Kinematicka_metoda_spojity_nosnik

January 6, 2025

#

Tato studijní pomůcka vznikla za podpory Inovačního projektu FSv ČVUT č. 15 “Inovativní pomůcky pro předměty Přetváření a porušování materiálů”.

---

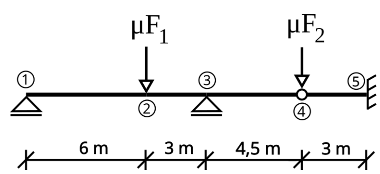
1 Mezní plastická analýza - kinematická metoda

1.1 Zadání

Vyšetřete mezní plastický stav nosníku na obrázku využitím kinematické metody. Nosník má konstantní obdélníkový průřez o rozměrech $B = 300$ mm a $H = 420$ mm a je vyroben z ideálně pružnoplastického materiálu s mezí kluzu $\sigma_0 = 270$ MPa. Referenční hodnoty působících sil jsou $F_1 = 30$ kN a $F_2 = 18$ kN. Délky jednotlivých úseků nosníku jsou uvedeny na obrázku.

Nejprve určete mezní plastický moment. Proveďte analýzu všech kinematicky přípustných mechanismů. Určete hodnotu součinitele μ v mezním plastickém stavu konstrukce a vykreslete odpovídající průběhy momentů a posouvajících sil.

[128]:
```
from IPython.display import display, Image
display(Image(filename="Nosnik_kinem_metoda_zadani.png", width=400))
```



Import potřebných knihoven

[129]:
```
%matplotlib inline

import math
import numpy as np
```

```python
from IPython.display import Markdown as md

import matplotlib.pyplot as plt

#!pip install sympy
from sympy import *
import sympy as smp

import matplotlib.patches as patches

# Nastavení přesnosti na 3 desetinná místa
np.set_printoptions(precision=3, suppress=True)
```

1.2 Řešení

Definice proměnných a jejich hodnot:

[130]:
```python
B = smp.symbols('B', real = True, positive = True)
H = smp.symbols('H', real = True, positive = True)
# I = smp.symbols('I', real = True, positive = True)

mu = smp.symbols('\mu', real = True)
F1 = smp.symbols('F1', real = True)
F2 = smp.symbols('F2', real = True)

sigma0 = smp.symbols('\sigma_0', real = True)

val_B = 0.3
val_H = 0.42
val_F1 = 30000
val_F2 = 18000
val_sigma0 = 270000000
```

Nejprve určíme hodnotu mezního plastického momentu pro zadaný průřez.

[131]:
```python
M0 = B * H/2 * H/2 * sigma0
val_M0 = M0.subs([(B, val_B), (H, val_H), (sigma0, val_sigma0)])
print(f"Mezní plastický moment: {val_M0/1000:.3f} kNm")
```

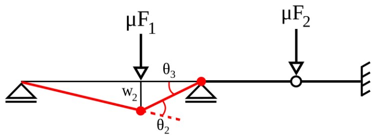
```
Mezní plastický moment: 3572.100 kNm
```

Stupeň statické neurčitosti daného nosníku je 1, pro vznik mechanismu tedy musí dojít k vytvoření dvou plastických kloubů (k vytvoření částečného mechanismu po vzniku jednoho plastického kloubu zde nedojde). Plastické klouby mohou vzniknout v průřezech číslo 2, 3 a 5. Je proto potřeba vyšetřit 3 varianty (kombinace dvou míst ze tří možných). Varianta A - vznik kloubu v průřezech 2 a 3, varianta B - vznik kloubu v průřezech 2 a 5, varianta C - vznik kloubu v průřezech 3 a 5.

Pro každý z mechanismů určíme hodnotu součinitele μ z rovnosti výkonu vnějších sil a disipačního výkonu $P_{ext} = D_{int}$.

1.2.1 Varianta A - vznik kloubu v průřezech 2 a 3

[132]:
```python
from IPython.display import display, Image
display(Image(filename="Nosnik_kinem_metoda_A.png", width=400))
```



Na obrázku je znázorněn kinematický mechnismus pro vznik plastických kloubů v místech 2 a 3. V tomto případě do výkonu vnějších sil přispívá pouze síla F_1, síla F_2 pracuje na nulovém posunu. $P_{ext} = \mu F_1 \cdot \dot{w}_2$

Dále vyjádříme disipační výkon (místa, kde dochází k disipaci jsou pro přehlednost vyznačena červeným obloučkem). $W_{int} = M_0 \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) = M_0 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3) = M_0 \cdot (\dot{w}_2/6 + \dot{w}_2/3 + \dot{w}_2/3) = M_0 \cdot 5\dot{w}_2/6$

Z rovnosti $P_{ext} = D_{int}$ dostáváme hodnotu součinitele pro variantu A:

$\mu F_1 = 5M_0/6$

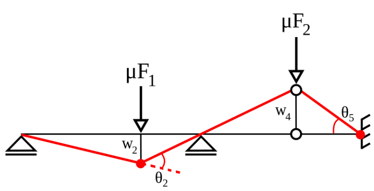
$\mu_A = \frac{5M_0}{6F_1}$

[133]:
```python
val_mu_A = 5*val_M0/(6*val_F1)
print(f"Součinitel zatížení pro variantu A: {val_mu_A:.3f} ")
```

```
Součinitel zatížení pro variantu A: 99.225
```

1.2.2 Varianta B - vznik kloubu v průřezech 2 a 5

[134]:
```python
from IPython.display import display, Image
display(Image(filename="Nosnik_kinem_metoda_B.png", width=400))
```



Opět vyjádříme výkon vnějších sil a disipační výkon pro znázorněný mechanismus. Síla F_2 v tomto případě podává záporný výkon.

$P_{ext} = \mu F_1 \cdot \dot{w}_2 - \mu F_2 \cdot \dot{w}_4 = \mu F_1 \cdot \dot{w}_2 - \mu F_2 \cdot \dot{w}_2 \cdot 4{,}5/3 = \mu F_1 \cdot \dot{w}_2 - 1{,}5\mu F_2 \cdot \dot{w}_2 = \mu \cdot \dot{w}_2 \cdot (F_1 - 1{,}5F_2)$

Dále vyjádříme disipační výkon (místa, kde dochází k disipaci jsou pro přehlednost vyznačena červeným obloučkem). $W_{int} = M_0 \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_5) = M_0 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5) = M_0 \cdot (\dot{w}_2/6 + \dot{w}_2/3 + \dot{w}_4/3) = M_0 \cdot (\dot{w}_2/6 + \dot{w}_2/3 + 1{,}5\dot{w}_2/3) = M_0 \cdot \dot{w}_2$

Z rovnosti $P_{ext} = D_{int}$ dostáváme hodnotu součinitele pro variantu B:

$\mu \cdot (F_1 - 1{,}5F_2) = M_0$

$\mu_A = \frac{M_0}{F_1 - 1{,}5F_2}$

\

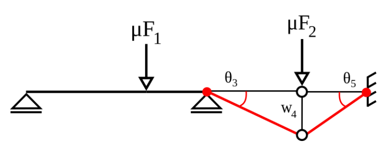
Poznámka: Připomeňme důležitou podmínku, že vnější síly musí podávat kladný výkon. V případě mechanismů, kde některá ze sil pracuje na záporném posunu, není vždy jasné jak mechanismus kolapsu zvolit, navíc z obecného vyjádření nemusí být výsledné znaménko u výkonu vnějších sil zřejmé. V případě špatného předpokladu mechanismu kolapsu získáme zápornou hodnotu součinitele zatížení. V takovém případě se jedná o nepřípustný mechanismus kolapsu a je nutné původní předpoklad opravit, jednotlivé posuny zvolit opačným směrem. Změna se ale samozřejmě projeví pouze ve znaménku, není proto nutné celý výpočet provádět znovu.

[135]:
```
val_mu_B = val_M0/(val_F1 - 1.5*val_F2)
print(f"Součinitel zatížení pro variantu B: {val_mu_B:.3f} ")
```

```
Součinitel zatížení pro variantu B: 1190.700
```

1.2.3 Varianta C - vznik kloubu v průřezech 3 a 5

[136]:
```
from IPython.display import display, Image
display(Image(filename="Nosnik_kinem_metoda_C.png", width=400))
```



Opět vyjádříme výkon vnějších sil a disipační výkon pro znázorněný mechanismus. Síla F_1 v tomto případě podává nulový výkon (pracuje na nulovém posunu).

$P_{ext} = \mu F_2 \cdot \dot{w}_4$

Dále vyjádříme disipační výkon (místa, kde dochází k disipaci jsou pro přehlednost vyznačena červeným obloučkem). $W_{int} = M_0 \cdot (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5) = M_0 \cdot (\dot{w}_4/4{,}5 + \dot{w}_4/3) = \frac{5}{9}\, M_0 \cdot \dot{w}_4$

Z rovnosti $P_{ext} = D_{int}$ dostáváme hodnotu součinitele pro variantu B:

$\mu \cdot F_2 = 5M_0/9$

$\mu_C = \frac{5M_0}{9F_2}$

[137]:
```
val_mu_C = 5*val_M0/(9*val_F2)
print(f"Součinitel zatížení pro variantu C: {val_mu_C:.3f} ")
```

```
Součinitel zatížení pro variantu C: 110.250
```

Určení rozhodujícího mechanismu:

Skutečný machanismus kolapsu bude ten, ke kterému dojde při nejmenším zatížení, tedy mechanismus s nejmenší hodnotou součinitele zatížení μ.

[138]:
```
# Nalezení minima a rozhodujícího mechanismu
values = {"A": val_mu_A, "B": val_mu_B, "C": val_mu_C}
min_mechanism = min(values, key=values.get)
val_mu = values[min_mechanism]

# Výstup
print(f"Rozhodující je mechanismus {min_mechanism} s hodnotou   = {val_mu:.3f}.
 ↪")

# Mezní hodnoty zatížení
print(f"Mezní hodnota síly F_1 je {val_mu*val_F1/1000:.3f} kN.")
print(f"Mezní hodnota síly F_2 je {val_mu*val_F2/1000:.3f} kN.")
```

```
Rozhodující je mechanismus A s hodnotou   = 99.225.
Mezní hodnota síly F_1 je 2976.750 kN.
Mezní hodnota síly F_2 je 1786.050 kN.
```

Dopočet vnitřních sil a momentů pro mezní plastický stav

Při vykreslování průběhů vnitřních sil a momentů je vhodné využít toho, že známe hodnotu momentu v místech vzniku plastických kloubů.

$M_2 = M_0$

$M_4 = M_0$

Ostatní hodnoty momentů a posouvajících sil pak dopočteme obvyklým způsobem z podmínek rovnováhy. Kladnou orientaci svislých reakcí uvažujeme zdola nahoru, kladný moment pro tažená spodní vlákna.

[139]:
```
# známé hodnoty momentů
val_M2 = val_M0
print(f"Moment M2: {val_M2/1000:.3f} kNm")
val_M3 = -val_M0
print(f"Moment M3: {val_M3/1000:.3f} kNm")
val_M1 = 0
print(f"Moment M1: {val_M1/1000:.3f} kNm")
val_M4 = 0
print(f"Moment M4: {val_M4/1000:.3f} kNm")

# svislá reakce v průřezu 1:
val_R1 = val_M2 / 6
print(f"Svislá reakce v levé podpoře: {val_R1/1000:.3f} kN")
```

```python
# svislá reakce v průřezu 3 (z momentové podmínky k bodu 4 zleva):
val_R3 = (-val_R1*13.5 + val_mu*val_F1*7.5) / 4.5
print(f"Svislá reakce ve střední podpoře: {val_R3/1000:.3f} kN")

# svislá reakce v průřezu 5:
val_R5 = -val_R1 - val_R3 + val_mu*val_F1 + val_mu*val_F2
print(f"Svislá reakce ve vetknutí: {val_R5/1000:.3f} kN")

# moment ve vetknutí:
val_M5 = -val_R5*3
print(f"Moment M5 ve vetknutí: {val_M5/1000:.3f} kNm")

# hodnoty posouvajících sil:
val_V12 = val_R1
val_V21 = val_V12
val_V23 = val_R1 - val_mu*val_F1
val_V32 = val_V23
val_V34 = val_V23 + val_R3
val_V43 = val_V34
val_V45 = val_V43 - val_mu*val_F2
val_V54 = val_V45
# kontrola
if abs(val_V54 + val_R5) < 1e-6:  # Používáme toleranci kvůli zaokrouhlovacím␣
↪chybám
    print("Kontrola výpočtu posouvajících sil je v pořádku.")
else:
    print(f"Vypočtená hodnota posouvající síly V54 ({val_V54}) neodpovídá␣
↪hodnotě svislé reakce ve vetknutí ({val_R5}).")
```

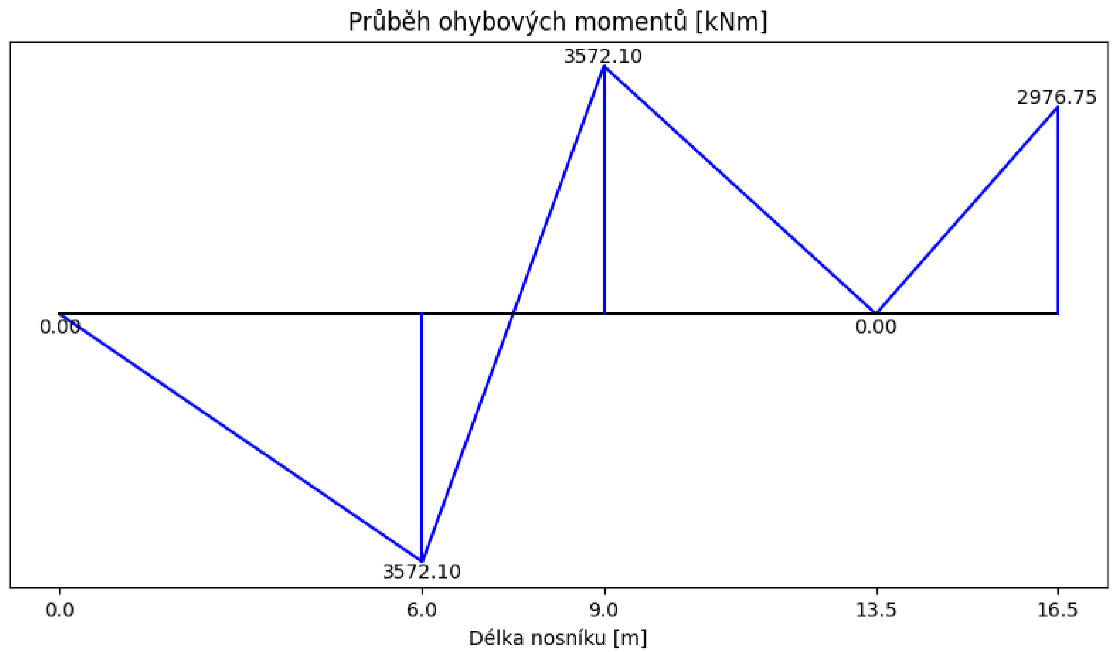
```
Moment M2: 3572.100 kNm
Moment M3: -3572.100 kNm
Moment M1: 0.000 kNm
Moment M4: 0.000 kNm
Svislá reakce v levé podpoře: 595.350 kN
Svislá reakce ve střední podpoře: 3175.200 kN
Svislá reakce ve vetknutí: 992.250 kN
Moment M5 ve vetknutí: -2976.750 kNm
Kontrola výpočtu posouvajících sil je v pořádku.
```

Vykreslení průběhu momentů

[140]:
```python
# Délky jednotlivých částí
lengths = [6, 3, 4.5, 3]  # délky mezi styčníky

# Souřadnice styčníků (x-ové hodnoty)
x_positions = [0]
for length in lengths:
    x_positions.append(x_positions[-1] + length)
```

```
# Hodnoty momentů ve styčnících [kNm]
M_values = [val_M1/1000, val_M2/1000, val_M3/1000, val_M4/1000, val_M5/1000]
```

[141]:
```
# Vykreslení ohybových momentů
plt.figure(figsize=(10, 5))

# Vykreslení průběhu momentů
plt.plot(x_positions, M_values, color='blue', linestyle='-')

# Vykreslení nosníku černě plnou čarou
plt.plot([x_positions[0], x_positions[-1]], [0, 0], color='black', linewidth=1.
 ↪5)

# Přidání hodnot v místech styčníků
for x, y in zip(x_positions, M_values):
    # Vypisujeme absolutní hodnotu (bez znaménka)
    if y != 0:
        plt.text(x, y, f"{abs(y):.2f}", fontsize=10, ha='center', va='top' if y␣
 ↪> 0 else 'bottom')
    else:
        # Posunutí textu pro nulovou hodnotu
        plt.text(x, y + 50, f"{abs(y):.2f}", fontsize=10, ha='center',␣
 ↪va='top', verticalalignment='top')

# Svislé spojnice pro všechny styčníky s osou X
for i, y in enumerate(M_values):
    plt.plot([x_positions[i], x_positions[i]], [0, y], color='blue',␣
 ↪linestyle='-')

# Titulek a popisky
plt.title('Průběh ohybových momentů [kNm]')
plt.xlabel('Délka nosníku [m]')

# Odstranění zobrazení svislé osy
plt.gca().yaxis.set_ticks([])  # Odstranění čárek
plt.gca().yaxis.set_ticklabels([])  # Odstranění hodnot

# Volba orientace osy y (kladná poloosa dolů - spodní vlákna)
plt.gca().invert_yaxis()

# Nastavení popisků na ose x v místech styčníků
plt.xticks(x_positions)

# Zobrazení grafu
plt.show()
```

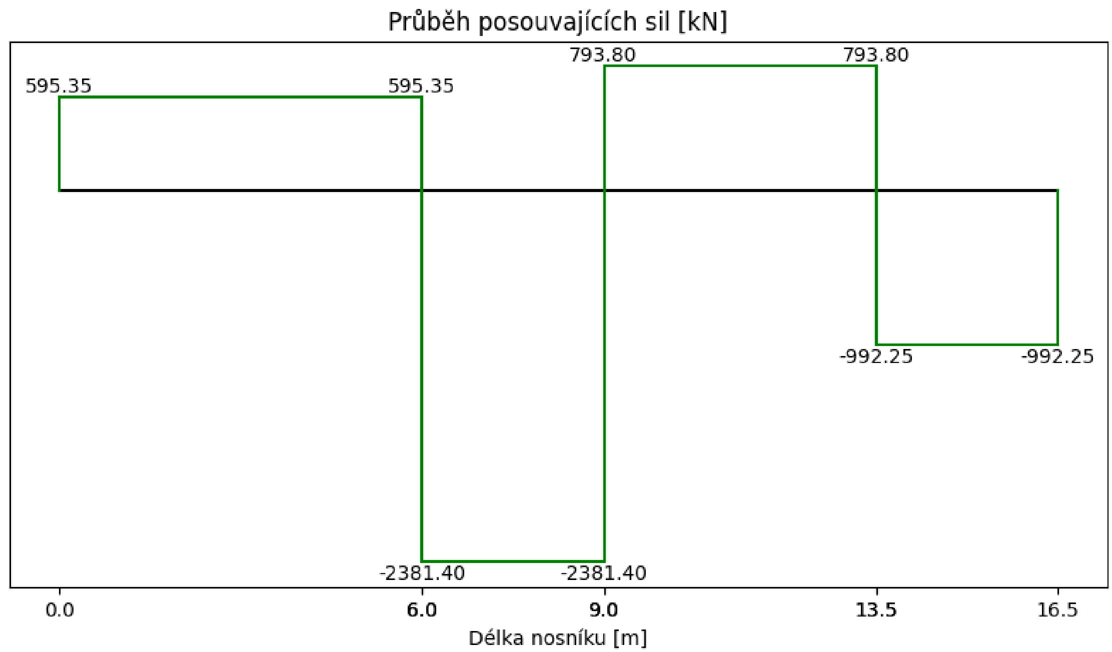


Vykreslení průběhu posouvajících sil

[142]:
```
# Hodnoty posouvajících sil [kN]
V_values = [
    val_V12 / 1000, val_V21 / 1000, val_V23 / 1000, val_V32 / 1000, val_V34 /
 ↪1000,
    val_V43 / 1000, val_V45 / 1000, val_V54 / 1000
]
```

[143]:
```
# Délky jednotlivých částí
lengths = [6, 3, 4.5, 3]  # délky mezi styčníky

# Souřadnice styčníků (x-ové hodnoty)
x_positions = []
for i, length in enumerate(lengths):
    x_positions.append(sum(lengths[:i]))  # Levá hodnota pro styčník
    x_positions.append(sum(lengths[:i + 1]))  # Pravá hodnota pro styčník
# vytvoří vektor pro vykreslení hodnot zleva i zprava, zjednodušeně by bylo
 ↪možné přímo definovat: x_positions = [0, 6, 6, 9, 9, 13.5, 13.5, 16.5]

# Hodnoty posouvajících sil pro jednotlivé styčníky [kN]
V_values = [val_V12 / 1000, val_V21 / 1000, val_V23 / 1000, val_V32 / 1000,
 ↪val_V34 / 1000, val_V43 / 1000, val_V45 / 1000, val_V54 / 1000]

# Vykreslení posouvajících sil
plt.figure(figsize=(10, 5))
```

```python
# Vykreslení průběhu posouvajících sil (konstantní úseky)
plt.plot(x_positions, V_values, color='green', linestyle='-')

# Vykreslení nosníku černě plnou čarou
plt.plot([x_positions[0], x_positions[-1]], [0, 0], color='black', linewidth=1.5)

# Přidání hodnot ve styčnících
for x, y in zip(x_positions, V_values):
    plt.text(x, y + (10 if y > 0 else -10), f"{y:.2f}", fontsize=10, ha='center', va='bottom' if y > 0 else 'top')

# Svislé spojnice pro všechny styčníky s osou X
for i, y in enumerate(V_values):
    plt.plot([x_positions[i], x_positions[i]], [0, y], color='green', linestyle='-')

# Titulek a popisky
plt.title('Průběh posouvajících sil [kN]')
plt.xlabel('Délka nosníku [m]')

# Odstranění zobrazení svislé osy
plt.gca().yaxis.set_ticks([])  # Odstranění čárek
plt.gca().yaxis.set_ticklabels([])  # Odstranění hodnot

# Nastavení popisků na ose x v místech styčníků
plt.xticks(x_positions)

# Zobrazení grafu
plt.show()
```


Průběh posouvajících sil [kN]
595.35
595.35
793.80
793.80
-992.25
-992.25
-2381.40
-2381.40
0.0
6.0
9.0
13.5
16.5
Délka nosníku [m]