

1 Tính toán và sai số

1. 1. Tính sai số tuyệt đối và tương đối của các đại lượng sau
 - a) $a^* = 0.9, \bar{a} = 0.95$.
 - b) $b^* = 5.27, \bar{b} = 5.21$.
 - c) $c^* = 15000, \bar{c} = 15024$.
 - d) $d^* = 30, \bar{d} = 28$.
1. 2. Tìm số chính xác, số xấp xỉ, sai số tương đối, sai số tuyệt đối nếu biết:
 - a) $a^* = 7.56, \Delta a = 0.35$.
 - b) $b^* = 2.87, \delta b = 2.5\%$.
 - c) $\bar{c} = 1.156, \delta c = 0.05$.
 - d) $\Delta d = 3.72, \delta d = 1.05\%$.
1. 3. Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của các đại lượng sau:
 - a) $S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}$. Chọn S^* là giá trị làm tròn 4 số thập phân và \bar{S} là giá trị làm tròn 2 số thập phân.
 - b) $P = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$. Chọn P^* ứng với $n = 6$ và \bar{P} ứng với $n = 4$.
 - c) $\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots)$. Chọn π^* ứng với 5 số hạng đầu và $\bar{\pi}$ ứng với 3 số hạng đầu.
 - d) $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Chọn e^* ứng với $n = 5000$ và \bar{e} ứng với $n = 1000$.
1. 4. Tìm công thức tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của các đại lượng sau biết a, b, c là tham số (không có sai số) còn x, y, z là biến số (có sai số):
 - a) $A = ax + by^2 + \frac{z^3}{c}$.
 - b) $B = \frac{a+b}{x+y} + \frac{c}{z^2}$.
 - c) $C = a \sin bx - y \cos cz$.
 - d) $D = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
1. 5. Tìm giá trị hàm số u (lấy 3 chữ số thập phân) và tính sai số tuyệt đối giới hạn, sai số tương đối giới hạn do việc làm tròn số tại các điểm cho trước
 - a) $u = \ln(x_1 + x_2^2)$ tại $x_1 = 0,976, x_2 = 1,132$.
 - b) $u = ye^x + x^2$ tại $x = 1,265; y = 1,493$.
 - c) $u = x \sin y - xy$ tại $x = 0,095; y = 2,643$.
 - d) $u = \frac{x + \cos x}{1 + y}$ tại $x = -0,693; y = -0,386$.

1. 6. Thực hiện các yêu cầu sau:

- a) Đường kính của một đường tròn được đo chính xác tới $1mm$ là $d = 0,842m$. Tìm diện tích hình tròn đó.
 b) Khi đo một góc người ta được giá trị $27^{\circ}5'18''$. Biết phép đo chính xác tới $1''$. Tính sin của góc đó.
 c) Một hình trụ có bán kính $R = 2m$, chiều cao $h = 3m$. Hỏi ΔR và Δh bằng bao nhiêu để thể tích V có sai số lớn nhất là $0.1m^3$.
 d) Một hình hộp chữ nhật có kích thước cạnh là chiều dài $a = 5 \pm 0.2$, chiều rộng $b = 3 \pm 0.1$ và chiều cao $c = 2.5 \pm 0.15$. Đơn vị là m . Hãy tính
 i) Diện tích mặt đáy. ii) Diện tích mặt bên. iii) Diện tích toàn phần. iv) Thể tích hình hộp.

1. 7. Tìm giá trị xấp xỉ và sai số tuyệt đối, tương đối của các đại lượng sau:

- a) Tọa độ chất điểm
- X
- phụ thuộc vận tốc
- v
- , gia tốc
- a
- và thời gian
- t
- :

$$X = \frac{1}{2}at^2 + (v - v_0)t + x_0 \text{ với } x_0 = 2, v_0 = 5.14 \pm 0.03, v = 7.78 \pm 0.15, a = 1 \pm 0.001, t = 5 \pm 0.5.$$

- b) Lực hấp dẫn
- F
- phụ thuộc hằng số trọng trường
- G
- , khối lượng hai vật chất
- m_1, m_2
- và khoảng cách
- r
- :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ với } G = 6.78 \pm 0.01, m_1 = 12.67 \pm 0.01, m_2 = 1 \pm 0.01, r = 2.48 \pm 0.02.$$

- c) Khoảng cách
- D
- giữa hai chất điểm
- $A(x_A, y_A)$
- và
- $B(x_B, y_B)$
- :

$$D = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \text{ với } x_A = 5 \pm 0.02, x_B = 3 \pm 0.02, y_A = 4 \pm 0.01, y_B = 6 \pm 0.01.$$

- d) Năng lượng vật chất
- E
- phụ thuộc khối lượng
- m
- , vận tốc
- v
- và vị trí
- h
- của vật chất:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \text{ với } m = 1 \pm 0.05, v = 5 \pm 0.1, g = 9.82 \pm 0.03, h = 2 \pm 0.001.$$

1. 8. Trong một lần đi ăn tối, nhân viên phục vụ yêu cầu bạn phải thanh toán hoá đơn 369.700 đồng. Bạn đưa cho nhân viên đó 500.000 đồng.

- a) Nếu nhân viên trả lại tiền thừa cho bạn là 130.000 đồng, người này đã lấy thêm bao nhiêu phần trăm trên hóa đơn của bạn?

- b) Nếu nhân viên trả lại tiền thừa cho bạn là 100.000 đồng, người này đã lấy mất của bạn bao nhiêu? bạn có chấp nhận sự sai sót này không nếu phí phục vụ thường được tính là 10% của hóa đơn.

1. 9. Một học sinh dùng cân và đồng hồ đếm giây để đo độ cứng k của một lò xo. Dùng cân để cân vật nặng khối lượng $m = 100g \pm 2\%$. Gắn vật vào lò xo và kích thích cho con lắc dao động rồi dùng đồng hồ đếm giây đo thời gian của một vật dao động cho kết quả $T = 2s \pm 1\%$. Bỏ qua sai số của π (coi như bằng 0). Sai số tương đối của phép đo là bao nhiêu? Biết

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

1. 10. Trong giờ thực hành một học sinh dùng vôn kế lý tưởng đo điện áp 2 đầu điện trở R và tụ điện C của một đoạn mạch R, C mắc nối tiếp. Kết quả đo được là $U_R = 14 \pm 1,0$ (V); $U_C = 48 \pm 1,0$ (V). Điện áp hai đầu đoạn mạch là bao nhiêu? Biết điện áp hai đầu đoạn mạch U được tính theo công thức

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2.$$

1. 11. Một học sinh tiến hành thí nghiệm đo bước sóng ánh sáng λ bằng phương pháp giao thoa khe Young. Học sinh đo được khoảng cách hai khe là $a = 1.20 \pm 0.03$ (mm), khoảng cách từ hai khe đến màn $D = 1.60 \pm 0.05$ (m), và độ rộng của $n = 10$ khoảng vân là $L = 8.0 \pm 0.16$ (mm). Tính sai số tương đối của phép đo biết độ dài bước sóng ánh sáng được tính bởi

$$\frac{L}{n} = \frac{\lambda D}{a}.$$

2 Giải phương trình siêu việt

2. 1. Vẽ sơ đồ khối cho các giải thuật sau

- Phương pháp chia đôi.
- Phương pháp lặp.
- Phương pháp tiếp tuyến.
- Phương pháp cát tuyến.

2. 2. Giải các phương trình sau bằng phương pháp chia đôi, lặp, tiếp tuyến và cát tuyến với ba bước lặp. So sánh kết quả tìm được từ các phương pháp

- $x^3 - 2x - 6 = 0$.
- $x^4 - x^2 + 5 = 0$
- $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$.
- $2x^5 - 3x^2 - 4 = 0$.

2. 3. Giải các phương trình sau bằng phương pháp chia đôi, lặp, tiếp tuyến và cát tuyến với ba bước lặp. So sánh kết quả tìm được từ các phương pháp

- $2x = \sin(x + 1)$
- $x^2 - \sin(3x) - 40 = 0$
- $x \cos x - 2x^3 + 2 = 0$
- $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$.

2. 4. Giải các phương trình sau bằng phương pháp chia đôi, lặp, tiếp tuyến và cát tuyến với ba bước lặp. So sánh kết quả tìm được từ các phương pháp

- $\frac{1}{x^2 + 1} + \sqrt{x + 2} = x^2$.
- $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2} + \frac{3}{(x + 1)^3} = 4$.
- $x^2 - x + \sqrt{\sin x + 2} = 0$.
- $\sqrt{x^2 + 2x} = 2 - x \sin x$.

2. 5. Giải các phương trình sau bằng phương pháp chia đôi, lặp, tiếp tuyến và cát tuyến với ba bước lặp. So sánh kết quả tìm được từ các phương pháp

- $e^x - 3x^2 + 3x - 2 = 0$.
- $e^{2x} - x^2 - 20 = 0$
- $(x - 2)^2 - \ln x = 0$.
- $\ln(x^2 + 1) + x - 30 = 0$.

2. 6. Giải các phương trình sau bằng phương pháp chia đôi, lặp, tiếp tuyến và cát tuyến với ba bước lặp. So sánh kết quả tìm được từ các phương pháp

- $e^x + 2^{-x} + 2 \cos x = 6$.
- $\sin x = e^{-x}$.
- $\ln(x - 1) + \cos(x - 1) = 0$.
- $\ln(x^2 + 1) = x^3 - \cos x$.

2. 7. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 100$ với t là thời gian tính theo giây. Chất điểm đạt giá trị $s = 3m$ tại thời điểm nào?

2. 8. Phương trình sau cho biết độ axit của dung dịch magiê hydroxit trong axit clohydric:

$$A(x) = x^3 + 3,5x^2 - 40 = 0$$

trong đó x là nồng độ ion hydronium. Tìm nồng độ ion cho dung dịch bão hòa (độ axit bằng không).

2. 9. Bạn đang làm việc cho một công ty lắp ráp máy tính khởi nghiệp và đã được yêu cầu xác định số lượng máy tính tối thiểu mà cửa hàng sẽ phải bán để kiếm lợi nhuận. Phương trình cung cấp số lượng máy tính tối thiểu được bán sau khi xem xét tổng chi phí và tổng doanh thu là nghiệm n của phương trình sau:

$$f(n) = 40n^{1.5} - 875n + 35000 = 0$$

2. 10. Người ta đổ $30 m^3$ nước vào một bình chứa nước. Tình độ cao lượng nước h (từ đáy bình cho đến mặt thoáng) trong hai trường hợp:

a) Bình hình cầu có bán kính $R = 2.5 m$. Biết thể tích lượng nước trong trường hợp này được tính bởi $V = 2h\pi(3R - h)$

b) Bình hình trụ được đặt nằm ngang, có bán kính $R = 2 m$ và chiều dài $L = 5 m$. Biết thể tích lượng nước trong trường hợp này được tính bởi $V = L\left(\frac{\pi}{2}R^2 - R^2 \arcsin \frac{h}{r} - \frac{h}{2}(R^2 - h^2)\right)$

2. 11. Cho đường kính của bánh xe đạp là 28 inches, và Van bánh xe (cách tâm bánh xe là 12 inches) nằm ở vị trí thấp nhất của bánh. Bánh xe lăn hướng tới phía trước 1 đoạn $N = 20 inches$. Tính góc quay θ của Van xe so với vị trí? Biết quan hệ giữa đoạn dịch chuyển và góc quay là $N = 14\theta - 12 \sin \theta$.

2. 12. Một siêu thị điện máy có số lượng khách một ngày được biểu diễn bởi phương trình

$$N(t) = 30t - t^2 + 2 \sin t + \cos t, \quad t \in [6, 23]$$

trong đó t là thời gian tính theo giờ và N là lượng khách hàng.

a) Siêu thị có 40 nhân viên tư vấn và mỗi nhân viên này có thể tư vấn đồng thời cho 5 khách hàng. Tìm khoảng thời gian mà số nhân viên phải làm việc quá công suất (tư vấn cho hơn 5 người 1 lúc).

b) Tìm thời điểm mà số khách hàng là lớn nhất.

2. 13. Một nhà kho được sử dụng để chứa các sản phẩm nông nghiệp. Người ta thống kê được lượng nhập kho $f(t)$ và lượng xuất kho $g(t)$ trong tháng tư như sau:

$$f(t) = 1, 1t + 5 \sin(t/10) + 100 \quad \text{và} \quad g(t) = 0, 9t - 3 \cos(t/10) + 90, \quad t \in [0, 30].$$

trong đó t là thời gian tính theo ngày và f, g là lượng hàng hóa tính theo tấn.

a) Biết nhà kho chỉ chứa được tối đa 15 tấn hàng, hỏi nhà kho có thể đáp ứng nhu cầu công việc hay không?

b) Có thể đổi nhà kho khác với sức chứa 10 tấn hoặc 20 tấn hay không?

2. 14. Một cửa hàng cung ứng thức ăn nhanh mỗi tháng nhập $a(t)$ thịt gà, $b(t)$ khoai tây và $c(t)$ bột mì. Các hàm số được cho bởi

$$a(t) = (40t - \frac{t^2}{2} + 10) \sin(1 + \frac{t}{20}) + 300,$$

$$b(t) = (50t - \frac{t^2}{3} + 20) \sin(2 + \frac{t}{15}) + 1200, \quad t \in [0, 30]$$

$$c(t) = (45t - \frac{t^2}{3} + 40) \cos(2 + \frac{t}{15}) + 1300$$

trong đó a, b, c tính theo kilogram và t là thời gian tính theo ngày.

a) Số lượng nguyên liệu của hàng thường sử dụng mỗi ngày là 700 kí thịt gà, 1000 kí khoai tây và 800 kí bột mì. Hỏi tại thời điểm nào thì lượng cung cấp đáp ứng đúng nhu cầu (xét riêng mỗi loại).

b) Biết giá nguyên liệu là $30K/1kg$ thịt gà, $15K/1kg$ khoai tây và $10K/1kg$ bột mì. Hỏi thời điểm nào của hàng phải trả số tiền lớn nhất cho các nguyên liệu.

3 Giải hệ phương trình

3. 1. Vẽ sơ đồ khối cho các giải thuật sau

- Phương pháp khử Gauss.
- Phương pháp phân tích LU.
- Phương pháp lặp.
- Phương pháp Seidel.

3. 2. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss và phân tích LU. So sánh kết quả từ hai pp.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x & +y & -z & = 1 \\ x & -y & +4z & = 5 \\ -x & +3y & +4z & = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x & +y & +2z & = 1 \\ 3x & -y & & = 1 \\ 2x & +y & -1z & = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -x & +2y & +2z & = 3 \\ 2x & -3y & +z & = -4 \\ 3x & -2y & -z & = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x & +4y & -2z & = 6 \\ & 3y & -3z & = 6 \\ x & +2y & +z & = 1 \end{cases}$$

3. 3. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp và Seidel với ba bước lặp. So sánh kết quả từ hai pp.

$$\text{a) } \begin{cases} 5x & +y & +2z & = 5 \\ 3x & +8y & +z & = 8 \\ x & -3y & +10z & = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -10x & +y & -z & = -10 \\ 2x & +20y & -z & = 21 \\ -x & +3y & +16z & = 18 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x & -7y & +z & = -8 \\ 4x & -y & -2z & = -4 \\ 2x & +3y & +6z & = 26 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 0.5x & +0.01y & +0.2z & = 0.4 \\ 0.2x & +0.8y & +0.1z & = 0.98 \\ 0.2x & +y & +2z & = 3.2 \end{cases}$$

3. 4. Giải hệ phương trình sau.

$$\text{a) } \begin{cases} x^5 y^2 z^2 & = 90 \\ x^3 y^7 z^2 & = 82 \\ x^3 y^4 z^{10} & = 18 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} xy^4 z^2 & = 9 \\ x^5 y z^2 & = 12 \\ xyz^4 & = 18 \end{cases}$$

3. 5. Một trường tiểu học có kế hoạch thưởng cho học sinh vào cuối học kì như sau: Một học sinh giỏi được thưởng 1 bộ SGK, 10 quyển tập và 10 cây bút, một học sinh khá được thưởng 10 quyển tập và 5 cây bút, một học sinh trung bình được thưởng 5 quyển tập và 5 cây bút. Trường học đó đã đặt mua 98 bộ SGK, 4405 quyển tập và 3125 cây bút. Hỏi trường đó có bao nhiêu học sinh giỏi, học sinh khá và học sinh trung bình.

3. 6. Một cửa hàng đồ chơi bán thanh lý 300 *kg* đồ chơi thuộc ba mẫu *X*, *Y* và *Z*. Họ chia ngẫu nhiên số hàng thành ba túi có khối lượng như nhau. Biết túi thứ nhất có 112 mẫu *X*, 145 mẫu *Y* và 137 mẫu *Z*. Túi thứ hai có 87 mẫu *X*, 158 mẫu *Y* và 99 mẫu *Z*. Túi thứ ba có 143 mẫu *X*, 158 mẫu *Y* và 65 mẫu *Z*. Hỏi khối lượng của một món đồ chơi là bao nhiêu?

3. 7. Một công ty xây dựng đang phụ trách xây đồng thời ba công trình. Công trình thứ nhất cần 1.218 *kg* cát, 418 *kg* gỗ và 716 *kg* sắt. Công trình thứ hai cần 818 *kg* cát, 1518 *kg* gỗ và 312 *kg* sắt. Công trình thứ ba cần 614 *kg* cát, 527 *kg* gỗ và 1029 *kg* sắt. Biết số tiền chi cho nguyên liệu từng công trình là 2, 39 tỷ, 1, 76 tỷ và 3, 15 tỷ. Hãy tính giá thành từng loại vật liệu.

3. 8. Một nhà máy sản xuất 3 loại sản phẩm A, B và C. Mỗi sản phẩm phải qua 3 công đoạn cắt, lắp ráp và đóng gói với thời gian yêu cầu cho mỗi công đoạn được liệt kê như sau:

	Sản phẩm A	Sản phẩm B	Sản phẩm C
Cắt	0,6 giờ	1 giờ	1,5 giờ
Lắp ráp	0,6 giờ	0,9 giờ	1,2 giờ
Đóng gói	0,2 giờ	0,3 giờ	0,5 giờ

Các bộ phận cắt, lắp ráp và đóng gói có số giờ công nhiều nhất trong mỗi tuần là 380, 330 và 120 giờ công. Hỏi nhà máy phải sản xuất số lượng mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu theo mỗi tuần để nhà máy hoạt động hết năng lượng của nhà máy.

3. 9. Một xí nghiệp cần sản xuất 3 loại bánh: bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo. Lượng nguyên liệu đường, đậu cho mỗi loại, lượng dự trữ nguyên liệu, tiền lãi cho một bánh mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Bánh đậu xanh	Bánh thập cẩm	Bánh dẻo	Dự trữ
Đường	0,04 kg	0,06 kg	0,05 kg	284 kg
Đậu	0,07 kg	0 kg	0,02 kg	165 kg
Lãi	3.000 đồng	2.000 đồng	2.500 đồng	

Tìm số bánh mỗi loại mà xí nghiệp sản xuất được sao cho tiền lãi thu được là 6.540.000 đồng.

3. 10. Một cửa hàng bán áo sơ mi, quần âu nam và váy nữ. Ngày thứ nhất bán được 12 áo, 21 quần và 18 váy, doanh thu 5.349.000 đồng. Ngày thứ hai bán được 16 áo, 24 quần và 12 váy, doanh thu là 5.600.000 đồng. Ngày thứ ba bán được 24 áo, 15 quần và 12 váy, doanh thu 5.259.000 đồng. Hỏi giá bán mỗi áo, mỗi quần và mỗi váy là bao nhiêu?

3. 11. Andrea bán ảnh tại các hội chợ nghệ thuật. Cô định giá các bức ảnh theo kích cỡ: ảnh nhỏ có giá 10 đô la, ảnh trung bình có giá 15 đô la và ảnh lớn có giá 40 đô la. Cô thường bán nhiều ảnh nhỏ, số ảnh nhỏ bán bằng tổng số ảnh vừa và lớn cộng lại. Cô cũng bán số ảnh vừa gấp đôi số ảnh lớn. Một gian hàng tại hội chợ nghệ thuật thường có doanh thu là 300 đô la. Nếu doanh số của cô ấy diễn ra như bình thường, cô ấy phải bán bao nhiêu ảnh cho mỗi loại?

4 Xấp xỉ và nội suy

4. 1. Vẽ sơ đồ khối cho các giải thuật sau

- Phương pháp nội suy đa thức tổng quát.
- Phương pháp nội suy đa thức Lagrange.
- Phương pháp nội suy đa thức Newton.
- Phương pháp nội suy bình phương nhỏ nhất.

4. 2. Tìm giá trị của $\bar{f}(1)$, $\bar{f}(3)$, $\bar{f}(6)$ bằng (i) đa thức bậc nhất và (ii) đa thức bậc ba biết bảng giá trị của $f(x)$ được cho như sau

a)

x	0	2	5	6.5
f(x)	5	3.7	5.3	4.2

b)

x	0	2	5	6.5
f(x)	5	3.7	5.3	4.2

4. 3. Tìm giá trị của $\bar{f}(2)$, $\bar{f}(4)$, $\bar{f}(6)$ bằng (i) đa thức Lagrange bậc ba và (ii) đa thức Newton bậc ba biết bảng giá trị của $f(x)$ như sau

a)

x	1	3	5	7
f(x)	1	12	8	16

b)

x	1,5	3,4	5,1	6,8
f(x)	2,2	7,6	4,8	9,5

4. 4. Nhiệt độ buổi sáng của TP.HCM được đo và viết vào bảng sau

Thời điểm	6	8	10	12
Nhiệt độ	25	30	32	36

- Tìm hàm số biểu diễn nhiệt độ buổi sáng theo thời gian của TP.HCM.
- Cho biết nhiệt độ vào lúc 8h30 và 11h00.

4. 5. Lượng khách đến mua trà sữa của một nhãn hiệu nổi tiếng trong ngày được thống kê như sau

Thời điểm	9	10	11	12
Số lượng	28	49	42	25

- Tìm hàm số biểu diễn lượng khách đến mua trà sữa theo thời gian của nhãn hiệu đó.
- Cho biết lượng khách đến lúc 9h30 và 10h45.
- Có thể tính toán thời điểm nào lượng khách đến là đồng nhất?

4. 6. Thời lượng xem TiVi của thanh thiếu niên được thống kê theo độ tuổi như sau

Độ tuổi	9	12	15	18
Thời lượng	3	4	2,5	1,5

- Tìm hàm số biểu diễn thời lượng xem TiVi theo độ tuổi.
- Tìm thời lượng xem TiVi của độ tuổi 13 và 16.
- Có thể dự đoán thời lượng xem TiVi của độ tuổi 8 và 20?

4. 7. Xây dựng hàm Spline tự nhiên bậc ba với các bộ dữ liệu sau

a)

x	1	1.3	1.6	1.9
f(x)	2.2	8.1	12.2	17.4

b)

x	1	3	5	7
f(x)	1	8	12	16

c)

x	0	2	5	6.5
f(x)	5	3.7	5.3	4.2

4. 8. Tọa độ của một chiếc xe trong quá trình chạy thử được ghi lại bởi bảng

t (giây)	0	5	10	20
s (mét)	0	10	28	50

Hãy xây dựng hàm số biểu diễn tọa độ của xe theo thời gian dựa theo bảng trên.

4. 9. Trong đồ họa máy tính, người ta cần vẽ một đường cong "trơn" đi qua các điểm $O(0, 0)$, $A(2, 3)$, $B(5, 1)$ và $C(7, 2)$. Hãy xây dựng hàm số biểu diễn đường cong thỏa yêu cầu.

4. 10. Sử dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất để tìm $\bar{f}(x)$.

a) Biết $\bar{f}(x) = ax + b$ tương ứng với bảng dữ liệu sau

x	1	2	3	6	7	10
f(x)	0	1	2	4	8	12

b) Biết $\bar{f}(x) = ae^{bx}$ tương ứng với bảng dữ liệu sau

x	1	2	3	6	7	10
f(x)	2.1	4.8	21.1	112.1	400.1	1000.2

4. 11. Xây dựng thuật toán Phương pháp nội suy bình phương nhỏ nhất.

a) Biết $\bar{f}(x) = a + bx + cx^2$.

b) Biết $\bar{f}(x) = a + b \sin x + c \cos x$.

c) Biết $\bar{f}(x) = ax^b$.

d) Biết $\bar{f}(x) = ae^{bx^2}$.

4. 12. Người ta thống kê quan hệ số lượng bài tập về nhà và số điểm thi cuối kì của 10 sinh viên và thu được kết quả sau

Số BTVN	59	91	130	87	157	121	68	183	103	115
Điểm CK	2	4	6,5	4,5	8	5,5	3	10	5	6

a) Hãy xấp xỉ kết quả trên bằng đường thẳng $y = ax + b$.

b) Dự đoán xem nếu sinh viên muốn đạt ít nhất 8 điểm thì người đó phải làm ít nhất bao nhiêu bài tập về nhà.

4. 13. Người ta thống kê quan hệ giữa thu nhập hàng tháng và chi phí dành cho giải trí của 10 người độ tuổi 40 và thu được kết quả sau

Thu nhập	15	12	19	25	18	30	22	8	17	21
Chi phí	3	2,2	4,3	8,7	4,6	13,7	10,3	1,3	3,6	7,2

a) Hãy xấp xỉ kết quả trên bằng đường cong $y = ae^{bx}$.

b) Dự đoán xem nếu một người có thu nhập tầm 20 triệu thì họ sẽ dành bao nhiêu tiền cho hoạt động giải trí.

5 Đạo hàm số

5.1. Cho bảng giá trị

x	20	25	30
f(x)	2,9957	3,2189	3,4012

- a) Tính gần đúng đạo hàm f tại $x = 25$ bằng công thức sai phân tiến và ba điểm giữa.
b) Tính sai số của chúng biết $f(x) = \ln x$.

5.2. Cho hai bảng giá trị

x	0,45	0,5	0,55
f(x)	0,4350	0,4794	0,5227

x	0,4	0,5	0,6
f(x)	0,3894	0,4794	0,5646

- a) Tính gần đúng đạo hàm f tại $x = 0,5$ bằng công thức sai phân tiến và ba điểm giữa theo từng bảng.
b) Tính sai số của chúng biết $f(x) = \sin x$. Bảng nào cho kết quả tốt hơn? Tại sao?

5.3. Cho bảng giá trị

x	1,2	1,4	1,6
f(x)	-1,1520	-1,1760	-1,0240

- a) Tính gần đúng đạo hàm cấp hai của f tại $x = 1,4$.
b) Tính sai số của nó biết $f(x) = x^3 - 2x^2$.

5.4. Cho hai bảng giá trị

x	2,4	2,5	2,6
f(x)	10,36800	12,5	14,8720

x	2,3	2,5	2,7
f(x)	8,4640	12,5	17,4960

- a) Tính gần đúng đạo hàm cấp hai f tại $x = 2,5$ theo từng bảng.
b) Tính sai số của chúng biết $f(x) = 2x^3 - 3x^2$. Bảng nào cho kết quả tốt hơn? Tại sao?

5.5. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm x_0 cho trước

(i) $f(x) = \frac{e^{x^2} + 2 \sin x}{\cos x + x^2 \ln x}, x_0 = 1.$

(ii) $g(x) = \frac{1}{e^{\cos x} + \ln \sin x}, x_0 = 2.$

- a) dùng phương pháp sai phân tiến với $h = 0,05$.
b) dùng phương pháp sai phân lùi với $h = 0,05$.
c) dùng phương pháp ba điểm giữa với $h = 0,05$.

5.6. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau tại các điểm x_0 cho trước

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}, x_0 = 9, h = 0.1.$

b) $g(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2 - x} + e^x}{\sqrt{x}}, x_0 = 4, h = 0.2.$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{2x - e^x}{\sin x + \cos x}}, x_0 = 1.5, h = 0.1.$

5. 7. Độ sâu của bãi biển tại resort A sau khi đo lường được thống kê bởi

Khoảng cách (m)	0	10	20	30	40	50
Độ sâu (m)	0	0,8	1,3	1,8	2,1	3

Hãy xác định độ dốc của bãi biển này. Bãi biển này có nguy hiểm cho người tắm biển hay không.

5. 8. Một lượng vi khuẩn được nuôi trong phòng thí nghiệm. Cứ cách 3 giờ người ta đếm số lượng của chúng và được kết quả như sau

Thời gian t	0	3	6	9
Số lượng y	12.387	57.284	139.42	339.671

- a) Hãy tính tốc độ phát triển (số lượng / giờ) của nhóm vi khuẩn này.
 b) Hãy tính gia tốc phát triển của nhóm vi khuẩn này, có kết luận là nhóm vi khuẩn này phát triển nhanh dần đều hay không?

5. 9. Doanh thu của một công ty trong hai năm liên tiếp được thể hiện bởi bảng

Thời gian (tháng)	3	6	9	12
Doanh thu (tỉ)	9,648	10,834	11,897	11,234
Thời gian (tháng)	3	6	9	12
Doanh thu (tỉ)	10,217	10,365	12,765	11,698

Hãy so sánh tốc độ phát triển (dựa trên doanh thu) tại cùng thời điểm trong hai năm của công ty.

5. 10. Vận tốc của một tên lửa được cho bởi

$$v(t) = 2000 \ln \left(\frac{14 \cdot 10^4}{14 \cdot 10^4 - 2100t} \right) - 9,8t \text{ với } 0 \leq t \leq 30$$

trong đó t là thời gian tính theo giây và v là vận tốc tính theo mét. Hãy tìm gia tốc của tên lửa tại $t = 16$ s

- a) sử dụng sai phân tiến với $\Delta t = 2$ s.
 b) sử dụng sai phân lùi với $\Delta t = 2$ s.
 c) sử dụng ba điểm giữa với $\Delta t = 2$ s.

5. 11. Quãng đường y (tính theo km) và thời gian t (tính theo giây) đi được của một tên lửa được ghi lại dưới dạng bảng sau:

Thời gian t	0	25	50	75	100	125
Quãng đường y	0	32	58	78	92	100

Hãy tính vận tốc và gia tốc của tên lửa tại mỗi thời điểm.

5. 12. Tọa độ của tàu lửa TN2 được ghi nhận trong hành trình Bắc Nam như sau

Địa Điểm	Sài gòn	Dĩ An	Biên Hòa	Long Khánh	Gia Ray	Suối Khiết	Bình Thuận
Khoảng cách	0	27	42	92	115	148	200
Thời gian	13h10	13h40	13h55	15h09	15h29	15h55	17h04

- a) Hãy tính vận tốc của xe lửa tại mỗi địa điểm.
 b) Xe lửa chạy nhanh nhất ở vùng nào, và chậm nhất ở vùng nào?

6 Tích phân số

6. 1. Vẽ sơ đồ khối cho các giải thuật sau

- Phương pháp tích phân hình thang.
- Phương pháp tích phân Simpson 1/3.
- Phương pháp tích phân Simpson 3/8.
- Phương pháp tích phân Gauss.

6. 2. Tính tích phân của hàm số sau bằng công thức hình thang, công thức simpson 1/3 và 3/8

a)

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15,42	34,21	45,87	39,67	32,85	35,04	24,75

b)

x	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	15,42	34,21	45,87	39,67	32,85	35,04	24,75

6. 3. Sử dụng công thức hình thang (6 khoảng chia), công thức simpson 1/3 (3 khoảng chia) và công thức simpson 3/8 (2 khoảng chia) để tính các tích phân sau.

a) $\int_0^2 x dx$. b) $\int_0^2 x^2 dx$. c) $\int_0^2 x^3 dx$. d) $\int_0^2 x^4 dx$.

6. 4. Sử dụng công thức hình thang (6 khoảng chia), công thức simpson 1/3 (3 khoảng chia) và công thức simpson 3/8 (2 khoảng chia) để tính các tích phân sau.

a) $\int_2^3 \frac{x^3}{e^x + 1} dx$. b) $\int_1^3 \frac{\ln(x+2)}{x+1} dx$. c) $\int_0^4 \sin(x^2 + 1) dx$. d) $\int_{-1}^3 \ln(x^2 + 1) dx$.

6. 5. Cho $\int_1^2 \sin x dx$.

- Tính tích phân trên bằng công thức thang với 3 khoảng chia. Đánh giá sai số
- Tính tích phân trên bằng công thức Simpson 3/8. Đánh giá sai số. So sánh với kết quả câu a.

6. 6. Khi download một tập tin, người ta thống kê được lượng thông tin thu được theo thời gian như sau

Thời điểm (phút)	0	3	5	9	10	13
Thông tin (MB/phút)	19,2761	35,6719	33,9505	25,7476	41,2512	32,5018

Tìm dung lượng của tập tin, biết tập tin được download hoàn tất sau 13 phút.

6. 7. Ở một công ty nhuộm vải, người ta đo được lượng nước thải trong một buổi sáng như sau

Thời điểm (giờ)	8h00	9h10	10h30	11h00	11h40	12h00
lưu lượng (m^3/h)	34,81	46,72	29,67	37,39	32,05	28,16

Tìm thể tích lượng nước thải của công ty trong buổi sáng hôm đó.

6. 8. Một pin mặt trời hấp thụ ánh sáng mặt trời và sản xuất được lượng điện năng như sau

Thời điểm (giờ)	6h00	8h20	11h00	12h00	13h30	15h30	17h00	18h00
Điện năng (kW/h)	12,5	19,7	29,1	35,8	30,3	25,6	15,4	8,2

Tìm điện năng pin thu được trong ngày hôm đó.

6. 9. Vào ngày đăng kí học phần, người ta thống kê được lượng truy cập (trong 1 phút) vào máy chủ nhà trường vào giờ cao điểm như sau

Thời điểm	8h00	8h20	8h40	9h00
Lượng truy cập	2575	3693	5012	4863

Hãy tính số lượng truy cập vào máy chủ trong khoảng thời gian 8h00 – 9h00.

6. 10. Căn tin trường KHTN thống kê số lượng phiếu ăn bán ra trong tháng ba như sau

Ngày	1	7	15	22	31
Lượng phiếu	538	498	605	571	553

Biết mỗi phiếu ăn có giá 25.000. Hãy tính doanh thu tháng ba của Căn tin.

6. 11. Một cửa hàng bán nước giải khát thống kê được lượng sản phẩm bán ra như sau

Ngày	1	11	21	31
Bia (kết)	37	28	42	35
Nước ngọt (kết)	46	50	42	40

- a) Tìm doanh thu của cửa hàng biết mỗi kết bia có giá 280.000 đồng và mỗi kết nước ngọt có giá 190.000 đồng.
 b) Tìm lợi nhuận của cửa hàng biết khi bán mỗi kết bia và mỗi kết nước ngọt thì cửa hàng lời 25.000 đồng và 32.000 đồng. Lợi nhuận của việc bán sản phẩm nào cao hơn?

6. 12. Một công ty may mặc có lượng công nhân thay đổi theo từng ngày. Một người quản lý thống kê được số lượng công nhân như sau

Thời điểm (ngày)	01/01	01/04	01/07	01/10	30/12
Lượng công nhân (người)	679	842	716	795	763

Biết mỗi công nhân được trả 4 triệu cho một tháng làm việc. Hãy ước lượng chi phí công ty dành cho việc thuê công nhân.

6. 13. Sử dụng công thức tính tích phân Gauss 3 điểm nút để tính các tích phân sau

a) $\int_{-1}^1 x^2 dx$. b) $\int_{-1}^1 x^3 dx$. c) $\int_{-1}^1 x^4 dx$. d) $\int_{-1}^1 x^5 dx$.

6. 14. Sử dụng công thức tính tích phân Gauss 3 điểm nút để tính các tích phân sau

a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ b) $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x^2 + e^x} dx$. c) $\int_{-1}^1 \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1} dx$. d) $\int_{-1}^1 \frac{x - \sin x}{x + 2} dx$.

6. 15. Tìm sai số của các phép tính tích phân Gauss (3 điểm nút) sau

a) $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$ b) $\int_{-1}^3 \sin x dx$. c) $\int_{-1}^0 \cos x dx$. d) $\int_{-2}^2 e^x dx$.

6. 16. Hàm lỗi $E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ có nhiều ứng dụng trong xác suất, thống kê và kĩ thuật. Hãy tính giá trị $E(2)$ bằng công thức Gauss 3 điểm nút.

6. 17. Hàm Fresnel $S(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$ xuất hiện trong lý thuyết nhiễu xạ ánh sáng. Hãy tính giá trị $S(1)$ bằng công thức Gauss 3 điểm nút.

7 Phương trình vi phân

7. 1. Vẽ sơ đồ khối cho các giải thuật sau

- Phương pháp lặp.
- Phương pháp Euler.
- Phương pháp Euler cải tiến.
- Phương pháp Runge-Kutta

7. 2. Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp lặp

- $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad x \in [0, 1]$
- $\begin{cases} y' = (x+1)y \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, 3]$
- $\begin{cases} y' = x + xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [-2, 2]$
- $\begin{cases} y' = x^2 + y/x \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad x \in [1, 3]$

7. 3. Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp Euler và Euler cải tiến

- $\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + xy + 1} + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 0.8] \text{ với } h = 0.2 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$
- $\begin{cases} y' = x \ln 2x^2 + y^2 + 1 \\ y(0.5) = 1 \end{cases} \quad x \in [0.5, 1.1] \text{ với } h = 0.2 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$
- $\begin{cases} y' = xy \cos x^2 + y^2 \\ y(0.1) = 1 \end{cases} \quad x \in [0.1, 0.5] \text{ với } h = 0.1 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$
- $\begin{cases} y' = (x+1)/y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1] \text{ với } h = 0.2 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

7. 4. Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp Runge-Kutta bậc ba.

- $\begin{cases} y' = x \sin(x + 2y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1] \text{ với } h = 0.2 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$
- $\begin{cases} y' = x \ln(1 + 2y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 2] \text{ với } h = 0.4 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$
- $\begin{cases} y' = \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 1] \text{ với } h = 0.25 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$
- $\begin{cases} y' = (x+y)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 0.5] \text{ với } h = 0.1 \text{ và sai số không quá } 10^{-5}.$

7. 5. Tính $y(0.8)$ của hệ phương trình sau bằng các phương pháp đã biết.

- $\begin{cases} y' = x^2 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} y' = xy^2 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

7. 6. Một quả cầu có nhiệt độ $1200^\circ K$ đang nguội dần do tiếp xúc với không khí có nhiệt độ $300^\circ K$. Phương trình biểu diễn nhiệt độ quả cầu được cho bởi

$$\frac{dT}{dt} = -2,2067 \cdot 10^{-12}(T^4 - 81 \cdot 10^8)$$

Hãy tìm nhiệt độ sau 8 phút.

7. 7. Điện tích $Q(t)$ đi qua một mạch điện được biểu diễn bởi phương trình

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

trong đó $R = 5$ là điện trở, $C = 0,05$ là điện dung của tụ điện, là $E(t) = 60$ hiệu điện thế acquy. Hãy tìm điện tích Q tại thời điểm $t = 3$ giây.

8 Hệ Phương trình vi phân

8. 1. Vẽ sơ đồ khối cho các giải thuật sau
- Phương pháp Euler.
 - Phương pháp Euler cải tiến.
 - Phương pháp Runge-Kutta
 - Phương pháp Giải phương trình vi phân bậc hai.
8. 2. Giải hệ phương trình sau và so sánh với nghiệm chính xác tại $x = 0, 5$.
- $$\begin{cases} u' = 1 + v \\ v' = -u + x \\ u(0) = 0; v(0) = 1 \end{cases}$$
 với nghiệm chính xác là $u = x + \sin x, v = \cos x$ trên khoảng $[0, 1]$
 - $$\begin{cases} u' = v - x^3 + 2x + 1 \\ v' = 3xu - 3x^2 - 3x \\ u(0) = 1; v(0) = 0 \end{cases}$$
 với nghiệm chính xác là $u = x^2 + x + 1, v = x^3$ trên khoảng $[0, 1]$
8. 3. Giải phương trình vi phân cấp hai sau
- $y'' + 2y' + y = e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = 2$. Tìm sai số tại $x = 0, 75$ biết $y(0, 75) = 1, 6678$.
 - $2y'' - 3y' + y = x^2, y(0) = 1, y'(0) = 0$. Tìm sai số tại $x = 0, 5$ biết $y(0, 5) = 0, 9224$.
8. 4. Số lượng thỏ $y(t)$ và sói $z(t)$ sinh sống trong cùng một công viên hoang dã được ghi nhận có quan hệ sau
- $$\begin{cases} y'(t) = 0, 08y - 0, 001zy \\ z'(t) = -0, 02z + 0, 00002zy \end{cases}$$
- trong đó t là thời gian tính theo tháng. Biết rằng ban đầu số lượng thỏ là 1000 con và số lượng sói là 40 con. Hỏi sau 3 tháng số lượng thỏ và sói là bao nhiêu?
8. 5. Quần thể rệp $y(t)$ và bộ rùa $z(t)$ được mô hình hóa bởi các phương trình sau
- $$\begin{cases} y'(t) = 2y(1 - 0, 0001y) - 0, 01zy \\ z'(t) = -0, 5z + 0, 0001zy \end{cases}$$
- trong đó t là thời gian tính theo ngày. Biết rằng ban đầu số lượng rệp là 1000 con và số lượng bộ rùa là 200 con. Hỏi sau 1 tuần số lượng rệp và bộ rùa là bao nhiêu?
8. 6. Mô hình tăng trưởng dân số $P(t)$ của một thị trấn được cho bởi phương trình
- $$P''(t) = kP'(t)\left(1 - \frac{2P}{M}\right)$$
- trong đó $k = 0, 2$ và $M = 3000$ và t là thời gian tính bằng năm. Tìm số dân trong thị trấn sau ba năm nếu
- Giả sử tại thời điểm bắt đầu, số dân trong thị trấn là 2400 người và tốc độ tăng dân số là 100 người/năm.
 - Giả sử tại thời điểm bắt đầu, số dân trong thị trấn là 3500 người và tốc độ giảm dân số là 120 người/năm.
8. 7. Góc quay của một quả lắc đồng hồ thỏa mãn phương trình
- $$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin \theta(t) = 0.$$
- trong đó $g = 9, 8, L = 1$ và t là thời gian tính theo giây. Hãy tìm góc quay của quả lắc sau 5 giây nếu
- Giả sử tại thời điểm bắt đầu, góc quay là $0, 2 \text{ rad}$ và vận tốc góc quay là 1 rad/s .
 - Giả sử tại thời điểm bắt đầu, góc quay là 0 rad và vận tốc góc quay là 2 rad/s .