

# Prirustkova\_metoda\_nosnik

January 6, 2025

#

Tato studijní pomůcka vznikla za podpory Inovačního projektu FSv ČVUT č. 15 “Inovativní pomůcky pro předměty Přetváření a porušování materiálů”.

(c) 2024 Lenka Dohnalová (lenka.dohnalova@fsv.cvut.cz), Petr Havlásek (petr.havlasек@cvut.cz), Milan Jirásek (milan.jirasek@cvut.cz)

---

## 1 Přírůstková metoda - spojitý nosník

### 1.1 Zadání

Konstrukce na obrázku má konstantní průřez a je vyrobena z ideálně pružnoplastického materiálu. Mezní plastický moment průřezu je  $M_0 = 500$  kNm, celková délka nosníku je 3m. Nosník je zatížen dvěma svislými silami, které působí přesně ve třetinách délky nosníku, jednotlivé úseky mají tedy délku  $L = 1$  m.

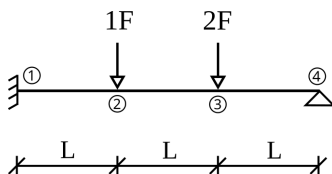
Proveďte přírůstkovou pružnoplastickou analýzu.

Určete hodnotu síly  $F$  v okamžiku vzniku prvního plastického kloubu a v mezním plastickém stavu konstrukce.

Pro oba stavy vykreslete odpovídající průběhy momentů a posouvajících sil.

Vliv stlačení nebo protažení střednice zanedbejte.

```
[275]: from IPython.display import display, Image
display(Image(filename="Prirustkova_met_nosnik_zadani.png", width=400))
```



Import potřebných knihoven

```
[276]: %matplotlib inline

import math
import numpy as np

from IPython.display import Markdown as md

import matplotlib.pyplot as plt

#!pip install sympy
from sympy import *
import sympy as smp

import matplotlib.patches as patches
```

```
[277]: #Funkce pro vykreslení průběhu ohybových momentů na nosníku:
def Vykresleni_M(valM1, valM2, valM3, valM4):

    # Délky jednotlivých částí
    lengths = [val_L, val_L, val_L] # délky mezi styčníky

    # Souřadnice styčníků (x-ové hodnoty)
    x_positions = [0]
    for length in lengths:
        x_positions.append(x_positions[-1] + length)

    # Hodnoty momentů ve styčnicích [kNm]
    M_values = [valM1, valM2, valM3, valM4]

    # Vykreslení průběhu momentů
    plt.plot(x_positions, M_values, color='blue', linestyle='-')

    # Vykreslení nosníku černě plnou čarou
    plt.plot([x_positions[0], x_positions[-1]], [0, 0], color='black',
↳ linewidth=1.5)

    # Přidání hodnot v místech styčníků
    for x, y in zip(x_positions, M_values):
        # Vypisujeme absolutní hodnotu (bez znaménka)
        if y != 0:
            plt.text(x, y, f"{abs(y):.2f}", fontsize=10, ha='center', va='top'
↳ if y > 0 else 'bottom')
        else:
            # Posunutí textu pro nulovou hodnotu
            plt.text(x, y + 5, f"{abs(y):.2f}", fontsize=10, ha='center',
↳ va='top', verticalalignment='top')
```

```

# Svislé spojnice pro všechny styčníky s osou X
for i, y in enumerate(M_values):
    plt.plot([x_positions[i], x_positions[i]], [0, y], color='blue',
↳linestyle='-')

# Titulek a popisky
plt.title('Průběh ohybových momentů [kNm]')
plt.xlabel('Délka nosníku [m]')

# Odstranění zobrazení svislé osy
plt.gca().yaxis.set_ticks([]) # Odstranění čárek
plt.gca().yaxis.set_ticklabels([]) # Odstranění hodnot

# Volba orientace osy y (kladná poloosa dolů - spodní vlákna)
plt.gca().invert_yaxis()

# Nastavení popisek na ose x v místech styčnic
plt.xticks(x_positions)

# Zobrazení grafu
plt.show()

```

[278]: # Funkce pro vykreslení průběhu posouvajících sil na nosníku:

```

def Vykresleni_V(valV12, valV21, valV23, valV32, valV34, valV43):

    # Délky jednotlivých částí
    lengths = [val_L, val_L, val_L] # délky mezi styčníky

    # Souřadnice styčnic (x-ové hodnoty)
    x_positions = []
    for i, length in enumerate(lengths):
        x_positions.append(sum(lengths[:i])) # Levá hodnota pro styčník
        x_positions.append(sum(lengths[:i + 1])) # Pravá hodnota pro styčník

    # Hodnoty posouvajících sil ve styčnicích [kN]
    V_values = [valV12, valV21, valV23, valV32, valV34, valV43]

    # Vykreslení posouvajících sil
    plt.figure(figsize=(10, 5))

    # Vykreslení průběhu posouvajících sil (konstantní úseky)
    plt.plot(x_positions, V_values, color='green', linestyle='-')

    # Vykreslení nosníku černě plnou čarou
    plt.plot([x_positions[0], x_positions[-1]], [0, 0], color='black',
↳linewidth=1.5)

```

```

# Přidání hodnot ve styčnicích
for x, y in zip(x_positions, V_values):
    plt.text(x, y + (2 if y > 0 else -2), f"{y:.2f}", fontsize=10,
    ↪ha='center', va='bottom' if y > 0 else 'top')

# Svislé spojnice pro všechny styčníky s osou X
for i, y in enumerate(V_values):
    plt.plot([x_positions[i], x_positions[i]], [0, y], color='green',
    ↪linestyle='--')

# Titulek a popisky
plt.title('Průběh posouvajících sil [kN]')
plt.xlabel('Délka nosníku [m]')

# Odstranění zobrazení svislé osy
plt.gca().yaxis.set_ticks([]) # Odstranění čárek
plt.gca().yaxis.set_ticklabels([]) # Odstranění hodnot

# Nastavení popisků na ose x v místech styčniců
plt.xticks(x_positions)

# Zobrazení grafu
plt.show()

```

## 1.2 Řešení

Definice proměnných a jejich hodnot:

```

[279]: L = smp.symbols('L', real = True, positive = True)

F = smp.symbols('F', real = True)

val_L = 1
val_M0 = 500 # [kNm]

```

## 1.3 Vznik 1. plastického kloubu

Vyřešíme průběh momentů od referenčního jednotkového zatížení.

```

[280]: # Z tabulek pro ZDM:
M_1 = -13 / 9 * F * L
val_M1_ref1 = M_1.subs({F: 1, L: val_L})
print(f"Moment M12 od jednotkové velikosti síly F: {val_M1_ref1:.3f} kNm")

M_2 = 10 / 27 * F * L
val_M2_ref1 = M_2.subs({F: 1, L: val_L})
print(f"Moment M2 od jednotkové velikosti síly F: {val_M2_ref1:.3f} kNm")

```

```

M_3 = 32 / 27 * F * L
val_M3_ref1 = M_3.subs({F: 1, L: val_L})
print(f"Moment M3 od jednotkové velikosti síly F: {val_M3_ref1:.3f} kNm")

values = {"1": val_M1_ref1, "2": val_M2_ref1, "3": val_M3_ref1}

# Porovnání velikosti momentů
max_M_val = max(values, key=lambda k: abs(values[k]))
max_moment_position = max_M_val

max_M_ref1 = values[max_moment_position]

print(f"Největší je hodnota momentu v průřezu č. {max_moment_position}, tj.↳
↳{max_M_ref1} kN.")
print("\n")
F_pl1 = val_M0 / abs(max_M_ref1)
print(f"\033[1mHodnota síly F v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu je {F_pl1:.3f}↳
↳kN.\033[0m")

```

Moment M12 od jednotkové velikosti síly F: -1.444 kNm  
 Moment M2 od jednotkové velikosti síly F: 0.370 kNm  
 Moment M3 od jednotkové velikosti síly F: 1.185 kNm  
 Největší je hodnota momentu v průřezu č. 1, tj. -1.4444444444444444 kN.

Hodnota síly F v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu je 346.154 kN.

```

[281]: val_M1 = -13 / 9 * F_pl1 * val_L
val_M2 = 10 / 27 * F_pl1 * val_L
val_M3 = 32 / 27 * F_pl1 * val_L
val_M4 = 0

print(f"Moment M1 v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu: {val_M1:.3f} kNm")
print(f"Moment M2 v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu: {val_M2:.3f} kNm")
print(f"Moment M3 v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu: {val_M3:.3f} kNm")
print(f"Moment M4 v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu: {val_M4:.3f} kNm")

```

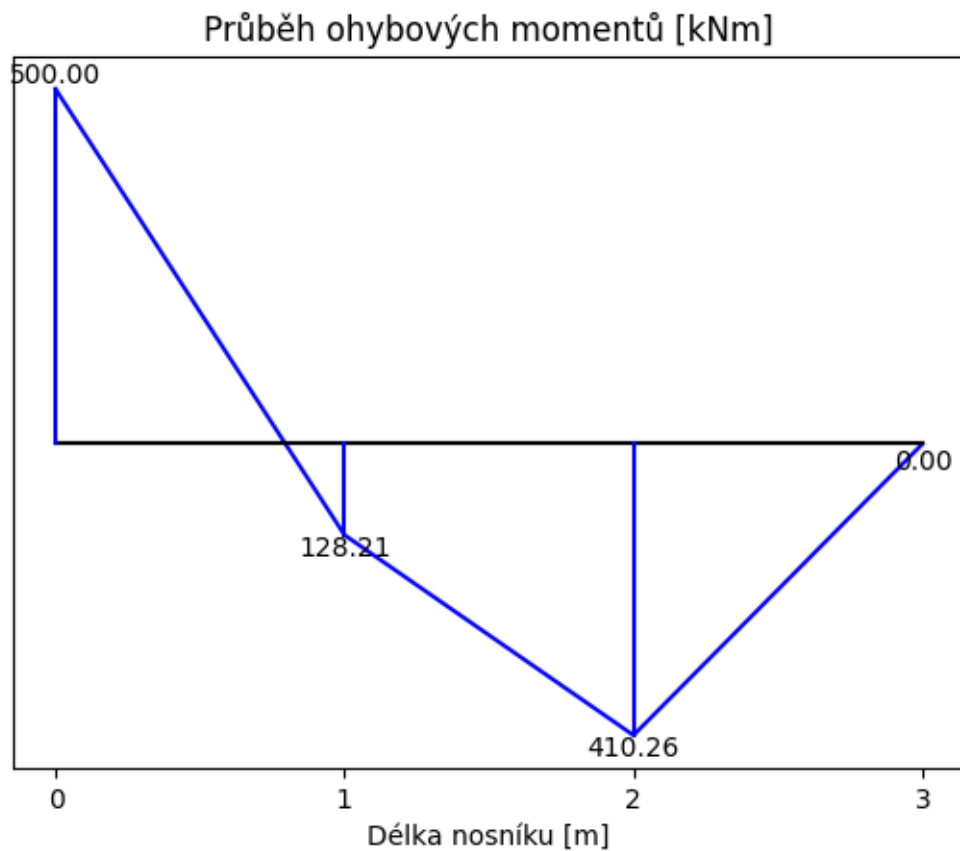
Moment M1 v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu: -500.000 kNm  
 Moment M2 v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu: 128.205 kNm  
 Moment M3 v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu: 410.256 kNm  
 Moment M4 v okamžiku vzniku 1. plast. kloubu: 0.000 kNm

**Vykreslení průběhů momentů pro okamžik vzniku 1. plastického kloubu**

```

[282]: Vykresleni_M(val_M1, val_M2, val_M3, val_M4)

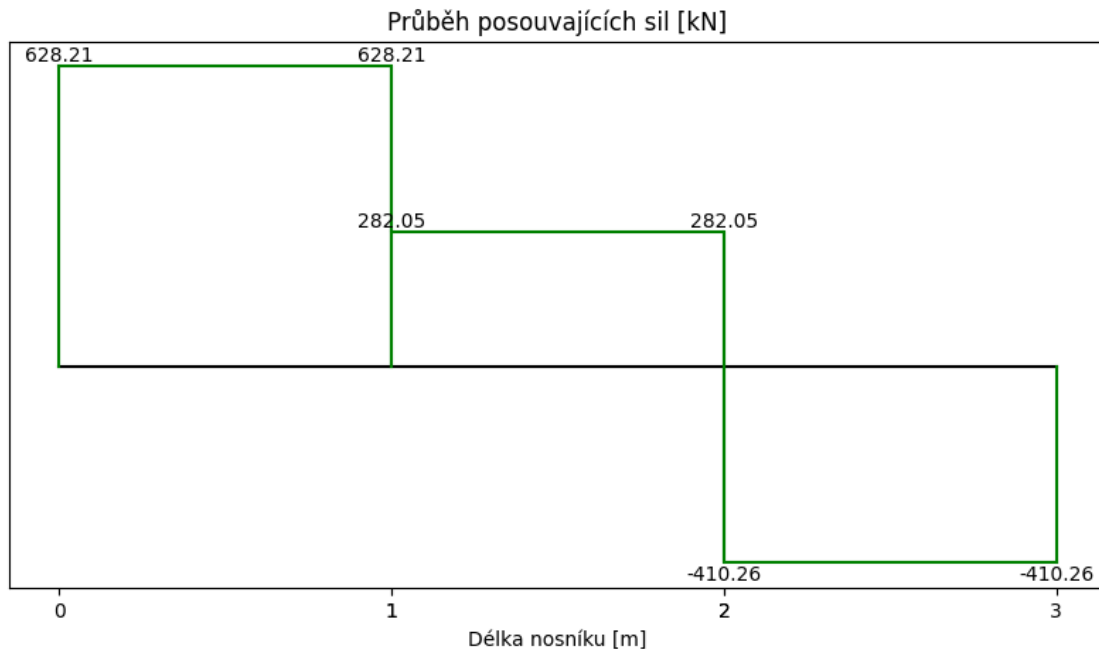
```



### Vykreslení průběhu posouvajících sil

```
[283]: val_V43 = -val_M3 / val_L
val_V34 = val_V43
val_V32 = val_V34 + 2*F_pl1
val_V23 = val_V32
val_V21 = val_V23 + F_pl1
val_V12 = val_V21

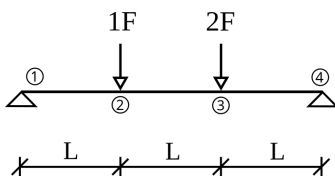
Vykresleni_V(val_V12, val_V21, val_V23, val_V32, val_V34, val_V43)
```



#### 1.4 Vznik 2. plastického kloubu

Pro další výpočet je nutné změnit statické schéma, do místa vzniku plastického kloubu umístíme kloub a vykreslíme průběh přírůstku momentů od referenčního zatížení na konstrukci s upraveným schématem.

```
[284]: from IPython.display import display, Image
display(Image(filename="Prirustkova_met_nosnik_schema_2.png", width=400))
```



```
[285]: dM2 = 4/3 * F * L
val_dM2 = dM2.subs({F: 1, L: val_L})
print(f"Moment M2 od jednotkové velikosti síly F: {val_dM2:.3f} kNm")

dM3 = 5/3 * F * L
val_dM3 = dM3.subs({F: 1, L: val_L})
print(f"Moment M3 od jednotkové velikosti síly F: {val_dM3:.3f} kNm")

delta_MF = val_M0 - val_M3
```

```

print(f"Maximální možný přírůstek momentu M3: {delta_MF:.3f} kNm")

delta_F = delta_MF / val_dM3

print(f"Přírůstek síly F v okamžiku vzniku 2. plast. kloubu je {delta_F:.3f} kN.
↪")

print("\n")
F_pl2 = F_pl1 + delta_F
print(f"\033[1mHodnota síly F v okamžiku vzniku 2. plast. kloubu je {F_pl2:.3f} kN.
↪\033[0m")

```

Moment M2 od jednotkové velikosti síly F: 1.333 kNm  
 Moment M3 od jednotkové velikosti síly F: 1.667 kNm  
 Maximální možný přírůstek momentu M3: 89.744 kNm  
 Přírůstek síly F v okamžiku vzniku 2. plast. kloubu je 53.846 kN.

Hodnota síly F v okamžiku vzniku 2. plast. kloubu je 400.000 kN.

**Vykreslení průběhů momentů**

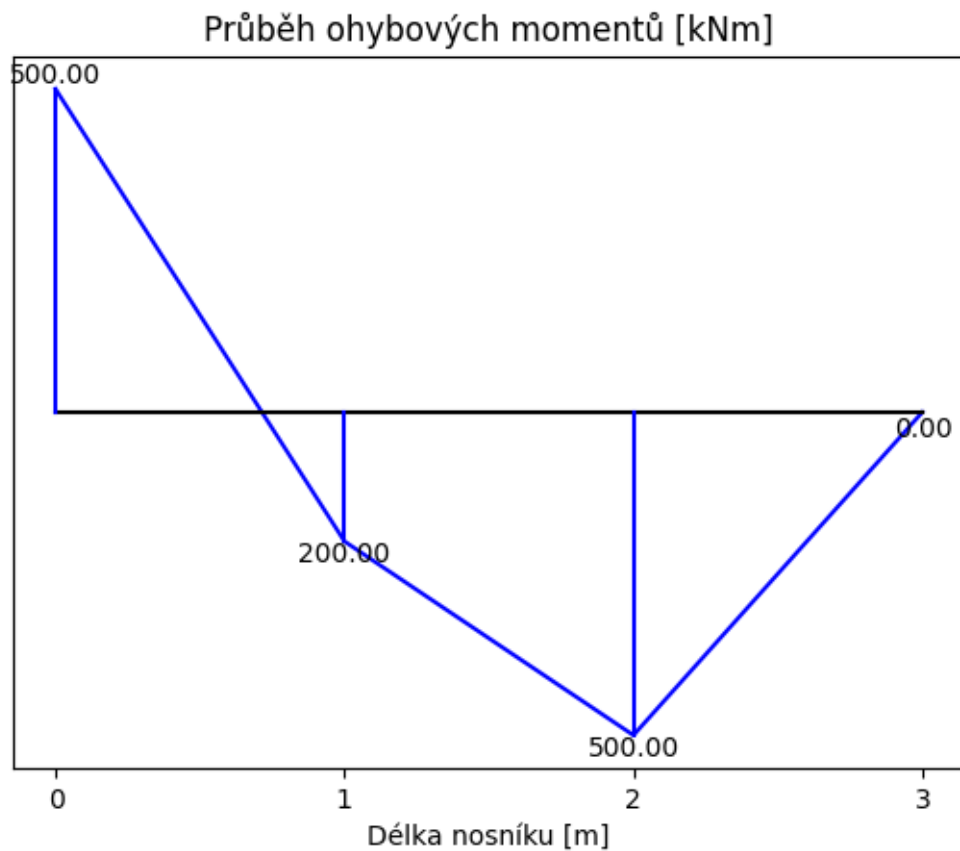
```

[286]: val_M1_2 = -val_M0
val_M2_2 = val_M2 + val_dM2*delta_F
val_M3_2 = val_M3 + val_dM3*delta_F
val_M4_2 = 0

Vykresleni_M(val_M1_2, val_M2_2, val_M3_2, val_M4_2)

```





### Vykreslení průběhů posouvajících sil

```
[287]: val_V43 = -val_M3 / val_L
val_V34 = val_V43
val_V32 = val_V34 + 2*F_pl2
val_V23 = val_V32
val_V21 = val_V23 + F_pl2
val_V12 = val_V21

Vykresleni_V(val_V12, val_V21, val_V23, val_V32, val_V34, val_V43)
```

