,5517 + 0,1(0,4 \cdot 1,5517 \cos 0,4^2 + 1,5517^2) = 1,8538$$

$$y_4 = 1,5517 + 0,05(3,0205 + 4,3347) = 1,9195$$



$$d) \begin{cases} y' = (x+1)/y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1], h = 0,2, \text{ sai số } < 10^{-5}$$

\*Euler:

Xây dựng phân hoạch  $[0 \ 0,2 \ 0,4 \ 0,6 \ 0,8 \ 1]$

$$h_0 = 0,2; y_1 = 1 + 0,2 \cdot (0+1)/1^2 = 1,2$$

$$h_1 = 0,2; y_2 = 1,2 + 0,2 \cdot (0,2+1)/1,2^2 = 1,3667$$

$$h_2 = 0,2; y_3 = 1,3667 + 0,2 \cdot (0,4+1)/1,3667^2 = 1,5166$$

$$h_3 = 0,2; y_4 = 1,5166 + 0,2 \cdot (0,6+1)/1,5166^2 = 1,6557$$

$$h_4 = 0,2; y_5 = 1,6557 + 0,2 \cdot (0,8+1)/1,6557^2 = 1,7870$$

\*Euler cải tiến:

$$h_0 = 0,2; \tilde{y}_1 = 1 + 0,2 \cdot (0+1)/1^2 = 1,2$$

$$y_1 = 1 + 0,1 \cdot (1 + 0,8333) = 1,1833$$

$$h_1 = 0,2; \tilde{y}_2 = 1,1833 + 0,2 \cdot (0,2+1)/1,1833^2 = 1,3547$$

$$y_2 = 1,1833 + 0,1 \cdot (0,857 + 0,7629) = 1,3453$$

$$h_2 = 0,2; \tilde{y}_3 = 1,3453 + 0,2 \cdot (0,4+1)/1,3453^2 = 1,5$$

$$y_3 = 1,3453 + 0,1 \cdot (0,7786 + 0,7111) = 1,4938$$

$$h_3 = 0,2; \tilde{y}_4 = 1,4938 + 0,2 \cdot (0,6+1)/1,4938^2 = 1,6372$$

$$y_4 = 1,4938 + 0,1 \cdot (0,717 + 0,6715) = 1,6327$$

$$h_4 = 0,2; \tilde{y}_5 = 1,6327 + 0,2 \cdot (0,8+1)/1,6327^2 = 1,7677$$

$$y_5 = 1,6327 + 0,1 \cdot (0,6752 + 0,64) = 1,7642$$

## 7.4

### 19120325-Đinh Huỳnh Tiến Phú

a)

$$k_1 = h_0 * f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = h_0 * f(x_0 + h_0/2, y_0 + k_1/2) = 0.0173$$

$$k_3 = h_0 * f(x_0 + h_0, y_0 - k_1 + 2k_2) = 0.0306$$

$$y_1 = y_0 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.0166$$

$$k_1 = h_1 * f(x_1, y_1) = 0$$

$$k_2 = h_1 * f(x_1 + h_1/2, y_1 + k_1/2) = 0.0169$$

$$k_3 = h_1 * f(x_1 + h_1, y_1 - k_1 + 2k_2) = 0.0298$$

$$y_2 = y_1 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.0329$$

$$k_1 = h_2 * f(x_2, y_2) = 0.0307$$

$$k_2 = h_2 * f(x_2 + h_2/2, y_2 + k_1/2) = 0.0407$$

$$k_3 = h_2 * f(x_2 + h_2, y_2 - k_1 + 2k_2) = 0.0435$$

$$y_3 = y_2 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.0724$$

$$k_1 = h_3 * f(x_3, y_3) = 0.0450$$

$$k_2 = h_3 * f(x_3 + h_3/2, y_3 + k_1/2) = 0.0437$$

$$k_3 = h_3 * f(x_3 + h_3, y_3 - k_1 + 2k_2) = 0.0369$$

$$y_4 = y_3 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.1151$$

b)

$$k_1 = h_0 * f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = h_0 * f(x_0 + h_0/2, y_0 + k_1/2) = 0.0879$$

$$k_3 = h_0 * f(x_0 + h_0, y_0 - k_1 + 2k_2) = 0.1935$$

$$y_1 = y_0 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.0908$$

$$k_1 = h_1 * f(x_1, y_1) = 0$$

$$k_2 = h_1 * f(x_1 + h_1/2, y_1 + k_1/2) = 0.0926$$

$$k_3 = h_1 * f(x_1 + h_1, y_1 - k_1 + 2k_2) = 0.2028$$

$$y_2 = y_1 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.1864$$

$$k_1 = h_2 * f(x_2, y_2) = 0.1945$$

$$k_2 = h_2 * f(x_2 + h_2/2, y_2 + k_1/2) = 0.3052$$

$$k_3 = h_2 * f(x_2 + h_2, y_2 - k_1 + 2k_2) = 0.4596$$

$$y_3 = y_2 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.4989$$

$$k_1 = h_3 * f(x_3, y_3) = 0.4434$$

$$k_2 = h_3 * f(x_3 + h_3/2, y_3 + k_1/2) = 0.5964$$

$$k_3 = h_3 * f(x_3 + h_3, y_3 - k_1 + 2k_2) = 0.8180$$

$$y_4 = y_3 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 2.1067$$

c)

$$k_1 = h_0 * f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = h_0 * f(x_0 + h_0/2, y_0 + k_1/2) = 0.0308$$

$$k_3 = h_0 * f(x_0 + h_0, y_0 - k_1 + 2k_2) = 0.0558$$

$$y_1 = y_0 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.0298$$

$$k_1 = h_1 * f(x_1, y_1) = 0$$

$$k_2 = h_1 * f(x_1 + h_1/2, y_1 + k_1/2) = 0.0299$$

$$k_3 = h_1 * f(x_1 + h_1, y_1 - k_1 + 2k_2) = 0.0545$$

$$y_2 = y_1 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.0588$$

$$k_1 = h_2 * f(x_2, y_2) = 0.0559$$

$$k_2 = h_2 * f(x_2 + h_2/2, y_2 + k_1/2) = 0.0771$$

$$k_3 = h_2 * f(x_2 + h_2, y_2 - k_1 + 2k_2) = 0.0910$$

$$y_3 = y_2 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.1347$$

$$k_1 = h_3 * f(x_3, y_3) = 0.0922$$

$$k_2 = h_3 * f(x_3 + h_3/2, y_3 + k_1/2) = 0.1034$$

$$k_3 = h_3 * f(x_3 + h_3, y_3 - k_1 + 2k_2) = 0.1103$$

$$y_4 = y_3 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.2374$$

d)

$$k_1 = h_0 * f(x_0, y_0) = 0.1000$$

$$k_2 = h_0 * f(x_0 + h_0/2, y_0 + k_1/2) = 0.1210$$

$$k_3 = h_0 * f(x_0 + h_0, y_0 - k_1 + 2k_2) = 0.1543$$

$$y_1 = y_0 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.1230$$

$$k_1 = h_1 * f(x_1, y_1) = 0.1261$$

$$k_2 = h_1 * f(x_1 + h_1/2, y_1 + k_1/2) = 0.1528$$

$$k_3 = h_1 * f(x_1 + h_1, y_1 - k_1 + 2k_2) = 0.1967$$

$$y_2 = y_1 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.2787$$

$$k_1 = h_2 * f(x_2, y_2) = 0.1901$$

$$k_2 = h_2 * f(x_2 + h_2/2, y_2 + k_1/2) = 0.2322$$

$$k_3 = h_2 * f(x_2 + h_2, y_2 - k_1 + 2k_2) = 0.3073$$

$$y_3 = y_2 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.5164$$

$$k_1 = h_3 * f(x_3, y_3) = 0.2946$$

$$k_2 = h_3 * f(x_3 + h_3/2, y_3 + k_1/2) = 0.3662$$

$$k_3 = h_3 * f(x_3 + h_3, y_3 - k_1 + 2k_2) = 0.5082$$

$$y_4 = y_3 + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 = 1.8943$$

## 7.5

Phan Đăng Diễm Uyên - 19120426

$$\text{a. } \begin{cases} y' &= x^2 + xy \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

**Sử dụng phương pháp lặp:**

Ta lần lượt thực hiện các phép lặp sau:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (s^2 + s \cdot 1) ds = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left( s^2 + s \left( 1 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 \right) \right) ds = 1 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 1 + \int_0^x \left( s^2 + s \left( 1 + \frac{1}{15}s^5 + \frac{1}{8}s^4 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 \right) \right) ds \\ &= 1 + \frac{1}{105}x^7 + \frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Ta có:

$$y(0,8) \approx y_3(0,8)$$

$$\begin{aligned} &\approx 1 + \frac{1}{105} \cdot (0,8)^7 + \frac{1}{48} \cdot (0,8)^6 + \frac{1}{15} (0,8)^5 + \frac{1}{8} (0,8)^4 + \frac{1}{3} \cdot (0,8)^3 + \frac{1}{2} \cdot (0,8)^2 \\ &\approx 1,5712 \end{aligned}$$



**Sử dụng phương pháp Euler:**

Sử dụng phương pháp Euler với phân hoạch  $[0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8]$ . Khi đó:

$$h_0 = 0,2, x_1 = x_0 + h_0 = 0 + 0,2 = 0,2$$

$$y_1 \approx 1 + (0,2 - 0) \cdot (0^2 + 0,1) \approx 1$$

$$h_1 = 0,2, x_2 = x_1 + h_1 = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$y_2 \approx 1 + (0,4 - 0,2) \cdot (0,2^2 + 0,2 \cdot 1) \approx 1,048$$

$$h_2 = 0,2, x_3 = x_2 + h_2 = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$y_3 \approx 1,048 + (0,6 - 0,4) \cdot (0,4^2 + 0,4 \cdot 1,048) \approx 1,1638$$

$$h_3 = 0,2, x_4 = x_3 + h_3 = 0,6 + 0,2 = 0,8$$

$$y_4 \approx 1,1638 + (0,8 - 0,6) \cdot (0,6^2 + 0,6 \cdot 1,1638) \approx 1,3755$$

Ta có:

$$y(0,8) \approx y_4 \approx 1,3755$$

**Sử dụng phương pháp Euler cải tiến:**

Sử dụng phương pháp Euler cải tiến với phân hoạch  $[0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8]$ . Khi đó:

$$h_0 = 0,2, x_1 = x_0 + h_0 = 0 + 0,2 = 0,2$$

$$\widetilde{y}_1 \approx 1 + (0,2 - 0) \cdot (0^2 + 0,1) \approx 1$$

$$y_1 \approx 1 + \frac{0,2 - 0}{2} (0^2 + 0,1 + 0,2^2 + 0,2 \cdot 1) \approx 1,024$$

$$h_1 = 0,2, x_2 = x_1 + h_1 = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$\widetilde{y}_2 \approx 1,024 + (0,4 - 0,2) \cdot (0,2^2 + 0,2 \cdot 1,024) \approx 1,0730$$

$$y_2 \approx 1,024 + \frac{0,4 - 0,2}{2} (0,2^2 + 0,2 \cdot 1,024 + 0,4^2 + 0,4 \cdot 1,0730) \approx 1,1074$$

$$h_2 = 0,2, x_3 = x_2 + h_2 = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$\widetilde{y}_3 \simeq 1,1074 + (0,6 - 0,4) \cdot (0,4^2 + 0,4 \cdot 1,1074) \simeq 1,2280$$

$$y_3 \simeq 1,1074 + \frac{0,6 - 0,4}{2} (0,4^2 + 0,4 \cdot 1,1074 + 0,6^2 + 0,6 \cdot 1,2280) \simeq 1,2774$$

$$h_3 = 0,2, x_4 = x_3 + h_3 = 0,6 + 0,2 = 0,8$$

$$\widetilde{y}_4 \simeq 1,2774 + (0,8 - 0,6) \cdot (0,6^2 + 0,6 \cdot 1,2774) \simeq 1,5027$$

$$y_4 \simeq 1,2774 + \frac{0,8 - 0,6}{2} (0,6^2 + 0,6 \cdot 1,2774 + 0,8^2 + 0,8 \cdot 1,5027) \simeq 1,5743$$

Ta có:

$$y(0,8) \simeq y_4 \simeq 1,5743$$

### **Sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc ba:**

Sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc ba với phân hoạch  $[0 \ 0,2 \ 0,4 \ 0,6 \ 0,8]$ . Khi đó:

$$h_0 = 0,2, x_1 = x_0 + h_0 = 0 + 0,2 = 0,2$$

$$k_1 = 0,2 \cdot (0^2 + 0,1) = 0$$

$$k_2 = 0,2 \cdot \left( \left( 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right)^2 + \left( 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \right) = 0,022$$

$$k_3 = 0,2 \cdot ((0 + 0,2)^2 + (0 + 0,2) \cdot (1 - 0 + 2 \cdot 0,022)) = 0,0498$$

$$y_1 \simeq 1 + \frac{1}{6} (0 + 4 \cdot 0,022 + 0,0498) \simeq 1,0230$$

$$h_1 = 0,2, x_2 = x_1 + h_1 = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$k_1 = 0,2 \cdot (0,2^2 + 0,2 \cdot 1,0230) = 0,0489$$

$$k_2 = 0,2 \cdot \left( \left( 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right)^2 + \left( 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1,0230 + \frac{1}{2} \cdot 0,0489 \right) \right) = 0,0808$$

$$k_3 = 0,2 \cdot ((0,2 + 0,2)^2 + (0,2 + 0,2) \cdot (1,0230 - 0,0489 + 2 \cdot 0,0808)) = 0,1229$$

$$y_2 \simeq 1,0230 + \frac{1}{6}(0,0489 + 4 \cdot 0,0808 + 0,1229) \simeq 1,1055$$

$$h_2 = 0,2, x_3 = x_2 + h_2 = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$k_1 = 0,2 \cdot (0,4^2 + 0,4 \cdot 1,1055) = 0,1204$$

$$k_2 = 0,2 \cdot \left( \left( 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right)^2 + \left( 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1,1055 + \frac{1}{2} \cdot 0,1204 \right) \right) = 0,1666$$

$$k_3 = 0,2 \cdot ((0,4 + 0,2)^2 + (0,4 + 0,2) \cdot (1,1055 - 0,1204 + 2 \cdot 0,1666)) = 0,2302$$

$$y_3 \simeq 1,1055 + \frac{1}{6}(0,1204 + 4 \cdot 0,1666 + 0,2302) \simeq 1,275$$

$$h_3 = 0,2, x_4 = x_3 + h_3 = 0,6 + 0,2 = 0,8$$

$$k_1 = 0,2 \cdot (0,6^2 + 0,6 \cdot 1,275) = 0,225$$

$$k_2 = 0,2 \cdot \left( \left( 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right)^2 + \left( 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1,275 + \frac{1}{2} \cdot 0,225 \right) \right) = 0,2923$$

$$k_3 = 0,2 \cdot ((0,6 + 0,2)^2 + (0,6 + 0,2) \cdot (1,275 - 0,225 + 2 \cdot 0,2923)) = 0,3895$$

$$y_4 \simeq 1,275 + \frac{1}{6}(0,225 + 4 \cdot 0,2923 + 0,3895) \simeq 1,5723$$

Ta có:

$$y(0,8) \simeq y_4 \simeq 1,5723$$

$$\text{b. } \begin{cases} y' &= xy^2 + xy \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

**Sử dụng phương pháp lặp:**

Ta thực hiện lần lượt các phép lặp sau:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (s \cdot 1^2 + s \cdot 1) ds = 1 + x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (s \cdot (1 + s^2)^2 + s \cdot (1 + s^2)) ds = 1 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + x^2$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 1 + \int_0^x \left( s \cdot \left( 1 + \frac{1}{6}s^6 + \frac{3}{4}s^4 + s^2 \right)^2 + s \cdot \left( 1 + \frac{1}{6}s^6 + \frac{3}{4}s^4 + s^2 \right) \right) ds \\ &= 1 + \frac{1}{504}x^{14} + \frac{1}{48}x^{12} + \frac{43}{480}x^{10} + \frac{1}{4}x^8 + \frac{13}{24}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + x^2 \end{aligned}$$

Ta có:

$$y(0,8) \simeq y_3(0,8)$$

$$\begin{aligned} &\simeq 1 + \frac{1}{504} \cdot (0,8)^{14} + \frac{1}{48} \cdot (0,8)^{12} + \frac{43}{480} \cdot (0,8)^{10} + \frac{1}{4} \cdot (0,8)^8 + \frac{13}{24} \cdot (0,8)^6 \\ &\quad + \frac{3}{4} \cdot (0,8)^4 + (0,8)^2 \end{aligned}$$

$$\simeq 2,1423$$

**Sử dụng phương pháp Euler:**

Sử dụng phương pháp Euler với phân hoạch  $[0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8]$ . Khi đó:

$$h_0 = 0,2, x_1 = x_0 + h_0 = 0 + 0,2 = 0,2$$

$$y_1 \approx 1 + (0,2 - 0) \cdot (0,1^2 + 0,1) \approx 1$$

$$h_1 = 0,2, x_2 = x_1 + h_1 = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$y_2 \approx 1 + (0,4 - 0,2) \cdot (0,2 \cdot 1^2 + 0,2 \cdot 1) \approx 1,08$$

$$h_2 = 0,2, x_3 = x_2 + h_2 = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$y_3 \approx 1,08 + (0,6 - 0,4) \cdot (0,4 \cdot 1,08^2 + 0,4 \cdot 1,08) \approx 1,2597$$

$$h_3 = 0,2, x_4 = x_3 + h_3 = 0,6 + 0,2 = 0,8$$

$$y_4 \approx 1,2597 + (0,8 - 0,6) \cdot (0,6 \cdot 1,2597^2 + 0,6 \cdot 1,2597) \approx 1,6013$$

Ta có:

$$y(0,8) \approx y_4 \approx 1,6013$$

**Sử dụng phương pháp Euler cải tiến:**

Sử dụng phương pháp Euler cải tiến với phân hoạch  $[0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8]$ . Khi đó:

$$h_0 = 0,2, x_1 = x_0 + h_0 = 0 + 0,2 = 0,2$$

$$\widetilde{y}_1 \approx 1 + (0,2 - 0) \cdot (0,1^2 + 0,1) \approx 1$$

$$y_1 \approx 1 + \frac{0,2 - 0}{2} (0,1^2 + 0,1 + 0,2 \cdot 1^2 + 0,2 \cdot 1) \approx 1,04$$

$$h_1 = 0,2, x_2 = x_1 + h_1 = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$\widetilde{y}_2 \approx 1,04 + (0,4 - 0,2) \cdot (0,2 \cdot 1,04^2 + 0,2 \cdot 1,04) \approx 1,1249$$

$$y_2 \approx 1,04 + \frac{0,4 - 0,2}{2} (0,2 \cdot 1,04^2 + 0,2 \cdot 1,04 + 0,4 \cdot 1,1249^2 + 0,4 \cdot 1,1249) \approx 1,1780$$

$$h_2 = 0,2, x_3 = x_2 + h_2 = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$\widetilde{y}_3 \simeq 1,1780 + (0,6 - 0,4) \cdot (0,4 \cdot 1,1780^2 + 0,4 \cdot 1,1780) \simeq 1,3833$$

$$y_3 \simeq 1,1780 + \frac{0,6 - 0,4}{2} (0,4 \cdot 1,1780^2 + 0,4 \cdot 1,1780 + 0,6 \cdot 1,3833^2 + 0,6 \cdot 1,3833) \\ \simeq 1,4784$$

$$h_3 = 0,2, x_4 = x_3 + h_3 = 0,6 + 0,2 = 0,8$$

$$\widetilde{y}_4 \simeq 1,4784 + (0,8 - 0,6) \cdot (0,6 \cdot 1,4784^2 + 0,6 \cdot 1,4784) \simeq 1,9181$$

$$y_4 \simeq 1,4784 + \frac{0,8 - 0,6}{2} (0,6 \cdot 1,4784^2 + 0,6 \cdot 1,4784 + 0,8 \cdot 1,9181^2 + 0,8 \cdot 1,9181) \\ \simeq 2,1460$$

Ta có:

$$y(0,8) \simeq y_4 \simeq 2,1460$$

#### **Sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc ba:**

Sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc ba với phân hoạch  $[0 \ 0,2 \ 0,4 \ 0,6 \ 0,8]$ . Khi đó:

$$h_0 = 0,2, x_1 = x_0 + h_0 = 0 + 0,2 = 0,2$$

$$k_1 = 0,2 \cdot (0,1^2 + 0,1) = 0$$

$$k_2 = 0,2 \cdot \left( \left( 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right)^2 + \left( 0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \right) = 0,04$$

$$k_3 = 0,2 \cdot \left( (0 + 0,2) \cdot (1 - 0 + 2 \cdot 0,04)^2 + (0 + 0,2) \cdot (1 - 0 + 2 \cdot 0,04) \right) = 0,0899$$

$$y_1 \simeq 1 + \frac{1}{6} (0 + 4 \cdot 0,04 + 0,0899) \simeq 1,0417$$

$$h_1 = 0,2, x_2 = x_1 + h_1 = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$k_1 = 0,2. (0,2.1,0417^2 + 0,2.1,0417) = 0,0851$$

$$k_2 = 0,2. \left( \left( 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1,0417 + \frac{1}{2} \cdot 0,0851 \right)^2 \right. \\ \left. + \left( 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1,0417 + \frac{1}{2} \cdot 0,0851 \right) \right) = 0,1356$$

$$k_3 = 0,2. \left( (0,2 + 0,2). (1,0417 - 0,0851 + 2.0,1356)^2 \right. \\ \left. + (0,2 + 0,2). (1,0417 - 0,0851 + 2.0,1356) \right) = 0,2188$$

$$y_2 \simeq 1,0417 + \frac{1}{6}(0,0851 + 4.0,1356 + 0,2188) \simeq 1,1828$$

$$h_2 = 0,2, x_3 = x_2 + h_2 = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$k_1 = 0,2. (0,4.1,1828^2 + 0,4.1,1828) = 0,2065$$

$$k_2 = 0,2. \left( \left( 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1,1828 + \frac{1}{2} \cdot 0,2065 \right)^2 \right. \\ \left. + \left( 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \right) \cdot \left( 1,1828 + \frac{1}{2} \cdot 0,2065 \right) \right) = 0,2940$$

$$k_3 = 0,2. \left( (0,4 + 0,2). (1,1828 - 0,2065 + 2.0,2940)^2 \right. \\ \left. + (0,4 + 0,2). (1,1828 - 0,2065 + 2.0,2940) \right) = 0,4814$$

$$y_3 \simeq 1,1828 + \frac{1}{6}(0,2065 + 4.0,2940 + 0,4814) \simeq 1,4935$$

$$h_3 = 0,2, x_4 = x_3 + h_3 = 0,6 + 0,2 = 0,8$$

$$k_1 = 0,2. (0,6.1,4935^2 + 0,6.1,4935) = 0,4469$$

$$k_2 = 0,2. \left( \left( 0,6 + \frac{1}{2}.0,2 \right). \left( 1,4935 + \frac{1}{2}.0,4469 \right)^2 \right. \\ \left. + \left( 0,6 + \frac{1}{2}.0,2 \right). \left( 1,4935 + \frac{1}{2}.0,4469 \right) \right) = 0,6531$$

$$k_3 = 0,2. ((0,6 + 0,2). (1,4935 - 0,4469 + 2.0,6531)^2 \\ + (0,6 + 0,2). (1,4935 - 0,4469 + 2.0,6531)) = 1,2622$$

$$y_4 \simeq 1,4935 + \frac{1}{6}(0,4469 + 4.0,6531 + 1,2622) \simeq 2,2138$$

Ta có:

$$y(0,8) \simeq y_4 \simeq 2,2138$$

## 7.6

Trần Thái Bảo - 19120458

Ta có phương trình biệt diễn nhiệt độ của quả cầu

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -2.2067 * 10^{-12}(T^4 - 81 * 10^8) & t \geq 0 (\text{với } t \text{ là số phút}) \\ T(0) = 1200^\circ K \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp Euler cải tiến với phân hoạch [0 2 4 6 8]

$$h_0 = 2,$$

$$\tilde{T}_1 = 1200 + 2 * -2.2067 * 10^{-12}(1200^4 - 81 * 10^8) = 1190.8841$$



$$T_1 = 1200 + (-2.2067 * 10^{-12}(1200^4 - 81 * 10^8) + -2.2067 * 10^{-12}(1190.8841^4 - 81 * 10^8) = 1191.0216$$

$$h_1 = 2$$

$$\widetilde{T}_2 = 1191.0216 + 2 * -2.2067 * 10^{-12}(1191.0216^4 - 81 * 10^8) = 1182.1765$$

$$T_2 = 1191.0216 + (-2.2067 * 10^{-12}(1191.0216^4 - 81 * 10^8) + -2.2067 * 10^{-12}(1182.1765^4 - 81 * 10^8) = 1182.307$$

$$h_2 = 2$$

$$\widetilde{T}_3 = 1182.307 + 2 * -2.2067 * 10^{-12}(1182.307^4 - 81 * 10^8) = 1173.719$$

$$T_3 = 1182.307 + (-2.2067 * 10^{-12}(1182.307^4 - 81 * 10^8) + -2.2067 * 10^{-12}(1173.719^4 - 81 * 10^8) = 1173.8429$$

$$h_3 = 2$$

$$\widetilde{T}_1 = 1173.8429 + 2 * -2.2067 * 10^{-12}(1173.8429^4 - 81 * 10^8) = 1165.3879$$

$$T_1 = 1173.8429 + (-2.2067 * 10^{-12}(1173.8429^4 - 81 * 10^8) + -2.2067 * 10^{-12}(1165.3879^4 - 81 * 10^8) = 1165.4967$$

Vậy nhiệt độ của quả cầu sau 8 phút là  $1165.4967^{\circ}K$

## 7.7

Huỳnh Tấn Thọ - 19120383

Ta có phương trình vi phân:  $Q' = 12 - 4Q$ ;  $h = 1$ ;  $t = [0 \ 1 \ 2 \ 3]$ ;  $Q(0) = 0$ .

Sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 3.

$$h_0 = 1; k_1 = 12 - 4 \cdot 0 = 12; k_2 = 12 - 4(0 + 6) = -12;$$

$$k_3 = 12 - 4(0 - 12 + 2 \cdot (-12)) = 156; y_1 = 0 + \frac{1}{6}(12 + 4(-12) + 156) = 20$$

$$h_1 = 1; k_1 = 12 - 4 \cdot 20 = -68; k_2 = 12 - 4(20 - 34) = 68;$$

$$k_3 = 12 - 4(20 + 68 + 2 \cdot 68) = -884; y_2 = 20 + \frac{1}{6}(-68 + 4 \times 0.68 - 884) = -\frac{280}{3}$$

$$h_2 = 1; k_1 = 12 + 4 \times \frac{280}{3} = \frac{1156}{3}; k_2 = 12 - 4\left(-\frac{280}{3} + \frac{1156}{6}\right) = -\frac{1156}{3};$$

$$k_3 = 12 - 4\left(-\frac{280}{3} - \frac{1156}{3} - 2 \times \frac{1156}{3}\right) = \frac{15028}{3};$$

$$y_3 = -\frac{280}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1156}{3} - 4 \times \frac{1156}{3} + \frac{15028}{3}\right) = \frac{4940}{9} \approx 548,8889$$

Vậy diện tích tại thời điểm  $t=3$  có giá trị là 548,8889