TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TS VŨ ĐỖ HUY CƯỜNG

HƯỚNG DẪN THỰC HÀNH PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Lưu hành nội bộ

HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2021-2022

BÀI MỞ ĐẦU
LÀM QUEN VỚI MATLAB

1 Tóm tắt lý thuyết

Matlab là một phần mềm cung cấp môi trường tính toán và lập trình, do công ty MathWorks thiết kế. Matlab là tên viết tắt từ “MATrix LABoratory”. Như tên của phần mềm cho thấy, phần cốt lõi của phần mềm là dữ liệu được lưu dưới dạng ma trận và các phép tính toán ma trận, giúp việc tính toán trong Matlab nhanh và thuận tiện hơn so với lập trình trong C hay Fortran. Hơn nữa, Matlab được đánh giá cao trong việc tạo các giao diện người dùng và liên kết với những chương trình máy tính viết trên nhiều ngôn ngữ lập trình khác. Do đó Matlab được sử dụng trong nhiều lĩnh vực, bao gồm xử lý tín hiệu và ảnh, truyền thông, mô phỏng, thiết kế điều khiển tự động, đo lường kiểm tra, phân tích mô hình tài chính, hay tính toán sinh học... Với hàng triệu kỹ sư và nhà khoa học làm việc trong môi trường công nghiệp cũng như ở môi trường hàn lâm, Matlab là ngôn ngữ của tính toán khoa học.

1.1 Môi trường làm việc của Matlab

Matlab cung cấp hai môi trường làm việc, đó là môi trường Command Window và Script.

a) Môi trường Command Window: Đây là môi trường biên dịch chính của Matlab. Các kết quả của quá trình tính toán được biểu diễn ở đây. Đây là một điểm mạnh của Matlab so với các phần mềm khác, thể hiện tính "thân thiện" của Matlab khi người ta có thể vừa tính toán vừa thấy kết quả trên cùng một cửa sổ. Tuy nhiên, ta chỉ nên thực hiện các phép toán đơn giản và việc theo dõi cũng như sửa chửa câu lệnh khá khó khăn.

b) Môi trường Scprit: Đây là môi trường lập trình tính toán của Matlab. Các kết quả của các phép tính ở đây sẽ được biểu diễn ở môi trường Command Window. Vì vậy ta có thể thực hiện các phép toán phức tạp trong môi trường này. Thông thường, người ta sẽ viết các chương trình chính ở đây. Và có thể sửa chữa, thay đổi, thêm bớt các câu lệnh một cách dễ dàng mà vẫn theo dõi được toàn bộ chương trình.

Trong môi trường Scrpit, người ta thường xây dựng các function (chương trình con) để thực hiện những phép tinh được lặp lại nhiều hoặc để đóng gói cho cho các công đoạn phức tạp. Các function thường được lưu trong cùng thư mục với chương trình chính. Khi cần thực hiện function trong chương trình chính, người ta sẽ gọi tên của function cần sử dụng với đầy đủ các input.

1.2 Tính toán với Matlab

Việc tính toán được chia làm hai dạng: tính toán số và tính toán hình thức. Cả hai dạng tính toán đều thực hiện được đối với các phép toán đại số như cộng (+), trừ (-), nhân (x), chia (:), các phép toán trên ma trận như chuyển vị, khả nghịch, định thức, ...

a) Tính toán số: Các phép tính được thực hiện trên giá trị nên việc thực hiện sẽ rất nhanh. Nhưng không thực hiện được các phép tính cao cấp như đạo hàm, tích phân.

b) Tính toán hình thức: Các phép tính được thực hiện trên các kí hiệu chưa gán giá trị. Việc thực hiện sẽ mất nhiều thời gian nhưng thực hiện được các phép tính cao cấp như đạo hàm tích phân. Để thực hiện việc tính toán hình thức, Matlab cần được cài đặt toolbox symbolic và các biến cần được khai báo với câu lệnh `syms`.

Tùy theo yêu cầu của bài toán, mà người thực hiện cần cân nhắc để sử dụng việc tính toán trên số hay tính toán hình thức. Bởi vì có một số câu lệnh chỉ sử dụng được cho dạng này mà không sử dụng cho dạng kia. Do đó để thực hiện cùng một mục đích, việc tính toán bằng dạng này có thể rất dài nhưng tính toán bằng dạng kia có thể chỉ mất vài câu lệnh.

2 Thực hành trên máy tính

2.1 Tính toán với Matlab

Bài tập 1. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = 3^2 - 4 \cdot \frac{5+6}{2} + \sqrt{2} - \sqrt[3]{5}$.

b) $B = \sin 3\alpha + 4\cos 2\alpha - \tan\alpha \cdot \cot 5\alpha$ với $\alpha = \pi/6$.

c) $C = e^{2+t} + \ln(4-t)$ với $t = 3$.

d) $D = [B + C, A^2 - B \cdot C, |A| + 1]$.

$A =$	$B =$	$C =$	$D =$

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	
1	Tính giá trị A trên máy `>> A=3^2 -4*(5+6)/2 + sqrt(2) -5^(1/3)`	Đọc biểu thức A. Viết giá trị A vào bảng kết quả

2	Tính giá trị B trên máy
	`>> al = pi/6`
	`>> B = sin(3*al) +4*cos(2*al) -tan(al)*cot(5*al)`
		Đọc biểu thức B.
		Viết giá trị B vào bảng kết quả

3	Tính giá trị C trên máy
	`>> t = 3`
	`>> C = exp(2+t) +log(4-t)`
		Đọc biểu thức C.
		Viết giá trị C vào bảng kết quả

4	Tính giá trị D trên máy `>> D = [B+C, A^2-B*C, abs(A)+1]`	Đọc biểu thức D. Viết giá trị D vào bảng kết quả

Bài tập 2. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $E = (4-7)^2 + \sqrt[3]{3-1}\sqrt[4]{6+2}\frac{\sqrt{9-3}}{\sqrt{2}}$.

b) $F = a^2(\sin b + \cos c) - 2b\tan c + 4c(\cot a - \cot b)$ với $a = 2, b = 3, c = 1$.

c) $G = \ln(x^2 - 2x + 1) + e^{4x+2}$ với $x = 2$.

d) $H = [G/2; \sqrt{EF}]$.

$E =$	$F =$	$G =$	$H =$

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5x + 2$.

a) Tìm giá trị $y_1 = f(1), y_2 = f(2), y_3 = f(-4), y_4 = f(0)$.

$y_1 =$	$y_2 =$	$y_3 =$	$y_4 =$

b) Vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[-4, 1]$.

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	
1	 Khai báo hàm số $f(x)$ `>> y =@(x) 4*x.^3-3*x.^2-5*x+2`	Đọc hàm số $f(x)$.

2	Tính các giá trị y_1, y_2, y_3, y_4
	`>> y1 = y(1)`
	`>> y2 = y(2)`
	`>> y3 = y(-4)`
	`>> y4 = y(0)`
		Viết giá trị vào bảng kết quả

3	Vẽ đồ thị hàm số $f(x)$
	`>> t = -4:0.1:1`
	`>> yt = y(t)`
	`>> plot(t,yt,'r-')`	

Bài tập 4. Tính giá trị các hàm số sau tại $x = -2, x = 0, x = 1, x = 3$

a) $f(x) = x^5 - x^3 + 2x - 4$.
b) $g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{3} - cos\dfrac{\pi}{4}$.
c) $h(x) = e^x + \ln x^2 + 1$.
d) $k(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 9}$.

$f(-2) =$	$f(0) =$	$f(1) =$	$f(3) =$
$g(-2) =$	$g(0) =$	$g(1) =$	$g(3) =$
$h(-2) =$	$h(0) =$	$h(1) =$	$h(3) =$
$k(-2) =$	$k(0) =$	$k(1) =$	$k(3) =$

Bài tập 5. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ trên $[-10, 10]$.
b) $g(x) = \sin x - 2\cos x$ trên $[-pi, pi/2]$.
c) $h(x) = (x + 1)e^{x-1}$ trên $[1, 5]$.
d) $k(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1}$ trên $[-3, 3]$.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5x + 2$.

a) Tìm giá trị $y_1 = f(1), y_2 = f(2), y_3 = f(-4), y_4 = f(0)$.

b) Vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[-4, 1]$.

c) Tính đạo hàm của hàm số tại $x = 0$.

d) Tính tích phân của hàm số trên đoạn $[-2, 3]$.

$y_1 =$	$y_2 =$	$y_3 =$	$y_4 =$
$f'(x) =$	$f'(0) =$	$\int f dx =$	$\int_{-2}^{3} f dx =$

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Khai báo hàm số $f(x)$
	`>> syms x`
	`>> y = 4*x^3-3*x^2-5*x+2`
		Đọc hàm số $f(x)$.

2	Tính các giá trị y_1, y_2, y_3, y_4
	`>> yl = subs(y,x,1)`
	`>> y2 = subs(y,x,2)`
	`>> y3 = subs(y,x,-4)`
	`>> y4 = subs(y,x,0)`
		Viết các giá trị vào bảng kết quả

3	Vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ `>> ezplot(y,[-4,1])`	

4	Tính đạo hàm của $f(x)$
	`>> dy = diff(y,x)`
	`>> dy1 = subs(dy,x,0)`
		Viết các giá trị vào bảng kết quả

5	Tính tích phân của $f(x)$
	`>> F = int(y,x)`
	`>> I = int(y,x,-2,3)`
		Viết các giá trị vào bảng kết quả

Bài tập 7. Tính giá trị các hàm số sau tại $x = 1$, tính đạo hàm bậc 1 và bậc 2 và tích phân trên đoạn $[1, 2]$.

a) $f(x) = x^5 - x^3 + 2x - 4$.

b) $g(x) = \sin\frac{\pi x}{3} - cos\frac{\pi}{4}$.

c) $h(x) = e^x + \ln x^2 + 1$.

$f(1) =$	$f'(x) =$	$f''(x) =$	$\int_1^2 f dx =$
$g(1) =$	$g'(x) =$	$g''(x) =$	$\int_1^2 g dx =$
$h(1) =$	$h'(x) =$	$h''(x) =$	$\int_1^2 h dx =$

2.2 Viết function với Matlab

Bài tập 8. Viết function tính tổng và tích hai số và áp dụng với số $3, 4$.
Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào NEW SCRIPT `function[S,P] =tinhTongTich(x,y)` Save as với tên ’tinhTongTich.m’	

1	Viết nội dung của function tính Tổng và Tích
	`S= x+y;`
	`P= x*y;`
	Kết thúc function, save nội dung lại.	

2	vào COMMAND WINDOW `>> [To,Ti]=tinhTongTich(3,4)`	

Bài tập 9. Viết function tìm giá trị lớn nhất của ba số và áp dụng với số $4, 2, -6$.
Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào NEW SCRIPT `function[M] =timMax(a,b,c)` Save as với tên ’timMax.m’	

1	Viết nội dung của function tìm giá trị lớn nhất
	`M= a;`
	`if b>M, M=b; end`
	`if c>M, M=c; end`
	Kết thúc function, save nội dung lại.	

2	vào COMMAND WINDOW
	`>> a=4; b=-6;`
	`>> [GTLN]=timMax(a,b,2)`	

Bài tập 10. Viết function tính giai thừa của một số tự nhiên và áp dụng với số 5.
Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào NEW SCRIPT `function[GT] =tinhGiaithua(n)` Save as với tên ’tinhGiaithua.m’	

1	Viết nội dung của function tính giai thừa
	`GT=1;`
	`for i=1:n`
	`    GT= GT*i;`
	`end`
	Kết thúc function, save nội dung lại.	

2	vào COMMAND WINDOW `>> GT = tinhGiaithua(5)`	

Bài tập 11. Viết function giải phương trình bậc nhất một ẩn $ax = b$ và áp dụng giải $3x = 5$.
Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào NEW SCRIPT `function[] =giaiPTB1(a,b)` Save as với tên 'giaiPTB1.m'	

1	Viết nội dung của function giải phương trình bậc nhất
	`if a==0 && b==0`
	`  disp('phuong trinh vo so nghiem'); end`
	`if a==0 && b~=0`
	`  disp('phuong trinh vo nghiem'); end`
	`if a~=0`
	`  disp('phuong trinh co nghiem duy nhat');`
	`  X=b/a, end`
	Kết thúc function, save nội dung lại.	

2	vào COMMAND WINDOW `>> giaiPTB1(3,5)`	

Bài tập 12. Viết function thực hiện các yêu cầu sau đối với một hàm số bất kì.
a) Tính đạo hàm và nguyên hàm, sau đó vẽ đồ thị của chúng trên cùng một hệ trục tọa độ.
b) Tìm các điểm mà đạo hàm bằng 0.
c) Tính tích phân trên khoảng $[-5, 5]$.
d) Áp dụng với $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$.
Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào NEW SCRIPT `function[df,F,Xct,I] =khaosat(f)` Save as với tên 'khaosat.m'	

1	Viết nội dung của function giải phương trình bậc nhất
	`syms x;`
	`df= diff(f,x);`
	`F= int(f,x);`
	`hold on; ezplot(f,[-4,4]);`
	`ezplot(df,[-4,4]);`
	`ezplot(F,[-4,4]);`	

2	Tìm các điểm mà đạo hàm bằng 0 `Xct=solve(df==0,x)`	
3	Tính tích phân trên khoảng $[-5, 5]$ `I=int(f,x,-5,5);` Kết thúc function, save nội dung lại.	

4	vào COMMAND WINDOW
	`>> syms x;`
	`>> f =x^3-2*x^2+x-3;`
	`>> [df,F,Xct,I] =khaosat(f)`	

3 Lập trình tính toán

Bài tập 13. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = 2^3 - \dfrac{(1+2)(2+3)}{3+4} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$.

b) $B = \sin\dfrac{\pi}{3} - 2\cos\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\tan\frac{\pi}{6}}{2-\cot\frac{5\pi}{6}}$.

c) $C = e^{-\sqrt{2}} - \ln\dfrac{2}{3} + \ln(e+2)$.

d) $D = \dfrac{2A+3B}{C^2-2C}$.

Bài tập 14. Cho $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

b) $B = [a\sin b\cos c, a\sin b\sin c, a\cos b]$.

c) $C = [\dfrac{a+b}{a+b+c}, \dfrac{a-b+c}{a+b+c}, \dfrac{c^2-ab}{a+b+c}, \dfrac{1}{a+b+c}]$.

d) $D = AB - C$.

Bài tập 15. Cho hàm số $f(x) = x\sin x$. Hãy tính giá trị của f tại $x = 1$ và $x = 3$ và vẽ đồ thị f trên $[-2, 4]$ và .

a) Sử dụng khai báo kiểu thay thế (dùng lệnh `@`).

b) Sử dụng khai báo kiểu hàm số (dùng lệnh `syms`).

Bài tập 16. Cho hàm số $f(x, y) = |x| + 2|y|$. Hãy tính giá trị của f tại $(1, 2)$ và $(\sqrt{2}, e^{-1})$ vẽ đồ thị f trên $[-2, 4] \times [-3, 3]$.

a) Sử dụng khai báo kiểu thay thế (dùng lệnh `@`).

b) Sử dụng khai báo kiểu hàm số (dùng lệnh `syms`).

Bài tập 17. Thực hiện các yêu cầu sau

a) Cho $f(x) = x^2 + 2x - 4$. Tính $f'(x), f'(2), \displaystyle\int f(x)\,dx, \int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Cho $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Tính $g''(x), g''(1), \displaystyle\int g(x)\,dx, \int_{-1}^1 g(x)\,dx$.

c) Cho $h(x) = \sin 2x$. Tính $h'(x), h'(0), \displaystyle\int h(x)\,dx, \int_0^\infty h(x)\,dx$.

Bài tập 18. Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Viết function giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.

b) Áp dụng để giải phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Bài tập 19. Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Viết function tìm các điểm cực trị của một hàm số bất kì.

b) Áp dụng để tìm cực trị hàm số $f(x) = x^3 - 6x$.

Bài tập 20. Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Viết function tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số hai biến $f(x, y)$ và kiểm tra biểu thức $f_{xy} = f_{yx}$.

b) Áp dụng để tính đạo hàm riêng cấp hai của hàm số $f(x, y) = \dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$.

BÀI THỰC HÀNH SỐ 1
SAI SỐ TRONG TÍNH TOÁN

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Khái niệm cơ bản

Xét một đại lượng p có giá trị chính xác là p^* và giá trị gần đúng (xấp xỉ) là $\overline{p}$, ta có các định nghĩa sau:

a) Sai số tuyệt đối: Δp

$$\Delta p = \left| p^* - \overline{p} \right| \tag{1.1}$$

b) Sai số tương đối δp.

$$\delta p = \left| \frac{p^* - \overline{p}}{p^*} \right| = \frac{\Delta p}{|p^*|} \tag{1.2}$$

trong một số trường hợp, mẫu thức của (1.2) được thay bởi $\overline{p}$.

1.2 Sai số do làm tròn

Giả sử đại lượng p có giá trị chính xác là một số thập phân vô hạn như sau

$$p^* = s_m s_{m-1} \ldots s_1 s_0 . s_{-1} s_{-2} \ldots s_n s_{n-1} \ldots \tag{1.3}$$

Khi đó, trong quá trình tính toán, ta phải tìm biểu diễn gần đúng của nó dưới dạng

$$\overline{p} = s_m s_{m-1} \ldots s_1 s_0 . s_{-1} s_{-2} \ldots \overline{s_n} \tag{1.4}$$

trong đó $\overline{s_n}$ được tính bằng các phương pháp sau

a) Phương pháp làm tròn

$$\overline{s_n} = \begin{cases} s_n + 1 & \text{nếu } s_{n-1} \geq 5 \\ s_n & \text{nếu } s_{n-1} < 5 \end{cases} \tag{1.5}$$

b) Phương pháp chặt cụt

$$\overline{s_n} = s_n \tag{1.6}$$

1.3 Sai số giới hạn

Xét một đại lượng p, người ta thường đề cập đến giá trị tiêu chuẩn $\overline{p}$ và giá trị thực tế p^* thỏa quan hệ :

$$\overline{p} - \overline{\Delta} p \leq p^* \leq \overline{p} + \overline{\Delta} p \quad \text{hay} \quad p^* \in [\overline{p} - \overline{\Delta} p, \overline{p} + \overline{\Delta} p] \tag{1.7}$$

Khi đó $\overline{\Delta} p$ là là sai số tuyệt đối giới hạn trong phép tính p.

1.4 Sai số trong tính toán

Cho hàm số y phụ thuộc vào các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ với x_i có giá trị gần đúng $\overline{x}_i$ và sai số Δx_i. Khi đó sai số của $y(x_1, x_2, ..., x_n)$ được tính như sau

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) \right| \Delta x_i \tag{1.8}$$

2 Thực hành trên máy tính

2.1 Xác định sai số tuyệt đối, sai số tương đối

Bài tập 1. Tính sai số tuyệt đối Δp và sai số tương đối δp của các đại lượng có giá trị chính xác p^* và giá trị gần đúng $\overline{p}$.

p^*	$\overline{p}$	Δp	δp
0.9857	0.9768		
421	397		
1102	1113		
2.5743	2.6381		

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập giá trị p^* và $\overline{p}$ vào máy
	`>> p_e = 0.9857`
	`>> p_a = 0.9768`
		Đọc giá trị p^* và $\overline{p}$ từ bảng dữ liệu.

2	Tính sai số tuyệt đối Δp và sai số tương đối δp
	`>> aEp = abs(p_e-p_a)`
	`>> rEp = abs((p_e-p_a)/p_e)`
		Viết giá trị Δp, δp vào bảng kết quả

Bài tập 2. Tính sai số tuyệt đối Δp và sai số tương đối δp của các đại lượng có giá trị chính xác p^* và giá trị gần đúng $\overline{p}$.

p^*	$\overline{p}$	Δp	δp
0.9857564312	0.9768463123		
42189376	39773891		
1102.34598	1113.24691		
2.574314893	2.638100358		

Hướng dẫn: Thực hiện tương tự Bài tập 1 với bước 0 như sau.

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY

0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW
	Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh
	`>> clear all; clc;`
	Thiết lập định dạng số nhiều kí tự
	`>> format long`	

Bài tập 3. Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của các đại lượng sau khi sử dụng giá trị xấp xỉ (3 số thập phân) bằng phương pháp làm tròn và phương pháp chặt cụt

p^*	$\overline{p}_1$ (làm tròn)	Δp_1	δp_1	$\overline{p}_2$ (chặt cụt)	Δp_2	δp_2
π						
e						
$\ln 2$						
$\sqrt{2}$						
$\sin 1$						

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY

0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW
	Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh
	`>> clear all; clc;`
	Thiết lập định dạng số nhiều kí tự
	`>> format long`	

1	Nhập giá trị p^* vào máy `>> p_e = pi`	Đọc giá trị p^* từ bảng dữ liệu.

2	Tìm số gần đúng bằng phương pháp làm tròn và sai số tuyệt đối
	`>> p_1 = round(p_e,3)`
	`>> aEp1 = abs(p_e-p_1)`
	`>> rEp1 = abs((p_e-p_1)/p_e)`
		Viết $\overline{p}_1$, Δp_1, δp_1 vào bảng kết quả

2	Tìm số gần đúng bằng phương pháp chặt cụt và sai số tuyệt đối
	`>> p_2 = floor(p_e*10^3)/10^3,`
	`>> aEp2 = abs(p_e-p_2)`
	`>> rEp2 = abs((p_e-p_2)/p_e)`
		Viết $\overline{p}_2$, Δp_2, δp_2 vào bảng kết quả

Bài tập 4. Thực hiện lại bài tập với số thập phân được cho trước.

p^*	n	$\overline{p}_1$ (làm tròn)	Δp_1	δp_1	$\overline{p}_2$ (chặt cụt)	Δp_2	δp_2
π	2						
e	3						
$\ln 2$	4						
$\sqrt{2}$	5						
$\sin 1$	6						

2.2 Kiểm tra quan hệ giữa giá trị chính xác và giá trị xấp xỉ

Bài tập 5. Kiểm tra các đại lượng có phù hợp với đánh giá (dựa trên giá trị tiêu chuẩn $\overline{p}$ và sai số giới hạn $\overline{\Delta}p$)?

p^*	$\overline{p}$	Δp	p_L	p_R	Kết quả
17.351	15.932	1.247			
11205	11115	120			
38.735	36.215	1.327			
319	297	15			

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập giá trị $\overline{p}$ và Δp vào máy
	`>> p_t = 15.932`
	`>> aEp = 1.247`
		Đọc giá trị $\overline{p}$ và Δp từ bảng dữ liệu.

2	Tính khoảng giá trị của p^*
	`>> p_L = p_t - aEp`
	`>> p_R = p_t + aEp`
		Viết giá trị p_L, p_R vào bảng kết quả.

3		So sánh giá trị p^* với p_L và p_R. Nếu $p_L \leq p^* \leq p_R$ thì ghi "Đúng".

Bài tập 6. Kiểm tra các đại lượng có phù hợp với đánh giá (dựa trên giá trị tiêu chuẩn p^* và sai số giới hạn $\overline{\delta}p$)?

p^*	$\overline{p}$	δp	p_L	p_R	Kết quả
218	200	0.05			
6.035	5.897	0.02			
2545	2300	0.1			
37.54	35.89	0.03			

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	tương tự bài trên	tương tự bài trên

1	Nhập giá trị $\overline{p}$ và δp vào máy
	`>> p_t = 200`
	`>> rEp =0.05`
		Đọc giá trị $\overline{p}$ và δp từ bảng dữ liệu.

2	Tính khoảng giá trị của p^*
	`>> aEp = p_t*rEp`
	`>> p_L = p_t-aEp`
	`>> p_R = p_t+aEp`
		Viết giá trị p_L, p_R vào bảng kết quả.

3	tương tự bài trên	tương tự bài trên

2.3 Tính toán sai số trong biểu thức toán học

Bài tập 7. Tìm sai số tuyệt đối của hàm số sau

$y = f(x_1, x_2, x_3)$	$\overline{x}_1$	Δx_1	$\overline{x}_2$	Δx_2	$\overline{x}_3$	Δx_3	Δy	δy
$y = x_1 + x_2 \cdot x_3$	5	0.03	3	0.06	7	0.04		
$y = x_1^2 + x_2 \cdot x_3^3$	2	0.05	4	0.02	6	0.03		
$y = x_3\sqrt{x_1 + x_2}$	3	0.05	7	0.07	3	0.02		
$y = x_1 \cdot x_2 / x_3$	3	0.08	7	0.03	10	0.1		
$y = x_1(x_2 + x_3) - x_2 x_3$	8	0.09	4	0.02	3	0.04		
$y = \ln(x_1 \cdot x_2 - x_3)$	7	0.05	5	0.02	2	0.03		
$y = x_1 \sin x_2 - \cos x_3$	3	0.06	0	0.02	1	0.04		

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập giá trị $\overline{x_i}$ và Δx_i vào máy
	`>> x1_a = 5, aEx1 = 0.03`
	`>> x2_a = 3, aEx2 = 0.06`
	`>> x3_a = 7, aEx3 = 0.04`
		Đọc giá trị $\overline{x}_i$, Δx_i từ bảng dữ liệu.

2	Khai báo biến symbolic và nhập hàm số y
	`>> syms x1 x2 x3`
	`>> y=x1 + x2*x3`
	Tính giá trị gần đúng $\overline{y}$
	`>> y_a=subs(y,[x1,x2,x3],[x1_a,x2_a,x3_a])`
		Đọc công thức biểu diễn hàm số y.

3	Tìm các đạo hàm riêng của hàm $\overline{y}$
	`>> dy1=diff(y,x1)`
	`>> dy2=diff(y,x2)`
	`>> dy3=diff(y,x3)`
	Tính giá trị gần đúng các đạo hàm của $\overline{y}$
	`>> dy1_a=subs(dy1,[x1,x2,x3],[x1_a,x2_a,x3_a])`
	`>> dy2_a=subs(dy2,[x1,x2,x3],[x1_a,x2_a,x3_a])`
	`>> dy3_a=subs(dy3,[x1,x2,x3],[x1_a,x2_a,x3_a])`	

4	Tính sai số tuyệt đối Δy và δy
	`>> aEy=abs(dy1_a)*aEx1 + abs(dy2_a)*aEx2 + abs(dy3_a)*aEx3`
	`>> rEy=aEy/abs(y_a)`
		Viết giá trị Δy, δy vào bảng kết quả

3 Lập trình tính toán

Bài tập 8. Function sau được viết để tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối giữa số chính xác và số gần đúng.

```
function[aEp,rEp]=saiso(p_e,p_a)
aEp = abs(p_e - p_a);
rEp = aEp/abs(p_e);
```

a) Cho biết input và output là gì?
b) Function này được viết ở đâu? đặt tên là gì?
c) Khi muốn function này được thực hiện, phải làm gì? như thế nào?
d) Hãy sử dụng function này để thực hiện lại bài tập 1.

Bài tập 9. Hãy viết function để tính số gần đúng do của đại lượng có vô hạn số thập phân
a) Cho biết input và output là gì?
b) Sử dụng phương pháp làm tròn.
c) Sử dụng phương pháp chặt cụt.
d) Hãy sử dụng function này để thực hiện lại bài tập 4.

Bài tập 10. Hãy viết function để kiểm tra số chính xác có phù hợp với đánh giá ($\overline{p}$ và $\overline{\Delta}p$) hay không?
a) Cho biết input và output là gì?
b) Hãy sử dụng function này để thực hiện lại bài tập 5.
c) Hãy sử dụng function này để kiểm tra sự phù hợp của một hộp bánh có khối lượng $438\ g$ với tiêu chuẩn $425 \pm 15\ g$.
d) Hãy sử dụng function này để kiểm tra sự phù hợp của một toa xe lửa có chiều dài $15\,659\ cm$ với tiêu chuẩn $15\,586 \pm 123\ cm$.

Bài tập 11. Hãy viết function để kiểm tra số chính xác có phù hợp với đánh giá ($\overline{p}$ và $\overline{\delta}p$) hay không?
a) Cho biết input và output là gì?
b) Hãy sử dụng function này để thực hiện lại bài tập 6.
c) Hãy sử dụng function này để kiểm tra sự phù hợp của một tuýp kem đánh răng có khối lượng $138\ g$ với tiêu chuẩn $135 \pm 3\%\ cm$.
c) Hãy sử dụng function này để kiểm tra sự phù hợp của một chai nước mắm có độ đạm $43,789^o$ với tiêu chuẩn $42,5 \pm 5\%\ cm$.

Bài tập 12. Hãy viết function tính sai số tuyệt đối và tương đối của biểu thức toán học
a) Biểu thức chứa hai biến.
b) Biểu thức chứa ba biến.
c) Biểu thức chứa n biến.
d) Hãy sử dụng function này để thực hiện lại bài tập 7.

Bài tập 13. Tìm giá trị hàm số u (lấy 3 chữ số thập phân) và tính sai số tuyệt đối giới hạn, sai số tương đối giới hạn do việc làm tròn số tại các điểm cho trước

a) $u = \ln(2y + x^2)$ tại $x = 1,976, xy = 0,532$.

b) $u = ye^x - x^2$ tại $x = 1,675; y = 1,073$.

c) $u = x \tan y + (x + y)^2$ tại $x = -1,395; y = 1,643$.

d) Viết function tổng quát cho các bài toán trên.

BÀI THỰC HÀNH SỐ 2
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH SIÊU VIỆT (PHẦN 1)

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phương pháp chia đôi

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $[a, b]$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$. Thuật toán phương pháp chia đôi để giải phương trình $f(x) = 0$ được trình bày như sau

Thuật toán phương pháp chia đôi
Bước 1: Khai báo hàm số $f(x)$.
Bước 2: Nhập a và b đồng thời kiểm tra $f(a) \cdot f(b) < 0$.
(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)
Bước 3: Gán $c = \dfrac{a+b}{2}$.
Nếu $|f(c)| < \Delta f$ phá vòng lặp.
Bước 4: Nếu $f(a) \cdot f(c) > 0$ thì gán $a = c$. Ngược lại, gán $b = c$.
Gán $k = k + 1$
(Đóng vòng lặp)
Kết luận $\overline{x} = c$.

Nhận xét: tốc độ hội tụ của thuật toán khá chậm vì khoảng nghiệm sau mỗi bước lặp chỉ giảm một nửa. Điểm mạnh của phương pháp này là luôn chỉ ra được nghiệm của bài toán

1.2 Phương pháp lặp

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $[a, b]$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$. Thuật toán phương pháp lặp để giải phương trình $f(x) = 0$ được trình bày như sau

Thuật toán phương pháp lặp
Bước 1: Khai báo hàm $f(x)$, $\varphi(x)$.
Bước 2: Nhập x_0.
(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)
Bước 3: Gán $x_k = \varphi(x_{k-1})$.
Nếu $|f(x_k)| < \Delta f$ phá vòng lặp.
Bước 4: Gán $k = k + 1$.
(Đóng vòng lặp)
Kết luận $\overline{x} = x_k$.

Nhận xét: tốc độ hội tụ của thuật toán phụ thuộc vào hàm $\varphi(x)$. Nếu giá trị của đạo hàm của $\varphi(x)$ càng tiến về 0 thì thuật toán hội tụ càng nhanh. Nếu giá trị của đạo hàm lớn hơn 1, thuật toán không cho ra nghiệm.

2 Thực hành trên máy tính

2.1 Giải phương trình bằng phương pháp chia đôi

Bài tập 1. Giải phương trình $x + \sin x - 2 = 0$ bằng phương pháp chia đôi với $a = 1$, $b = 1.4$, $\Delta f = 10^{-3}$.

STT	a	b	c	$f(c)$	$\|f(c)\| \leq \Delta f$	δc
1	1.0	1.4	1.2			
2						
3						
4						
5						
6						

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY

0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW
	Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh
	`>> clear all; clc;`
	Thiết lập định dạng số nhiều kí tự
	`>> format long`	

1	Nhập hàm sô f vào máy `>> f=@(x) x+sin(x)-2;`	Đọc công thức của hàm $f(x)$.

2	Nhập giá trị a và b vào máy
	`>> a=1, b=1.4,`
	Kiểm tra dấu của $f(a)$ và $f(b)$
	`>> fa=f(a), fb=f(b),`
	Đếm bước lặp
	`>> k=1`
		Đọc giá trị a và b từ bảng dữ liệu.

3	Tính tọa độ trung điểm c, sai số Δc và giá trị $f(c)$
	`>> c=(a+b)/2;`
	`>> rEc=abs((a-c)/c),`
	`>> fc=f(c),`
		Viết giá trị c, $f(c)$, δc vào bảng kết quả. Nếu $\|f(c)\| \leq \Delta f$ thì KẾT THÚC (bỏ bước 4).

4	Kiểm tra dấu $f(c)$ để tìm khoảng chia mới
	`>> dau = sign(f(a)*f(c))`
	Nếu $dau > 0$ thì
	`>> a=c`
	Nếu $dau < 0$ thì
	`>> b=c`
	Tăng bước lặp thêm 1
	`>> k=k+1`
		Viết giá trị a và b vào bảng kết quả.
		Thực hiện lại bước 3.

2.2 Giải phương trình bằng phương pháp lặp

Bài tập 2. Giải phương trình $x + \sin x - 2 = 0$ bằng phương pháp lặp với $\varphi(x) = 2 - \sin x$ và $x = 1.05$, $\Delta f = 10^{-3}$.

STT	x	$f(x)$	$\|f(x)\| \leq \Delta f$	δx_n
1	1.05			
2				
3				
4				
5				
6				

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY

0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW
	Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh
	`>> clear all; clc;`
	Thiết lập định dạng số nhiều kí tự
	`>> format long`	

1	Nhập hàm số φ vào máy
	`>> f=@(x) x+sin(x)-2`
	`>> phi=@(x) 2-sin(x)`
		Đọc công thức của hàm $f(x), \varphi(x)$.

2	Nhập giá trị x_0 cho bước lặp đầu tiên `>> xo=1.05; k=1;`	Đọc giá trị x_0 từ bảng dữ liệu.

3	Tính giá trị của x_n, sai số Δx_n và giá trị $f(x)$
	`>> xn=phi(xo)`
	`>> rExn=abs((xn-xo)/xo),`
	`>> fx=f(xn),`
		Viết giá trị x_n, $f(x_n)$, δx_n vào bảng kết quả. Nếu $f(x_n) \leq \Delta f$ thì KẾT THÚC. (bỏ bước 4).

4	Làm mới giá trị x_0
	`>> xo=xn`
	Tăng bước lặp thêm 1
	`>> k=k+1`
		Thực hiện lại bước 3

Bài tập 3. Giải phương trình $x^2 + x = 5$ bằng phương pháp lặp với $\varphi(x) = 5 - x^2$ và $x = 1.5$, $\Delta f = 10^{-3}$.

STT	x	$f(x)$	$\|f(x)\| \leq \Delta f$	δx
1	1.5			
2				
3				

Giải thích tại sao giá trị $f(x)$ càng lúc càng tăng. Phải thay đổi điều gì để giải được phương trình.

3 Lập trình tính toán

Bài tập 4. Function giải phương trình đại số và siêu việt bằng phương pháp chia đôi được trình bày như sau

```
function[c,fc]=chiadoi(f,a,b,Df)
k=1; hold on
while 1;
  c=(a+b)/2);
  fc=f(c));
  rEc=abs((a-c)/a));
  disp([k c fc]);
  plot(k,fc,'ro');
  if abs(fc) < Df, break, end;
  if f(a)*f(c)>0, a=c; else b=c; end;
  k=k+1;
end;
```

a) Khi chạy chương trình trên (với đầy đủ input) thì trên COMMAND WINDOW sẽ xuất hiện gì?

b) Hình vẽ xuất hiện có trục x thể hiện điều gì và trục Oy thể hiện điều gì?

c) Thực hiện lệnh `>> help plot` trên COMMAND WINDOW để tìm hiểu thêm về cách vẽ hình. Sau đó thử thay đổi màu sắc và hình dạng các điểm nghiệm.

d) Thực hiện lại bài tập 1.

Bài tập 5. Sử dụng function được viết ở Bài tập 4 để giải bài toán $e^x - x = 3$ với các input sau

a) $a = 0, b = 3, \Delta f = 10^{-3}$.

b) $a = 0, b = 2, \Delta f = 5 \cdot 10^{-3}$.

c) $a = -3, b = 0, \Delta f = 10^{-4}$.

d) $a = -3, b = -1, \Delta f = 10^{-4}$.

Bài tập 6. Xét bài toán tìm nghiệm của phương trình đại số và siêu việt bằng phương pháp lặp.

a) Viết function cho bài toán trên với output là nghiệm bài toán và input là hàm số f, hàm lặp φ, tọa độ hai cận a, b, tọa độ nghiệm thử ban đầu x_0, sai số giới hạn Δf.

b) Thêm các dòng lệnh để function tự động in ra bảng giá trị và vẽ đồ thị của nghiệm của phương trình.

c) Thực hiện lại Bài tập 2.

d) Thực hiện lại Bài tập 3.

Bài tập 7. Sử dụng function được viết ở Bài tập 6 để giải bài toán $x - x/2 = 1/x$ với $\varphi(x) = x/2 + 1/x$ và các input sau

a) $x_0 = 1, \Delta f = 10^{-3}$.

b) $x_0 = 2, \Delta f = 3 \cdot 10^{-3}$.

c) $x_0 = -2, \Delta f = 10^{-2}$.

d) $x_0 = -5, \Delta f = 10^{-4}$.

Bài tập 8. Sử dụng phương pháp chia đôi và phương pháp lặp để giải quyết các bài tập sau với cùng $\Delta f = 10^{-3}$

a) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x = 6$.

b) $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$.

c) $(x-2)^2 - \ln x = 0$.

d) $\sin x = e^{-x}$.

BÀI THỰC HÀNH SỐ 3
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH SIÊU VIỆT (PHẦN 2)

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phương pháp tiếp tuyến

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $[a, b]$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$. Thuật toán phương pháp tiếp tuyến để giải phương trình $f(x) = 0$ được trình bày như sau

Thuật toán phương pháp tiếp tuyến
Bước 1: Khai báo hàm số $f(x)$ và đạo hàm $f'(x)$.
Bước 2: Nhập x_0.
(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)
Bước 3: Gán $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$.
Nếu $|f(x_k)| < \Delta f$ phá vòng lặp.
Bước 4: Gán $k = k + 1$
(Đóng vòng lặp)
Kết luận $\overline{x} = x_k$.

Nhận xét: tốc độ hội tụ của thuật toán nhanh. Tuy nhiên đạo hàm cấp hai của hàm số phải không đổi dấu trên $[a, b]$ thì thuật toán mới cho nghiệm hội tụ

1.2 Phương pháp dây cung

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $[a, b]$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$. Thuật toán phương pháp dây cung để giải phương trình $f(x) = 0$ được trình bày như sau

Thuật toán phương pháp dây cung
Bước 1: Khai báo hàm số $f(x)$.
Bước 2: Nhập a và b đồng thời kiểm tra $f(a) \cdot f(b) < 0$.
(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)
Bước 3: Gán $c = a - \dfrac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a)$.
Nếu $|f(c)| < \Delta f$ phá vòng lặp.
Bước 4: Nếu $f(a) \cdot f(c) > 0$ thì chọn $a = c$. Ngược lại, chọn $b = c$.
Gán $k = k + 1$
(Đóng vòng lặp)
Kết luận $\overline{x} = c$.

Nhận xét: Phương pháp dây cung có tốc độ hội tụ trung bình.

2 Thực hành trên máy tính

2.1 Giải phương trình bằng phương pháp tiếp tuyến

Bài tập 1. Giải phương trình $x^2 - \sin x = 50$ bằng phương pháp tiếp tuyến với $x_0 = 2$, $\Delta f = 10^{-3}$.

STT	x_0	x_n	$f(x_n)$	$\|f(x_n)\| \leq \Delta f$	δx_n
1	2				
2					
3					
4					

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY

0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW
	Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh
	`>> clear all; clc;`
	Thiết lập định dạng số nhiều kí tự
	`>> format long`	

1	Nhập hàm số y vào máy
	`>> syms x`
	`>> f=x^2-sin(x)-50`
	`>> df=diff(f,x)`
		Đọc công thức của hàm $f(x)$.

2	Nhập giá trị x_0 cho bước lặp đầu tiên `>> xo=2; k=1;`	Đọc giá trị x_0 từ bảng dữ liệu.

3	Tính giá trị của x_n, sai số δx_n và giá trị $f(x_n)$
	`>> xn=xo-subs(f,x,xo)/subs(df,x,xo); xn=double(xn)`
	`>> rExn=abs((xn-xo)/xo)`
	`>> fx=subs(f,x,xn)`
		Viết giá trị x_n, $f(x_n)$, δx_n vào bảng kết quả. Nếu $\|f(x_n)\| \leq \Delta f$ thì KẾT THÚC.

4	Làm mới giá trị x_0
	`>> xo=xn`
	Tăng bước lặp thêm 1
	`>> k=k+1`
		Thực hiện lại bước 3

Bài tập 2. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 2x + 25 = 0$ bằng phương pháp tiếp tuyến với $x_0 = 4$, $\Delta f = 10^{-3}$.

STT	x_0	x_n	$f(x_n)$	$\|f(x_n)\| \leq \Delta f$	δx_n
1	4				
2					
3					
4					
5					

2.2 Giải phương trình bằng phương pháp dây cung

Bài tập 3. Giải phương trình $x^2 - \sin x = 50$ bằng phương pháp dây cung với $a = 0$, $b = 8$, $\Delta f = 3 \cdot 10^{-3}$

STT	a	b	c	$f(c)$	$\lvert f(c)\rvert \leq \Delta f$	δc
1	0	8				
2						
3						
4						
5						

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY

	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW
	Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh
	`>> clear all; clc;`
	Thiết lập định dạng số nhiều kí tự
	`>> format long`	

1	Nhập hàm sô y vào máy `>> f=@(x) x^2-sin(x)-50`	Đọc công thức của hàm $f(x)$.
2	Nhập giá trị a và b cho bước lặp đầu tiên `>> a= 0; b= 8; k=1;`	Đọc giá trị a và b từ bảng dữ liệu.

3	Tính giá trị của c, sai số Δc và giá trị $f(c)$
	`>> c=a-(b-a)/(f(b)-f(a))*f(a)`
	`>> rEc=abs((c-a)/a),`
	`>> fc=f(c)`
		Viết giá trị c, $f(c)$, δc vào bảng kết quả. Nếu $\lvert f(c)\rvert \leq \Delta f$ thì KẾT THÚC.

4	Kiểm tra dấu $f(c)$ để tìm khoảng chia mới
	`>> dau = sign(f(a)*f(c)),`
	Nếu $dau > 0$ thì
	`>> a=c,`
	Nếu $dau < 0$ thì
	`>> b=c,`
	Tăng bước lặp thêm 1
	`>> k=k+1`
		Viết giá trị a và b vào bảng kết quả. Thực hiện lại bước 3.

3 Lập trình tính toán

Bài tập 4. Xét bài toán tìm nghiệm của phương trình đại số và siêu việt bằng phương pháp tiếp tuyến.

a) Viết function cho bài toán trên với output là nghiệm bài toán và input là hàm số f, đạo hàm df, tọa độ nghiệm thử ban đầu x_0 và sai số giới hạn Δf.

b) Thêm các dòng lệnh để function tự động in ra bảng giá trị và vẽ đồ thị của nghiệm của phương trình.

c) Sử dụng function trên để giải Bài toán 1.

d) Sử dụng function trên để giải Bài toán 2.

Bài tập 5. Sử dụng function được viết ở Bài toán 4 để giải phương trình $x + \ln(x+2) - 10$ với các input sau

a) $x_0 = 7, \Delta f = 10^{-3}$.

b) $x_0 = 9, \Delta f = 2 \cdot 10^{-3}$.

c) $x_0 = 5, \Delta f = 5 \cdot 10^{-3}$.

d) $x_0 = 3, \Delta f = 5 \cdot 10^{-3}$.

Bài tập 6. Xét bài toán tìm nghiệm của phương trình đại số và siêu việt bằng phương pháp dây cung.

a) Viết function cho bài toán trên với output là nghiệm bài toán và input là hàm số f, tọa độ hai cận a, b và sai số giới hạn Δf.

b) Thêm các dòng lệnh để function tự động in ra bảng giá trị và vẽ đồ thị của nghiệm của phương trình.

c) Sử dụng function trên để giải bài toán **??**.

Bài tập 7. Sử dụng function được viết ở Bài toán 6 để giải phương trình $2^x + 3^x - 10x = 30$ với các input sau

a) $a = -5, b = -3, \Delta f = 10^{-3}$.

b) $a = -4, b = -2, \Delta f = 2 \cdot 10^{-3}$.

c) $a = 2, b = 4, \Delta f = 3 \cdot 10^{-3}$.

d) $a = 2, b = 4, \Delta f = 3 \cdot 10^{-3}$.

Bài tập 8. Sử dụng phương pháp tiếp tuyến và phương pháp dây cung để giải quyết các bài tập sau với cùng $\Delta f = 10^{-3}$

a) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x = 6$.

b) $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$.

c) $(x-2)^2 - \ln x = 0$.

d) $\sin x = e^{-x}$.

Bài tập 9. . Một cái xà nhà chịu lực có độ võng w phụ thuộc vào vị trí $x \in [0, L]$ được cho bởi phương trình

$$w(x) = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x)$$

trong đó $E = 50.000$ là độ cứng, $I = 30.000$ là tiết diện, $L = 600$ là chiều dài và $w_0 = 2,5$ là hệ số vật liệu của xà nha. Để tìm độ võng lớn nhất của xà nhà, người ta thực hiện như sau

Bước 1: Tính đạo hàm $w'(x)$ và vẽ đồ thị của nó để tìm khoảng phân ly nghiệm.

Bước 2: Giải phương trình $w'(x) = 0$ để tìm vị trí mà độ võng đạt cực trị.

Bước 3: So sánh độ võng tại cực trị và biên ($x = 0$ và $x = L$) để tìm độ võng lớn nhất.

Hãy thực hiện các bước trên và tìm độ võng cực đại.

BÀI THỰC HÀNH SỐ 4
GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1 Tóm tắt lý thuyết

Xét hệ phương trình đại số tuyến tính có dạng $AX = C$ trong đó A là ma trận vuông cấp n chứa các hệ số đứng trước các biến, C là vector n dòng chứa giá trị của các biểu thức chứa biến và X là vector n dòng chứa các biến cần tìm.

1.1 Phương pháp lặp

Thuật toán phương pháp lặp để giải hệ phương trình trên được trình bày như sau

Thuật toán phương pháp lặp
Bước 1: Khai báo ma trận vuông A và vector dòng C.
Bước 2: Tính ma trận $B = -A./diag(A) + I_n$ và vector dòng $G = C./diag(A)$.
Chọn nghiệm thử ban đầu $X_0 = G$.
(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)
Bước 3: Gán $X_k = BX_{k-1} + G$.
Nếu $|AX_k - C| < \Delta F$ thì phá vòng lặp.
Bước 4: Gán $k = k + 1$
(Đóng vòng lặp)
Kết luận $\overline{X} = X_k$.

Nhận xét: tốc độ hội tụ của thuật toán chậm.

1.2 Phương pháp lặp Seidel

Thuật toán phương pháp lặp Seidel để giải hệ phương trình trên được trình bày như sau

Thuật toán phương pháp lặp Seidel
Bước 1: Khai báo ma trận vuông A và vector dòng C.
Bước 2: Tính ma trận $B = -A./diag(A) + I_n$ và vector dòng $G = C./diag(A)$.
Chọn nghiệm thử ban đầu $X_0 = G$.
(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)
Bước 3: Gán $(X_k)_1 = \sum_{j=1}^{n} B_{1j}(X_{k-1})_j + G_1$
Gán $(X_k)_i = \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij}(X_k)_j + \sum_{j=i}^{n} B_{ij}(X_{k-1})_j + G_i$ với $2 \le i \le n$.
Nếu $|AX_k - C| < \Delta F$ thì phá vòng lặp.
Bước 4: Gán $k = k + 1$
(Đóng vòng lặp)
Kết luận $\overline{X} = X_k$.

Nhận xét: Phương pháp Seidel là sự cải tiến của phương pháp lặp nên thuật toán phức tạp hơn nhưng có tốc độ hội tụ nhanh.

2 Thực hành trên máy tính

2.1 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp

Bài tập 1. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp với $\Delta F = 10^{-3}$.

$$\begin{cases} 5x_1 & +x_2 & +x_3 & = 7 \\ x_1 & +10x_2 & +x_3 & = 12 \\ x_1 & +x_2 & +20x_3 & = 22 \end{cases}$$

STT	X_1	X_2	X_3	$F(X)$	$\lvert F(X)\rvert \leq \Delta F$	δX_n
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY

0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW
	Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh
	`>> clear all; clc;`
	Thiết lập định dạng số nhiều kí tự
	`>> format long`	

1	Nhập ma trận A và C vào máy
	`>> A =[5 1 1; 1 10 1; 1 1 20];`
	`>> C =[7; 12; 22];`
		Đọc giá trị A và C từ giả thiết.

2	Tính giá trị B và C
	`>> B=-A./[diag(A) diag(A) diag(A)]+eye(3); G=C./diag(A);`
	Chọn nghiệm thử ban đầu
	`>> Xo = G; k = 1;`	

3	Tìm nghiệm mới và các sai số tương ứng
	`>> Xn = B*Xo + G;`
	`>> rEX = norm((Xn-Xo)./Xo),`
	`>> fX = norm(A*Xn - C),`
		Viết giá trị X_n, $f(X_n)$;, δX_n vào bảng kết quả. Nếu $\lvert F(X_n)\rvert \leq \Delta F$ thì KẾT THÚC.

4	Làm mới giá trị X_0
	`>> Xo = Xn;`
	Tăng bước lặp thêm 1
	`>> k = k+1`
		Thực hiện lại bước 3

2.2 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp Seidel

Bài tập 2. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp với $\Delta F = 10^{-3}$.

$$\begin{cases} 5x_1 & +x_2 & +x_3 & = 7 \\ x_1 & +10x_2 & +x_3 & = 12 \\ x_1 & +x_2 & +20x_3 & = 22 \end{cases}$$

STT	X_1	X_2	X_3	$F(X)$	$\lvert F(X)\rvert \leq \Delta F$	δX_n
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY

0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW
	Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh
	`>> clear all; clc;`
	Thiết lập định dạng số nhiều kí tự
	`>> format long`	

1	Nhập ma trận A và C vào máy
	`>> A =[5 1 1; 1 10 1; 1 1 20];`
	`>> C =[7; 12; 22];`
		Đọc giá trị A và C từ giả thiết.

2	Tính giá trị B và C
	`>> B=-A./[diag(A) diag(A) diag(A)]+eye(3); G=C./diag(A);`
	Chọn nghiệm thử ban đầu
	`>> Xo = G; k = 1; Xn=Xo`	

3	Tìm nghiệm mới và các sai số tương ứng
	`>> Xn(1)=B(1,:)*Xo+G(1),`
	`>> Xn(2)=B(2,1)*Xn(1)+B(2,2)*Xo(2)+B(2,3)*Xo(3)+G(2),`
	`>> Xn(3)=B(3,1)*Xn(1)+B(3,2)*Xn(2)+B(3,3)*Xo(3)+G(3),`
	`>> rEX = norm((Xn-Xo)./Xo),`
	`>> FX = norm(A*Xn - C),`
		Viết giá trị X_n, $f(X_n)$;, δX_n vào bảng kết quả. Nếu $\lvert F(X_n)\rvert \leq \Delta F$ thì KẾT THÚC.

4	Làm mới giá trị X_0
	`>> Xo = Xn;`
	Tăng bước lặp thêm 1
	`>> k = k+1`
		Thực hiện lại bước 3

3 Lập trình tính toán

Bài tập 3. Viết function cho bài toán giải hệ 3 phương trình 3 ẩn

a) Bằng phương pháp lặp.

b) Bằng phương pháp Seidel.

c) Dùng các function mới viết để giải lại bài tập 1.

c) Dùng các function mới viết để giải lại bài tập 2 bằng.

Bài tập 4. Viết function cho bài toán giải hệ 5 phương trình 5 ẩn

a) Bằng phương pháp lặp.

b) Bằng phương pháp Seidel.

c) Dùng các function mới viết để giải bài toán sau

$$\begin{cases} \begin{array}{llllll} 6x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & =9 \\ 2x_1 & +9x_2 & +3x_3 & +x_4 & +2x_5 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & +10x_3 & +4x_4 & +2x_5 & =-12 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +8x_4 & +3x_5 & =-12 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +9x_5 & =5 \end{array} \end{cases}$$

Bài tập 5. Viết function cho bài toán giải hệ n phương trình n

a) Bằng phương pháp lặp.

b) Bằng phương pháp Seidel.

BÀI THỰC HÀNH SỐ 5
XẤP XỈ HÀM SỐ BẰNG ĐA THỨC NỘI SUY

1 Tóm tắt lý thuyết

Khi khảo sát đối tượng y phụ thuộc biến x, người ta không tìm được công thức biểu diễn của hàm $y(x)$ mà chỉ tìm được vài giá trị quan hệ giữa y và x thường được cho bởi bảng sau

x_0	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Tiếp đến, người ta cần tìm giá trị $\overline{y_c}$ tương ứng với tọa độ x_c không có trong bảng trên. Để thực hiện điều này, ta xây dựng một đa thức $P_n(x)$ đi qua tất cả các điểm trong bảng dữ liệu.

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \tag{5.1}$$

Sau đó giá trị giá trị $\overline{y_0}$ được tính bởi $P_n(x_0)$.

Dưới đây trình bày ba phương pháp dùng đa thức để xấp xỉ bảng giá trị (x_i, y_i) với $1 \leq i \leq n+1$. Tuy thực hiện theo các thuật toán khác nhau nhưng chúng cùng cho ra một kết quả. Vì chỉ có duy nhất một đa thức cấp n có đồ thị đi qua $n = 1$ điểm cho trước.

1.1 Xấp xỉ bằng đa thức tổng quát

Ta lần lượt thay $n+1$ điểm vào đa thức $P_n(x)$ và dẫn đến hệ phương trình $n+1$ phương trình

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n = y_1 \\ \quad ... \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Phương trình trên được viết lại dưới dạng ma trận $X \cdot A = Y$ trong đó X, Y và A được biểu diễn như sau

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Ta cần giải hệ trên để tìm $n+1$ ẩn $a_0, a_1, ..., a_n$. Khi đó đa thức $P_n(x)$ hoàn toàn xác định

Thuật toán xấp xỉ bằng đa thức tổng quát được trình bày như sau:

Thuật toán phương pháp đa thức tổng quát

Bước 1: Khai báo Bảng dữ liệu (xx, yy) và tọa độ x_c.
Bước 2: Xây dựng ma trận X và Y có dạng (5.2).
Bước 3: Giải phương trình $X \cdot A = Y$ tìm A.
Bước 4: Xây dựng đa thức nội suy có dạng (5.1) với $A = [a_0; a_1; a_2; ...; a_n]$ tìm được ở bước 2.
Bước 5: Xấp xỉ giá trị y_c bởi $\overline{y_c} = P_n(x_c)$

Nhận xét: Bài toán giải hệ phương trình ở bước 3 rất mất thời gian và công sức nếu n lớn.

1.2 Xấp xỉ bằng đa thức Lagrange

Ta xây dựng các đa thức $L_{i,n}(x)$ có tính chất $L_{i,n}(x_i) = 1$ và $L_{i,n}(x_j) = 0$. Đa thức này có dạng

$$L_{i,n}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}, \quad 0 \leq i \leq n \tag{5.3}$$

Khi đó đa thức $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{i,n}(x) y_i$ là đa thức bậc n đi qua tất cả (x_i, y_i) với $0 \leq i \leq n$.

Thuật toán phương pháp đa thức Lagrange

Bước 1: Khai báo Bảng dữ liệu (xx, yy) và tọa độ x_0.

Bước 2: Xây dựng các đa thức Lagrange $L_{i,n}(x)$ theo (5.3).

Bước 3: Xây dựng đa thức nội suy $L_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_{i,n}(x) y_i$.

Bước 4: Xấp xỉ giá trị y_c bởi $\overline{y_c} = L_n(x_c)$

Nhận xét: Bài toán xây dựng đa thức Lagrange ở bước 2 khá cồng kềnh trong việc biểu diễn về đa thức. Nhưng nhìn chung thì dễ thực hiện hơn phương pháp đa thức tổng quát.

1.3 Xấp xỉ bằng đa thức Newton

Ta xây dựng các tỷ sai phân $n[x_i x_{i+1}, ..., x_{i+j}])$ có dạng như sau

$$\begin{aligned} n[x_i] &= y_i; \\ n[x_i, x_{i+1}] &= \frac{n[x_{i+1}] - n[x_i]}{x_{i+1} - x_i}; \\ n[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j}] &= \frac{n[x_{i+1}, ..., x_{i+j}] - n[x_i, ..., x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}; \end{aligned} \tag{5.4}$$

Khi đó đa thức xấp xỉ theo phương pháp Newton tiến có dạng

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} n[x_0, x_2, ..., x_i](x - x_0)(x - x_1)(x - 2)...(x - x_{i-1}) \tag{5.5}$$

và đa thức xấp xỉ theo phương pháp Newton tiến có dạng

$$N_n(x) = \sum_{j=n}^{0} n[x_j, x_{j+1}, ..., x_n](x - x_j)(x - x_{j+1})...(x - x_n) \tag{5.6}$$

Thuật toán phương pháp đa thức Lagrange

Bước 1: Khai báo Bảng dữ liệu (xx, yy) và tọa độ x_c.

Bước 2: Xây dựng các tỉ sai phân $n[x_i x_{i+1}, ..., x_{i+j}])$ theo (5.4).

Bước 3: Xây dựng đa thức nội suy $N_n(x)$ theo (5.5) hoặc (5.6).

Bước 4: Xấp xỉ giá trị y_0 bởi $\overline{y_0} = N_n(x_0)$

Nhận xét: Thuật toán xấp xỉ bằng phương pháp Newton có độ phức tạp ngang bằng với phương pháp Lagrange và giải quyết bài toán tốt hơn phương pháp đa thức tổng quát.

2 Thực hành trên máy tính

2.1 Nội suy hàm số bằng đa thức tổng quát

Bài tập 1. Tìm giá trị tại $x = 2.5$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng

x	1	2.2	3.1	4	2.5
y	1.678	3.267	2.198	3.787	

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập vector xx, yy và xc vào máy
	`>> xx =[ 1, 2.2, 3.2, 4];`
	`>> yy =[ 1.678, 3.267, 2.198, 3.787];`
	`>> xc =2.5;`
		Đọc giá trị xx, yy, xc từ giả thiết.

2	Xây dựng ma trận X và Y
	`>> X= [1 xx(1) xx(1)^2 xx(1)^3; 1 xx(2) xx(2)^2 xx(2)^3;...`
	`1 xx(3) xx(3)^2 xx(3)^3; 1 xx(4) xx(4)^2 xx(4)^3;];`
	`>> Y= [yy(1); yy(2); yy(3); yy(4)];`	

3	Giải phương trình $XA = Y$ `>> A=inv(X)*Y,`	

4	Xây dựng đa thức nội suy $P_n(x)$
	`>> syms x;`
	`>> P=A(1)+A(2)*x+A(3)*x^2+A(4)*x^3;`	

5	Xấp xỉ giá trị yc `>> yc=subs(P,x,xc),`	Viết giá trị yc vào bảng kết quả.

6	Vẽ đồ thị của đa thức xấp xỉ
	`>> ezplot(P,[xx(1) xx(end)]);`
	Vẽ các điểm trong bảng dữ liệu ban đầu
	`>> hold on; plot(xx,yy,'bo');`	

Bài tập 2. Tìm giá trị tại $x = 5$ và $x = 10$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng

x	2	4.5	5.7	7.2	9.3	5	10
y	3.218	1.642	2.398	2.145	3.135		

Bài tập 3. Tìm giá trị tại $x = -2$ và $x = 0$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng

x	-3.2	-2.5	-1.7	-0.8	0.3	1.5	-2	0
y	-8.982	-5.831	-4.261	-1.837	-3.298	-0.249		

2.2 Nội suy hàm số bằng đa thức Lagrange

Bài tập 4. Tìm giá trị tại $x = 2.5$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng

x	1	2.2	3.1	4	2.5
y	1.678	3.267	2.198	3.787	

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
0	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập vector xx, yy và xc vào máy
	`>> xx =[ 1, 2.2, 3.2, 4];`
	`>> yy =[ 1.678, 3.267, 2.198, 3.787];`
	`>> xc =2.5;`
		Đọc giá trị xx, yy, xc từ giả thiết.

2	Xây dựng các đa thức $L_{i,n}$
	`>> syms x;`
	`>> L03 = ((x-xx(2))*(x-xx(3))*(x-xx(4)))/...`
	`((xx(1)-xx(2))*(xx(1)-xx(3))*(xx(1)-xx(4)));`
	`>> L13 = ((x-xx(1))*(x-xx(3))*(x-xx(4)))/...`
	`((xx(2)-xx(1))*(xx(2)-xx(3))*(xx(2)-xx(4)));`
	`>> L23 = ((x-xx(1))*(x-xx(2))*(x-xx(4)))/...`
	`((xx(3)-xx(1))*(xx(3)-xx(2))*(xx(3)-xx(4)));`
	`>> L33 = ((x-xx(1))*(x-xx(2))*(x-xx(3)))/...`
	`((xx(4)-xx(1))*(xx(4)-xx(2))*(xx(4)-xx(3)));`	

3	Xây dựng đa thức nội suy $L_n(x)$ `>> L=L03*yy(1) + L13*yy(2) + L23*yy(3) + L33*yy(4);`	
4	Xấp xỉ giá trị yc `>> yc=subs(L,x,xc),`	Viết giá trị yc vào bảng kết quả.

5	Vẽ đồ thị của đa thức xấp xỉ
	`>> ezplot(L,[xx(1),xx(end)]),`
	Vẽ các điểm trong bảng dữ liệu ban đầu
	`>> hold on, plot(xx,yy,'bo'),`	

Bài tập 5. Tìm giá trị tại $x = 5$ và $x = 10$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng

x	2	4.5	5.7	7.2	9.3	5	10
y	3.218	1.642	2.398	2.145	3.135		

Bài tập 6. Tìm giá trị tại $x = -2$ và $x = 0$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng

x	-3.2	-2.5	-1.7	-0.8	0.3	1.5	-2	0
y	-8.982	-5.831	-4.261	-1.837	-3.298	-0.249		

2.3 Nội suy hàm số bằng đa thức Newton

Bài tập 7. Tìm giá trị tại $x = 2.5$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng

x	1	2.2	3.1	4	2.5
y	1.678	3.267	2.198	3.787	

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập vector xx,yy và yc vào máy
	`>> xx =[ 1, 2.2, 3.2, 4];`
	`>> yy =[ 1.678, 3.267, 2.198, 3.787];`
	`>> xc =2.5;`
		Đọc giá trị xx, yy, xc từ giả thiết.

2	Xây dựng các tỉ sai phân
	`>> n1=yy;`
	`>> n2(1)=(n1(2)-n1(1))/(xx(2)-xx(1);`
	`>> n2(2)=(n1(3)-n1(2))/(xx(3)-xx(2);`
	`>> n2(3)=(n1(4)-n1(3))/(xx(4)-xx(3);`
	`>> n3(1)=(n2(2)-n2(1))/(xx(3)-xx(1);`
	`>> n3(2)=(n2(3)-n2(2))/(xx(4)-xx(2);`
	`>> n4(1)=(n3(2)-n3(1))/(xx(4)-xx(1);`	

3	Xây dựng đa thức nội suy $N(x)$
	`>> syms x;`
	`>> N= n1(1) + n2(1)*(x-xx(1)) + n3(1)*(x-xx(1))*(x-xx(2)) ...`
	`+ n4(1)*(x-xx(1))*(x-xx(2))*(x-xx(3));`	

4	Xấp xỉ giá trị yc `>> yc=N(xc),`	Viết giá trị yc vào bảng kết quả.

5	Vẽ đồ thị của đa thức xấp xỉ
	`>> ezplot(N,[xx(1),xx(end)],`
	Vẽ các điểm trong bảng dữ liệu ban đầu
	`>> plot(xx,yy,'bo'),`	

Bài tập 8. Tìm giá trị tại $x = 5$ và $x = 10$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng

x	2	4.5	5.7	7.2	9.3	5	10
y	3.218	1.642	2.398	2.145	3.135		

Bài tập 9. Tìm giá trị tại $x = -2$ và $x = 0$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng

x	-3.2	-2.5	-1.7	-0.8	0.3	1.5	-2	0
y	-8.982	-5.831	-4.261	-1.837	-3.298	-0.249		

3 Lập trình tính toán

Bài tập 10. Viết function xây dựng hàm đa thức xấp xỉ và nội suy dùng đa thức tổng quát cho bảng 4 dữ liệu

a) Thực hiện với các yêu cầu sau:

(i) Input là giá trị xx, yy và tọa độ xc

(ii) Vẽ đồ thị hàm xấp xỉ và bảng dữ liệu

b) Sử dụng function trên để giải bài tập 1.

Bài tập 11. Viết function xây dựng hàm đa thức xấp xỉ và nội suy dùng đa thức Lagrange cho bảng 4 dữ liệu

a) Thực hiện với các yêu cầu sau:

(i) Input là giá trị xx, yy và tọa độ xc

(ii) Vẽ đồ thị hàm xấp xỉ và bảng dữ liệu

b) Sử dụng function trên để giải bài tập 4

Bài tập 12. Viết function xây dựng hàm đa thức xấp xỉ và nội suy dùng đa thức Newton cho bảng 4 dữ liệu

a) Thực hiện với các yêu cầu sau:

(i) Input là giá trị xx, yy và tọa độ xc

(ii) Vẽ đồ thị hàm xấp xỉ và bảng dữ liệu

b) Sử dụng function trên để giải bài tập 7

Bài tập 13. Viết function xây dựng hàm đa thức xấp xỉ và nội suy dùng đa thức tổng quát

a) Cho bảng 6 dữ liệu và giải lại bài tập 3.

b) Cho bảng n dữ liệu.

Bài tập 14. Viết function xây dựng hàm đa thức xấp xỉ và nội suy dùng đa thức Lagrange

a) Cho bảng 6 dữ liệu và giải lại bài tập 6.

b) Cho bảng n dữ liệu.

Bài tập 15. Viết function xây dựng hàm đa thức xấp xỉ và nội suy dùng đa thức Newton

a) Cho bảng 6 dữ liệu và giải lại bài tập 9.

b) Cho bảng n dữ liệu.

BÀI THỰC HÀNH SỐ 6
XẤP XỈ HÀM SPLINE và BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Xấp xỉ bằng phương pháp đường cong Spline

Với một bộ dữ liệu (x_i, y_i), ta xây dựng một đường cong trơn từng khúc sao cho nó đi qua hết tât cả các điểm. Một trong những đường cong phù hợp và được sử dụng nhất là đường cong spline tự nhiên bậc ba có dạng

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{với } x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x) & \text{với } x \in [x_1, x_2] \\ \quad\ldots & \\ s_n(x) & \text{với } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \tag{6.1}$$

Cơ sở để xây dựng đường cong spline $\overline{S}(x)$ là sự liên tục và khả vi tại các điểm nối tiếp (cũng là những điểm trong bộ dữ liệu). Từ đó ta có

$$\begin{aligned} s_i(x_i) &= s_{i+i}(x_i) = S(x_i) \\ s'_i(x_i) &= s'_{i+i}(x_i) = S'(x_i) \\ s''_i(x_i) &= s''_{i+i}(x_i) = S''(x_i) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Đặt $m_i = S''(x_i)$, tích phân hai lần phương trình cuối và áp dụng hai phương trình trên của (6.2), ta thu được hệ phương trính sau

$$\begin{cases} m_i \dfrac{h_i}{6} + m_{i+1}\dfrac{h_i + h_{i+1}}{3} + m_{i+2}\dfrac{h_{i+1}}{6} = \dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} & \text{với } 0 \le i \le n-2 \\ m_0 = m_n = 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

với $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Khi đó ta thu được dạng tường minh của $s_i(x)$

$$s_i(x) = m_{i+1}\frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + N_i \frac{x - x_i}{h_i} \qquad \text{với } x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{6.4}$$

và

$$\begin{cases} M_i = y_i - m_i \dfrac{h_i^2}{6} \\ N_i = y_{i+1} - m_{i+1}\dfrac{h_i^2}{6} \end{cases} \quad \text{với } 0 \le i \le n-1 \tag{6.5}$$

Thuật toán phương pháp đường cong Spline tự nhiên bậc 3

Bước 1: Khai báo Bảng dữ liệu (xx, yy) và tọa độ x_c.

Bước 2: Tìm các giá trị m_i thỏa mãn (6.3).

Bước 3: Tìm các giá trị M_i, N_i thỏa mãn (6.5).

Bước 4: Xây dựng đa thức nội suy $S(x)$ có dạng (6.1) với các $s_i(x)$ được xây dựng từ (6.4).

Bước 5: Xấp xỉ giá trị y_c bởi $\overline{y_c} = S(x_c)$

Nhận xét: Đường cong spline gồm nhiều đoạn cong nhỏ với bậc đa thức của chúng là bậc 3. Tại các điểm nối, hàm số, đạo hàm cấp 1 và cấp 2 đều tồn tại. Trong sự so sánh với hàm đa thức cấp n, việc xây dựng hàm spline tuy phức tạp về thuận toán nhưng sử dụng ít tính toán hơn. Ngoài ra, đường cong spline có vẻ gần với các dữ liệu hơn. Ngược lại hàm đa thức có thuật toán đơn giản nhưng sử dụng nhiều tính toán. Tuy nhiên hàm đa thức có mặt mạnh là nó khả vi đến cấp n trong khi spline chỉ khả vi đến cấp 3.

1.2 Xấp xỉ bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất

Với một bộ dữ liệu (x_i, y_i), ta xây dựng một đường cong sao cho khoảng cách của nó đến các dữ liệu là nhỏ nhất. Những đường cong này có dạng được dự đoán trước dựa vào tính chất của bộ dữ liệu.

Theo phương pháp bình phương nhỏ nhất, người ta đặt hàm số xấp xỉ là $R(x)$ và định nghĩa khoảng cách từ bộ dữ liệu đến đường cong bởi

$$T = \sum_{i=1}^{n} (\overline{R}(x_i) - y_i)^2 \tag{6.6}$$

Để tổng khoảng cách này nhỏ nhất, ta đưa về giải hệ phương trình

$$\frac{\partial T}{\partial a_i} = 0, \qquad \text{với } a_i \text{ là các hệ số của } \overline{R}(x). \tag{6.7}$$

Hai dạng thường gặp nhất của $R(x)$ là $R_1(x) = ax + b$ và $R_2(x) = ae^{bx}$.

a) Hàm xấp xỉ $\overline{R}_1(x) = ax + b$ là hàm đơn giản nhất và thường được sử dụng nhất.

Thuật toán phương pháp bình phương nhỏ nhất dùng đường thẳng

Bước 1: Khai báo Bảng dữ liệu (xx, yy) và tọa độ x_c.

Bước 2: Tính các giá trị $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $XX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $XY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Bước 3: Giải hệ phương trình sau để tìm a và b

$$\begin{cases} XX \cdot a & +X \cdot b & = XY \\ X \cdot a & +n \cdot b & = Y \end{cases}$$

Bước 4: Xây dựng hàm xấp xỉ $R_1(x) = ax + b$.

Bước 5: Xấp xỉ giá trị y_c bởi $\overline{y_c} = R_1(x_c)$.

b) Hàm xấp xỉ $R_2(x) = ae^{bx}$ là một hàm khá phổ biến, lí do là nó mô phỏng tốt các bộ dữ liệu có biến thiên lớn. Lưu ý rằng trong trường hợp tổng quát các giá trị y_i phải dương.

Thuật toán phương pháp bình phương nhỏ nhất dùng đường cong

Bước 1: Khai báo Bảng dữ liệu (xx, yy) và tọa độ x_c.

Bước 2: Tính các giá trị $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $lY = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i$, $XX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $XlY = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i$.

Bước 3: Giải hệ phương trình sau để tìm A và B

$$\begin{cases} XX \cdot A & +X \cdot B & = XlY \\ X \cdot A & +n \cdot B & = lY \end{cases}$$

Gán $a = e^B, b = A$.

Bước 4: Xây dựng hàm xấp xỉ $R_2(x) = ae^{bx}$.

Bước 5: Xấp xỉ giá trị y_c bởi $\overline{y_c} = R_2(x_c)$.

Ngoài ra còn có một số xấp xỉ bình phương nhỏ nhấ phi tuyến như dạng lượng giác, dạng parabol,... tùy vào mô hình bài toán

2 Thực hành trên máy tính

2.1 Nội suy hàm số bằng hàm spline

Bài tập 1. Tìm giá trị tại $x = 3$, $x = 7.5$, của hàm $y = f(x)$ được bởi bảng sau bằng spline bậc ba tự nhiên

x	2	4	7	8	3	7.5
y	2.2	1.8	2.7	3.1		

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập vector xx, yy và $x1, x2$ vào máy
	`>> xx =[ 2; 4; 7; 8];`
	`>> yy =[ 2.2; 1.8; 2.7; 3.1];`
	`>> x1 =3; x2=7.5;`
		Đọc giá trị $xx, yy, x1, x2$.

2	Tính độ dài các đoạn chia h_i
	`>> h=xx(2:end)-xx(1:end-1);`
	Giải hệ phương trình tìm giá trị m_i
	`>> VT=[1, 0, 0, 0; h(1)/6, (h(1)+h(2))/3, h(2)/6, 0 ;`
	`0 h(2)/6, (h(2)+h(3))/3, h(3)/6; 0, 0, 0, 1];`
	`>> VP=[0; (yy(3)-yy(2))/h(2) - (yy(2)-yy(1))/h(1);...`
	`(yy(4)-yy(3))/h(3) - (yy(3)-yy(2))/h(2); 0]`
	`>> m=inv(VT)*VP;`	

3	Tìm giá trị M_i và N_i
	`>> M=yy(1:end-1)-m(1:end-1).*h(1:end).^2/6`
	`>> N=yy(2:end)-m(2:end).*h(1:end).^2/6`	

4	Xây dựng đa thức nội suy $s_i(x)$
	`>> syms x`
	`>> S1=m(2)*(x-xx(1))^3/6/h(1) + m(1)*(xx(2)-x)^3/6/h(1)...`
	`+ M(1)*(xx(2)-x)/h(1)+ N(1)*(x-xx(1))/h(1);`
	`>> S2=m(3)*(x-xx(2))^3/6/h(2) + m(2)*(xx(3)-x)^3/6/h(2)...`
	`+ M(2)*(xx(3)-x)/h(2)+ N(2)*(x-xx(2))/h(2);`
	`>> S3=m(4)*(x-xx(3))^3/6/h(3) + m(3)*(xx(4)-x)^3/6/h(3)...`
	`+ M(3)*(xx(4)-x)/h(3)+ N(3)*(x-xx(3))/h(3);`	

5	Xấp xỉ giá trị y_1, y_2, y_3,
	`>> y1=subs(S1,x,x1),`
	`>> y2=subs(S3,x,x2),`
		Viết giá trị y_c vào bảng kết quả.

6	Vẽ các điểm trong bảng dữ liệu và hàm spline
	`>> hold on; plot(xx,yy,'bo'); ezplot(S1,[xx(1) xx(2)]);`
	`>> ezplot(S2,[xx(2) xx(3)]); ezplot(S3,[xx(3) xx(4)]);`	

Bài tập 2. Tìm giá trị tại $x = 4$, $x = 5.5$ của hàm $y = f(x)$ cho bởi bảng sau bằng spline bậc ba tự nhiên

x	2.2	3.6	4.9	5.2	5.7	6.1	4	5.5
y	1.4	3.2	5.1	4.4	3.9	3.2		

2.2 Nội suy hàm số bằng bình phương nhỏ nhất

Bài tập 3. Tìm giá trị tại $x = 6$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau bằng hàm xấp xỉ $R(x) = ax + b$

x	2	4	7	8.5	9.5	11	6
y	2.2	4.2	6.8	8.1	9.7	10.5	

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập vector xx, yy và xc vào máy
	`>> xx =[ 2; 4; 7; 8.5; 9.5; 11];`
	`>> yy =[ 2.2; 4.2; 6.8; 8.1; 9.7; 10.5];`
	`>> xc =6;`
		Đọc giá trị xx, yy, xc từ giả thiết.

2	Tính các giá trị N, X, Y, XX, XY
	`>> N=length(xx); X= sum(xx); Y= sum(yy);`
	`>> XX= sum(xx.*xx); XY= sum(xx.*yy);`	

3	Giải hệ phương trình tìm a và b
	`>> syms a b`
	`>> [a,b]=solve(XX*a + X*b == XY, X*a + N*b == Y)`	

4	Xây dựng đa thức nội suy $R(x)$
	`>> syms x`
	`>> R=a*x+b;`	

5	Xấp xỉ giá trị y_c `>> yc=subs(R,x,xc),`	Viết giá trị y_c vào bảng kết quả.

6	Vẽ đồ thị của đa thức xấp xỉ
	`>> ezplot(R,[xx(1) xx(end)]);`
	Vẽ các điểm trong bảng dữ liệu ban đầu
	`>> hold on; plot(xx,yy,'bo'),`	

Bài tập 4. Tìm giá trị tại $x = 4.5$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau bằng hàm xấp xỉ $R(x) = ax + b$

x	1	2.1	2.9	3.8	5	6.2	4.5
y	3.021	4.219	5.018	5.986	7.139	8.138	

Bài tập 5. Tìm giá trị tại $x = 3.5$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau bằng hàm xấp xỉ $R(x) = ax + b$

x	1	1.6	2.1	3	3.3	3.7	4.1	4.9	6.2	3.5
y	1.1	2.2	3.5	4.9	7.2	7.8	7.9	8.5	10	

Bài tập 6. Tìm giá trị tại $x = 8.5$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau bằng hàm xấp xỉ $R(x) = ae^{bx}$

x	1.1	3.2	5.1	7.7	9.6	12.2	8.5
y	3.1	29.9	65.7	100.4	195.7	300.4	

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập vector xx, yy và xc vào máy
	`>> xx =[ 1.1; 3.2; 5.1; 7.7; 9.6; 12.2];`
	`>> yy =[ 3.1; 29.9; 65.7; 100.4; 195.7; 300.4];`
	`>> xc =8.5;`
		Đọc giá trị xx, yy, xc từ giả thiết.

2	Tính các giá trị N, X, Y, XX, XY
	`>> N=length(xx); X= sum(xx); lY= sum(log(yy));`
	`>> XX= sum(xx.*xx); XlY= sum(xx.*log(yy));`	

3	Giải hệ phương trình tìm a và b
	`>> syms A B`
	`>> [A,B]=solve(XX*A + X*B == XlY, X*A + N*B == lY)`	

4	Xây dựng đa thức nội suy $R(x)$
	`>> syms x`
	`>> R=exp(B)*exp(A*x);`	

5	Xấp xỉ giá trị y_c `>> yc=subs(R,x,xc),`	Viết giá trị y_c vào bảng kết quả.

6	Vẽ đồ thị của đa thức xấp xỉ
	`>> ezplot(R,[xx(1) xx(end)]);`
	Vẽ các điểm trong bảng dữ liệu ban đầu
	`>> hold on; plot(xx,yy,'bo'),`	

Bài tập 7. Tìm giá trị tại $x = 7.7$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau bằng hàm xấp xỉ $R(x) = ae^{bx}$

x	2	4	7	8.5	9.5	11	7.7
y	2.2	2.5	2.7	3.1	3.2	3.5	

Bài tập 8. Tìm giá trị tại $x = 5$ của hàm $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau bằng hàm xấp xỉ $R(x) = ae^{bx}$

x	3	3.4	4.1	4.3	4.7	5.3	5.3	6	6.4	5
y	1.23	1.40	1.69	1.79	2.13	2.52	2.45	2.97	3.44	

3 Lập trình tính toán

Bài tập 9. Viết function xấp xỉ và nội suy hàm số bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất dạng $R(x) = ax + b$.
a) Dùng function trên để giải lại bài toán 3.
b) Dùng function trên để giải lại bài toán 4.
c) Dùng function trên để giải lại bài toán 5.

Bài tập 10. Viết function xấp xỉ và nội suy hàm số bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất dạng $R(x) = ae^{bx}$.
a) Dùng function trên để giải lại bài toán 6.
b) Dùng function trên để giải lại bài toán 7.
c) Dùng function trên để giải lại bài toán 8.

Bài tập 11. Viết function xấp xỉ và nội suy hàm số bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất.
a) hàm xấp xỉ có dạng dạng $R(x) = ax^2 + b$ và thử lại với bộ dữ liệu thỏa $y_i = 0.5 \cdot x_i^2 + 1.5$.
a) hàm xấp xỉ có dạng dạng $R(x) = ax^b$ và thử lại với bộ dữ liệu thỏa $y_i = 2 \cdot x_i^{1.3}$.

Bài tập 12. Viết function xấp xỉ và nội suy hàm số bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất.
a) hàm xấp xỉ có dạng dạng $R(x) = ax^2 + bx + c$ và thử lại với bộ dữ liệu thỏa $y_i = 0.3 \cdot x_i^2 + 0.7 \cdot x_i - 2.5$.
a) hàm xấp xỉ có dạng dạng $R(x) = ax + b\sin x + c\sin x$ và thử lại với bộ dữ liệu thỏa $y_i = 3 \cdot x_i + 1.5\sin x_i - 3.5\cos x$.

Bài tập 13. Viết function xấp xỉ và nội suy hàm số bằng hàm spline bậc ba tự nhiên.
a) với bộ dữ liệu 4 số và giải lại bài toán 1.
b) với bộ dữ liệu 6 số và giải lại bài toán 2.
c) với bộ dữ liệu n số và thử lại với bộ dữ liệu thỏa $y_i = 3^{x_i}$.

BÀI THỰC HÀNH SỐ 7
ĐẠO HÀM SỐ và TÍCH PHÂN SỐ

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Tính đạo hàm số

Đạo hàm của hàm số được tính bằng giới hạn của tỉ số giữa số gia của hàm số và số gia của biến số. Công thức đạo hàm số được xây dựng từ ý tưởng bỏ qua giới hạn và chỉ giữ lại phần tỉ số giữa các số gia. Để tăng thêm độ chính xác cho phép tính, người ta thường thay đổi phần số gia của hàm số. Kết quả là có nhiều công thức tính đạo hàm số, nhưng những công thức có sự cân bằng (số gia của hàm số xoay quanh giá trị đang xét) là cho kết quả tốt hơn (sai số ít hơn).

• Công thức sai phân là công thức đơn giản nhất nhưng cho sai số khá lớn:

a) Công thức sai phân tiến

$$\overline{f'_{SPT}}(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{7.1}$$

b) Công thức sai phân lùi

$$\overline{f'_{SPL}}(x_0) \simeq \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \tag{7.2}$$

• Công thức ba điểm có biểu thức phức tạp hơn và cho kết quả khá tốt. Đặc biệt công thức ba điểm giữa là công thức thường được sử dụng nhất.

a) Công thức ba điểm cuối

$$\overline{f'_{3DC}}(x_0) = \frac{1}{2h}\Big(-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)\Big) \tag{7.3}$$

b) Công thức ba điểm giữa:

$$\overline{f'_{3DG}}(x_0) = \frac{1}{2h}\Big(-f(x_0-h)+f(x_0+h)\Big) \tag{7.4}$$

• Công thức năm điểm cho kết quả rất tốt nhưng rất cồng kềnh. Nếu không vì một lý do đặc biệt, rất ít khi người ta sử dụng nó.

a) Công thức năm điểm cuối:

$$\overline{f'_{5DC}}(x_0) = \frac{1}{12h}\Big(-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h)+16f(x_0+3h)-3f(x_0+4h)\Big) \tag{7.5}$$

b) Công thức năm điểm giữa:

$$\overline{f'_{5DG}}(x_0) = \frac{1}{12h}\Big(f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)\Big) \tag{7.6}$$

Việc tính đạo hàm số được thực hiện như sau

Thuật toán tính đạo hàm số
Bước 1: Khai báo Bảng dữ liệu (xx, yy).
Bước 2: Tính đạo hàm số theo công thức (7.1), (7.2),(7.3), (7.4),(7.5) hoặc (7.6).

1.2 Tích phân số

Với các hàm số được cho dưới dạng bảng dữ liệu, ta không thể áp dụng cách tính tích phân theo dạng giải tích toán học được. Vì vậy, người ta sử dụng tích phân số để tìm giá trị xấp xỉ của đối tượng cần khảo sát.

• Công thức Newton - Cotes: Xuất phát từ việc sử dụng đa thức nội suy Lagrange và thực hiện việc đổi biến $x = x_0 + th$. Với t là biến mới và h là độ dài khoảng chia trong phân hoạch $[x_0, x_n]$, công thức tính tích phân được viết như sau

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq (x_c - x_d)\sum_{k=0}^{n} H_{k,n}y_k \tag{7.7}$$

trong đó

$$H_{k,n} = \frac{(-1)^{n-k}C_n^k}{n \cdot n!}\int_0^n \frac{t(t-1)...(t-n)}{t-k}dt \tag{7.8}$$

Từ đây ta có các công thức tính tích phân đơn giản hơn như sau

a) Công thức tích phân hình thang:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{i-1}}{2}(y_{i-1} + y_i) \tag{7.9}$$

trong đó $[x_{i-1}, x_i]$ là một ô tích phân được áp dụng (7.8) với $n = 1$.

b) Công thức tích phân Simpson $1/3$:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n/2}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \simeq \sum_{j=1}^{n/2}\frac{x_j - x_{j-1}}{6}(y_{j-1} + 4y_{j-1/2} + y_j) \tag{7.10}$$

trong đó $[x_{j-1}, x_j]$ là một ô tích phân gồm hai khoảng chia bằng nhau.

c) Công thức tích phân Simpson $3/8$:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n/3}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \simeq \sum_{k=1}^{n/3}\frac{(x_k - x_{k-1})}{8}(y_{k-1} + 3y_{k-2/3} + 3y_{k-1/3} + y_k) \tag{7.11}$$

trong đó $[x_{k-1}, x_k]$ là một ô tích phân gồm ba khoảng chia bằng nhau.

Việc tính tích phân theo phương pháp Newton - Cotes được tổng quát hóa như sau

Thuật toán tính tích phân Newton - Cotes
Bước 1: Khai báo Bảng dữ liệu (xx, yy).
Bước 2: Tính tích phân theo công thức (7.9), (7.10) hoặc (7.11)

• Tích phân Gauss: Cũng như tích phân Newton - Cotes, tích phân Gauss được tính dưới tổ hợp đại số của giá trị hàm tại một số điểm và trọng số tương ứng

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot f(x_k) \tag{7.12}$$

trong đó w_k là các trọng số tương ứng với các vị trí x_k. Việc tìm các trọng số w_k dựa vào đa thức Legendre giúp độ chính xác của phương pháp Gauss rất cao. Tuy nhiên khi sử dụng đa thức Legendre cũng có điểm yếu là chỉ lấy tích phân trên khoảng $[-1, 1]$ và các điểm x_k phải được xác định cụ thể. Sau này, người ta cũng tìm cách cải tiến phương pháp này nhưng cũng không khắc phục được hoàn toàn những điểm yếu này.

Dựa vào đa thức Legendre, người ta tính được tọa độ và trọng số tương ứng của tích phân Gauss như sau

n	Tọa độ	Trọng số
1	0	2
2	-0.577350269189626 0.577350269189626	1 1
3	-0.774596669241483 0 0.774596669241483	0.555555555555556 0.888888888888889 0.555555555555556
4	-0.861136311594053 -0.339981043584856 0.339981043584856 0.861136311594053	0.347854845137454 0.652145154862546 0.652145154862546 0.347854845137454
5	-0.906179845938664 -0.538469310105683 0 0.538469310105683 0.906179845938664	0.236926885056189 0.478628670499367 0.568888888888888 0.478628670499367 0.236926885056189

Trong trường hợp cận tích phân là khoảng $[a, b]$, ta có thể sử dụng công thức đổi biến $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$. Khi đó tích phân Gauss được viết lại như sau

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t(x))\frac{b-a}{2}dx \simeq \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot f(t(x_k)) \tag{7.13}$$

Công thức (7.13) cho phép tính tích phân với cận bất kì, tuy nhiên các tọa độ lấy tích phân đều phải xác định trước. Vì vậy phương pháp Gauss thường được dùng để tính nhanh tích phân của hàm sô (dạng công thức) chứ không phải dùng để tính tích phân hàm dạng bảng. Hoặc chỉ bảng đặc biệt có tọa độ Gauss mới được sử dụng.

Việc tính tích phân theo phương pháp Gauss đươc tổng quát hóa như sau

Thuật toán tính tích phân Gauss

Bước 1: Khai báo hàm số cần tính tích phân.

Bước 2: Tính tích phân theo công thức (7.13)

2 Thực hành trên máy tính

2.1 Tính toán đạo hàm số

Bài tập 1. Cho hàm số cho bởi bảng sau. Tìm đạo hàm của nó tại $x = 1$ bằng các công thức sai phân và ba điểm. Sau đó tính sai số tương đối của từng kết quả biết giá trị đạo hàm chính xác là $f'(1) = 0.5403$.

x	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4
y	0.7174	0.7833	0.8415	0.8912	0.9320	0.9636	0.9854

f'_{spt}	$\delta f'_{spt}$	f'_{spl}	$\delta f'_{spl}$	f'_{3dc}	$\delta f'_{3dc}$	f'_{3dg}	$\delta f'_{3dg}$

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập vector xx, yy vào máy
	`>> xx = [ 0.9; 1; 1.1; 1.2];`
	`>> yy = [ 0.7833; 0.8415; 0.8912; 0.9320];`
	`>> df = 0.5403;`
		Đọc giá trị xx, yy, I từ giả thiết.

2	Tính đạo hàm theo công thức sai phân
	`>> df_SPT = (yy(3)-yy(2))/(xx(3)-xx(2)),`
	`>> rEdf_SPT=abs((df-df_SPT)/df),`
	`>> df_SPL=(yy(2)-yy(1))/(xx(2)-xx(1)),`
	`>> rEdf_SPL=abs((df-df_SPL)/df),`
		Viết giá trị f'_{spt} và $\delta f'_{spt}$ vào bảng kết quả.
		Viết giá trị f'_{spl} và $\delta f'_{spl}$ vào bảng kết quả.

	Tính đạo hàm theo công thức ba điểm
	`>> df_3DC=(-3*yy(2)+4*yy(3)-yy(4))/(xx(4)-xx(2)),`
	`>> rEdf_3DC=abs((df-df_3DC)/df),`
	`>> df_3DC=(-yy(1)+yy(3))/(xx(3)-xx(1)),`
	`>> rEdf_3DG=abs((df-df_3DG)/df),`
		Viết giá trị f'_{3dc} và $\delta f'_{3dc}$ vào bảng kết quả.
		Viết giá trị f'_{3dg} và $\delta f'_{3dg}$ vào bảng kết quả.

Bài tập 2. Thực hiện lại bài toán 1 bằng công thức năm điểm.

f'_{5dc}	$\delta f'_{5dc}$	f'_{5dg}	$\delta f'_{5dg}$

2.2 Tính toán tích phân số

Bài tập 3. Tìm tính phân của hàm số cho bởi bảng sau bằng 3 công thức Newton - Cotes. Sau đó tính sai số tương đối của từng kết quả biết tích phân chính xác là $I = 42$

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4	-6	-14	-14	0	34	94

I_1	δI_1	I_2	δI_2	I_3	δI_3

Hướng dẫn

<table>
<tr><th>STT</th><th>THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH</th><th>THỰC HIỆN TRÊN GIẤY</th></tr>
<tr><td></td><td>Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW
Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh
<code>>> clear all; clc;</code></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>Nhập vector xx, yy vào máy
<code>>> xx = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7];</code>
<code>>> yy = [4; -6; -14; -14; 0; 34; 94];</code>
<code>>> I = 42;</code></td><td>Đọc giá trị xx, yy, I từ giả thiết.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Tính Tích phân theo công thức Newton - Cotes
<code>>> I1 = (xx(2)-xx(1))*(yy(2)+yy(1))/2 + (xx(3)-xx(2))*(yy(3)+yy(2))/2 ...</code>
<code>   + (xx(4)-xx(3))*(yy(4)+yy(3))/2 + (xx(5)-xx(4))*(yy(5)+yy(4))/2 ...</code>
<code>   + (xx(6)-xx(5))*(yy(6)+yy(5))/2 + (xx(7)-xx(6))*(yy(7)+yy(6))/2</code>
<code>>> rEI1=abs((I-I1)/I),</code></td><td>Viết giá trị I_1 và δI_1 vào bảng kết quả.</td></tr>
<tr><td></td><td><code>>> I2 = (xx(3)-xx(1))*(yy(3)+4*yy(2)+yy(1))/6 ...</code>
<code>   + (xx(5)-xx(3))*(yy(5)+4*yy(4)+yy(3))/6 ...</code>
<code>   + (xx(7)-xx(5))*(yy(7)+4*yy(6)+yy(5))/6</code>
<code>>> rEI2=abs((I-I2)/I),</code></td><td>Viết giá trị I_2 và δI_2 vào bảng kết quả.</td></tr>
<tr><td></td><td><code>>> I3 = (xx(4)-xx(1))*(yy(4)+3*yy(3)+3*yy(2)+yy(1))/8 ...</code>
<code>   + (xx(7)-xx(4))*(yy(7)+3*yy(6)+3*yy(5)+yy(4))/8</code>
<code>>> rEI3=abs((I-I3)/I),</code></td><td>Viết giá trị I_3 và δI_3 vào bảng kết quả.</td></tr>
</table>

Bài tập 4. Tìm tính phân của hàm số cho bởi bảng sau bằng 3 công thức Newton - Cotes. Sau đó tính sai số tương đối của từng kết quả biết tích phân chính xác là $I = 7.2$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	24	1	4	3	-8	-11	36

I_1	δI_1	I_2	δI_2	I_3	δI_3

Bài tập 5. Tìm tính phân của hàm số $f(x) = e^x$ trên $[2, 4]$ bằng phương pháp Gauss. Sau đó tính sai số tương đối của từng kết quả so với tích phân chính xác.

I_1	δI_1	I_2	δI_2	I_3	δI_3

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập hàm f vào máy
	`>> syms t; f=exp(t);`
	`>> a=2; b=4; I=int(f,t,2,4);`
		Đọc hàm f từ giả thiết.

2	Tính Tích phân theo công thức Gauss
	`>> w1 = 1; x12=-0.5774; t12= (b-a)*x12/2+(a+b)/2;`
	`>> w2 = 1; x22= 0.5774; t22= (b-a)*x22/2+(a+b)/2;`
	`>> I1=(b-a)/2*(w1*subs(f,t,t12)+w2*subs(f,t,t22));`
	`>> rEI1=abs((I-I1)/I);`
	
	`>> w1 = 0.5556; x13=-0.7746; t13= (b-a)*x13/2+(a+b)/2;`
	`>> w2 = 0.8889; x23= 0; t23= (b-a)*x23/2+(a+b)/2;`
	`>> w3 = 0.5556; x33= 0.7746; t33= (b-a)*x33/2+(a+b)/2;`
	`>> I2=(b-a)/2*(w1*subs(f,t,t13)+w2*subs(f,t,t23)+w3*subs(f,t,t33));`
	`>> rEI2=abs((I-I2)/I);`
	
	`>> w1 = 0.3479; x14=-0.8611; t14= (b-a)*x14/2+(a+b)/2;`
	`>> w2 = 0.6521; x24=-0.3340; t24= (b-a)*x24/2+(a+b)/2;`
	`>> w3 = 0.6521; x34= 0.3340; t34= (b-a)*x34/2+(a+b)/2;`
	`>> w4 = 0.3479; x44= 0.8611; t44= (b-a)*x44/2+(a+b)/2;`
	`>> I3=w1*subs(f,t,t14)+w2*subs(f,t,t24)+w3*subs(f,t,t34)+w4*subs(f,t,t44);`
	`>> I3= (b-a)/2*I3;`
	`>> rEI3=abs((I-I3)/I);`
		Viết giá trị I_1 và δI_1 vào bảng kết quả.
		
		Viết giá trị I_2 và δI_2 vào bảng kết quả.
		
		Viết giá trị I_3 và δI_3 vào bảng kết quả.

Bài tập 6. Tìm tính phân của hàm số $f(x) = \sin x$ trên $[0, \pi]$ bằng phương pháp Gauss. Sau đó tính sai số tương đối của từng kết quả so với tích phân chính xác.

I_1	δI_1	I_2	δI_2	I_3	δI_3

3 Lập trình tính toán

Bài tập 7. Thực hiện các yêu cầu sau
a) Viết function tính đạo hàm bằng phương pháp sai phân tiến và sai phân lùi.
b) Áp dụng function vùa viết để giải lại Bài tập 1.

Bài tập 8. Thực hiện các yêu cầu sau
a) Viết function tính đạo hàm bằng phương pháp ba điểm.
b) Áp dụng function vùa viết để giải lại Bài tập 1.

Bài tập 9. Thực hiện các yêu cầu sau
a) Viết function tính tích phân bằng phương pháp hình thang.
b) Áp dụng function vùa viết để giải lại Bài tập 3 và Bài tập 4.

Bài tập 10. Thực hiện các yêu cầu sau
a) Viết function tính tích phân bằng phương pháp simpson $1/3$.
b) Áp dụng function vùa viết để giải lại Bài tập 3 và Bài tập 4.

Bài tập 11. Thực hiện các yêu cầu sau
a) Viết function tính tích phân bằng phương pháp simpson $3/8$.
b) Áp dụng function vùa viết để giải lại Bài tập 3 và Bài tập 4.

Bài tập 12. Thực hiện các yêu cầu sau
a) Viết function tính các hệ số $H_{k,n}$ trong (7.8) với n.
b) Viết function tính tích phân bằng phương pháp Newton-Cotes tổn quát.
c) Áp dụng function vừa viết để giải lại bài 3 với $n = 4$.

Bài tập 13. Thực hiện các yêu cầu sau
a) Viết function tính tích phân bằng phương pháp Gauss 2 điểm nút.
b) Áp dụng function vừa viết để giải lại Bài tập 5 và Bài tập 6.

Bài tập 14. Thực hiện các yêu cầu sau
a) Viết function tính tích phân bằng phương pháp Gauss 3 điểm nút.
b) Áp dụng function vừa viết để giải lại Bài tập 5 và Bài tập 6.

Bài tập 15. Thực hiện các yêu cầu sau
a) Viết function tính tích phân bằng phương pháp Gauss 4 điểm nút.
b) Áp dụng function vừa viết để giải lại Bài tập 5 và Bài tập 6.

BÀI THỰC HÀNH SỐ 8
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1 Tóm tắt lý thuyết

Trong khoa học, kĩ thuật chúng ta gặp rất nhiều bài toán liên quan đến phương trình vi phân thường (chẳng hạn như bài toán tính vận tốc của một vật thể khi biết độ dài quãng đường trong những khoảng thời gian khác nhau, bài toán tính toán cường độ dòng điện theo điện lượng). Có nhiều trường hợp nghiệm đúng của phương trình vi phân không thể tìm ra được.

Các phương pháp gần đúng có thể chia làm hai nhóm: Nhóm thứ nhất được gọi là phương pháp giải tích, nhóm thứ hai được gọi là phương pháp số. Các phương pháp giải tích cho phép tìm nghiệm gần đúng dưới dạng một biểu thức giải tích. Các phương pháp số cho phép tìm nghiệm dưới dạng bảng. Dưới đây, ta chỉ giới thiệu một phương pháp giải tích thường dùng gọi là phương pháp lặp đơn, và một số phương pháp số (bao gồm phương pháp Euler, Euler cải tiến, Rung - Kutta).

Bài toán phương trình vi phân có dạng

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{8.1}$$

với $x \in D_x = [x_0 - a, x_0 + a]$ và $y \in D_y = [y_0 - b, y_0 + b]$. Trong nội dung chương trình, ta sẽ giải bài toán này với nghiệm hàm bằng phương pháp lặp, và nghiệm số bằng phương pháp Euler hoặc Runge - Kutta.

1.1 Tìm nghiệm hàm bằng phương pháp lặp

Ta tìm cách xấp xỉ nghiệm của bài toán bằng việc lặp nghiệm với sai số giảm dần. Trước hết, ta tích phân phương trình thứ nhất kết hợp với điều kiện thứ hai và thu được

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(s))ds \tag{8.2}$$

Từ đây ta thiết lập dãy

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{k+1}(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds \end{cases} \tag{8.3}$$

Dãy $y_k(x)$ được chứng minh là hội tụ về $y(x)$ là nghiệm của bài toán (8.1).

Tìm nghiệm hàm bằng phương pháp lặp

Bước 1: Khai báo hàm số $f(x, y)$ và điều kiệu đầu y_0.

(Mở vòng lặp - bắt đầu với $k = 1$)

Bước 2: Gán $y_{k+1} = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds$.

Nếu $\delta y_k < \delta y$ phá vòng lặp.

Bước 3: Gán $k = k + 1$

(Đóng vòng lặp)

Kết luận $\overline{y} = y_k$.

1.2 Tìm nghiệm số bằng phương pháp Euler

Phương pháp Euler và Euler cải tiến cho ta các nghiệm số của phương trình (**??**) tại một số điểm xác định trước. Ý tưởng của phương pháp Euler là sử dụng khai triển Taylor cho hàm $y(x)$ tại điểm x_0

$$y(x) \simeq \sum_{k=0}^{m} \frac{y^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k \tag{8.4}$$

Trường hợp đơn giản nhất ứng với $m = 1$ với lưu ý $y' = f(x, y)$, ta có phương pháp Euler

$$y_{k+1} \simeq y_k + (x_{k+1} - x_k)f(x_k, y_k) \tag{8.5}$$

Để tìm nghiệm chính xác hơn, người ta thay đổi phương trình trên và thu được phương pháp Euler cải tiến

$$\begin{cases} \tilde{y}_{k+1} \simeq y_k + (x_{k+1} - x_k)f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} \simeq y_k + \dfrac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})] \end{cases} \tag{8.6}$$

Tìm nghiệm số bằng phương pháp Euler
Bước 1: Khai báo hàm số $f(x, y)$ và điều kiệu đầu y_0.
Bước 2: Tìm các giá trị xấp xỉ y_i theo công thức (8.5) hoặc (8.6).

1.3 Tìm nghiệm số bằng phương pháp Runge-Kutta

Nội dung cơ bản của phương pháp Runge-Kutta là tăng độ chính xác của y_{i+1} bằng cách thêm các điểm trung gian giữa x_i và x_{i+1}. Khi đó phần số gia $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ được tính bởi.

$$\Delta y_i = c_1 k_1(h_i) + c_2 k_2(h_i) + ... + c_r k_r(h_i) \tag{8.7}$$

với c_j là các hệ số và $k_j(h_i)$ là các hàm số được xác định dựa trên x_i, y_j và $f(x_i, x_j)$.

a) Công thức Runge-Kutta bậc hai

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2 = h_i f(x_{i+1}, y_i + k_1) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \tag{8.8}$$

b) Công thức Runge-Kutta bậc ba

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2 = h_i f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = h_i f(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases} \tag{8.9}$$

Tìm nghiệm số bằng phương pháp Runge-Kutta
Bước 1: Khai báo hàm số $f(x, y)$ và điều kiệu đầu y_0.
Bước 2: Tìm các giá trị xấp xỉ y_i theo công thức (8.8) hoặc (8.9)

2 Thực hành trên máy tính

2.1 Tìm nghiệm hàm bằng phương pháp lặp

Bài tập 1. Tìm nghiệm của phương trình sau với sai số tương đối cho phép $\delta y = 0.1\%$

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.4]$$

STT	$y(x)$	δy_n	$\delta y_n < \delta y$
1			
2			
3			
4			

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập hàm số $f(x, y)$, a, b và y_0 vào máy
	`>> syms x y;`
	`>> f = x+y`
	`>> a = 0; b = 0.4;`
	`>> x0 = a; y0 = 1; k = 1; yo=y0`
		Đọc các giả thiết đề bài cho.

2	Tìm các nghiệm lặp y_k và sai số δy_n
	`>> yn = y0 + int(subs(f,y,yo),x,x0,x);`
	`>> rEyn=double(abs(int(yn-yo,x,a,b)/int(yo,x,a,b)));`
		Viết giá trị y_n, δy_n vào bảng kết quả.
		Nếu $\delta y_n \leq \delta y$ thì KẾT THÚC.

3	Làm mới giá trị y_k
	`>> yo = yn`
	Tăng bước lặp thêm 1
	`>> k = k+1`
		Thực hiện lại bước 2

Bài tập 2. Tìm nghiệm của phương trình sau với sai số tương đối cho phép $\delta y = 0.1\%$

$$\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.5]$$

STT	$y(x)$	δy_n	$\delta y_n < \delta y$
1			
2			
3			
4			

2.2 Tìm nghiệm số bằng phương pháp Euler

Bài tập 3. Tìm nghiệm của phương trình sau với các khoảng chia $h = 0.1$

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.4]$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_1	1				
y_2	1				

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập hàm số $f(x, y)$, a, b và y_0 vào máy
	`>> f =@(x,y) x+y;`
	`>> a = 0; b = 0.4; y0 = 1;`
	`>> xx=a:0.1:b;`
		Đọc các giả thiết đề bài cho.

2	Tìm các nghiệm số theo Euler và Euler cải tiến
	`>> y1 = 0*xx; y1(1)=y0;`
	`>> y1(2) = y1(1) + (xx(2)-xx(1))*f(xx(1),y1(1))`
	`>> y1(3) = y1(2) + (xx(3)-xx(2))*f(xx(2),y1(2))`
	`>> y1(4) = y1(3) + (xx(4)-xx(3))*f(xx(3),y1(3))`
	`>> y1(5) = y1(4) + (xx(5)-xx(4))*f(xx(4),y1(4))`
	
	`>> y2 = 0*xx; y2(1)=y0;`
	`>> y2(2) = y2(1) + (xx(2)-xx(1))*f(xx(1),y2(1))`
	`>> y2(2) = y2(1) + (xx(2)-xx(1))/2*(f(xx(1),y2(1))+f(xx(2),y2(2)))`
	`>> y2(3) = y2(2) + (xx(3)-xx(2))*f(xx(2),y2(2))`
	`>> y2(3) = y2(2) + (xx(3)-xx(2))/2*(f(xx(2),y2(2))+f(xx(3),y2(3)))`
	`>> y2(4) = y2(3) + (xx(4)-xx(3))*f(xx(3),y2(3))`
	`>> y2(4) = y2(3) + (xx(4)-xx(3))/2*(f(xx(3),y2(3))+f(xx(4),y2(4)))`
	`>> y2(5) = y2(4) + (xx(5)-xx(4))*f(xx(4),y2(4))`
	`>> y2(5) = y2(4) + (xx(5)-xx(4))/2*(f(xx(4),y2(4))+f(xx(5),y2(5)))`
		Viết giá trị y_1 vào bảng kết quả.
		
		Viết giá trị y_2 vào bảng kết quả.

Bài tập 4. Tìm nghiệm của phương trình sau với các khoảng chia $h = 0.1$

$$\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.5]$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_1	1					
y_2	1					

2.3 Tìm nghiệm số bằng phương pháp Runge - Kutta

Bài tập 5. Tìm nghiệm của phương trình sau với các khoảng chia $h = 0.1$

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.4]$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	1				

Hướng dẫn

STT	THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH	THỰC HIỆN TRÊN GIẤY
	Mở MATLAB, vào COMMAND WINDOW Xóa các dữ liệu cũ bằng lệnh `>> clear all; clc;`	

1	Nhập hàm số $f(x, y)$, a, b và y_0 vào máy
	`>> f =@(x,y) x+y;`
	`>> a = 0; b = 0.4; x0 = a; y0 = 1;`
	`>> xx=a:0.1:b; h=xx(2:end)-xx(1:end-1);`
		Đọc các giả thiết đề bài cho.

2	Tìm các nghiệm số theo Runge - Kutta bậc 3
	`>> k1=h(1)*f(x0,y0);`
	`>> k2=h(1)*f(x0+h(1)/2,y0+k1/2);`
	`>> k3=h(1)*f(x0+h(1),y0-k1+2*k2);`
	`>> y(1)=y0+(k1+4*k2+k3)/6`
	`>> k1=h(2)*f(xx(1),y(1));`
	`>> k2=h(2)*f(xx(1)+h(2)/2,y(1)+k1/2);`
	`>> k3=h(2)*f(xx(1)+h(2),y(1)-k1+2*k2);`
	`>> y(2)=y(1)+(k1+4*k2+k3)/6`
	`>> k1=h(3)*f(xx(2),y(2));`
	`>> k2=h(3)*f(xx(2)+h(3)/2,y(2)+k1/2);`
	`>> k3=h(3)*f(xx(2)+h(3),y(2)-k1+2*k2);`
	`>> y(3)=y(2)+(k1+4*k2+k3)/6`
	`>> k1=h(4)*f(xx(3),y(3));`
	`>> k2=h(4)*f(xx(3)+h(4)/2,y(3)+k1/2);`
	`>> k3=h(4)*f(xx(3)+h(4),y(3)-k1+2*k2);`
	`>> y(4)=y(3)+(k1+4*k2+k3)/6`
		Viết giá trị y_2 vào bảng kết quả.

Bài tập 6. Tìm nghiệm của phương trình sau với các khoảng chia $h = 0.1$

$$\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.5]$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1					

3 Lập trình tính toán

Bài tập 7. Thực hiện các yêu cầu sau

a) Viết function giải phương trình vi phân bằng phương pháp lặp.

b) Sử dụng function mới viết giải lại Bài tập 1 và Bài tập 2.

Bài tập 8. Thực hiện các yêu cầu sau

a) Viết function giải phương trình vi phân bằng phương pháp Euler.

b) Sử dụng function mới viết giải lại Bài tập 3 và Bài tập 4.

Bài tập 9. Thực hiện các yêu cầu sau

a) Viết function giải phương trình vi phân bằng phương pháp Euler cải tiến.

b) Sử dụng function mới viết giải lại Bài tập 3 và Bài tập 4.

Bài tập 10. Thực hiện các yêu cầu sau

a) Viết function giải phương trình vi phân bằng phương pháp Runge - Kutta bậc 2.

b) Sử dụng function mới viết giải lại Bài tập 5 và Bài tập 6.

Bài tập 11. Thực hiện các yêu cầu sau

a) Viết function giải phương trình vi phân bằng phương pháp Runge - Kutta bậc 3.

b) Sử dụng function mới viết giải lại Bài tập 5 và Bài tập 6.

Mục lục