普通高等教育课程电子教案系列

数学模型电子教案

清华大学　研制

主编　姜启源　谢金星　叶　俊

高等教育出版社
高等教育电子音像出版社

前　言

数学建模是20世纪80年代初进入我国大学的一门新课，其主要内容是通过众多的示例着重介绍如何将实际问题“翻译”成数学问题，以及数学求解的结果又如何“翻译”回到实际中去。课堂讲授需要简明的实际背景、合理的模型假设、有创意的模型构造及必要的模型检验，不会涉及太多的数学概念和繁琐的公式推导，因此适宜采用多媒体电子课件进行教学。

这个多媒体电子课件是根据《数学模型》（第三版，姜启源、谢金星、叶俊编）研制的，包含了该书80%左右章节的内容，其中大部分经过了以《数学模型》（第二版，姜启源编）为教材的多年的教学实践，力求做到精练简明、形式活泼、信息量大、便于使用。有条件时还可以将其中某些内容链接到数学软件，作数值计算和图形演示。

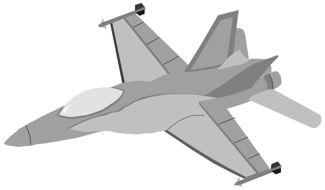
根据编制者的教学经验，电子课件应该像板书一样，将重点内容给以提纲式的演示，而不要把教师的讲解都制作在课件上。打算基本上利用这个电子教案的教师，需要结合教案仔细研究教材的内容，体会编制者的意图。

对教师来说，课堂教学是极具个性化的表现艺术。不同的教师对同样的内容完全可以有不同的处理，各个学校的学生状况也不一样。因此，提倡教师仅以这个电子教案为参考资料，编制适合自己的教学风格和具体的教学对象的教案。

由于时间和精力所限，目前提供的课件存在许多不完善之处，欢迎大家提出各种意见，我们今后将不定期地陆续出版增补、改进的版本。

第一章　建立数学模型

1.1　从现实对象到数学模型



我们常见的模型

玩具、照片、飞机、火箭模型… … ～实物模型

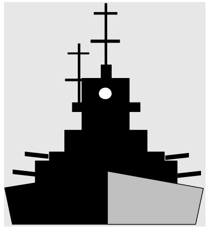
水箱中的舰艇、风洞中的飞机… … ～物理模型

地图、电路图、分子结构图… … ～符号模型

模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物

模型集中反映了原型中人们需要的那一部分特征

你碰到过的数学模型——“航行问题”



甲乙两地相距750千米，船从甲到乙顺水航行需30小时，从乙到甲逆水航行需50小时，问船的速度是多少?

用 x 表示船速，y 表示水速，列出方程:

$$(x+y)\times 30 = 750$$

$$(x-y)\times 50 = 750$$

⇒ 求解

$$x = 20$$

$$y = 5$$

答：船速每小时20千米/小时.

航行问题建立数学模型的基本步骤

- 作出简化假设（船速、水速为常数）；
- 用符号表示有关量（x, y表示船速和水速）；
- 用物理定律（匀速运动的距离等于速度乘以时间）列出数学式子（二元一次方程）；
- 求解得到数学解答（x=20, y=5）；
- 回答原问题（船速每小时20千米/小时）。

数学模型 (Mathematical Model) 和 数学建模（ Mathematical Modeling)

数学模型

对于一个现实对象，为了一个特定目的，
根据其内在规律，作出必要的简化假设，
运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。

数学建模

建立数学模型的全过程
（包括表述、求解、解释、检验等）

1.2　数学建模的重要意义

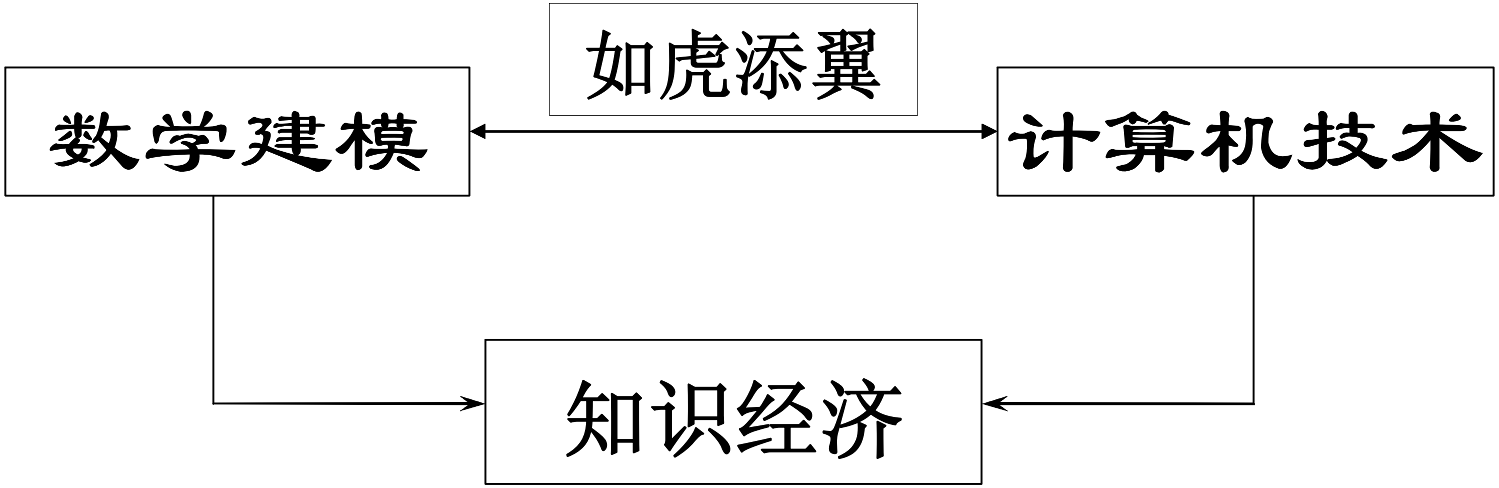
- 电子计算机的出现及飞速发展；
- 数学以空前的广度和深度向一切领域渗透。

数学建模作为用数学方法解决实际问题的第一步，越来越受到人们的重视。

- 在一般工程技术领域数学建模仍然大有用武之地;
- 在高新技术领域数学建模几乎是必不可少的工具;
- 数学进入一些新领域，为数学建模开辟了许多处女地。

数学建模的具体应用

- 分析与设计
- 预报与决策
- 控制与优化
- 规划与管理



1.3　数学建模示例

1.3.1　椅子能在不平的地面上放稳吗

问题分析　通常～三只脚着地　　放稳～四只脚着地

模型假设

- 四条腿一样长，椅脚与地面点接触，四脚连线呈正方形;
- 地面高度连续变化，可视为数学上的连续曲面;
- 地面相对平坦，使椅子在任意位置至少三只脚同时着地。

模型构成

用数学语言把椅子位置和四只脚着地的关系表示出来

- 椅子位置

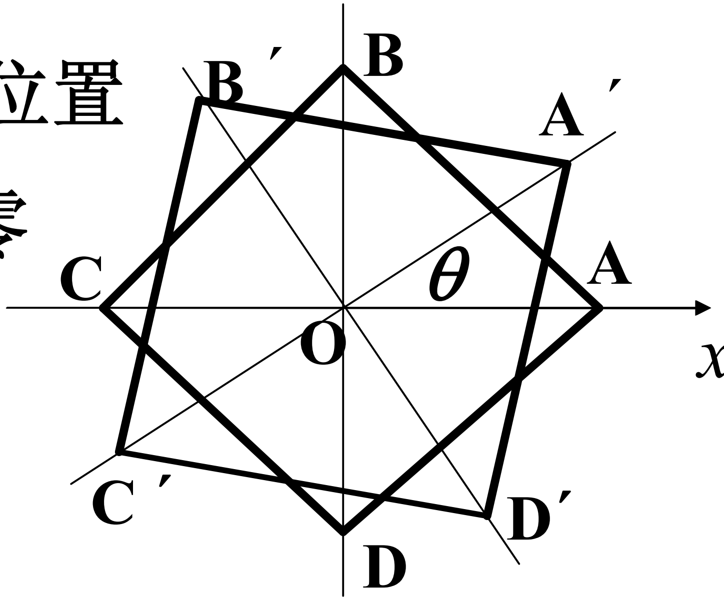
利用正方形(椅脚连线)的对称性

用θ(对角线与x轴的夹角)表示椅子位置

- 四只脚着地

椅脚与地面距离为零

距离是θ的函数



四个距离
(四只脚)

⇒ 正方形对称性

两个距离

A,C 两脚与地面距离之和 ~ $f(\theta)$

B,D 两脚与地面距离之和 ~ $g(\theta)$

正方形**ABCD**
绕**O**点旋转

模型构成

用数学语言把椅子位置和四只脚着地的关系表示出来

地面为连续曲面 ⇨ $f(\theta)$, $g(\theta)$是连续函数

椅子在任意位置至少三只脚着地 ⇨ 对任意θ, $f(\theta)$, $g(\theta)$至少一个为0

数学问题

已知：$f(\theta)$, $g(\theta)$是连续函数 ;

对任意θ，$f(\theta)\bullet g(\theta)=0$;

且 $g(0)=0$，$f(0) > 0$.

证明：存在θ_0，使$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

模型求解

给出一种简单、粗糙的证明方法

将椅子旋转90^0，对角线AC和BD互换。

由$g(0)=0$， $f(0) > 0$ ，知$f(\pi/2)=0$, $g(\pi/2)>0$.

令$h(\theta)= f(\theta)-g(\theta)$, 则$h(0)>0$和$h(\pi/2)<0$.

由 f, g的连续性知 h为连续函数, 据连续函数的基本性质, 必存在θ_0, 使$h(\theta_0)=0$, 即$f(\theta_0) = g(\theta_0)$.

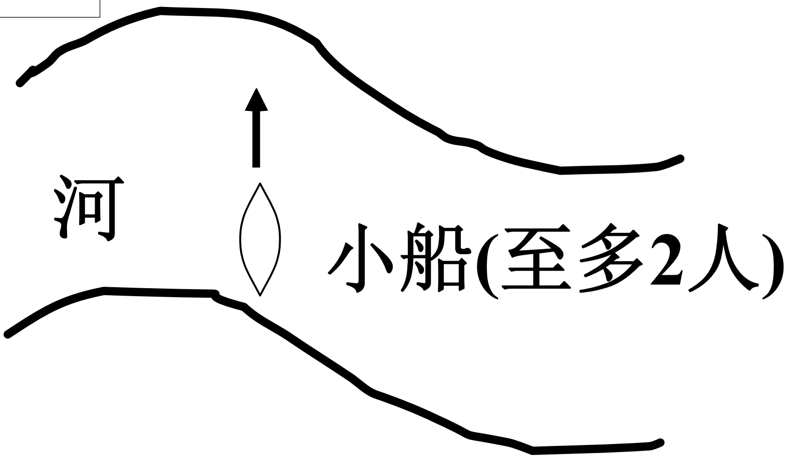
因为$f(\theta) \cdot g(\theta)=0$, 所以$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

评注和思考 建模的关键～ θ和 $f(\theta), g(\theta)$的确定

假设条件的本质与非本质 考察四脚呈长方形的椅子

1.3.2 商人们怎样安全过河

问题(智力游戏)



随从们密约，在河的任一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货.

但是乘船渡河的方案由商人决定. 商人们怎样才能安全过河?

Δ Δ Δ 3名商人

× × × 3名随从

问题分析

多步决策过程

决策~每一步(此岸到彼岸或彼岸到此岸)船上的人员

要求~在安全的前提下(两岸的随从数不比商人多)，经有限步使全体人员过河.

模型构成

x_k~第k次渡河前此岸的商人数　　$x_k, y_k=0,1,2,3;$

y_k~第k次渡河前此岸的随从数　　$k=1,2,\ldots\ \ldots$

$s_k=(x_k\,, y_k)$~过程的状态　　S ~ 允许状态集合

$S=\{(x\,,y)|\ x=0,\ y=0,1,2,3;\ x=3,\ y=0,1,2,3;\ x=y=1,2\}$

u_k~第k次渡船上的商人数　　$u_k, v_k=0,1,2;$

v_k~第k次渡船上的随从数　　$k=1,2,\ldots\ \ldots$

$d_k=(u_k\,, v_k)$~决策　　$D=\{(u\,,v)|\ u+v=1,\,2\}$ ~允许决策集合

$s_{k+1}=s_k+(-1)^k d_k$　　~状态转移律

多步决策问题

求$d_k\in D(k=1,2,\ldots n)$, 使$s_k\in S$, 并按转移律由 $s_1=(3,3)$到达 $s_{n+1}=(0,0)$.

模型求解

- 穷举法～ 编程上机

- 图解法

$S=\{(x, y) \mid x=0, y=0,1,2,3;$
$x=3, y=0,1,2,3; x=y=1,2\}$

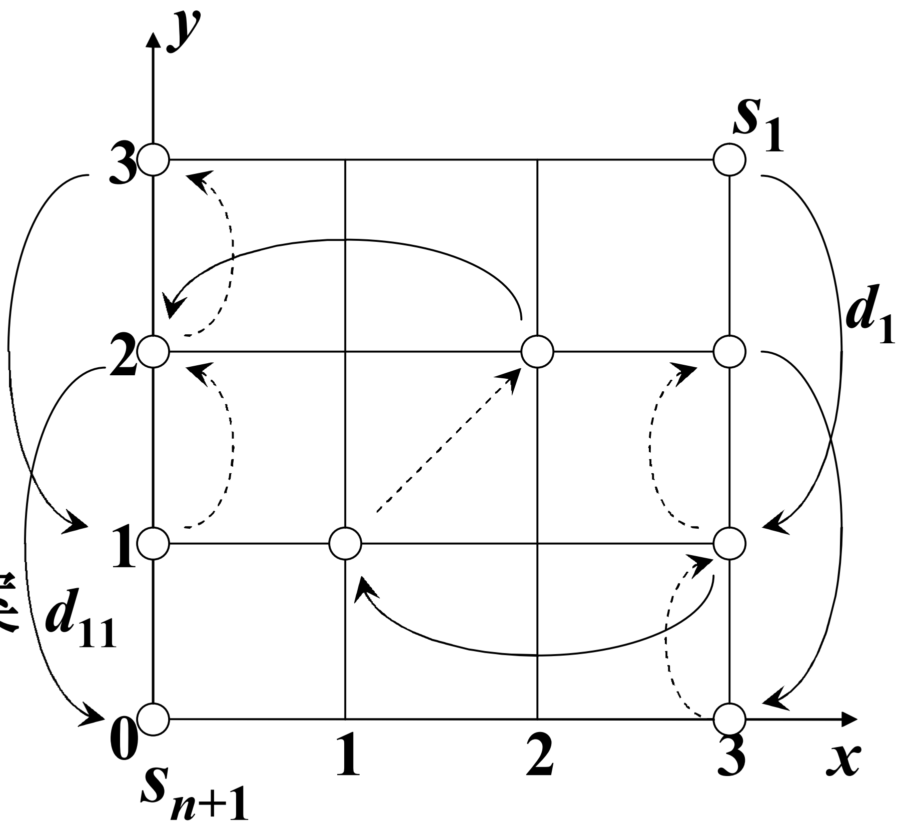
状态$s=(x,y)$～16个格点

允许状态 ～10个○点

允许决策～移动1或2格;

k奇,左下移; k偶,右上移.

$d_1, \ldots, d_{11}$给出安全渡河方案



评注和思考

规格化方法, 易于推广

考虑4名商人各带一随从的情况

1.3.3 如何预报人口的增长

背景

世界人口增长概况

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

中国人口增长概况

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995	2000
人口(亿)	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.0	13.0

研究人口变化规律　　　　控制人口过快增长

常用的计算公式　今年人口 x_0, 年增长率 r

k年后人口　$x_k = x_0(1+r)^k$

指数增长模型——马尔萨斯提出（1798）

基本假设 : 人口(相对)增长率 r 是常数

$x(t)$ ~时刻t的人口

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)} = r\Delta t$$

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

$$x(t) = x_0(e^r)^t \approx x_0(1+r)^t$$

随着时间增加，人口按指数规律无限增长

指数增长模型的应用及局限性

- 与**19**世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合
- 适用于**19**世纪后迁往加拿大的欧洲移民后代
- 可用于短期人口增长预测
- 不符合**19**世纪后多数地区人口增长规律
- 不能预测较长期的人口增长过程

19世纪后人口数据　　人口增长率r不是常数(逐渐下降)

阻滞增长模型 (Logistic模型)

人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用

且阻滞作用随人口数量增加而变大 $\Rightarrow$ ***r*是*x*的减函数**

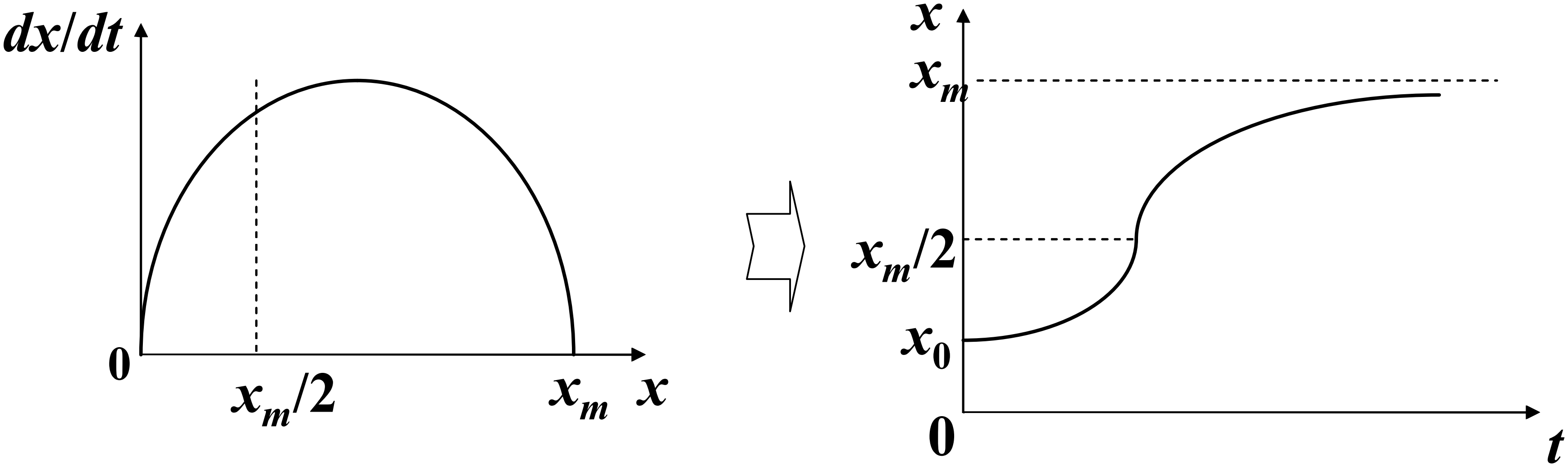
假设 $r(x)=r-sx\ (r,s>0)$ ***r*~固有增长率(*x*很小时)**

x_m~人口容量（资源、环境能容纳的最大数量）

$$\Rightarrow r(x_m)=0 \Rightarrow s=\frac{r}{x_m} \qquad r(x)=r(1-\frac{x}{x_m})$$

阻滞增长模型 (Logistic模型)

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = r(x)x = rx\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$



$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

$x(t)$~S形曲线,

x增加先快后慢

阻滞增长模型 (Logistic模型)

参数估计　用指数增长模型或阻滞增长模型作人口预报，必须先估计模型参数 r 或 r, x_m

- 利用统计数据用最小二乘法作拟合

例：美国人口数据（单位~百万）

1860	1870	1880	……	1960	1970	1980	1990
31.4	38.6	50.2	……	179.3	204.0	226.5	251.4

$$\Rightarrow \quad r=0.2557,\ x_m=392.1$$

专家估计

阻滞增长模型 (Logistic模型)

模型检验

用模型计算2000年美国人口，与实际数据比较

$$x(2000) = x(1990) + \Delta x = x(1990) + rx(1990)[1 - x(1990)/x_m]$$

⇨ $x(2000) = 274.5$ 实际为**281.4 (百万)**

模型应用——预报美国2010年的人口

加入2000年人口数据后重新估计模型参数

⇨ $\boldsymbol{r=0.2490, x_m=434.0}$ ⇨ $x(2010)=306.0$

Logistic 模型在经济领域中的应用 (如耐用消费品的售量)

1.4 数学建模的方法和步骤

数学建模的基本方法

- 机理分析

根据对客观事物特性的认识，
找出反映内部机理的数量规律

- 测试分析

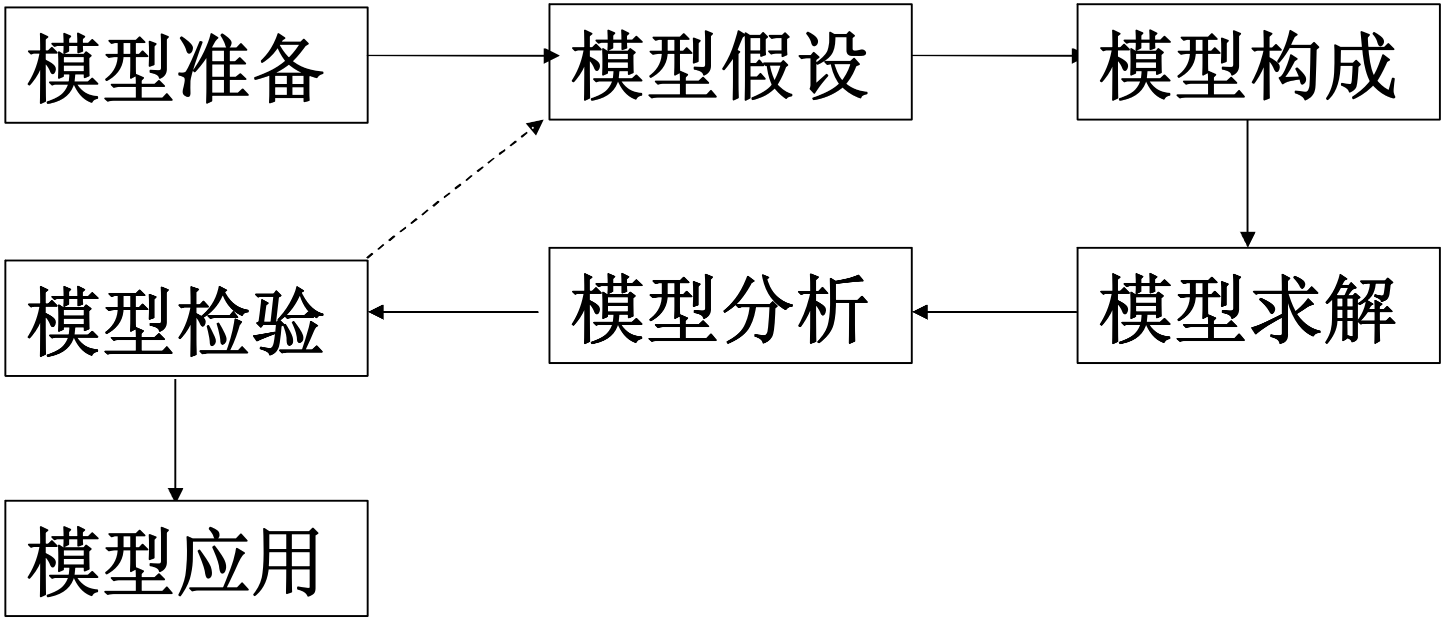
将对象看作“黑箱”,通过对量测数据的
统计分析，找出与数据拟合最好的模型

- 二者结合

用机理分析建立模型结构,
用测试分析确定模型参数

机理分析没有统一的方法，主要通过实例研究(Case Studies)来学习。以下建模主要指机理分析。

数学建模的一般步骤



模型准备

了解实际背景　明确建模目的

搜集有关信息　掌握对象特征

形成一个比较清晰的‘问题’

数学建模的一般步骤

模型假设

针对问题特点和建模目的

作出合理的、简化的假设

在合理与简化之间作出折中

模型构成

用数学的语言、符号描述问题

发挥想像力

使用类比法

尽量采用简单的数学工具

数学建模的一般步骤

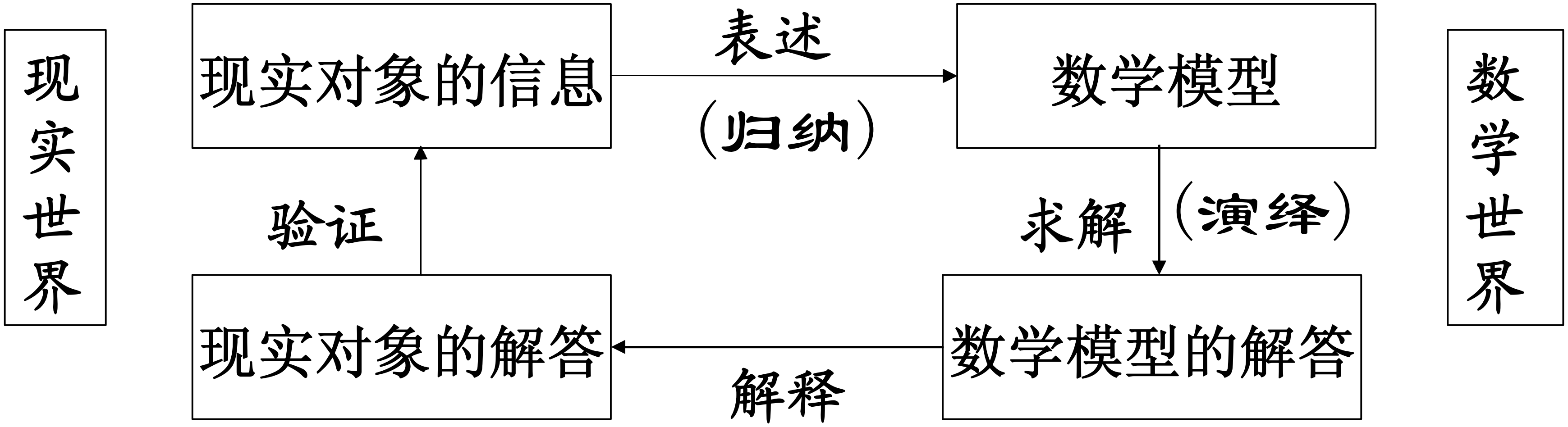
模型求解　各种数学方法、软件和计算机技术

模型分析　如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的稳定性分析

模型检验　与实际现象、数据比较，检验模型的合理性、适用性

模型应用

数学建模的全过程



现实世界

现实对象的信息

表述

（归纳）

数学模型

数学世界

求解

（演绎）

数学模型的解答

解释

现实对象的解答

验证

表述	根据建模目的和信息将实际问题“翻译”成数学问题
求解	选择适当的数学方法求得数学模型的解答
解释	将数学语言表述的解答“翻译”回实际对象
验证	用现实对象的信息检验得到的解答

实践 ⇨ 理论 ⇨ 实践

1.5　数学模型的特点和分类

数学模型的特点

模型的逼真性和可行性

模型的渐进性

模型的强健性

模型的可转移性

模型的非预制性

模型的条理性

模型的技艺性

模型的局限性

数学模型的分类

应用领域	人口、交通、经济、生态 … …		
数学方法	初等数学、微分方程、规划、统计 … …		
表现特性	确定和随机	静态和动态	
	离散和连续	线性和非线性	
建模目的	描述、优化、预报、决策 … …		
了解程度	白箱	灰箱	黑箱

1.6　怎样学习数学建模

数学建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术

技术大致有章可循　艺术无法归纳成普遍适用的准则

想像力　洞察力　判断力

- 学习、分析、评价、改进别人作过的模型

- 亲自动手，认真作几个实际题目

第二章　初等模型

2.1 公平的席位分配

问题

三个系学生共200名（甲系100，乙系60，丙系40），代表会议共20席，按比例分配，三个系分别为10，6，4席。

现因学生转系，三系人数为103, 63, 34, 问20席如何分配。

若增加为21席，又如何分配。

比例加惯例

系别	学生人数	比例（%）	20席的分配		21席的分配	
			比例	结果	比例	结果
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.570	3
总和	200	100.0	20.0	20	21.000	21

对丙系公平吗

"公平"分配方法

衡量公平分配的数量指标

	人数	席位
A方	p_1	n_1
B方	p_2	n_2

当$p_1/n_1=p_2/n_2$ 时，分配公平

若 $p_1/n_1>p_2/n_2$，对 A 不公平

$p_1/n_1-p_2/n_2$ ~ 对A的绝对不公平度

$p_1=150,\ n_1=10,\ p_1/n_1=15$

$p_2=100,\ n_2=10,\ p_2/n_2=10$

$p_1/n_1-p_2/n_2=5$

$p_1=1050,\ n_1=10,\ p_1/n_1=105$

$p_2=1000,\ n_2=10,\ p_2/n_2=100$

$p_1/n_1-p_2/n_2=5$

虽二者的绝对不公平度相同

但后者对A的不公平程度已大大降低!

“公平”分配方法

将绝对度量改为相对度量

若 $p_1/n_1 > p_2/n_2$，定义

$$\frac{p_1/n_1 - p_2/n_2}{p_2/n_2} = r_A(n_1, n_2)$$

~对A的相对不公平度

类似地定义 $r_B(n_1,n_2)$

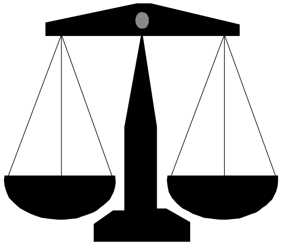
公平分配方案应使 r_A, r_B 尽量小

将一次性的席位分配转化为动态的席位分配, 即

设A, B已分别有 n_1, n_2 席，若增加1席，问应分给A, 还是B

不妨设分配开始时 $p_1/n_1 > p_2/n_2$，即对A不公平

应讨论以下几种情况　　初始 $p_1/n_1 > p_2/n_2$



1）若 $p_1/(n_1+1) > p_2/n_2$，　则这席应给 A

2）若 $p_1/(n_1+1) < p_2/n_2$，应计算 $r_B(n_1+1, n_2)$

3）若 $p_1/n_1 > p_2/(n_2+1)$，　应计算 $r_A(n_1, n_2+1)$

问：　$p_1/n_1 < p_2/(n_2+1)$ 是否会出现？　　否!

若 $r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1)$，则这席应给 A

若 $r_B(n_1+1, n_2) > r_A(n_1, n_2+1)$，则这席应给 B

当 $r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1)$，该席给A

$\Downarrow$ r_A, r_B的定义

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

该席给A

否则，该席给B

定义 $Q_i = \dfrac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}, \ i = 1,2,$ 该席给Q值较大的一方

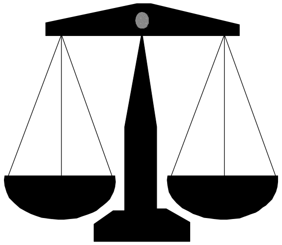
推广到m方分配席位

计算 $Q_i = \dfrac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}, \ i = 1,2,\cdots,m$

该席给Q值最大的一方

Q 值方法

三系用Q值方法重新分配 21个席位



按人数比例的整数部分已将19席分配完毕

甲系：$p_1=103,\ n_1=10$

乙系：$p_2=\ 63,\ n_2=\ 6$

丙系：$p_3=\ 34,\ n_3=\ 3$

用Q值方法分配
第20席和第21席

第20席 $$Q_1=\frac{103^2}{10\times 11}=96.4,\ Q_2=\frac{63^2}{6\times 7}=94.5,\ Q_3=\frac{34^2}{3\times 4}=96.3$$

Q_1最大，第20席给甲系

第21席 $$Q_1=\frac{103^2}{11\times 12}=80.4,\ Q_2,\ Q_3 \text{ 同上}$$

Q_3最大，第21席给丙系

Q值方法
分配结果

甲系11席，乙系6席，丙系4席

公平吗?

进一步的讨论

Q值方法比“比例加惯例”方法更公平吗？

席位分配的理想化准则

已知: m方人数分别为 $p_1, p_2,\dots, p_m$, 记总人数为 $P= p_1+p_2+\dots+p_m$, 待分配的总席位为N。

设理想情况下m方分配的席位分别为$n_1,n_2,\dots, n_m$ (自然应有$n_1+n_2+\dots+n_m=N$),

n_i应是 N和 $p_1, \dots, p_m$ 的函数，即$n_i= n_i(N, p_1, \dots, p_m)$

记$q_i=Np_i/P$, $i=1,2, \dots, m$, 若q_i均为整数，显然应 $n_i=q_i$

$q_i=Np_i/P$不全为整数时，n_i 应满足的准则：

记 $[q_i]_-=\mathrm{floor}(q_i)$ ~ 向 $\le q_i$方向取整；

$[q_i]_+=\mathrm{ceil}(q_i)$ ~ 向 $\ge q_i$方向取整.

1) $[q_i]_- \le n_i \le [q_i]_+$ $(i=1,2,\ldots,m)$, 即n_i 必取$[q_i]_-$, $[q_i]_+$之一

2) $n_i(N,p_1,\ldots,p_m) \le n_i(N+1,p_1,\ldots,p_m)$ $(i=1,2,\ldots,m)$

即当总席位增加时，n_i不应减少

"比例加惯例"方法满足 1），但不满足 2）

Q值方法满足 2），但不满足 1）。令人遗憾！

2.2 录像机计数器的用途

问题 经试验，一盘标明180分钟的录像带从头走到尾，时间用了184分，计数器读数从0000变到6061。

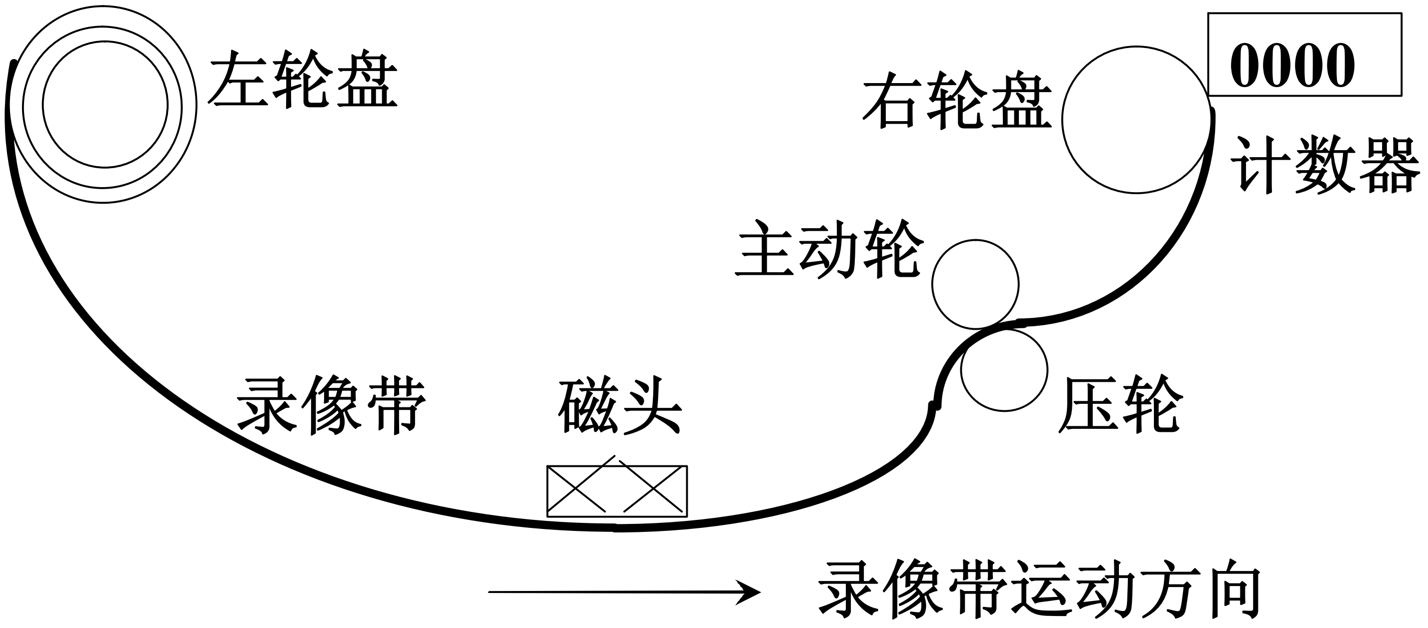
在一次使用中录像带已经转过大半，计数器读数为4450，问剩下的一段还能否录下1小时的节目？

思考 计数器读数是均匀增长的吗?

要求 不仅回答问题，而且建立计数器读数与录像带转过时间的关系。

观察 计数器读数增长越来越慢！

问题分析 录像机计数器的工作原理



录像带运动

右轮盘半径增大

计数器读数增长变慢

右轮转速不是常数

录像带运动速度是常数

模型假设

- 录像带的运动速度是常数 v；
- 计数器读数 n与右轮转数 m成正比，记 $m=kn$；
- 录像带厚度（加两圈间空隙）为常数 w；
- 空右轮盘半径记作 r；
- 时间 $t=0$ 时读数 $n=0$.

建模目的 建立时间t与读数n之间的关系

（设v, k, w, r为已知参数）

模型建立

建立*t*与*n*的函数关系有多种方法

1. 右轮盘转第 ***i*** 圈的半径为***r*+*wi*, *m***圈的总长度等于录像带在时间***t***内移动的长度***vt***, 所以

$$\sum_{i=1}^{m} 2\pi(r + wi) = vt \qquad m = kn$$

$$\Longrightarrow \quad t = \frac{\pi wk^{2}}{v} n^{2} + \frac{2\pi rk}{v} n$$

模型建立

2. 考察右轮盘面积的变化，等于录像带厚度乘以转过的长度，即

3. 考察*t*到*t*+*dt*录像带在右轮盘缠绕的长度，有

$$\pi[(r+wkn)^2-r^2]=wvt$$

$$(r+wkn)2\pi kdn=vdt$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$t=\frac{\pi wk^2}{v}n^2+\frac{2\pi rk}{v}n$$

思 考 3种建模方法得到同一结果

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} 2\pi(r+wi)=vt \\ \pi[(r+wkn)^2-r^2]=wvt \\ (r+wkn)2\pi kdn=vdt \end{array}\right\} \Rightarrow t=\frac{\pi wk^2}{v}n^2+\frac{2\pi rk}{v}n$$

但仔细推算会发现稍有差别，请解释。

思 考 模型中有待定参数 $r, w, v, k,$

一种确定参数的办法是测量或调查，请设计测量方法。

参数估计

另一种确定参数的方法——测试分析

将模型改记作 $t = an^2 + bn$， 只需估计 **a,b**

理论上，已知**t=184, n=6061**，再有一组**(t, n)**数据即可

实际上，由于测试有误差，最好用足够多的数据作拟合

现有一批测试数据：

t	**0**	**20**	**40**	**60**	**80**
n	**0000**	**1141**	**2019**	**2760**	**3413**
t	**100**	**120**	**140**	**160**	**184**
n	**4004**	**4545**	**5051**	**5525**	**6061**

用最小二乘法可得

$$a = 2.61\times 10^{-6},$$

$$b = 1.45\times 10^{-2}.$$

模型检验

应该另外测试一批数据检验模型：

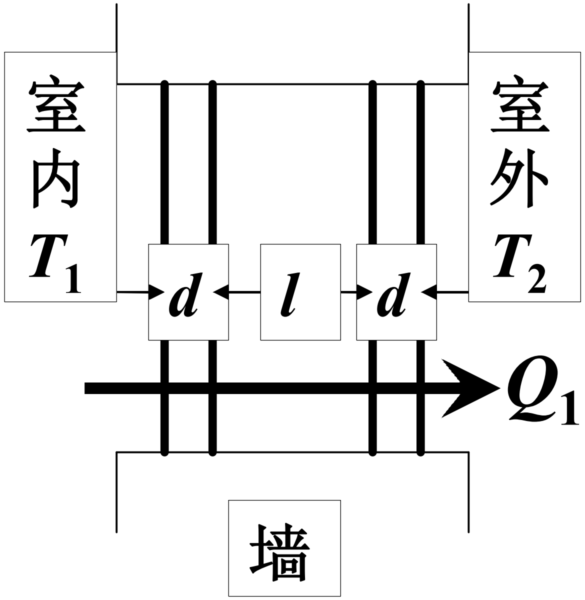
$$t = an^2 + bn \ \ (a = 2.61 \times 10^{-6}, b = 1.45 \times 10^{-2})$$

模型应用

回答提出的问题：由模型算得 **n = 4450** 时 **t = 116.4**分，剩下的录像带能录 **184-116.4= 67.6**分钟的节目。

揭示了“***t*** 与 ***n*** 之间呈二次函数关系”这一普遍规律，当录像带的状态改变时，只需重新估计 ***a,b*** 即可。

2.3　双层玻璃窗的功效



问题　双层玻璃窗与同样多材料的单层玻璃窗相比，减少多少热量损失

假设　热量传播只有传导，没有对流

T_1,T_2不变，热传导过程处于稳态

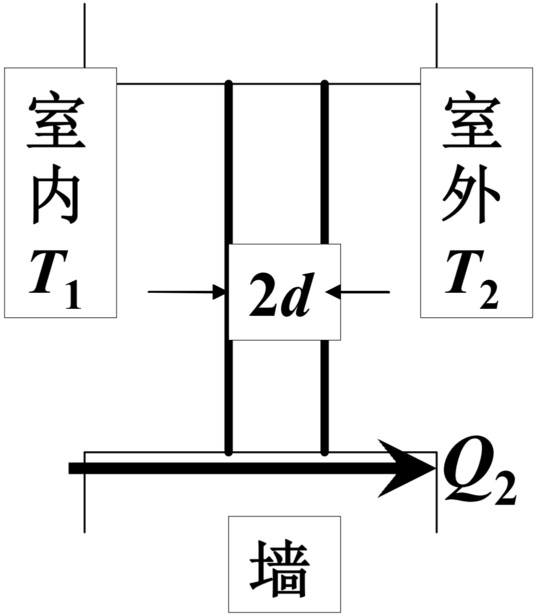
材料均匀，热传导系数为常数

建模　Q ~单位时间单位面积传导的热量

ΔT~温差, d~材料厚度, k~热传导系数

热传导定律

$$Q = k\frac{\Delta T}{d}$$



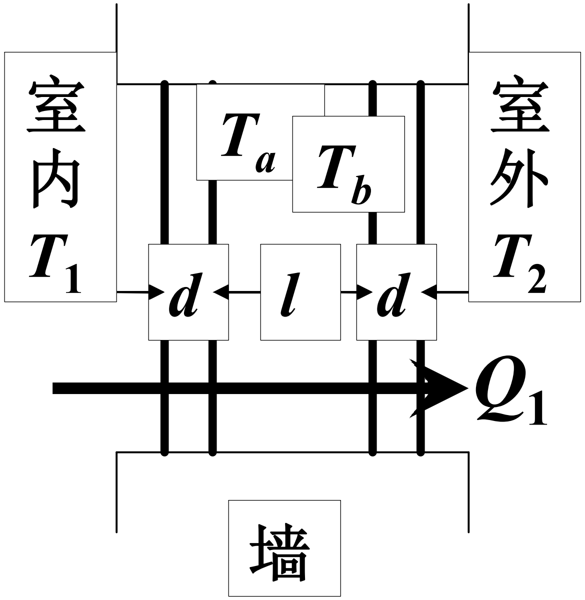
建模 记双层玻璃窗传导的热量Q_1

T_a~内层玻璃的外侧温度

T_b~外层玻璃的内侧温度

k_1~玻璃的热传导系数

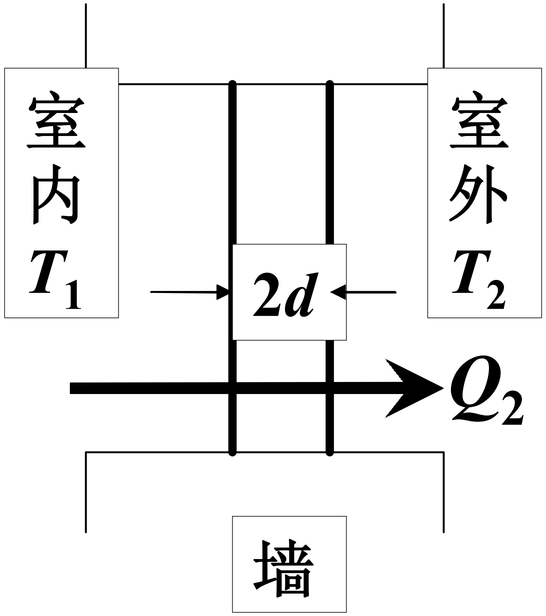
k_2~空气的热传导系数



$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d}$$

$$\Rightarrow \quad Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(s+2)}, \ s = h\frac{k_1}{k_2}, \ h = \frac{l}{d}$$

建模 记单层玻璃窗传导的热量Q_2



$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d}$$

$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(s+2)}$$

双层与单层窗传导的热量之比

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2}{s+2}, \quad s = h\frac{k_1}{k_2}, \quad h = \frac{l}{d}$$

$$Q_1 < Q_2$$

$k_1=4\times10^{-3}$ ~8×10^{-3}, $k_2=2.5\times10^{-4}$, $k_1/k_2=16$ ~32

对Q_1比Q_2的减少量

作最保守的估计，

取$k_1/k_2=16$

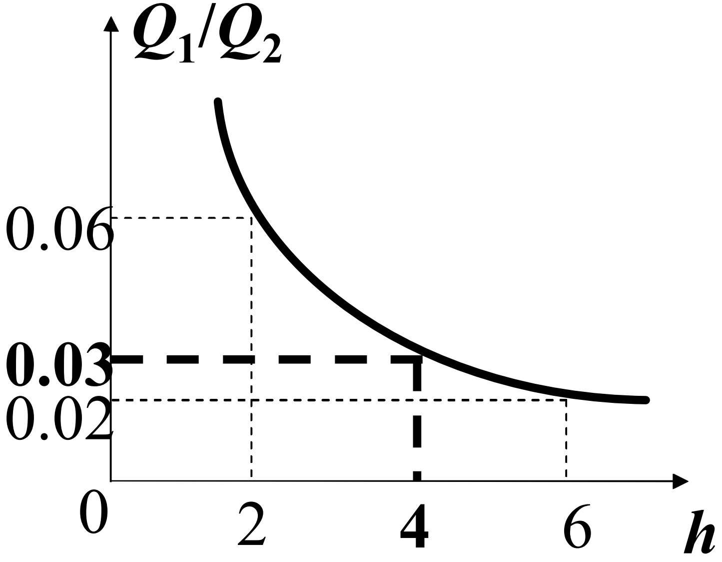
$\Rightarrow$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{8h+1}, \quad h = \frac{l}{d}$$

模型应用

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{1}{8h+1},\ h=\frac{l}{d}$$

取 $h=l/d=4$，则 $Q_1/Q_2=0.03$



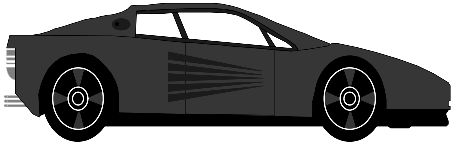
即双层玻璃窗与同样多材料的单层玻璃窗相比，可减少97%的热量损失。

结果分析

Q_1/Q_2所以如此小，是由于层间空气极低的热传导系数 k_2，而这要求空气非常干燥、不流通。

房间通过天花板、墙壁……损失的热量更多。

双层窗的功效不会如此之大



2.4 汽车刹车距离

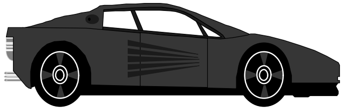
美国的某些司机培训课程中的驾驶规则:

背景与问题

- 正常驾驶条件下, 车速每增10英里/小时, 后面与前车的距离应增一个车身的长度。
- 实现这个规则的简便办法是 “2秒准则” :
- 后车司机从前车经过某一标志开始默数 2秒钟后到达同一标志，而不管车速如何

判断 “2秒准则” 与 “车身”规则是否一样;

建立数学模型，寻求更好的驾驶规则。

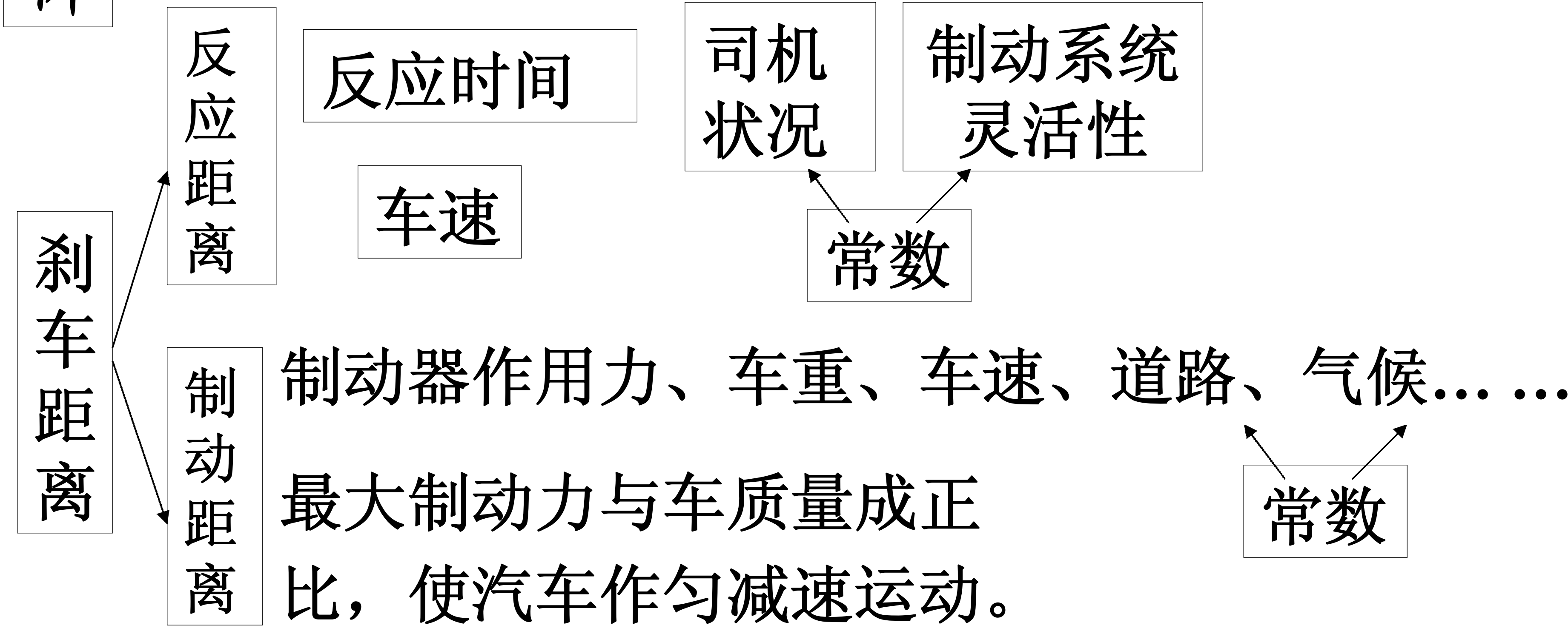


常识：刹车距离与车速有关

问题分析

10英里/小时(≈16公里/小时)车速下2秒钟行驶29英尺(≈ 9米) >>车身的平均长度15英尺(=4.6米)

“2秒准则”与“10英里/小时加一车身”规则不同



刹车距离

反应距离

反应时间

车速

司机状况

制动系统灵活性

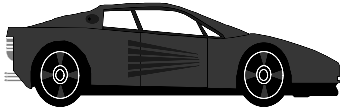
常数

制动距离

制动器作用力、车重、车速、道路、气候… …

最大制动力与车质量成正比，使汽车作匀减速运动。

常数



假设与建模

1. 剎车距离 d 等于反应距离 d_1 与制动距离 d_2 之和

$$d = d_1 + d_2$$

2. 反应距离 d_1与车速 v成正比

t_1为反应时间

$$d_1 = t_1 v$$

3. 剎车时使用最大制动力F，F作功等于汽车动能的改变；

且F与车的质量m成正比

$$F d_2 = m v^2/2$$

$$F \propto m$$

$$\Downarrow$$

$$d_2 = kv^2$$

$$d = t_1 v + kv^2$$

模 型 $d = t_1 v + k v^2$

参数估计

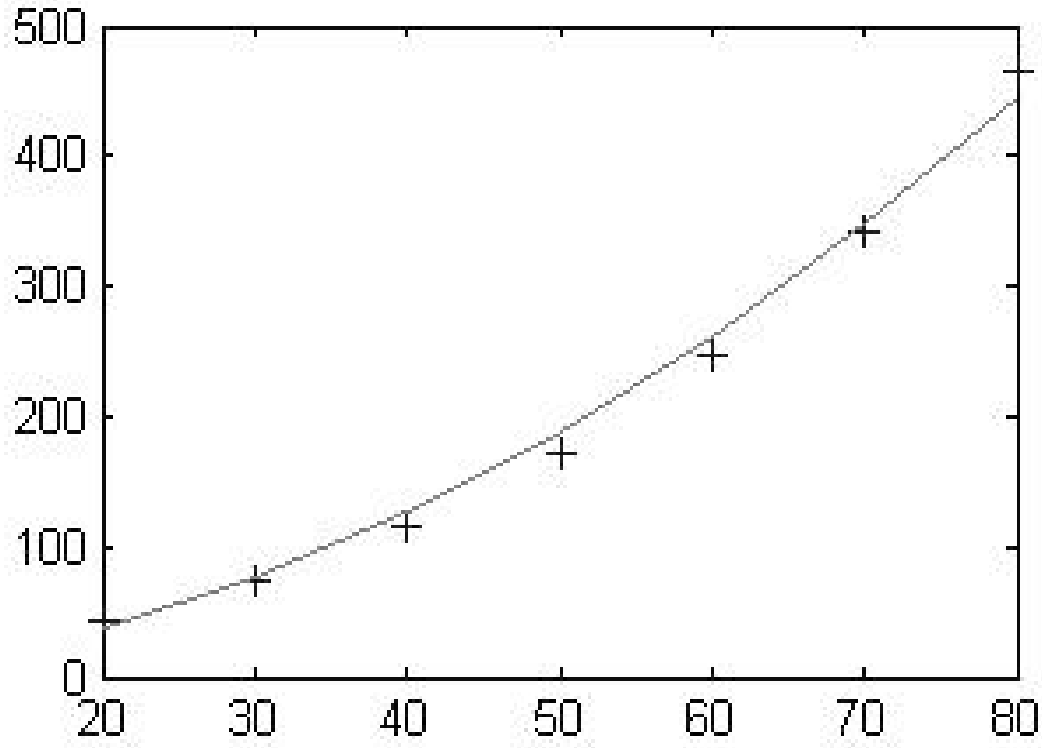
- 反应时间 t_1 的经验估计值为**0.75**秒
- 利用交通部门提供的一组实际数据拟合 ***k***

车速		实际刹车距离	计算刹车距离	刹车时间
(英里/小时)	(英尺/秒)	（英尺）	（英尺）	（秒）
20	**29.3**	**42（44）**	**39.0**	**1.5**
30	**44.0**	**73.5（78）**	**76.6**	**1.8**
40	**58.7**	**116（124）**	**126.2**	**2.1**
50	**73.3**	**173（186）**	**187.8**	**2.5**
60	**88.0**	**248（268）**	**261.4**	**3.0**
70	**102.7**	**343（372）**	**347.1**	**3.6**
80	**117.3**	**464（506）**	**444.8**	**4.3**

最小二乘法 $\Rightarrow$ ***k*=0.06** ⇨ 计算刹车距离、刹车时间

模型

$$d = t_1 v + k v^2 = 0.75 v + 0.06 v^2$$



车速 (英里/小时)	刹车时间 （秒）
20	1.5
30	1.8
40	2.1
50	2.5
60	3.0
70	3.6
80	4.3

“2秒准则”应修正为 “*t* 秒准则”

车速（英里/小时）	0~10	10~40	40~60	60~80
t（秒）	1	2	3	4

2.5 划艇比赛的成绩

问题 对四种赛艇（单人、双人、四人、八人）4次国际大赛冠军的成绩进行比较，发现与浆手数有某种关系。试建立数学模型揭示这种关系。

赛艇种类	2000米成绩 t (分)					艇长l (米)	艇宽b (米)	l/b	$\frac{\text{空艇重}w_0\text{(kg)}}{\text{浆手数}n}$
	1	2	3	4	平均				
单人	7.16	7.25	7.28	7.17	7.21	7.93	0.293	27.0	16.3
双人	6.87	6.92	6.95	6.77	6.88	9.76	0.356	27.4	13.6
四人	6.33	6.42	6.48	6.13	6.32	11.75	0.574	21.0	18.1
八人	5.87	5.92	5.82	5.73	5.84	18.28	0.610	30.0	14.7

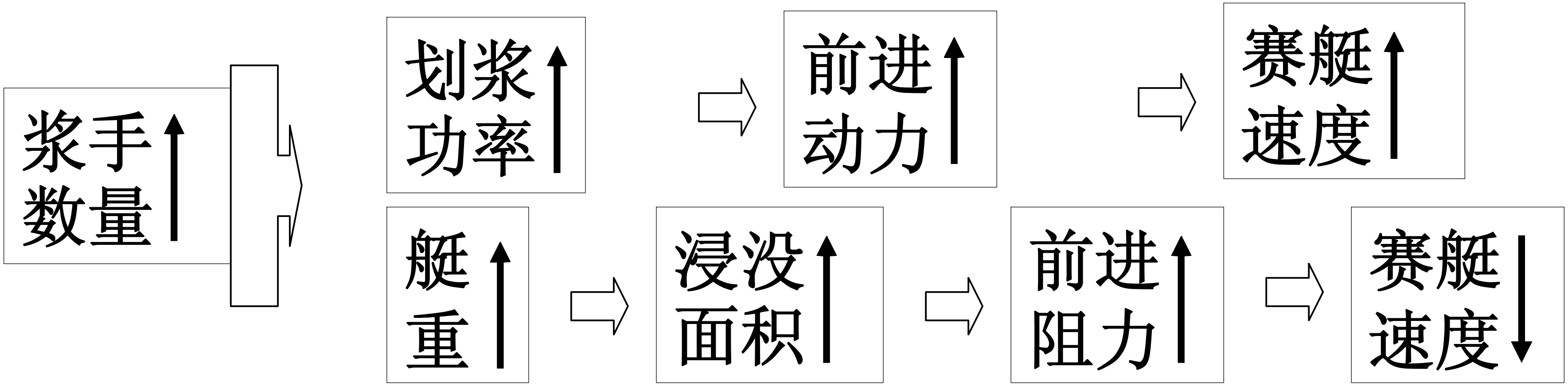
准备 调查赛艇的尺寸和重量 ⇒ l/b, w_0/n 基本不变

问题分析

分析赛艇速度与浆手数量之间的关系

赛艇速度由前进动力和前进阻力决定

- 前进动力～浆手的划浆功率
- 前进阻力～浸没部分与水的摩擦力



浆手数量↑ ⇒ 划浆功率↑ ⇨ 前进动力↑ ⇨ 赛艇速度↑

浆手数量↑ ⇒ 艇重↑ ⇨ 浸没面积↑ ⇨ 前进阻力↑ ⇨ 赛艇速度↓

- 对浆手体重、功率、阻力与艇速的关系等作出假定
- 运用合适的物理定律建立模型

模型假设

符号：艇速 v, 浸没面积 s, 浸没体积 A, 空艇重 w_0, 阻力 f, 桨手数 n, 桨手功率 p, 桨手体重 w, 艇重 W

1）艇形状相同(l/b为常数), w_0与n成正比

艇的静态特性

2）v是常数，阻力 f与 sv^2成正比

艇的动态特性

3）w相同，p不变，p与w成正比

桨手的特征

模型建立

$$np \propto fv \qquad f \propto sv^2 \qquad p \propto w \qquad \Rightarrow \qquad v \propto (n/s)^{1/3}$$

$$s^{1/2} \propto A^{1/3} \qquad A \propto W(=w_0+nw) \propto n \qquad \Rightarrow \qquad s \propto n^{2/3}$$

$$\Rightarrow \qquad v \propto n^{1/9} \qquad \Rightarrow$$

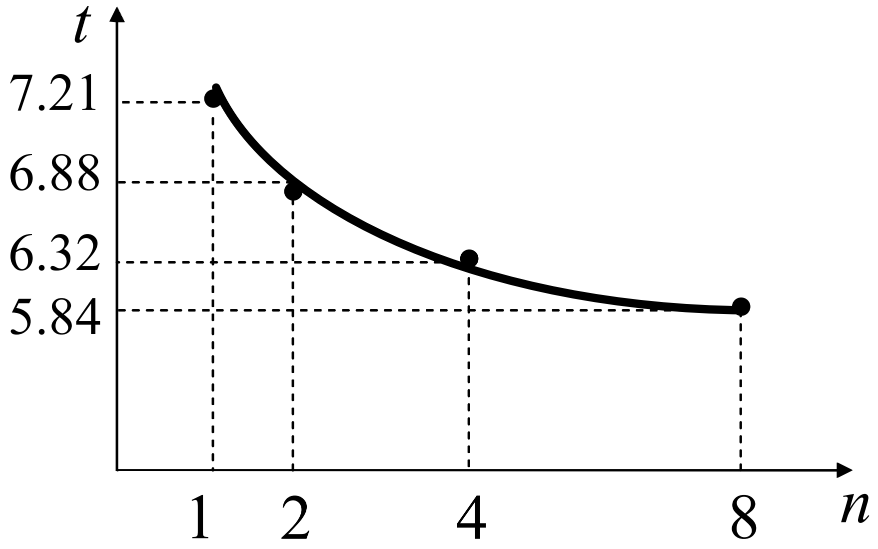
比赛成绩 $t \propto n^{-1/9}$

模型检验

利用4次国际大赛冠军的平均成绩对模型 $t \propto n^{-1/9}$ 进行检验

n	t
1	**7.21**
2	**6.88**
4	**6.32**
8	**5.84**

$\Rightarrow$



$$t = an^{b} \Rightarrow \log t = a' + b \log n$$

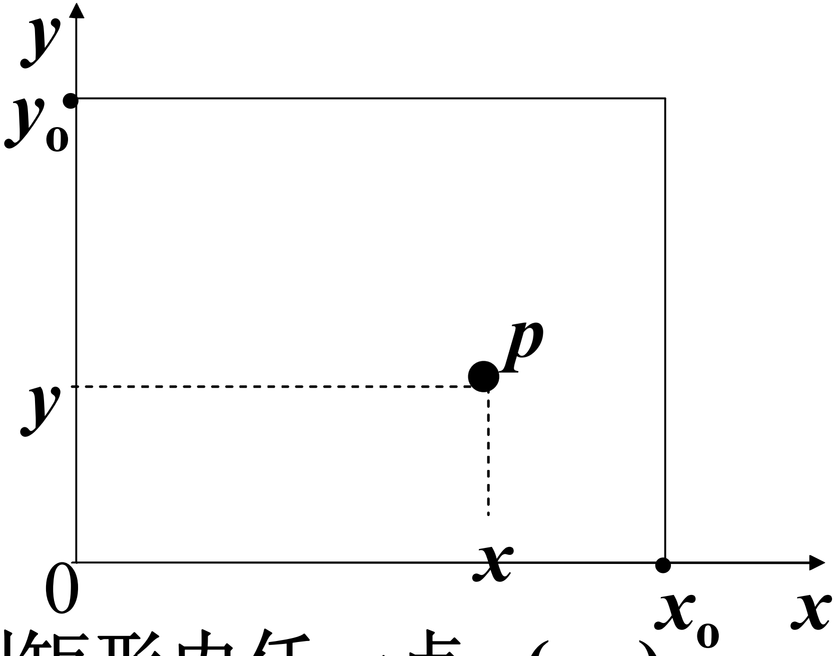
$$\xrightarrow[\text{最小二乘法}]{} \boxed{t = 7.21 n^{-0.11}}$$

与模型巧合！

2.6 实物交换

问题 甲有物品X, 乙有物品Y, 双方为满足更高的需要，商定相互交换一部分。研究实物交换方案。

用x,y分别表示甲(乙)占有X,Y的数量。设交换前甲占有X的数量为x_0, 乙占有Y的数量为y_0，作图：

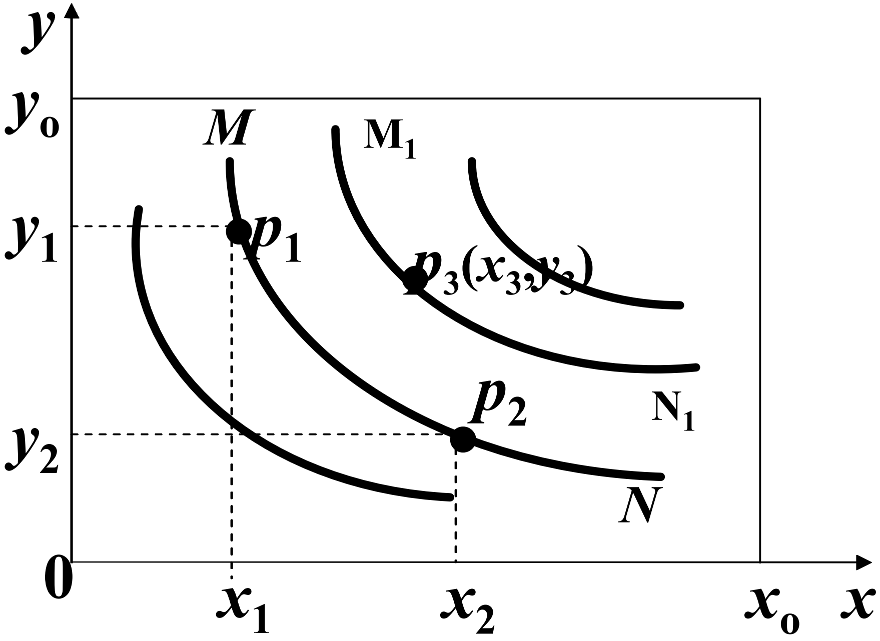


若不考虑双方对X,Y的偏爱，则矩形内任一点$p(x,y)$都是一种交换方案：甲占有(x,y)，乙占有(x_0-x, y_0-y)

分析与建模

甲的无差别曲线

如果甲占有(x_1,y_1)与占有(x_2,y_2)具有同样的满意程度，即p_1, p_2对甲是无差别的，



将所有与p_1, p_2无差别的点连接起来，得到一条无差别曲线MN,

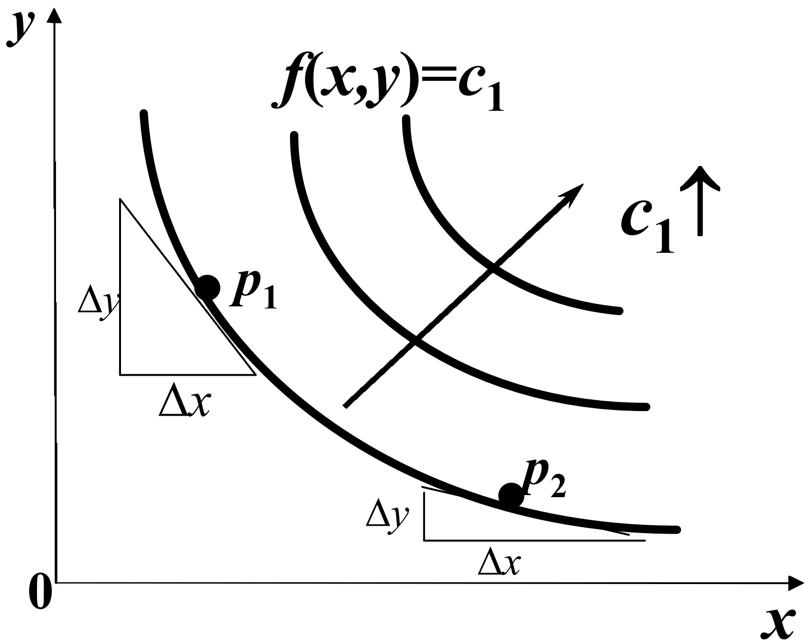
线上各点的满意度相同, 线的形状反映对X,Y的偏爱程度，

比MN各点满意度更高的点如p_3，在另一条无差别曲线M_1N_1上。于是形成一族无差别曲线（无数条）。

甲的无差别曲线族记作

$f(x,y)=c_1$　　c_1~满意度

（f ~等满意度曲线）



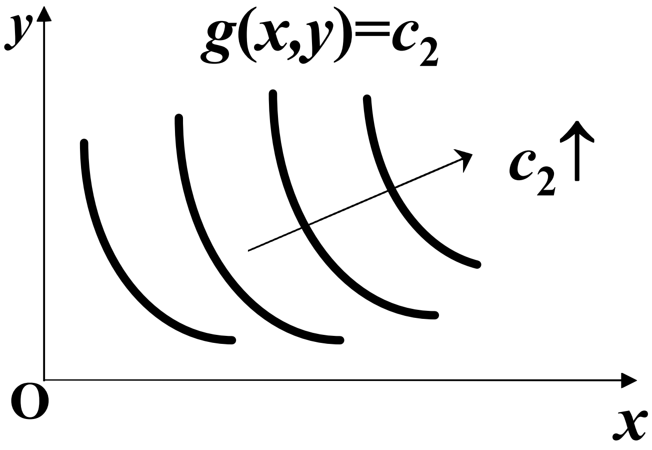
无差别曲线族的性质:

- 单调减(x增加, y减小)
- 下凸(凸向原点)
- 互不相交

在p_1点占有x少、y多，宁愿以较多的Δy换取较少的Δx;

在p_2点占有y少、x多，就要以较多的Δx换取较少的Δy。

乙的无差别曲线族 $g(x,y)=c_2$具有相同性质（形状可以不同）

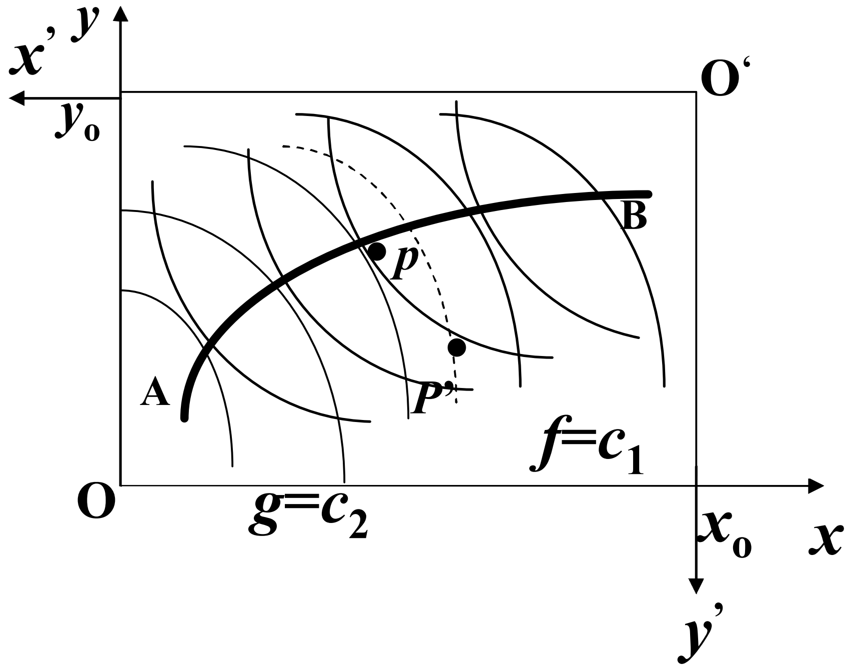


双方的交换路径

甲的无差别曲线族 $f=c_1$

乙的无差别曲线族 $g=c_2$ (坐标系$x'O'y'$, 且反向）

两族曲线切点连线记作AB



双方满意的交换方案必在AB（交换路径）上

因为在AB外的任一点p',
(双方)满意度低于AB上的点p

交换方案的进一步确定

交换方案～交换后甲的占有量 (x,y)

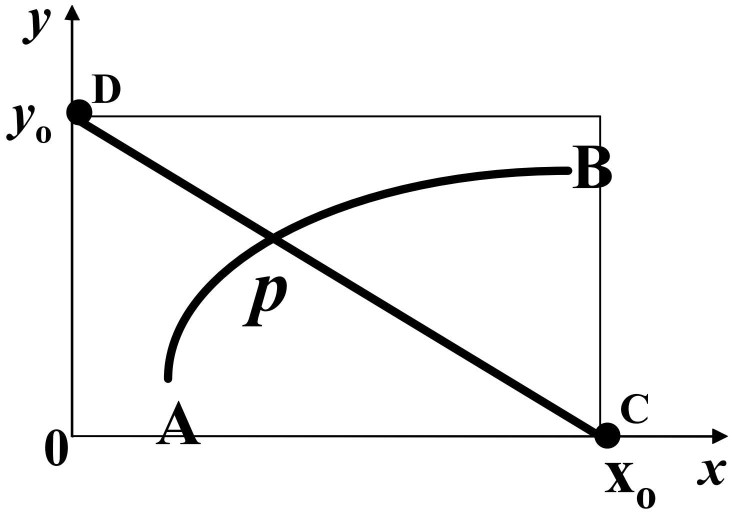
$0 \le x \le x_0, 0 \le y \le y_0$矩形内任一点 ⇨ 交换路径AB ⇨ AB与CD的交点p

双方的无差别曲线族

等价交换原则

X,Y用货币衡量其价值，设交换前x_0,y_0价值相同，则等价交换原则下交换路径为

$(x_0,0), (0,y_0)$ 两点的连线CD



设X单价a, Y单价b, 则等价交换下$ax+by=s$ $(s=ax_0=by_0)$

2.7　核军备竞赛

背景

- 冷战时期美苏声称为了保卫自己的安全，实行“核威慑战略”，核军备竞赛不断升级。
- 随着前苏联的解体和冷战的结束，双方通过了一系列的核裁军协议。
- 在什么情况下双方的核军备竞赛不会无限扩张，而存在暂时的平衡状态。
- 估计平衡状态下双方拥有的最少的核武器数量，这个数量受哪些因素影响。
- 当一方采取加强防御、提高武器精度、发展多弹头导弹等措施时，平衡状态会发生什么变化。

模型假设

以双方(战略)核导弹数量描述核军备的大小。

假定双方采取如下同样的核威慑战略：

- 认为对方可能发起所谓第一次核打击，即倾其全部核导弹攻击己方的核导弹基地；
- 乙方在经受第一次核打击后，应保存足够的核导弹，给对方重要目标以毁灭性的打击。

在任一方实施第一次核打击时，假定一枚核导弹只能攻击对方的一个核导弹基地。

摧毁这个基地的可能性是常数，它由一方的攻击精度和另一方的防御能力决定。

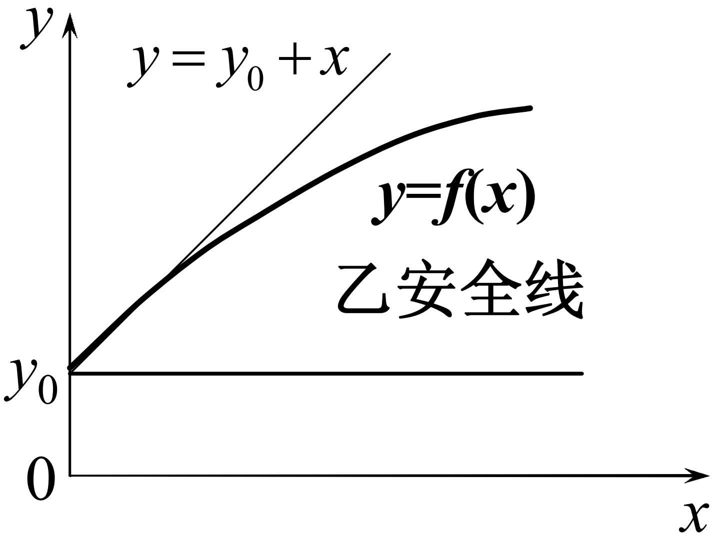
图的模型

$y=f(x)$~甲方有x枚导弹，乙方所需的最少导弹数

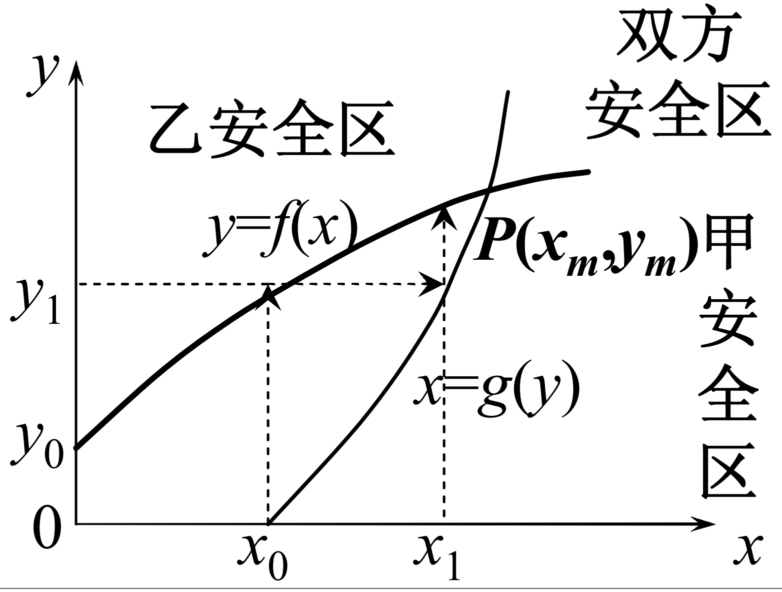
$x=g(y)$~乙方有y枚导弹，甲方所需的最少导弹数

当 $x=0$时 $y=y_0$，y_0~乙方的威慑值

y_0~甲方实行第一次打击后已经没有导弹，乙方为毁灭甲方工业、交通中心等目标所需导弹数



$$y_0<y=f(x)<y_0+x$$



P~平衡点(双方最少导弹数)

精细模型

乙方残存率 s ~甲方一枚导弹攻击乙方一个基地，基地未被摧毁的概率。

$x<y$

甲方以 x攻击乙方 y个基地中的 x个,

sx个基地未摧毁，$y-x$个基地未攻击。

$y_0=sx+y-x$ ⇨ $y=y_0+(1-s)x$

$x=y$

$\boxed{y_0=sy}$ ⇨ $\boxed{y=y_0/s}$

$y<x<2y$

乙的$x-y$个被攻击2次，$s^2(x-y)$个未摧毁；

$y-(x-y)=2y-x$个被攻击1次，$s(2y-x)$个未摧毁

$y_0=s^2(x-y)+s(2y-x)$ ⇨ $y=\frac{y_0}{s(2-s)}+\frac{1-s}{2-s}x$

$x=2y$

$\boxed{y_0=s^2y}$ ⇨ $\boxed{y=y_0/s^2}$

精细模型

$x<y,\ y=y_0+(1\text{-}s)x$　　$y<x<2y,\ \ y=\dfrac{y_0}{s(2-s)}+\dfrac{1-s}{2-s}x$

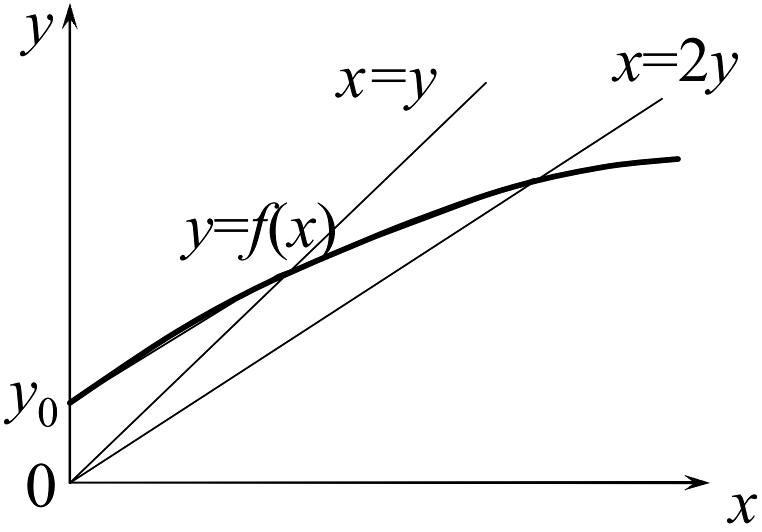
$x=y,\ y=y_0/s$　　$x=2y,\ \ y=y_0/s^2$

$$\boldsymbol{x=a\,y},\quad y=\frac{y_0}{s^a}=\frac{y_0}{s^{x/y}}$$

y_0~威慑值

s~残存率

a~交换比(甲乙导弹数量比)



y是一条上凸的曲线

y_0变大，曲线上移、变陡

s变大，y减小，曲线变平

a变大，y增加，曲线变陡

模型解释

- 甲方增加经费保护及疏散工业、交通中心等目标

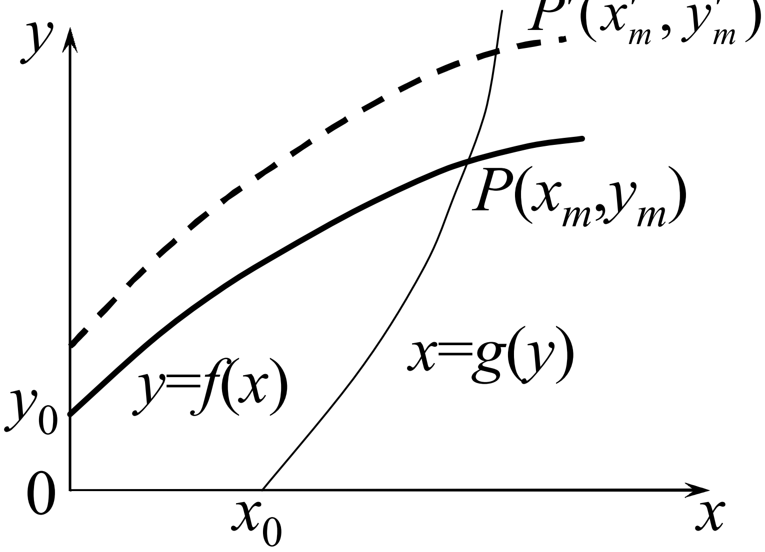
⇨ 乙方威慑值 y_0变大

（其它因素不变）

⇨ 乙安全线 $y=f(x)$上移

⇨ 平衡点$P\rightarrow P'$

⇨ $x'_m > x_m, y'_m > y_m$



甲方的被动防御也会使双方军备竞赛升级。

模型解释

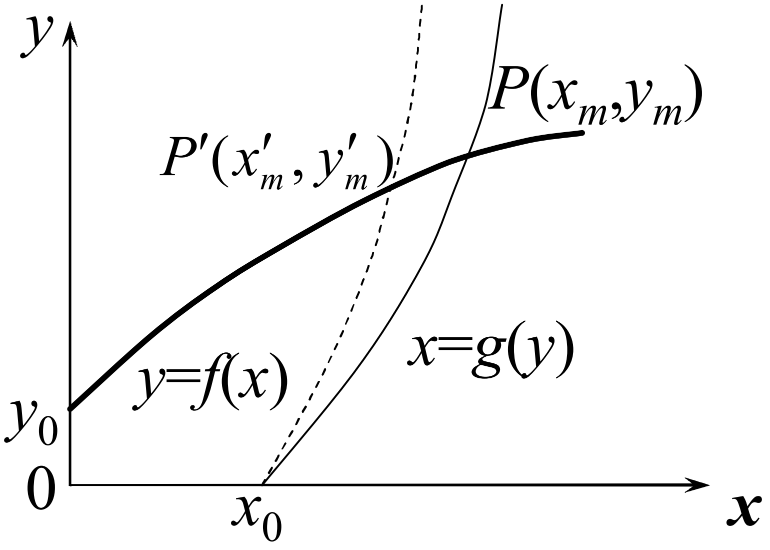
- 甲方将固定核导弹基地改进为可移动发射架

⇨ 乙安全线$y=f(x)$不变

甲方残存率变大

威慑值x_0和交换比不变

⇨ x减小，甲安全线 $x=g(y)$向y轴靠近



⇨ $P\to P'$ $x'_m < x_m, y'_m < y_m$

甲方这种单独行为，会使双方的核导弹减少

模型解释

- 双方发展多弹头导弹，每个弹头可以独立地摧毁目标

(x, y仍为双方核导弹的数量)

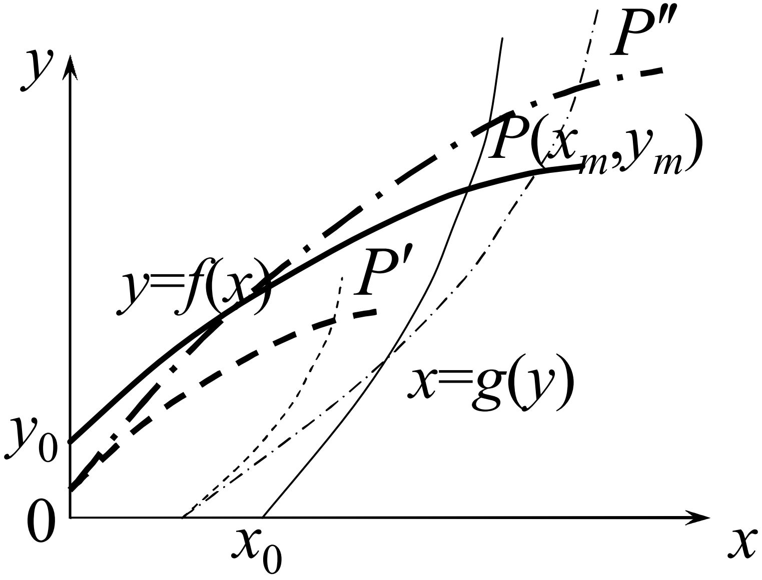
⇨ 双方威慑值减小，残存率不变，交换比增加

乙安全线 $y=f(x)$

y_0减小 → y下移且变平

a 变大 → y增加且变陡

⇨ $P \rightarrow P'$? $P \rightarrow P''$?



双方导弹增加还是减少，需要更多信息及更详细的分析

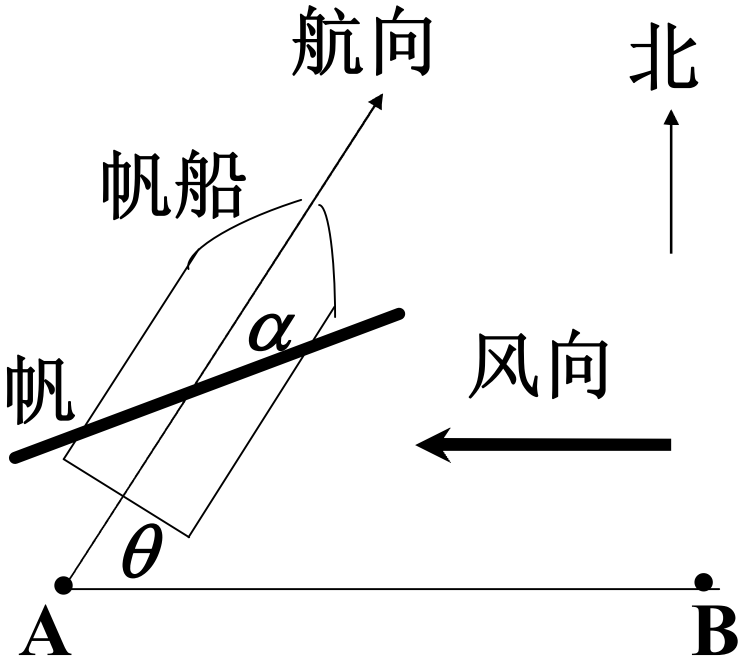
2.8 启帆远航

帆船在海面上乘风远航，确定最佳的航行方向及帆的朝向

简化问题

海面上东风劲吹，设帆船要从**A**点驶向正东方的**B**点，确定起航时的航向θ,

以及帆的朝向α



模型分析

- 风(通过帆)对船的推力w
- 风对船体部分的阻力p

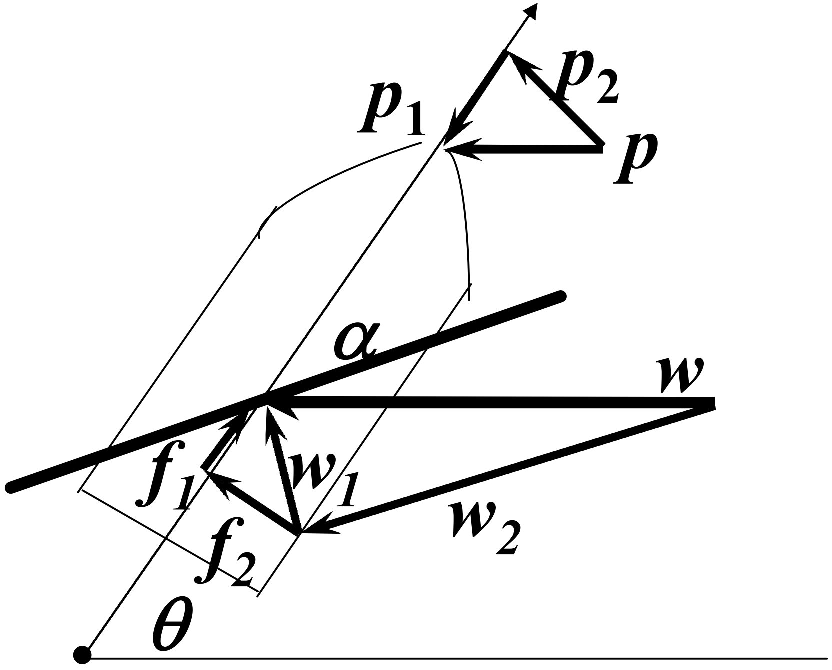
推力w的分解　$w=w_1+w_2$

$w_1=f_1+f_2$

f_1~航行方向的推力

阻力p的分解　$p=p_1+p_2$

p_1 ~航行方向的阻力



模型假设

- w与帆迎风面积s_1成正比，p与船迎风面积s_2成正比，比例系数相同且 s_1远大于s_2，

模型假设

- w_2与帆面平行，可忽略
- f_2, p_2垂直于船身，可由舵抵消
- 航向速度v与力$f=f_1-p_1$成正比

模型建立

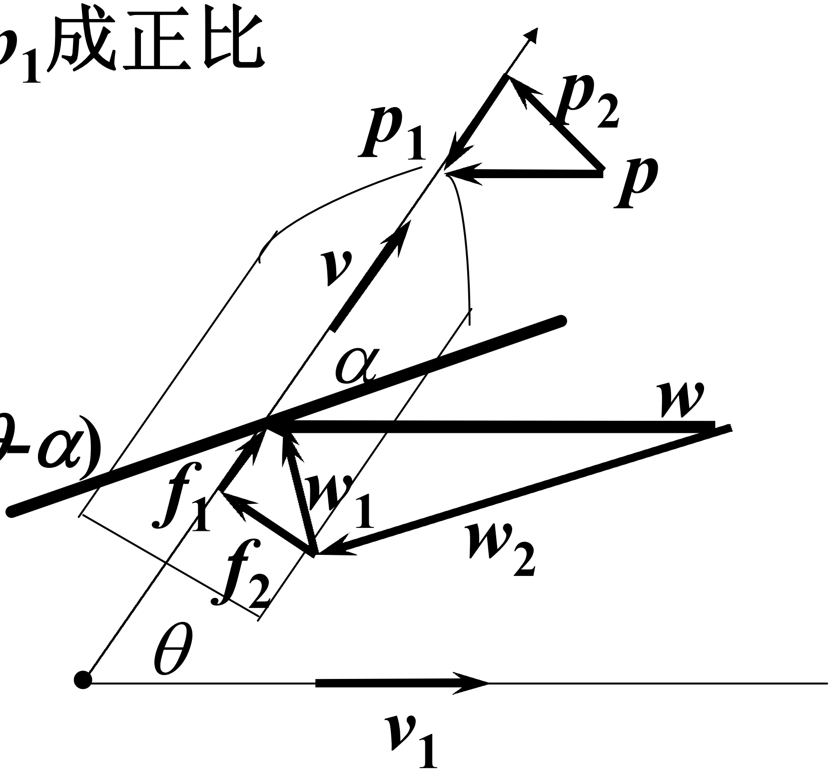
$$w=ks_1,\ \ p=ks_2$$

$$w_1=w\sin(\theta-\alpha)$$

$$f_1=w_1\sin\alpha=w\sin\alpha\,\sin(\theta-\alpha)$$

$$p_1=p\cos\theta$$

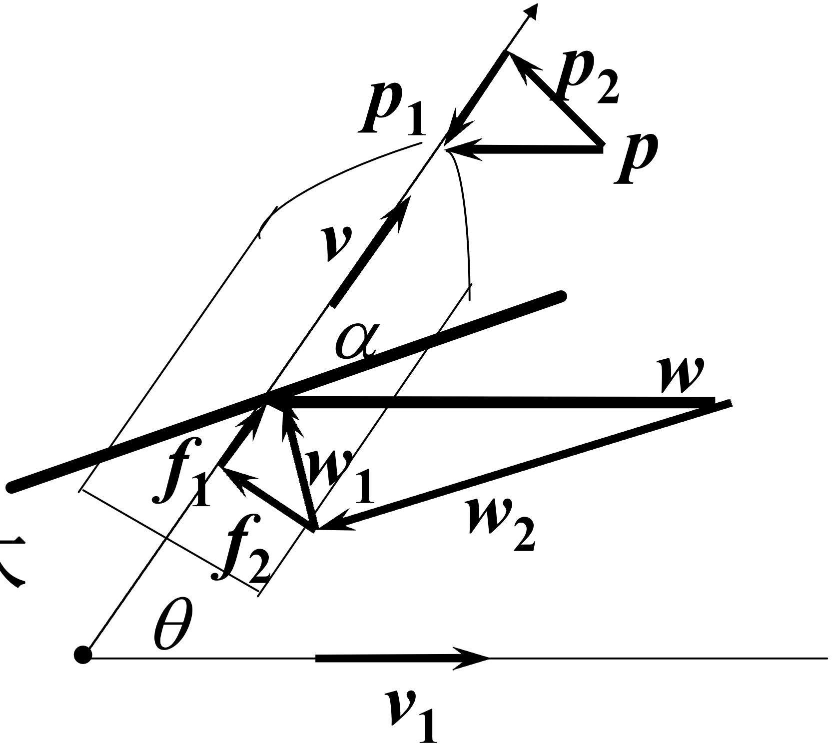
$$v=k_1(f_1-p_1)$$



船在正东方向速度分量$v_1=v\cos\theta$

模型建立 $v_1=v\cos\theta = k_1(f_1-p_1)\cos\theta$

$f_1=w_1\sin\alpha=w\sin\alpha\,\sin(\theta-\alpha)$ $p_1=p\cos\theta$



模型求解 求θ,α,使 v_1最大

1) 当θ固定时求α使f_1最大

$f_1=w[\cos(\theta-2\alpha)-\cos\theta]/2$

⇨ $\alpha=\theta/2$ 时 $f_1=w(1-\cos\theta)/2$最大

2) 令$\alpha=\theta/2$,

$v_1=k_1[w(1-\cos\theta)/2 -p\cos\theta]\cos\theta$

求θ使v_1最大（$w=ks_1, p=ks_2$）

模型求解

$$v_1=k_1[w(1-\cos\theta)/2-p\cos\theta]\cos\theta$$

$$=(k_1w/2)[1-(1+2p/w)\cos\theta]\cos\theta$$

$w=ks_1,\ p=ks_2$　　记 $t=1+2s_2/s_1,\ k_2=k_1w/2$

$$v_1=k_2(1-t\cos\theta)\cos\theta=k_2t[\frac{1}{4t^2}-(\cos\theta-\frac{1}{2t})^2]$$

$\Rightarrow$ $\cos\theta=\frac{1}{2t}\ \ (t=1+\frac{2s_2}{s_1}),\ \alpha=\frac{\theta}{2}$　　v_1最大

$s_1>>s_2$ $\Rightarrow$ $1<t<2$ $\Rightarrow$ $1/4<\cos\theta<1/2$ $\Rightarrow$ $60^{\circ}<\theta<75^{\circ}$

备注

- 只讨论起航时的航向，是静态模型
- 航行过程中终点B将不在正东方

2.9　量纲分析与无量纲化

2.9.1　量纲齐次原则

物理量的量纲

长度 l 的量纲记 $L=[l]$

质量 m 的量纲记 $M=[m]$

时间 t 的量纲记 $T=[t]$

⇨ 动力学中基本量纲 L, M, T

速度 v 的量纲 $[v]=LT^{-1}$

加速度 a 的量纲 $[a]=LT^{-2}$

力 f 的量纲 $[f]=LMT^{-2}$

⇨ 导出量纲

引力常数 k 的量纲 $[k]$ $=[f][l]^2[m]^{-2}=L^3M^{-1}T^{-2}$

对无量纲量α，$[\alpha]=1(=L^0M^0T^0)$

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

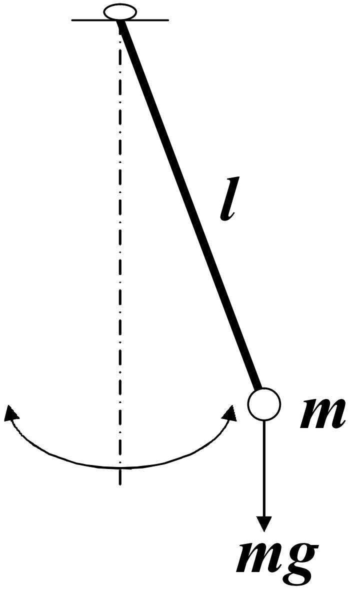
量纲齐次原则

等式两端的量纲一致

量纲分析~利用量纲齐次原则寻求物理量之间的关系

例：单摆运动

求摆动周期 *t* 的表达式



设物理量 *t, m, l, g* 之间有关系式

$$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3} \quad (1)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为待定系数，λ为无量纲量

(1)的量纲表达式

$$[t] = [m]^{\alpha_1} [l]^{\alpha_2} [g]^{\alpha_3}$$

$$\Rightarrow \quad T = M^{\alpha_1} L^{\alpha_2+\alpha_3} T^{-2\alpha_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_3 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_3 = -1/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = \lambda \sqrt{\frac{l}{g}}$$

对比

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3}$

为什么假设这种形式

设$p=f(x,y,z)$

对 x,y,z的两组测量值x_1,y_1,z_1 和x_2,y_2,z_2，

$p_1=f(x_1,y_1,z_1)$， $p_2=f(x_2,y_2,z_2)$

x,y,z的量纲单位缩小a,b,c倍

$$p_1'=f(ax_1,by_1,cz_1),p_2'=f(ax_2,by_2,cz_2)$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{p_1'}{p_2'} \Rightarrow \frac{f(x_1,y_1,z_1)}{f(x_2,y_2,z_2)}=\frac{f(ax_1,by_1,cz_1)}{f(ax_2,by_2,cz_2)}$$

⇨ $p=f(x,y,z)$的形式为 $f(x,y,z)=\lambda x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$

单摆运动中 ***t*, *m*, *l*, *g*** 的一般表达式

$$f(t,m,l,g)=0$$

⇨ $t^{y_1}m^{y_2}l^{y_3}g^{y_4}=\pi$　**y_1~y_4 为待定常数, π为无量纲量**

$$\begin{cases}[t]=L^0M^0T^1\\ [m]=L^0M^1T^0\\ [l]=L^1M^0T^0\\ [g]=L^1M^0T^{-2}\end{cases}$$

$$(L^0M^0T^1)^{y_1}(L^0M^1T^0)^{y_2}(L^1M^0T^0)^{y_3}(L^1M^0T^{-2})^{y_4}=L^0M^0T^0$$

$$L^{y_3+y_4}M^{y_2}T^{y_1-2y_4}=L^0M^0T^0$$

$$\begin{cases}y_3+y_4=0\\ y_2=0\\ y_1-2y_4=0\end{cases}$$

⇨ 基本解　$y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T=(2,0,-1,1)^T$

$$t^2l^{-1}g=\pi$$

$$F(\pi)=0$$

$$(t=\lambda\sqrt{l/g}\,)$$

Pi定理 (Buckingham)

设 $f(q_1, q_2, \ldots, q_m) = 0$

是与量纲单位无关的物理定律，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是基本量纲，$n \le m$，$q_1, q_2, \ldots, q_m$ 的量纲可表为

$$[q_j] = \prod_{i=1}^{n} X_i^{a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

量纲矩阵记作 $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$， 若 $\operatorname{rank} A = r$

线性齐次方程组 $Ay = 0$ 有 ***m-r*** 个基本解，记作

$$y_s = (y_{s1}, y_{s2}, \ldots, y_{sm})^T, \quad s = 1, 2, \ldots, m-r$$

则 $\pi_s = \prod_{j=1}^{m} q_j^{y_{sj}}$ 为 ***m-r*** 个相互独立的无量纲量, 且

$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-r}) = 0$ 与 $f(q_1, q_2, \ldots, q_m) = 0$ 等价, *F*未定

量纲分析示例：波浪对航船的阻力

航船阻力 f

航船速度v, 船体尺寸l, 浸没面积 s,
海水密度ρ, 重力加速度g。

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_m) = 0$$

$$\varphi(g, l, \rho, v, s, f) = 0$$

$$[q_j] = \prod_{i=1}^{n} X_i^{a_{ij}},$$

$$j = 1,2,\cdots,m$$

$[g] = LT^{-2}$, $[l] = L$, $[\rho] = L^{-3}M$,
$[v] = LT^{-1}{}_{,}$, $[s] = L^2$, $[f] = LMT^{-2}$

$$A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$$

$$A=\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & (L) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & (M) \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & (T) \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{cccccc} (g) & (l) & (\rho) & (v) & (s) & (f) \end{array}$$

$m=6$, $n=3$

$$f(q_1,q_2,\cdots,q_m)=0$$

$$rank\ A = r$$

$Ay=0$ 有 $m-r$ 个基本解

$$y_s=(y_{s1},y_{s2},\ldots,y_{sm})^T$$

$$s=1,2,\ldots,m-r$$

$m-r$ 个无量纲量

$$\pi_s=\prod_{j=1}^{m} q_j^{y_{sj}}$$

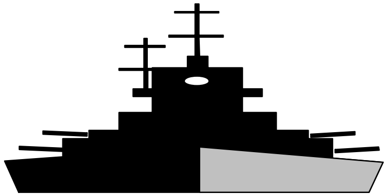
$$\varphi(g,l,\rho,v,s,f)=0$$

$$rank\ A = 3$$

$Ay=0$ 有 $m-r=3$ 个基本解

$$\begin{cases} y_1=(-1/2,-1/2,0,\ 1,0,0)^T \\ y_2=(\ \ 0,\ -2,\ 0,\ 0,1,0)^T \\ y_3=(\ -1,\ -3,-1,\ 0,0,1)^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1=g^{-\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{2}}v \\ \pi_2=l^{-2}s \\ \pi_3=g^{-1}l^{-3}\rho^{-1}f \end{cases}$$



$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$与
$\varphi(g,l,\rho,v,s,f) = 0$ 等价

$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-r}) = 0$ 与
$f(q_1, q_2, \ldots, q_m) = 0$ 等价

$$\pi_s = \prod_{j=1}^{m} q_j^{y_{sj}}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = g^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} v \\ \pi_2 = l^{-2} s \\ \pi_3 = g^{-1} l^{-3} \rho^{-1} f \end{cases}$$

为得到阻力 f 的显式表达式

$F=0$ ⇨ $\pi_3 = \psi(\pi_1, \pi_2)$

⇨ $$f = l^3 g \rho \psi(\pi_1, \pi_2), \qquad \pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gl}}, \pi_2 = \frac{s}{l^2}$$

ψ未定

量纲分析法的评注

- 物理量的选取

$\varphi(\ldots)=0$中包括哪些物理量是至关重要的

- 基本量纲的选取

基本量纲个数n；选哪些基本量纲

- 基本解的构造

有目的地构造 $Ay=0$ 的基本解

- 方法的普适性

不需要特定的专业知识

- 结果的局限性

函数F和无量纲量未定

2.9.2 量纲分析在物理模拟中的应用

例：航船阻力的物理模拟

通过航船模型确定原型船所受阻力

已知模型船所受阻力

$$f = l^3 g\rho\psi(\pi_1, \pi_2)$$

$$\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gl}}, \pi_2 = \frac{s}{l^2}$$

可得原型船所受阻力

$$f_1 = l_1^3 g_1\rho_1\psi(\pi_1', \pi_2')$$

$$\pi_1' = \frac{v_1}{\sqrt{g_1 l_1}}, \pi_2' = \frac{s_1}{l_1^{\ 2}}$$

f, s, l, v, ρ, g

~模型船的参数(均已知)

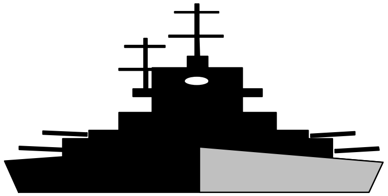
$f_1, s_1, l_1, v_1, \rho_1, g_1$

~原型船的参数

(f_1未知，其他已知)

注意：二者的ψ相同

$$f = l^3 g\rho\psi(\pi_1, \pi_2) \qquad f_1 = l_1^3 g_1 \rho_1 \psi(\pi_1', \pi_2')$$



$$\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gl}}, \pi_2 = \frac{s}{l^2} \qquad \pi_1' = \frac{v_1}{\sqrt{g_1 l_1}}, \pi_2' = \frac{s_1}{l_1^2} \qquad g = g_1$$

$$\pi_1 = \pi_1', \qquad \pi_2 = \pi_2' \Rightarrow \boxed{\frac{f_1}{f} = \frac{l_1^3 \rho_1}{l^3 \rho}}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \quad (\rho = \rho_1)$$

$$\boxed{(\frac{v_1}{v})^2 = \frac{l_1}{l}} \qquad \boxed{\frac{s_1}{s} = (\frac{l_1}{l})^2} \qquad \boxed{\frac{f_1}{f} = (\frac{l_1}{l})^3}$$

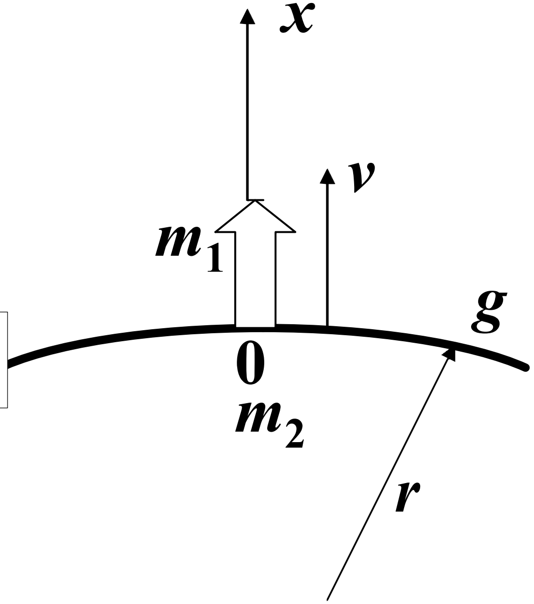
按一定尺寸比例造模型船，

量测 f，可算出 f_1 ~ 物理模拟

2.9.3 无量纲化

例：火箭发射

星球表面竖直发射。初速v，星球半径r，表面重力加速度g



研究火箭高度 x 随时间 t 的变化规律

$t=0$ 时 $x=0$，火箭质量m_1，星球质量m_2

牛顿第二定律，万有引力定律

$$m_1\ddot{x} = -k\frac{m_1 m_2}{(x+r)^2} \xRightarrow{km_2 = r^2 g} \ddot{x} = -\frac{r^2 g}{(x+r)^2}$$

$$\ddot{x} = -g \ (x=0) \qquad x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v$$

$x = x(t; r, v, g)$ ——3个独立参数

用无量纲化方法减少独立参数个数

变量 x,t 和独立参数 r,v,g 的量纲

$[x]=L$, $[t]=T$, $[r]=L$, $[v]=LT^{-1}$, $[g]=LT^{-2}$

用参数r,v,g的组合, 分别构造与x,t具有相同量纲的x_c, t_c（特征尺度）

令 $\bar{x}=\dfrac{x}{x_c}, \bar{t}=\dfrac{t}{t_c}$

如 $x_c=r, t_c=r/v$

$\bar{x}, \bar{t}$ —无量纲变量

利用新变量 $\bar{x}, \bar{t}$, $x=x(t;r,v,g)$ 将被简化

x_c, t_c的不同构造 $\bar{x}=\dfrac{x}{x_c},\ \bar{t}=\dfrac{t}{t_c}$

$$\ddot{x}=-\frac{r^2 g}{(x+r)^2}$$

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v$$

⇓

$x=x(t;r,v,g)$ 的不同简化结果

1）令 $x_c=r,\ t_c=r/v$ $\bar{x}=x/r,\ \bar{t}=vt/r$

⇓

$$\dot{x}=v\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}=v\dot{\bar{x}}$$

$$\ddot{x}=\frac{v^2}{r}\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}=\frac{v^2}{r}\ddot{\bar{x}}$$

⇒

$$\begin{cases}\varepsilon\ddot{\bar{x}}=-\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2},\ \varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}\\ \bar{x}(0)=0,\quad \dot{\bar{x}}(0)=1\end{cases}$$

$x=x(t;r,v,g)$ ⇒ $\bar{x}=\bar{x}(\bar{t};\varepsilon)$

ε为无量纲量

2）令 $x_c = r, t_c = \sqrt{r/g}$ ⇨

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2} \\ \bar{x}(0) = 0 \\ \dot{\bar{x}}(0) = \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon = \dfrac{v^2}{rg} \end{cases}$$

$$x = x(t; r, v, g)$$

⇩

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{t}; \varepsilon)$$

ε为无量纲量

3）令 $x_c = v^2/g, t_c = v/g$ ⇨

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\varepsilon\bar{x}+1)^2}, \varepsilon = \dfrac{v^2}{rg} \\ \bar{x}(0) = 0, \quad \dot{\bar{x}}(0) = 1 \end{cases}$$

$$x = x(t; r, v, g)$$

⇩

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{t}; \varepsilon)$$

ε为无量纲量

1）2）3）的共同点

解 $\bar{x}=\bar{x}(\bar{t};\varepsilon)$

只含**1**个参数——无量纲量ε

重要差别

考察无量纲量 $\varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}$

$$\sqrt{rg}=\sqrt{6370\times10^3\times9.8}\doteq8000(m/s)>>v$$ ⇨ $\varepsilon<<1$

在1）2）3）中能否忽略ε为因子的项？

1)
$$\begin{cases}\varepsilon\ddot{\bar{x}}=-\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2},\ \varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}\\ \bar{x}(0)=0,\quad \dot{\bar{x}}(0)=1\end{cases}$$

忽略ε项 ⇨

$$\frac{1}{(\bar{x}+1)^2}=0,$$
$$\bar{x}(0)=0,\ \dot{\bar{x}}(0)=1$$

$\bar{x}$ 无解 ⇨ 不能忽略ε项

$$\boxed{2)}\ \begin{cases} \ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2} \\ \bar{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \sqrt{\varepsilon},\ \varepsilon = \dfrac{v^2}{rg} \end{cases} \quad \overset{\text{忽略}\varepsilon\text{项}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{l} \ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2}, \\ \bar{x}(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \end{array}$$

$$\bar{x}(\bar{t}) < 0 \quad \rightarrow \quad x(t) < 0$$

⇨ **不能忽略ε项**

$$\boxed{3)}\ \begin{cases} \ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\varepsilon\bar{x}+1)^2}, \varepsilon = \dfrac{v^2}{rg} \\ \bar{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \quad \overset{\text{忽略}\varepsilon\text{项}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{l} \ddot{\bar{x}} = -1, \\ \bar{x}(0) = 0, \dot{x}(0) = 1 \end{array}$$

$$\bar{x}(\bar{t}) = -\frac{\bar{t}^{\,2}}{2} + \bar{t}$$

$$\bar{x}(\bar{t}) = -\frac{\bar{t}^2}{2} + \bar{t}$$

$$\bar{x} = \frac{x}{x_c}, \bar{t} = \frac{t}{t_c}$$

$$x_c = v^2/g, t_c = v/g$$

⇨

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt$$

⇧

原问题

$$\ddot{x} = -\frac{r^2 g}{(x+r)^2}$$

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = v$$

火箭发射过程中引力m_1g不变

即 $x+r \approx r$

⇨

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v \end{cases}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt$$

是原问题的近似解

⇨ 可以忽略ε项

为什么3)能忽略ε项，得到原问题近似解，而1) 2)不能?

3）令 $x_c = v^2/g, t_c = v/g$

火箭到达最高点时间为v/g, 高度为$v^2/2g$,

$\bar{x} = x/x_c, \bar{t} = t/t_c$ 大体上具有单位尺度

⇨ $\varepsilon(\ll 1)$ 项可以忽略

1）令 $x_c = r, t_c = r/v \quad x \ll x_c$ ⇨ $\bar{x}, \bar{t} \ll 1$

2）令 $x_c = r, t_c = \sqrt{r/g}$ ⇨ $\varepsilon(\ll 1)$ 项不能忽略

林家翘：自然科学中确定性问题的应用数学

第三章　简单的优化模型

静态优化模型

- 现实世界中普遍存在着优化问题
- 静态优化问题指最优解是数(不是函数)
- 建立静态优化模型的关键之一是根据建模目的确定恰当的目标函数
- 求解静态优化模型一般用微分法

3.1　存贮模型

问 题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时要付贮存费。该厂生产能力非常大，即所需数量可在很短时间内产出。

已知某产品日需求量100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元。试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（生产周期），每次产量多少，使总费用最小。

要求

不只是回答问题，而且要建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系。

问题分析与思考

日需求100件，准备费5000元，贮存费每日每件1元。

- 每天生产一次，每次100件，无贮存费，准备费5000元。

每天费用5000元

- 10天生产一次，每次1000件，贮存费900+800+…+100 =4500元，准备费5000元，总计9500元。

平均每天费用950元

- 50天生产一次，每次5000件，贮存费4900+4800+…+100 =122500元，准备费5000元，总计127500元。

平均每天费用2550元

10天生产一次平均每天费用最小吗?

问题分析与思考

- 周期短，产量小 ⇨ 贮存费少，准备费多
- 周期长，产量大 ⇨ 准备费少，贮存费多

⇨ 存在最佳的周期和产量，使总费用（二者之和）最小

- 这是一个优化问题，关键在建立目标函数。

显然不能用一个周期的总费用作为目标函数

目标函数——每天总费用的平均值

模型假设

1. 产品每天的需求量为常数 r;

2. 每次生产准备费为 c_1, 每天每件产品贮存费为 c_2;

3. T天生产一次（周期）, 每次生产Q件，当贮存量为零时，Q件产品立即到来（生产时间不计）;

4. 为方便起见，时间和产量都作为连续量处理。

建模目的

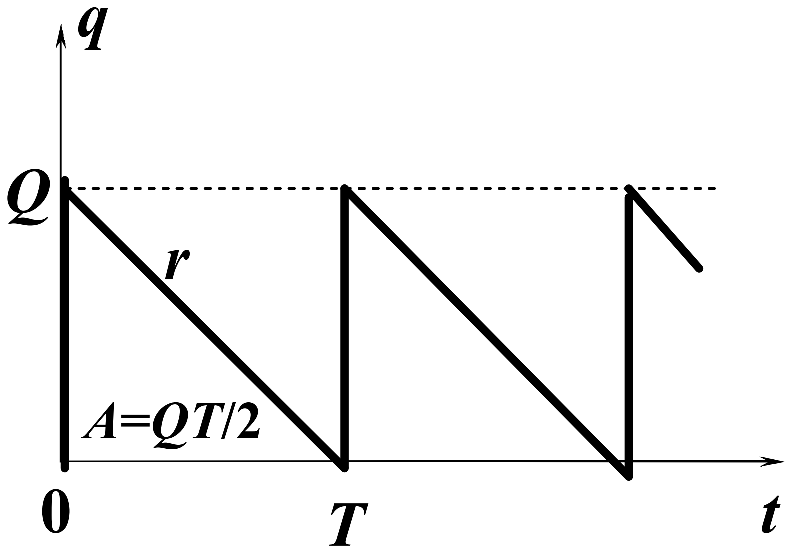
设 r, c_1, c_2 已知，求T, Q 使每天总费用的平均值最小。

模型建立

离散问题连续化

贮存量表示为时间的函数 $q(t)$

$t=0$生产Q件，$q(0)=Q$, $q(t)$以需求速率r递减，$q(T)=0$.



⇨ $$Q = rT$$

一周期贮存费为

$$c_2\int_0^T q(t)dt = c_2 A$$

一周期总费用

$$\tilde{C} = c_1 + c_2\frac{Q}{2}T = c_1 + c_2\frac{rT^2}{2}$$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T) = \frac{\tilde{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 rT}{2}$$

模型求解

求 T 使 $C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2 rT}{2}\to \mathrm{Min}$

$$\frac{dC}{dT}=0 \Longrightarrow T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

模型分析

$$c_1\uparrow\Rightarrow T,Q\uparrow \qquad c_2\uparrow\Rightarrow T,Q\downarrow \qquad r\uparrow\Rightarrow T\downarrow,Q\uparrow$$

模型应用

c_1=5000, c_2=1，r=100

- 回答问题 ⇨ **T=10(天), Q=1000(件), C=1000(元)**

- **经济批量订货公式（EOQ公式）**

用于订货、供应、存贮情形

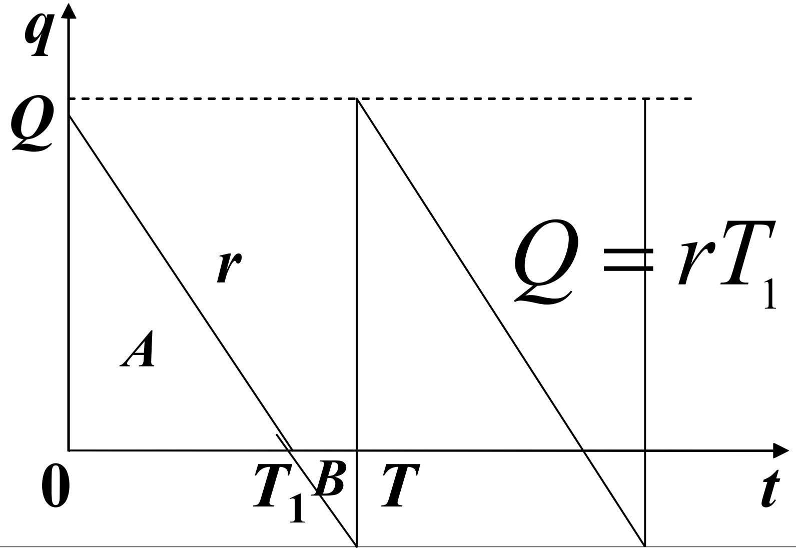
每天需求量 r，每次订货费 c_1,每天每件贮存费 c_2，T天订货一次(周期), 每次订货Q件，当贮存量降到零时，Q件立即到货。

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

不允许缺货的存贮模型

- 问：为什么不考虑生产费用？在什么条件下才不考虑？

允许缺货的存贮模型



$$Q = rT_1$$

当贮存量降到零时仍有需求*r*, 出现缺货，造成损失

原模型假设：贮存量降到零时*Q*件立即生产出来(或立即到货)

现假设：允许缺货, 每天每件缺货损失费 c_3 , 缺货需补足

周期*T*, $t=T_1$贮存量降到零

一周期贮存费 $$c_2\int_0^{T_1} q(t)dt = c_2 A$$

一周期缺货费 $$c_3\int_{T_1}^{T} \left|q(t)\right|dt = c_3 B$$

一周期总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\frac{QT_1}{2} + c_3\frac{r(T-T_1)^2}{2}$$

一周期总费用 $\bar{C} = c_1 + \frac{1}{2}c_2QT_1 + \frac{1}{2}c_3r(T-T_1)^2$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T,Q) = \frac{\bar{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2Q^2}{2rT} + \frac{c_3(rT-Q)^2}{2rT}$$

求 ***T*,*Q*** 使 $C(T,Q) \to \text{Min}$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = 0, \frac{\partial C}{\partial Q} = 0$$

为与不允许缺货的存贮模型相比，***T***记作***T***’, ***Q***记作***Q***’

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

允许缺货模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$

不允许缺货模型

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

记 $\mu = \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$

$$T' = \mu T, \quad Q' = \frac{Q}{\mu}$$

不允许缺货

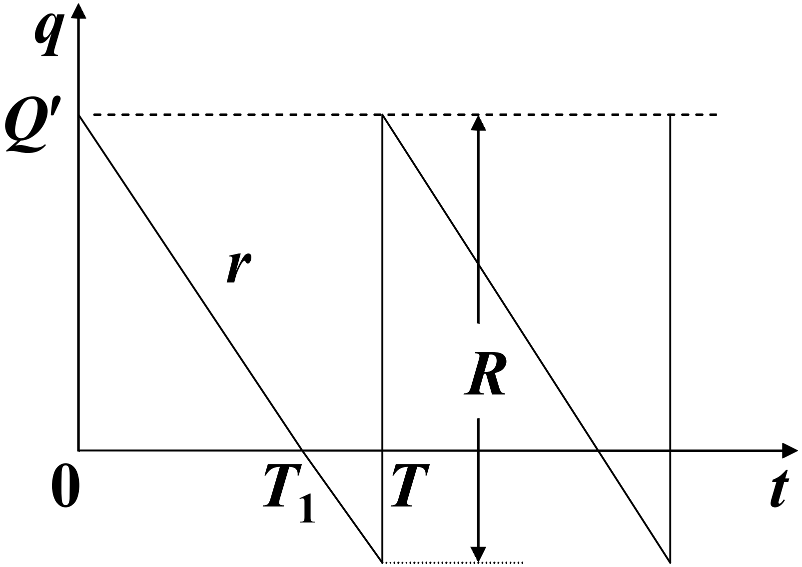
$\mu > 1$ ⇨ $T' > T, \quad Q' < Q$ $\quad c_3 \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$

⇔ $c_3 \to \infty \Rightarrow \mu \to 1$ ⇨ $T' \to T, \; Q' \to Q$

允许缺货模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$



注意：缺货需补足

Q'~每周期初的存贮量

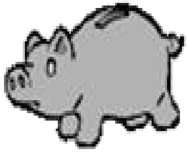
每周期的生产量

R（或订货量）

$$R = rT' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$R = \mu Q > Q$ ***Q***~不允许缺货时的产量(或订货量)

3.2 生猪的出售时机



问题 饲养场每天投入4元资金，用于饲料、人力、设备，估计可使80千克重的生猪体重增加2公斤。

市场价格目前为每千克8元，但是预测每天会降低 0.1元，问生猪应何时出售。

如果估计和预测有误差，对结果有何影响。

分析 投入资金使生猪体重随时间增加，出售单价随时间减少，故存在最佳出售时机，使利润最大

建模及求解

估计$r=2$， $g=0.1$

若当前出售，利润为80×8=640（元）

t天出售

生猪体重 $w=80+rt$

销售收入 $R=pw$

出售价格 $p=8-gt$

资金投入 $C=4t$

利润 $Q=R-C=pw-C$

$$Q(t)=(8-gt)(80+rt)-4t$$

求t使$Q(t)$最大

$$t=\frac{4r-40g-2}{rg}$$

$=10$

$Q(10)=660>640$

10天后出售，可多得利润20元

敏感性分析

$$t=\frac{4r-40g-2}{rg}$$

研究 r, g 变化时对模型结果的影响

估计 r=2， g=0.1

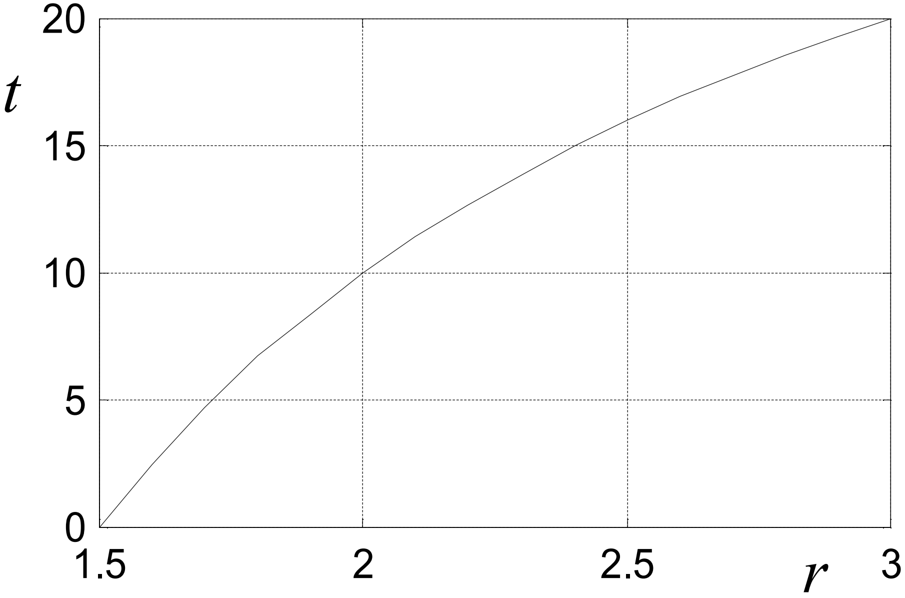
- 设 g=0.1不变

$$t=\frac{40r-60}{r},\quad r\geq 1.5$$

t 对 r 的（相对）敏感度

$$S(t,r)=\frac{\Delta t/t}{\Delta r/r}\approx\frac{dt}{dr}\frac{r}{t}$$

$$S(t,r)\approx\frac{60}{40r-60}=3$$



生猪每天体重增加量 r 增加1%，出售时间推迟3%。

敏感性分析

$$t=\frac{4r-40g-2}{rg}$$

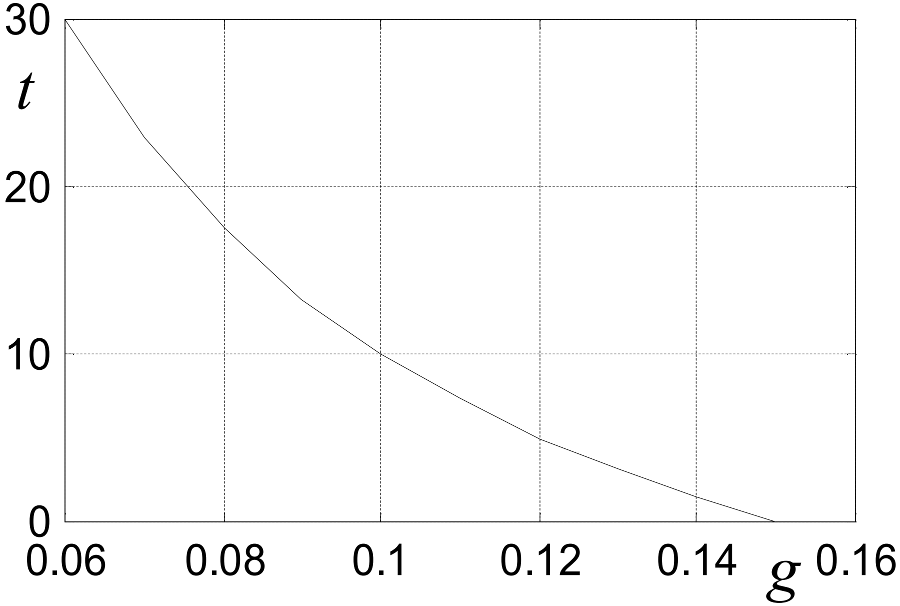
研究 *r*, *g*变化时对模型结果的影响 估计*r*=2， *g*=0.1

- 设*r*=2不变 $t=\frac{3-20g}{g},\quad 0\le g\le 0.15$

t 对g的（相对）敏感度

$$S(t,g)=\frac{\Delta t/t}{\Delta g/g}\approx\frac{dt}{dg}\frac{g}{t}$$

$$S(t,g)=-\frac{3}{3-20g}=-3$$



生猪价格每天的降低量*g*增加1%，出售时间提前3%。

强健性分析

研究 r, g 不是常数时对模型结果的影响

$$\begin{array}{l} w=80+rt \rightarrow w = w(t) \\ p=8-gt \rightarrow p = p(t) \end{array} \Rightarrow \quad Q(t) = p(t)w(t) - 4t$$

$$Q'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad p'(t)w(t) + p(t)w'(t) = 4$$

⇓ 每天利润的增值　　⇓ 每天投入的资金

保留生猪直到利润的增值等于每天的费用时出售

由 $S(t,r)=3$　若 $1.8 \le w' \le 2.2$**(10%)**, 则 $7 \le t \le 13$（**30%**）

建议过一周后(t=7)重新估计 p, p', w, w', 再作计算。

3.3 森林救火

问题 森林失火后，要确定派出消防队员的数量。

队员多，森林损失小，救援费用大；

队员少，森林损失大，救援费用小。

综合考虑损失费和救援费，确定队员数量。

问题分析 记队员人数x, 失火时刻t=0, 开始救火时刻t_1, 灭火时刻t_2, 时刻t森林烧毁面积$B(t)$.

- 损失费$f_1(x)$是x的减函数, 由烧毁面积$B(t_2)$决定.
- 救援费$f_2(x)$是x的增函数, 由队员人数和救火时间决定.

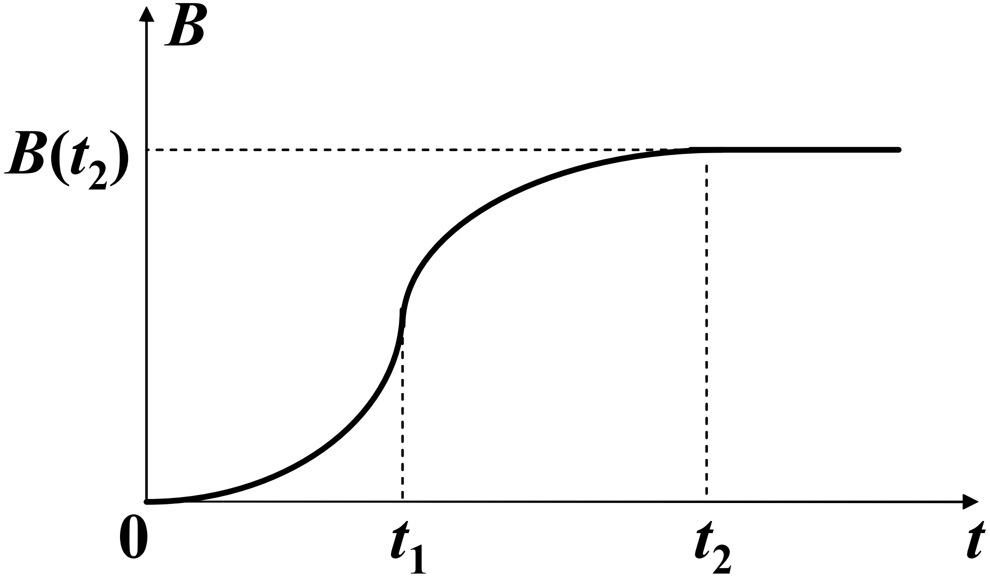
存在恰当的x，使$f_1(x)$, $f_2(x)$之和最小

问题分析

- 关键是对$B(t)$作出合理的简化假设.

失火时刻$t=0$, 开始救火时刻t_1, 灭火时刻t_2, 画出时刻 t 森林烧毁面积$B(t)$的大致图形

分析$B(t)$比较困难, 转而讨论森林烧毁速度dB/dt.



模型假设

1）$0 \le t \le t_1$, dB/dt 与 t成正比，系数β (火势蔓延速度）

2）$t_1 \le t \le t_2$, β 降为β-λx (λ为队员的平均灭火速度）

3）$f_1(x)$与$B(t_2)$成正比，系数c_1 (烧毁单位面积损失费）

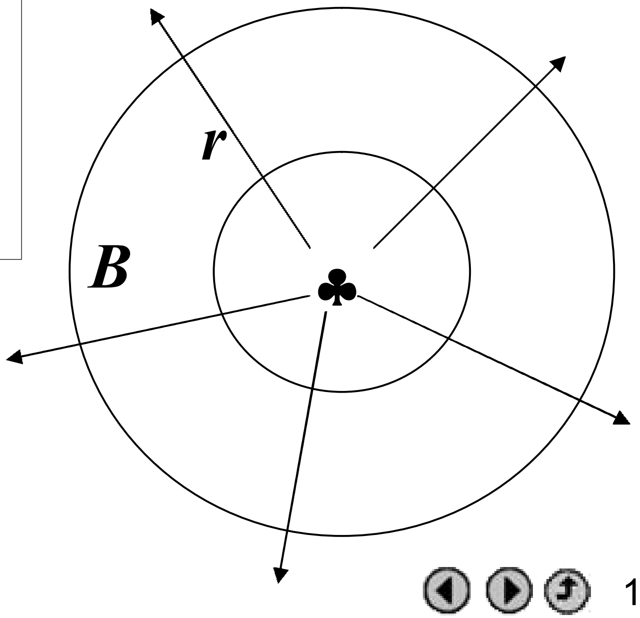
4）每个队员的单位时间灭火费用c_2, 一次性费用c_3

假设1）的解释

火势以失火点为中心，均匀向四周呈圆形蔓延，半径 r与 t 成正比

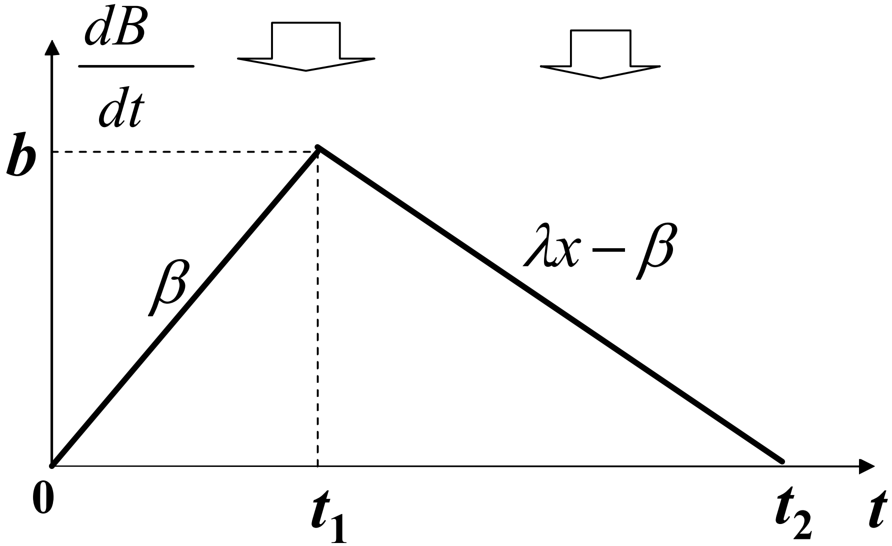
⇩

面积 B与 t^2成正比，dB/dt与 t成正比.



模型建立

假设1）　　假设2）



$$b=\beta t_1,\quad t_2-t_1=\frac{b}{\lambda x-\beta}$$

$$\Rightarrow\quad t_2=t_1+\frac{\beta t_1}{\lambda x-\beta}$$

$$B(t_2)=\int_0^{t_2}\dot{B}(t)dt=\frac{bt_2}{2}=\frac{\beta t_1^2}{2}+\frac{\beta^2 t_1^2}{2(\lambda x-\beta)}$$

假设3）4）　$\Rightarrow f_1(x)=c_1B(t_2),\quad f_2(x)=c_2x(t_2-t_1)+c_3x$

目标函数——总费用　$C(x)=f_1(x)+f_2(x)$

模型建立

目标函数——总费用

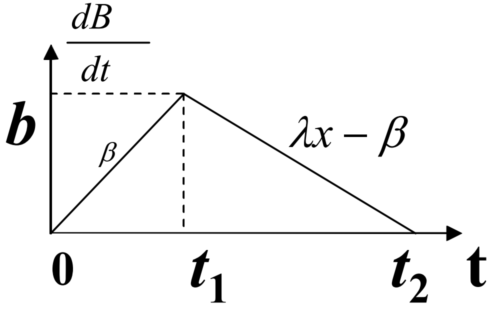
$$C(x)=\frac{c_1\beta t_1^2}{2}+\frac{c_1\beta^2 t_1^2}{2(\lambda x-\beta)}+\frac{c_2\beta t_1 x}{\lambda x-\beta}+c_3 x$$

其中 $c_1, c_2, c_3, t_1, \beta, \lambda$ 为已知参数

模型求解

求 x 使 $C(x)$ 最小

$$\frac{dC}{dx}=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{\beta}{\lambda}+\beta\sqrt{\frac{c_1\lambda t_1^2+2c_2 t_1}{2c_3\lambda^2}}$$



结果解释

- β/λ 是火势不继续蔓延的最少队员数

结果解释

$$x=\frac{\beta}{\lambda}+\beta\sqrt{\frac{c_1\lambda t_1^2+2c_2t_1}{2c_3\lambda^2}}$$

c_1~烧毁单位面积损失费, c_2~每个队员单位时间灭火费, c_3~每个队员一次性费用, t_1~开始救火时刻, β~火势蔓延速度, λ~每个队员平均灭火速度.

$c_1, t_1, \beta\uparrow\rightarrow x\uparrow$　　$c_3, \lambda\uparrow\rightarrow x\downarrow$

$c_2\uparrow\rightarrow x\uparrow$　　为什么？

模型应用

c_1,c_2,c_3已知, t_1可估计，β,λ可设置一系列数值

由模型决定队员数量x

3.4　最优价格

问题

根据产品成本和市场需求，在产销平衡条件下确定商品价格，使利润最大

假设

1）产量等于销量，记作 x

2）收入与销量 x 成正比，系数 p 即价格

3）支出与产量 x 成正比，系数 q 即成本

4）销量 x 依赖于价格 p, $x(p)$是减函数

进一步设　$x(p) = a - bp, a, b > 0$

建模与求解

收入 $I(p) = px$

支出 $C(p) = qx$

利润 $U(p) = I(p) - C(p)$

求p使$U(p)$最大

建模与求解

使利润 $U(p)$最大的最优价格 p^*满足

$$\left.\frac{dU}{dp}\right|_{p=p^*}=0 \Rightarrow \left.\frac{dI}{dp}\right|_{p=p^*}=\left.\frac{dC}{dp}\right|_{p=p^*}$$

边际收入　　边际支出

最大利润在边际收入等于边际支出时达到

$$I(p)=px$$

$$C(p)=qx$$

$$x(p)=a-bp$$

$$\Rightarrow U(p)=I(p)-C(p)$$

$$=(p-q)(a-bp)$$

$$\Rightarrow p^*=\frac{q}{2}+\frac{a}{2b}$$

结果解释

$$p^* = \frac{q}{2} + \frac{a}{2b} \qquad x(p) = a - bp,\ a, b > 0$$

- $q/2$ ~ 成本的一半

- b ~ 价格上升1单位时销量的下降幅度（需求对价格的敏感度）

$b \uparrow \rightarrow p^* \downarrow$

- a ~ 绝对需求(p很小时的需求)

$a \uparrow \rightarrow p^* \uparrow$

思考：如何得到参数**a, b?**

3.5 血管分支

背景

机体提供能量维持血液在血管中的流动

给血管壁以营养　　　　克服血液流动的阻力

消耗能量取决于血管的几何形状

在长期进化中动物血管的几何形状已经达到能量最小原则

问题

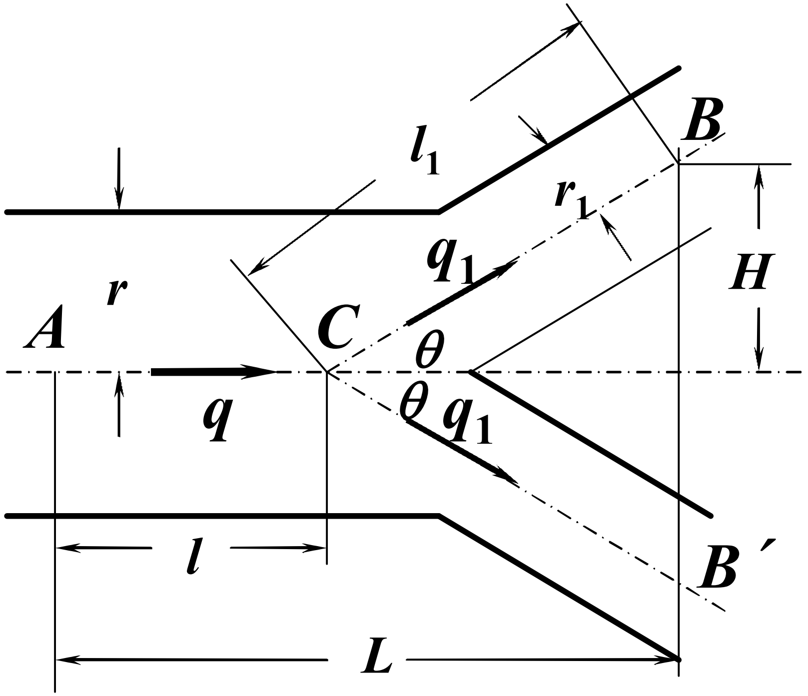
研究在能量最小原则下，血管分支处粗细血管半径比例和分岔角度

模型假设

一条粗血管和两条细血管在分支点对称地处于同一平面

血液流动近似于粘性流体在刚性管道中的运动

血液给血管壁的能量随管壁的内表面积和体积的增加而增加，管壁厚度近似与血管半径成正比



考察血管AC与CB, CB′

$q=2q_1$ $r/r_1, \theta$?

模型假设

粘性流体在刚性管道中运动

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \mu l}$$

Δp~A,C压力差，

μ~粘性系数

克服阻力消耗能量

$$E_1 = q\Delta p = \frac{8\mu q^2 l}{\pi d^4}$$

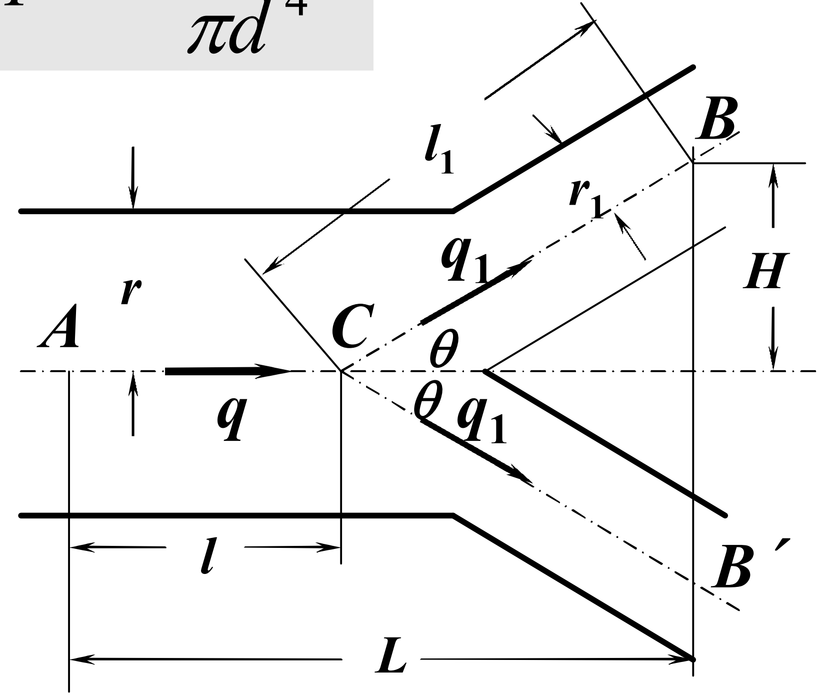
提供营养消耗能量

管壁内表面积 $2\pi rl$

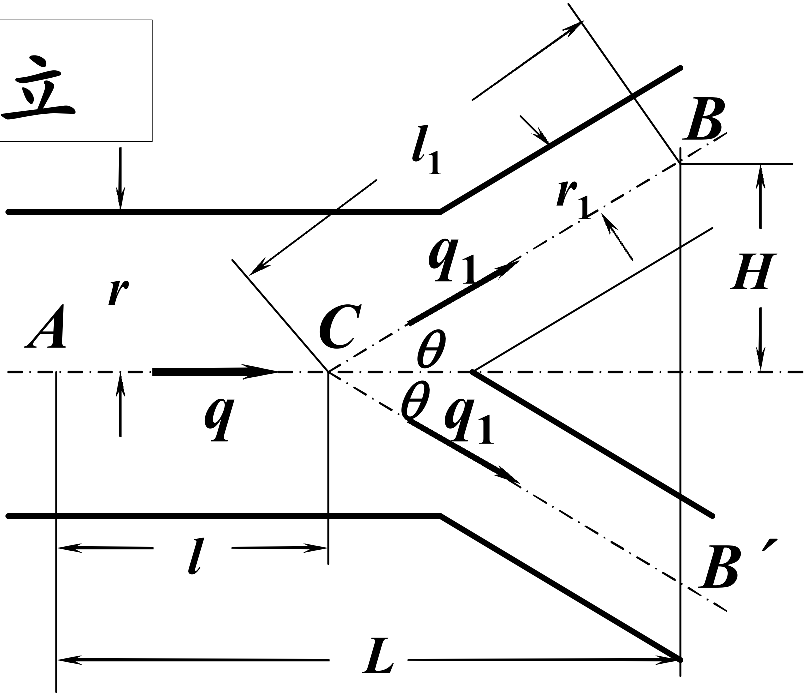
管壁体积$\pi(d^2+2rd)l$,

管壁厚度d与r成正比

$$E_2 = br^{\alpha} l, 1 \le \alpha \le 2$$



模型建立



克服阻力消耗能量

$$E_1 = q\Delta p = \frac{8\mu q^2 l}{\pi d^4}$$

提供营养消耗能量

$$E_2 = br^{\alpha} l, 1 \le \alpha \le 2$$

机体为血流提供能量

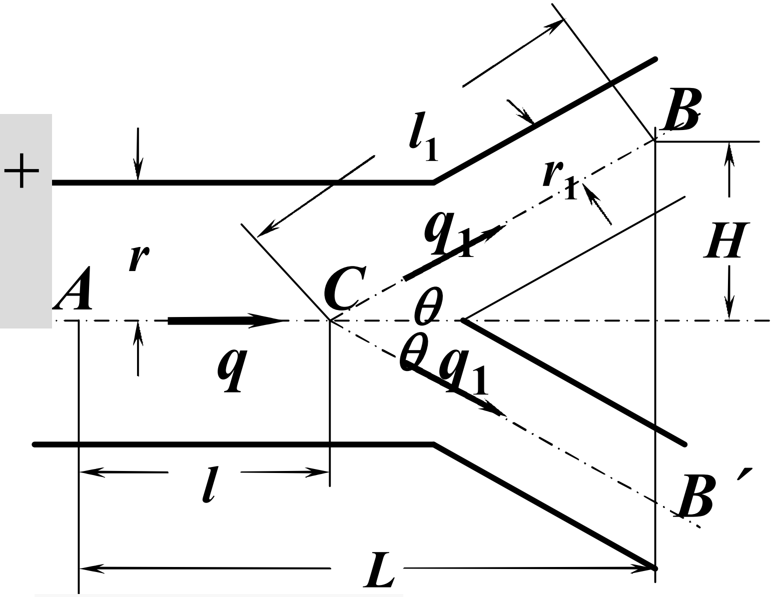
$$l = L - H/tg\theta, \quad l_1 = L - H/\sin\theta$$

$$E = E_1 + E_2 = (kq^2/r^4 + br^{\alpha})l + (kq_1^2/r_1^4 + br_1^{\alpha})2l_1$$

$$E(r, r_1, \theta) = (kq^2/r^4 + br^{\alpha})(L - H/\tan\theta) + (kq_1^2/r_1^4 + br_1^{\alpha})2H/\sin\theta$$

模型求解

$$E(r,r_1,\theta)=(kq^2/r^4+br^\alpha)(L-H/\tan\theta)+$$
$$(kq_1^2/r_1^4+br_1^\alpha)2H/\sin\theta$$



$$\frac{\partial E}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial E}{\partial r_1}=0$$

$$b\alpha r^{\alpha-1}-4kq^2/r^5=0$$

$$b\alpha r_1^{\alpha-1}-4kq^2/r_1^5=0$$

$$\frac{r}{r_1}=4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial\theta}=0\qquad \cos\theta=2\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-4}$$

$$\cos\theta=2^{\frac{\alpha-4}{\alpha+4}}$$

$$1\le\alpha\le2$$

$$1.26\le r/r_1\le1.32,\quad 37^0\le\theta\le49^0$$

模型解释

$$\frac{r}{r_1} = 4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

$$1.26 \le r / r_1 \le 1.32$$

$$37^0 \le \theta \le 49^0$$

生物学家：结果与观察大致吻合

推论 大动脉到毛细血管有***n***次分岔 ***n*=?**

大动脉半径r_{max}, 毛细血管半径r_{min}

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = 4^{\frac{n}{\alpha+4}}$$

观察：狗的血管

$$r_{\max} / r_{\min} \approx 1000 \approx 4^5$$

$$n \approx 5(\alpha+4) \qquad 1 \le \alpha \le 2 \qquad n \approx 25 \sim 30$$

血管总条数

$$2^n \approx 2^{25} \sim 2^{30} \approx 3 \times 10^7 \sim 10^9$$

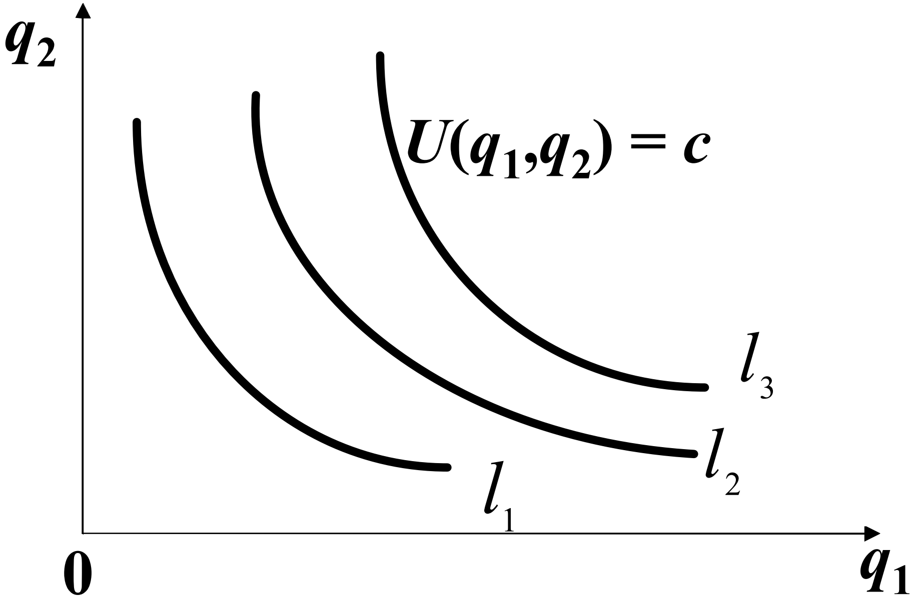
3.6　消费者均衡

问题

消费者对甲乙两种商品的偏爱程度用无差别曲线族表示，问他如何分配一定数量的钱，购买这两种商品，以达到最大的满意度。

设甲乙数量为q_1,q_2, 消费者的无差别曲线族(单调减、下凸、不相交），记作 $U(q_1,q_2)=c$

$U(q_1,q_2)$ ~ 效用函数



已知甲乙价格 p_1,p_2, 有钱s，试分配s, 购买甲乙数量 q_1,q_2,使 $U(q_1,q_2)$最大.

模型及求解

已知价格 p_1,p_2,钱 s,
求q_1,q_2,或 p_1q_1 / p_2q_2,
使 $U(q_1,q_2)$最大

⇨

$$\max \quad Z = U(q_1, q_2)$$
$$s.t. \quad p_1q_1 + p_2q_2 = s$$

$$L = U + \lambda(p_1q_1 + p_2q_2), \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,(i = 1,2)$$

⇨

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

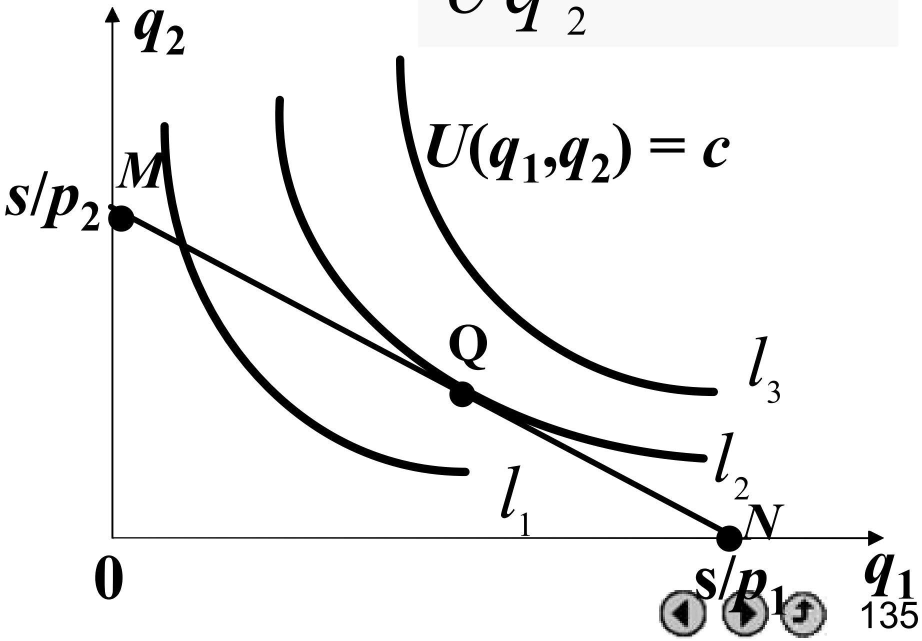
几何解释

直线MN: $p_1q_1 + p_2q_2 = s$

最优解Q: MN与 l_2切点

斜率 $K_{MN} = -p_1 / p_2$

$$K_{l_2} = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial U}{\partial q_1} / \frac{\partial U}{\partial q_2}$$



结果解释

$\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}$ ——边际效用

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

消费者均衡状态在两种商品的边际效用之比恰等于它们价格之比时达到。

效用函数$U(q_1,q_2)$ 应满足的条件

A. $U(q_1,q_2)=c$ 所确定的函数 $q_2=q_2(q_1)$单调减、下凸

B. $\frac{\partial U}{\partial q_1} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} > 0$

$B \Rightarrow A$

- 解释 *B*的实际意义

效用函数$U(q_1,q_2)$ 几种常用的形式

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$1.\ U = (\frac{\alpha}{q_1} + \frac{\beta}{q_2})^{-1}, \alpha, \beta > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} = \sqrt{\frac{\alpha p_1}{\beta p_2}}$$

- 消费者均衡状态下购买两种商品费用之比与二者价格之比的平方根成正比。

- $U(q_1,q_2)$中参数 α, β 分别表示消费者对甲乙两种商品的偏爱程度。

效用函数$U(q_1,q_2)$ 几种常用的形式

$$2.\ U = q_1^{\lambda} q_2^{\mu},\ 0<\lambda,\mu<1$$

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

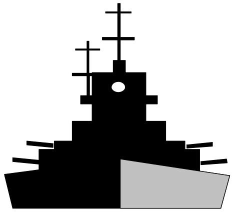
⇨ $$\frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} = \frac{\lambda}{\mu}$$

- 购买两种商品费用之比与二者价格无关。
- $U(q_1,q_2)$中参数 λ,μ 分别表示对甲乙的偏爱程度。

$$3.\ U = (a\sqrt{q_1} + b\sqrt{q_2})^2, a, b > 0$$

思考：如何推广到 $m\ (>2)$ 种商品的情况

3.7 冰山运输



背景

- 波斯湾地区水资源贫乏，淡化海水的成本为每立方米0.1英镑。
- 专家建议从9600千米远的南极用拖船运送冰山，取代淡化海水
- 从经济角度研究冰山运输的可行性。

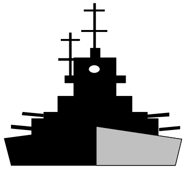
建模准备

1. 日租金和最大运量

船　　型	小	中	大
日租金（英镑）	4.0	6.2	8.0
最大运量（米^3）	5×10^5	10^6	10^7

建模准备

2. 燃料消耗（英镑/千米）



冰山体积(米^3) 船速(千米/小时)	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

3. 融化速率（米/天）

与南极距离 (千米) 船速(千米/小时)	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

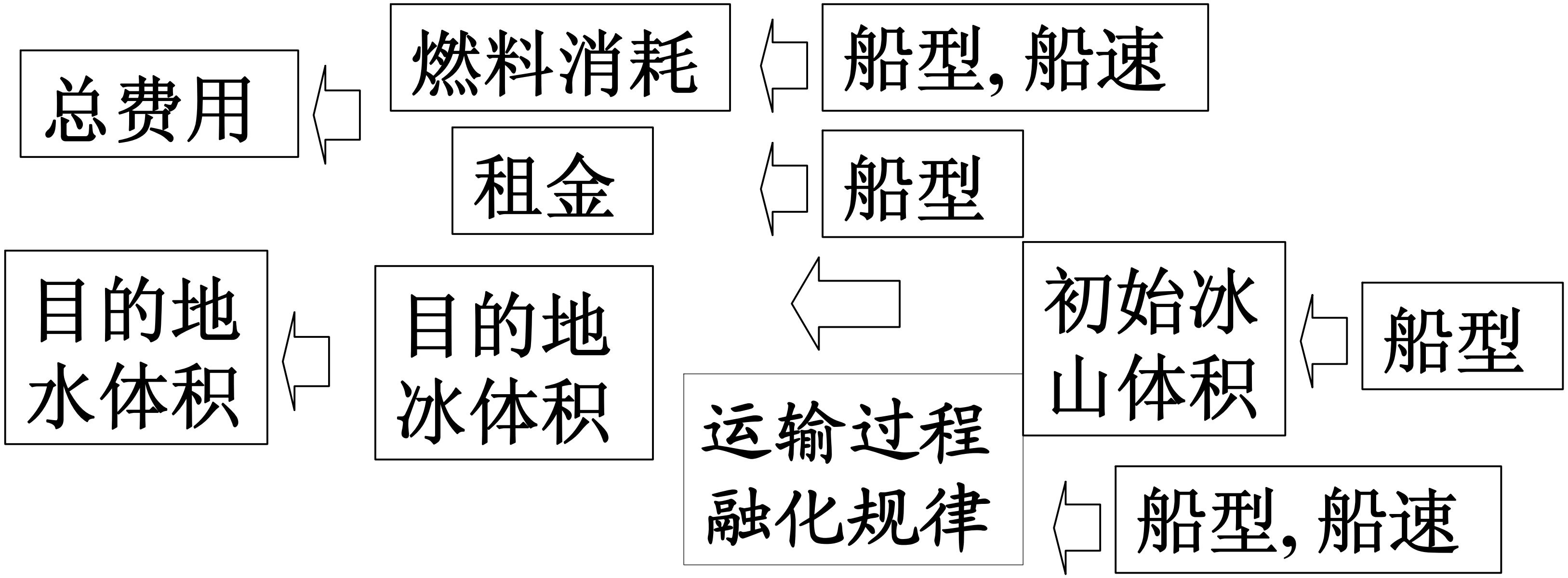
建模目的

选择船型和船速，使冰山到达目的地后每立米水的费用最低，并与淡化海水的费用比较

模型假设

- 航行过程中船速不变，总距离9600千米
- 冰山呈球形，球面各点融化速率相同
- 到达目的地后，每立方米冰可融化0.85立方米水

建模分析



模型建立

1. 冰山融化规律

船速u (千米/小时)
与南极距离d(千米)
融化速率r(米/天）

d r u	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

r是 u 的线性函数；
d<4000时u与d成正比
d>4000时u与d无关.

$$r = \begin{cases} a_1 d(1+bu), 0 \le d \le 4000 \\ a_2(1+bu), d > 4000 \end{cases}$$

$$a_1 = 6.5 \times 10^{-5}, a_2 = 0.2, b = 0.4$$

航行 t 天

$$d = 24ut$$

第t天融化速率

$$r_t = \begin{cases} 1.56 \times 10^{-3} u(1+0.4u)t, 0 \le t \le \dfrac{1000}{6u} \\ 0.2(1+0.4u), \quad t > \dfrac{1000}{6u} \end{cases}$$

1. 冰山融化规律

冰山初始半径$\boldsymbol{R_0}$，航行$\boldsymbol{t}$天时半径

$$R_t = R_0 - \sum_{k=1}^{t} r_k$$

冰山初始体积 $V_0 = \dfrac{4\pi}{3} R_0^3$

t天时体积

$$V_t = \frac{4\pi}{3} R_t^3$$

选定$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{V_0}$, 航行$\boldsymbol{t}$天时冰山体积

$$V(u, V_0, t) = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{k=1}^{t} r_k\right)^3$$

总航行天数

$$T = \frac{9600}{24u} = \frac{400}{u}$$

到达目的地时冰山体积

$$V(u, V_0) = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{t=1}^{T} r_t\right)^3$$

2. 燃料消耗

燃料消耗 q_1(英镑/千米)

q_1对u线性, 对$\log_{10}V$线性

u \ q_1 \ V	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

$$q_1 = c_1(u+c_2)(\log_{10}V + c_3),$$

$$c_1 = 0.3, c_2 = 6, c_3 = -1$$

选定u,V_0, 航行第t天燃料消耗 q (英镑/天)

$$q(u,V_0,t) = 24u \cdot c_1(u+c_2)[\log_{10}V(u,V_0,t) + c_3]$$

$$= 7.2u(u+6)\left[\log_{10}\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{k=1}^{t} r_k\right)^3 - 1\right]$$

燃料消耗总费用

$$Q(u,V_0) = \sum_{t=1}^{T} q(u,V_0,t)$$

3. 运送每立方米水费用

V_0	5×10^5	10^6	10^7
$f(V_0)$	4.0	6.2	8.0

冰山初始体积V_0的日租金$f(V_0)$（英镑）

航行天数 $T=\dfrac{400}{u}$

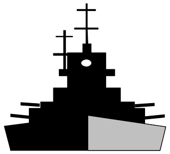
拖船租金费用 $$R(u,V_0)=f(V_0)\cdot\frac{400}{u}$$

总燃料消耗费用

$$Q(u,V_0)=\sum_{t=1}^{T}\ 7.2u(u+6)\left[\log_{10}\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}-\sum_{k=1}^{t}r_k\right)^3-1\right]$$

冰山运输总费用 $$S(u,V_0)=R(u,V_0)+Q(u,V_0)$$

3. 运送每立方米水费用



到达目的地时冰山体积

$$V(u,V_0)=\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}-\sum_{t=1}^{T}r_t\right)^3$$

冰山到达目的地后得到的水体积

$$W(u,V_0)=0.85V(u,V_0)$$

冰山运输总费用

$$S(u,V_0)=R(u,V_0)+Q(u,V_0)$$

运送每立方米水费用

$$Y(u,V_0)=\frac{S(u,V_0)}{W(u,V_0)}$$

模型求解

选择船型和船速，使冰山到达目的地后每立方米水的费用最低 ⇨ 求 u, V_0 使 $Y(u, V_0)$ 最小

V_0只能取离散值

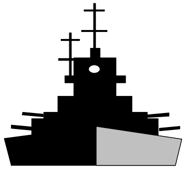
经验公式很粗糙

⇨ 取几组（V_0，u）用枚举法计算

V_0 \ u	3	3.5	4	4.5	5
10^7	0.0723	0.0683	0.0649	0.0663	0.0658
5×10^6	0.2251	0.2013	0.1834	0.1842	0.1790
10^6	78.9032	9.8220	6.2138	5.4647	4.5102

⇨ u=4~5(千米/小时), V_0= 10^7 (米^3)， $Y(u, V_0)$最小

结果分析



大型拖船V_0= 10^7 (米^3)，船速 u=4~5(千米/小时), 冰山到达目的地后每立米水的费用 $Y(u,V_0)$约0.065(英镑)

虽然0.065英镑略低于淡化海水的成本0.1英镑，但是模型假设和构造非常简化与粗糙。

由于未考虑影响航行的种种不利因素，冰山到达目的地后实际体积会显著小于$V(u,V_0)$。

有关部门认为，只有当计算出的$Y(u,V_0)$显著低于淡化海水的成本时，才考虑其可行性。

第四章　数学规划模型

数学规划模型

实际问题中的优化模型

$$Min(\text{或}Max)\ \ z = f(x),\ \ x = (x_1, \cdots x_n)^T$$

$$s.t.\ \ g_i(x) \le 0,\ \ i = 1,2,\cdots m$$

x~决策变量　　　***f*(*x*)**~目标函数　　　$g_i(x) \le 0$~约束条件

决策变量个数***n***和约束条件个数***m***较大

多元函数条件极值

最优解在可行域的边界上取得

数学规划

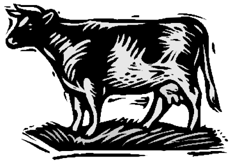
线性规划

非线性规划

整数规划

重点在模型的建立和结果的分析

4.1 奶制品的生产与销售



企业生产计划

空间层次

工厂级：根据外部需求和内部设备、人力、原料等条件，以最大利润为目标制订产品生产计划；

车间级：根据生产计划、工艺流程、资源约束及费用参数等，以最小成本为目标制订生产批量计划。

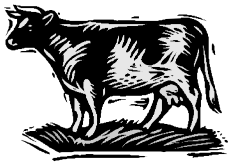
时间层次

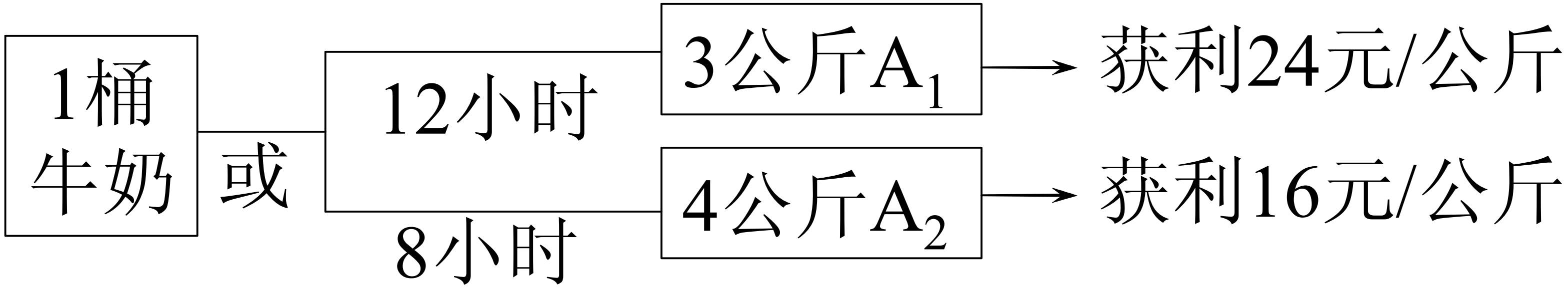
若短时间内外部需求和内部资源等不随时间变化，可制订单阶段生产计划，否则应制订多阶段生产计划。

⇧

本节课题

例1　加工奶制品的生产计划





1桶牛奶 或

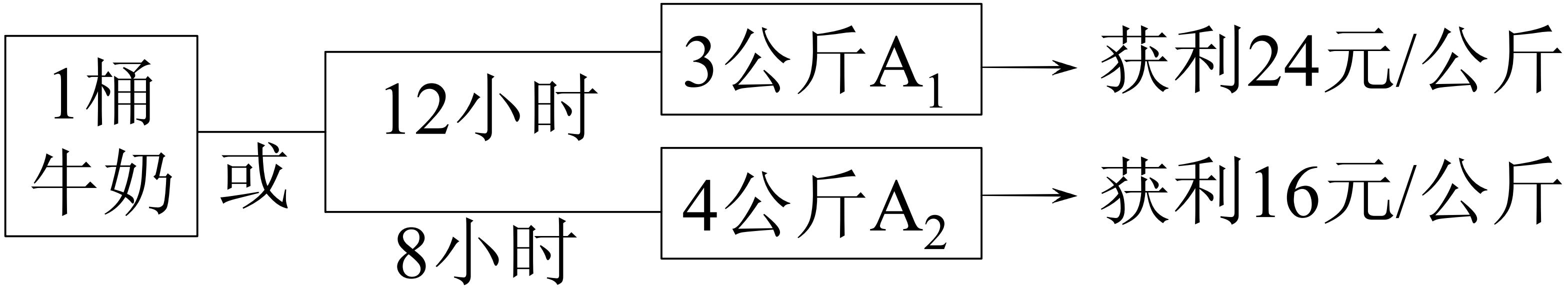
12小时 → 3公斤A_1 → 获利24元/公斤

8小时 → 4公斤A_2 → 获利16元/公斤

每天：　**50桶牛奶**　**时间480小时**　**至多加工100公斤A_1**

制订生产计划，使每天获利最大

- **35元可买到1桶牛奶，买吗？若买，每天最多买多少?**
- 可聘用临时工人，付出的工资最多是每小时几元?
- **A_1**的获利增加到 **30**元/公斤，应否改变生产计划？



1桶牛奶 或

12小时 → 3公斤A_1 → 获利24元/公斤

8小时 → 4公斤A_2 → 获利16元/公斤

每天 **50桶牛奶** **时间480小时** **至多加工100公斤A_1**

决策变量 x_1桶牛奶生产A_1 x_2桶牛奶生产A_2

目标函数 获利 $24\times 3x_1$ 获利 $16\times 4x_2$

每天获利 $Max\ \ z=72x_1+64x_2$

约束条件

原料供应 $x_1+x_2\le 50$

劳动时间 $12x_1+8x_2\le 480$

加工能力 $3x_1\le 100$

非负约束 $x_1,x_2\ge 0$

线性规划模型(LP)

模型分析与假设		线性规划模型
比例性	x_i对目标函数的“贡献”与x_i取值成正比	A_1,A_2每公斤的获利是与各自产量无关的常数
	x_i对约束条件的“贡献”与x_i取值成正比	每桶牛奶加工出A_1,A_2的数量和时间是与各自产量无关的常数
可加性	x_i对目标函数的“贡献”与x_j取值无关	A_1,A_2每公斤的获利是与相互产量无关的常数
	x_i对约束条件的“贡献”与x_j取值无关	每桶牛奶加工出A_1,A_2的数量和时间是与相互产量无关的常数
连续性	x_i取值连续	加工A_1,A_2的牛奶桶数是实数

模型求解

图解法

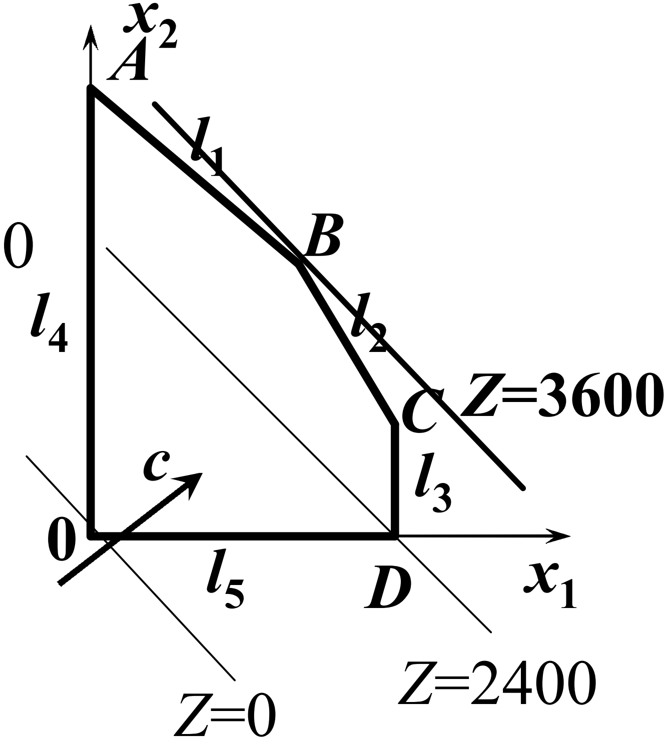
约束条件

$x_1 + x_2 \le 50 \quad \Rightarrow \quad l_1 : x_1 + x_2 = 50$

$12x_1 + 8x_2 \le 480 \quad \Rightarrow \quad l_2 : 12x_1 + 8x_2 = 480$

$3x_1 \le 100 \quad \Rightarrow \quad l_3 : 3x_1 = 100$

$x_1, x_2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad l_4 : x_1 = 0, l_5 : x_2 = 0$



目标函数

$$Max \ \ z = 72x_1 + 64x_2$$

***z*=*c* (常数) ~等值线**

在*B*(20,30)点得到最优解

目标函数和约束条件是线性函数

可行域为直线段围成的凸多边形

目标函数的等值线为直线

$\Rightarrow$

最优解一定在凸多边形的某个顶点取得。

模型求解

软件实现

LINDO 6.1

```
max 72x1+64x2
st
2）x1+x2<50
3）12x1+8x2<480
4）3x1<100
end
```

```
DO RANGE
(SENSITIVITY)
ANALYSIS?   No
```

```
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)          3360.000

   VARIABLE       VALUE          REDUCED COST

        X1        20.000000          0.000000

        X2        30.000000          0.000000

  ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES

        2)          0.000000         48.000000

        3)          0.000000          2.000000

        4)         40.000000          0.000000

  NO. ITERATIONS=       2
```

20桶牛奶生产A_1, 30桶生产A_2，利润3360元。

结果解释

```
max 72x1+64x2
st
2）x1+x2<50
3）12x1+8x2<480
4）3x1<100
end
```

```
 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1)        3360.000

VARIABLE      VALUE          REDUCED COST

    X1        20.000000          0.000000

    X2        30.000000          0.000000

ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES

    2)        0.000000          48.000000

    3)        0.000000           2.000000

    4)       40.000000           0.000000

NO. ITERATIONS=      2
```

三种资源

原料无剩余

时间无剩余

加工能力剩余40

“资源” 剩余为零的约束为紧约束（有效约束）

```
    OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1)      3360.000

 VARIABLE      VALUE          REDUCED COST

    X1         20.000000          0.000000

    X2         30.000000          0.000000

ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES

    2)         0.000000          48.000000

    3)         0.000000           2.000000

    4)        40.000000           0.000000

NO. ITERATIONS=       2
```

结果解释

最优解下“资源”增加1单位时“效益”的增量

影子价格

原料增加1单位, 利润增长48

时间增加1单位, 利润增长2

加工能力增长不影响利润

- **35元可买到1桶牛奶，要买吗？** **35 <48, 应该买！**

- **聘用临时工人付出的工资最多每小时几元？** **2元！**

```
DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS?   Yes

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                  OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE CURRENT   ALLOWABLE   ALLOWABLE
           COEF     INCREASE    DECREASE
   X1    72.000000   24.000000    8.000000
   X2    64.000000    8.000000   16.000000
                  RIGHTHAND SIDE RANGES
  ROW     CURRENT    ALLOWABLE   ALLOWABLE
            RHS       INCREASE    DECREASE
    2     50.000000   10.000000    6.666667
    3    480.000000   53.333332   80.000000
    4    100.000000   INFINITY    40.000000
```

最优解不变时目标函数系数允许变化范围

(约束条件不变)

x_1系数范围(64,96)

x_2系数范围(48,72)

x_1系数由24 ×3=72增加为30×3=90，在允许范围内

- A_1获利增加到 30元/千克，应否改变生产计划

不变！

结果解释

影子价格有意义时约束右端的允许变化范围

(目标函数不变)

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                    OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE CURRENT  ALLOWABLE  ALLOWABLE
             COEF        INCREASE      DECREASE

    X1          72.000000        24.000000         8.000000

    X2          64.000000         8.000000        16.000000
                    RIGHTHAND SIDE RANGES
  ROW          CURRENT    ALLOWABLE   ALLOWABLE
                 RHS          INCREASE          DECREASE

      2           50.000000        10.000000          6.666667

      3          480.000000        53.333332         80.000000

      4          100.000000        INFINITY          40.000000
```

原料最多增加10

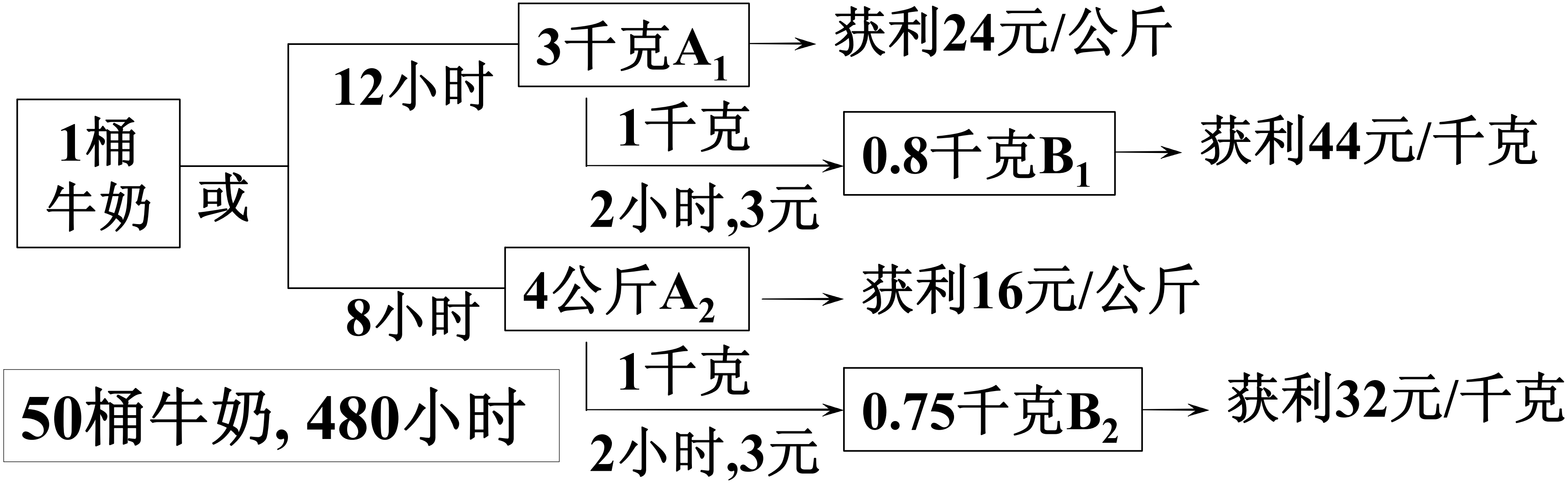
时间最多增加53

- 35元可买到1桶牛奶，每天最多买多少？

最多买10桶!

例2　奶制品的生产销售计划

在例1基础上深加工



1桶牛奶

或

12小时

3千克A_1 → 获利24元/公斤

1千克

2小时,3元

0.8千克B_1 → 获利44元/千克

8小时

4公斤A_2 → 获利16元/公斤

1千克

2小时,3元

0.75千克B_2 → 获利32元/千克

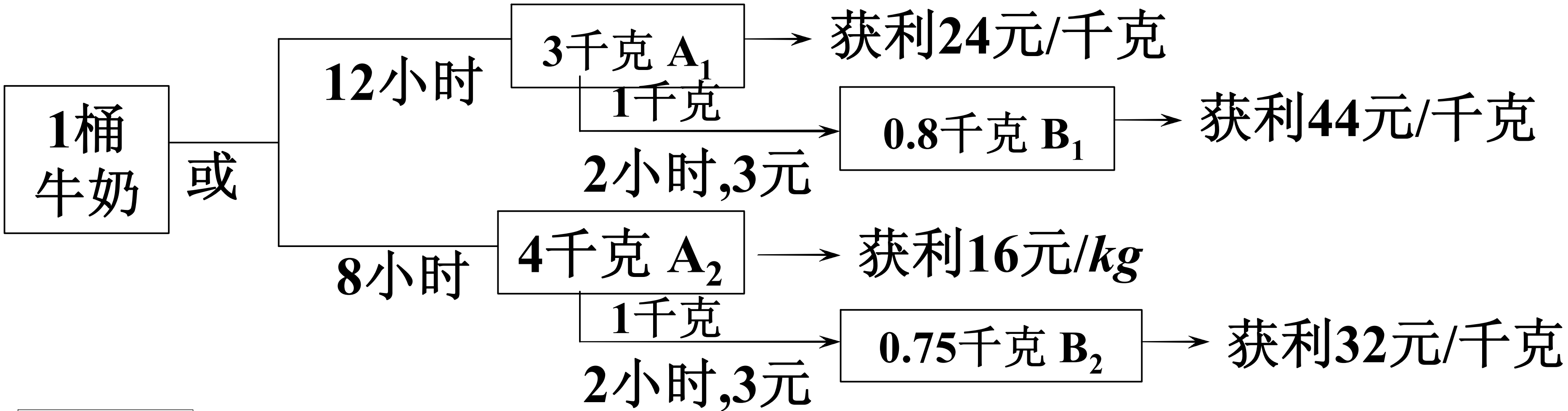
50桶牛奶, 480小时

至多100公斤A_1

制订生产计划，使每天净利润最大

- 30元可增加1桶牛奶，3元可增加1小时时间，应否投资？现投资150元，可赚回多少？

- B_1，B_2的获利经常有10%的波动，对计划有无影响？



1桶牛奶 或

12小时 3千克 A_1 → 获利24元/千克

1千克 2小时,3元 0.8千克 B_1 → 获利44元/千克

8小时 4千克 A_2 → 获利16元/*kg*

1千克 2小时,3元 0.75千克 B_2 → 获利32元/千克

决策变量

出售x_1 千克 A_1, x_2 千克 A_2， X_3千克 B_1, x_4千克 B_2

x_5千克 A_1加工B_1， x_6千克 A_2加工B_2

目标函数

利润

$$Max\ \ z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6$$

约束条件

原料供应

$$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50$$

劳动时间

$$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480$$

加工能力

$$x_1 + x_5 \le 100$$

附加约束

$$x_3 = 0.8x_5$$

$$x_4 = 0.75x_6$$

非负约束

$$x_1, \cdots x_6 \ge 0$$

模型求解

软件实现 **LINDO 6.1**

$$2)\ \frac{x_1+x_5}{3}+\frac{x_2+x_6}{4}\le 50$$

$$\Downarrow$$

$$2)\ 4x_1+3x_2+4x_5+3x_6\le 600$$

$$3)\ 4(x_1+x_5)+2(x_2+x_6)$$
$$+2x_5+2x_6\le 480$$

$$\Downarrow$$

$$3)\ 4x_1+2x_2+6x_5+4x_6\le 480$$

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS? No

```
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)       3460.800
 VARIABLE   VALUE    REDUCED COST
      X1         0.000000        1.680000
      X2      168.000000        0.000000
      X3       19.200001        0.000000
      X4         0.000000        0.000000
      X5       24.000000        0.000000
      X6        0.000000        1.520000
ROW  SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
      2)       0.000000         3.160000
      3)       0.000000         3.260000
      4)      76.000000         0.000000
      5)       0.000000        44.000000
      6)       0.000000        32.000000
 NO. ITERATIONS=      2
```

结果解释

```
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)         3460.800
  VARIABLE   VALUE    REDUCED COST
     X1         0.000000        1.680000
     X2     168.000000        0.000000
     X3       19.200001        0.000000
     X4         0.000000        0.000000
     X5       24.000000        0.000000
     X6         0.000000       1.520000
 ROW   SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
     2)         0.000000        3.160000
     3)         0.000000        3.260000
     4)       76.000000        0.000000
     5)         0.000000      44.000000
     6)         0.000000      32.000000
 NO. ITERATIONS=       2
```

每天销售168 千克A_2
和19.2 千克B_1，
利润3460.8（元）

8桶牛奶加工成A_1，42桶
牛奶加工成A_2，
将得到的24千克A_1全部
加工成B_1

除加工能力外均
为紧约束

结果解释

30元可增加1桶牛奶，3元可增加1小时时间，应否投资？现投资150元， 可赚回多少？

```
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)        3460.800
   VARIABLE   VALUE    REDUCED COST
       X1        0.000000        1.680000
       X2      168.000000        0.000000
       X3       19.200001        0.000000
       X4        0.000000        0.000000
       X5       24.000000        0.000000
       X6        0.000000        1.520000
  ROW   SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
       2)        0.000000        3.160000
       3)        0.000000        3.260000
       4)       76.000000        0.000000
       5)        0.000000       44.000000
       6)        0.000000       32.000000
```

$$2)\ \frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50$$

$$\Downarrow$$

$$2)\ 4x_1 + 3x_2 + \mathbf{4}x_5 + 3x_6 \le 600$$

增加1桶牛奶使利润增长3.16×12=37.92

增加1小时时间使利润增长3.26

投资150元增加5桶牛奶，可赚回189.6元。（大于增加时间的利润增长）

结果解释

B_1,B_2的获利有10%的波动，对计划有无影响

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS? Yes

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

              OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE  CURRENT  ALLOWABLE  ALLOWABLE

          COEF       INCREASE      DECREASE

  X1      24.000000     1.680000      INFINITY

  X2      16.000000     8.150000      2.100000

  X3      44.000000    19.750002       3.166667

  X4      32.000000      2.026667       INFINITY

  X5      -3.000000    15.800000      2.533334
  X6      -3.000000    1.520000      INFINITY

        …… ……
```

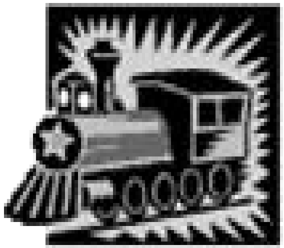
B_1获利下降10%，超出X3 系数允许范围

B_2获利上升10%，超出X4 系数允许范围

波动对计划有影响

生产计划应重新制订：如将x_3的系数改为39.6计算，会发现结果有很大变化。

4.2　自来水输送与货机装运



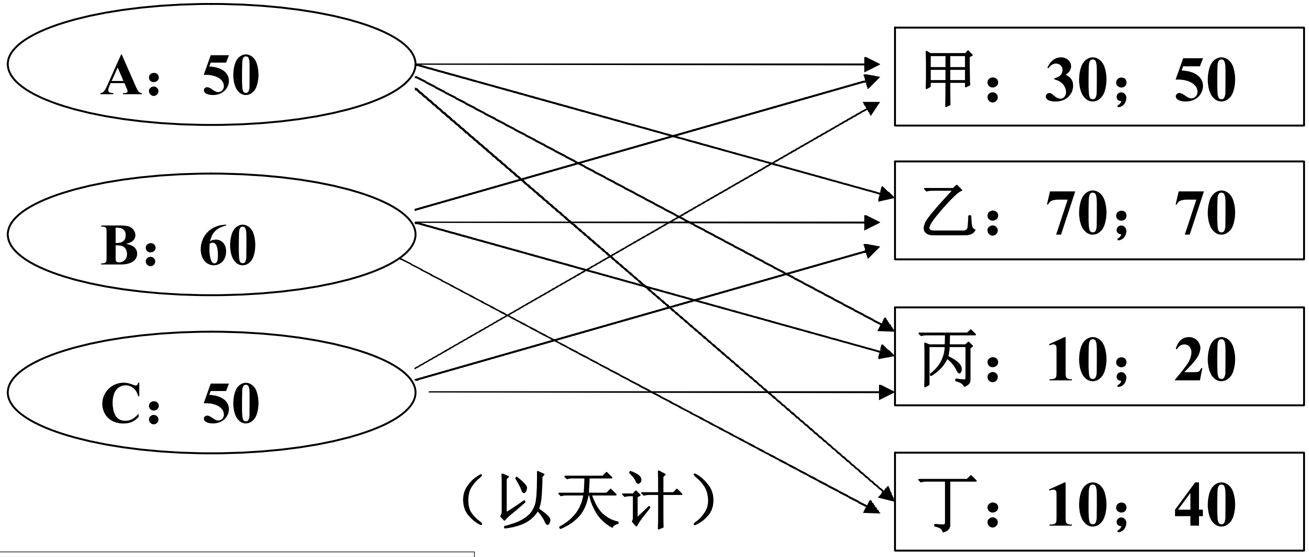
运输问题

生产、生活物资从若干供应点运送到一些需求点，怎样安排输送方案使运费最小，或利润最大；

各种类型的货物装箱，由于受体积、重量等限制，如何搭配装载，使获利最高，或装箱数量最少。

例1 自来水输送

水库供水量(千吨)



（以天计）

小区基本用水量(千吨)

小区额外用水量(千吨)

收入：900元/千吨

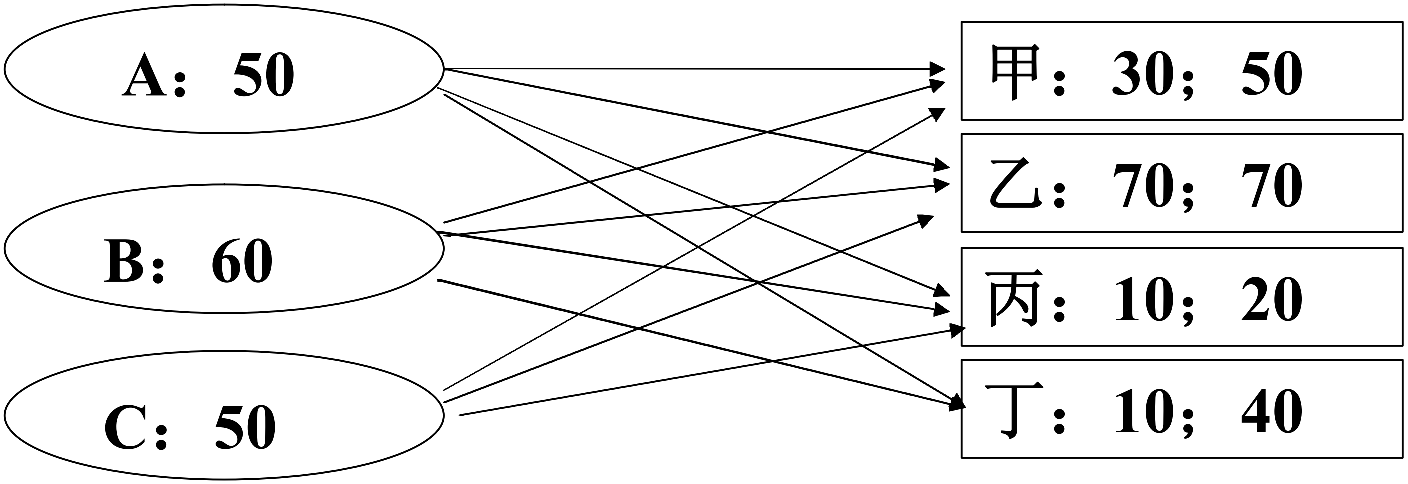
支出 引水管理费

元/千吨	甲	乙	丙	丁
A	160	130	220	170
B	140	130	190	150
C	190	200	230	/

其他费用:450元/千吨

- 应如何分配水库供水量，公司才能获利最多？
- 若水库供水量都提高一倍，公司利润可增加到多少？

问题分析



A：50

B：60

C：50

甲：30；50

乙：70；70

丙：10；20

丁：10；40

总供水量：160　＜总需求量：120+180=300

收入：900元/千吨　总收入900×160=144,000(元)

支出　引水管理费

其他费用:450元/千吨　其他支出450×160=72,000(元)

确定送水方案使利润最大 ⟺ 使引水管理费最小

模型建立 确定3个水库向4个小区的供水量

决策变量 水库i 向j 区的日供水量为 x_{ij}（$x_{34}=0$）

目标函数

$$Min \quad Z=160x_{11}+130x_{12}+220x_{13}+170x_{14}$$
$$+140x_{21}+130x_{22}+190x_{23}+150x_{24}+190x_{31}+200x_{32}+230x_{33}$$

约束条件

供应限制

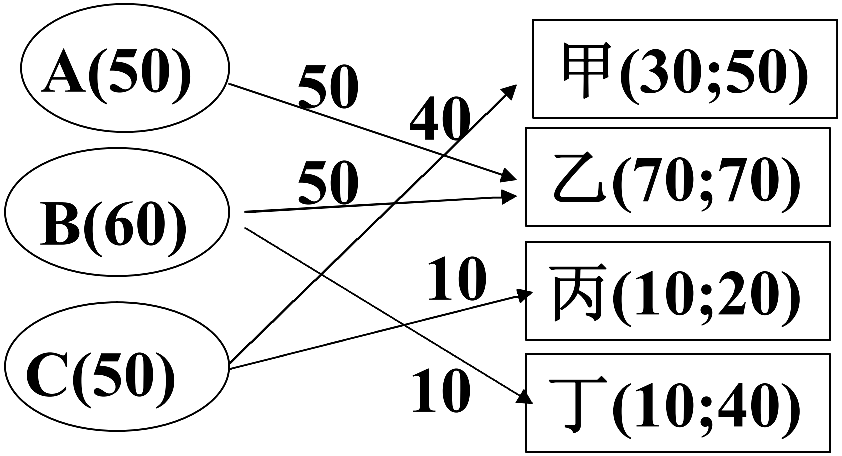
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=50$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=50$$

需求限制

$$30\le x_{11}+x_{21}+x_{31}\le 80$$
$$70\le x_{12}+x_{22}+x_{32}\le 140$$
$$10\le x_{13}+x_{23}+x_{33}\le 30$$
$$10\le x_{14}+x_{24}\le 50$$

线性规划模型(LP)

模型求解



A(50)

B(60)

C(50)

50

40

50

10

10

甲(30;50)

乙(70;70)

丙(10;20)

丁(10;40)

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)       24400.00
 VARIABLE  VALUE   REDUCED COST
    X11        0.000000        30.000000
    X12       50.000000         0.000000
    X13        0.000000        50.000000
    X14        0.000000        20.000000
    X21        0.000000        10.000000
    X22       50.000000         0.000000
    X23        0.000000        20.000000
    X24       10.000000         0.000000
    X31       40.000000         0.000000
    X32        0.000000        10.000000
    X33       10.000000         0.000000
```

引水管理费 24400(元)

利润=总收入−其它费用−引水管理费=144000-72000-24400 = 47600（元）

问题讨论　每个水库最大供水量都提高一倍

总供水量(320) > 总需求量(300) 确定送水方案使利润最大

利润 = 收入(900) –其它费用(450) –引水管理费

利润(元/千吨)	甲	乙	丙	丁
A	**290**	**320**	**230**	**280**
B	**310**	**320**	**260**	**300**
C	**260**	**250**	**220**	**/**

目标函数

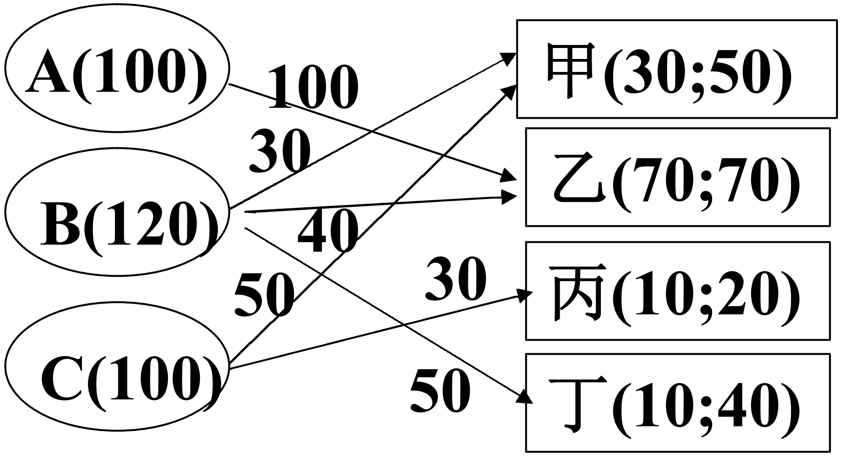
$$Max \quad Z = 290x_{11} + 320x_{12} + 230x_{13} + 280x_{14}$$
$$+310x_{21} + 320x_{22} + 260x_{23} + 300x_{24} + 260x_{31} + 250x_{32} + 220x_{33}$$

供应限制

A: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50$ ⇨ $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 100$

B, C 类似处理　　　需求约束可以不变

求解



```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

   1)       88700.00

VARIABLE   VALUE   REDUCED COST

   X11       0.000000      20.000000

   X12     100.000000       0.000000

   X13       0.000000      40.000000

   X14       0.000000      20.000000

   X21      30.000000       0.000000

   X22      40.000000       0.000000

   X23       0.000000      10.000000

   X24      50.000000       0.000000

   X31      50.000000       0.000000

   X32       0.000000      20.000000

   X33      30.000000       0.000000
```

总利润 88700（元）

这类问题一般称为
“运输问题”
(Transportation
Problem)

例2 货机装运

三个货舱最大载重(吨), 最大容积(米^3)

前仓：

10；6800

中仓：

16；8700

后仓：

8；5300

飞机平衡

三个货舱中实际载重必须与其最大载重成比例

	重量（吨）	空间(米^3/吨）	利润（元/吨）
货物1	18	480	3100
货物2	15	650	3800
货物3	23	580	3500
货物4	12	390	2850

如何装运，使本次飞行获利最大？

货机装运

模型假设

每种货物可以分割到任意小；

每种货物可以在一个或多个货舱中任意分布；

多种货物可以混装，并保证不留空隙；

模型建立

决策变量

x_{ij}--第i 种货物装入第j 个货舱的重量(吨）

i=1,2,3,4, j=1,2,3 (分别代表前、中、后仓)

货机装运

模型建立

x_{ij}--第i 种货物装入第j 个货舱的重量

目标函数(利润)

$$Max \quad Z = 3100(x_{11}+x_{12}+x_{13})+3800(x_{21}+x_{22}+x_{23})$$
$$+3500(x_{31}+x_{32}+x_{33})+2850(x_{41}+x_{42}+x_{43})$$

约束条件

货舱重量

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \le 10$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} \le 16$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} \le 8$$

10； 6800	**16； 8700**	**8； 5300**

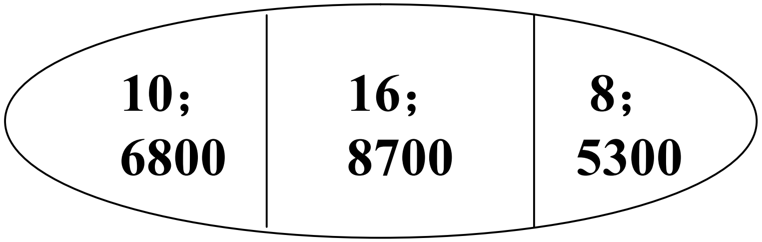
货舱容积

$$480x_{11}+650x_{21}+580x_{31}+390x_{41} \le 6800$$
$$480x_{12}+650x_{22}+580x_{32}+390x_{42} \le 8700$$
$$480x_{13}+650x_{23}+580x_{33}+390x_{43} \le 5300$$

货机装运

模型建立

x_{ij}--第i 种货物装入第j 个货舱的重量



约束条件

平衡要求

$$\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}}{10}=\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}}{16}=\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}}{8}$$

货物供应

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 18$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 15$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 23$$

$$x_{41}+x_{42}+x_{43}\le 12$$

货机装运

模型求解

```
 OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)        121515.8
VARIABLE   VALUE    REDUCED COST
    X11       0.000000      400.000000
    X12       0.000000       57.894737
    X13       0.000000      400.000000
    X21      10.000000        0.000000
    X22       0.000000      239.473679
    X23       5.000000        0.000000
    X31       0.000000        0.000000
    X32      12.947369        0.000000
    X33       3.000000        0.000000
    X41       0.000000      650.000000
    X42       3.052632        0.000000
    X43       0.000000      650.000000
```

货物2：前仓10, 后仓5；

货物3：中仓13, 后仓3；

货物4：中仓3。

最大利润约121516元

货物~供应点
货舱~需求点

⇨ 运输问题

平衡要求

⇨ 运输问题的扩展

4.3 汽车生产与原油采购

例1 汽车厂生产计划

汽车厂生产三种类型的汽车，已知各类型每辆车对钢材、劳动时间的需求，利润及工厂每月的现有量。

	小型	中型	大型	现有量
钢材（吨）	**1.5**	**3**	**5**	**600**
劳动时间（小时）	**280**	**250**	**400**	**60000**
利润（万元）	**2**	**3**	**4**	

- 制订月生产计划，使工厂的利润最大。
- 如果生产某一类型汽车，则至少要生产80辆，那么最优的生产计划应作何改变？

汽车厂生产计划

模型建立

	小型	中型	大型	现有量
钢材	**1.5**	**3**	**5**	**600**
时间	**280**	**250**	**400**	**60000**
利润	**2**	**3**	**4**	

设每月生产小、中、大型汽车的数量分别为x_1, x_2, x_3

$$Max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 600 \\ & 280x_1 + 250x_2 + 400x_3 \le 60000 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

线性规划模型(LP)

模型求解

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)       632.2581
VARIABLE   VALUE          REDUCED COST
      X1       64.516129             0.000000
      X2     167.741928             0.000000
      X3         0.000000             0.946237
ROW   SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
      2)        0.000000              0.731183
      3)        0.000000              0.003226
```

结果为小数，
怎么办？

1）舍去小数：取x_1=64，x_2=167，算出目标函数值z=629，与LP最优值632.2581相差不大。

2）试探：如取x_1=65，x_2=167；x_1=64，x_2=168等，计算函数值z，通过比较可能得到更优的解。

- 但必须检验它们是否满足约束条件。为什么？

3） 模型中增加条件：x_1, x_2, x_3 均为整数，重新求解。

模型求解

整数规划（Integer Programming, 简记IP）

$$Max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \quad 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 600$$

$$280x_1 + 250x_2 + 400x_3 \le 60000$$

x_1, x_2, x_3为非负整数

IP可用LINDO直接求解

```
max 2x1+3x2+4x3
st
1.5x1+3x2+5x3<600
280x1+250x2+400x3<60000
end
gin 3
```

IP 结果输出

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)        632.0000
VARIABLE  VALUE   REDUCED COST
      X1         64.000000         -2.000000
      X2        168.000000         -3.000000
      X3          0.000000         -4.000000
```

“gin 3”表示“前3个变量为整数”，等价于：

```
gin x1
gin x2
gin x3
```

IP 的最优解x_1=64，x_2=168，x_3=0，最优值z=632

汽车厂生产计划

- 若生产某类汽车，则至少生产80辆，求生产计划。

$$Max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \quad 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 600$$

$$280x_1 + 250x_2 + 400x_3 \le 60000$$

$\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$**=0 或 ≥80**

⇨

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 \ge 80$

$x_1 = 0, x_2 \ge 80, x_3 = 0$

$x_1 = 0, x_2 \ge 80, x_3 \ge 80$ ×

$x_1 \ge 80, x_2 = 0, x_3 = 0$

$x_1 \ge 80, x_2 \ge 80, x_3 = 0$

$x_1 \ge 80, x_2 = 0, x_3 \ge 80$

$x_1 \ge 80, x_2 \ge 80, x_3 \ge 80$ ×

$x_1, x_2, x_3 = 0$ ×

方法1：分解为8个LP子模型

其中3个子模型应去掉，然后逐一求解，比较目标函数值，再加上整数约束，得最优解：

x_1=80，x_2= 150，x_3=0，最优值z=610

- 若生产某类汽车，则至少生产80辆，求生产计划。

方法2：引入0-1变量，化为整数规划

x_1=0 或 ≥80 ⇨ $x_1 \le My_1, x_1 \ge 80y_1, y_1 \in \{0,1\}$

x_2=0 或 ≥80 ⇨ $x_2 \le My_2, x_2 \ge 80y_2, y_2 \in \{0,1\}$

x_3=0 或 ≥80 ⇨ $x_3 \le My_3, x_3 \ge 80y_3, y_3 \in \{0,1\}$

***M*为大的正数，可取1000**

LINDO中对0-1变量的限定：

```
int y1
int y2
int y3
```

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)        610.0000
VARIABLE  VALUE    REDUCED COST
     X1      80.000000      -2.000000
     X2     150.000000      -3.000000
     X3       0.000000      -4.000000
     Y1       1.000000       0.000000
     Y2       1.000000       0.000000
     Y3       0.000000       0.000000
```

最优解同前

- 若生产某类汽车，则至少生产80辆，求生产计划。

方法3：化为非线性规划

x_1=0 或 ≥80 ⇨ $x_1(x_1-80)\geq 0$

x_2=0 或 ≥80 ⇨ $x_2(x_2-80)\geq 0$

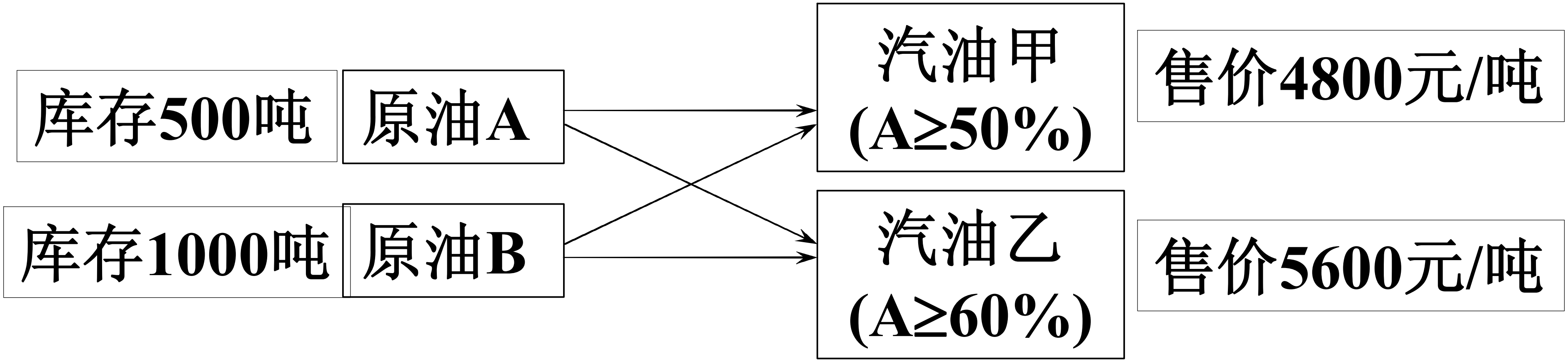
x_3=0 或 ≥80 ⇨ $x_3(x_3-80)\geq 0$

非线性规划（**Non- Linear Programming**，简记**NLP**）

NLP虽然可用现成的数学软件求解（如**LINGO**, **MATLAB**)，但是其结果常依赖于初值的选择。

实践表明，本例仅当初值非常接近上面方法算出的最优解时，才能得到正确的结果。

例2 原油采购与加工



库存500吨

原油A

库存1000吨

原油B

汽油甲 (A≥50%)

汽油乙 (A≥60%)

售价4800元/吨

售价5600元/吨

市场上可买到不超过1500吨的原油A：

- 购买量不超过500吨时的单价为10000元/吨；
- 购买量超过500吨但不超过1000吨时，超过500吨的部分8000元/吨；
- 购买量超过1000吨时，超过1000吨的部分6000元/吨。

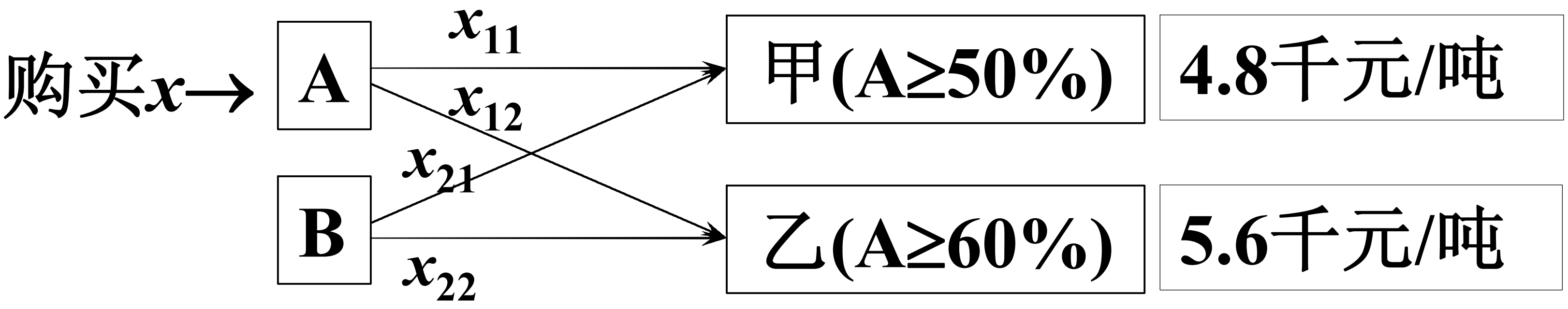
应如何安排原油的采购和加工 ？

问题分析

- 利润：销售汽油的收入 － 购买原油A的支出
- 难点：原油A的购价与购买量的关系较复杂

决策变量

原油A的购买量, 原油A, B生产汽油甲,乙的数量



购买x→ A

x_{11} x_{12} x_{21} x_{22}

B

甲(A≥50%) 4.8千元/吨

乙(A≥60%) 5.6千元/吨

目标函数

利润(千元)

$c(x)$ ~ 购买原油A的支出

$$Max\ \ z = 4.8(x_{11}+x_{21}) + 5.6(x_{12}+x_{22}) - c(x)$$

$c(x)$如何表述？

目标函数

- $x \le 500$吨单价为10千元/吨；
- 500吨$\le x \le 1000$吨，超过500吨的8千元/吨；
- 1000吨$\le x \le 1500$吨，超过1000吨的6千元/吨。

$$c(x) = \begin{cases} 10x & (0 \le x \le 500) \\ 8x + 1000 & (500 \le x \le 1000) \\ 6x + 3000 & (1000 \le x \le 1500) \end{cases}$$

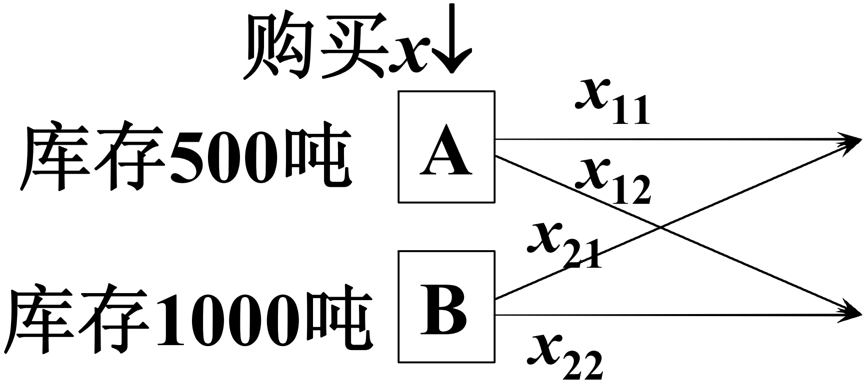
约束条件

原油供应

$$x_{11} + x_{12} \le 500 + x$$

$$x_{21} + x_{22} \le 1000$$

$$x \le 1500$$



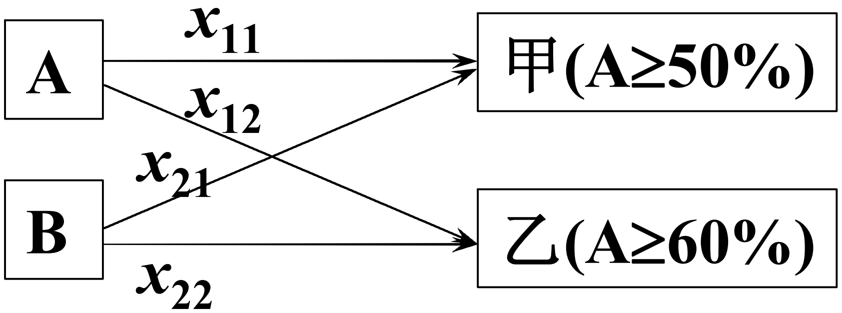
购买x↓

库存500吨

库存1000吨

约束条件

汽油含原油A的比例限制



$$\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{21}} \geq 0.5 \quad \Leftrightarrow x_{11} \geq x_{21}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{12}+x_{22}} \geq 0.6 \quad \Leftrightarrow 2x_{12} \geq 3x_{22}$$

- ➢ 目标函数中*c*(*x*)不是线性函数，是非线性规划；
- ➢ 对于用分段函数定义的*c*(*x*)，一般的非线性规划软件也难以输入和求解；
- ➢ 想办法将模型化简，用现成的软件求解。

模型求解

方法1

x_1, x_2, x_3~以价格10, 8, 6(千元/吨) 采购A的吨数

$x = x_1+x_2+x_3$，$c(x) = 10x_1+8x_2+6x_3$

目标函数

$$Max \quad z = 4.8(x_{11}+x_{21}) + 5.6(x_{12}+x_{22}) - (10x_1+8x_2+6x_3)$$

- 500吨≤ x≤ 1000吨，超过500吨的8千元/吨

增加约束 ⇩

只有当以10千元/吨的价格购买x_1=500（吨）时，才能以8千元/吨的价格购买x_2 ⇨ $(x_1-500)x_2=0$

$$(x_2-500)x_3=0 \qquad 0 \le x_1, x_2, x_3 \le 500$$

非线性规划模型，可以用LINGO求解

```
Model:
Max= 4.8*x11 + 4.8*x21 + 5.6*x12
+ 5.6*x22 - 10*x1 - 8*x2 - 6*x3;
x11+x12 < x + 500;
x21+x22 < 1000;
x11 - x21 > 0;
2*x12 - 3*x22 > 0;
x=x1+x2+x3;
(x1 - 500) * x2=0;
(x2 - 500) * x3=0;
x1 < 500;
x2 < 500;
x3 < 500;
x > 0;
x11 > 0;
x12 > 0;
x21 > 0;
x22 > 0;
x1 > 0;
x2 > 0;
x3 > 0;
end
```

方法1：LINGO求解

```
Objective value:    4800.000
Variable    Value          Reduced  Cost
X11       500.0000         0.0000000E+00
X21       500.0000         0.0000000E+00
X12  0.0000000E+00         0.0000000E+00
X22  0.0000000E+00         0.0000000E+00
 X1  0.1021405E-13        10.00000
 X2  0.0000000E+00         8.000000
 X3  0.0000000E+00         6.000000
  X  0.0000000E+00         0.0000000E+00
```

用库存的500吨原油A、500吨原油B生产汽油甲，不购买新的原油A，利润为4,800千元。

LINGO得到的是局部最优解，还能得到更好的解吗？

方法2

y_1, y_2, y_3=1 ~以价格10, 8, 6(千元/吨) 采购A

增加约束

x_1, x_2, x_3~以价格10, 8, 6(千元/吨) 采购A的吨数

$$500y_2 \le x_1 \le 500y_1 \qquad 500\,y_3 \le x_2 \le 500\,y_2$$

$$x_3 \le 500y_3 \qquad y_1, y_2, y_3 = 0或1$$

$\Rightarrow$ $y=0 \rightarrow x=0$

$x>0 \rightarrow y=1$

0-1线性规划模型，可用LINDO求解

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)           5000.000
 VARIABLE        VALUE        REDUCED
COST
      Y1          1.000000         0.000000
      Y2          1.000000      2200.000000
      Y3          1.000000      1200.000000
     X11          0.000000         0.800000
     X21          0.000000         0.800000
     X12       1500.000000         0.000000
     X22       1000.000000         0.000000
      X1        500.000000         0.000000
      X2        500.000000         0.000000
      X3          0.000000         0.400000
      X      1000.000000         0.000000
```

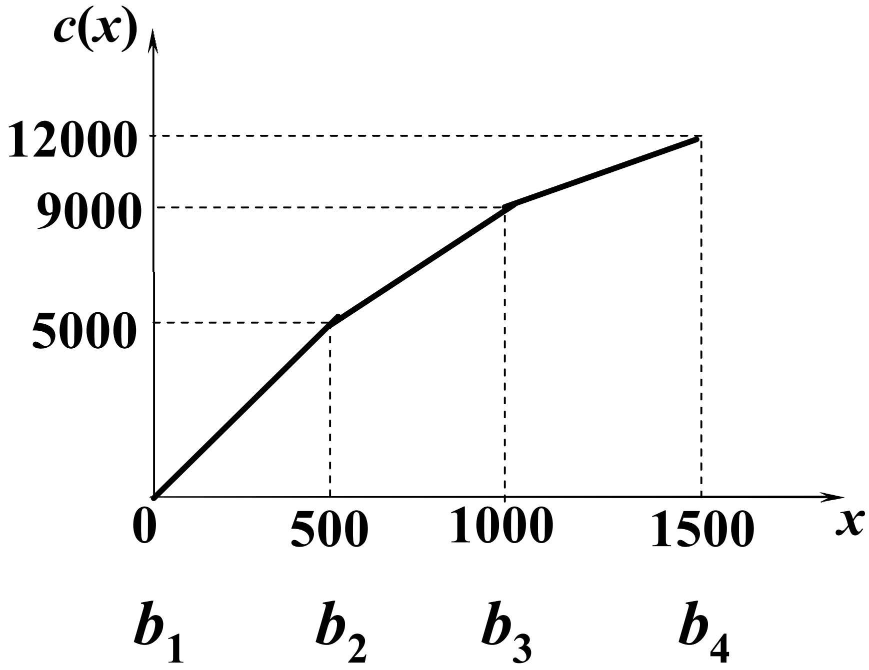
购买1000吨原油A，与库存的500吨原油A和1000吨原油B一起，生产汽油乙，利润为5,000千元 。

优于方法1的结果

方法3

直接处理处理分段线性函数$c(x)$

$$c(x)=\begin{cases}10x & (0\le x\le 500)\\ 8x+1000 & (500\le x\le 1000)\\ 6x+3000 & (1000\le x\le 1500)\end{cases}$$



$b_1\le x\le b_2$， $x= z_1b_1+z_2b_2$，
$z_1+z_2=1$， $z_1, z_2\ge 0$,
$c(x)= z_1c(b_1)+z_2c(b_2)$.

$b_2\le x\le b_3$， $x= z_2b_2+z_3b_3$，
$z_2+z_3=1$， $z_2, z_3\ge 0$,
$c(x)= z_2c(b_2)+z_3c(b_3)$.

$b_3\le x\le b_4$， $x= z_3b_3+z_4b_4$，
$z_3+z_4=1$， $z_3, z_4\ge 0$,
$c(x)= z_3c(b_3)+z_4c(b_4)$.

方法3

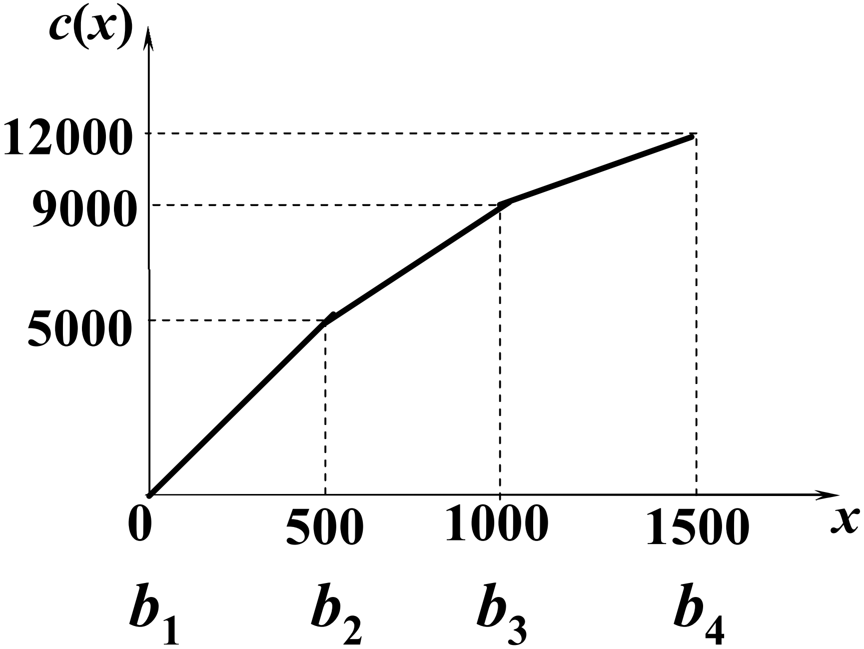
对于k=1,2,3

$b_k \le x \le b_{k+1}$, $x = z_k b_k + z_{k+1} b_{k+1}$

$z_k + z_{k+1} = 1$，$z_k, z_{k+1} \ge 0$,

$c(x) = z_k c(b_k) + z_{k+1} c(b_{k+1})$.

$b_k \le x \le b_{k+1} \rightarrow y_k = 1$, 否则, $y_k = 0$



$$z_1 \le y_1, z_2 \le y_1 + y_2, z_3 \le y_2 + y_3, z_4 \le y_3$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1, \quad z_k \ge 0 \ (k = 1,2,3,4)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1, \ \ y_1, y_2, y_3 = 0 \text{ 或 } 1$$

$$x = z_1 b_1 + z_2 b_2 + z_3 b_3 + z_4 b_4$$

$$c(x) = z_1 c(b_1) + z_2 c(b_2) + z_3 c(b_3) + z_4 c(b_4)$$

IP模型，LINDO求解，得到的结果与方法2相同.

处理分段线性函数，方法3更具一般性

4.4　接力队选拔和选课策略

分派问题

若干项任务分给一些候选人来完成，每人的专长不同，完成每项任务取得的效益或需要的资源就不同，如何分派任务使获得的总效益最大，或付出的总资源最少。

若干种策略供选择，不同的策略得到的收益或付出的成本不同，各个策略之间有相互制约关系，如何在满足一定条件下作出决择，使得收益最大或成本最小。

例1 混合泳接力队的选拔

5名候选人的百米成绩

	甲	乙	丙	丁	戊
蝶泳	1’06”8	57”2	1’18”	1’10”	1’07”4
仰泳	1’15”6	1’06”	1’07”8	1’14”2	1’11”
蛙泳	1’27”	1’06”4	1’24”6	1’09”6	1’23”8
自由泳	58”6	53”	59”4	57”2	1’02”4

如何选拔队员组成4×100米混合泳接力队?

丁的蛙泳成绩退步到1’15”2；戊的自由泳成绩进步到57”5, 组成接力队的方案是否应该调整?

穷举法：组成接力队的方案共有5!=120种。

0-1规划模型

c_{ij}(秒)~队员i 第j 种泳姿的百米成绩

c_{ij}	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
j=1	66.8	57.2	78	70	67.4
j=2	75.6	66	67.8	74.2	71
j=3	87	66.4	84.6	69.6	83.8
j=4	58.6	53	59.4	57.2	62.4

若选择队员i参加泳姿j 的比赛，记x_{ij}=1，否则记x_{ij}=0

目标函数

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5}c_{ij}x_{ij}$$

约束条件

每人最多入选泳姿之一

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}\le 1,\ i=1,\cdots 5$$

每种泳姿有且只有1人

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij}=1,\ j=1,\cdots 4$$

模型求解

输入LINDO求解

```
MIN  66.8x11+75.6x12+87x13+58.6x14
   +… …
   +67.4x51+71  x52+83.8x53+62.4x54
SUBJECT TO
    x11+x12+x13+x14 <=1
    … …
    x41+x42+x43+x44 <=1
    x11+x21+x31+x41+x51 =1
    … …
    x14+x24+x34+x44+x54 =1
END
INT 20
```

最优解：$x_{14} = x_{21} = x_{32} = x_{43} = 1$，其它变量为0;

成绩为253.2（秒）=4’13”2

甲~ 自由泳、乙~ 蝶泳、丙~ 仰泳、丁~ 蛙泳.

	甲	乙	丙	丁	戊
蝶泳	1’06”8	57”2	1’18”	1’10”	1’07”4
仰泳	1’15”6	1’06”	1’07”8	1’14”2	1’11”
蛙泳	1’27”	1’06”4	1’24”6	1’09”6	1’23”8
自由泳	58”6	53”	59”4	57”2	1’02”4

讨论

丁蛙泳c_{43} =69.6→75.2，戊自由泳c_{54}=62.4 → 57.5，方案是否调整？ 敏感性分析？

IP规划一般没有与LP规划相类似的理论，LINDO输出的敏感性分析结果通常是没有意义的。

c_{43}, c_{54} 的新数据重新输入模型，用LINDO求解

最优解：$x_{21} = x_{32} = x_{43} = x_{51} = 1$，成绩为4’17”7

乙~ 蝶泳、丙~ 仰泳、丁~ 蛙泳、戊~ 自由泳

原方案

甲~ 自由泳、乙~ 蝶泳、丙~ 仰泳、丁~ 蛙泳.

指派(Assignment)问题：每项任务有且只有一人承担，每人只能承担一项，效益不同，怎样分派使总效益最大.

例2 选课策略

课号	课名	学分	所属类别	先修课要求
1	微积分	5	数学	
2	线性代数	4	数学	
3	最优化方法	4	数学；运筹学	微积分；线性代数
4	数据结构	3	数学；计算机	计算机编程
5	应用统计	4	数学；运筹学	微积分；线性代数
6	计算机模拟	3	计算机；运筹学	计算机编程
7	计算机编程	2	计算机	
8	预测理论	2	运筹学	应用统计
9	数学实验	3	运筹学；计算机	微积分；线性代数

要求至少选两门数学课、三门运筹学课和两门计算机课

为了选修课程门数最少，应学习哪些课程 ？

选修课程最少，且学分尽量多，应学习哪些课程 ？

0-1规划模型

课号	课名	所属类别
1	微积分	数学
2	线性代数	数学
3	最优化方法	数学；运筹学
4	数据结构	数学；计算机
5	应用统计	数学；运筹学
6	计算机模拟	计算机；运筹学
7	计算机编程	计算机
8	预测理论	运筹学
9	数学实验	运筹学；计算机

决策变量

x_i=1 ~选修课号i 的课程（x_i=0 ~不选）

目标函数

选修课程总数最少

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{9} x_i$$

约束条件

最少2门数学课，
3门运筹学课，
2门计算机课。

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 2$$

$$x_3+x_5+x_6+x_8+x_9 \geq 3$$

$$x_4+x_6+x_7+x_9 \geq 2$$

0-1规划模型

课号	课名	先修课要求
＊ 1	微积分	
＊ 2	线性代数	
＊ 3	最优化方法	微积分；线性代数
4	数据结构	计算机编程
5	应用统计	微积分；线性代数
＊ 6	计算机模拟	计算机编程
＊ 7	计算机编程	
8	预测理论	应用统计
＊ 9	数学实验	微积分；线性代数

模型求解（LINDO）

最优解： $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = x_7 = x_9}$

=1, 其它为0；6门课程，总学分21

约束条件

先修课程要求

x_3=1必有$x_1 = x_2$=1

$$\Downarrow$$

$$x_3 \le x_1, x_3 \le x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$2x_3 - x_1 - x_2 \le 0$$

$$x_4 \le x_7 \Rightarrow x_4 - x_7 \le 0$$

$$2x_5 - x_1 - x_2 \le 0$$

$$x_6 - x_7 \le 0$$

$$x_8 - x_5 \le 0$$

$$2x_9 - x_1 - x_2 \le 0$$

讨论：选修课程最少，学分尽量多，应学习哪些课程?

课程最少

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{9} x_i$$

学分最多

$$Max \;\; W=5x_1+4x_2+4x_3+3x_4+4x_5+3x_6+2x_7+2x_8+3x_9$$

两目标(多目标)规划 $\qquad Min\,\{Z,-W\}$

多目标优化的处理方法：化成单目标优化。

- 以课程最少为目标，不管学分多少。

⇨ 最优解如上，**6**门课程，总学分**21** 。

- 以学分最多为目标，不管课程多少。

⇨ 最优解显然是选修所有**9**门课程 。

多目标规划

- 在课程最少的前提下以学分最多为目标。

⇨ 增加约束 $\sum_{i=1}^{9} x_i = 6$，以学分最多为目标求解。

课号	课名	学分
* 1 *	微积分	5
* 2 *	线性代数	4
* 3 *	最优化方法	4
4	数据结构	3
5 *	应用统计	4
* 6	计算机模拟	3
* 7 *	计算机编程	2
8	预测理论	2
* 9 *	数学实验	3

最优解：$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = x_9 = 1$, 其它为0；总学分由21增至22。

注意：最优解不唯一！

可将$x_9 = 1$ 易为$x_6 = 1$

LINDO无法告诉优化问题的解是否唯一。

多目标规划

- 对学分数和课程数加权形成一个目标，如三七开。

⇨ $$Min \;\; Y = \lambda_1 Z - \lambda_2 W = 0.7Z - 0.3W$$

$$Z = \sum_{i=1}^{9} x_i$$

课号	课名	学分
1 *	微积分	**5**
2 *	线性代数	**4**
3 *	最优化方法	**4**
4 *	数据结构	**3**
5 *	应用统计	**4**
6 *	计算机模拟	**3**
7 *	计算机编程	**2**
8	预测理论	**2**
9 *	数学实验	**3**

$$W = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

最优解： $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_9 = 1}$**，其它为0；总学分28。**

讨论与思考

$$Min \;\; Y=\lambda_1 Z-\lambda_2 W \qquad \lambda_1+\lambda_2=1, \quad 0\le\lambda_1,\lambda_2\le 1$$

$$Z=\sum_{i=1}^{9} x_i \qquad W=5x_1+4x_2+4x_3+3x_4+4x_5 +3x_6+2x_7+2x_8+3x_9$$

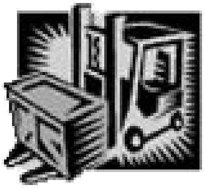
$$\lambda_1<2/3$$

最优解与$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$的结果相同——学分最多

$$\lambda_1>3/4$$

最优解与$\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$的结果相同——课程最少

4.5　饮料厂的生产与检修



- 企业生产计划

单阶段生产计划

⇩

多阶段生产计划

外部需求和内部资源随时间变化

- 生产批量问题

考虑与产量无关的固定费用

给优化模型求解带来新的困难

例1 饮料厂的生产与检修计划

某种饮料4周的需求量、生产能力和成本

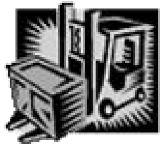
周次	需求量(千箱)	生产能力(千箱)	成本(千元/千箱)
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5
合计	100	135	

存贮费:每周每千箱饮料 0.2千元。

- 安排生产计划, 满足每周的需求, 使4周总费用最小。

- 在4周内安排一次设备检修，占用当周15千箱生产能力，能使检修后每周增产5千箱，检修应排在哪一周?

问题分析



周次	需求	能力	成本
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5
合计	100	135	

- 除第4周外每周的生产能力超过每周的需求；
- 生产成本逐周上升；
- 前几周应多生产一些。

模型假设

- 饮料厂在第1周开始时没有库存；
- 从费用最小考虑，第4周末不能有库存；
- 周末有库存时需支出一周的存贮费；
- 每周末的库存量等于下周初的库存量。

模型建立

周次	需求	能力	成本
1	**15**	**30**	**5.0**
2	**25**	**40**	**5.1**
3	**35**	**45**	**5.4**
4	**25**	**20**	**5.5**

决策变量

$x_1 \sim x_4$：第1~4周的生产量

$y_1 \sim y_3$：第1~3周末库存量

存贮费:0.2（千元/周•千箱）

目标函数

$$Min\ z = 5.0x_1 + 5.1x_2 + 5.4x_3 + 5.5x_4 + 0.2(y_1 + y_2 + y_3)$$

约束条件

产量、库存与需求平衡

$$x_1 - y_1 = 15$$

$$x_2 + y_1 - y_2 = 25$$

$$x_3 + y_2 - y_3 = 35$$

$$x_4 + y_3 = 25$$

能力限制

$$x_1 \le 30, x_2 \le 40$$

$$x_3 \le 45, x_4 \le 20$$

非负限制

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

模型求解

LINDO求解

最优解： $x_1 \sim x_4$：15，40，25，20；

$y_1 \sim y_3$：0，15，5 .

周次	需求	产量	库存	能力	成本
1	15	15	0	30	5.0
2	25	40	15	40	5.1
3	35	25	5	45	5.4
4	25	20	0	20	5.5

4周生产计划的总费用为528 (千元)

检修计划

- 在**4**周内安排一次设备检修，占用当周**15**千箱生产能力，能使检修后每周增产**5**千箱，检修应排在哪一周?

周次	需求	能力	成本
1	**15**	**30**	**5.0**
2	**25**	**40**	**5.1**
3	**35**	**45**	**5.4**
4	**25**	**20**	**5.5**

检修安排在任一周均可

0-1变量w_t：$w_t=1$~ 检修安排在第t周($t=1,2,3,4$）

约束条件

产量、库存
与需求平衡
条件不变

能力限制

$x_1 \le 30$ ⇨ $x_1 + 15w_1 \le 30$

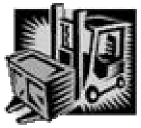
$x_2 \le 40$ ⇨ $x_2 + 15w_2 \le 40 + 5w_1$

$x_3 \le 45$ ⇨ $x_3 + 15w_3 \le 45 + 5w_2 + 5w_1$

$x_4 \le 20$ ⇨ $x_4 + 15w_4 \le 20 + 5w_1 + 5w_2 + 5w_3$

检修计划

0-1变量w_t：$w_t=1$~ 检修安排在第t周(t=1,2,3,4）



目标函数不变

增加约束条件：检修1次

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$$

LINDO求解

最优解： $w_1=1$, w_2 , w_3, $w_4=0$;

x_1~ x_4：15, 45, 15, 25;

y_1~ y_3：0, 20, 0 .

总费用由528千元降为527千元

检修所导致的生产能力提高的作用,
需要更长的时间才能得到充分体现。

例2 饮料的生产批量问题

饮料厂使用同一条生产线轮流生产多种饮料。

若某周开工生产某种饮料, 需支出生产准备费8千元。

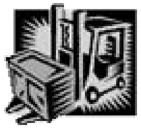
某种饮料4周的需求量、生产能力和成本

周次	需求量(千箱)	生产能力(千箱)	成本(千元/千箱)
1	**15**	**30**	**5.0**
2	**25**	**40**	**5.1**
3	**35**	**45**	**5.4**
4	**25**	**20**	**5.5**
合计	**100**	**135**	

存贮费:每周每千箱饮料 **0.2**千元。

- 安排生产计划, 满足每周的需求, 使4周总费用最小。

生产批量问题的一般提法



c_t~时段t 生产费用(元/件)；

h_t~时段t (末)库存费(元/件)；

s_t~时段t 生产准备费(元)；

d_t~时段t 市场需求(件)；

M_t~时段t 生产能力(件)。

假设初始库存为0

制订生产计划，满足需求，并使T个时段的总费用最小。

决策变量

x_t~时段t 生产量；

y_t~时段t (末)库存量；

w_t=1 ~时段t 开工生产（w_t=0 ~不开工）。

目标

$$\min\ z=\sum_{t=1}^{T}(s_t w_t + c_t x_t + h_t y_t)$$

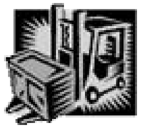
约束

$$y_{t-1}+x_t-y_t=d_t$$

$$w_t=\begin{cases}1, & x_t>0,\\ 0, & x_t=0,\end{cases}\qquad x_t\le M_t$$

$$y_0=y_T=0,\ x_t, y_t\ge 0$$

生产批量问题的一般提法



$$\min\ z=\sum_{t=1}^{T}(s_t w_t + c_t x_t + h_t y_t)$$

$$s.t.\ \ y_{t-1}+x_t-y_t=d_t$$

$$w_t=\begin{cases}1, & x_t>0,\\ 0, & x_t=0,\end{cases}\qquad x_t\le M_t \qquad \Rightarrow \qquad x_t-M_t w_t\le 0$$

$$y_0=y_T=0,\ \ x_t,y_t\ge 0$$

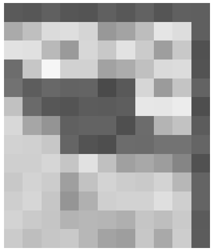
$$t=1,2,\cdots T$$

混合0-1规划模型

将所给参数代入模型，用**LINDO**求解

最优解：$\boldsymbol{x_1\sim x_4}$：**15，40，45，0**；总费用：**554.0**(千元)

§6　钢管和易拉罐下料



原料下料问题

生产中通过切割、剪裁、冲压等手段，将原材料加工成所需大小

按照工艺要求，确定下料方案，使所用材料最省，或利润最大

例1 钢管下料

客户需求

原料钢管:每根19米

4米50根

6米20根

8米15根

问题1. 如何下料最节省？ 节省的标准是什么?

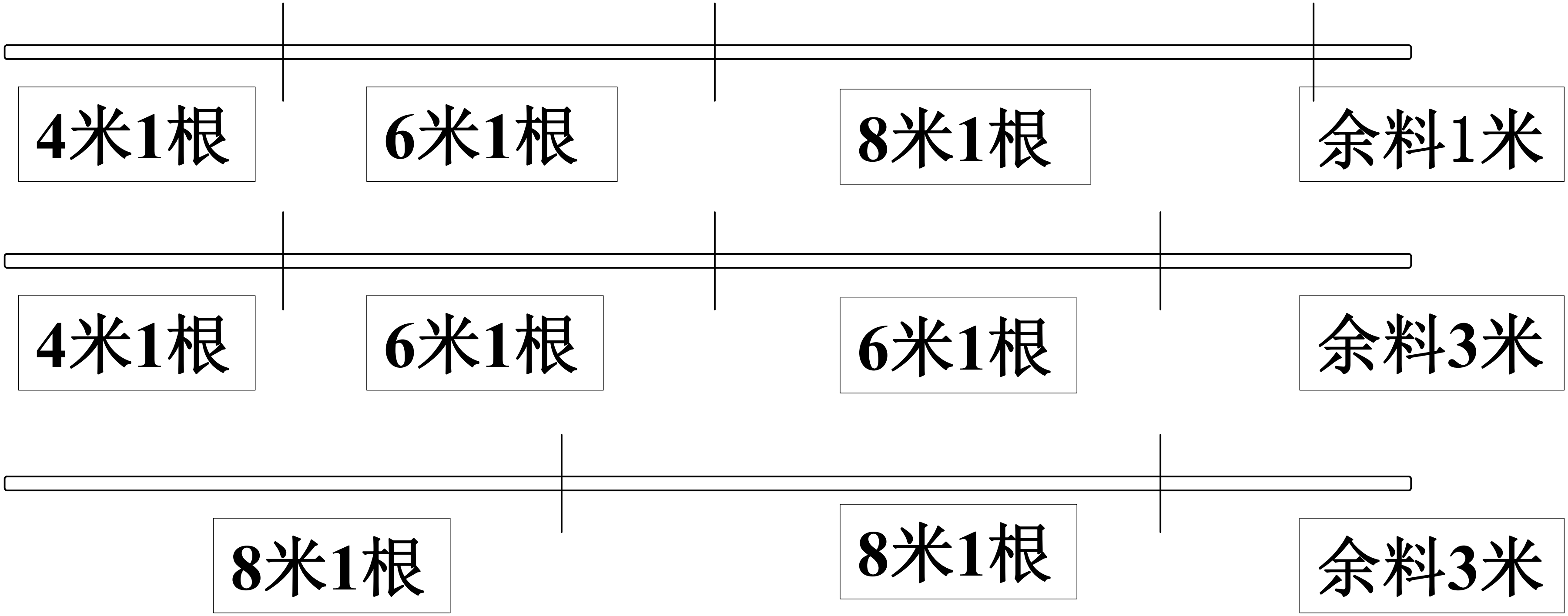
问题2. 客户增加需求： 5米10根

由于采用不同切割模式太多，会增加生产和管理成本，规定切割模式不能超过3种。如何下料最节省?

钢管下料

切割模式

按照客户需要在一根原料钢管上安排切割的一种组合。



4米1根 6米1根 8米1根 余料1米

4米1根 6米1根 6米1根 余料3米

8米1根 8米1根 余料3米

合理切割模式的余料应小于客户需要钢管的最小尺寸

钢管下料问题1

合理切割模式

模式	4米钢管根数	6米钢管根数	8米钢管根数	余料(米)
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3

为满足客户需要，按照哪些种合理模式，每种模式切割多少根原料钢管，最为节省？

两种标准

1. 原料钢管剩余总余量最小

2. 所用原料钢管总根数最少

决策变量 x_i~按第i种模式切割的原料钢管根数（i=1,2,…7）

目标1（总余量） $Min\ Z_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7$

模式	4米根数	6米根数	8米根数	余料
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3
需求	50	20	15	

约束 **满足需求**

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

整数约束： x_i **为整数**

最优解： x_2=12, x_5=15,
其余为0;

最优值： 27。

按模式2切割12根, 按模式5切割15根，余料27米

钢管下料问题1

目标2（总根数） $Min\ Z_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

约束条件不变

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

x_i 为整数

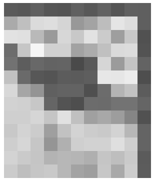
最优解：x_2=15, x_5=5，x_7=5, 其余为0；最优值：25。

按模式2切割15根，
按模式5切割5根，
按模式7切割5根，
共25根，余料35米

与目标1的结果“共切割27根，余料27米” 相比

虽余料增加8米，但减少了2根

当余料没有用处时，通常以总根数最少为目标



钢管下料问题2

增加一种需求：5米10根；切割模式不超过3种。

现有4种需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根，用枚举法确定合理切割模式，过于复杂。

对大规模问题，用模型的约束条件界定合理模式

决策变量

x_i~按第i种模式切割的原料钢管根数（i=1,2,3）

$r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$~第$i$种切割模式下，每根原料钢管生产4米、5米、6米和8米长的钢管的数量

钢管下料问题2

目标函数（总根数）　$Min \quad x_1 + x_2 + x_3$

约束条件

满足需求

$$r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \ge 50$$

$$r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \ge 10$$

$$r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 \ge 20$$

$$r_{41}x_1 + r_{42}x_2 + r_{43}x_3 \ge 15$$

模式合理：每根余料不超过3米

$$16 \le 4r_{11} + 5r_{21} + 6r_{31} + 8r_{41} \le 19$$

$$16 \le 4r_{12} + 5r_{22} + 6r_{32} + 8r_{42} \le 19$$

$$16 \le 4r_{13} + 5r_{23} + 6r_{33} + 8r_{43} \le 19$$

整数约束： x_i ,r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}（i=1,2,3）为整数

整数非线性规划模型

钢管下料问题2

增加约束，缩小可行域，便于求解

需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根

每根原料钢管长19米

原料钢管总根数下界：$\left\lceil \frac{4\times 50+5\times 10+6\times 20+8\times 15}{19} \right\rceil = 26$

特殊生产计划：对每根原料钢管

模式1：切割成4根4米钢管，需13根；

模式2：切割成1根5米和2根6米钢管，需10根；

模式3：切割成2根8米钢管，需8根。

原料钢管总根数上界：13+10+8=31

$$26 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 31$$

模式排列顺序可任定

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3$$

LINGO求解整数非线性规划模型

```
Local optimal solution found at
iteration:        12211
  Objective value:          28.00000
Variable   Value        Reduced Cost
X1         10.00000         0.000000
X2         10.00000         2.000000
X3         8.000000         1.000000
R11        3.000000         0.000000
R12        2.000000         0.000000
R13        0.000000         0.000000
R21        0.000000         0.000000
R22        1.000000         0.000000
R23        0.000000         0.000000
R31        1.000000         0.000000
R32        1.000000         0.000000
R33        0.000000         0.000000
R41        0.000000         0.000000
R42        0.000000         0.000000
R43        2.000000         0.000000
```

模式1：每根原料钢管切割成3根4米和1根6米钢管，共10根；

模式2：每根原料钢管切割成2根4米、1根5米和1根6米钢管，共10根；

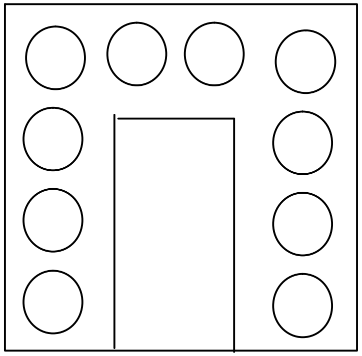
模式3：每根原料钢管切割成2根8米钢管，共8根。

原料钢管总根数为28根。

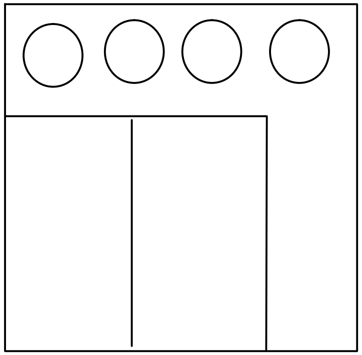
例2 易拉罐下料

板材规格1：
正方形，边长
24cm，5万张。

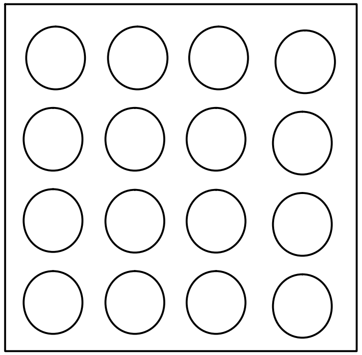
板材规格2：
长方形，
32×28cm，
2万张。



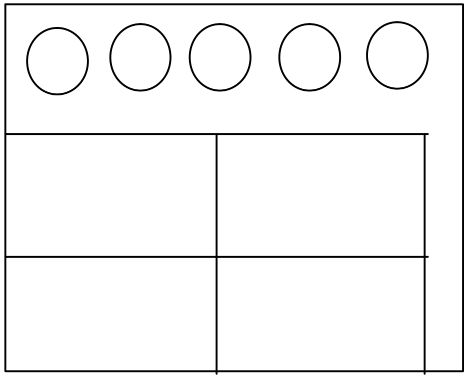
模式1：1.5秒



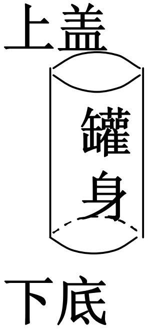
模式2：2秒



模式3：1秒



模式4：3秒

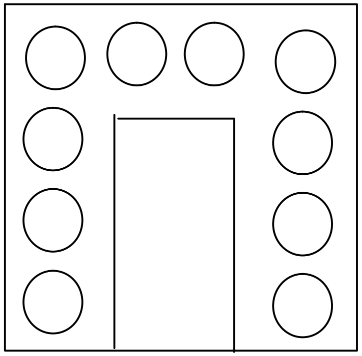


罐身高10cm，
上盖、下底直
径均5cm。

每周工作40小时，每只易拉罐利润0.10元，原料余料损失0.001元 / cm²（不能装配的罐身、盖、底也是余料） 如何安排每周生产？

问题分析　　计算各种模式下的余料损失

模式1:
正方形
边长24cm



上、下底直径d=5cm，
罐身高h=10cm。

模式1 余料损失 $24^2-10\times\pi d^2/4-\pi dh=222.6\ \mathrm{cm}^2$

	罐身个数	底、盖个数	余料损失（cm²）	冲压时间（秒）
模式1	1	10	222.6	1.5
模式2	2	4	183.3	2
模式3	0	16	261.8	1
模式4	4	5	169.5	3

问题分析

目标:易拉罐利润扣除原料余料损失后的净利润最大

注意：不能装配的罐身、上下底也是余料

约束：每周工作时间不超过40小时；

原料数量：规格1（模式1 ~3）5万张，

规格2（模式4）2万张；

罐身和底、盖的配套组装 。

模型建立

决策变量

x_i~按照第i种模式的生产张数(i=1,2,3,4)；

y_1~一周生产的易拉罐个数；

y_2~不配套的罐身个数；

y_3~不配套的底、盖个数。

模型建立

y_1～易拉罐个数；y_2～不配套的罐身；y_3～不配套的底、盖。

产量	余料	时间
x_1	222.6	1.5
x_2	183.3	2
x_3	261.8	1
x_4	169.5	3

每只易拉罐利润0.10元，

余料损失0.001元 / cm^2

罐身面积πdh=157.1 cm^2

底盖面积$\pi d^2/4$=19.6 cm^2

目标

$$Max \quad 0.1y_1 - 0.001(222.6x_1 + 183.3x_2 + 261.8x_3 + 169.5x_4 + 157.1y_2 + 19.6y_3)$$

约束条件

时间约束 $1.5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 144000$ **(40小时)**

原料约束 $x_1 + x_2 + x_3 \le 50000, \quad x_4 \le 20000$

约束
条件

y_1～易拉罐个数；y_2～不配套的罐身；
y_3～不配套的底、盖。

产量	罐身	底、盖
x_1	1	10
x_2	2	4
x_3	0	16
x_4	4	5

配套约束

$$y_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_4 - y_1$$

$$y_3 = 10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4 - 2y_1$$

$$y_1 = \min\{x_1 + 2x_2 + 4x_4 ,\ (10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4)/2\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 \le x_1 + 2x_2 + 4x_4 , \quad y_1 \le (10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4)/2$$

虽然x_i和y_1，y_2，y_3应是整数，但是因生产量很大，可以把它们看成实数，从而用线性规划模型处理 。

模型求解

LINDO发出警告信息：“数据之间的数量级差别太大，建议进行预处理，缩小数据之间的差别”

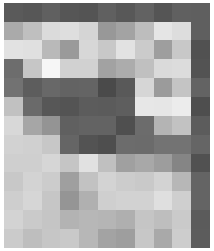
将所有决策变量扩大**10000**倍（x_i~万张，y_i~万件）

⇨ $1.5x_1+2x_2+x_3+3x_4\le 14.4,\quad x_1+x_2+x_3\le 5,\ x_4\le 2$

```
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)         0.4298337
VARIABLE  VALUE    REDUCED COST
     Y1     16.025000     0.000000
     X1      0.000000     0.000050
     X2      4.012500     0.000000
     X3      0.375000     0.000000
     X4      2.000000     0.000000
     Y2      0.000000     0.223331
     Y3      0.000000     0.036484
```

模式2生产**40125**张，
模式3生产**3750**张，
模式4生产**20000**张，
共产易拉罐**160250**个
（罐身和底、盖无剩余），
净利润为**4298**元

下料问题的建模



- 确定下料模式
- 构造优化模型

一维问题（如钢管下料）

规格不太多，可枚举下料模式，建立整数线性规划模型，否则要构造整数非线性规划模型，求解困难，可用缩小可行域的方法进行化简，但要保证最优解的存在。

二维问题（如易拉罐下料）

具体问题具体分析（比较复杂 ）

第五章　微分方程模型

动态模型

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

微分方程建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

5.1 传染病模型

问题

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高潮到来的时刻
- 预防传染病蔓延的手段
- 按照传播过程的一般规律，
  用机理分析方法建立模型

模型1 已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

- 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}=\lambda i \qquad \Rightarrow \boxed{i(t)=i_0 e^{\lambda t}}$$

$$i(0)=i_0 \qquad \Rightarrow t\to\infty\Rightarrow i\to\infty \quad ?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 ⇨ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

模型2　区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ, 且使接触的健康人致病

λ~日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

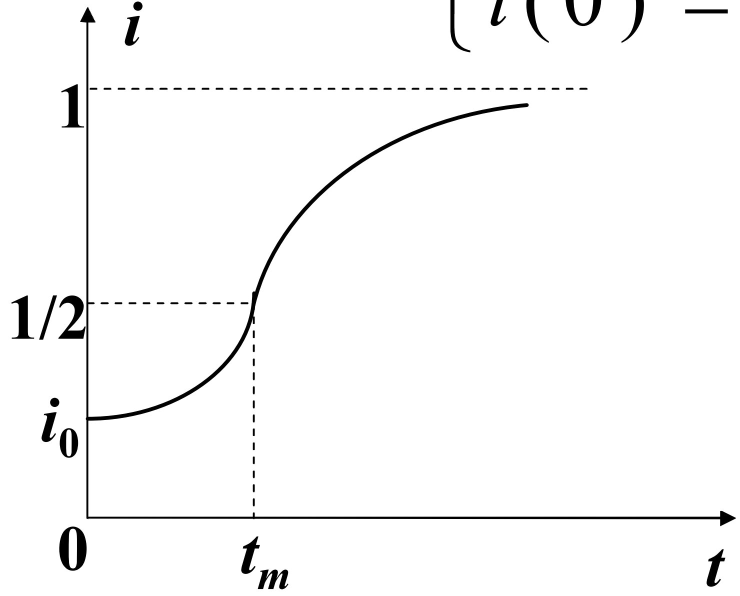
$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

⇨ Logistic 模型



$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{i_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1} \ln\left(\frac{1}{i_0} - 1\right)$$

$t = t_m$, di/dt 最大

t_m~传染病高潮到来时刻

λ (日接触率)↓ → t_m↑

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$ $\boxed{?}$

病人可以治愈！

模型3

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

SIS 模型

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ

μ~日治愈率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

λ~日接触率

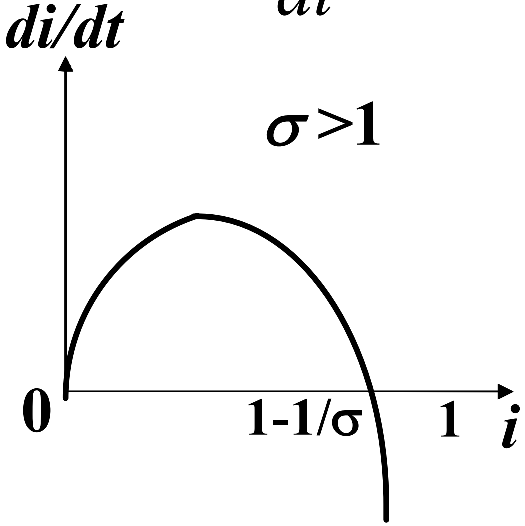
$1/\mu$~感染期

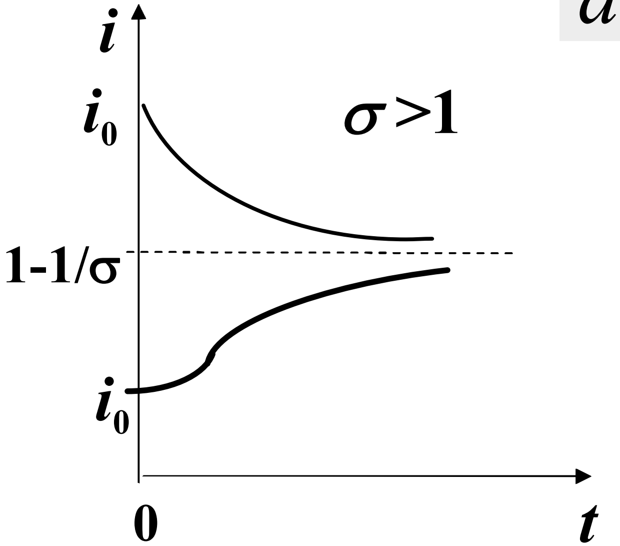
$\sigma=\lambda/\mu$

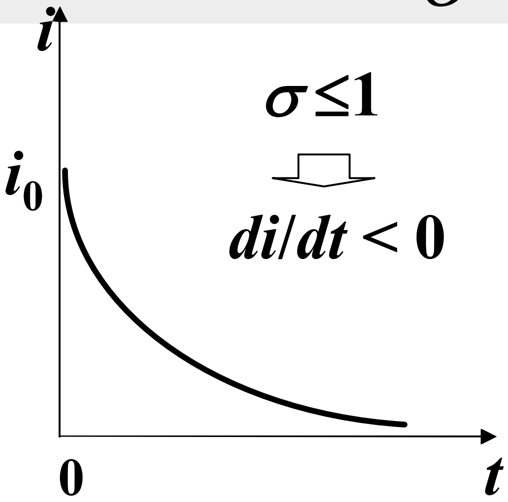
σ ~一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为接触数。

模型3

$$\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i \quad \sigma = \lambda / \mu \qquad \frac{di}{dt} = -\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$







$$i(\infty) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \le 1 \end{cases}$$

接触数σ=1 ~ 阈值

$\sigma \le 1 \Rightarrow i(t) \downarrow$

$\sigma > 1$, i_0小 $\Rightarrow i(t)$按S形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称移出者

SIR模型

假设

1）总人数*N*不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ,
接触数 $\sigma=\lambda/\mu$

建模

$$s(t)+i(t)+r(t)=1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4

SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si \\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0 \end{cases}$$

$i_0+s_0\approx 1$（通常$r(0)=r_0$很小）

⇒ 无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

⇓

在相平面$s\sim i$ 上研究解的性质

模型4

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去*dt*

$\sigma = \lambda / \mu$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s = s_0} = i_0 \end{cases}$$

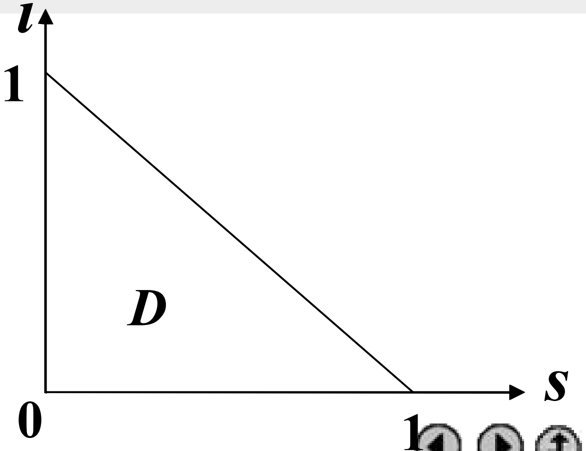
相轨线

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s,i) \mid s \geq 0,\ i \geq 0,\ s + i \leq 1\}$$

在***D***内作相轨线$i(s)$的图形，进行分析



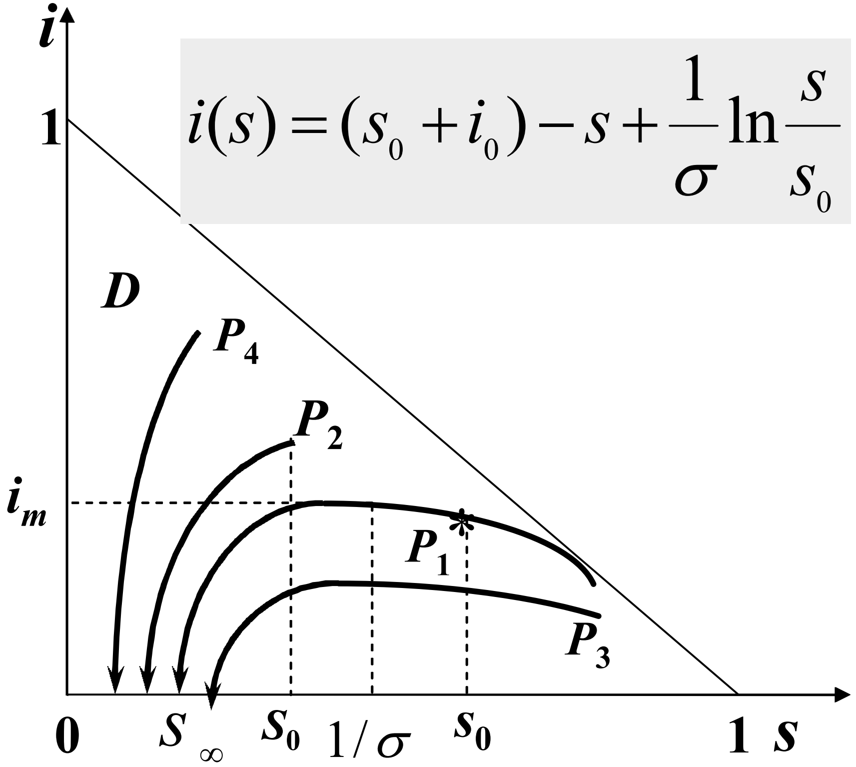
模型4

相轨线 $i(s)$ 及其分析

SIR模型

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\[2mm] \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\[2mm] i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{di}{ds}=\dfrac{1}{\sigma s}-1\\[2mm] i\big|_{s=s_0}=i_0\end{cases}$$



$$i(s)=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$

$s(t)$单调减→相轨线的方向

$$s=1/\sigma,\ i=i_m \quad t\to\infty,\ i\to 0$$

s_∞满足 $s_0+i_0-s_\infty+\dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0}=0$

P_1: s_0>1/ → $i(t)$先升后降至0 ⇨ 传染病蔓延

P_2: s_0<1/ → $i(t)$单调降至0 ⇨ 传染病不蔓延

1/ ~ 阈值

模型4

预防传染病蔓延的手段

SIR模型

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ ⇨ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow$, $\mu\uparrow$

λ(日接触率)↓ ⇒ 卫生水平↑

μ(日治愈率)↑ ⇒ 医疗水平↑

- 降低 s_0 ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫

$s_0+i_0+r_0=1$

σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

忽略 i_0

$$\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

模型4

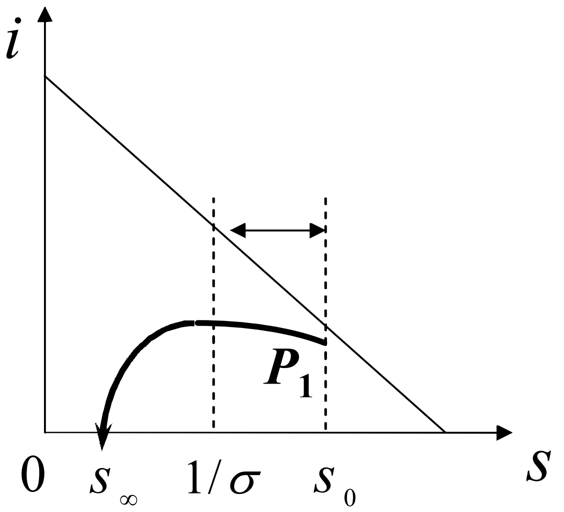
被传染人数的估计

SIR模型

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{\sigma}\ln\left(1 - \frac{x}{s_0}\right) \cong 0$$

$\boldsymbol{i_0 \cong 0,\ s_0 \cong 1}$



$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x << s_0}$

$$x\left(1 - \frac{1}{s_0\sigma} - \frac{x}{2s_0^2\sigma}\right) \cong 0$$

$$\Rightarrow \quad x \approx 2s_0\sigma\left(s_0 - \frac{1}{\sigma}\right)$$

$\boldsymbol{s_0 - 1/\sigma = \delta}$

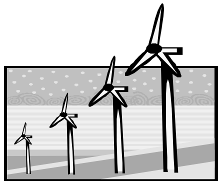
$\boldsymbol{\delta}$ **小,** $\boldsymbol{s_0\sigma \cong 1}$

$$\Rightarrow \quad x \cong 2\delta$$

提高阈值1/ →降低

被传染人数比例 *x*

5.2 经济增长模型



增加生产 发展经济 增加投资 增加劳动力 提高技术

- 建立产值与资金、劳动力之间的关系
- 研究资金与劳动力的最佳分配，使投资效益最大
- 调节资金与劳动力的增长率，使经济(生产率)增长

1. 道格拉斯(Douglas)生产函数

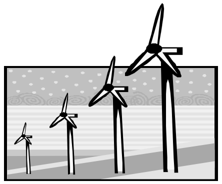
产值 $Q(t)$ ⇐ 资金 $K(t)$ 劳动力 $L(t)$

技术 $f(t) = f_0$

$$Q(t) = f_0 F(K(t), L(t))$$

F为待定函数

1. 道格拉斯(Douglas)生产函数



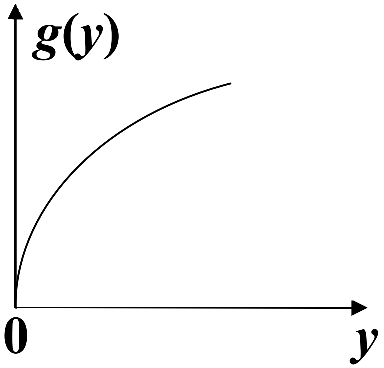
静态模型 $Q(K,L)=f_0F(K,L)$

每个劳动力的产值 $z=\dfrac{Q}{L}$　　每个劳动力的投资 $y=\dfrac{K}{L}$

模型假设　z 随着 y 的增加而增长，但增长速度递减

$$z=Q/L=f_0g(y) \qquad g(y)=y^{\alpha},\quad 0<\alpha<1$$

⇨ $Q=f_0L(K/L)^{\alpha}$



⇨ $Q(K,L)=f_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ **Douglas生产函数**

$$\frac{\partial Q}{\partial K},\frac{\partial Q}{\partial L}>0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2},\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}<0$$

含义?

1. Douglas生产函数

$$Q(K,L)=f_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

$$\Downarrow$$

Q_K～单位资金创造的产值

Q_L～单位劳动力创造的产值

$$\frac{KQ_K}{Q}=\alpha,\quad \frac{LQ_L}{Q}=1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$KQ_K+LQ_L=Q$$

α～资金在产值中的份额

1-α～劳动力在产值中的份额

更一般的道格拉斯(Douglas)生产函数

$$Q(K,L)=f_0K^{\alpha}L^{\beta},\quad 0<\alpha,\beta<1,\quad f_0>0$$

2）资金与劳动力的最佳分配（静态模型）

资金来自贷款，利率 ***r*** 劳动力付工资 **w**

资金和劳动力创造的效益 $S = Q - rK - wL$

求资金与劳动力的分配比例***K/L*****(**每个劳动力占有的资金**)**，使效益**S**最大

$$\frac{\partial S}{\partial K} = 0, \frac{\partial S}{\partial L} = 0 \Rightarrow \frac{Q_K}{Q_L} = \frac{r}{w}$$

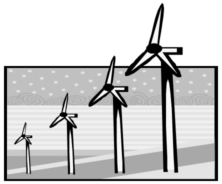
$$\frac{KQ_K}{Q} = \alpha, \quad \frac{LQ_L}{Q} = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{Q_K}{Q_L} = \frac{L}{K}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r}$$

$\boldsymbol{w}\uparrow$, $\boldsymbol{r}\downarrow$, $\boldsymbol{\alpha}\uparrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{K/L}\uparrow$

3) 经济(生产率)增长的条件 (动态模型)



要使 $Q(t)$ 或 $Z(t)=Q(t)/L(t)$ 增长, $K(t), L(t)$应满足的条件

模型假设

- 投资增长率与产值成正比 (用一定比例扩大再生产) ⇨ $\frac{dK}{dt}=\lambda Q,\ \lambda>0$

- 劳动力相对增长率为常数 ⇨ $\frac{dL}{dt}=\mu L$ ⇨ $L(t)=L_0 e^{\mu t}$

$$Q=f_0 L g(y) \quad g(y)=y^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt}=\lambda f_0 L y^{\alpha}$$

$$y=\frac{K}{L}, K=Ly \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt}=L\frac{dy}{dt}+\mu Ly$$

$$\frac{dK}{dt}=\lambda f_0 L y^{\alpha}$$

⇨

$$\frac{dy}{dt}+\mu y=f_0\lambda y^{\alpha}$$

$$\frac{dK}{dt}=L\frac{dy}{dt}+\mu L y$$

Bernoulli方程

$$\Rightarrow\quad y(t)=\left(\frac{f_0\lambda}{\mu}+(y_0^{1-\alpha}-\frac{f_0\lambda}{\mu})e^{-(1-\alpha)\mu t}\right)^{1/1-\alpha}$$

$$y_0=K_0/L_0,Q_0=f_0K_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha},\dot{K}_0=\lambda Q_0 \Rightarrow y_0^{1-\alpha}=f_0\lambda\frac{K_0}{\dot{K}_0}$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=\left\{\frac{f_0\lambda}{\mu}[1-(1-\mu\frac{K_0}{\dot{K}_0})e^{-(1-\alpha)\mu t}]\right\}^{1/1-\alpha}$$

3) 经济增长的条件

产值$Q(t)$增长 ⟺ **$dQ/dt>0$**

$$Q=f_0Lg(y)$$

$$g(y)=y^{\alpha}$$

$$\frac{dQ}{dt}=f_0Lg'(y)\frac{dy}{dt}+f_0g(y)\frac{dL}{dt}$$

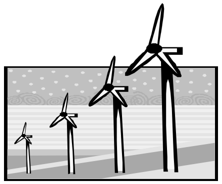
$$=f_0Ly^{2\alpha-1}[f_0\alpha\lambda+\mu(1-\alpha)y^{1-\alpha}]$$

$$\frac{dQ}{dt}>0\Leftrightarrow\left(1-\frac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}\right)e^{-(1-\alpha)\mu t}<\frac{1}{1-\alpha}\quad(A)$$

$$\mu>0\Rightarrow A\text{成立}$$

$$\mu<0\Rightarrow\text{当}t<\frac{1}{(1-\alpha)\mu}\ln(1-\alpha)(1-\frac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}),\ A\text{成立}$$

3) 经济增长的条件



每个劳动力的产值 $Z(t)=Q(t)/L(t)$增长 $\Leftrightarrow$ **$dZ/dt>0$**

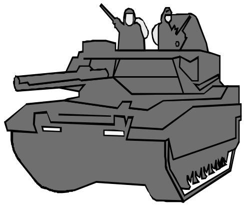
$$Z(t)=\frac{f_0 L y^{\alpha}}{L}=f_0\, y^{\alpha}=f_0\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \Rightarrow \frac{dZ}{dt}=f_0\alpha y^{\alpha-1}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dZ}{dt}>0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}>0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}\right)e^{-(1-\alpha)\mu t}>0 \quad (B)$$

$$\mu<0 \Rightarrow B\text{成立} \quad \mu>0 \Rightarrow \text{当}\frac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}<1\text{时},\ B\text{成立}$$

劳动力增长率小于初始投资增长率

5.3　正规战与游击战



第一次世界大战Lanchester提出预测战役结局的模型

战争分类：正规战争，游击战争，混合战争

只考虑双方兵力多少和战斗力强弱

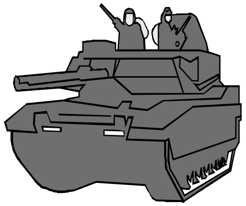
兵力因战斗及非战斗减员而减少，因增援而增加

战斗力与射击次数及命中率有关

建模思路和方法为用数学模型讨论社会领域的实际问题提供了可借鉴的示例

一般模型

x*(*t*)** ~甲方兵力，y*(*t*)** ~乙方兵力



模型假设

- 每方战斗减员率取决于双方的兵力和战斗力
- 每方非战斗减员率与本方兵力成正比
- 甲乙双方的增援率为***u*(*t*), *v*(*t*)**

模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,y) - \alpha x + u(t), & \alpha > 0 \\ \dot{y}(t) = g(x,y) - \beta y + v(t), & \beta > 0 \end{cases}$$

f*, *g 取决于战争类型

正规战争模型

双方均以正规部队作战

- 甲方战斗减员率只取决于乙方的兵力和战斗力

$f(x, y)=-ay$, a ~ 乙方每个士兵的杀伤率

$a=r_y p_y$, r_y~射击率，**p_y**~命中率

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay - \alpha x + u(t) \\ \dot{y} = -bx - \beta y + v(t) \end{cases}$$

$$g = -bx, b = r_x p_x$$

- 忽略非战斗减员
- 假设没有增援

⇨

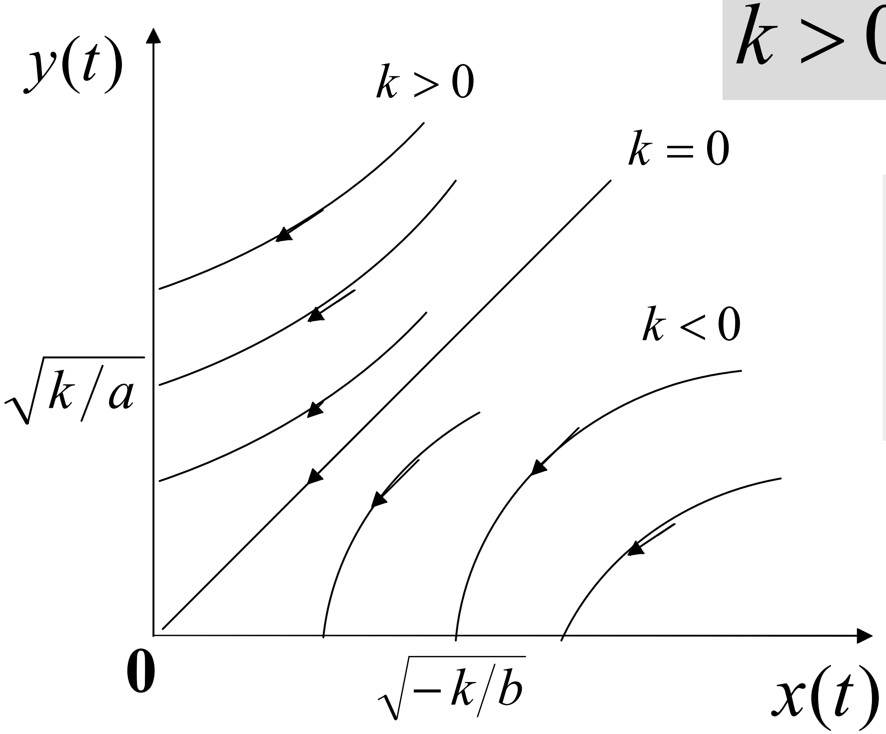
$$\begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

正规战争模型

为判断战争的结局，不求*x*(*t*), *y*(*t*)
而在相平面上讨论 *x* 与 *y* 的关系

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} \Rightarrow ay^2 - bx^2 = k$$

$$k = ay_0^2 - bx_0^2$$



$k > 0 \Rightarrow x = 0$时$y > 0$ ⇒ 乙方胜

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{b}{a} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y}$$

平方律模型

$k < 0 \Rightarrow$ 甲方胜

$k = 0 \Rightarrow$ 平局

游击战争模型

双方都用游击部队作战

- 甲方战斗减员率还随着甲方兵力的增加而增加

$f(x,y)=-cxy$, c~ 乙方每个士兵的杀伤率

$c=r_y p_y$

r_y~射击率

p_y~命中率

⇨

$p_y=s_{ry}/s_x$

s_x~ 甲方活动面积

s_{ry}~ 乙方射击有效面积

$$g(x,y)=-dxy,\ d=r_x p_x=r_x s_{rx}/s_y$$

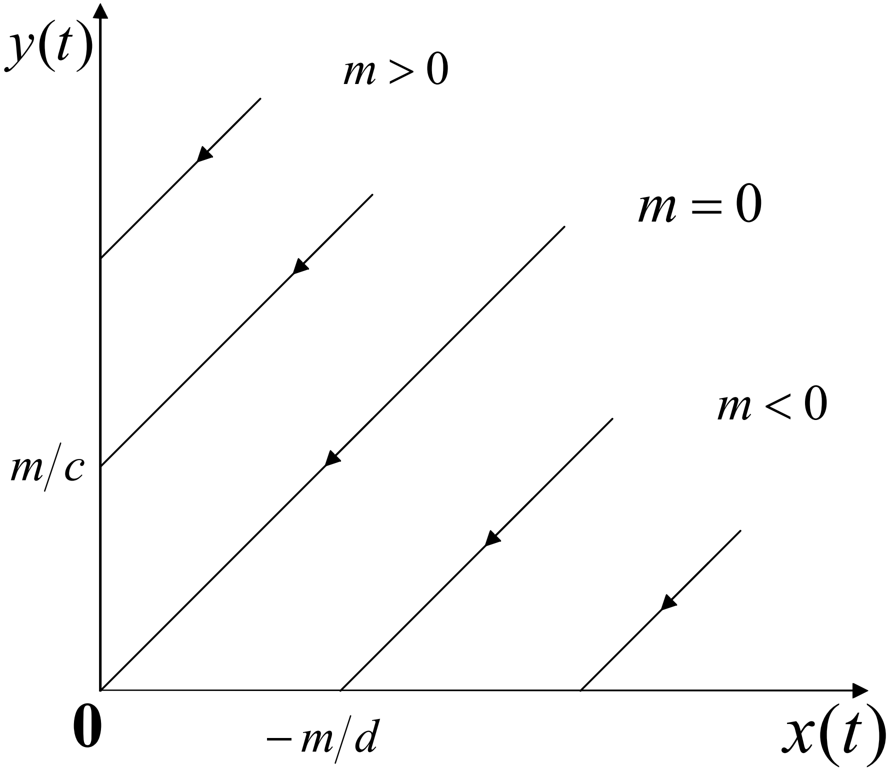
- 忽略非战斗减员
- 假设没有增援

⇨

$$\begin{cases} \dot{x}=-cxy \\ \dot{y}=-dxy \\ x(0)=x_0,\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

游击战争模型

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -dxy \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{c} \Rightarrow \begin{array}{l} cy - dx = m \\ m = cy_0 - dx_0 \end{array}$$



$m > 0 \Rightarrow x = 0$时$y > 0$

$\Rightarrow$乙方胜

$$\Downarrow$$

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x s_{rx} s_x}{r_y s_{ry} s_y}$$

线性律模型

$m < 0 \Rightarrow$甲方胜

$m = 0 \Rightarrow$平局

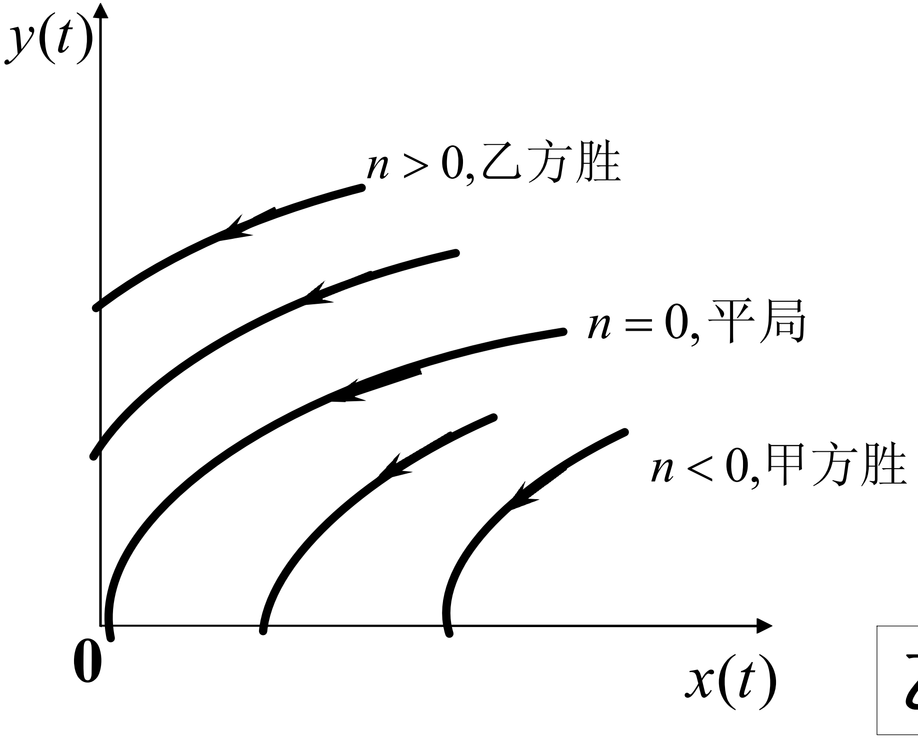
混合战争模型

甲方为游击部队，乙方为正规部队

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad cy^2 - 2bx = n, \quad n = cy_0^2 - 2bx_0$$

$n>0$ 乙方胜 $\Rightarrow \left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2 > \dfrac{2b}{cx_0}$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2r_x p_x s_x}{r_y s_{ry} x_0}$$



设 x_0=100, r_x/r_y=1/2, p_x=0.1, s_x=1(km²), s_{ry}=1(m²)

$\Rightarrow \quad (y_0/x_0)^2 > 100$

乙方必须10倍于甲方的兵力

5.4　药物在体内的分布与排除

- 药物进入机体形成血药浓度(单位体积血液的药物量)
- 血药浓度需保持在一定范围内——给药方案设计
- 药物在体内吸收、分布和排除过程 ——药物动力学
- 建立房室模型——药物动力学的基本步骤
- 房室——机体的一部分，药物在一个房室内均匀分布(血药浓度为常数)，在房室间按一定规律转移
- 本节讨论二室模型——中心室(心、肺、肾等)和周边室(四肢、肌肉等)

模型假设

- 中心室(1)和周边室(2), 容积不变
- 药物从体外进入中心室，在二室间相互转移, 从中心室排出体外
- 药物在房室间转移速率及向体外排除速率，与该室血药浓度成正比

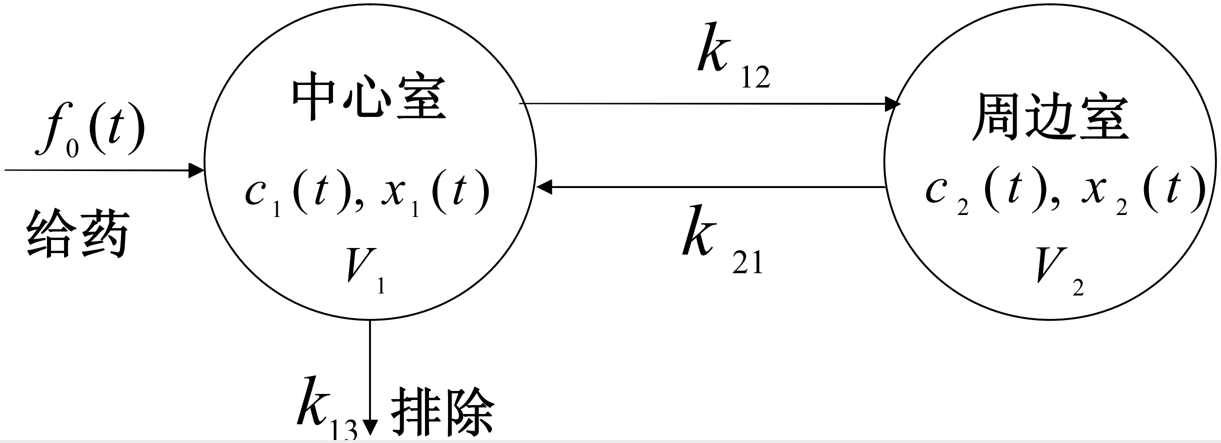
模型建立

$x_i(t) \sim$ 药量

$c_i(t) \sim$ 浓度

$V_i \sim$ 容积

$i = 1,2$



$$\dot{x}_1(t) = -k_{12}x_1 - k_{13}x_1 + k_{21}x_2 + f_0(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = k_{12}x_1 - k_{21}x_2$$

$f_0 \sim$ 给药速率

模型建立

$$x_i(t) = V_i c_i(t),\ i = 1,2$$

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12} + k_{13})c_1 + \dfrac{V_2}{V_1} k_{21} c_2 + \dfrac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \dfrac{V_1}{V_2} k_{12} c_1 - k_{21} c_2 \end{cases}$$

线性常系数非齐次方程

对应齐次方程通解

$$\begin{cases} \overline{c}_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} \\ \overline{c}_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k_{12} + k_{21} + k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21} k_{13} \end{cases}$$

几种常见的给药方式

给药速率 $f_0(t)$ 和初始条件

1. 快速静脉注射

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12}+k_{13})c_1 + \dfrac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \dfrac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \dfrac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases}$$

t=0 瞬时注射剂量**D_0**的药物进入中心室, 血药浓度立即为**D_0/V_1**

$$f_0(t) = 0,\ c_1(0) = \frac{D_0}{V_1},\ c_2(0) = 0$$

$$c_1(t) = \frac{D_0}{V_1(\beta-\alpha)}[(k_{21}-\alpha)e^{-\alpha t} + (\beta-k_{21})e^{-\beta t}]$$

$$c_2(t) = \frac{D_0 k_{12}}{V_2(\beta-\alpha)}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = k_{12}+k_{21}+k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21}k_{13} \end{cases}$$

2. 恒速静脉滴注

$0 \le t \le T$ 药物以速率k_0进入中心室

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12} + k_{13})c_1 + \dfrac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \dfrac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \dfrac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases}$$

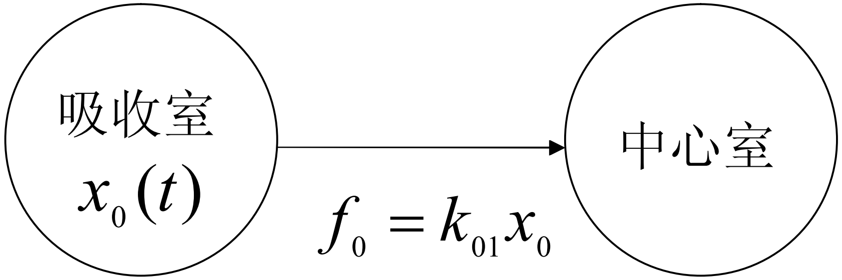
$$f_0(t) = k_0, c_1(0) = 0, c_2(0) = 0$$

$$\begin{cases} c_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} + \dfrac{k_0}{k_{13}V_1}, \qquad 0 \le t \le T \\ c_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} + \dfrac{k_{12}k_0}{k_{21}k_{13}V_2}, \quad 0 \le t \le T \\ A_2 = \dfrac{V_1(k_{12} + k_{13} - \alpha)}{k_{21}V_2}A_1, B_2 = \dfrac{V_1(k_{12} + k_{13} - \beta)}{k_{21}V_2}B_1 \end{cases}$$

$t > T$, $c_1(t)$和 $c_2(t)$按指数规律趋于零

3. 口服或肌肉注射

相当于药物(剂量D_0)先进入吸收室，吸收后进入中心室



吸收室药量$x_0(t)$

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12}+k_{13})c_1 + \dfrac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \dfrac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \dfrac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = -k_{01}x_0 \\ x_0(0) = D_0 \end{cases}$$

$$x_0(t) = D_0 e^{-k_{01}t} \qquad f_0(t) = k_{01}x_0(t) = D_0 k_{01} e^{-k_{01}t}$$

$$c_1(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ee^{-k_{01}t}$$

$$c_1(0) = 0, c_2(0) = 0 \Rightarrow A, B, E$$

参数估计

各种给药方式下的 $c_1(t), c_2(t)$

取决于参数$k_{12}, k_{21}, k_{13}, V_1, V_2$

t=0快速静脉注射D_0 ，在$t_i(i=1,2,\ldots n)$测得$c_1(t_i)$

$$c_1(t) = \frac{D_0}{V_1(\beta-\alpha)}[(k_{21}-\alpha)e^{-\alpha t} + (\beta - k_{21})e^{-\beta t}]$$

设$\alpha<\beta, t$充分大 ⇨ $c_1(t) = \dfrac{D_0(k_{21}-\alpha)}{V_1(\beta-\alpha)}e^{-\alpha t} = Ae^{-\alpha t}$

由较大的$t_i, c_1(t_i)$ 用最小二乘法定A, α

$$\tilde{c}_1(t) = c_1(t) - Ae^{-\alpha t} = Be^{-\beta t}$$

由较小的 $t_i, \tilde{c}_1(t_i)$用最小二乘法定B, β

参数估计

$t \to \infty, c_1, c_2 \to 0$ ⇨ 进入中心室的药物全部排除

$$D_0 = k_{13} V_1 \int_0^{\infty} c_1(t)\,dt$$ ⇨ $$D_0 = k_{13} V_1 \left(\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} \right)$$

$$c_1(0) = \frac{D_0}{V_1} = A + B$$ ⇨ $$k_{13} = \frac{\alpha\beta\ (A + B)}{\alpha B + \beta A}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k_{12} + k_{21} + k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21} k_{13} \end{cases}$$ ⇨ $$k_{21} = \frac{\alpha\beta}{k_{13}}$$

$$k_{12} = \alpha + \beta - k_{13} - k_{21}$$

5.5　香烟过滤嘴的作用

问题

- 过滤嘴的作用与它的材料和长度有什么关系

- 人体吸入的毒物量与哪些因素有关，其中哪些因素影响大，哪些因素影响小。

模型分析

- 分析吸烟时毒物进入人体的过程，建立吸烟过程的数学模型。

- 设想一个“机器人”在典型环境下吸烟，吸烟方式和外部环境认为是不变的。

模型假设

1）l_1~烟草长， l_2~过滤嘴长， $l = l_1 + l_2$，毒物量M均匀分布，密度$w_0=M/l_1$

2）点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比是$a':a$, $a'+a=1$

3）未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的(单位时间)吸收率分别是b和β

4）烟雾沿香烟穿行速度是常数v，香烟燃烧速度是常数u， $v>>u$

定性分析 Q ~ 吸一支烟毒物进入人体总量

$\beta\uparrow, l_2\uparrow, M\downarrow, a\downarrow, v\downarrow \Rightarrow Q\downarrow$ $b\uparrow, l_1\uparrow \Rightarrow Q\downarrow ?$ $u\uparrow \Rightarrow Q\uparrow\downarrow ?$

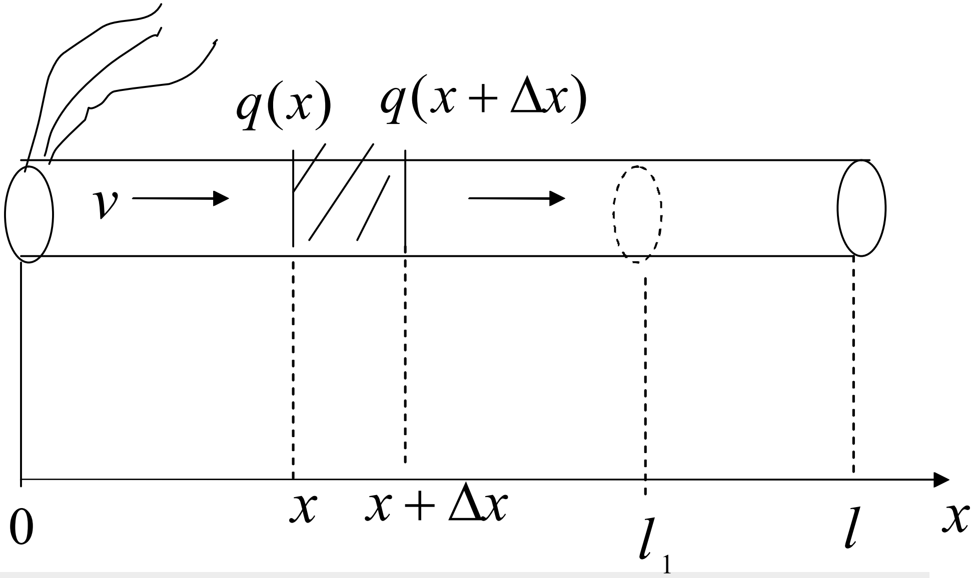
模型建立

***t*=0, *x*=0，点燃香烟**

***q*(*x*,*t*) ~ 毒物流量**

***w*(*x*,*t*) ~ 毒物密度**

$$w(x,0)=w_0$$



$$Q=\int_0^T q(l,t)\,dt\,,\quad T=l_1/u$$

1) 求*q*(*x*,0)=*q*(*x*)

$$q(x)-q(x+\Delta x)=\begin{cases} bq(x)\Delta\tau,\ 0\le x\le l_1, \\ \beta q(x)\Delta\tau,\ l_1\le x\le l, \end{cases}\quad \Delta\tau=\frac{\Delta x}{v}$$

$$\frac{dq}{dx}=\begin{cases} -\dfrac{b}{v}q(x),\ 0\le x\le l_1 \\ -\dfrac{\beta}{v}q(x),\ l_1\le x\le l \end{cases}$$

$$q(0)=aH_0$$
$$H_0=uw_0$$

1) 求*q*(*x*,0)=*q*(*x*)

$$q(x)=\begin{cases} aH_0 e^{-\frac{bx}{v}}, & 0\le x\le l_1 \\ aH_0 e^{-\frac{bl_1}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l \end{cases}$$

2) 求*q*(*l*,*t*)

t*时刻，香烟燃至 *x*=*ut

$$H(t)=uw(ut,t)$$

$$q(x,t)=\begin{cases} aH(t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & ut\le x\le l_1 \\ aH(t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l \end{cases}$$

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

3) 求$w(ut,t)$

$$w(x,t+\Delta t)-w(x,t)=b\frac{q(x,t)}{v}\Delta t$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{b}{v}auw(ut,t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}\\ w(x,0)=w_0\end{cases}$$

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right),\quad a'=1-a$$

4) 计算 Q

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right)$$

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

$$q(l,t)=\frac{auw_0}{a'}e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(e^{-\frac{but}{v}}-ae^{-\frac{abut}{v}}\right)$$

$$Q=\int_0^{l_1/u}q(l,t)dt=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right)$$

$$Q=aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r),$$

$$r=\frac{a'bl_1}{v},\varphi(r)=\frac{1-e^{-r}}{r}$$

结果分析

$$Q = aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r), \quad r = \frac{a'bl_1}{v}, \varphi(r) = \frac{1-e^{-r}}{r}$$

1）*Q*与*a,M*成正比， *aM*是毒物集中在*x=l*处的吸入量

2) $e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ **~过滤嘴因素，*β*, *l*₂~ 负指数作用**

$aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ **是毒物集中在*x*=*l*₁处的吸入量**

3）*φ*(*r*)~ 烟草的吸收作用

烟草为什么有作用?

$$r = \frac{a'bl_1}{v} << 1 \qquad \varphi(r) \doteq 1 - r/2$$

$$Q \doteq aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1 - \frac{a'bl_1}{2v}\right)$$

b, *l*₁~ 线性作用

结果分析

4) 与另一支不带过滤嘴的香烟比较，w_0, b, a, v, l 均相同，吸至 $x=l_1$ 扔掉

带过滤嘴

$$Q_1 = \frac{a w_0 v}{a' b} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a' b l_1}{v}} \right)$$

不带过滤嘴

$$Q_2 = \frac{a w_0 v}{a' b} e^{-\frac{b l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a' b l_1}{v}} \right)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = e^{-\frac{(\beta - b) l_2}{v}}$$

$$\beta > b \Rightarrow Q_1 < Q_2$$

提高 β-b 与加长 l_2，效果相同

5.6 人口预测和控制

- 年龄分布对于人口预测的重要性
- 只考虑自然出生与死亡，不计迁移

人口发展方程

$F(r,t)$ ~ 人口分布函数 (年龄 $< r$ 的人口)

$p(r,t)$ ~ 人口密度函数

$N(t)$ ~ 人口总数

$r_m\ (\to \infty)$ ~ 最高年龄

$$F(0,t) = 0,\ F(r_m,t) = N(t)$$

$$p(r,t) = \frac{\partial F}{\partial r}$$

人口发展方程

$\mu(r,t) \sim$ 死亡率

t, 年龄 $[r, r + dr]$人数 $-$ $t + dt$, 年龄 $[r + dr_1, r + dr_1 + dr]$人数 $=$ $(t, t + dt)$内死亡人数

$dt = dr_1$

$$p(r,t)dr - p(r+dr_1, t+dt)dr = \mu(r,t)p(r,t)drdt$$

$$[p(r+dr_1, t+dt) - p(r, t+dt)] + [p(r, t+dt) - p(r,t)]$$

$$= -\mu(r,t)p(r,t)dt, \qquad dt = dr_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)p(r,t)$$

一阶偏微分方程

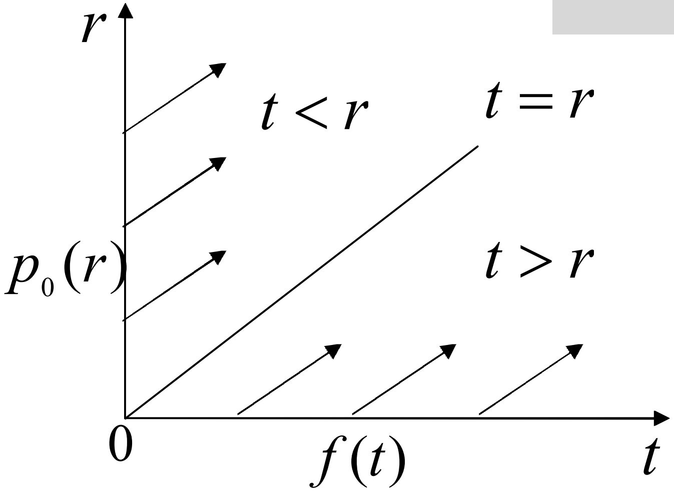
人口发展方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r}+\dfrac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)\,p(r,t) \\ p(r,0)=p_0(r),\ \ r\ge 0 \\ p(0,t)=f(t),\ \ \ t\ge 0 \end{cases}$$

~已知函数（人口调查）

~生育率（控制人口手段）

$$\mu(r,t)=\mu(r)\ \Rightarrow\ p(r,t)=\begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds},\ 0\le t\le r \\ f(t-r)e^{-\int_0^r\mu(s)ds},\ \ \ t>r \end{cases}$$



$$F(r,t)=\int_0^r p(s,t)ds$$

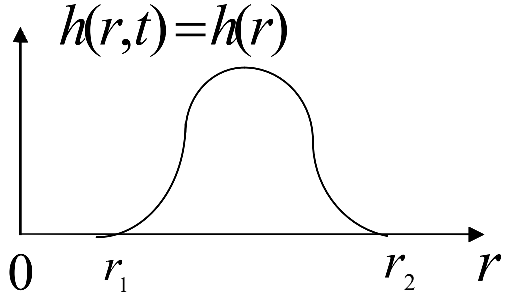
$$N(t)=\int_0^{r_m} p(s,t)ds$$

生育率的分解

$k(r,t) \sim$ (女性)性别比函数

$b(r,t) \sim$ (女性)生育数　　$[r_1, r_2] \sim$ 育龄区间

$$f(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$



$$b(r,t) = \beta(t)h(r,t)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)dr = 1$$

h~生育模式

$$\beta(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t)dr$$

β~总和生育率

$$f(t) = \beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$

人口发展方程和生育率

$$f(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$

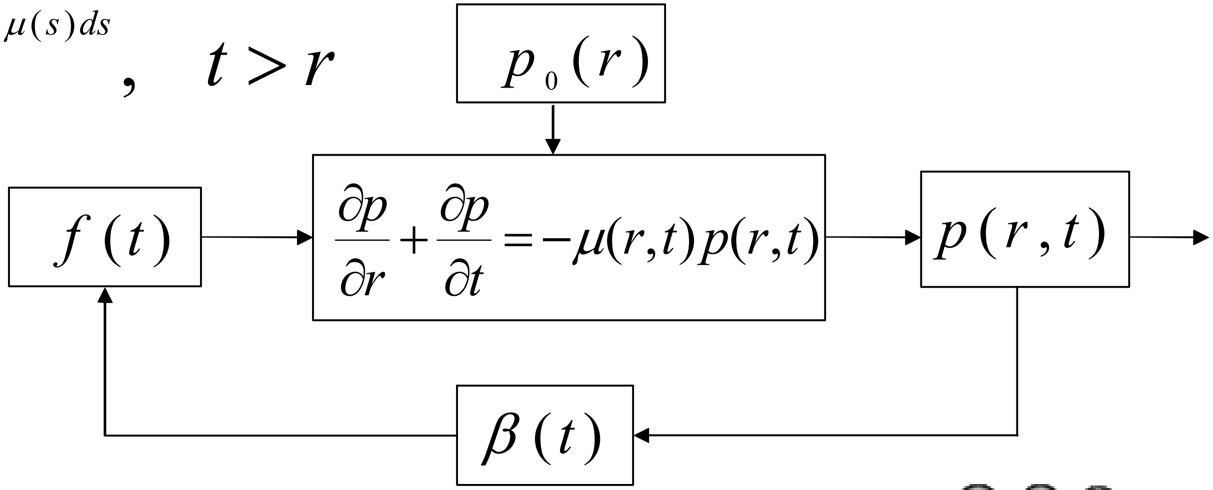
$\beta(t)$ ~总和生育率——控制生育的多少

$h(r,t)$ ~生育模式——控制生育的早晚和疏密

$$p(r,t)=\begin{cases}p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds},0\le t\le r\\ f(t-r)e^{-\int_0^{r}\mu(s)ds},\quad t>r\end{cases}$$

- 正反馈系统

- 滞后作用很大



$$\begin{tikzcd}
 & p_0(r) \arrow[d] & \\
f(t) \arrow[r] & \frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t) \arrow[r] & p(r,t) \arrow[r] \arrow[dl, bend left] & {} \\
 & \beta(t) \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}$$

人口指数

1）人口总数 $$N(t)=\int_0^{r_m} p(r,t)dr$$

2）平均年龄 $$R(t)=\frac{1}{N(t)}\int_0^{r_m} rp(r,t)dr$$

3）平均寿命 $$S(t)=\int_t^{\infty} e^{-\int_0^{\tau-t}\mu(r,t)dr}d\tau$$

t时刻出生的人，死亡率按 $\mu(r,t)$ 计算的平均存活时间

4）老龄化指数 $$\omega(t)=R(t)/S(t)$$

控制生育率 ⇒ 控制 $N(t)$不过大

控制 $\omega(t)$不过高

5.7 烟雾的扩散与消失

现象和问题

炮弹在空中爆炸，烟雾向四周扩散，形成圆形不透光区域。

不透光区域不断扩大，然后区域边界逐渐明亮，区域缩小，最后烟雾消失。

建立模型描述烟雾扩散和消失过程，分析消失时间与各因素的关系。

问题分析

无穷空间由瞬时点源导致的扩散过程，用二阶偏微分方程描述烟雾浓度的变化。

观察的烟雾消失与烟雾对光线的吸收，以及仪器对明暗的灵敏程度有关。

模型假设

1）烟雾在无穷空间扩散，不受大地和风的影响；扩散服从热传导定律。

2）光线穿过烟雾时光强的减少与烟雾浓度成正比；无烟雾的大气不影响光强。

3）穿过烟雾进入仪器的光线只有明暗之分，明暗界限由仪器灵敏度决定。

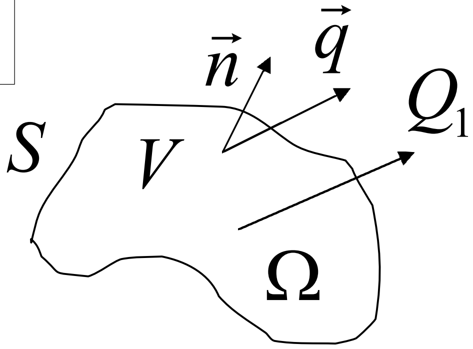
模型建立

1）烟雾浓度 $C(x,y,z,t)$ 的变化规律

热传导定律：单位时间通过单位法向面积的流量与浓度梯度成正比

$$\vec{q} = -k \cdot gradC$$

1）烟雾浓度 $C(x,y,z,t)$ 的变化规律



$[t,t+\Delta t]$通过Ω流量 $Q_1=\int_t^{t+\Delta t}\iint_s \vec{q}\cdot\vec{n}\,d\sigma dt$

Ω内烟雾改变量 $Q_2=\iiint_V [C(x,y,z,t)-C(x,y,z,t+\Delta t)]dV$

曲面积分的奥氏公式 $$\iint_s \vec{q}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_V div\vec{q}\,dV$$

$$Q_1=Q_2$$

$$\vec{q}=-k\cdot gradC$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=k[div(gradC)]=k\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)$$

1）烟雾浓度 $C(x,y,z,t)$ 的变化规律

$$\frac{\partial C}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right),\quad -\infty<x,y,z<\infty,\ \ t>0$$

初始条件 $C(x,y,z,0)=Q\delta(x,y,z)$

Q~炮弹释放的烟雾总量

δ~单位强度的点源函数

$$C(x,y,z,t)=\frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}$$

- 对任意t, C的等值面是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$； R↑→C↓

- 仅当 $t\to\infty$, 对任意点(x,y,z), $C\to 0$

2）穿过烟雾光强的变化规律

$I(l)\sim$ 沿 l 方向的光强

$C(l)\sim$ 沿 l 方向的烟雾浓度

光强的减少与烟雾浓度成正比

$$\frac{dI}{dl}=-\alpha C(l)I(l)$$

$I(l_0)=I_0$ 未进入烟雾$(l\le l_0)$的光强为I_0

⇨ $$I(l)=I_0e^{-\alpha\int_{l_0}^{l}C(s)ds}$$

3）仪器灵敏度与烟雾明暗界限

$$I(l) = I_0 e^{-\alpha \int_{l_0}^{l} C(s)\, ds}$$

烟雾浓度连续变化 ⇒ 不透光区域有扩大、缩小、消失的过程

烟雾中光强连续变化 ⇑

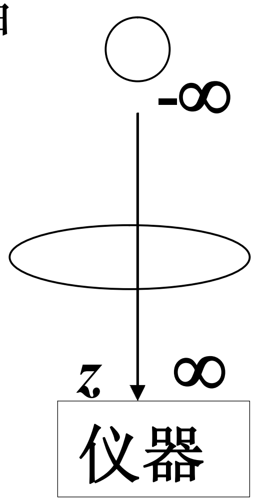
穿过烟雾进入仪器的光线只有明暗之分，明暗界限由仪器灵敏度决定。

μ ~ 仪器灵敏度，当 $I / I_0 < 1 - \mu$，观测结果为暗

设光源在z=-∞, 仪器在z=∞,则观测到的明暗界限为

$$e^{-\alpha \int_{-\infty}^{\infty} C(x,y,z,t) dz} = 1 - \mu$$

~不透光区域边界



4）不透光区域边界的变化规律

$$C(x,y,z,t)=\frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}$$

$$e^{-\alpha\int_{-\infty}^{\infty}C(x,y,z,t)dz}=1-\mu$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}C(x,y,z,t)dz=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\mu}\approx\frac{\mu}{\alpha}$$ （μ很小）

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/a}dx=\sqrt{\pi a}\quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty}C(x,y,z,t)dz=\frac{Q}{4\pi kt}e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}$$

$$\frac{Q}{4\pi kt}e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}=\frac{\mu}{\alpha}$$

对任意t, 不透光区域边界是圆周

$$x^2+y^2=r^2$$

不透光区域边界半径

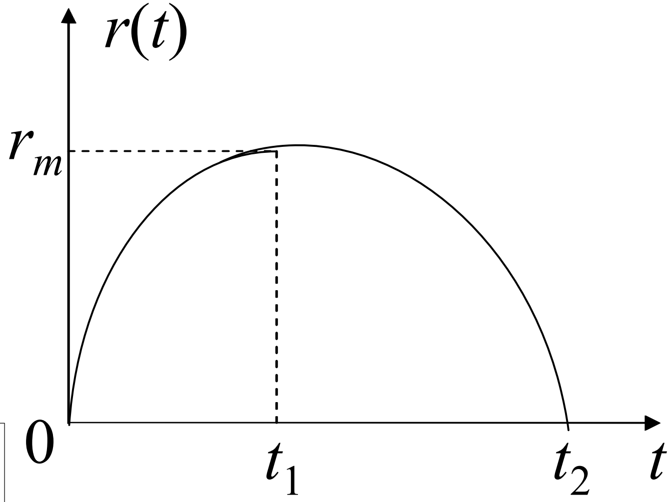
$$r(t)=\sqrt{4kt\ \ln\frac{\alpha Q}{4\pi k\mu t}}$$

结果分析 $r(t) = \sqrt{4kt \ln \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu t}}$

$$t = t_1 = \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu e}, \quad r = r_m = \sqrt{\frac{\alpha Q}{\pi \mu e}} \text{(最大值)}$$

$$t = t_2 = \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu}, \quad r = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_2 = t_1 \cdot e \doteq 2.7 t_1}$$



观测到不透光区域边界达到最大的时刻t_1，可以预报烟雾消失的时刻t_2

$$\alpha\uparrow, Q\uparrow, \mu\downarrow \Rightarrow t_1\uparrow, r_m\uparrow \qquad k\downarrow \Rightarrow t_1\uparrow$$

5.8　万有引力定律的发现

背景

航海业发展

天文观测精确

“地心说”动摇

哥白尼：“日心说”

伽里略：落体运动

开普勒：行星运动三定律 ⇨ 变速运动的计算方法

牛顿：一切运动有力学原因

牛顿运动三定律

牛顿：研究变速运动，发明微积分（流数法）

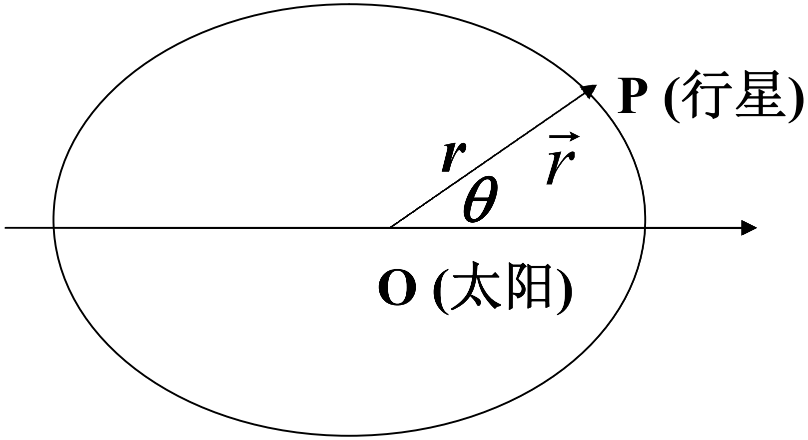
开普勒三定律

牛顿运动第二定律

⇨ 万有引力定律

《自然科学之数学原理》(1687)

模型假设



极坐标系 (r,θ)　　　太阳 (0,0)

行星位置：向径 $\vec r(t)\,(r(t),\theta(t))$

1. 行星轨道

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad p=\frac{b^2}{a},\quad b^2=a^2(1-e^2)$$

a~长半轴, **b**~短半轴, **e**~离心率

2. 单位时间 $\vec r$ 扫过面积为常数 *A*

$$r^2\dot\theta/2=A$$

3. 行星运行周期 *T*

$$T^2=\lambda a^3$$

λ~绝对常数

4. 行星运行受力 $\vec f$

$$\vec f=m\ddot{\vec r}$$

m ~ 行星质量

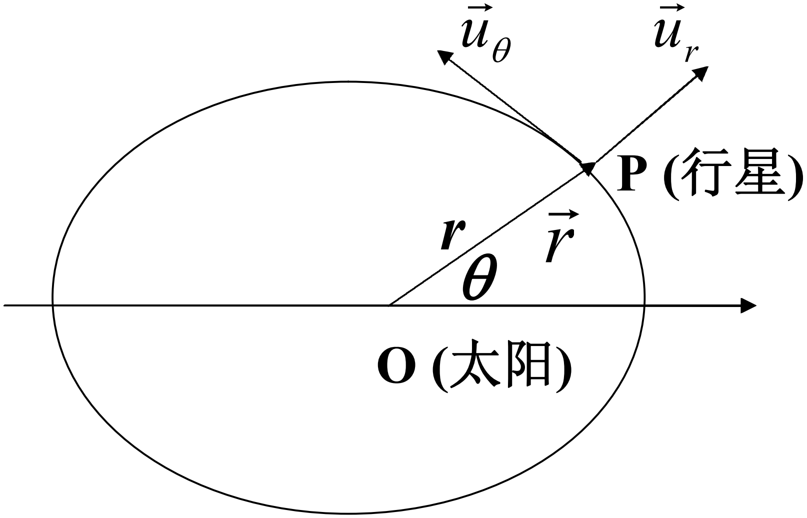
模型建立

向径 $\vec{r}$ 的基向量

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$



⇩

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

⇨

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$r^2\dot{\theta}/2 = A$ ⇨ $\dot{\theta} = \dfrac{2A}{r^2}, \ddot{\theta} = \dfrac{-4A\dot{r}}{r^3}$ $\quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ $\quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r$

⇩

$r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ ⇨ $\dot{r} = \dfrac{2Ae\sin\theta}{p}, \ddot{r} = \dfrac{4A^2(p-r)}{pr^3}$ ⇨ $\ddot{\vec{r}} = -\dfrac{4A^2}{pr^2}\vec{u}_r$

⇩

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

⇨

$$\vec{f} = -\frac{4A^2m}{pr^2}\vec{r}_0, \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$

模型建立

$$\vec{f} = -\frac{4A^2 m}{pr^2}\vec{r}_0, \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$

需证明 $4A^2/p = kM$

（与哪一颗行星无关）

A~单位时间 $\vec{r}$ 扫过面积

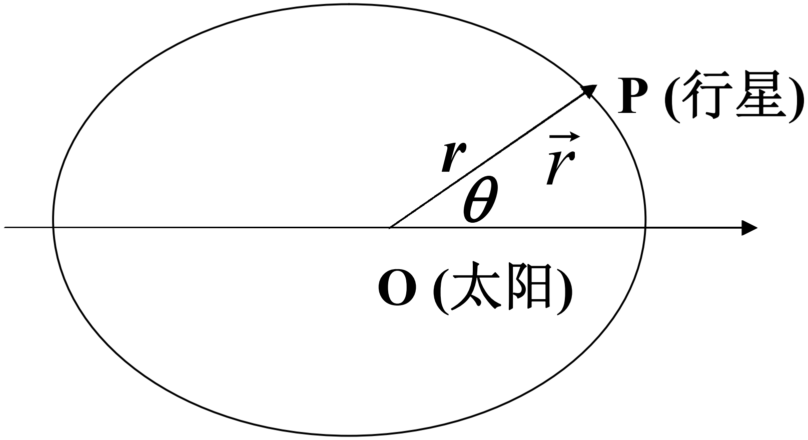
⇨ $TA = \pi ab$

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad b^2 = a^2(1-e^2)$$

⇨ $A^2 / p = \pi^2 / \lambda$

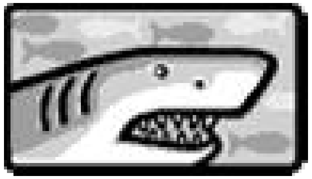
万有引力定律

$$\vec{f} = -\frac{kMm}{r^2}\vec{r}_0$$

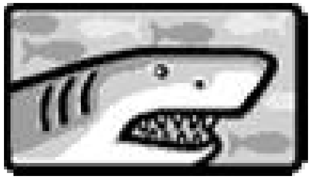


$$T^2 = \lambda a^3$$

$4\pi^2 / \lambda = kM$ **(习题)**



第六章　稳定性模型

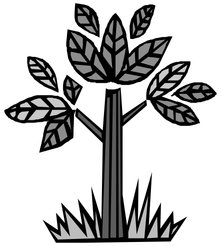


稳定性模型

- 对象仍是动态过程，而建模目的是研究时间充分长以后过程的变化趋势 ——平衡状态是否稳定。

- 不求解微分方程，而是用微分方程稳定性理论研究平衡状态的稳定性。

6.1　捕鱼业的持续收获



背景

- 再生资源（渔业、林业等）与
  非再生资源（矿业等）

- 再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益。

问题及分析

- 在捕捞量稳定的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳。

- 如果使捕捞量等于自然增长量，渔场鱼量将保持不变，则捕捞量稳定。

产量模型

$x(t)$ ~ 渔场鱼量

假设

- 无捕捞时鱼的自然增长服从 **Logistic**规律

$$\dot{x}(t) = f(x) = rx(1 - \frac{x}{N})$$

r~固有增长率, ***N***~最大鱼量

- 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比

h*(*x*)=*Ex*, *E~捕捞强度

建模

记 $F(x) = f(x) - h(x)$

捕捞情况下
渔场鱼量满足

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex$$

- 不需要求解***x*(*t*)**, 只需知道***x*(*t*)**稳定的条件

一阶微分方程的平衡点及其稳定性

$\dot{x} = F(x) \quad (1)$　　一阶非线性（自治）方程

$F(x)=0$的根x_0~微分方程的平衡点

$$\dot{x}\Big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$$

设$x(t)$是方程的解，若从x_0某邻域的任一初值出发，

都有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_0$，称$x_0$是方程(1)的稳定平衡点

不求$x(t)$, 判断x_0稳定性的方法——直接法

(1)的近似线性方程　$\dot{x} = F'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$

$F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$稳定(对(2),(1))

$F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$不稳定(对(2),(1))

产量模型 $\dot{x}(t) = F(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex$

$F(x) = 0$ ⇨ 平衡点 $x_0 = N(1 - \frac{E}{r}),\ \ x_1 = 0$

稳定性判断 $F'(x_0) = E - r,\quad F'(x_1) = r - E$

$E < r \Rightarrow F'(x_0) < 0, F'(x_1) > 0$ ⇨ x_0稳定,x_1不稳定

$E > r \Rightarrow F'(x_0) > 0, F'(x_1) < 0$ ⇨ x_0不稳定,x_1稳定

E~捕捞强度 **r~固有增长率**

x_0稳定, 可得到稳定产量 **x_1稳定, 渔场干枯**

产量模型

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使产量最大

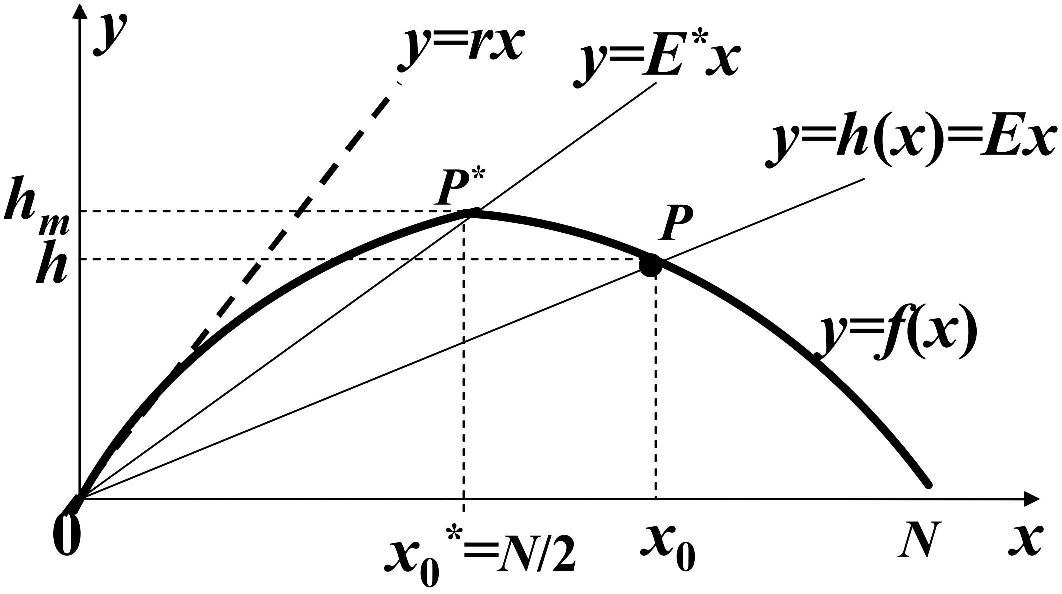
图解法

$$F(x) = f(x) - h(x)$$

$$f(x) = rx(1 - \frac{x}{N})$$

$$h(x) = Ex$$

$F(x)=0 \Rightarrow$ f与h交点P



$E < r \Rightarrow x_0$稳定

P的横坐标 x_0~平衡点

P的纵坐标 h~产量

产量最大 $P^*(x_0^* = N/2, h_m = rN/4)$ $E^* = h_m / x_0^* = r/2$

控制渔场鱼量为最大鱼量的一半

效益模型

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使效益最大.

假设

- 鱼销售价格p
- 单位捕捞强度费用c

收入 $T = ph(x) = pEx$　　支出 $S = cE$

单位时间利润

$$R = T - S = pEx - cE$$

稳定平衡点 $x_0 = N(1 - E/r)$

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE$$

求E使$R(E)$最大

$$E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN}) < E^* = \frac{r}{2}$$

渔场鱼量 $x_R = N(1 - \frac{E_R}{r}) = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}$　　$h_R = \frac{rN}{4}(1 - \frac{c^2}{p^2N^2})$

捕捞过度

- 封闭式捕捞追求利润**$R(E)$**最大 $E_R = \frac{r}{2}(1-\frac{c}{pN})$
- 开放式捕捞只求利润**$R(E) > 0$**

$$R(E)=T(E)-S(E)=pNE(1-\frac{E}{r})-cE \overset{令}{=} 0 \Rightarrow \boxed{E_s = r(1-\frac{c}{pN})}$$

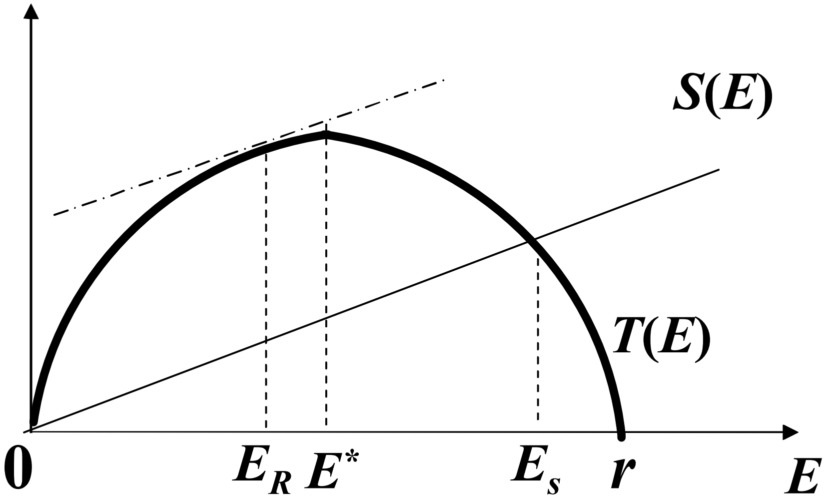
$R(E)$=0时的捕捞强度(临界强度) E_s=2E_R

临界强度下的渔场鱼量

$$x_s = N(1-\frac{E_s}{r}) = \frac{c}{p}$$

$$p\uparrow, c\downarrow \Rightarrow E_s\uparrow, x_s\downarrow$$

捕捞过度



6.2　军备竞赛

目的

- 描述双方(国家或国家集团)军备竞赛过程
- 解释(预测)双方军备竞赛的结局

假设

1）由于相互不信任，一方军备越大，另一方军备增加越快；

2）由于经济实力限制，一方军备越大，对自己军备增长的制约越大；

3）由于相互敌视或领土争端，每一方都存在增加军备的潜力。

进一步假设

1）2）的作用为线性；3）的作用为常数

建模　　**$x(t)$**~甲方军备数量，**$y(t)$**~乙方军备数量

$$\dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g$$

$$\dot{y}(t) = lx - \beta y + h$$

α, β ~ 本方经济实力的制约；

k, l ~ 对方军备数量的刺激；

g, h ~ 本方军备竞赛的潜力。

军备竞赛的结局 ⇨ $t \to \infty$时的$x(t)$，$y(t)$

⇨ 微分方程的平衡点及其稳定性

线性常系数微分方程组 $\begin{aligned}\dot{x}(t)&=ax+by\\ \dot{y}(t)&=cx+dy\end{aligned}$ 的平衡点及其稳定性

平衡点**$P_0(x_0,y_0)$=(0,0)** ~代数方程 $\begin{aligned}ax+by&=0\\ cx+dy&=0\end{aligned}$ 的根

若从**P_0**某邻域的任一初值出发，都有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=x_0$，$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=y_0$，称**$P_0$**是微分方程的稳定平衡点

记系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

特征方程 $\det(A-\lambda I)=0$

$$\begin{cases}\lambda^2+p\lambda+q=0\\ p=-(a+d)\\ q=\det A\end{cases}$$

特征根

$$\lambda_{1,2}=(-p\pm\sqrt{p^2-4q})/2$$

线性常系数微分方程组

$$\dot{x}(t) = ax + by$$
$$\dot{y}(t) = cx + dy$$

的平衡点及其稳定性

平衡点 $\boldsymbol{P_0(0,0)}$　　特征根 $\lambda_{1,2} = (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})/2$

微分方程一般解形式 $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_{1,2}$为负数或有负实部

⇕

$\boldsymbol{p > 0}$ 且 $\boldsymbol{q > 0}$ ⇨ 平衡点 $\boldsymbol{P_0(0,0)}$稳定

$\boldsymbol{p < 0}$ 或 $\boldsymbol{q < 0}$ ⇨ 平衡点 $\boldsymbol{P_0(0,0)}$不稳定

军备竞赛

模型

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h\end{cases}$$

平衡点

$$x_0 = \frac{kh+\beta g}{\alpha\beta - kl}, \qquad y_0 = \frac{lg+\alpha h}{\alpha\beta - kl}$$

稳定性判断

系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{bmatrix}$

$$p = -(-\alpha-\beta) = \alpha+\beta > 0$$

$$q = \det A = \alpha\beta - kl$$

平衡点(x_0, y_0)稳定的条件 $p > 0, q > 0$

⇨ $\alpha\beta > kl$

模型的定性解释

模型 $$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases}$$

平衡点 $x_0 = \dfrac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, \quad y_0 = \dfrac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl}$

双方军备稳定(时间充分长后趋向有限值)的条件

$$\alpha\beta > kl$$

α, β ~ 本方经济实力的制约；

k, l ~ 对方军备数量的刺激；

g, h ~ 本方军备竞赛的潜力。

1) 双方经济制约大于双方军备刺激时，军备竞赛才会稳定，否则军备将无限扩张。

2) 若$g=h=0$, 则 $x_0=y_0=0$, 在 $\alpha\beta > kl$ 下 $x(t), y(t)\to 0$, 即友好邻国通过裁军可达到永久和平。

模型的定性解释

模型 $$\begin{cases}\dot{x}(t)=-\alpha x+ky+g\\ \dot{y}(t)=lx-\beta y+h\end{cases}$$

α,β～本方经济实力的制约；

k, l～对方军备数量的刺激；

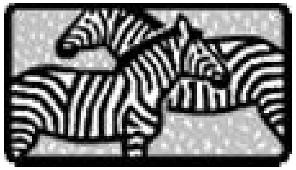
g, h～本方军备竞赛的潜力。

3）若 **g,h** 不为零，即便双方一时和解，使某时 **$x(t), y(t)$** 很小，但因 $\dot{x}>0,\dot{y}>0$，也会重整军备。

4）即使某时一方(由于战败或协议)军备大减, 如 **$x(t)=0$**，也会因 $\dot{x}=ky+g$ 使该方重整军备，

即存在互不信任($k\neq 0$) 或固有争端($g\neq 0$) 的单方面裁军不会持久。

6.3　种群的相互竞争



- 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。
- 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。
- 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。

模型假设

- 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从**Logistic**规律;

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1}) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 (1 - \frac{x_2}{N_2})$$

- 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比；甲对乙有同样的作用。

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1) 的 σ_1 倍。

$\sigma_1 > 1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙大于甲

⇨ 乙的竞争力强

模型 $\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$ $\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$

模型分析 $t\to\infty$时$x_1(t)$, $x_2(t)$的趋向 **(平衡点及其稳定性)**

(二阶)非线性(自治)方程 $\dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2)$ $\dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2)$ **的平衡点及其稳定性**

平衡点$\boldsymbol{P_0(x_1^0, x_2^0)}$ ~ 代数方程 $\begin{aligned}f(x_1,x_2)=0\\ g(x_1,x_2)=0\end{aligned}$ 的根

若从$\boldsymbol{P_0}$某邻域的任一初值出发，都有 $\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t)=x_1^0$, $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=x_2^0$, 称$\boldsymbol{P_0}$是微分方程的稳定平衡点

判断$P_0\ (x_1^0,x_2^0)$ 稳定性的方法——直接法

$$\dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2) \quad (1)$$

(1)的近似线性方程

$$\dot{x}_1(t)=f_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+f_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0)$$
$$\dot{x}_2(t)=g_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+g_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0) \quad (2)$$

$$A=\left.\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}\right|_{P_0}$$

$$\begin{cases} \lambda^2+p\lambda+q=0 \\ p=-(f_{x_1}+g_{x_2})\big|_{P_0} \\ q=\det A \end{cases}$$

$p>0$ 且 $q>0$

平衡点 P_0稳定(对2,1)

$p<0$ 或 $q<0$

平衡点 P_0不稳定(对2,1)

模型

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)\equiv r_1x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \\ g(x_1,x_2)\equiv r_2x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \end{cases}$$

平衡点： $P_1(N_1,0),\ P_2(0,N_2),$

$$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right),P_4(0,0)$$

仅当$\sigma_1, \sigma_2<1$或$\sigma_1, \sigma_2>1$时，P_3才有意义

平衡点稳定性分析

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1 \left(1 - \dfrac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \dfrac{x_2}{N_2}\right) \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \dfrac{x_1}{N_1} - \dfrac{x_2}{N_2}\right) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{x1} & f_{x2} \\ g_{x1} & g_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1\left(1 - \dfrac{2x_1}{N_1} - \dfrac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\dfrac{r_1\sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\dfrac{r_2\sigma_2 x_2}{N_1} & r_2\left(1 - \dfrac{\sigma_2 x_1}{N_1} - \dfrac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p = -(f_{x1} + g_{x2})\Big|_{p_i}, \quad q = \det A\Big|_{p_i}, \quad i = 1,2,3,4$$

平衡点 P_i 稳定条件： $p > 0$ 且 $q > 0$

种群竞争模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$p_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(1-\sigma_2)$	$-r_1r_2(1-\sigma_2)$	$\sigma_2>1, \sigma_1<1$
$p_2(0,N_2)$	$-r_1(1-\sigma_1)+r_2$	$-r_1r_2(1-\sigma_1)$	$\sigma_1>1, \sigma_2<1$
$p_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1, \sigma_2<1$
$p_4(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	$r_1 r_2$	不稳定

P_1, P_2 是一个种群存活而另一灭绝的平衡点

P_3 是两种群共存的平衡点

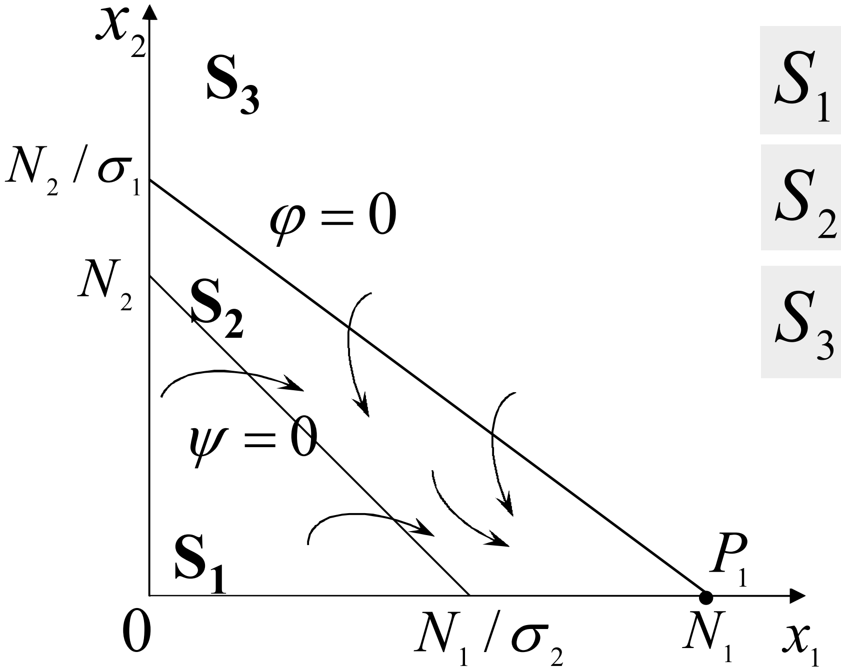
P_1稳定的条件 **$\sigma_1<1$?**

平衡点稳定性的相轨线分析

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \varphi(x_1,x_2)=1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \psi(x_1,x_2)=1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}$$

(1) $\sigma_2>1$, $\sigma_1<1$



$S_1:\varphi>0,\psi>0$

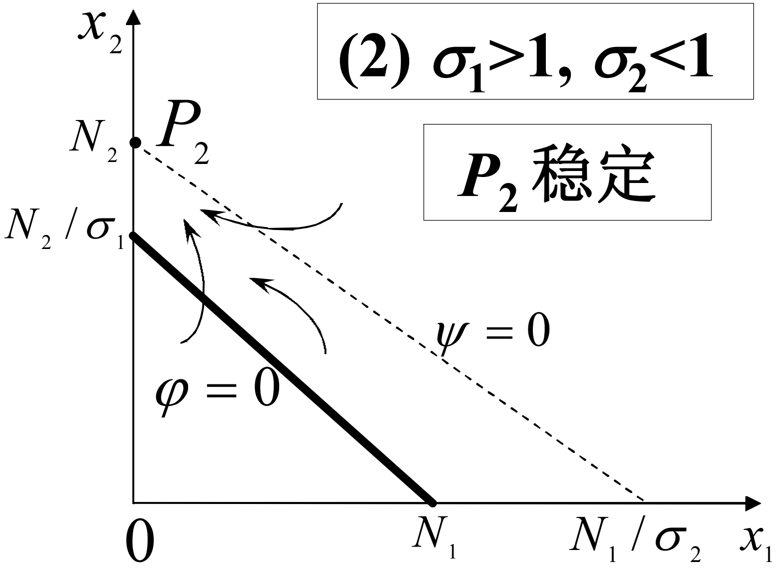
$S_1:\dot{x}_1>0,\dot{x}_2>0$ ⇨ $t\uparrow\rightarrow x_1,x_2\uparrow$

$S_2:\dot{x}_1>0,\dot{x}_2<0$ ⇨ $t\uparrow\rightarrow x_1\uparrow,x_2\downarrow$

$S_3:\dot{x}_1<0,\dot{x}_2<0$ ⇨ $t\uparrow\rightarrow x_1,x_2\downarrow$

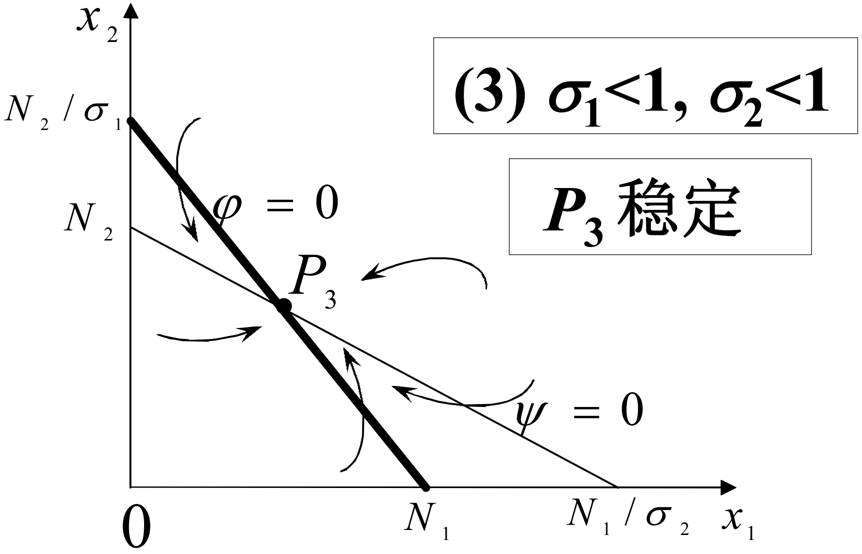
从任意点出发(t=0)的相轨线都趋向$P_1(N_1,0)$ ($t\to\infty$)

$P_1(N_1,0)$是稳定平衡点



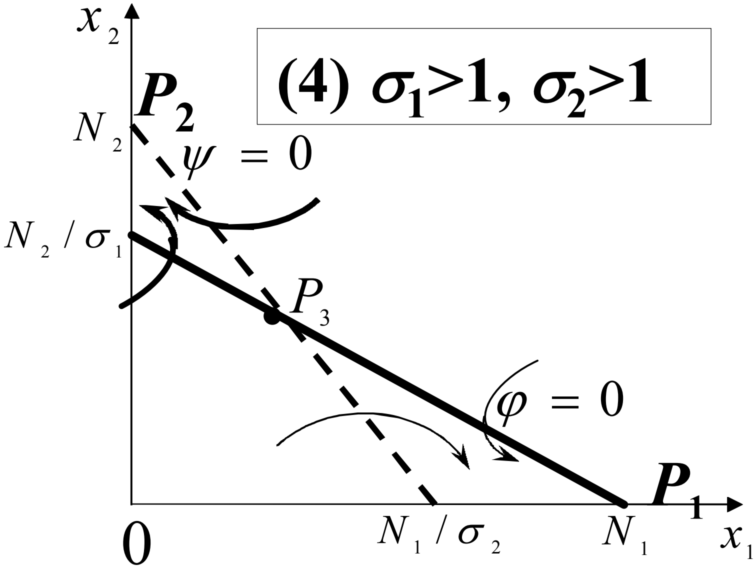
(2) $\sigma_1>1,\ \sigma_2<1$

P_2稳定



(3) $\sigma_1<1,\ \sigma_2<1$

P_3稳定



(4) $\sigma_1>1,\ \sigma_2>1$

有相轨线趋向P_1

有相轨线趋向P_2

⇨ P_1, P_2都不(局部)稳定

P_1稳定的条件：直接法$\sigma_2>1$

加上与(4)相区别的 $\sigma_1<1$

⇨ P_1全局稳定

结果解释

- P_1稳定的条件：$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1)的σ_1 倍。

$\sigma_1 <1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙小于甲 $\Rightarrow$乙的竞争力弱

$\sigma_2>1 \Rightarrow$甲的竞争力强

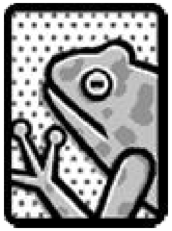
甲达到最大容量，乙灭绝

- P_2稳定的条件：$\sigma_1>1,\ \sigma_2<1$

- P_3稳定的条件：$\sigma_1<1,\ \sigma_2<1$

通常$\sigma_1 \approx 1/\sigma_2$，$P_3$稳定条件不满足

6.4　种群的相互依存



甲乙两种群的相互依存有三种形式

1) 甲可以独自生存，乙不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

2) 甲乙均可以独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

3) 甲乙均不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

模型假设

- 甲可以独自生存，数量变化服从**Logistic**规律；甲乙一起生存时乙为甲提供食物、促进增长。

- 乙不能独自生存；甲乙一起生存时甲为乙提供食物、促进增长；乙的增长又受到本身的阻滞作用 (服从**Logistic**规律)。

模型

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$

乙为甲提供食物是甲消耗的σ_1 倍

$$\dot{x}_2(t)=r_2 x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

甲为乙提供食物是乙消耗的σ_2 倍

种群依存模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(\sigma_2-1)$	$-r_1r_2(\sigma_2-1)$	$\sigma_2<1,\sigma_1\sigma_2<1$
$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1,\sigma_2>1,$ $\sigma_1\sigma_2<1$
$P_3(0,0)$	$-r_1+r_2$	$-r_1r_2$	不稳定

P_2是甲乙相互依存而共生的平衡点

平衡点P_2稳定性的相轨线

$$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

$$\dot{x}_1(t_1)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)=r_1x_1\varphi(x_1,x_2)$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)=r_2x_2\psi(x_1,x_2)$$

$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1,\ \sigma_1\sigma_2<1$

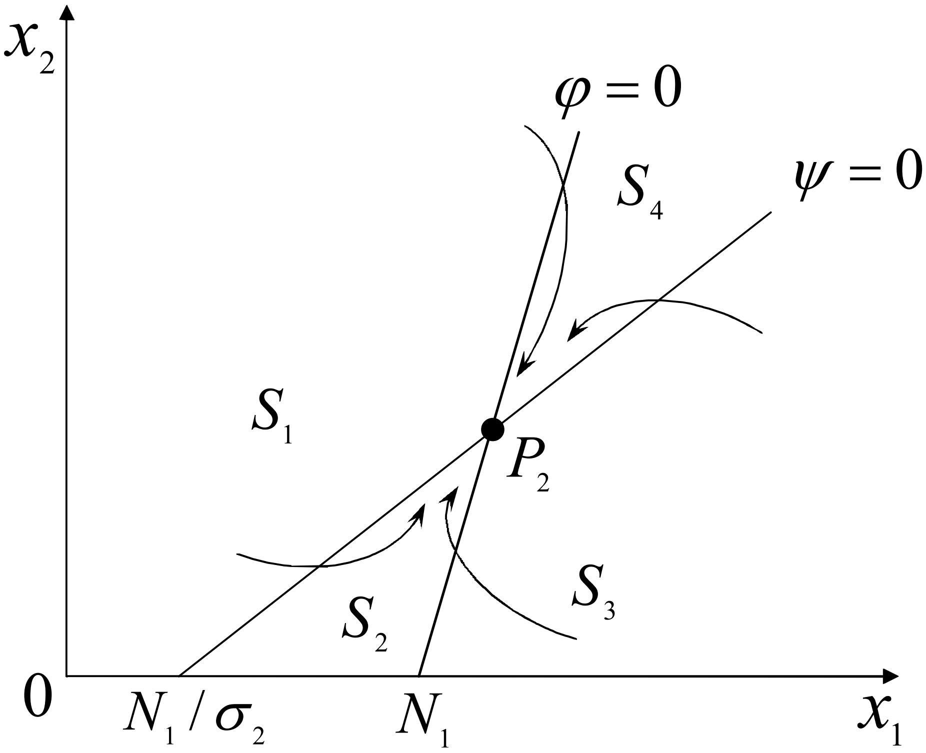
$S_1:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2<0;$

$S_2:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2>0;$

$S_3:\dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2>0;$

$S_4:\dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2<0.$

P_2稳定



结果解释

甲可以独自生存

乙不能独立生存

$$\dot{x}_1(t_1)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

P_2稳定条件：
$\sigma_1<1$, $\sigma_2>1$, $\sigma_1\sigma_2<1$

$\sigma_2>1$ ~ 甲必须为乙提供足够的食物——甲为乙提供的食物是乙消耗的 **σ_2** 倍

$\sigma_1\sigma_2<1$ ~ $\sigma_2>1$ 前提下**P_2**存在的必要条件

$\sigma_1<1$ ~ $\sigma_2>1$, $\sigma_1\sigma_2<1$ 的需要，且**σ_1**必须足够小，才能在**$\sigma_2>1$**条件下使**$\sigma_1\sigma_2<1$** 成立

6.5　种群的弱肉强食
(食饵–捕食者模型)

- 种群甲靠丰富的天然资源生存，种群乙靠捕食甲为生，形成食饵–捕食者系统，如食用鱼和鲨鱼，美洲兔和山猫，害虫和益虫。

- 模型的历史背景——一次世界大战期间地中海渔业的捕捞量下降(食用鱼和鲨鱼同时捕捞)，但是其中鲨鱼的比例却增加，为什么？

食饵-捕食者模型(Volterra)

食饵（甲）数量 **$x(t)$**, 捕食者（乙）数量 **$y(t)$**

甲独立生存的增长率 **r** $\dot{x}=rx$

乙使甲的增长率减小，
减小量与 y成正比

$$\dot{x}(t)=(r-ay)x=rx-axy \quad (1)$$

乙独立生存的死亡率 **d** $\dot{y}=-dy$

甲使乙的死亡率减小，
减小量与 x成正比

$$\dot{y}(t)=-(d-bx)y=-dy+bxy \quad (2)$$

a ~捕食者掠取食饵能力 **b** ~食饵供养捕食者能力

方程**(1),(2)** 无解析解

Volterra模型的平衡点及其稳定性

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy$$

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy$$

稳定性分析

$$A = \begin{bmatrix} r - ax & -ax \\ by & -d + bx \end{bmatrix}$$

平衡点

$$P(d/b, r/a),\ P'(0,0)$$

$$A\big|_P = \begin{bmatrix} 0 & -ad/b \\ br/a & 0 \end{bmatrix}$$

$p = 0,\ q > 0$

P: 临界状态

$$A\big|_{P'} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

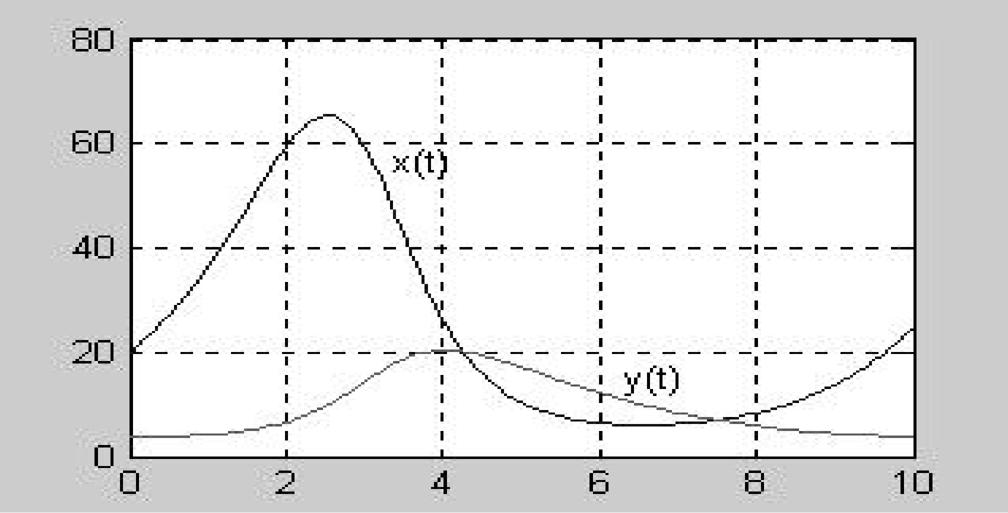
$q < 0$

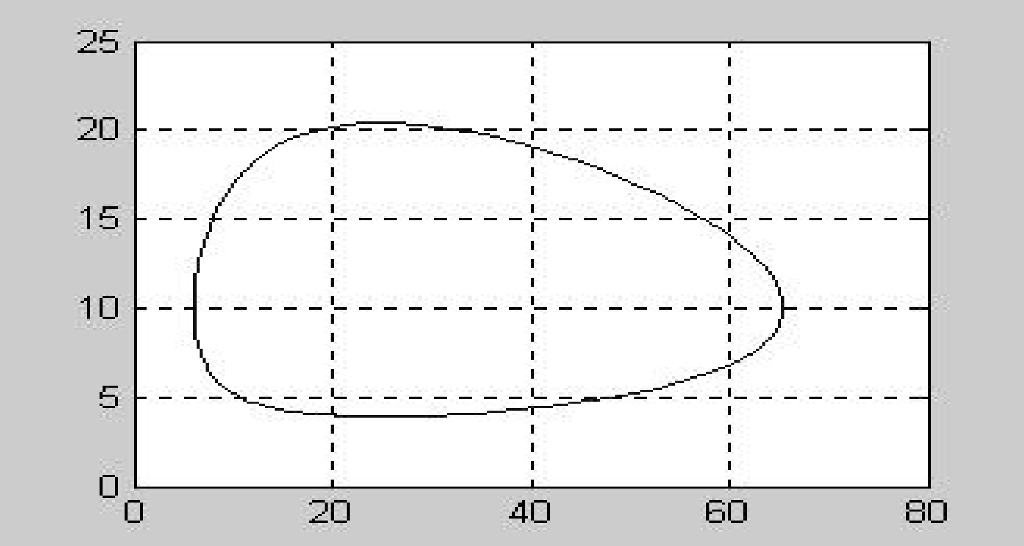
P' 不稳定

P点稳定性不能用近似线性方程分析

用数学软件MATLAB求微分方程数值解

t	*x*(*t*)	*y*(*t*)
0	20.0000	4.0000
0.1000	21.2406	3.9651
0.2000	22.5649	3.9405
0.3000	23.9763	3.9269
…	…	…
5.1000	9.6162	16.7235
5.2000	9.0173	16.2064
…	…	…
9.5000	18.4750	4.0447
9.6000	19.6136	3.9968
9.7000	20.8311	3.9587





x~*y* 平面上的相轨线

食饵-捕食者模型(Volterra)

$$\dot{x}(t)=(r-ay)x \quad \dot{y}(t)=-(d-bx)y$$

计算结果（数值，图形）

⇩ 观察，猜测

$x(t)$, $y(t)$是周期函数，相图(x,y)是封闭曲线

$x(t)$, $y(t)$的周期约为9.6

$x_{max}\approx 65.5,\ x_{min}\approx 6,\ y_{max}\approx 20.5,\ y_{min}\approx 3.9$

用数值积分可算出 $x(t)$, $y(t)$一周期的平均值：

$x(t)$的平均值约为25, $y(t)$的平均值约为10。

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$
$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

消去***dt*** ⇨

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(r - ay)}{y(-d + bx)}$$

⇨ $$\frac{-d + bx}{x} dx = \frac{r - ay}{y} dy$$

⇨ $$-d \ln x + bx = r \ln y - ay + c_1$$

⇨ $$(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$

取指数

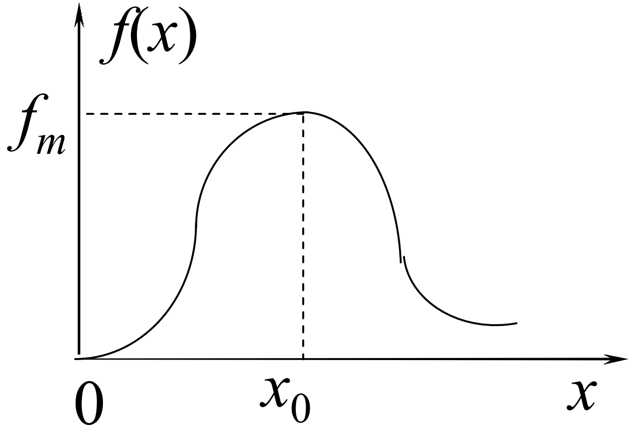
c 由初始条件确定

用相轨线分析 $P(d/b,r/a)$ 点稳定性

$$(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$

$f(x)$ $g(y)$

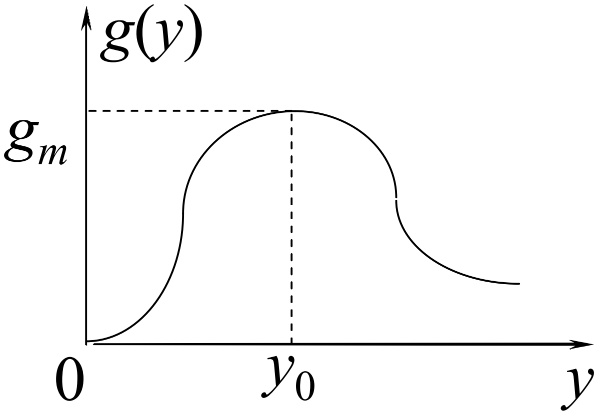
相轨线 $f(x)g(y) = c$



在相平面上讨论相轨线的图形

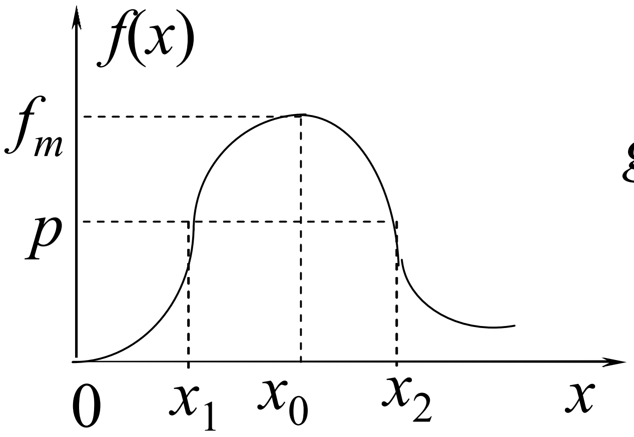
$$f(0)=f(\infty)=0,\ f(x_0)=f_m, x_0=d/b$$

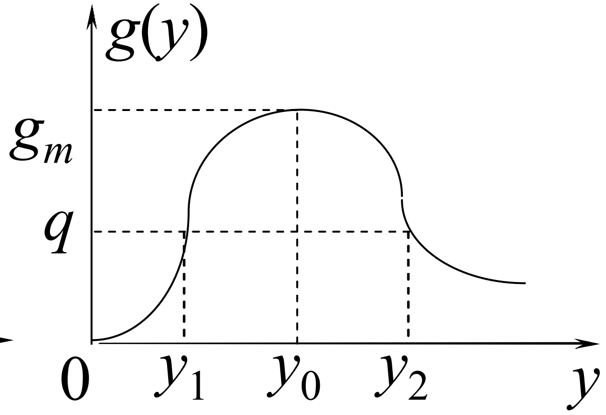
$$g(0)=g(\infty)=0,\ g(y_0)=g_m, y_0=r/a$$

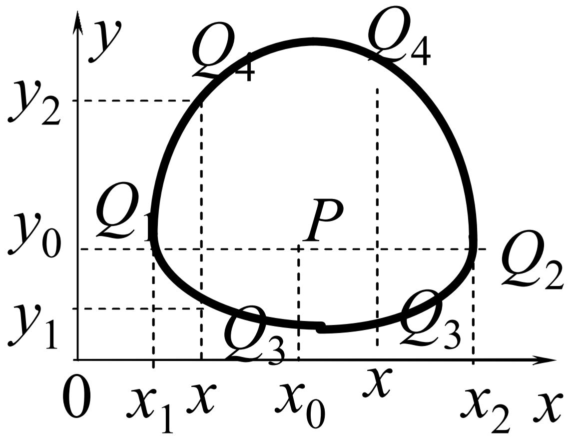


$c > f_m g_m$ 时无相轨线　　以下设 $c \le f_m g_m$

相轨线 $f(x)g(y)=c$







$c = f_m g_m$ ⇨ $x=x_0, y=y_0$ ⇨ 相轨线退化为***P***点 ***P*~中心**

$c < f_m g_m$ ⇨ 设$c = pg_m$ 令$y=y_0$ ⇨ $g(y)=g_m$ $f(x)=p<f_m$

⇨ 存在$x_1<x_0<x_2$, 使$f(x_1)=f(x_2)=p$ ⇨ $\boldsymbol{Q_1(x_1,y_0),Q_2(x_2,y_0)}$

考察$x\in[x_1,x_2]$ $f(x)g(y)=pg_m$ $f(x)>p$ $g(y)=q<g_m$

⇨ 存在$y_1<y_0<y_2$,使$g(y_1)=g(y_2)=q$ ⇨ $\boldsymbol{Q_3(x,y_1), Q_4(x,y_2)}$

x是$[x_1,x_2]$内任意点 ⇨ **相轨线是封闭曲线族**

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

相轨线是封闭曲线 ⟺ **$x(t), y(t)$是周期函数(周期记 T)**

求**$x(t), y(t)$** 在一周期的平均值 $\bar{x}, \bar{y}$

$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

⇩

$$x(t) = \frac{1}{b}\left(\frac{\dot{y}}{y} + d\right)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{b}\left(\frac{\dot{y}}{y} + d\right)dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{b} + \frac{dT}{b}\right)$$

⇨ $\bar{x} = d/b$

$\dot{x}(t) = (r - ay)x$ ⇨ …… ⇨ $\bar{y} = r/a$

轨线中心 $P(x_0, y_0): x_0 = d/b, y_0 = r/a$ ⇨ $\bar{x} = x_0, \bar{y} = y_0$

模型解释

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

初值 $P_0(x_0', y_0')$

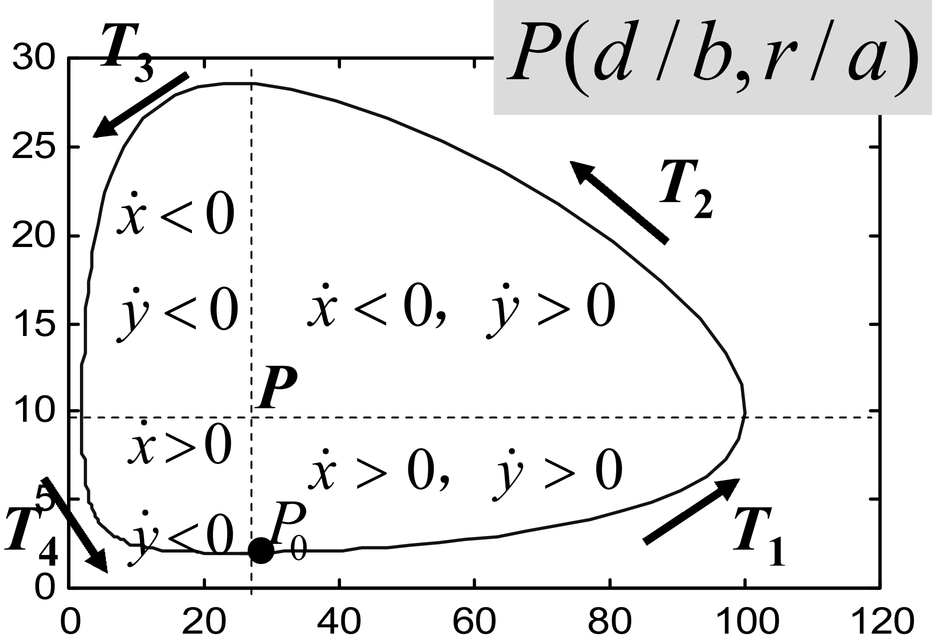
相轨线的方向

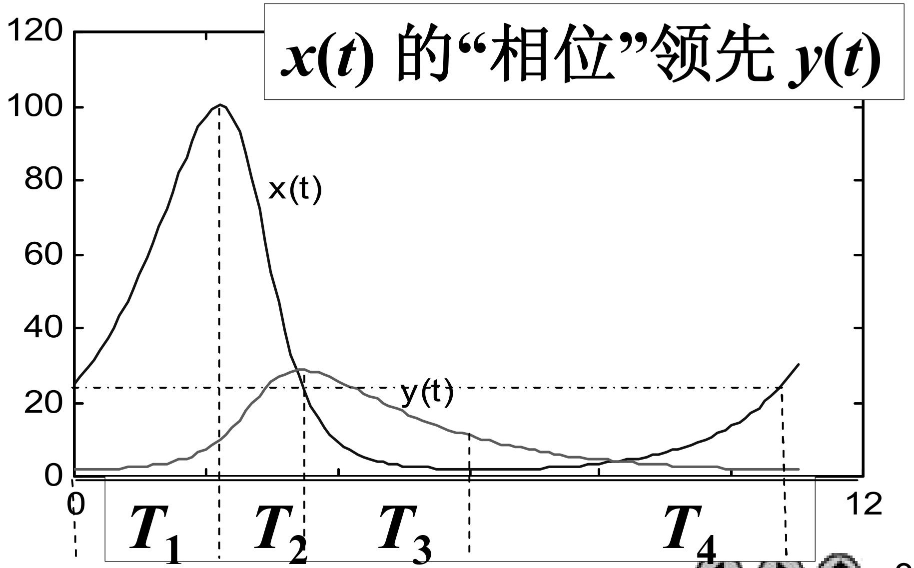
$T_1 : x(t)\uparrow\ y(t)\uparrow$

$T_2 : x(t)\downarrow\ y(t)\uparrow$

$T_3 : x(t)\downarrow\ y(t)\downarrow$

$T_4 : x(t)\uparrow\ y(t)\downarrow$



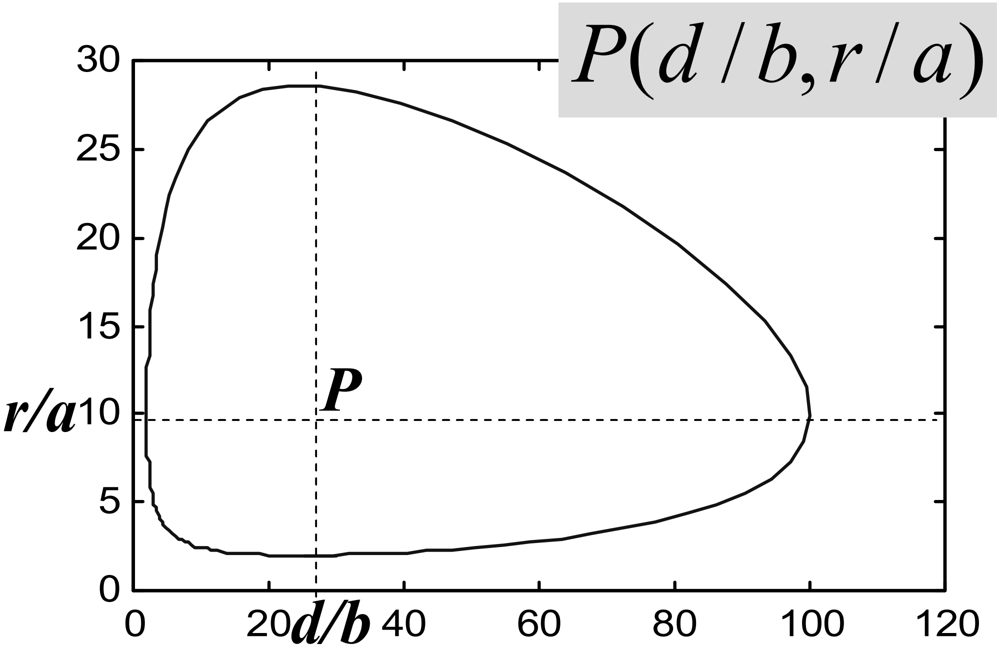


模型解释

捕食者数量 $\bar{y} = \frac{r}{a}$

r ~食饵增长率

a ~捕食者掠取食饵能力



捕食者数量与*r*成正比，与*a*成反比

食饵数量 $\bar{x} = \frac{d}{b}$

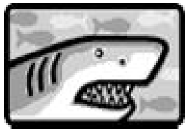
d ~捕食者死亡率

b ~食饵供养捕食者能力

食饵数量与*d*成正比，与*b*成反比

模型解释

一次大战期间地中海渔业的捕捞量下降，但是其中鲨鱼的比例却在增加，为什么？



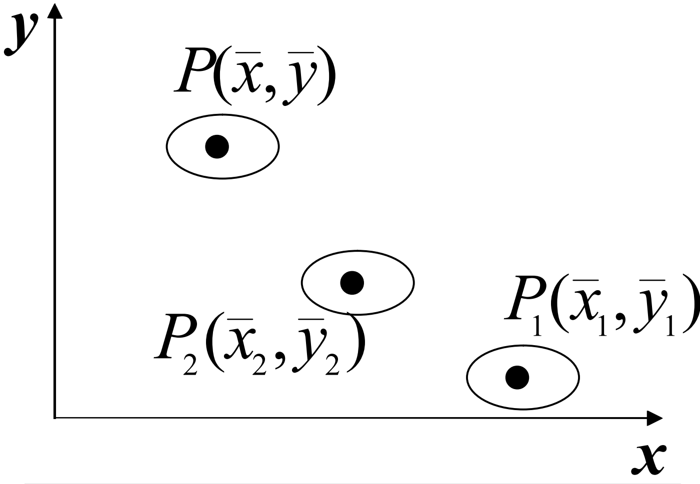
自然环境 $P(\bar{x},\bar{y})\quad \bar{x}=d/b, \bar{y}=r/a$

捕捞 $r\to r-\varepsilon_1,\ d\to d+\varepsilon_1$

⇨ $\bar{x}_1 > \bar{x},\ \bar{y}_1 < \bar{y}\qquad P\to P_1$

战时捕捞 $r\to r-\varepsilon_2,\ d\to d+\varepsilon_2\ ,\ \varepsilon_2<\varepsilon_1$

⇨ $\bar{x}_2 < \bar{x}_1,\ \bar{y}_2 > \bar{y}_1\qquad P_1\to P_2$



食饵(鱼)减少，
捕食者(鲨鱼)增加

$P\to P_1$ 还表明：对害虫(食饵)—益虫(捕食者)系统，使用灭两种虫的杀虫剂，会使害虫增加，益虫减少。

食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

多数食饵—捕食者系统观察不到周期震荡,

而是趋向某个平衡状态, 即存在稳定平衡点

Volterra模型 $\dot{x}(t)=(r-ay)x \quad \dot{y}(t)=-(d-bx)y$

改写

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}\right)$$

加Logistic项

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

有稳定平衡点

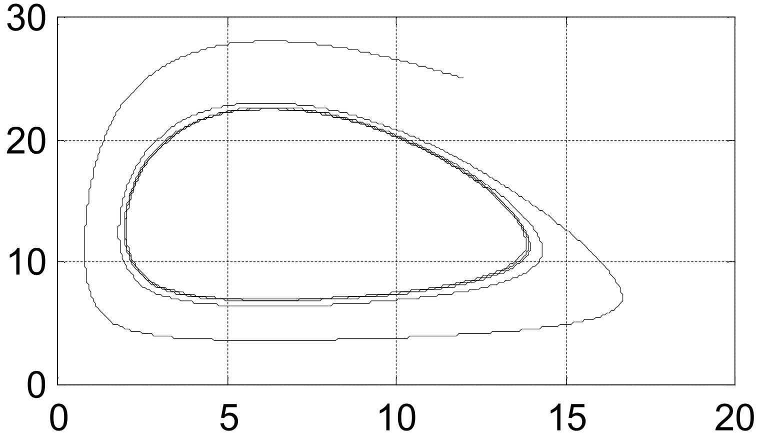
食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

- 相轨线是封闭曲线，结构不稳定——一旦离开某一条闭轨线，就进入另一条闭轨线，不恢复原状。

- 自然界存在的周期性平衡生态系统是结构稳定的，即偏离周期轨道后，内部制约使系统恢复原状。

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{1+wx_1}\right)\quad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{1+wx_1}\right)$$

r_1=1, N_1=20, σ_1=0.1,
w=0.2, r_2=0.5, σ_2=0.18



相轨线趋向极限环

⇨ 结构稳定

两种群模型的几种形式

相互竞争

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

相互依存

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1\left(\pm 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(\pm 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

弱肉强食

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

第七章　差分方程模型

7.1 市场经济中的蛛网模型

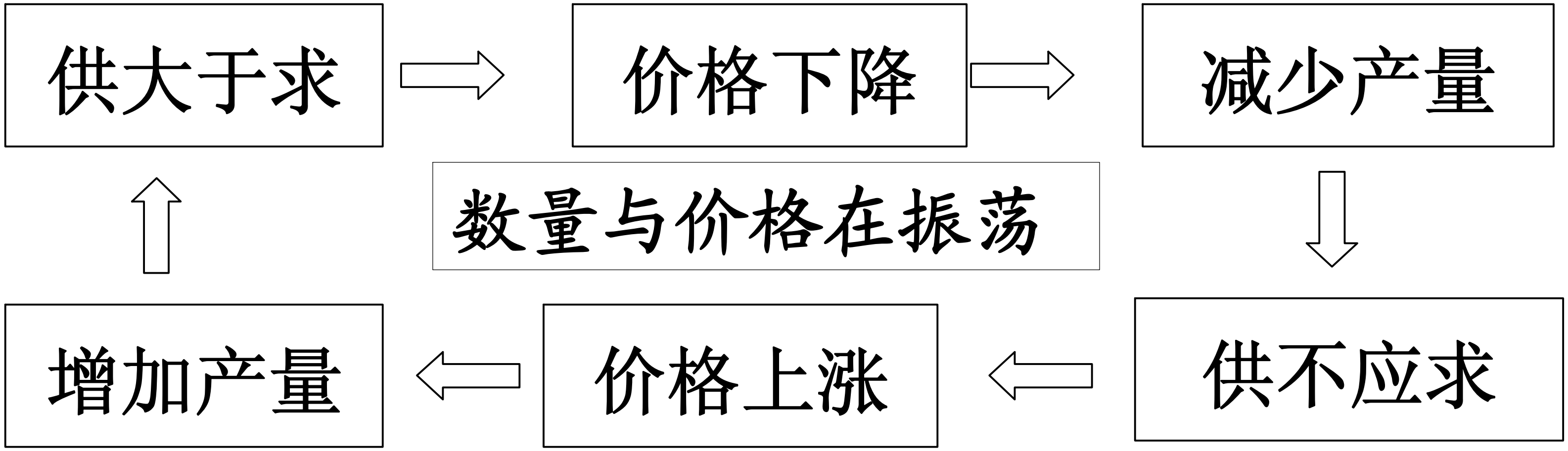
7.2 减肥计划——节食与运动

7.3 差分形式的阻滞增长模型

7.4 按年龄分组的种群增长

7.1　市场经济中的蛛网模型

现象



供大于求 ⇒ 价格下降 ⇒ 减少产量 ⇓ 供不应求 ⇐ 价格上涨 ⇐ 增加产量 ⇑

数量与价格在振荡

问题

描述商品数量与价格的变化规律

商品数量与价格的振荡在什么条件下趋向稳定

当不稳定时政府能采取什么干预手段使之稳定

蛛网模型

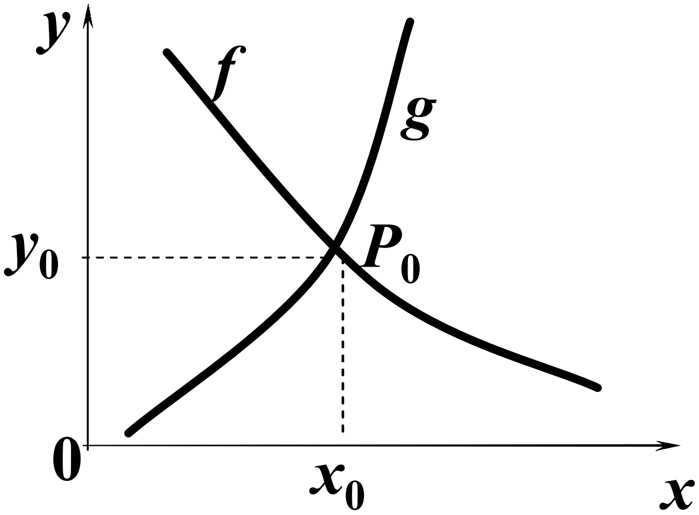
x_k~第k时段商品数量；y_k~第k时段商品价格

消费者的需求关系 ⇨ 需求函数 $y_k = f(x_k)$ 减函数

生产者的供应关系 ⇨ 供应函数 $x_{k+1} = h(y_k)$ 增函数

⇕

$$y_k = g(x_{k+1})$$



f与g的交点$P_0(x_0,y_0)$ ~ 平衡点

一旦$x_k=x_0$，则$y_k=y_0$，

$x_{k+1},x_{k+2},\ldots=x_0$，$y_{k+1},y_{k+2},\ldots=y_0$

蛛 网 模 型 $y_k = f(x_k)$ $x_{k+1} = h(y_k) \Leftrightarrow y_k = g(x_{k+1})$

设x_1偏离x_0 $x_1 \to y_1 \to x_2 \to y_2 \to x_3 \to \cdots$

$x_k \to x_0, y_k \to y_0$

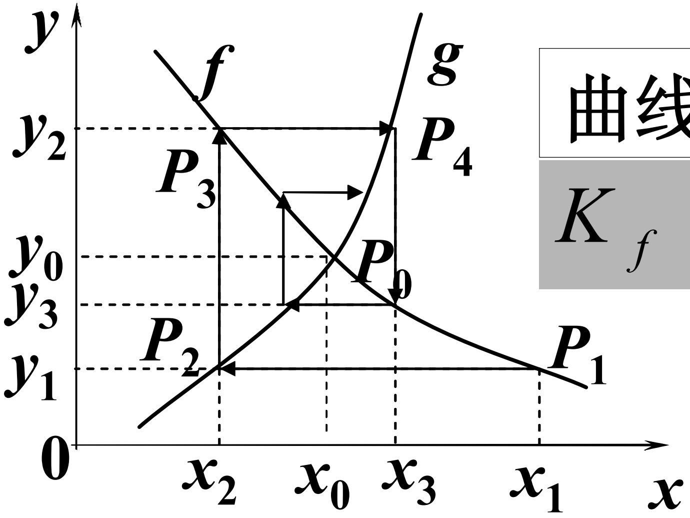
$x_k \not\to x_0, y_k \not\to y_0$

$P_1 \to P_2 \to P_3 \to \cdots \to P_0$

$P_1 \to P_2 \to P_3 \to \cdots \not\to P_0$

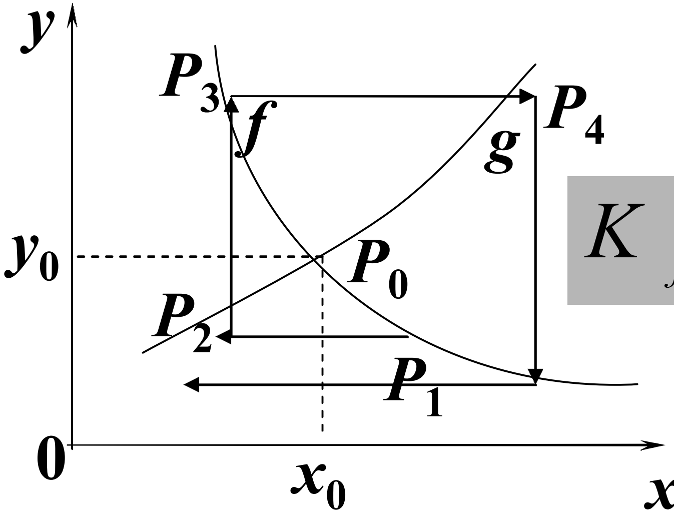
P_0是稳定平衡点

P_0是不稳定平衡点



曲线斜率

$K_f < K_g$



$K_f > K_g$

方程模型

在P_0点附近用直线近似曲线

$$y_k = f(x_k) \quad \Longrightarrow \quad y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0) \quad (\alpha > 0)$$

$$x_{k+1} = h(y_k) \quad \Longrightarrow \quad x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0) \quad (\beta > 0)$$

$$x_{k+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_k - x_0)$$

$$x_{k+1} - x_0 = (-\alpha\beta)^k (x_1 - x_0)$$

$\alpha\beta < 1$ $(\alpha < 1/\beta)$ $\Rightarrow$ $x_k \to x_0$ **P_0稳定** $K_f < K_g$

$\alpha\beta > 1$ $(\alpha > 1/\beta)$ $\Rightarrow$ $x_k \to \infty$ **P_0不稳定** $K_f > K_g$

方程模型与蛛网模型的一致 $\alpha = K_f \quad 1/\beta = K_g$

结果解释

考察α, β的含义

x_k~第k时段商品数量；y_k~第k时段商品价格

$$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0)$$

α ~ 商品数量减少1单位, 价格上涨幅度

$$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0)$$

β ~ 价格上涨1单位, (下时段)供应的增量

α ~ 消费者对需求的敏感程度　　α小, 有利于经济稳定

β ~ 生产者对价格的敏感程度　　β小, 有利于经济稳定

⇨ $\alpha\beta < 1$ 经济稳定

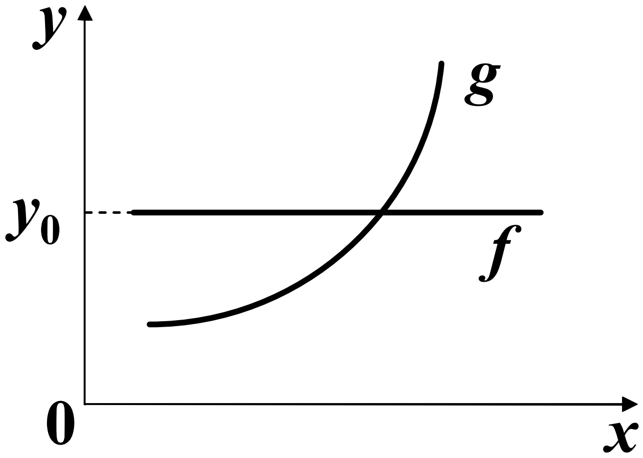
结果解释

经济不稳定时政府的干预办法

1. 使 α 尽量小，如 $\alpha=0$

⇨ 需求曲线变为水平

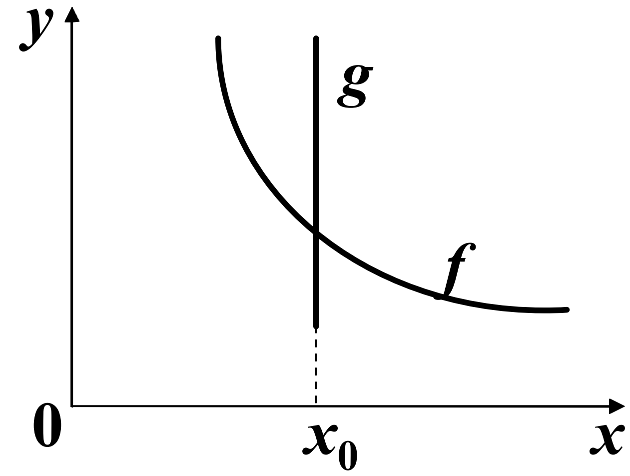
以行政手段控制价格不变



2. 使 β 尽量小，如 $\beta=0$

⇨ 供应曲线变为竖直

靠经济实力控制数量不变



模型的推广

生产者管理水平提高

$$x_{k+1}=h(y_k)$$

$$\Downarrow$$

$$x_{k+1}=h\left(\frac{y_k+y_{k-1}}{2}\right)$$

- 生产者根据当前时段和前一时段的价格决定下一时段的产量。

设供应函数为 $x_{k+1}-x_0=\beta[(y_k+y_{k-1})/2-y_0]$

需求函数不变 $y_k-y_0=-\alpha(x_k-x_0)$

$$\Rightarrow\quad 2x_{k+2}+\alpha\beta x_{k+1}+\alpha\beta x_k=2(1+\alpha\beta)x_0,\ k=1,2,\cdots$$

二阶线性常系数差分方程

x_0为平衡点

研究平衡点稳定，即$k\to\infty$, $x_k\to x_0$的条件

模型的推广 $2x_{k+2}+\alpha\beta x_{k+1}+\alpha\beta x_k=2(1+\alpha\beta)x_0$

方程通解 $x_k=c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k$ **(c_1, c_2由初始条件确定)**

$\lambda_{1,2}$~特征根，即方程 $2\lambda^2+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0$ 的根

平衡点稳定，即$k\to\infty$, $x_k\to x_0$的条件: $\left|\lambda_{1,2}\right|<1$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4} \Rightarrow \left|\lambda_{1,2}\right|=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}$$

平衡点稳定条件 $\alpha\beta<2$

比原来的条件 $\alpha\beta<1$ 放宽了

7.2 减肥计划——节食与运动

背景

- 体重指数**BMI=w(kg)/l^2(m^2). 18.5<BMI<25**～正常； **BMI>25**～超重；**BMI>30**～肥胖.
- 多数减肥食品达不到减肥目标，或不能维持

- 通过控制饮食和适当的运动，在不伤害身体的前提下，达到减轻体重并维持下去的目标

分析

- 体重变化由体内能量守恒破坏引起
- 饮食（吸收热量）引起体重增加
- 代谢和运动（消耗热量）引起体重减少

模型假设

1）体重增加正比于吸收的热量——每8000千卡增加体重1千克；

2）代谢引起的体重减少正比于体重——每周每公斤体重消耗200千卡～320千卡(因人而异)，相当于70千克的人每天消耗2000千卡～3200千卡；

3）运动引起的体重减少正比于体重，且与运动形式有关；

4）为了安全与健康，每周体重减少不宜超过1.5千克，每周吸收热量不要小于10000千卡。

减肥计划

某甲体重100千克，目前每周吸收20000千卡热量，体重维持不变。现欲减肥至75千克。

1）在不运动的情况下安排一个两阶段计划。

第一阶段：每周减肥1千克，每周吸收热量逐渐减少，直至达到下限（10000千卡）；

第二阶段：每周吸收热量保持下限，减肥达到目标

2）若要加快进程，第二阶段增加运动，试安排计划。

3）给出达到目标后维持体重的方案。

基本模型

$w(k)$ ~ 第k周(末)体重　　$c(k)$ ~第k周吸收热量

$$w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - \beta w(k)$$

$\alpha = 1/8000$（千克/千卡）　β ~ **代谢消耗系数(因人而异)**

1）不运动情况的两阶段减肥计划

- **确定某甲的代谢消耗系数**

每周吸收20000千卡 w=100千克不变

$$\Rightarrow w = w + \alpha c - \beta w \qquad \beta = \frac{\alpha c}{w} = \frac{20000}{8000 \times 100} = 0.025$$

即每周每千克体重消耗 20000/100=200千卡

1）不运动情况的两阶段减肥计划

- **第一阶段:** $w(k)$**每周减1千克,** $c(k)$**减至下限10000千卡**

$$w(k)-w(k+1)=1 \qquad w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-\beta w(k)$$

⇨ $$c(k+1)=\frac{1}{\alpha}[\beta w(k)-1] \qquad w(k)=w(0)-k$$

⇨ $$c(k+1)=\frac{\beta}{\alpha}w(0)-\frac{1}{\alpha}(1+\beta k)$$

$$\alpha=1/8000$$

$$\beta=0.025$$

$$=12000-200k \ge C_m=10000$$

⇨ $$k\le 10$$

第一阶段**10**周, 每周减**1**千克，第**10**周末体重**90**千克

吸收热量为 $c(k+1)=12000-200k,\ k=0,1,\cdots 9$

1）不运动情况的两阶段减肥计划

- 第二阶段：每周**$c(k)$**保持**C_m**, **$w(k)$**减至75千克

基本模型 $w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-\beta w(k)$

$$\Rightarrow \quad w(k+1)=(1-\beta)w(k)+\alpha C_m$$

$$w(k+n)=(1-\beta)^n w(k)+\alpha C_m[1+(1-\beta)+\cdots+(1-\beta)^{n-1}]$$

$$=(1-\beta)^n[w(k)-\frac{\alpha C_m}{\beta}]+\frac{\alpha C_m}{\beta}$$

以 $\beta=0.025,\ \alpha=\dfrac{1}{8000},\ C_m=10000$ 代入得

$$w(k+n)=0.975^n[w(k)-50]+50$$

- **第二阶段：每周$c(k)$保持C_m, $w(k)$减至75千克**

$$w(k+n)=0.975^n[w(k)-50]+50$$

已知 $w(k)=90$, 要求 $w(k+n)=75$, 求n

$$75=0.975^n(90-50)+50$$

$$n=\frac{\lg(25/40)}{\lg 0.975}=19$$

第二阶段19周, 每周吸收热量保持10000千卡, 体重按

$w(n)=40\times 0.975^n+50\ (n=1,2,\cdots,19)$ **减少至75千克。**

2）第二阶段增加运动的减肥计划

根据资料每小时每千克体重消耗的热量 γ (千卡):

跑步	跳舞	乒乓	自行车(中速)	游泳(50米/分)
7.0	3.0	4.4	2.5	7.9

基本模型 ⇨

$$w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - (\beta + \alpha\gamma t)w(k)$$

t~每周运动时间(小时)

取 $\alpha\gamma t = 0.003$,即 $\gamma t = 24$

$$\beta(=0.025) \to \beta' = \beta + \alpha\gamma t(=0.028)$$

$$w(k+n) = (1-\beta')^n[w(k) - \frac{\alpha C_m}{\beta'}] + \frac{\alpha C_m}{\beta'}$$

$$75 = 0.972^n(90-44.6)+44.6$$ ⇨ $n=14$

运动 γt=24 (每周跳舞8小时或自行车10小时), 14周即可。

3）达到目标体重75千克后维持不变的方案

每周吸收热量***c*(*k*)**保持某常数***C***，使体重***w***不变

$$w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-(\beta+\alpha\gamma t)w(k)$$

$$\Rightarrow \quad w=w+\alpha C-(\beta+\alpha\gamma t)w \quad \Rightarrow \quad C=\frac{(\beta+\alpha\gamma t)w}{\alpha}$$

- 不运动 $C=8000\times0.025\times75=15000\,(\text{千卡})$

- 运动(内容同前) $C=8000\times0.028\times75=16800(\text{千卡})$

7.3 差分形式的阻滞增长模型

连续形式的阻滞增长模型 (Logistic模型)

$x(t)$ ~某种群 t 时刻的数量(人口) $\dot{x}(t) = rx(1 - \frac{x}{N})$

$t\to\infty$, $x\to N$, $x=N$是稳定平衡点(与r大小无关)

离散形式

y_k ~某种群第k代的数量(人口)

$$y_{k+1} - y_k = ry_k(1 - \frac{y_k}{N}), k = 1,2,\cdots$$

若$y_k=N$, 则$y_{k+1},y_{k+2},\ldots=N$

$y^*=N$ 是平衡点

讨论平衡点的稳定性，即$k\to\infty$, $y_k\to N$？

离散形式阻滞增长模型的平衡点及其稳定性

$$y_{k+1}-y_k=ry_k\left(1-\frac{y_k}{N}\right) \quad (1) \Rightarrow y_{k+1}=(r+1)y_k\left[1-\frac{r}{(r+1)N}y_k\right]$$

变量代换 $x_k=\dfrac{r}{(r+1)N}y_k$

$$\Downarrow$$

$$x_{k+1}=bx_k(1-x_k) \quad (2)$$

记$b=r+1$　　一阶(非线性)差分方程

(1)的平衡点$y^*=N$ $\Leftrightarrow$ **(2)的平衡点** $x^*=\dfrac{r}{r+1}=1-\dfrac{1}{b}$

讨论 x^* 的稳定性

补充知识

一阶非线性差分方程 $x_{k+1} = f(x_k)$ (1) 的平衡点及稳定性

(1)的平衡点 ***x****——代数方程 ***x*=*f*(*x*)**的根

(1)的近似线性方程 $x_{k+1} = f(x^*) + f'(x^*)(x_k - x^*)$ (2)

稳定性判断 ***x**也是(2)的平衡点**

$\left|f'(x^*)\right| < 1$ ***x**是(2)和(1)的稳定平衡点**

$\left|f'(x^*)\right| > 1$ ***x**是(2)和(1)的不稳定平衡点**

$x_{k+1}=bx_k(1-x_k)$ 的平衡点及其稳定性

平衡点 $x=f(x)=bx(1-x)$ ⇨ $x^*=1-\frac{1}{b}$

稳定性 $f'(x^*)=b(1-2x^*)=2-b$

$|f'(x^*)|<1 \Leftrightarrow 1<b<3 \Leftrightarrow$ **x^* 稳定**

$b>3\,(|f'(x^*)|>1) \Leftrightarrow$ **x^*** 不稳定

$b=r+1$

另一平衡点为 **x=0**

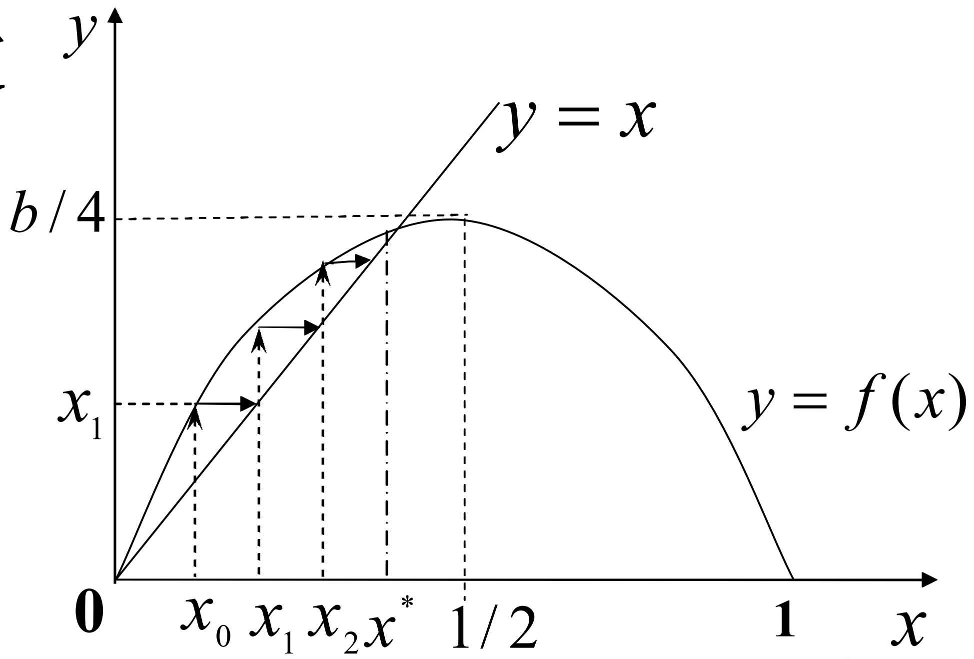
$f'(0)=b>1$

不稳定

$(1)\ 1<b<2$

⇨ $x^*=1-1/b<1/2$

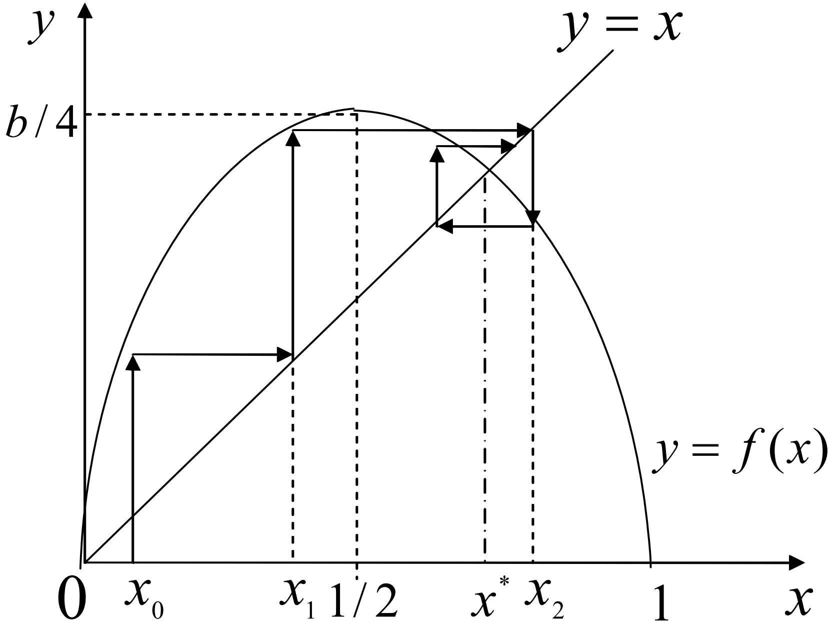
x_k（单调增）$\rightarrow x^*$



$x_{k+1} = bx_k(1 - x_k)$ 的平衡点及其稳定性

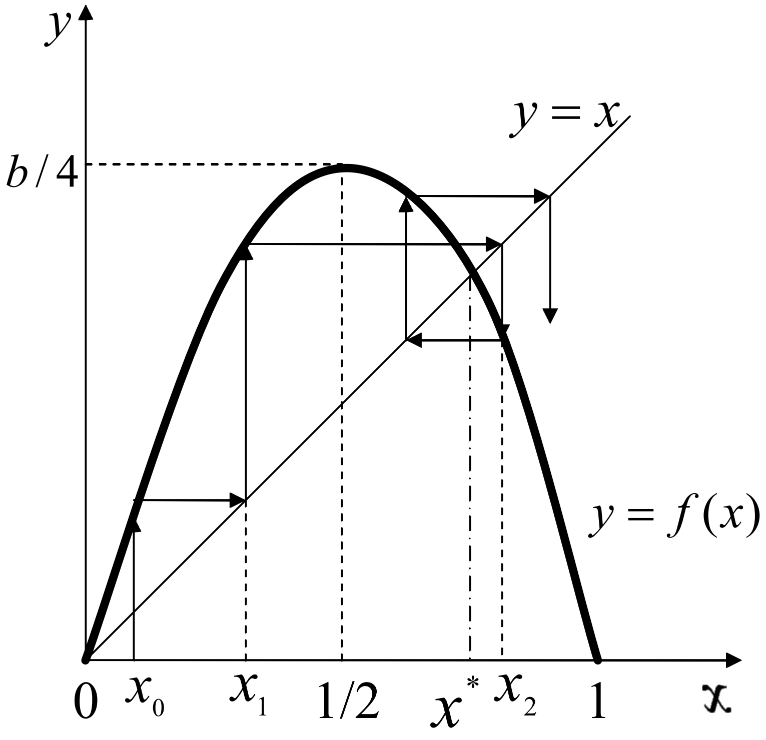
$(2)\ 2 < b < 3$

$\Rightarrow\ x^* = 1 - 1/b > 1/2$



x_k（振荡地）$\rightarrow x^*$

$(3)\ b > 3$



x_k（不）$\rightarrow x^*$

数值计算结果

$$x_{k+1} = bx_k(1 - x_k)$$

初值 $x_0=0.2$

k	b=1.7	b=2.6	b=3.3	b=3.45	b=3.55
0	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
1	0.2720	0.4160	0.5280	0.5520	0.5680
2	0.3366	0.6317	0.8224	0.8532	0.8711
3	0.3796	0.6049	0.4820	0.4322	0.3987
…	…	…	…	…	…
91	0.4118	0.6154	0.4794	0.4327	0.3548
92	0.4118	0.6154	0.8236	0.8469	0.8127
93	0.4118	0.6154	0.4794	0.4474	0.5405
94	0.4118	0.6154	0.8236	0.8530	0.8817
95	0.4118	0.6154	0.4794	0.4327	0.3703
96	0.4118	0.6154	0.8236	0.8469	0.8278
97	0.4118	0.6154	0.4794	0.4474	0.5060
98	0.4118	0.6154	0.8236	0.8530	0.8874
99	0.4118	0.6154	0.4794	0.4327	0.3548
100	0.4118	0.6154	0.8236	0.8469	0.8127

$b<3, x \rightarrow x^* = 1 - \frac{1}{b}$

b=3.3, x→两个极限点

b=3.45, x→4个极限点

b=3.55, x→8个极限点

倍周期收敛——x^*不稳定情况的进一步讨论

$b = 3.3 \quad x_k$（不）$\to x^*$ 子序列 $x_{2k} \to x_1^*$，$x_{2k+1} \to x_2^*$

单周期不收敛

2倍周期收敛

$$x_{k+1} = f(x_k) \qquad x_{k+2} = f(x_{k+1}) = f(f(x_k)) = f^{(2)}(x_k) \quad (*)$$

$$x = f(f(x)) = b \cdot bx(1-x)[1-bx(1-x)] \quad f(x) = bx(1-x)$$

(*)的平衡点

$$x^* = 1 - \frac{1}{b} \qquad x_{1,2}^* = \frac{b+1 \mp \sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2b}$$

$$x_1^* = f(x_2^*), \quad x_2^* = f(x_1^*) \qquad 0 < x_1^* < x^* < x_2^* < 1$$

x^*不稳定，研究x_1^*, x_2^*的稳定性

倍周期收敛 $x_{1,2}^{*}=\dfrac{b+1\mp\sqrt{b^{2}-2b-3}}{2b}$ 的稳定性

$$[f^{(2)}(x)]'=[f'(x)]^2 \qquad (f^{(2)}(x))'\Big|_{x=x_1^*}=(f^{(2)}(x))'\Big|_{x=x_2^*}=f'(x_1^*)f'(x_2^*)$$

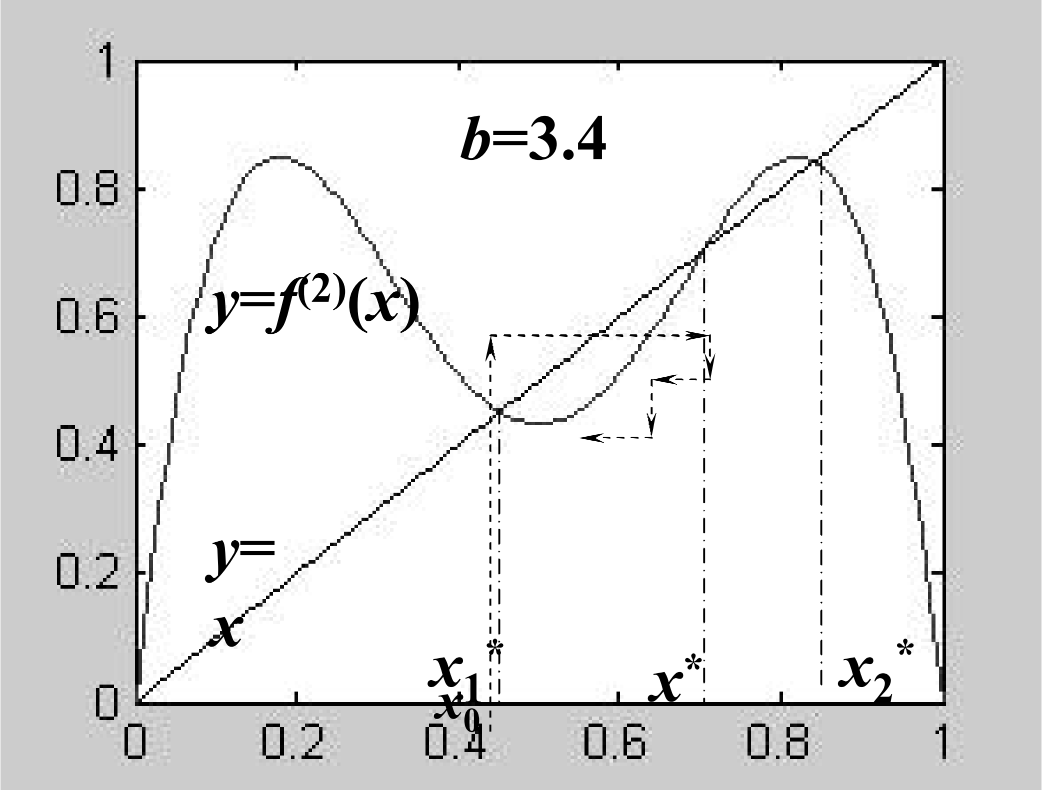
$$f'(x)=b(1-2x) \qquad (f^{(2)}(x))'\Big|_{x=x_1^*,x_2^*}=b^2(1-2x_1^*)(1-2x_2^*)$$

$$\left|(f^{(2)}(x_{1,2}^*))'\right|<1$$

⇩

$$b<1+\sqrt{6}\doteq 3.449$$

$$x_{2k}\rightarrow x_1^*,\ x_{2k+1}\rightarrow x_2^*$$



倍周期收敛的进一步讨论

$b > 3.45 \Rightarrow \left|(f^{(2)}(x_{1,2}^{*}))'\right| > 1$ ⇨ x_1^*, x_2^* (及x^*)不稳定

出现4个收敛子序列 $x_{4k}, x_{4k+1}, x_{4k+2}, x_{4k+3}$

平衡点及其稳定性需研究 $x_{k+4} = f^{(4)}(x_k)$

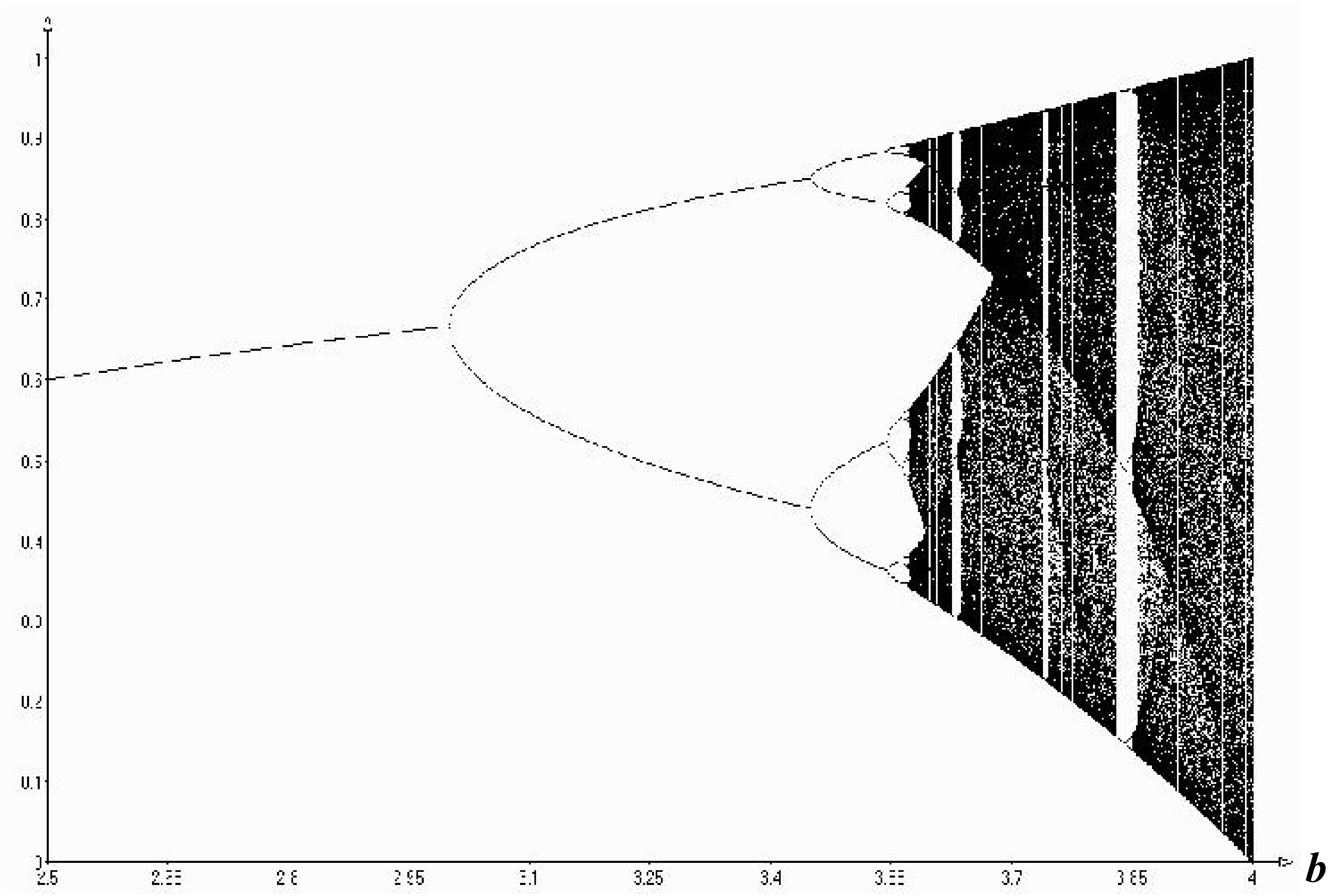
$3.449 < b < 3.544$ 时有4个稳定平衡点 ⇨ 4倍周期收敛

2^n倍周期收敛, $n=1,2,\ldots$ b_n~ 2^n倍周期收敛的上界

$b_0=3, b_1=3.449, b_2=3.544, \ldots$ $n\to\infty, b_n\to 3.57$

$b>3.57$, 不存在任何收敛子序列 ⇨ 混沌现象

$x_{k+1}=bx_k(1-x_k)$ 的收敛、分岔及混沌现象



7.4　按年龄分组的种群增长

- 不同年龄组的繁殖率和死亡率不同
- 以雌性个体数量为对象
- 建立差分方程模型，讨论稳定状况下种群的增长规律

假设与建模

- 种群按年龄大小等分为n个年龄组，记$i=1,2,\dots,n$
- 时间离散为时段，长度与年龄组区间相等，记$k=1,2,\dots$
- 第i年龄组1雌性个体在1时段内的繁殖率为b_i
- 第i年龄组在1时段内的死亡率为d_i, 存活率为$s_i=1-d_i$

假设与建模

$x_i(k)$~时段k第i 年龄组的种群数量

$$x_1(k+1)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i(k)$$

(设至少1个b_i>0)

$$x_{i+1}(k+1)=s_i x_i(k),\ i=1,2,\cdots,n-1$$

$$L=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & s_2 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

~Leslie矩阵(L矩阵)

$$x(k)=[x_1(k),x_2(k),\cdots x_n(k)]^T$$

~按年龄组的分布向量

$$x(k+1)=Lx(k)$$

$$x(k)=L^k x(0)$$

预测任意时段种群

按年龄组的分布

稳定状态分析的数学知识

- **L矩阵存在正单特征根λ₁，** $|\lambda_k| \le \lambda_1, k = 2,3,\cdots n$

特征向量 $x^* = \left[1, \frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_1 s_2}{\lambda_1^2}, \cdots, \frac{s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}\right]^T$

- **若L矩阵存在b_i, b_{i+1}>0, 则** $|\lambda_k| < \lambda_1, k = 2,3,\cdots,n$

且 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x(k)}{\lambda_1^k} = cx^*$ **, c是由b_i, s_i, $x(0)$决定的常数**

解释

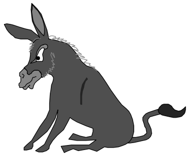
$x(k) = L^k x(0)$ **L对角化** $L = P[diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)]P^{-1}$

$L^k = P[diag(\lambda_1^k, \cdots \lambda_n^k)]P^{-1}$ **P的第1列是x^***

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{\lambda_1^k} = Pdiag(1,0,\cdots 0)P^{-1}x(0) = cx^*$$

稳态分析——*k*充分大 种群按年龄组的分布

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x(k)}{\lambda_1^k}=cx^*$$



1) $x(k)\approx c\lambda^k x^*$

~种群按年龄组的分布趋向稳定，**x***称稳定分布, 与初始分布无关。

2) $x(k+1)\approx\lambda x(k)$

⇨ $x_i(k+1)\approx\lambda x_i(k)$

~各年龄组种群数量按同一倍数增减， λ称固有增长率

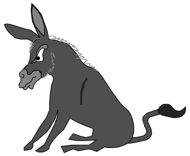
与基本模型 $x(k+1)=Lx(k)$ 比较

3）λ=1时 $x(k+1)\approx x(k)\approx cx^*$

~各年龄组种群数量不变

$$x^*=[1,s_1,s_1s_2,\cdots s_1s_2\cdots s_{n-1}]^T$$

稳态分析



3）λ=1时 $Lx^* = x^*$ $x^* = [1, s_1, s_1 s_2, \cdots s_1 s_2 \cdots s_{n-1}]^T$

$$\Downarrow$$

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & s_2 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 + b_2 s_1 + \cdots + b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1} = 1$$

～1个个体在整个存活期内的繁殖数量为1

4) $x(k) \approx c\lambda^k x^*,\ x^* = [1, s_1, s_1 s_2, \cdots, s_{n-1}]^T$

$$\Rightarrow \quad x_{i+1}(k) \approx s_i x_i(k),\ i = 1,2,\cdots,n-1$$

~存活率 s_i是同一时段的 x_{i+1}与 x_i之比

（与s_i的定义 $x_{i+1}(k+1) = s_i x_i(k)$ 比较）

第八章　离散模型

离散模型

- 离散模型：差分方程（第7章）、整数规划（第4章）、图论、对策论、网络流、… …
- 分析社会经济系统的有力工具
- 只用到代数、集合及图论（少许）的知识

8.1　层次分析模型

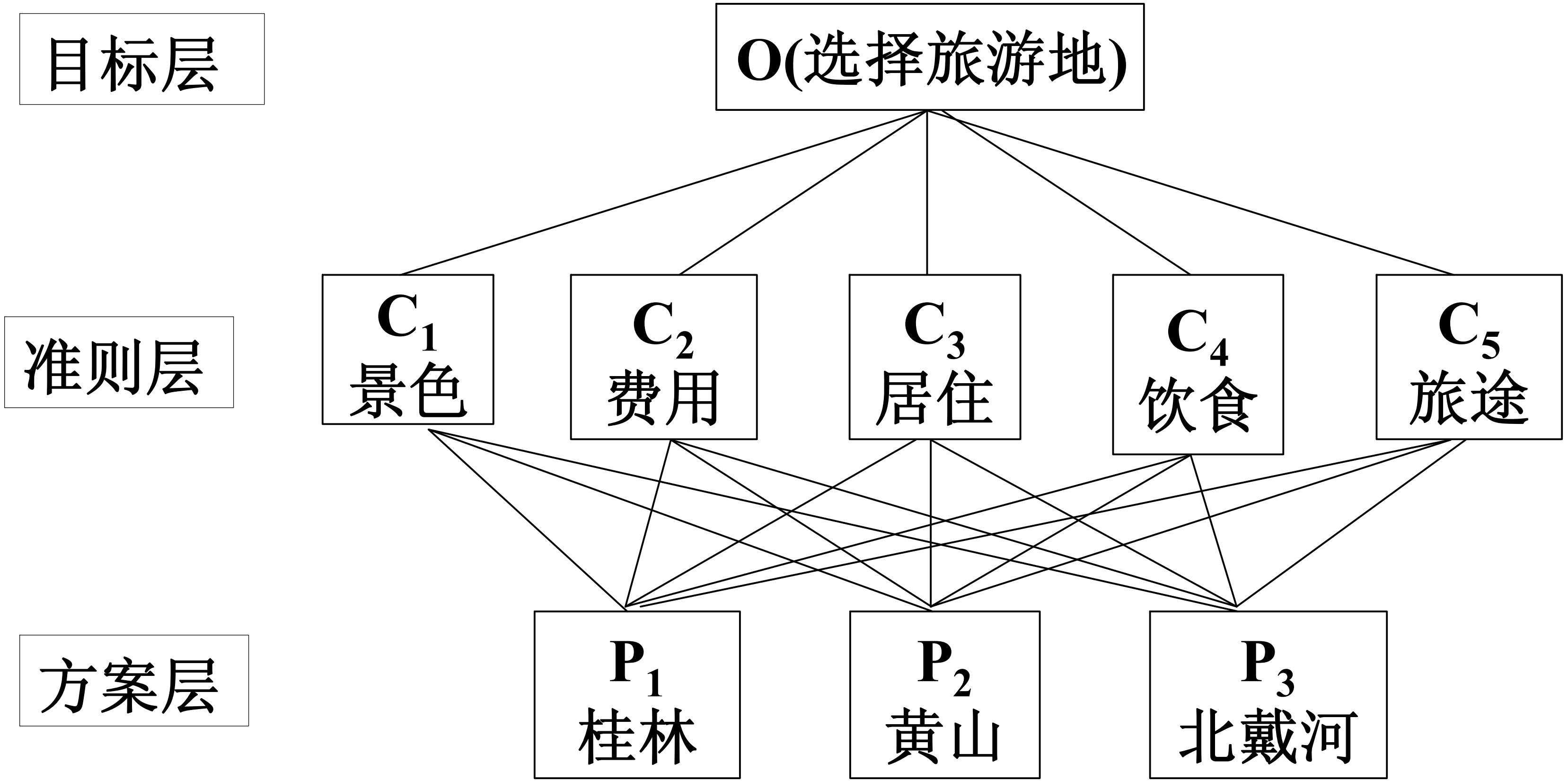
背景

- 日常工作、生活中的决策问题
- 涉及经济、社会等方面的因素
- 作比较判断时人的主观选择起相当大的作用，各因素的重要性难以量化
- **Saaty于1970**年代提出层次分析法**AHP (Analytic Hierarchy Process)**
- **AHP——**一种定性与定量相结合的、系统化、层次化的分析方法

一．层次分析法的基本步骤

例．选择旅游地

如何在3个目的地中按照景色、费用、居住条件等因素选择.



“选择旅游地”思维过程的归纳

- 将决策问题分为3个层次：目标层O，准则层C，方案层P；每层有若干元素， 各层元素间的关系用相连的直线表示。
- 通过相互比较确定各准则对目标的权重，及各方案对每一准则的权重。
- 将上述两组权重进行综合，确定各方案对目标的权重。

层次分析法将定性分析与定量分析结合起来完成以上步骤，给出决策问题的定量结果。

层次分析法的基本步骤

成对比较阵和权向量

元素之间两两对比，对比采用相对尺度

设要比较各准则$C_1,C_2,\ldots,C_n$对目标O的重要性

$$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij} \qquad A=(a_{ij})_{n\times n},\ a_{ij}>0,\ a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$$

选择旅游地

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A~成对比较阵

*A*是正互反阵

要由*A*确定$C_1,\ldots,C_n$对O的权向量

成对比较阵和权向量

成对比较的不一致情况

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 4 & \cdots\\ 2 & 1 & 7 & \cdots\\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix}$$

不一致

$$a_{12}=1/2(C_1:C_2)$$

$$a_{13}=4(C_1:C_3)$$

一致比较

$$\Rightarrow$$

$$a_{23}=8(C_2:C_3)$$

允许不一致，但要确定不一致的允许范围

考察完全一致的情况

$$W(=1)\Rightarrow w_1,w_2,\cdots w_n$$

令$a_{ij}=w_i/w_j$

$$w=(w_1,w_2,\cdots w_n)^T\sim\text{权向量}$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n}\\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n}\\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n}\end{bmatrix}$$

成对比较阵和权向量

成对比较完全一致的情况

满足 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}, \quad i, j, k = 1, 2, \cdots, n$ 的正互反阵*A*称一致阵，如

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

一致阵性质

- ***A***的秩为**1**，***A***的唯一非零特征根为***n***
- ***A***的任一列向量是对应于***n*** 的特征向量
- ***A***的归一化特征向量可作为权向量

对于不一致(但在允许范围内)的成对比较阵*A*，建议用对应于最大特征根λ的特征向量作为权向量***w***，即

$$Aw = \lambda w$$

成对比较阵和权向量

比较尺度a_{ij}

Saaty等人提出1~9尺度——a_{ij} 取值 1,2,… , 9及其互反数1,1/2, … , 1/9

- 便于定性到定量的转化：

尺度 a_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_i:C_j$的重要性	相同		稍强		强		明显强		绝对强

a_{ij} = 1,1/2, ,…1/9 $\sim C_i:C_j$ 的重要性与上面相反

- 心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个

- 用1~3,1~5,…1~17,…,1^p~9^p (p=2,3,4,5), d+0.1~d+0.9 (d=1,2,3,4)等27种比较尺度对若干实例构造成对比较阵，算出权向量，与实际对比发现， 1~9尺度较优。

一致性检验 对A确定不一致的允许范围

已知：n 阶一致阵的唯一非零特征根为n

可证：n 阶正互反阵最大特征根$\lambda \geq n$, 且$\lambda = n$时为一致阵

定义一致性指标: $$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1}$$ CI 越大，不一致越严重

为衡量CI 的大小，引入随机一致性指标 RI——随机模拟得到a_{ij}，形成A，计算CI 即得RI。

Saaty的结果如下

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

定义一致性比率 $CR = CI/RI$

当$CR<0.1$时，通过一致性检验

“选择旅游地”中准则层对目标的权向量及一致性检验

准则层对目标的成对比较阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大特征根λ=5.073

权向量(特征向量) w =(0.263,0.475,0.055,0.090,0.110)^T

$$\text{一致性指标 } CI=\frac{5.073-5}{5-1}=0.018$$

随机一致性指标 RI=1.12 (查表)

一致性比率CR=0.018/1.12=0.016<0.1

通过一致性检验

组合权向量

记第2层（准则）对第1层（目标）的权向量为$w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$

同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量

方案层对C_1(景色)的成对比较阵

方案层对C_2(费用)的成对比较阵

…C_n

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 1/2 & 1 & 2\\ 1/5 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/8\\ 3 & 1 & 1/3\\ 8 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

…B_n

最大特征根 λ_1 λ_2 … λ_n

权向量 $w_1^{(3)}$ $w_2^{(3)}$ … $w_n^{(3)}$

组合权向量

第3层对第2层的计算结果

k	1	2	3	4	5
$w_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

$w^{(2)}$

0.263

0.475

0.055

0.090

0.110

RI=0.58 (n=3), CI_k 均可通过一致性检验

方案P_1对目标的组合权重为0.595×0.263+ …=0.300

方案层对目标的组合权向量为 $(0.300, 0.246, 0.456)^T$

组合权向量

第1层O

第2层C$_1$,…C$_n$

第3层P$_1$, …P$_m$

第2层对第1层的权向量

$$w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$$

第3层对第2层各元素的权向量

$$w_k^{(3)}=(w_{k1}^{(3)},\cdots,w_{km}^{(3)})^T,\ k=1,2,\cdots,n$$

构造矩阵 $W^{(3)}=[w_1^{(3)},\cdots,w_n^{(3)}]$

则第3层对第1层的组合权向量 $w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)}$

第s层对第1层的组合权向量

$$w^{(s)}=W^{(s)}W^{(s-1)}\cdots W^{(3)}w^{(2)}$$

其中$W^{(p)}$是由第p层对第p-1层权向量组成的矩阵

层次分析法的基本步骤

1）建立层次分析结构模型

深入分析实际问题，将有关因素自上而下分层（目标—准则或指标—方案或对象），上层受下层影响，而层内各因素基本上相对独立。

2）构造成对比较阵

用成对比较法和1~9尺度，构造各层对上一层每一因素的成对比较阵。

3）计算权向量并作一致性检验

对每一成对比较阵计算最大特征根和特征向量，作一致性检验，若通过，则特征向量为权向量。

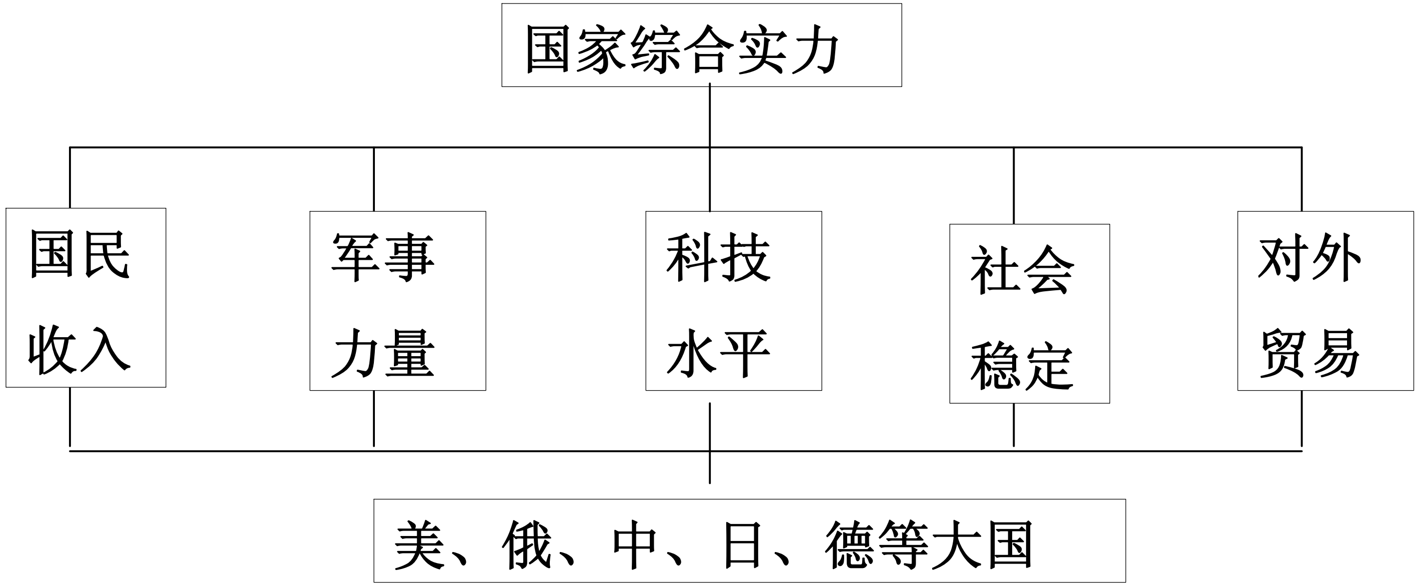
4）计算组合权向量（作组合一致性检验*）

组合权向量可作为决策的定量依据。

二. 层次分析法的广泛应用

- 应用领域：经济计划和管理，能源政策和分配，人才选拔和评价，生产决策，交通运输，科研选题，产业结构，教育，医疗，环境，军事等。
- 处理问题类型：决策、评价、分析、预测等。
- 建立层次分析结构模型是关键一步，要有主要决策层参与。
- 构造成对比较阵是数量依据，应由经验丰富、判断力强的专家给出。

例1 国家实力分析


国家综合实力

国民收入

军事力量

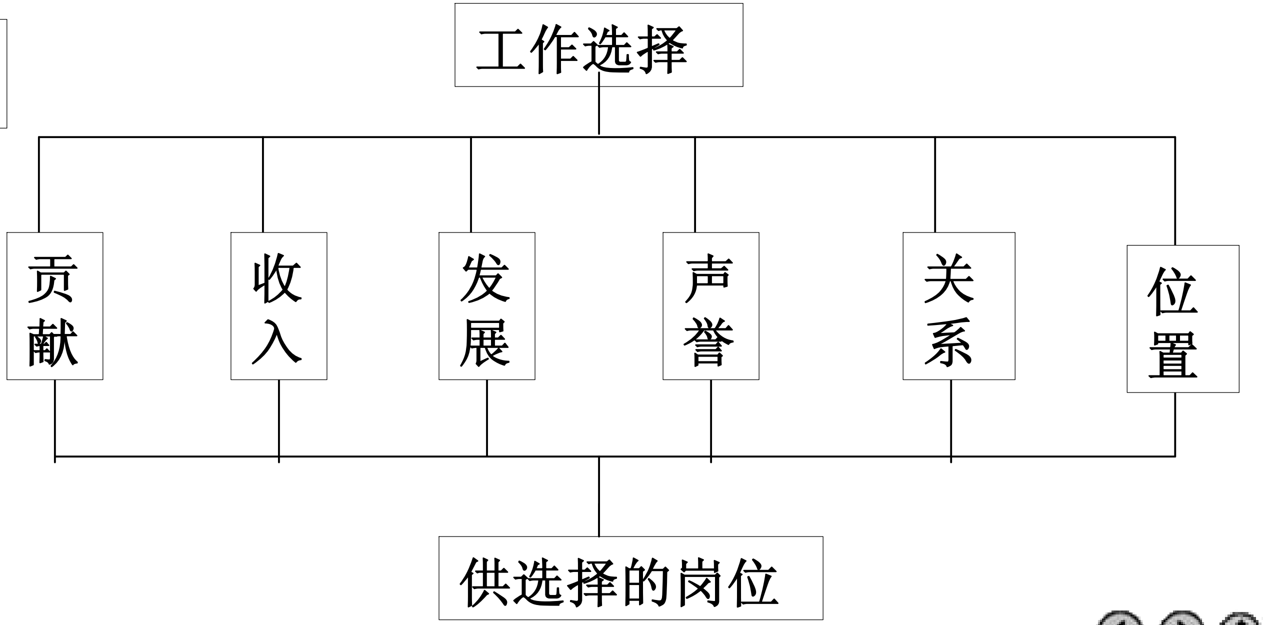
科技水平

社会稳定

对外贸易

美、俄、中、日、德等大国

例2 工作选择


工作选择

贡献

收入

发展

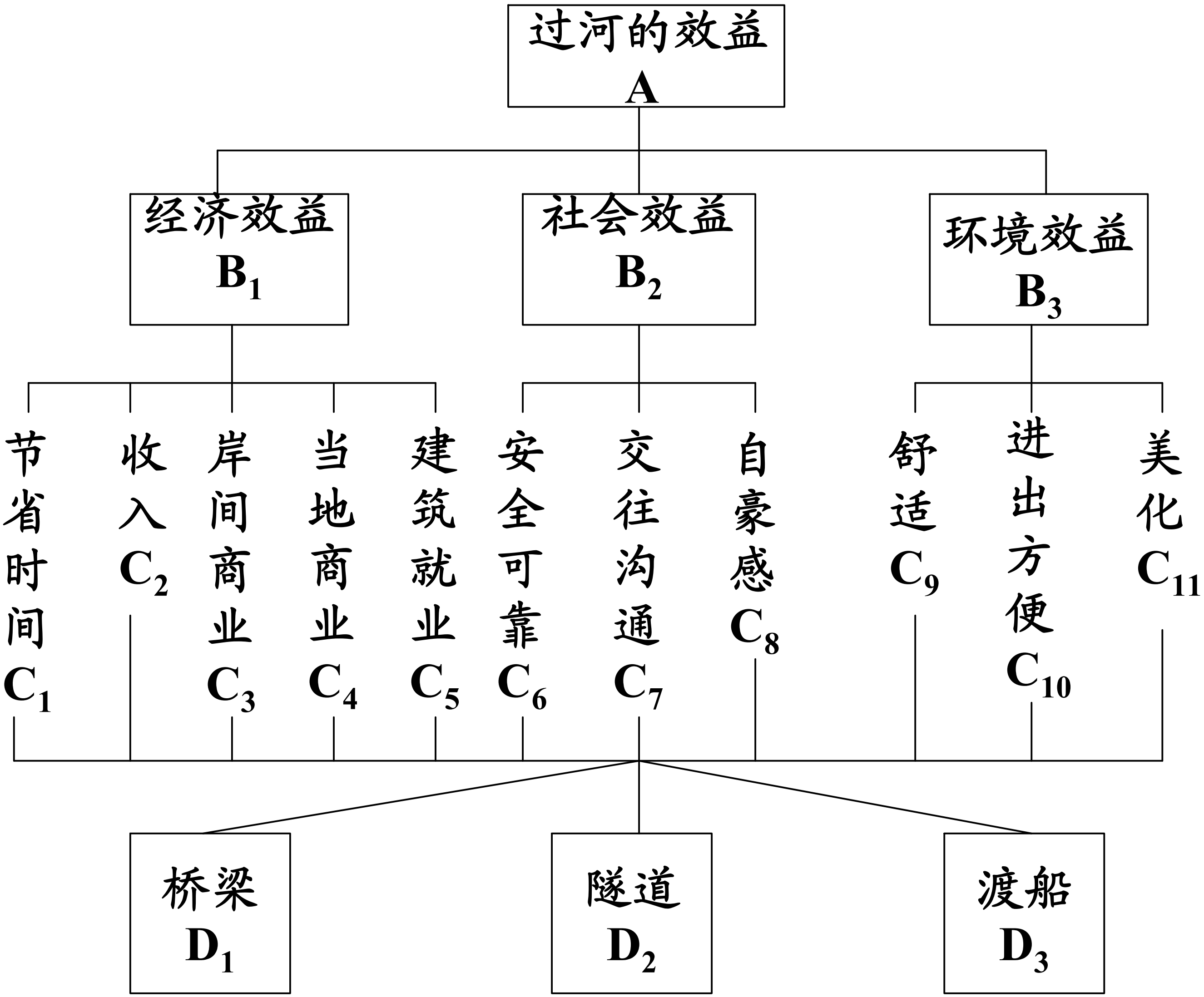
声誉

关系

位置

供选择的岗位

例3 横渡江河、海峡方案的抉择



过河的效益 A

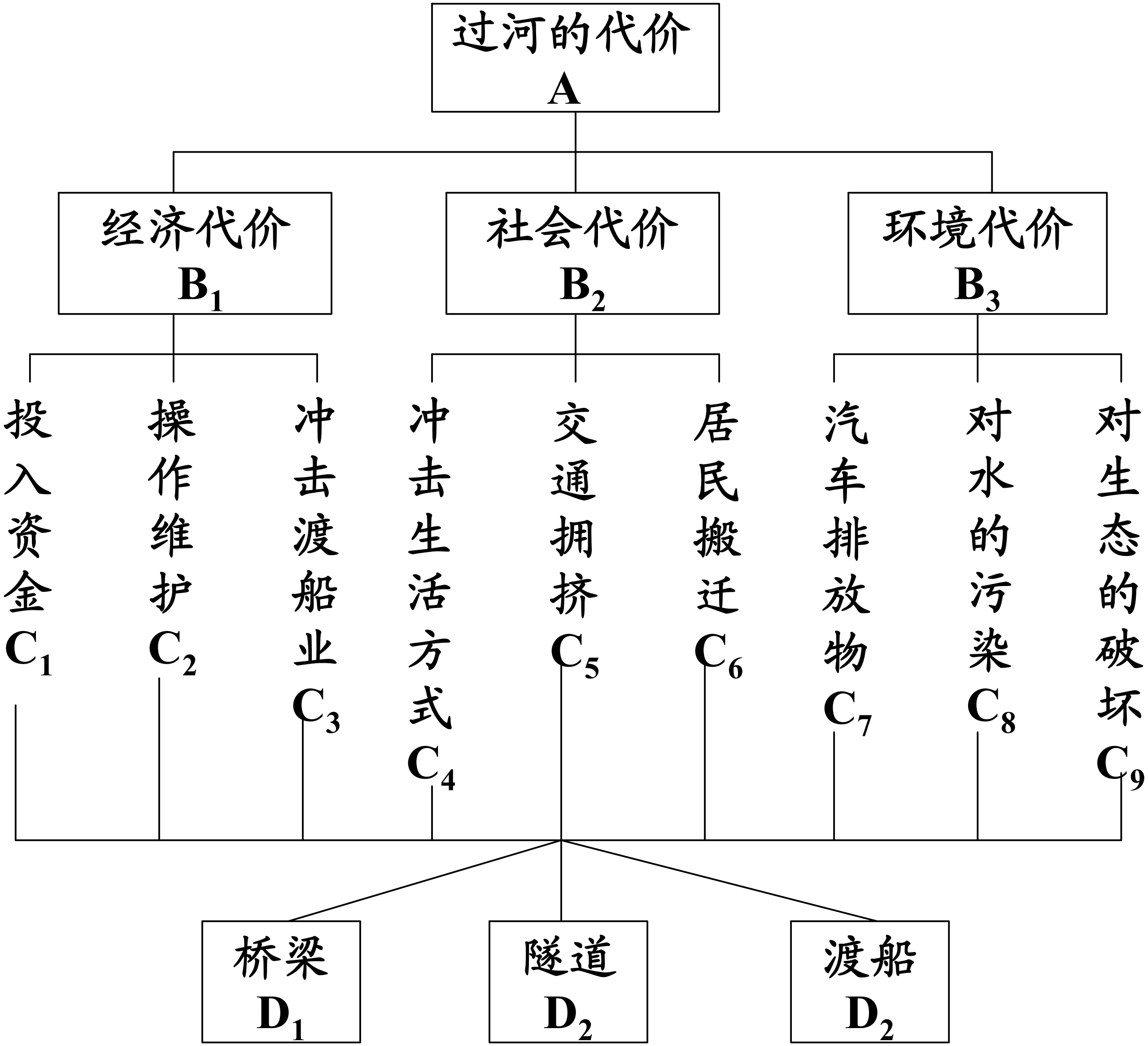
经济效益 B_1
社会效益 B_2
环境效益 B_3

节省时间 C_1
收入 C_2
岸间商业 C_3
当地商业 C_4
建筑就业 C_5
安全可靠 C_6
交往沟通 C_7
自豪感 C_8
舒适 C_9
进出方便 C_{10}
美化 C_{11}

桥梁 D_1
隧道 D_2
渡船 D_3

（1）过河效益层次结构

例3　横渡江河、海峡方案的抉择



过河的代价 A

经济代价 B_1

社会代价 B_2

环境代价 B_3

投入资金 C_1

操作维护 C_2

冲击渡船业 C_3

冲击生活方式 C_4

交通拥挤 C_5

居民搬迁 C_6

汽车排放物 C_7

对水的污染 C_8

对生态的破坏 C_9

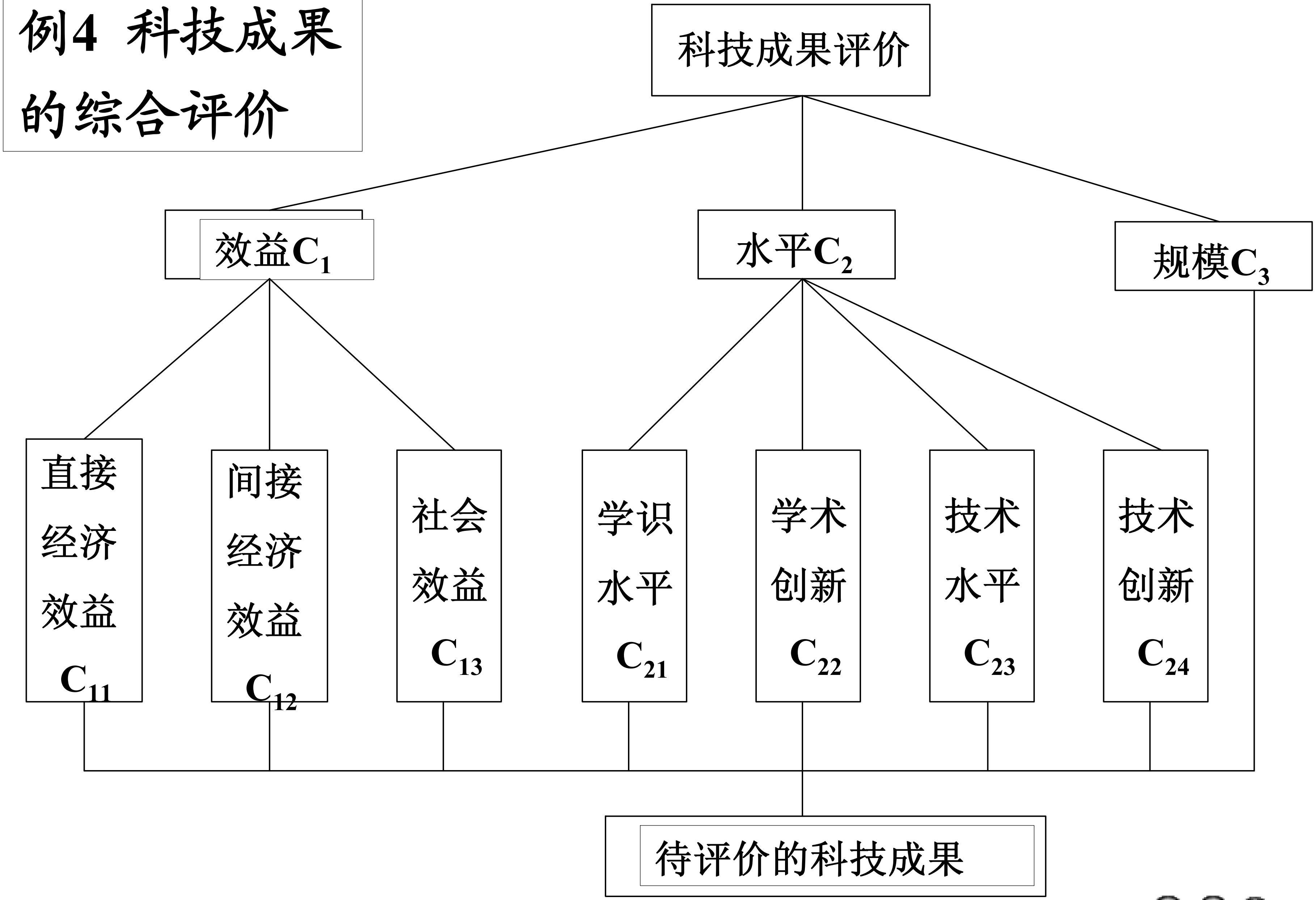
桥梁 D_1

隧道 D_2

渡船 D_2

（2）过河代价层次结构

例4 科技成果的综合评价


科技成果评价

效益C_1

水平C_2

规模C_3

直接经济效益C_{11}

间接经济效益C_{12}

社会效益C_{13}

学识水平C_{21}

学术创新C_{22}

技术水平C_{23}

技术创新C_{24}

待评价的科技成果

三. 层次分析法的若干问题

- 正互反阵的最大特征根是否为正数? 特征向量是否为正向量? 一致性指标能否反映正互反阵接近一致阵的程度?
- 怎样简化计算正互反阵的最大特征根和特征向量?
- 为什么用特征向量作为权向量?
- 当层次结构不完全或成对比较阵有空缺时怎样用层次分析法?

1. 正互反阵的最大特征根和特征向量的性质

定理1　正矩阵A的最大特征根λ是正单根，对应正特征向量w，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e} = w, \quad e = (1,1,\cdots,1)^T$

⇨ **正互反阵的最大特征根是正数，特征向量是正向量。**

定理2　n阶正互反阵A的最大特征根λ　n，$\lambda = n$是A为一致阵的充要条件。

⇨ 一致性指标 $CI = \frac{\lambda - n}{n - 1}$ 定义合理

2. 正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算

- 精确计算的复杂和不必要
- 简化计算的思路——一致阵的任一列向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

和法——取列向量的算术平均

例
$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/6 & 1/4 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列向量归一化}} \begin{bmatrix}0.6 & 0.615 & 0.545\\ 0.3 & 0.308 & 0.364\\ 0.1 & 0.077 & 0.091\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{算术平均}} \begin{bmatrix}0.587\\ 0.324\\ 0.089\end{bmatrix}=w$$

$$Aw=\begin{bmatrix}1.769\\ 0.974\\ 0.286\end{bmatrix} \quad \xrightarrow{Aw=\lambda w} \quad \lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587}+\frac{0.974}{0.324}+\frac{0.268}{0.089}\right)=3.009$$

精确结果:$w=(0.588,0.322,0.090)^T$, $\lambda=3.010$

简化计算

根法——取列向量的几何平均

幂法——迭代算法

1）任取初始向量$w^{(0)}$, k:=0，设置精度ε

2) 计算 $\tilde{w}^{(k+1)} = Aw^{(k)}$

3）归一化 $w^{(k+1)} = \tilde{w}^{(k+1)} / \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i^{(k+1)}$

4）若 $\max_i \left| w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)} \right| < \varepsilon$**，停止;**

否则，k:=k+1, 转2

5) 计算 $\lambda = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\tilde{w}_i^{(k+1)}}{w_i^{(k)}}$

3. 特征向量作为权向量——成对比较的多步累积效应

问题

一致阵A，权向量$w=(w_1,\ldots w_n)^T$，$a_{ij}=w_i/w_j$

A不一致，应选权向量w使w_i/w_j与 a_{ij}相差尽量小（对所有i,j)。

用拟合方法确定w ⇨

$$\min_{w_i\,(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-\frac{w_i}{w_j}\right)^2$$

非线性最小二乘

线性化——对数最小二乘

$$\min_{w_i\,(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln a_{ij}-\ln\frac{w_i}{w_j}\right)^2$$

结果与根法相同

多步累积效应

- 按不同准则确定的权向量不同，特征向量有什么优点。

成对比较

C_i:C_j (直接比较）

$a_{ij}\sim$ 1步强度

$$A^2=(a_{ij}^{(2)})\quad a_{ij}^{(2)}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}a_{sj}$$

$a_{ij}^{(2)}\sim$ 2步强度

$a_{is}a_{sj}\sim$ C_i通过C_s与C_j的比较

更能反映C_i对C_j的强度

$A^k=(a_{ij}^{(k)}),\quad a_{ij}^{(k)}\sim k$步强度

体现多步累积效应

$$\forall i,j,\exists k_0,k>k_0,a_{is}^{(k)}\geq a_{js}^{(k)}\text{或}a_{is}^{(k)}\leq a_{js}^{(k)}(s=1,\cdots n)$$

⇨ 当k足够大, A^k第i行元素反映C_i的权重 ⇨ 求A^k的行和

定理1 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k e}{e^T A^k e}=w$

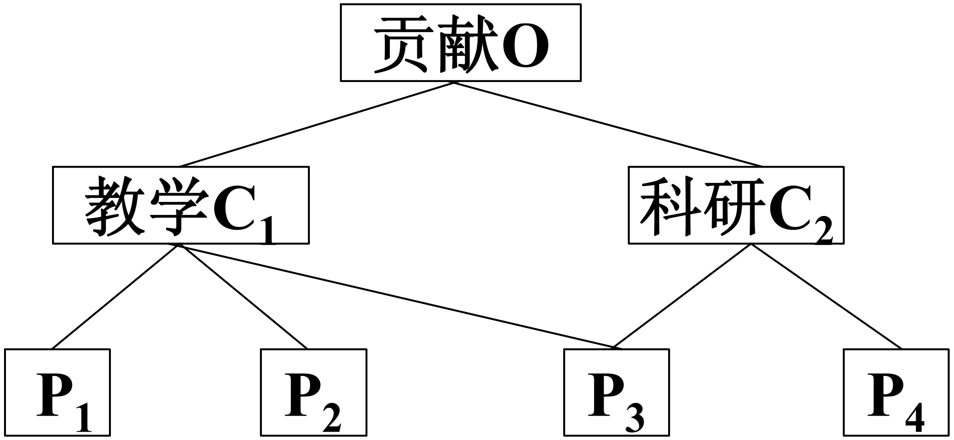
特征向量体现多步累积效应

4.不完全层次结构中组合权向量的计算

完全层次结构：上层每一元素与下层所有元素相关联

不完全层次结构

例：评价教师贡献的层次结构



贡献O

教学C_1

科研C_2

P_1 P_2 P_3 P_4

设第2层对第1层权向量

$w^{(2)}=(w_1^{(2)},w_2^{(2)})^T$已定

第3层对第2层权向量

$w_1^{(3)}=(w_{11}^{(3)},w_{12}^{(3)},w_{13}^{(3)},0)^T$

$w_2^{(3)}=(0,0,w_{23}^{(3)},w_{24}^{(3)})^T$已得

讨论由$w^{(2)}$,$W^{(3)}=(w_1^{(3)}, w_2^{(3)})$

计算第3层对第1层权向量

$w^{(3)}$的方法

P_1,P_2只作教学, P_4只作科研,
P_3兼作教学、科研。

C_1,C_2支配元素的数目不等

考察一个特例：　若C_1,C_2重要性相同，$w^{(2)}=(1/2,1/2)^T$,

P_1~P_4能力相同，$w_1^{(3)}=(1/3,1/3,1/3,0)^T, w_2^{(3)}=(0,0,1/2,1/2)^T$

公正的评价应为：　$P_1:P_2:P_3:P_4=1:1:2:1$

- 不考虑支配元素数目不等的影响

仍用 $w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)}$计算 ⇨ $w^{(3)}=(1/6,1/6,5/12,1/4)^T$

- 支配元素越多权重越大

教学、科研任务由上级安排

用支配元素数目n_1,n_2对$w^{(2)}$加权修正

$$\tilde{w}^{(2)}=(n_1w_1^{(2)},n_2w_2^{(2)})^T/(n_1w_1^{(2)}+n_2w_2^{(2)})$$

$n_1=3,\ n_2=2,$

$\tilde{w}^{(2)}=(3/5,2/5)^T$

再用 $w^{(3)}=W^{(3)}\tilde{w}^{(2)}$计算 ⇨ $w^{(3)}=(1/5,1/5,2/5,1/5)^T$

- 支配元素越多权重越小

教学、科研靠个人积极性

5. 残缺成对比较阵的处理

例 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & \theta \\ 1/2 & 1 & 2 \\ \theta & 1/2 & 1\end{bmatrix} \Longrightarrow C=\begin{bmatrix}1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$

辅助矩阵

θ为残缺元素

$$Cw=\lambda w \Rightarrow \lambda=3,\ w=(0.5714,0.2857,0.1429)^T$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{A}w=\lambda w$$

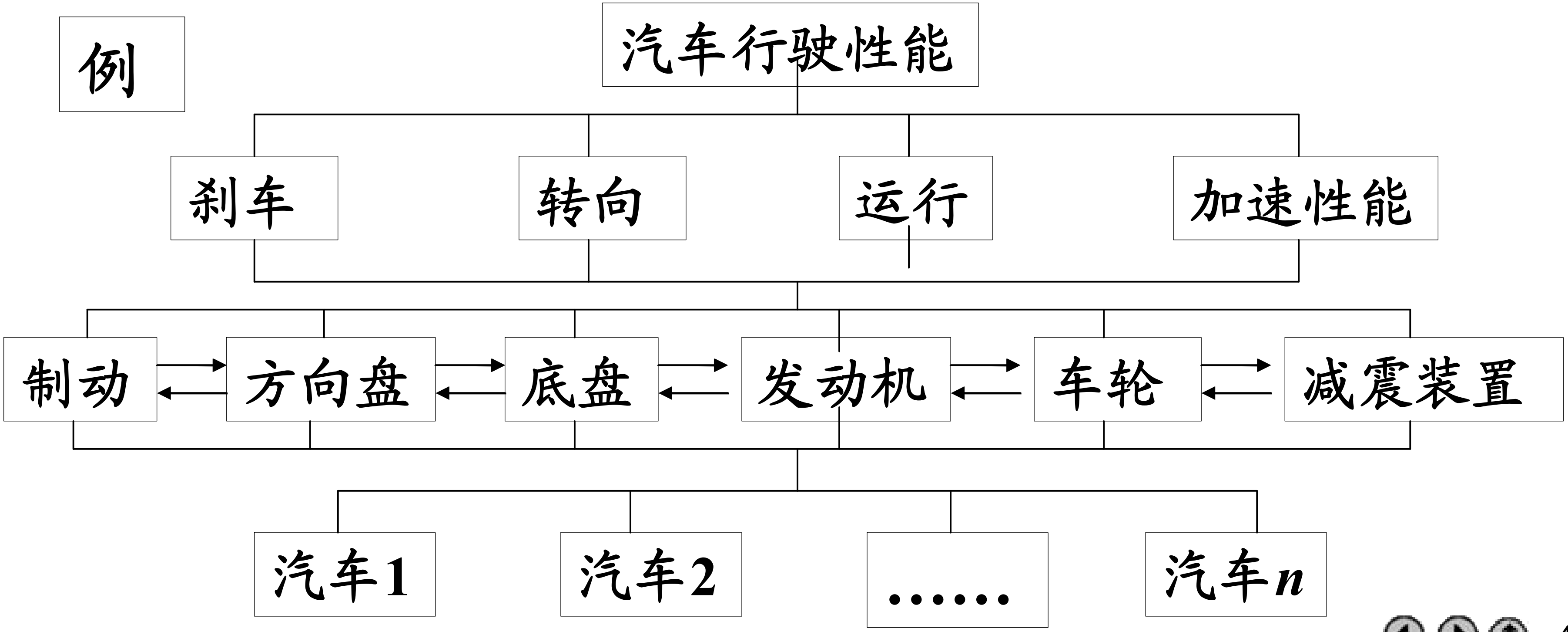
$$\bar{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2\end{bmatrix} \qquad \bar{a}_{ij}=\begin{cases}a_{ij}, & i\neq j, a_{ij}\neq\theta \\ 0, & i\neq j, a_{ij}=\theta \\ m_i+1, & i=j\end{cases}$$

m_i~A第i行中θ的个数

6. 更复杂的层次结构

- 递阶层次结构：层内各元素独立，无相互影响和支配；层间自上而下、逐层传递，无反馈和循环。
- 更复杂的层次结构：层内各元素间存在相互影响或支配；层间存在反馈或循环。

例



层次分析法的优点

- 系统性——将对象视作系统，按照分解、比较、判断、综合的思维方式进行决策——系统分析（与机理分析、测试分析并列）；
- 实用性——定性与定量相结合，能处理传统的优化方法不能解决的问题;
- 简洁性——计算简便，结果明确，便于决策者直接了解和掌握。

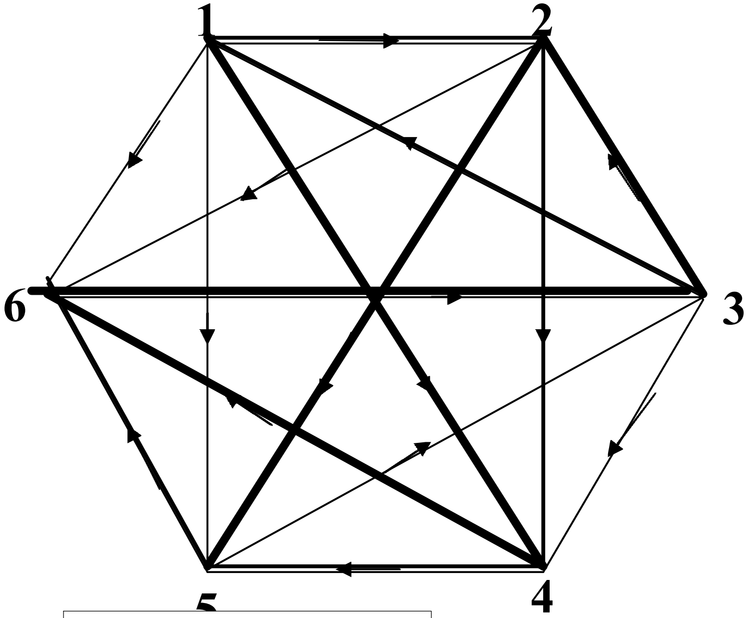
层次分析法的局限

- 囿旧——只能从原方案中选优，不能产生新方案;
- 粗略——定性化为定量，结果粗糙;
- 主观——主观因素作用大，结果可能难以服人。

8.2 循环比赛的名次

- *n*支球队循环赛，每场比赛只计胜负，没有平局。
- 根据比赛结果排出各队名次

6支球队比赛结果



方法1：寻找按箭头方向通过全部顶点的路径。

312456　　146325　　…… ⇨ 无法排名

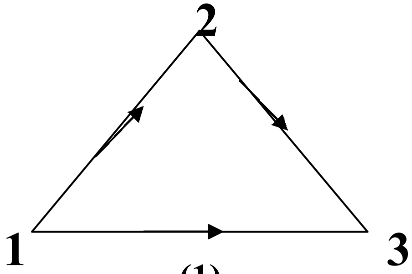
方法2：计算得分：1队胜4场，2, 3队各胜3场，4, 5队各胜2场， 6队胜1场。 2, 3队， 4, 5队无法排名

$3\rightarrow2$，$4\rightarrow5$ ⇨ 排名 132456 合理吗

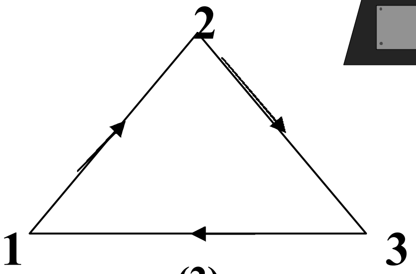
循环比赛的结果——竞赛图

每对顶点间都有边相连的有向图

3个顶点的竞赛图



(1)



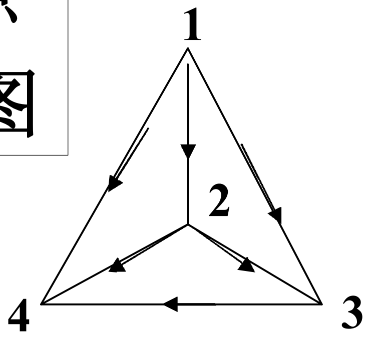
(2)

名次

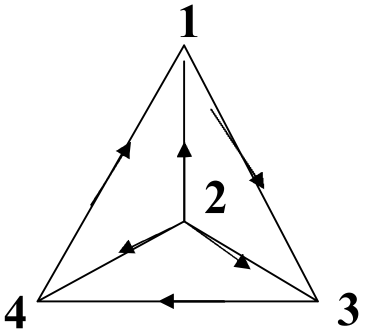
{1，2，3}

{(1,2,3)}并列

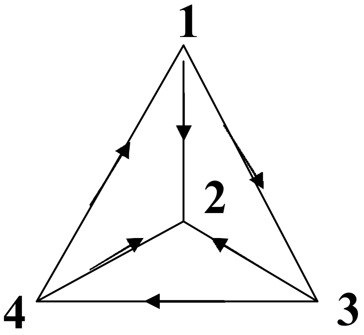
4个顶点的竞赛图



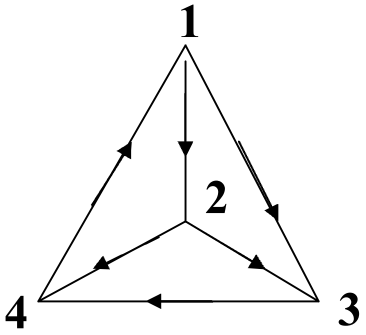
(1)



(2)



(3)



(4)

名次

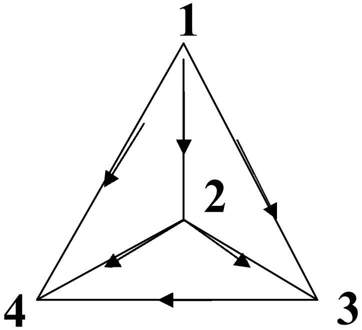
{1, 2, 3, 4}

{2,(1,3,4)}

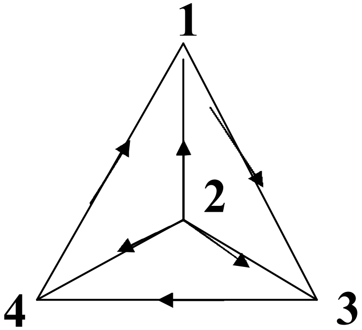
{(1,3,4), 2}

{(1,2),(3,4)}

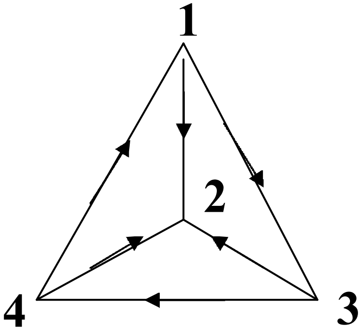
{1, 2, 3, 4}?



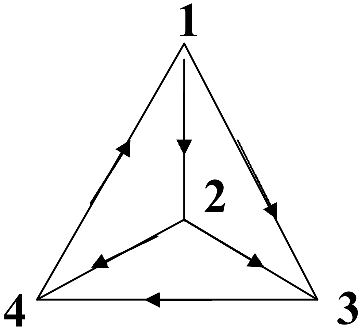
(1)



(2)



(3)



(4)

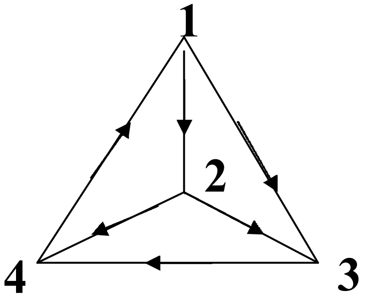
竞赛图的3种形式

- 具有唯一的完全路径，如(1)；
- 双向连通图——任一对顶点存在两条有向路径相互连通，如(4)；
- 其他，如(2)，(3)。

竞赛图的性质

- 必存在完全路径；
- 若存在唯一的完全路径，则由它确定的顶点顺序与按得分排列的顺序一致，如(1)。

双向连通竞赛图G=(*V*,*E*)的名次排序



(4)

邻接矩阵

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E \\ 0, & v_i v_j \notin E \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得分向量

$$s = (s_1, s_2, \cdots, s_n)^T$$

$$s = Ae, \; e = (1,1,\cdots,1)^T$$

$s^{(1)} = Ae = (2,2,1,1)^T$ ~ 1级得分向量

$s^{(2)} = As^{(1)} = (3,2,1,2)^T$ ~ 2级得分向量

$s^{(3)} = (3,3,2,3)^T, \quad s^{(4)} = (5,5,3,3)^T$

$s^{(5)} = (8,6,3,5)^T, \quad s^{(6)} = (9,8,5,8)^T$

$s^{(7)} = (13,13,8,9)^T, s^{(8)} = (21,17,9,13)^T$

……

$$s^{(k)} = As^{(k-1)} = A^k e$$

$$k \to \infty, s^{(k)} \to ?$$

双向连通竞赛图的名次排序

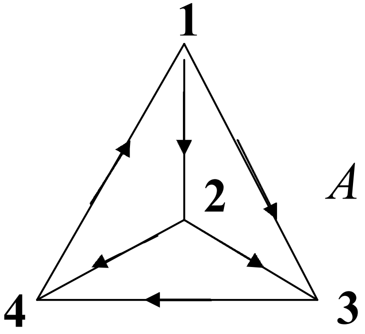
$$s^{(k)}=As^{(k-1)}=A^{k}e$$

- 对于$n(>3)$个顶点的双向连通竞赛图，存在正整数r，使邻接矩阵A 满足$A^{r}>0$，A称素阵

- 素阵A的最大特征根为正单根λ，对应正特征向量s，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^{k}e}{\lambda^{k}}=s$$

⇨ $k\to\infty, s^{(k)}$(归一化后)$\to s$ ⇨ 用s排名



(4)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

⇨ $\lambda=1.4,$

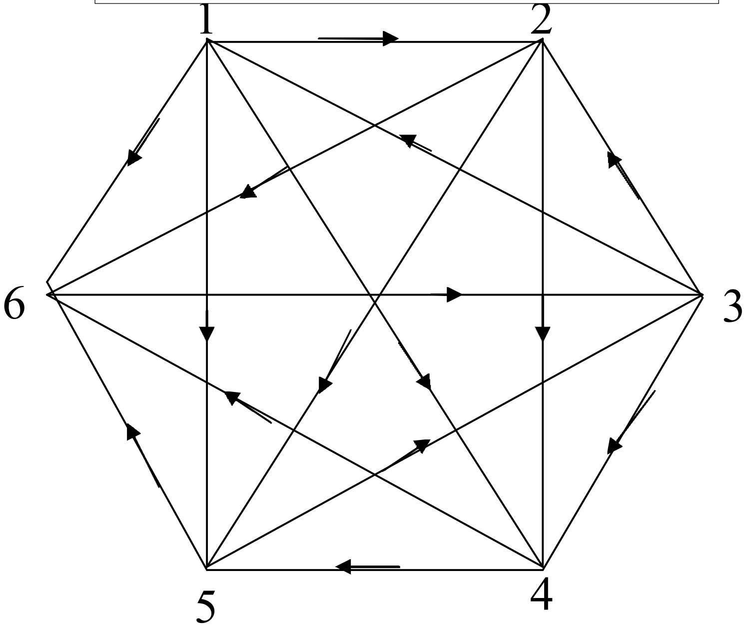
$s=(0.323,0.280,0.167,0.230)^{T}$

{1, 2, 3, 4}?

排名为{1，2，4，3}

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

6支球队比赛结果



$$s^{(1)}=(4,3,3,2,2,1)^T,\qquad s^{(2)}=(8,5,9,3,4,3)^T$$

$$s^{(3)}=(15,10,16,7,12,9)^T,\qquad s^{(4)}=(38,28,32,21,25,16)^T$$

$$\lambda=2.232,\, s=(0.238,0.164,0.231,0.113,0.150,0.104)^T$$

排名次序为{1，3， 2，5，4，6}

8.3 社会经济系统的冲量过程

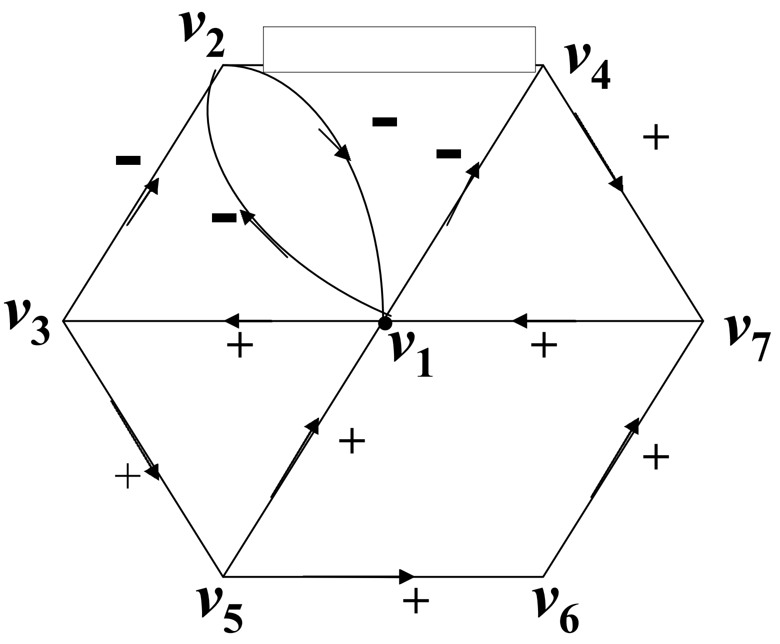
例 能源利用系统的预测

v_1—能源利用量； v_2—能源价格；

v_3—能源生产率； v_4—环境质量；

v_5—工业产值； v_6—就业机会；

v_7—人口总数。



带符号的有向图

系统的元素——图的顶点

元素间的影响——带方向的弧

影响的正反面——弧旁的+、– 号

影响——直接影响

符号——客观规律；方针政策

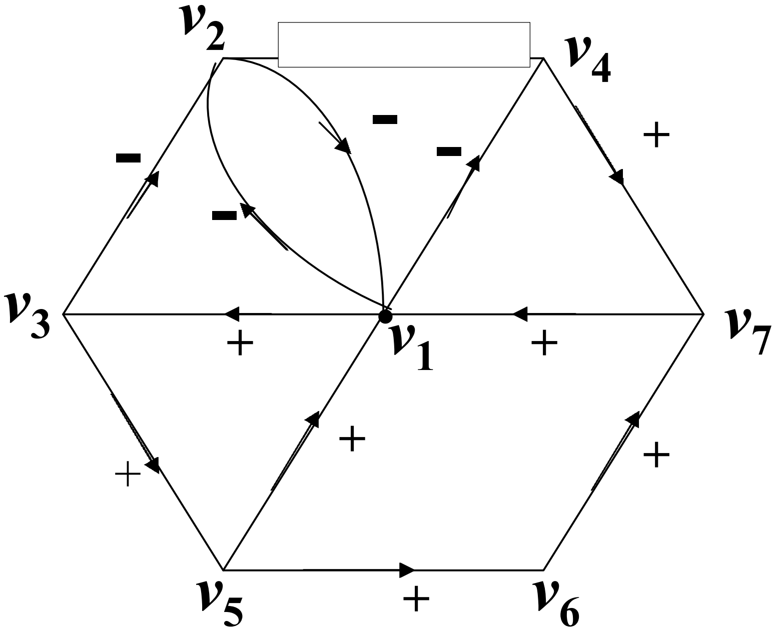
带符号有向图$G_1=(V,E)$的邻接矩阵A

V~顶点集　E~弧集

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若v_iv_j为+\\ -1, & 若v_iv_j为-\\ 0, & 若v_iv_j\notin E\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

定性模型



带符号的有向图G_1

$$v_i \xrightarrow[-]{+} v_j$$

某时段v_i增加导致
下时段v_j增加减少

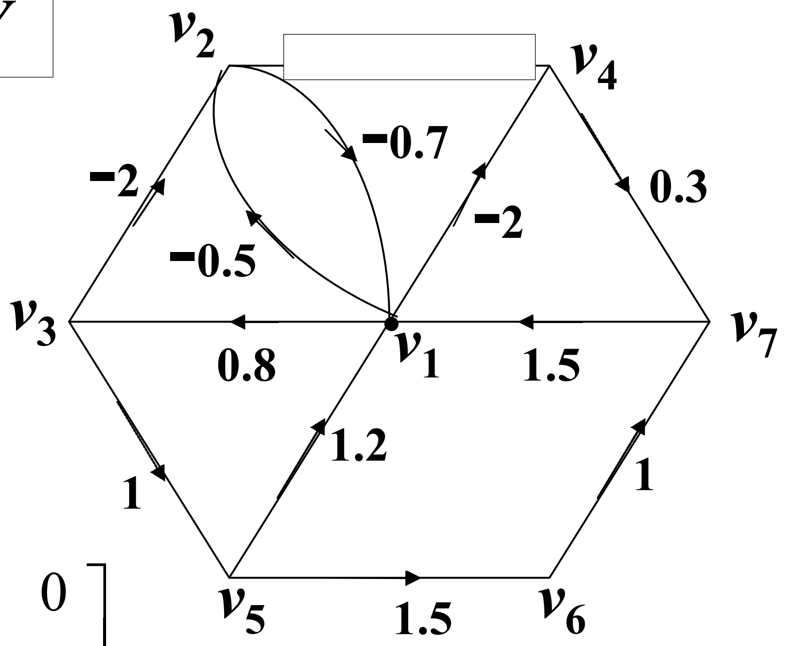
加权有向图G_2及其邻接矩阵W

$$v_i \xrightarrow{w_{ij}} v_j$$

某时段v_i增加1单位导致

下时段v_j增加w_{ij}单位

$$W=\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.8 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



加权有向图G_2

定量模型

A视为 W的特例

冲量过程（Pulse Process)

$$v_i \xrightarrow{w_{ij}} v_j$$

研究由某元素v_i变化引起的系统的演变过程

$v_i(t) \sim v_i$在时段t 的值； $p_i(t) \sim v_i$在时段t 的改变量(冲量)

$$v_i(t+1) = v_i(t) + p_i(t+1), \quad i = 1,2,\cdots,n, t = 0,1,2,\cdots$$

$$p_j(t+1) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} p_i(t), \text{ 或 } p_j(t+1) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i(t)$$

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t)), \ p(t) = (p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t))$$

冲量过程模型

$$v(t+1) = v(t) + p(t+1)$$

$$p(t+1) = p(t)W \quad \text{或} \quad p(t+1) = p(t)A$$

能源利用系统的预测

$$v(t+1)=v(t)+p(t+1)$$

简单冲量过程——初始冲量**$p(0)$**中某个分量为**1**，其余为**0**的冲量过程

$$p(t+1)=p(t)A$$

设 $v(0)=p(0)$

若开始时能源利用量有突然增加，预测系统的演变

能源利用系统的 **$p(t)$**和**$v(t)$**

t	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**-1**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**2**	**-2**	**1**	**-1**	**1**	**0**	**-1**
3	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**3**	**-3**	**2**	**-2**	**1**	**1**	**-1**
	……							……						

简单冲量过程S的稳定性

- 任意时段S的各元素的值和冲量是否为有限(稳定)
- S不稳定时如何改变可以控制的关系使之变为稳定

$$p(t+1) = p(t)W \qquad v(t+1) = v(t) + p(t+1)$$

S冲量稳定~对任意 *i,t*, $|p_i(t)|$有界

S值稳定~对任意 *i,t*, $|v_i(t)|$有界

值稳定

⇩

冲量稳定

$$p(t) = p(0)W^t$$

⇨ **S的稳定性取决于*W*的特征根**

记*W*的非零特征根为λ

简单冲量过程S的稳定性

- **S冲量稳定 $\Rightarrow |\lambda| \le 1$**
- **S冲量稳定 $\Leftrightarrow |\lambda| \le 1$且均为单根**
- **S值稳定 $\Leftrightarrow$ S冲量稳定且λ不等于1**

对于能源利用系统的邻接矩阵A 特征多项式

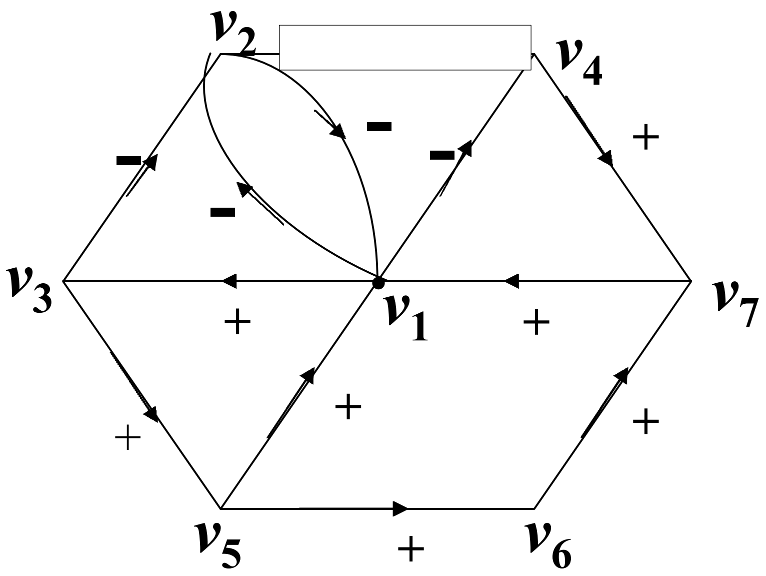
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda) = \lambda^2(\lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 - 1)$$

$f(1) = -2, f(2) = 76$ ⇨ $\exists \lambda \in (1,2)$

能源利用系统存在冲量不稳定的简单冲量过程

简单冲量过程的稳定性



改进的玫瑰形图S^*~带符号的有向图双向连通，且存在一个位于所有回路上的中心顶点。

回路长度~构成回路的边数

回路符号~构成回路的各有向边符号+1或-1之乘积

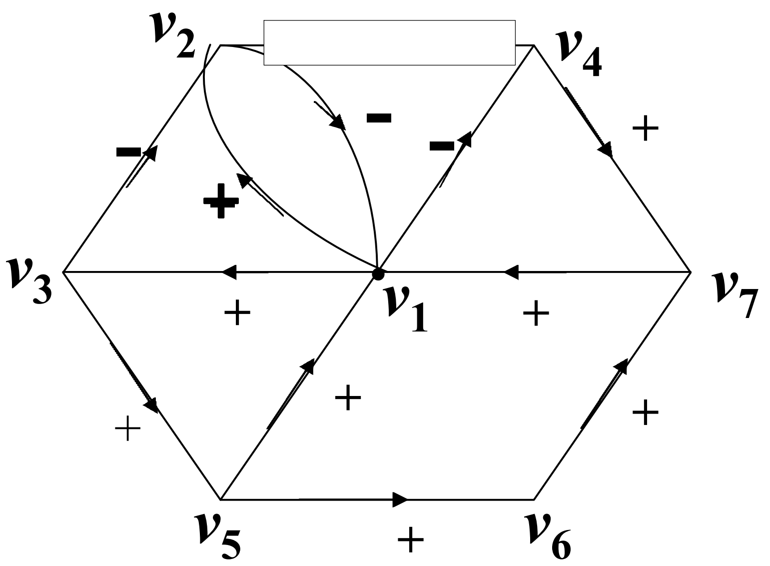
a_k~长度为k的回路符号和

r~使a_k不等于0的最大整数

- S^*冲量稳定 $\Rightarrow$ $a_r = \pm 1,$ $\quad a_k = -a_r \cdot a_{r-k} \, (k = 1, 2, \cdots, r-1)$

- 若S^*冲量稳定，则S^*值稳定 $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{r} a_k \neq 1$

简单冲量过程S*的稳定性



$a_1=0$, $a_2=(-1)_{v1v2}\times(-1)_{v2v1}=1$

$a_3=(+1)_{v1v3v5v1}+(-1)_{v1v4v7v1}$

$+(+1)_{v1v3v2v1}=1$, $a_4=0$, $a_5=1$, $r=5$

- S*冲量稳定 ⇒ $a_r=\pm1,$ $a_k=-a_r\cdot a_{r\text{-}k}\ (k=1,2,\cdots,r-1)$

$a_2\neq -a_5\cdot a_3$ ⇨ S*冲量不稳定 v_1~利用量, v_2~价格

$(-1)_{v1v2}\rightarrow(+1)_{v1v2}$(由鼓励利用变为限制利用)⇒ $a_2=-1$

⇨ A的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^2(\lambda^5+\lambda^3-\lambda^2-1)$

⇨ $\lambda=0,0,1,\pm i,(-1\pm\sqrt{3}i)/2$ ⇨ S*冲量稳定

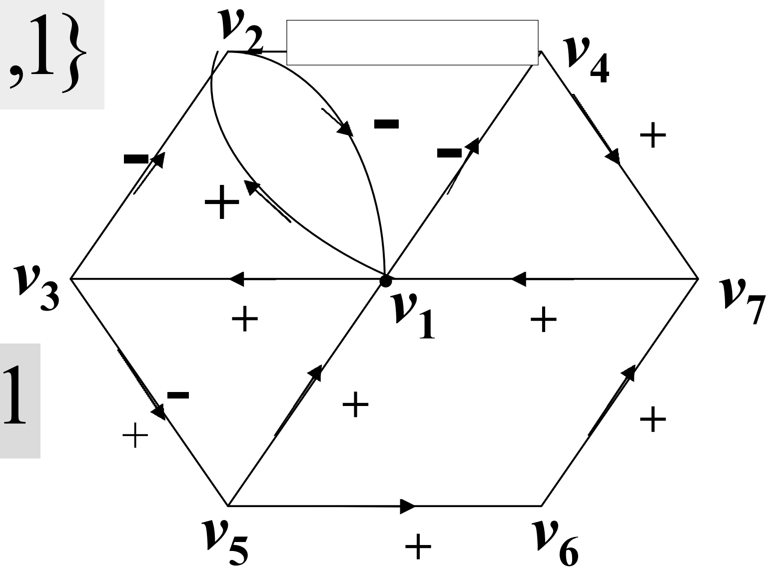
$\Rightarrow |\lambda|\le 1$ 且为单根

- S*冲量稳定 ⇔ $|\lambda|\le 1$且均为单根

- S*冲量稳定 ⇒ $a_r = \pm 1,\ a_k = -a_r \cdot a_{r\text{-}k}\ (k=1,2,\cdots r-1)$
- 若S*冲量稳定，则S*值稳定 ⇔ $\sum_{k=1}^{r} a_k \neq 1$

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{0,-1,1,0,1\}$$

⇨ S*值不稳定



S*值稳定 ⇦ $a_3, a_5 = 1 \Rightarrow a_3, a_5 = -1$

⇦ $(+1)_{v3v5} \rightarrow (-1)_{v3v5}$

v_3—能源生产率
v_5—工业产值

⇨ **$(-1)_{v3v5}$** 违反客观规律

能源利用系统的值不应稳定？

8.4　效益的合理分配

例　甲乙丙三人合作经商，若甲乙合作获利7元，甲丙合作获利5元，乙丙合作获利4元，三人合作获利11元。又知每人单干获利1元。问三人合作时如何分配获利？

记甲乙丙三人分配为 $x=(x_1,x_2,x_3)$

$$x_1+x_2+x_3=11$$

$$x_1+x_2\ge 7$$

$$x_1+x_3\ge 5$$

$$x_2+x_3\ge 4$$

$$x_1,x_2,x_3\ge 1$$

解不唯一

(5，3，3)

(4，4，3)

(5，4，2)

……

(1) Shapley合作对策

集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$

$\forall$子集$s\in I$，$\exists$实函数$v(s)$满足

$$v(\phi)=0$$

$$v(s_1\bigcup s_2)\geq v(s_1)+v(s_2),\ s_1\bigcup s_2=\phi$$

[*I*,*v*] ~*n*人合作对策，*v*~特征函数

***v*(*s*)~ 子集*s*的获利**

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

~*n*人从*v*(*I*)得到的分配，满足

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=v(I)$$

$$x_i\geq v(i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

Shapley合作对策

公理化方法 ⇨ **Shapley值**

$$x_i = \sum_{s \in S_i} w(|s|)[v(s) - v(s \setminus i)],\ \ i = 1,2,\cdots n$$

$$w(|s|) = \frac{(n - |s|)!(|s| - 1)!}{n!}$$

$|s|$~子集 s中的元素数目， S_i~包含i的所有子集

$[v(s) - v(s \setminus i)]$ ~ i 对合作s 的“贡献” $(i \in s)$

$w(|s|)$ ~由$|s|$决定的“贡献”的权重

三人(I={1,2,3})经商中甲的分配x_1的计算

$$x_1=\sum_{s\in S_1} w(|s|)[v(s)-v(s\setminus 1)]$$

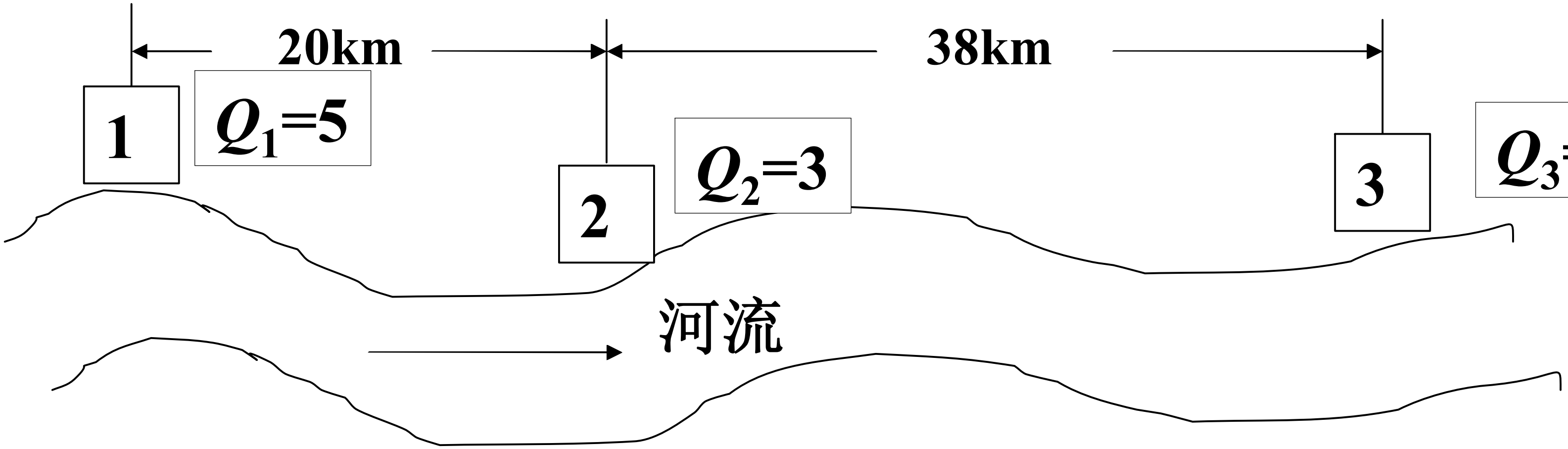
S_1	1	1 ∪ 2	1 ∪ 3	I
$v(s)$	1	7	5	11
$v(s\setminus 1)$	0	1	1	4
$v(s)-v(s\setminus 1)$	1	6	4	7
$\|s\|$	1	2	2	3
$w(\|s\|)$	1/3	1/6	1/6	1/3
$w(\|s\|)[v(s)-v(s\setminus 1)]$	1/3	1	2/3	7/3

x_1=13/3

类似可得 x_2=23/6, x_3=17/6

合作对策的应用 例1 污水处理费用的合理分担

三城镇地理位置示意图



- 污水处理，排入河流
- 三城镇可单独建处理厂，或联合建厂(用管道将污水由上游城镇送往下游城镇)

Q~污水量，*L*~管道长度

建厂费用$P_1=73Q^{0.712}$

管道费用$P_2=0.66Q^{0.51}L$

污水处理的5 种方案

1）单独建厂 $C(1)=73\cdot 5^{0.712}=230, C(2)=160, C(3)=230$

总投资 $D_1=C(1)+C(2)+C(3)=620$

2）1, 2合作 $C(1,2)=73\cdot(5+3)^{0.712}+0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 20=350$

总投资 $D_2=C(1,2)+C(3)=580$

3）2, 3合作 $C(2,3)=73\cdot(3+5)^{0.712}+0.66\cdot 3^{0.51}\cdot 38=365$

总投资 $D_3=C(1)+C(2,3)=595$

4）1, 3合作 $C(1,3)=73\cdot(5+5)^{0.712}+0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 58=463$

$>C(1)+C(3)=460$ 合作不会实现

5）三城合作总投资

$$D_5 = C(1,2,3) = 73 \cdot (5+3+5)^{0.712} + 0.66 \cdot 5^{0.51} \cdot 20 + 0.66(5+3)^{0.51} \cdot 38 = 556$$

***D_5*最小, 应联合建厂**

***D_5*如何分担？**

$$C(1) = 230$$
$$C(2) = 160$$
$$C(3) = 230$$

D_5

建厂费：d_1=73×(5+3+5)$^{0.712}$=453

1→2管道费：d_2=0.66 ×5$^{0.51}$ ×20=30

2→3管道费：d_3=0.66 ×(5+3)$^{0.51}$ ×38=73

城3建议：d_1 按 5:3:5分担, d_2,d_3由城1,2担负

城2建议：d_3由城1,2按 5:3分担, d_2由城1担负

城1计算：城3分担d_1×5/13=174<C(3),

城2分担d_1×3/13+d_3 ×3/8 =132<C(2),

城1分担d_1×5/13+d_3 ×5/8+ d_2 =250>C(1)

不同意

Shapley合作对策

集合 $I = \{1,2,3\}$

特征函数***v*(*s*)**~联合(集***s***)建厂比单独建厂节约的投资

$$v(\phi) = 0, \quad v(1) = v(2) = v(3) = 0$$

$$v(1 \cup 2) = C(1) + C(2) - C(1,2) = 230 + 160 - 350 = 40$$

$$v(2 \cup 3) = C(2) + C(3) - C(2,3) = 160 + 230 - 365 = 25$$

$$v(1 \cup 3) = 0$$

$$v(I) = C(1) + C(2) + C(3) - C(1,2,3) = 230 + 160 + 230 - 556 = 64$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ ~三城从节约投资***v*(*I*)**中得到的分配

计算城1从节约投资中得到的分配x_1

s	**1**	**$1\cup 2$**	**$1\cup 3$**	**I**
$v(s)$	**0**	**40**	**0**	**64**
$v(s\setminus 1)$	**0**	**0**	**0**	**25**
$v(s)-v(s\setminus 1)$	**0**	**40**	**0**	**39**
$\lvert s\rvert$	**1**	**2**	**2**	**3**
$w(\lvert s\rvert)$	**1/3**	**1/6**	**1/6**	**1/3**
$w(\lvert s\rvert)[v(s)-v(s\setminus 1)]$	**0**	**6.7**	**0**	**13**

$x_1=19.7$, $x_2=32.1$, $x_3=12.2$ **x_2**最大，如何解释？

⇨ 三城在总投资556中的分担

城1 C(1)-x_1=210.4, 城2 C(2)-x_2=127.8, 城3 C(3)-x_3=217.8

合作对策的应用 例2 派别在团体中的权重

90人的团体由**3**个派别组成，人数分别为**40, 30, 20**人。团体表决时需过半数的赞成票方可通过。

若每个派别的成员同时投赞成票或反对票，用**Shapley**合作对策计算各派别在团体中的权重。

团体 ***I*={1,2,3}**，依次代表**3**个派别

定义特征函数 $v(s)=\begin{cases}1, & s\text{的成员超过}\mathbf{45} \\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

$$v(\phi)=0,\quad v(1)=v(2)=v(3)=0,$$

$$v(1\bigcup 2)=v(1\bigcup 3)=v(2\bigcup 3)=v(I)=1$$

⇨ 权重 $x_1=x_2=x_3=1/3$

虽然**3**派人数相差很大

Shapley合作对策小结

优点：公正、合理，有公理化基础。

缺点：需要知道所有合作的获利，即要定义$I=\{1,2,\ldots n\}$的所有子集(共2^n-1个)的特征函数，实际上常做不到。

如n个单位治理污染, 通常知道第i方单独治理的投资y_i和n方共同治理的投资Y, 及第i方不参加时其余n-1方的投资z_i (i=1,2, …n). 确定共同治理时各方分担的费用。

若定义特征函数为合作的获利(节约的投资)，则有

$$v(i)=0\,(i=1,2,\cdots n),\, v(I)=\sum_{i=1}^{n} y_i - Y,\;\; v(I\setminus i)=\sum_{j\neq i} y_j - z_i$$

其它$v(s)$均不知道, 无法用Shapley合作对策求解

求解合作对策的其他方法

设只知道 $b_i = v(I \setminus i) \sim$ 无 ***i*** 参加时***n*-1**方合作的获利

及 $B = v(I) \sim$ 全体合作的获利

记 $b = (b_1, \cdots, b_n)$

求各方对获利 B 的分配 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ x_i \ge 0$

例. 甲乙丙三人合作经商，若甲乙合作获利**7**元，甲丙合作获利**5**元，乙丙合作获利**4**元，三人合作获利**11**元。问三人合作时如何分配获利？

即已知 $B = 11,\ b = (4,5,7),$ 求 $x = (x_1, x_2, x_3)$

（2）协商解　以*n*-1方合作的获利为下限

模型

$$\sum x_i = B$$

$$\begin{cases} \sum x_i - x_1 \geq b_1 \\ \quad\vdots \\ \sum x_i - x_n \geq b_n \end{cases} \Rightarrow Ax^T \geq b^T, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & & \mathbf{1} \\ & \ddots & \\ \mathbf{1} & & 0 \end{bmatrix}$$

求解　$A\underline{x}^T = b^T$ ⇨ $\underline{x}_i = \frac{1}{n-1}\sum b_i - b_i$　$\sim \boldsymbol{x_i}$的下限

将剩余获利 $B - \sum \underline{x}_i$ 平均分配

$$x_i = \underline{x}_i + \frac{1}{n}(B - \sum \underline{x}_i) = \frac{1}{n}\sum b_i - b_i + \frac{B}{n}$$

例．$b = (4,5,7),\ B = 11$

$\underline{x} = (4,3,1), B - \sum x_i = 3,$

$x = \underline{x} + (1,1,1) = (5,4,2)$

（3）Nash解

记$d=(d_1,\cdots,d_n)$为现状点（谈判时的威慑点）

在此基础上“均匀地”分配全体合作的获利*B*

模型

$$\max\prod_i (x_i - d_i)$$

$$s.t.\quad \sum x_i = B$$

$$x_i \ge d_i$$

⇨ $$x_i = d_i + \frac{1}{n}(B - \sum d_i)$$

$d_i = 0$ ⇨ 平均分配获利B

$d_i = \underline{x}_i$ ⇨ 3）Nash解 ⇒ 2）协商解

（4）最小距离解

记 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$为$x$的上限

模型

$$\min\sum_i (x_i-\bar{x}_i)^2$$

$$s.t.\quad \sum x_i = B$$

$$x_i \le \bar{x}_i$$

⇨

$$x_i = \bar{x}_i - \frac{1}{n}\left(\sum \bar{x}_i - B\right)$$

⇩

若令 $\bar{x}_i = B - b_i$ ⇨

$$x_i = \frac{1}{n}\sum b_i - b_i + \frac{B}{n}$$

第i方的边际效益

⇩

例. $b=(4,5,7),\ B=11$

$\bar{x}=(7,6,4),\sum x_i - B = 6,$

$x=\bar{x}-(2,2,2)=(5,4,2)$

4）最小距离解

$\Rightarrow$ 2）协商解

（5）满意解

满意度 $u_i = \dfrac{x_i - d_i}{e_i - d_i}$

d_i~现状点(最低点)

e_i~理想点(最高点)

模型

$$\max\left(\min_i u_i\right)$$
$$s.t.\ \sum x_i = B$$

⇨

$$u_i = \frac{B - \sum d_i}{\sum e_i - \sum d_i}$$
$$x_i = d_i + u_i(e_i - d_i)$$

$d_i = \underline{x}_i, e_i = \bar{x}_i$ ⇨ **5）基于满意度的解⇒ 2）协商解**

$d_i = 0, e_i = \bar{x}_i$ ⇨ $x_i = \dfrac{\bar{x}_i}{\sum \bar{x}_i} B$ ~ 按$\bar{x}_i$在$\sum \bar{x}_i$中的比例分配

（6）*Raiffi* 解

与协商解$x=(5,4,2)$比较

在 $\underline{x}$（$n-1$方合作获利的分配)基础上进行B的分配：

当j参与(原来无j的)$n-1$方合作时,获利为$B-b_j=\bar{x}_j$

$\bar{x}_j$先由j和$n-1$方平分，$n-1$方再等分

$$x_j=\frac{\bar{x}_j}{2},\quad x_i=\underline{x}_i+\frac{\bar{x}_j}{2(n-1)},i=1,\cdots,n,i\neq j$$

j取$1,2,\cdots n$,再平均 ,得到

$$x_i=\frac{n-1}{n}\underline{x}_i+\frac{1}{n}[\frac{\bar{x}_i}{2}+\frac{1}{2(n-1)}\sum_{j\neq i}\bar{x}_j]$$

例. $b=(4,5,7),B=11$

$\underline{x}=(4,3,1),\ \bar{x}=(7,6,4)$

$$x=(4\frac{2}{3},3\frac{11}{12},2\frac{5}{12})$$

求解合作对策的6种方法（可分为三类）

A类

Shapley合作对策

$$x_i=\sum_{s\in S_i} w(|s|)[v(s)-v(s\setminus i)], i=1,2,\cdots,n$$

需要所有 $v(s), s\in I$

$$w(|s|)=\frac{(n-|s|)!(|s|-1)!}{n!}$$

B类

只需 $b_i=v(I\setminus i), B=v(I)$

协商解

$$x_i=\underline{x}_i+\frac{1}{n}(B-\sum\underline{x}_i)$$

$\underline{x}_i$ ~下限

Nash解

$$x_i=d_i+\frac{1}{n}(B-\sum d_i)$$

d_i ~现状

最小距离解

$$x_i=\bar{x}_i-\frac{1}{n}(\sum\bar{x}_i-B)$$

$\bar{x}_i$ ~上限

满意解

d_i~现状, e_i~理想

$$u_i=\frac{B-\sum d_i}{\sum e_i-\sum d_i}$$

$$x_i=d_i+u_i(e_i-d_i)$$

$$\underline{x}=A^{-1}b, \bar{x}_i=B-b_i$$

$$d_i=\underline{x}_i, e_i=\bar{x}_i$$

⇩

B类4种方法相同

C 类　**Raiffi解**　只需 $b_i = v(I\setminus i), B = v(I)$

对每个j,上限$\bar{x}_j$先由j和$n-1$方平分，$n-1$方再等分

例：有一资方(甲)和二劳方(乙,丙), 仅当资方与至少一劳方合作时才获利10元，应如何分配该获利?

$A\,(Shapley).\quad x = (6.67, 1.67, 1.67)$

$B.\ b_i = v(I\setminus i), b = (0,10,10),\ B = v(I) = 10$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x}^T = A^{-1}b^T = (10,0,0) \\ \bar{x}_i = B - b_i, \bar{x} = (10,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow x = (10,0,0)$$

$$C\,(Raiffi).\quad x_i = \frac{n-1}{n}\underline{x}_i + \frac{1}{n}\left[\frac{\bar{x}_i}{2} + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{j\neq i}\bar{x}_j\right]$$

$x = (8.34, 0.83, 0.83)$

求解合作对策的三类方法小结

A类：公正合理；需要信息多，计算复杂。

B类：计算简单，便于理解，可用于各方实力相差不大的情况；一般来说它偏袒强者。

C类： 考虑了分配的上下限，又吸取了Shapley的思想，在一定程度上保护弱者。

第九章　概率模型

随机模型

确定性因素和随机性因素

随机因素可以忽略

随机因素影响可以简单地以平均值的作用出现

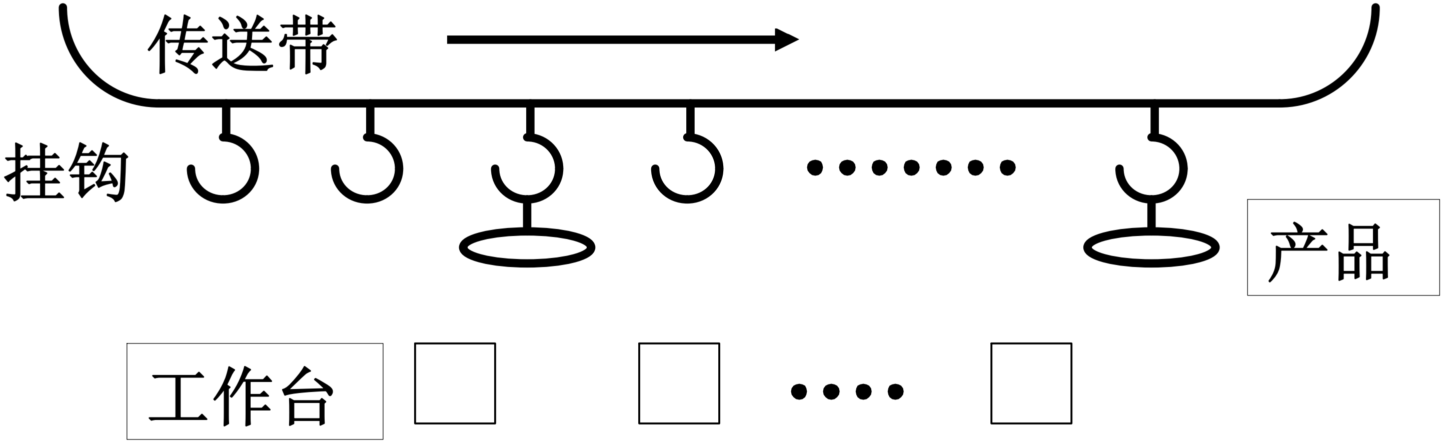
⇒ 确定性模型

随机因素影响必须考虑 ⇒ 随机性模型

概率模型　　统计回归模型　　马氏链模型

9.1 传送系统的效率

背景



工人将生产出的产品挂在经过他上方的空钩上运走，若工作台数固定，挂钩数量越多，传送带运走的产品越多。

在生产进入稳态后，给出衡量传送带效率的指标，研究提高传送带效率的途径

问题分析

- 进入稳态后为保证生产系统的周期性运转，应假定工人们的生产周期相同，即每人作完一件产品后，要么恰有空钩经过他的工作台，使他可将产品挂上运走，要么没有空钩经过，迫使他放下这件产品并立即投入下件产品的生产。

- 可以用一个周期内传送带运走的产品数占产品总数的比例，作为衡量传送带效率的数量指标。

- 工人们生产周期虽然相同，但稳态下每人生产完一件产品的时刻不会一致，可以认为是随机的，并且在一个周期内任一时刻的可能性相同。

模型假设

1）***n***个工作台均匀排列，***n***个工人生产相互独立，生产周期是常数；

2）生产进入稳态，每人生产完一件产品的时刻在一个周期内是等可能的；

3）一周期内***m***个均匀排列的挂钩通过每一工作台的上方，到达第一个工作台的挂钩都是空的；

4）每人在生产完一件产品时都能且只能触到一只挂钩，若这只挂钩是空的，则可将产品挂上运走；若该钩非空，则这件产品被放下，退出运送系统。

模型建立

- 定义传送带效率为一周期内运走的产品数（记作s，待定）与生产总数 n（已知）之比，记作 $D=s/n$

为确定s，从工人考虑还是从挂钩考虑，哪个方便？

- 若求出一周期内每只挂钩非空的概率p，则 $s=mp$

如何求概率

设每只挂钩为空的概率为q，则 $p=1-q$

设每只挂钩不被一工人触到的概率为r，则 $q=r^n$

设每只挂钩被一工人触到的概率为u，则 $r=1-u$

一周期内有m个挂钩通过每一工作台的上方

$u=1/m$ ⇨ $p=1-(1-1/m)^n$ ⇨ $\boxed{D=m[1-(1-1/m)^n]/n}$

模型解释

传送带效率(一周期内运走产品数与生产总数之比）

$$D = \frac{m}{n}[1-(1-\frac{1}{m})^n]$$

若(一周期运行的)挂钩数*m*远大于工作台数*n*, 则

$$D \approx \frac{m}{n}[1-(1-\frac{n}{m}+\frac{n(n-1)}{2m^2})] = 1-\frac{n-1}{2m}$$

定义*E*=1-*D* (一周期内未运走产品数与生产总数之比）

当*n*远大于1时, $E \approx n/2m$ ~ *E*与*n*成正比，与*m*成反比

若*n*=10, *m*=40,

D≈87.5% (89.4%)

提高效率的途径:

- 增加*m*
- 习题1

9.2 报童的诀窍

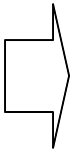
问题

报童售报： *a* (零售价) > *b*(购进价) > *c*(退回价)

售出一份赚 *a*-*b*；退回一份赔 *b*-*c*

每天购进多少份可使收入最大？

分析

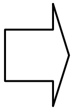


购进太多→卖不完退回→赔钱

购进太少→不够销售→赚钱少

存在一个合适的购进量

应根据需求确定购进量



每天需求量是随机的

每天收入是随机的

优化问题的目标函数应是长期的日平均收入

等于每天收入的期望

准备

调查需求量的随机规律——每天需求量为 *r* 的概率 *f*(*r*)，*r*=0,1,2…

建模

- 设每天购进 *n* 份，日平均收入为 **G**(*n*)
- 已知售出一份赚 *a*-*b*；退回一份赔 *b*-*c*

$$r \le n \Rightarrow \text{售出} r \Rightarrow \text{赚}(a-b)r$$

$$\Rightarrow \text{退回} n-r \Rightarrow \text{赔}(b-c)(n-r)$$

$$r > n \Rightarrow \text{售出} n \Rightarrow \text{赚}(a-b)n$$

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-b)r-(b-c)(n-r)]f(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)nf(r)$$

求 *n* 使 **G**(*n*) 最大

求解

将*r*视为连续变量

$f(r)\Rightarrow p(r)$ (概率密度）

$$G(n)=\int_0^n[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)dr+\int_n^\infty(a-b)np(r)dr$$

$$\frac{dG}{dn}=(a-b)np(n)-\int_0^n(b-c)p(r)dr$$

$$-(a-b)np(n)+\int_n^\infty(a-b)p(r)dr$$

$$=-(b-c)\int_0^n p(r)dr+(a-b)\int_n^\infty p(r)dr$$

$$\frac{dG}{dn}=0 \quad ⇨ \quad \frac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr}=\frac{a-b}{b-c}$$

结果解释

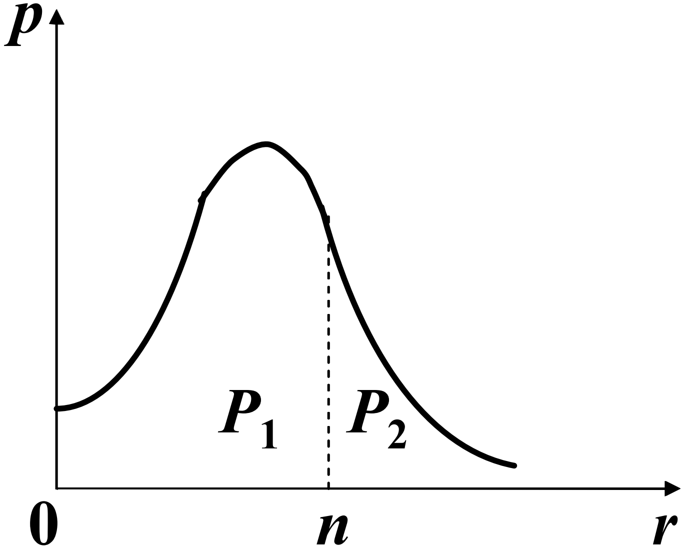
$$\frac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr} = \frac{a-b}{b-c}$$

$$\int_0^n p(r)dr = P_1, \int_n^\infty p(r)dr = P_2$$

取***n***使 $$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a-b}{b-c}$$

a-b **~售出一份赚的钱**

b-c **~退回一份赔的钱**



$$(a-b)\uparrow \Rightarrow n\uparrow, \quad (b-c)\uparrow \Rightarrow n\downarrow$$

9.3 随机存贮策略

问题 以周为时间单位；一周的商品销售量为随机；周末根据库存决定是否订货，供下周销售。

（*s*, *S*) 存贮策略

制订下界*s*, 上界*S*，当周末库存小于*s* 时订货，使下周初的库存达到*S*；否则，不订货。

考虑订货费、存贮费、缺货费、购进费，制订（*s*, *S*) 存贮策略, 使(平均意义下) 总费用最小

模型假设

- 每次订货费c_0, 每件商品购进价c_1,每件商品一周贮存费c_2,每件商品缺货损失费c_3 ($c_1<c_3$)

- 每周销售量 r 随机、连续，概率密度 $p(r)$

- 周末库存量x, 订货量 u, 周初库存量 $x+u$

- 每周贮存量按 $x+u-r$ 计

建模与求解

（***s*, *S***) 存贮策略

$$x \geq s \Rightarrow u = 0 \qquad x < s \Rightarrow u > 0,\, x + u = S$$

确定(*s*, *S*), 使目标函数——每周总费用的平均值最小

***s*～订货点， *S*～订货值**

订货费c_0, 购进价c_1, 贮存费c_2, 缺货费c_3, 销售量 *r*

平均费用

$$J(u) = \begin{cases} c_0 + c_1 u + L(x + u), & u > 0 \\ L(x) & u = 0 \end{cases}$$

$$L(x) = c_2 \int_0^x (x - r) p(r) dr + c_3 \int_x^\infty (r - x) p(r) dr$$

建模与求解

1）设 *x*<*s*, 求 *u* 使 *J*(*u*) 最小，确定*S*

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1u+L(x+u), & u>0 \\ L(x) & u=0 \end{cases}$$

$$L(x)=c_2\int_0^x (x-r)p(r)dr+c_3\int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

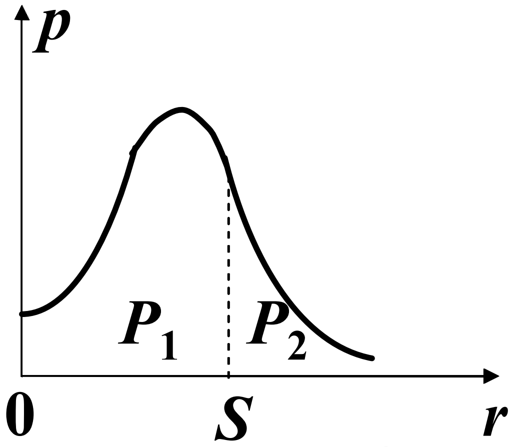
$$\frac{dJ}{du}=c_1+c_2\int_0^{x+u} p(r)dr-c_3\int_{x+u}^\infty p(r)dr$$

$x+u=S$

$\int_0^\infty p(r)dr=1$

$$\Rightarrow =(c_1+c_2)\int_0^S p(r)dr-(c_3-c_1)\int_S^\infty p(r)dr$$

$$\frac{dJ}{du}=0 \Rightarrow \frac{\int_0^S p(r)dr}{\int_S^\infty p(r)dr}=\frac{c_3-c_1}{c_2+c_1}=\frac{P_1}{P_2}$$



$$c_3\uparrow \Rightarrow S\uparrow,\quad c_2\uparrow \Rightarrow S\downarrow$$

建模与求解

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1u+L(x+u), & u>0 \\ L(x) & u=0 \end{cases}$$

2）对库存 x，确定订货点s

$$L(x)=c_2\int_0^x (x-r)p(r)dr+c_3\int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

若订货u, $u+x=S$，总费用为 $J_1=c_0+c_1(S-x)+L(S)$

若不订货, $u=0$, 总费用为 $J_2=L(x)$

$$J_2\le J_1 \quad \Longleftrightarrow \quad L(x)\le c_0+c_1(S-x)+L(S)$$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

不订货 $\qquad\qquad$ $c_1x+L(x)\le c_0+c_1S+L(S)$

$\Downarrow$

记$c_1x+L(x)=I(x)$ $\qquad\qquad$ $I(x)\le c_0+I(S)$

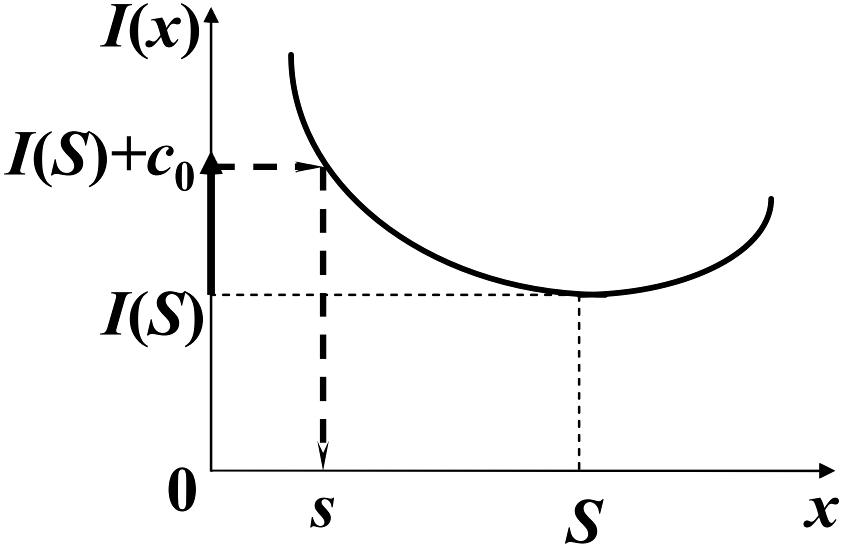
订货点 s 是 $I(x)=c_0+I(S)$ 的最小正根

建模与求解 $I(x)=c_0+I(S)$ 最小正根的图解法

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1u+L(x+u), & u>0 \\ L(x) & u=0 \end{cases}$$

$$I(x)=c_1x+L(x)$$

$$L(x)=c_2\int_0^x (x-r)p(r)dr+c_3\int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$



$J(u)$在$u+x=S$处达到最小

$J(u)$与$I(x)$相似 ⇩

$I(x)$在$x=S$处达到最小值$I(S)$

$I(x)$图形 ⇨ **$I(S)$**

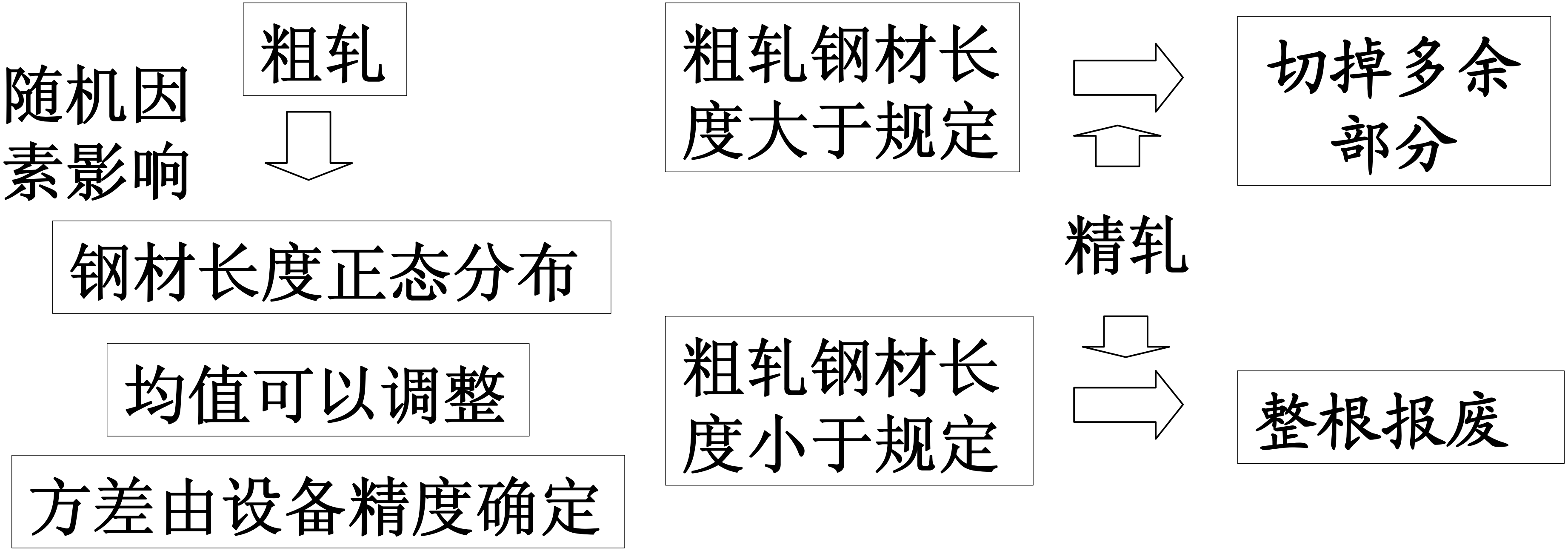
⇨ $I(x)=c_0+I(S)$ 的最小正根 s

9.4 轧钢中的浪费

背景

轧制钢材两道工序

- 粗轧(热轧) ~ 形成钢材的雏形
- 精轧(冷轧) ~ 得到钢材规定的长度



随机因素影响

粗轧

钢材长度正态分布

均值可以调整

方差由设备精度确定

精轧

粗轧钢材长度大于规定

切掉多余部分

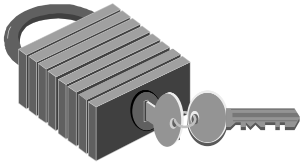
粗轧钢材长度小于规定

整根报废

问题：如何调整粗轧的均值，使精轧的浪费最小

分析

设已知精轧后钢材的规定长度为 l,
粗轧后钢材长度的均方差为 σ



记粗轧时可以调整的均值为 m，则粗轧得到的钢材长度为正态随机变量，记作 $x \sim N(m, \sigma^2)$

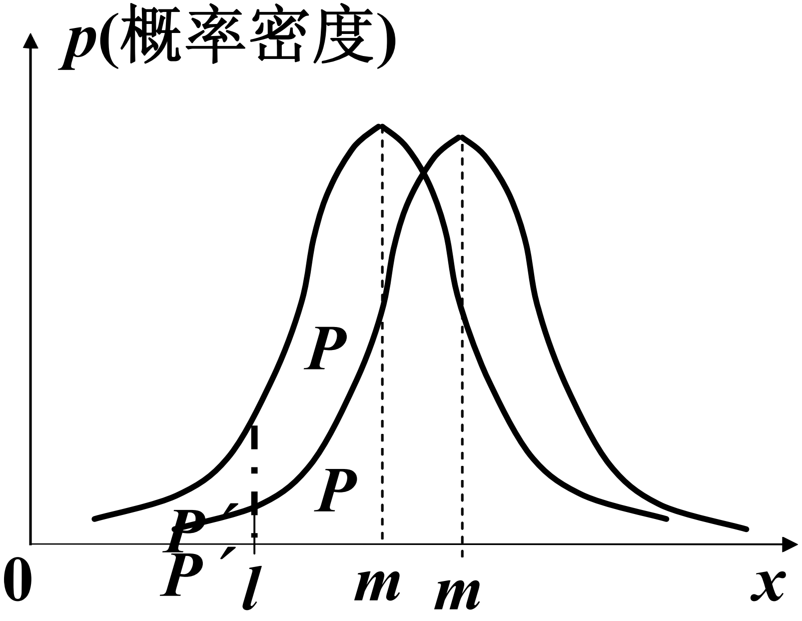
$P = P(x \ge l)$　　$P' = P(x < l)$

切掉多余部分的概率

整根报废的概率

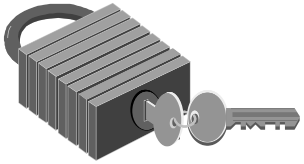
$$m \uparrow \Rightarrow P \uparrow, P' \downarrow$$

$$m \downarrow \Rightarrow P \downarrow, P' \uparrow$$



存在最佳的m使总的浪费最小

建模 选择合适的目标函数



总浪费 = 切掉多余部分的浪费 + 整根报废的浪费

⇓ ⇓

$$W=\int_{l}^{\infty}(x-l)p(x)dx+\int_{-\infty}^{l}xp(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx-\int_{l}^{\infty}lp(x)dx=m-lP$$

粗轧一根钢材平均浪费长度

⇓

$$\frac{mN\ \ -lPN}{N}=m-lP$$

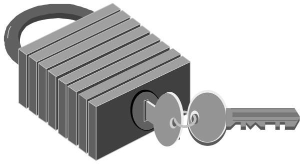
粗轧***N***根 ⇒ 成品材 ***PN***根

⇓

总长度***mN*** ⇒ 成品材长度***l PN***

⇒ 共浪费长度 ***mN-lPN***

建模 选择合适的目标函数



粗轧一根钢材平均浪费长度 $\dfrac{mN-lPN}{N}=m-lP$

粗轧***N***根得成品材 ***PN***根

得到一根成品材平均浪费长度 $\dfrac{mN-lPN}{PN}=\dfrac{m}{P}-l$

更合适的目标函数

记 $J(m)=\dfrac{m}{P(m)}$

$$P(m)=\int_l^{\infty}p(x)dx\,,\;p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

优化模型：求***m*** 使***J(m)*** 最小（已知***l*** ,$\boldsymbol{\sigma}$）

求解

$$y=\frac{x-m}{\sigma},\quad \mu=\frac{m}{\sigma},\lambda=\frac{l}{\sigma}$$

$$J(m)=\frac{m}{P(m)}$$

$$\Downarrow$$

$$J(\mu)=\frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)}$$

$$P(m)=\int_{l}^{\infty}p(x)dx$$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Phi(z)=\int_{z}^{\infty}\varphi(y)dy$$

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

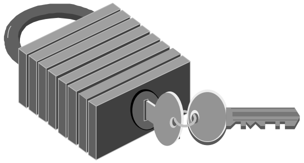
$$z=\lambda-\mu$$

$$\Downarrow$$

$$J(\mu)=\frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)}\Rightarrow J(z)=\frac{\sigma(\lambda-z)}{\Phi(z)}$$

求 z 使 $J(z)$ 最小（已知 λ ）

求解



$$\frac{dJ}{dz} = 0$$

$$J(z) = \frac{\sigma(\lambda - z)}{\Phi(z)}$$

$$-\Phi(z) - (\lambda - z)\Phi'(z) = 0$$

$$\Phi'(z) = -\varphi(z)$$

$$\lambda - z = \Phi(z) / \varphi(z)$$

$$F(z) = \lambda - z$$

$$F(z) = \Phi(z) / \varphi(z)$$

$$\Phi(z) = \int_z^\infty \varphi(y)dy$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

求解 $F(z)=\lambda-z$ $F(z)=\Phi(z)/\varphi(z)$简表

z	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5
$F(z)$	227.0	56.79	18.10	7.206	3.477	1.680
z	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$F(z)$	1.253	0.876	0.656	0.516	0.420	0.355

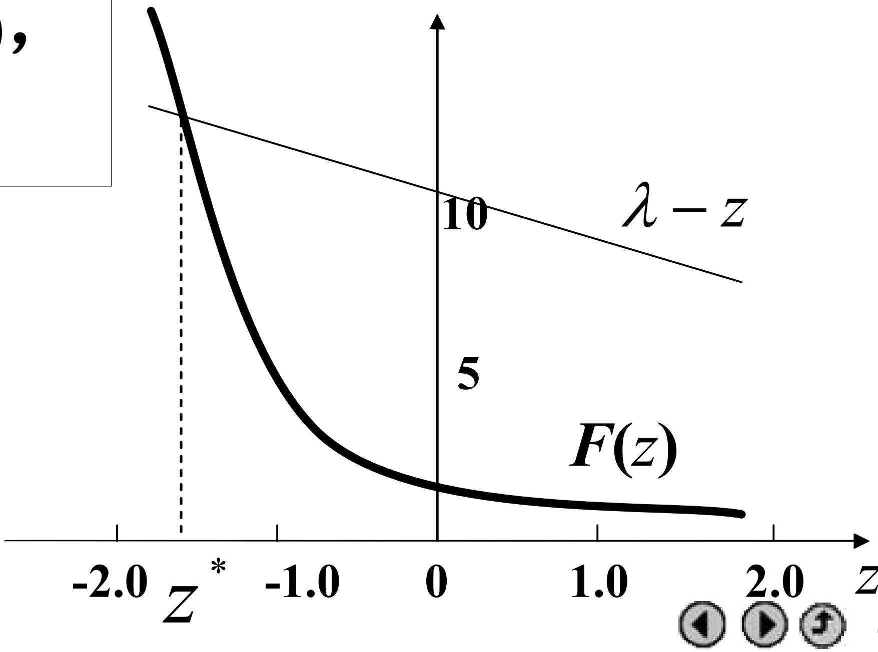
例

设l=2(米), σ=20(厘米)，求 m 使浪费最小。

$\lambda=l/\sigma=10$ ⇨ $z^*=-1.78$

⇨ $\mu^*=\lambda-z^*=11.78$

⇨ $m^*=\mu^*\sigma=2.36$(米)



9.5 随机人口模型

背景

• 一个人的出生和死亡是随机事件

一个国家或地区

平均生育率
平均死亡率

确定性模型

一个家族或村落

出生概率
死亡概率

随机性模型

对象

$X(t)$ ~ 时刻 t 的人口, 随机变量.

$P_n(t)$ ~概率$P(X(t)=n)$, $n=0,1,2,\ldots$

研究$P_n(t)$的变化规律；得到$X(t)$的期望和方差

模型假设

若$X(t)=n$, 对t到$t+\Delta t$的出生和死亡概率作以下假设

1)出生一人的概率与Δt成正比，记$b_n \Delta t$;
出生二人及二人以上的概率为$o(\Delta t)$.

2)死亡一人的概率与Δt成正比，记$d_n \Delta t$;
死亡二人及二人以上的概率为$o(\Delta t)$.

3)出生和死亡是相互独立的随机事件。

进一步假设

b_n与n成正比，记$b_n=\lambda n$, λ~出生概率;

d_n与n成正比，记$d_n=\mu n$，μ~死亡概率。

建模 为得到$P_n(t)$ $P(X(t)=n)$,的变化规律，考察$P_n(t+\Delta t) = P(X(t+\Delta t)=n)$.

事件$X(t+\Delta t)=n$的分解	概率$P_n(t+\Delta t)$
$X(t)=n-1$, Δt内出生一人	$P_{n-1}(t)$, $b_{n-1}\Delta t$
$X(t)=n+1$, Δt内死亡一人	$P_{n+1}(t)$, $d_{n+1}\Delta t$
$X(t)=n$, Δt内没有出生和死亡	$P_n(t)$, $1-b_n\Delta t-d_n\Delta t$
其它(出生或死亡二人，出生且死亡一人，… …)	$o(\Delta t)$

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= P_{n-1}(t)b_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)d_{n+1}\Delta t \\ &\quad + P_n(t)(1-b_n\Delta t-d_n\Delta t)+o(\Delta t) \end{aligned}$$

建模

微分方程

$$\frac{dP_n}{dt} = b_{n-1}P_{n-1}(t) + d_{n+1}P_{n+1}(t) - (b_n + d_n)P_n(t)$$

$\boldsymbol{b_n=\lambda n}$，$\boldsymbol{d_n=\mu n}$ ⇩

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)nP_n(t)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

(*t*=0时已知人口为$\boldsymbol{n_0}$**)**

~一组递推微分方程——求解的困难和不必要

转而考察**X(*t*)**的期望和方差

基本方程 $$\frac{dP_n}{dt}=\lambda(n-1)P_{n-1}(t)+\mu(n+1)P_{n+1}(t)-(\lambda+\mu)nP_n(t)$$

求解

X(t)的期望

$$E(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)\ \Rightarrow\ \frac{dE}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{dP_n}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt}=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)P_{n-1}(t)$$

n-1=k ⇓

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)P_k(t)$$

$$+\mu\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)P_{n+1}(t)$$

$$=\mu\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)P_k(t)$$

⇑ n+1=k

$$-(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}n^2P_n(t)$$

$$\frac{dE}{dt}=(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)=(\lambda-\mu)E(t)$$

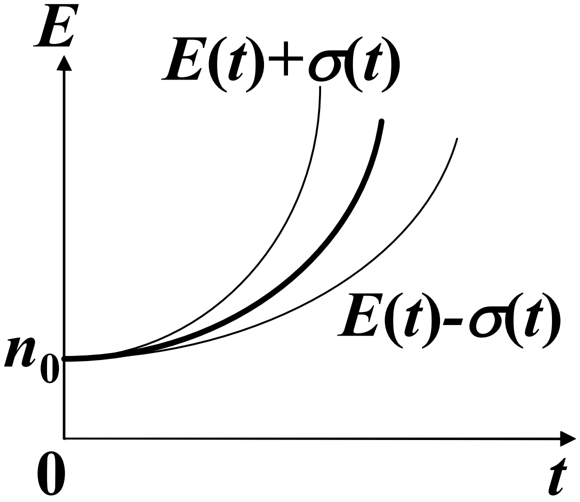
求解 $\frac{dE}{dt} = (\lambda - \mu)E(t)$ ⇨ $E(t) = n_0 e^{rt}，r = \lambda - \mu$

$E(0) = n_0$

r ~ 增长概率

比较：确定性指数增长模型 $x(t) = x_0 e^{rt}$ **r ~ 平均增长率**

$X(t)$的方差 $D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) - E^2(t)$



$$\Rightarrow D(t) = n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t} - 1]$$

$X(t)$大致在 **$E(t)\pm 2\sigma(t)$** 范围内（**$\sigma(t)$** ~均方差）

λ-μ = r ↑→ $D(t)$↑　　**λ, μ↑→ $D(t)$↑**

第十章　统计回归模型

数学建模的基本方法

机理分析

测试分析

由于客观事物内部规律的复杂及人们认识程度的限制，无法分析实际对象内在的因果关系，建立合乎机理规律的数学模型。

通过对数据的统计分析，找出与数据拟合最好的模型

回归模型是用统计分析方法建立的最常用的一类模型

- 不涉及回归分析的数学原理和方法
- 通过实例讨论如何选择不同类型的模型
- 对软件得到的结果进行分析，对模型进行改进

10.1 牙膏的销售量

问题

建立牙膏销售量与价格、广告投入之间的模型

预测在不同价格和广告费用下的牙膏销售量

收集了30个销售周期本公司牙膏销售量、价格、广告费用，及同期其它厂家同类牙膏的平均售价

销售周期	本公司价格(元)	其它厂家价格(元)	广告费用(百万元)	价格差（元）	销售量(百万支)
1	3.85	3.80	5.50	-0.05	7.38
2	3.75	4.00	6.75	0.25	8.51
…	…	…	…	…	…
29	3.80	3.85	5.80	0.05	7.93
30	3.70	4.25	6.80	0.55	9.26

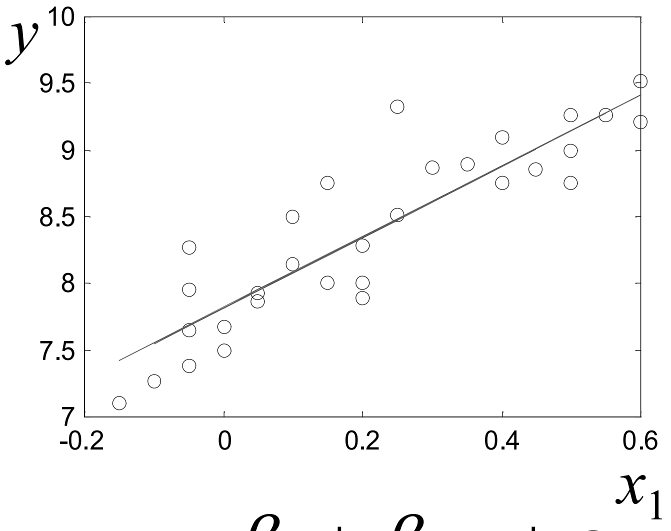
基本模型

y ~公司牙膏销售量

x_1~其它厂家与本公司价格差

x_2~公司广告费用

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$



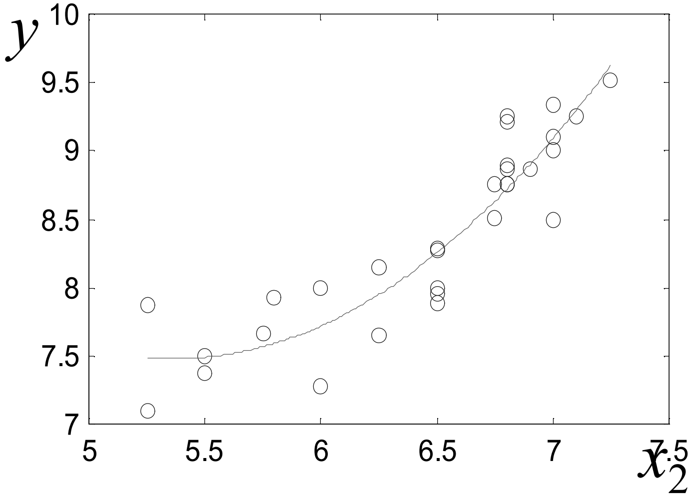
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

y~被解释变量（因变量）

x_1, x_2~解释变量(回归变量, 自变量)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ~回归系数

ε~随机误差（均值为零的正态分布随机变量）



$$y = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 + \varepsilon$$

模型求解

MATLAB 统计工具箱

$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$ 由数据 y,x_1,x_2估计β

```
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y,x,alpha)
```

输入

`y`~n维数据向量

`x`= $[1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_2^2]$ ~$n\times4$数据矩阵, 第1列为全1向量

`alpha`(置信水平,0.05)

输出

`b`~β的估计值

`bint`~b的置信区间

`r` ~残差向量`y-xb`

`rint`~r的置信区间

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]
R^2=0.9054 F=82.9409 p=0.0000		

`Stats`~

检验统计量

R^2, F, p

结果分析

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	**17.3244**	**[5.7282 28.9206]**
β_1	**1.3070**	**[0.6829 1.9311]**
β_2	**-3.6956**	**[-7.4989 0.1077]**
β_3	**0.3486**	**[0.0379 0.6594]**
$R^2=0.9054$ $F=82.9409$ $p=0.0000$		

y的90.54%可由模型确定

F远超过F检验的临界值

p远小于$\alpha=0.05$

模型从整体上看成立

β_2的置信区间包含零点
(右端点距零点很近)

x_2对因变量y 的
影响不太显著

x_2^2项显著

可将x_2保留在模型中

销售量预测 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2$

价格差x_1=其它厂家价格x_3-本公司价格x_4

估计x_3 调整x_4 ⇨ 控制x_1 ⇨ 通过x_1, x_2预测y

控制价格差x_1=0.2元，投入广告费x_2=650万元

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 = 8.2933$$ **(百万支)**

销售量预测区间为 [7.8230，8.7636]（置信度95%）

上限用作库存管理的目标值	下限用来把握公司的现金流

若估计x_3=3.9，设定x_4=3.7，则可以95%的把握知道销售额在 7.8320×3.7≈ 29（百万元）以上

模型改进

x_1和x_2对y的影响独立

⇩

x_1和x_2对y的影响有交互作用

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]
R^2=0.9054 F=82.9409 p=0.0000		

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_1 x_2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	29.1133	[13.7013 44.5252]
β_1	11.1342	[1.9778 20.2906]
β_2	-7.6080	[-12.6932 -2.5228]
β_3	0.6712	[0.2538 1.0887]
β_4	-1.4777	[-2.8518 -0.1037]
R^2=0.9209 F=72.7771 p=0.0000		

两模型销售量预测比较

控制价格差x_1=0.2元，投入广告费x_2=6.5百万元

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_1+\hat{\beta}_2 x_2+\hat{\beta}_3 x_2^2$$

$\hat{y}=8.2933$ (百万支)

区间 [7.8230，8.7636]

$$\hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1 x_1+\hat{\beta}_2 x_2+\hat{\beta}_3 x_2^2+\hat{\beta}_4 x_1 x_2$$

$\hat{y}=8.3272$ (百万支)

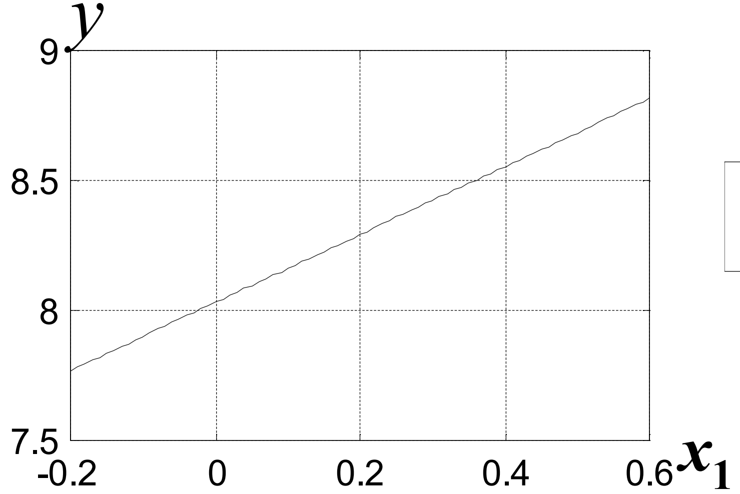
区间 [7.8953，8.7592]

$\hat{y}$ 略有增加

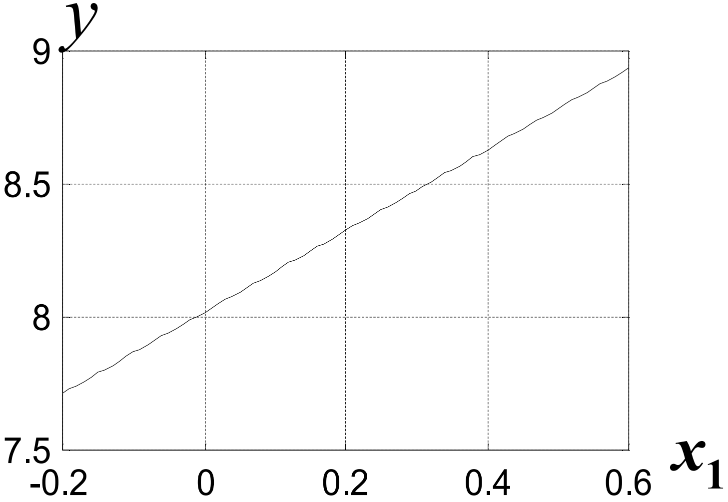
预测区间长度更短

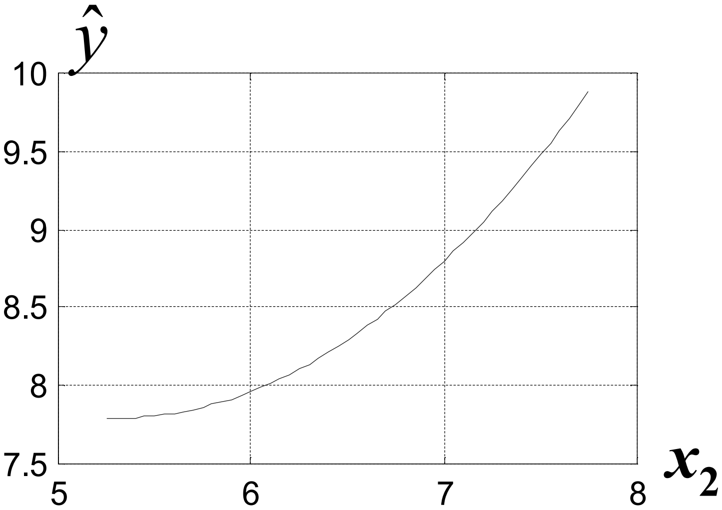
两模型 $\hat{y}$ 与x_1, x_2关系的比较

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2 \qquad \hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2+\hat{\beta}_4x_1x_2$$

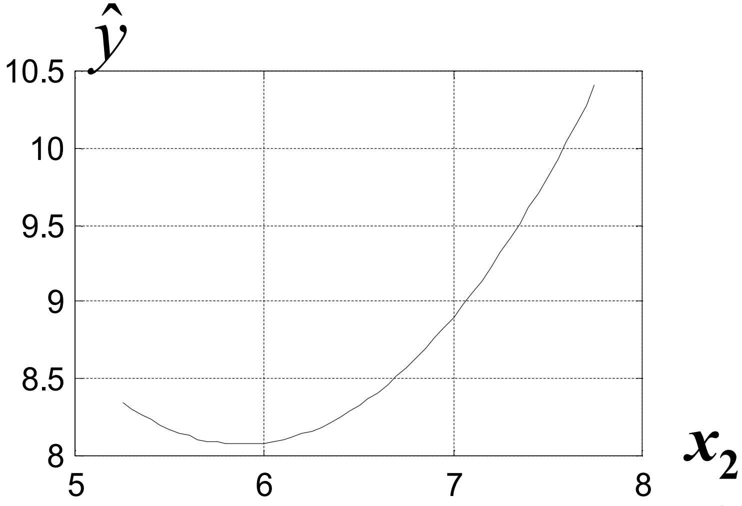


x_2=6.5





x_1=0.2



交互作用影响的讨论

$$\hat{y} = \beta_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 + \hat{\beta}_4 x_1 x_2$$

价格差 x_1=0.1

$$\hat{y}\Big|_{x_1=0.1} = 30.2267 - 7.7558 x_2 + 0.6712 x_2^2$$

价格差 x_1=0.3

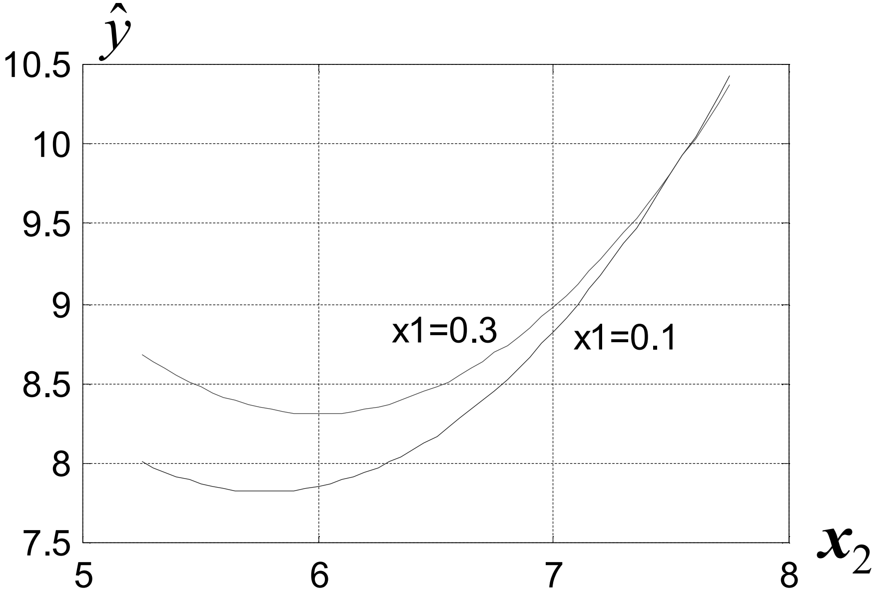
$$\hat{y}\Big|_{x_1=0.3} = 32.4535 - 8.0513 x_2 + 0.6712 x_2^2$$

$$x_2 < 7.5357 \Rightarrow \hat{y}\Big|_{x_1=0.3} > \hat{y}\Big|_{x_1=0.1}$$

⇨ 价格优势会使销售量增加

加大广告投入使销售量增加

（x_2大于6百万元）



价格差较小时增加的速率更大

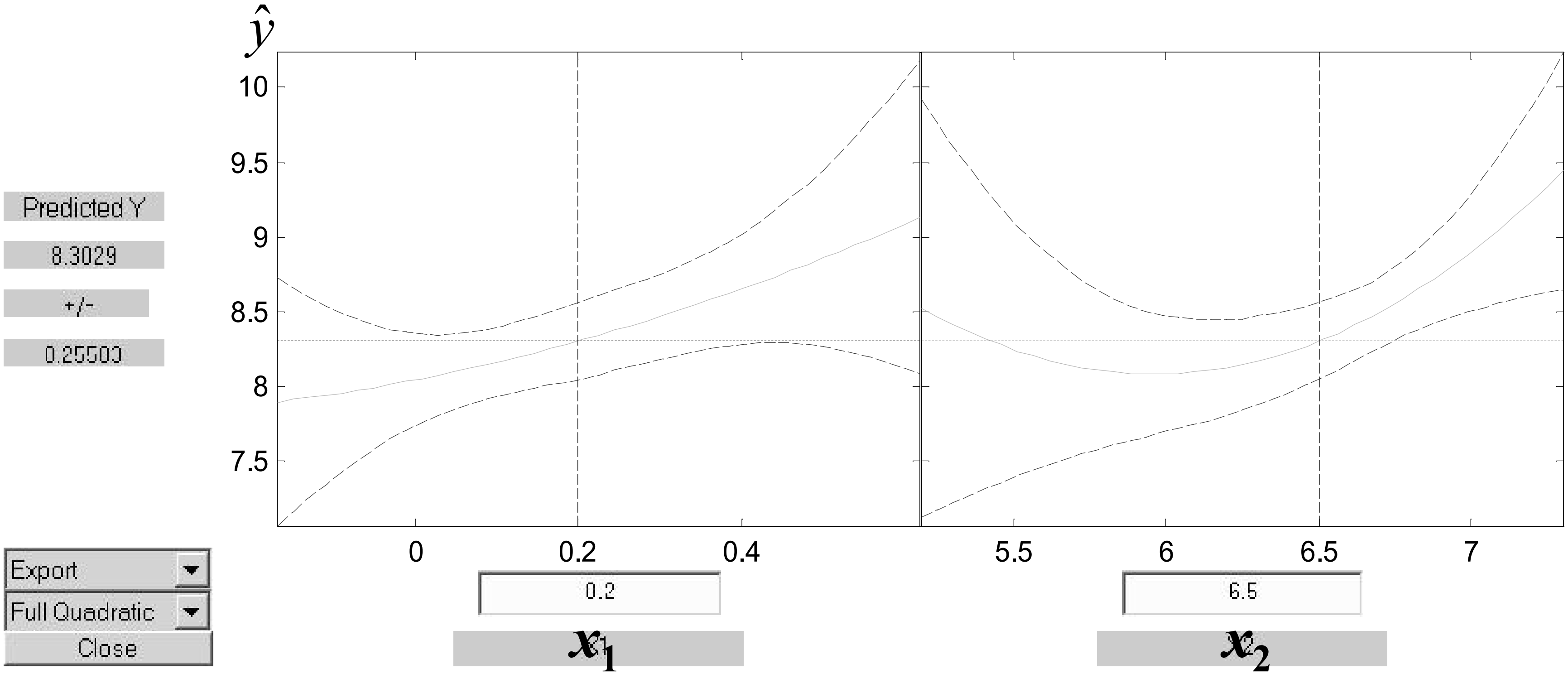
⇨

价格差较小时更需要靠广告来吸引顾客的眼球

完全二次多项式模型

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2+\beta_4x_1^2+\beta_5x_2^2+\varepsilon$$

MATLAB中有命令`rstool`直接求解



Predicted Y
8.3029
+/-
0.25503

x_1: 0.2
x_2: 6.5

从输出 **Export** 可得 $\hat{\beta}=(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_4,\hat{\beta}_5)$

10.2　软件开发人员的薪金

建立模型研究薪金与资历、管理责任、教育程度的关系

分析人事策略的合理性，作为新聘用人员薪金的参考

46名软件开发人员的档案资料

编号	薪金	资历	管理	教育
01	13876	1	1	1
02	11608	1	0	3
03	18701	1	1	3
04	11283	1	0	2
…	…	…	…	…
42	27837	16	1	2
43	18838	16	0	2
44	17483	16	0	1
45	19207	17	0	2
46	19346	20	0	1

资历~ 从事专业工作的年数；管理~ 1=管理人员，0=非管理人员；教育~ 1=中学，2=大学，3=更高程度

分析与假设　y~ 薪金，x_1 ~资历（年）

$x_2=1$~ 管理人员，$x_2=0$~ 非管理人员

教育

1=中学

2=大学

3=更高

$$x_3=\begin{cases}1, & \text{中学}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$x_4=\begin{cases}1, & \text{大学}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

⇨

中学：$x_3=1, x_4=0$ ；

大学：$x_3=0, x_4=1$；

更高：$x_3=0, x_4=0$

资历每加一年薪金的增长是常数；

管理、教育、资历之间无交互作用

线性回归模型

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+\varepsilon$$

$a_0, a_1, \ldots, a_4$是待估计的回归系数，ε是随机误差

模型求解

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
a_0	11032	[10258 11807]
a_1	546	[484 608]
a_2	6883	[6248 7517]
a_3	-2994	[-3826 -2162]
a_4	148	[-636 931]
R^2=0.957 F=226 p=0.000		

$R^2, F, p \rightarrow$ 模型整体上可用

x_1~资历(年)

x_2 = 1~ 管理，x_2 = 0~ 非管理

中学：x_3=1, x_4=0;大学：x_3=0, x_4=1; 更高：x_3=0, x_4=0.

资历增加1年薪金增长546

管理人员薪金多6883

中学程度薪金比更高的少2994

大学程度薪金比更高的多148

a_4置信区间包含零点，解释不可靠！

结果分析

残差分析方法

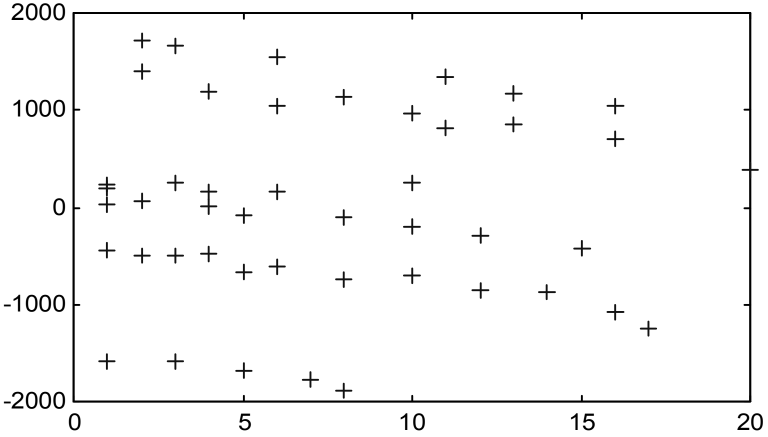
$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_3 x_3 + \hat{a}_4 x_4$$

残差 $e = y - \hat{y}$

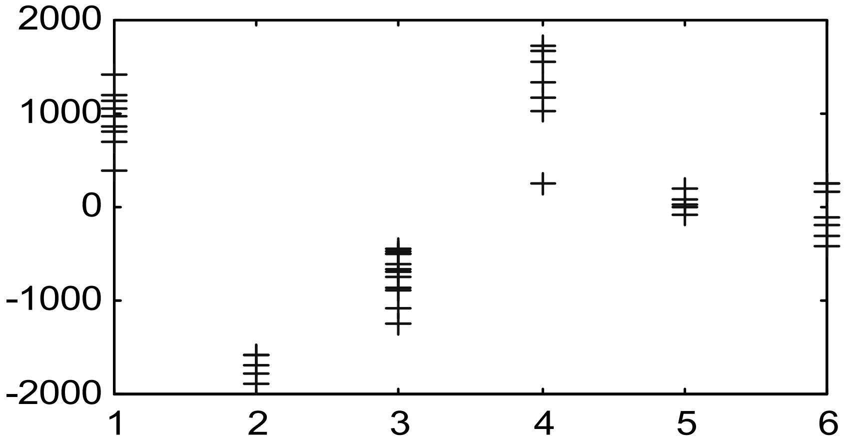
管理与教育的组合

组合	1	2	3	4	5	6
管理	0	1	0	1	0	1
教育	1	1	2	2	3	3

e 与资历 x_1 的关系



*e*与管理—教育组合的关系



残差大概分成3个水平，6种管理—教育组合混在一起，未正确反映 。

残差全为正，或全为负，管理—教育组合处理不当

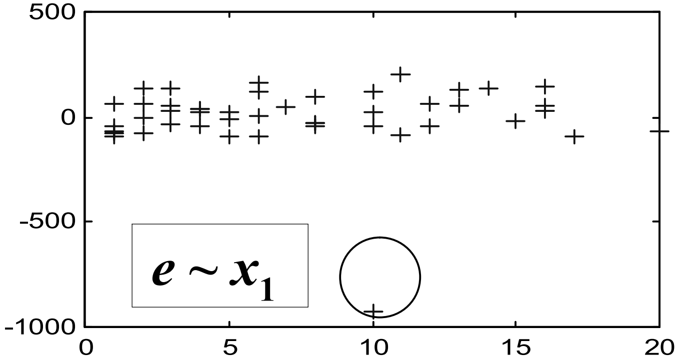
应在模型中增加管理x_2与教育x_3, x_4的交互项

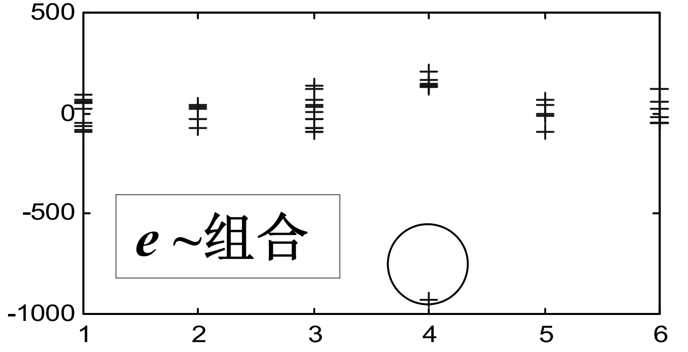
进一步的模型

增加管理x_2与教育x_3, x_4的交互项

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_2x_3 + a_6x_2x_4 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
a_0	11204	[11044 11363]
a_1	497	[486 508]
a_2	7048	[6841 7255]
a_3	-1727	[-1939 -1514]
a_4	-348	[-545 –152]
a_5	-3071	[-3372 -2769]
a_6	1836	[1571 2101]
R^2=0.999 F=554 p=0.000		





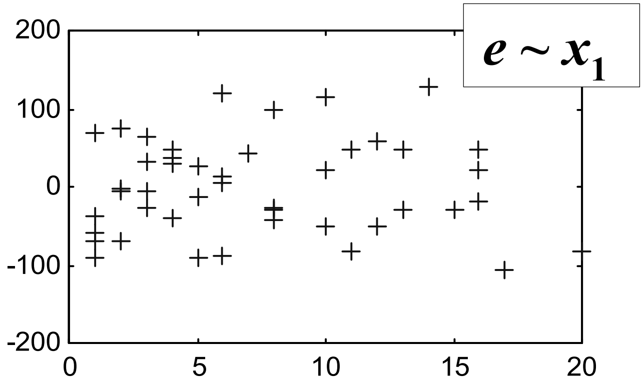
R^2, F有改进，所有回归系数置信区间都不含零点，模型完全可用

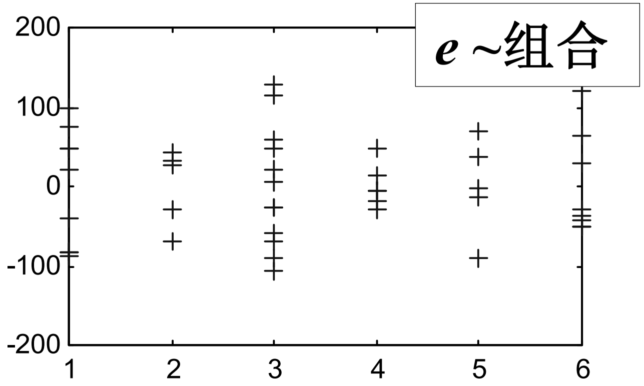
消除了不正常现象

异常数据(33号)应去掉

去掉异常数据后的结果

参数	参数估计值	置信区间
a_0	**11200**	**[11139 11261]**
a_1	**498**	**[494 503]**
a_2	**7041**	**[6962 7120]**
a_3	**-1737**	**[-1818 -1656]**
a_4	**-356**	**[-431 –281]**
a_5	**-3056**	**[-3171 –2942]**
a_6	**1997**	**[1894 2100]**
$R^2 = 0.9998$ $F=36701$ $p=0.0000$		





R^2： 0.957 → 0.999 → 0.9998

F： 226 → 554 → 36701

置信区间长度更短

残差图十分正常

最终模型的结果可以应用

模型应用

$$\hat{y}=\hat{a}_0+\hat{a}_1x_1+\hat{a}_2x_2+\hat{a}_3x_3+\hat{a}_4x_4+\hat{a}_5x_2x_3+\hat{a}_6x_2x_4$$

制订6种管理—教育组合人员的“基础”薪金（资历为0）

$x_1=0$； $x_2=1$~ 管理，$x_2=0$~ 非管理

中学：$x_3=1, x_4=0$ ；大学：$x_3=0, x_4=1$； 更高：$x_3=0, x_4=0$

组合	管理	教育	系数	“基础”薪金
1	0	1	a_0+a_3	9463
2	1	1	$a_0+a_2+a_3+a_5$	13448
3	0	2	a_0+a_4	10844
4	1	2	$a_0+a_2+a_4+a_6$	19882
5	0	3	a_0	11200
6	1	3	a_0+a_2	18241

大学程度管理人员比更高程度管理人员的薪金高

大学程度非管理人员比更高程度非管理人员的薪金略低

软件开发人员的薪金

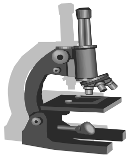
对定性因素(如管理、教育)，可以引入0-1变量处理，0-1变量的个数应比定性因素的水平少1

残差分析方法可以发现模型的缺陷，引入交互作用项常常能够改善模型

剔除异常数据，有助于得到更好的结果

注：可以直接对6种管理—教育组合引入5个0-1变量

10.3　酶促反应



问题

研究酶促反应（酶催化反应）中嘌呤霉素对反应速度与底物（反应物）浓度之间关系的影响

建立数学模型，反映该酶促反应的速度与底物浓度以及经嘌呤霉素处理与否之间的关系

方案

设计了两个实验：酶经过嘌呤霉素处理；酶未经嘌呤霉素处理。实验数据见下表:

底物浓度(ppm)		0.02		0.06		0.11		0.22		0.56		1.10	
反应速度	处理	76	47	97	107	123	139	159	152	191	201	207	200
	未处理	67	51	84	86	98	115	131	124	144	158	160	/

酶促反应的基本性质

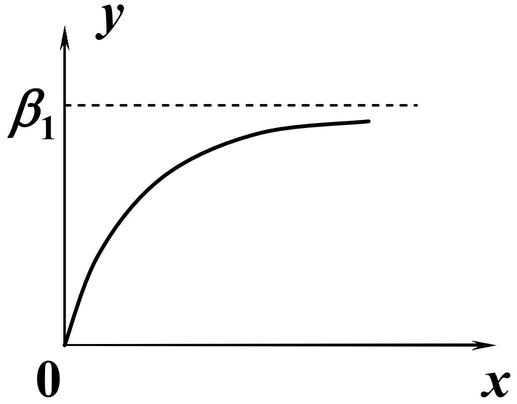
底物浓度较小时，反应速度大致与浓度成正比；

底物浓度很大、渐进饱和时，反应速度趋于固定值。

基本模型

Michaelis-Menten模型

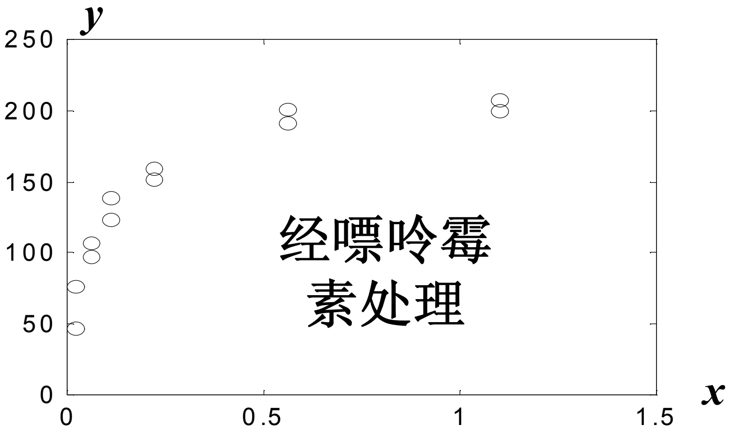
y ~ 酶促反应的速度，x ~底物浓度

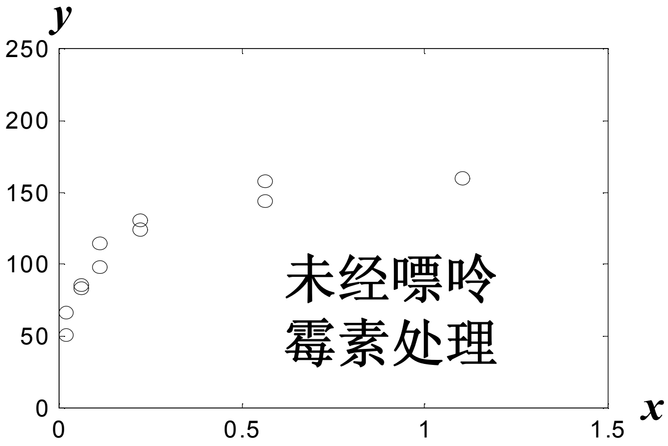


$$y = f(x, \beta) = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x}$$

β_1, β_2 ~ 待定系数

实验数据





线性化模型

$$y = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{1}{x} = \theta_1 + \theta_2 \frac{1}{x}$$

对β_1, β_2非线性 ⇨ 对θ_1, θ_2线性

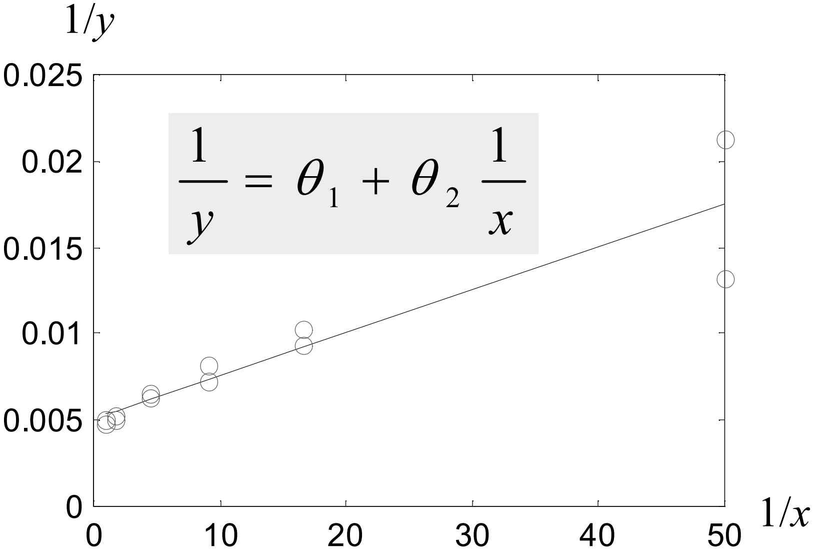
经嘌呤霉素处理后实验数据的估计结果

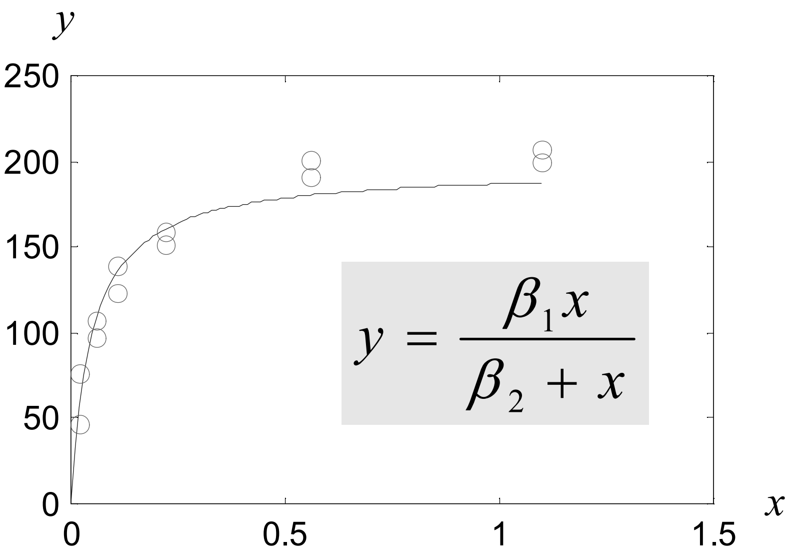
参数	参数估计值（×10^{-3}）	置信区间（×10^{-3}）
θ_1	**5.107**	**[3.539 6.676]**
θ_2	**0.247**	**[0.176 0.319]**
R^2=0.8557 F=59.2975 p=0.0000		

$$\hat{\beta}_1 = 1/\hat{\theta}_1 = 195.8027$$

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\theta}_2/\hat{\theta}_1 = 0.04841$$

线性化模型结果分析





1/*x*较小时有很好的线性趋势，1/*x*较大时出现很大的起落

***x*较大时，*y*有较大偏差**

- 参数估计时，*x*较小（1/*x*很大）的数据控制了回归参数的确定

非线性模型参数估计

MATLAB 统计工具箱

[beta,R,J] = nlinfit (x,y,’model’,beta0)

输入

x~自变量数据矩阵

y ~因变量数据向量

model ~模型的函数M文件名

beta0 ~给定的参数初值

输出

beta ~参数的估计值

R ~残差，J ~估计预测误差的Jacobi矩阵

beta的置信区间

betaci =nlparci(beta,R,J)

$$y = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x}$$

beta0~线性化模型估计结果

```
x=                    ; y=                    ;
beta0=[195.8027  0.04841];
[beta,R,J]=nlinfit(x,y,’f1’,beta0);
betaci=nlparci(beta,R,J);
beta, betaci
```

```
function  y=f1(beta, x)
y=beta(1)*x./(beta(2)+x);
```

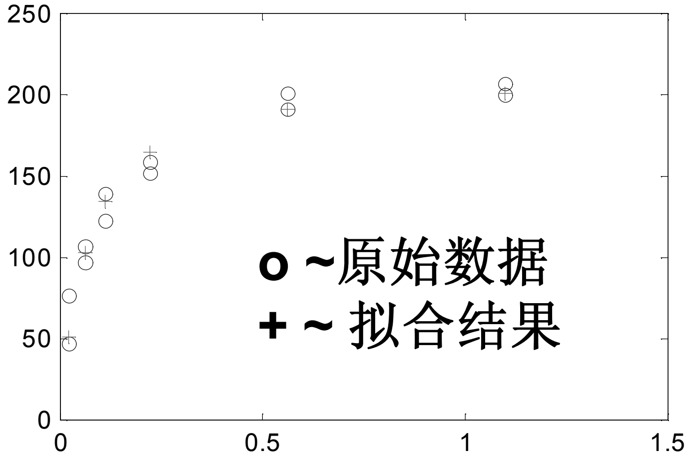
非线性模型结果分析

$$y=\frac{\beta_1 x}{\beta_2+x}$$

参数	参数估计值	置信区间
β_1	**212.6819**	**[197.2029 228.1609]**
β_2	**0.0641**	**[0.0457 0.0826]**

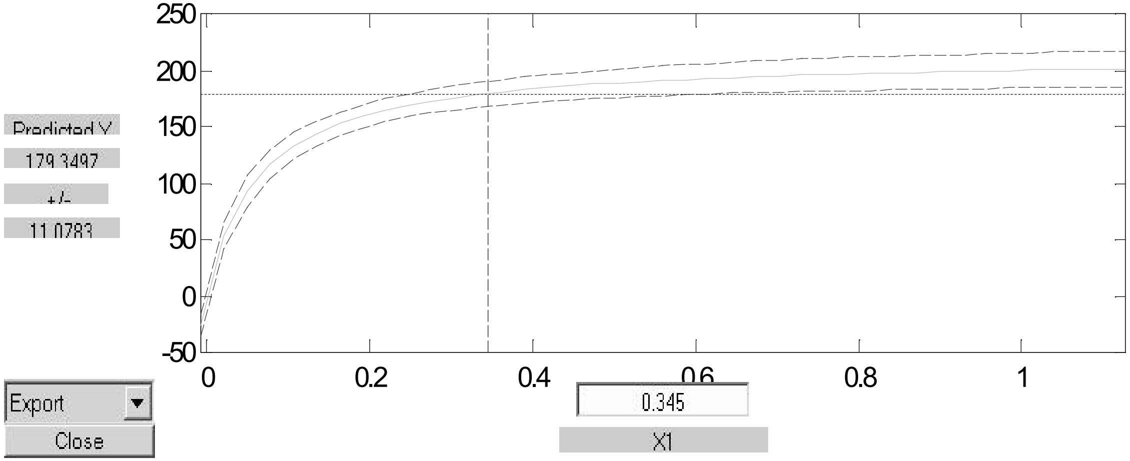
最终反应速度为 $\hat{\beta}_1=212.6831$

半速度点(达到最终速度一半时的*x*值)为 $\hat{\beta}_2=0.0641$



其它输出

命令**nlintool** 给出交互画面



Predicted Y
179.3497
+/-
11.0783
0.345

拖动画面的十字线，得*y*的预测值和预测区间

画面左下方的**Export**输出其它统计结果。

剩余标准差***s*= 10.9337**

混合反应模型

在同一模型中考虑嘌呤霉素处理的影响

$$y=\frac{\beta_1 x}{\beta_2+x} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\;x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1}$$

x_1为底物浓度， x_2为一示性变量

$x_2=1$表示经过处理，$x_2=0$表示未经处理

β_1是未经处理的最终反应速度

γ_1是经处理后最终反应速度的增长值

β_2是未经处理的反应的半速度点

γ_2是经处理后反应的半速度点的增长值

混合模型求解

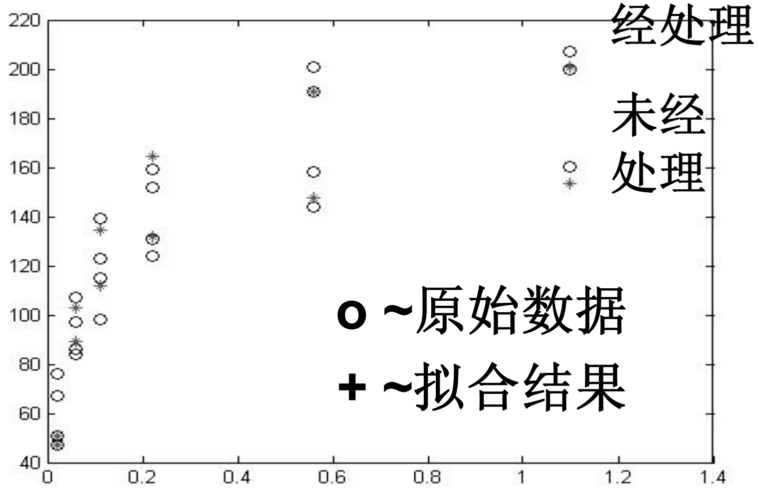
$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1}$$

用**nlinfit** 和 **nlintool**命令

参数初值 **(**基于对数据的分析**)** $\beta_1^0=170,\ \gamma_1^0=60,\ \beta_2^0=0.05,\ \gamma_2^0=0.01$

估计结果和预测

参数	参数估计值	置信区间
β_1	**160.2802**	**[145.8466 174.7137]**
β_2	**0.0477**	**[0.0304 0.0650]**
γ_1	**52.4035**	**[32.4130 72.3941]**
γ_2	**0.0164**	**[-0.0075 0.0403]**



剩余标准差***s*= 10.4000**

γ_2置信区间包含零点，表明γ_2对因变量y的影响不显著

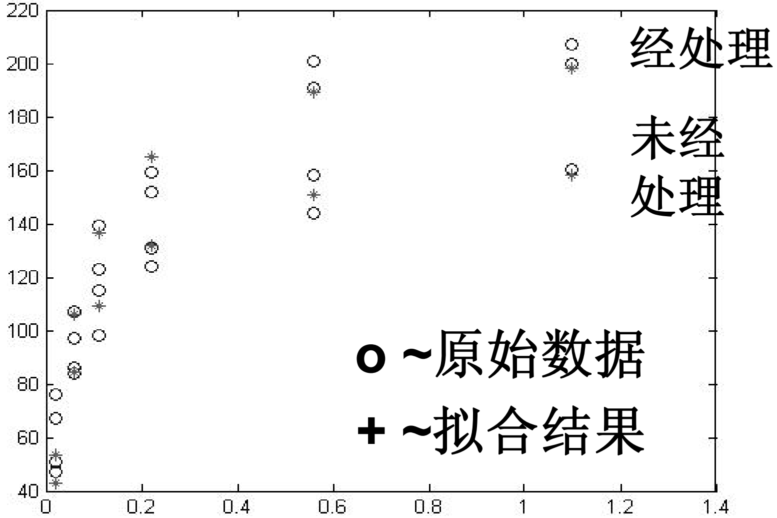
⇨ 经嘌呤霉素处理的作用不影响半速度点参数

简化的混合模型

$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1} \Rightarrow y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{\beta_2+x_1}$$

估计结果和预测

参数	参数估计值	置信区间
β_1	**166.6025**	**[154.4886 178.7164]**
β_2	**0.0580**	**[0.0456 0.0703]**
γ_1	**42.0252**	**[28.9419 55.1085]**



简化的混合模型形式简单，参数置信区间不含零点

剩余标准差 $s = 10.5851$，比一般混合模型略大

一般混合模型与简化混合模型预测比较

$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{(\beta_2+\gamma_2 x_2)+x_1}$$

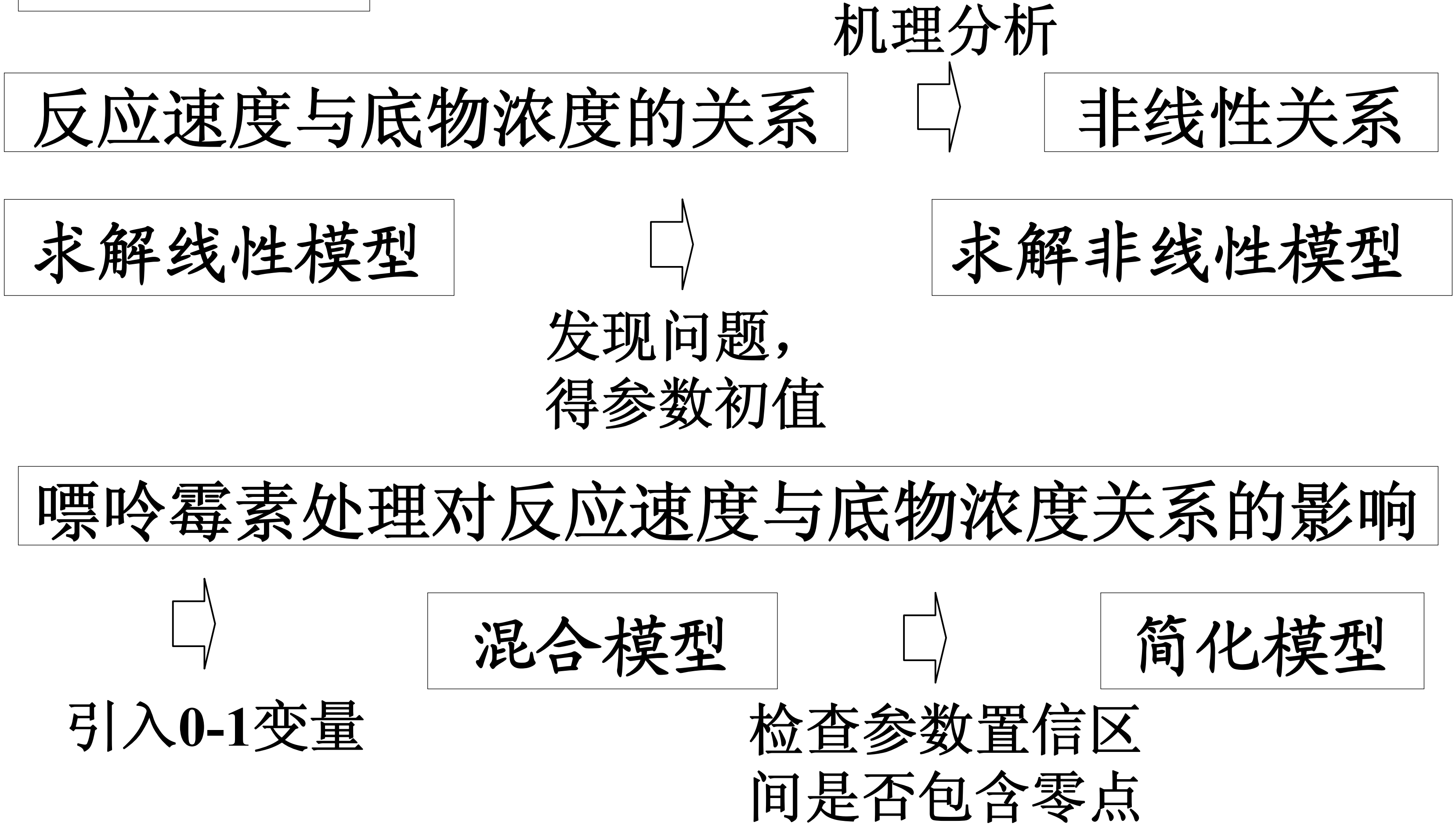
$$y=\frac{(\beta_1+\gamma_1 x_2)\ x_1}{\beta_2+x_1}$$

预测区间为
预测值 ± Δ

实际值	一般模型预测值	Δ (一般模型）	简化模型预测值	Δ (简化模型）
67	**47.3443**	**9.2078**	**42.7358**	**5.4446**
51	**47.3443**	**9.2078**	**42.7358**	**5.4446**
84	**89.2856**	**9.5710**	**84.7356**	**7.0478**
…	**…**	**…**	**…**	**…**
191	**190.8329**	**9.1484**	**189.0574**	**8.8438**
201	**190.8329**	**9.1484**	**189.0574**	**8.8438**
207	**200.9688**	**11.0447**	**198.1837**	**10.1812**
200	**200.9688**	**11.0447**	**198.1837**	**10.1812**

简化混合模型的预测区间较短，更为实用、有效

酶促反应



机理分析

反应速度与底物浓度的关系

非线性关系

求解线性模型

求解非线性模型

发现问题，
得参数初值

嘌呤霉素处理对反应速度与底物浓度关系的影响

混合模型

简化模型

引入0-1变量

检查参数置信区
间是否包含零点

注：非线性模型拟合程度的评价无法直接利用线性模型的方法，但R^2 与s仍然有效。

10.4 投资额与国民生产总值和物价指数

问题

建立投资额模型，研究某地区实际投资额与国民生产总值 (GNP) 及物价指数 (PI) 的关系

根据对未来GNP及PI的估计，预测未来投资额

该地区连续20年的统计数据

年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数	年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数
1	90.9	596.7	0.7167	11	229.8	1326.4	1.0575
2	97.4	637.7	0.7277	12	228.7	1434.2	1.1508
3	113.5	691.1	0.7436	13	206.1	1549.2	1.2579
4	125.7	756.0	0.7676	14	257.9	1718.0	1.3234
5	122.8	799.0	0.7906	15	324.1	1918.3	1.4005
6	133.3	873.4	0.8254	16	386.6	2163.9	1.5042
7	149.3	944.0	0.8679	17	423.0	2417.8	1.6342
8	144.2	992.7	0.9145	18	401.9	2631.7	1.7842
9	166.4	1077.6	0.9601	19	474.9	2954.7	1.9514
10	195.0	1185.9	1.0000	20	424.5	3073.0	2.0688

投资额与国民生产总值和物价指数

分析

许多经济数据在时间上有一定的滞后性

以时间为序的数据，称为时间序列

时间序列中同一变量的顺序观测值之间存在自相关

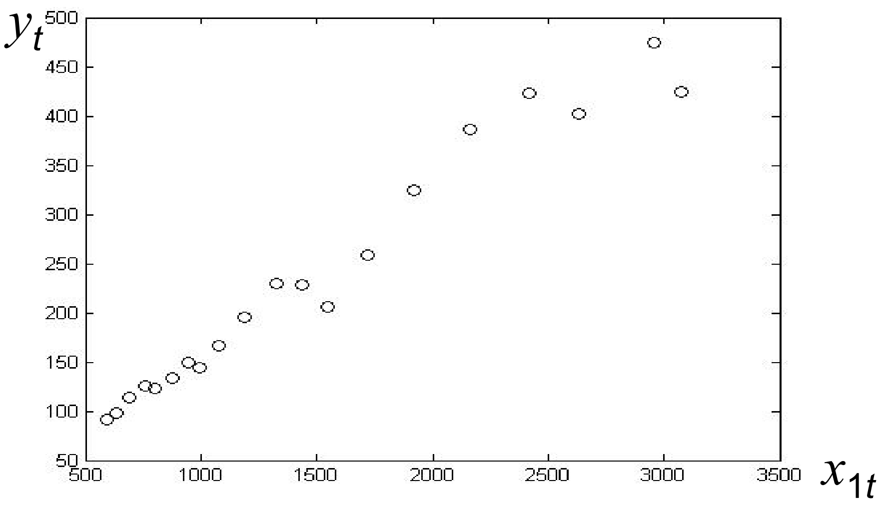
若采用普通回归模型直接处理，将会出现不良后果

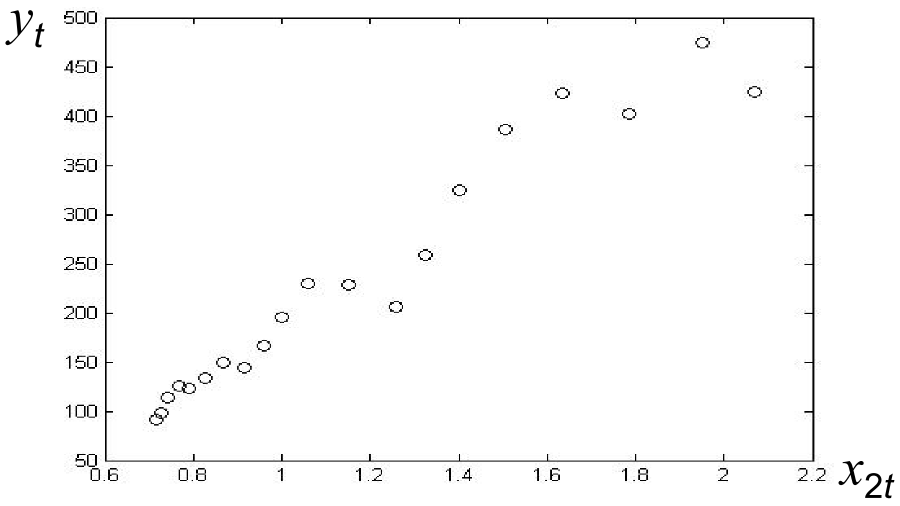
需要诊断并消除数据的自相关性，建立新的模型

年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数	年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数
1	90.9	596.7	0.7167	11	229.8	1326.4	1.0575
2	97.4	637.7	0.7277	12	228.7	1434.2	1.1508
3	113.5	691.1	0.7436	13	206.1	1549.2	1.2579
4	125.7	756.0	0.7676	14	257.9	1718.0	1.3234
…	…	…	…	…	…	…	…

基本回归模型

t ~年份， y_t~ 投资额，x_{1t}~ GNP, x_{2t}~ 物价指数





投资额与 GNP及物价指数间均有很强的线性关系

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ~回归系数

ε_t ~对t相互独立的零均值正态随机变量

基本回归模型的结果与分析

MATLAB 统计工具箱

参数	参数估计值	置信区间
β_0	**322.7250**	**[224.3386 421.1114]**
β_1	**0.6185**	**[0.4773 0.7596]**
β_2	**-859.4790**	**[-1121.4757 -597.4823]**
$R^2= 0.9908$ $F= 919.8529$ $p=0.0000$		

$$\hat{y}_t = 322.725 + 0.6185 x_{1t} - 859.479 x_{2t}$$

剩余标准差

$s=12.7164$

模型优点　R^2＝0.9908，拟合度高

模型缺点　没有考虑时间序列数据的滞后性影响

可能忽视了随机误差存在自相关；如果存在自相关性，用此模型会有不良后果

自相关性的定性诊断

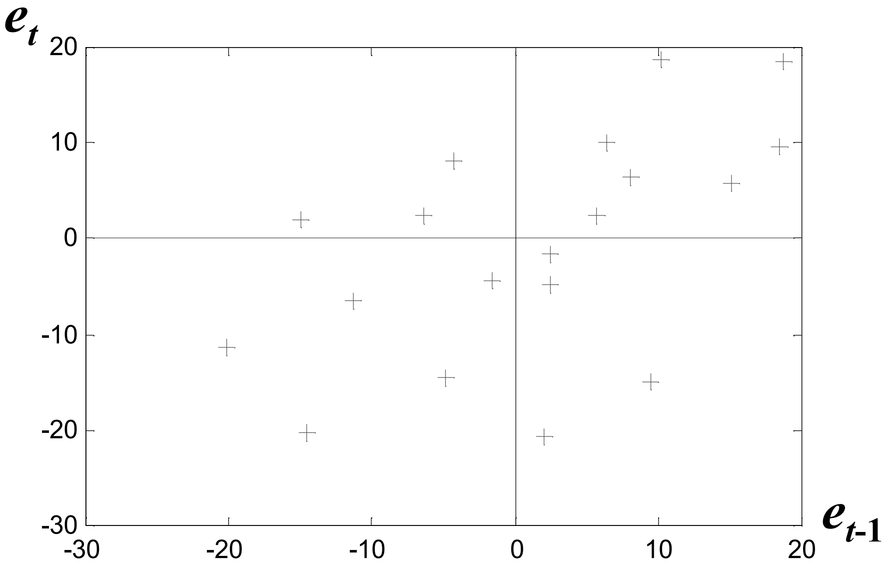
残差诊断法

模型残差 $e_t = y_t - \hat{y}_t$

e_t为随机误差ε_t的估计值

在MATLAB工作区中输出

作残差 $e_t \sim e_{t-1}$ 散点图



大部分点落在第1, 3象限 ⇨ ε_t 存在正的自相关

大部分点落在第2, 4象限 ⇨ ε_t 存在负的自相关

自相关性直观判断 ⇨ 基本回归模型的随机误差项ε_t 存在正的自相关

自回归性的定量诊断

D-W检验

自回归模型 $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ~回归系数

ρ ~自相关系数 $|\rho| \le 1$

u_t ~对*t*相互独立的零均值正态随机变量

$\rho = 0$ ⇒ 无自相关性

$\rho > 0$ ⇒ 存在正自相关性

$\rho < 0$ ⇒ 存在负自相关性

如何估计 ρ ⇕ **D-W**统计量

如何消除自相关性 ⇕ 广义差分法

D-W统计量与D-W检验

$$\hat{\rho} = \sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} / \sum_{t=2}^{n} e_t^2$$

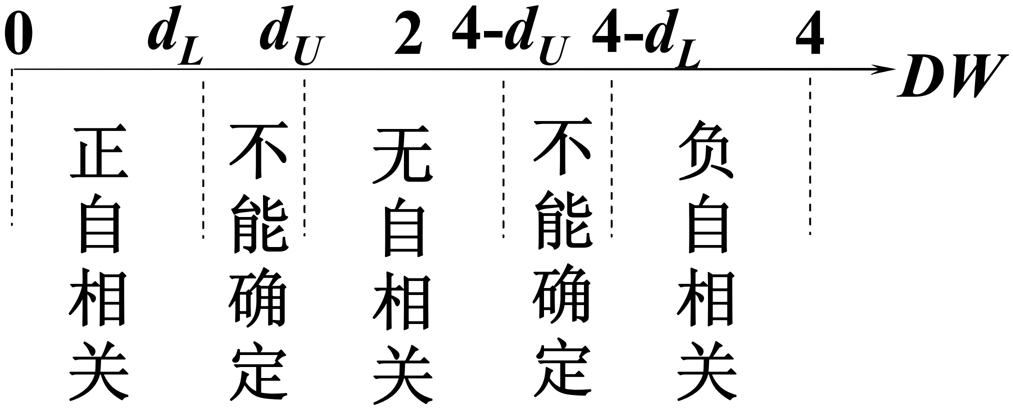
$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2} \underset{n\text{较大}}{\approx} 2\left[1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}\right] = 2(1 - \hat{\rho})$$

$$-1 \le \hat{\rho} \le 1 \rightarrow 0 \le DW \le 4$$

$$\hat{\rho} = 1 \rightarrow DW = 0$$

$$\hat{\rho} = -1 \rightarrow DW = 4$$

$$\hat{\rho} = 0 \rightarrow DW = 2$$



检验水平, 样本容量，回归变量数目

D-W分布表

检验临界值d_L和d_U

由*DW*值的大小确定自相关性

广义差分变换 $DW = 2(1-\hat{\rho}) \Rightarrow \hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$

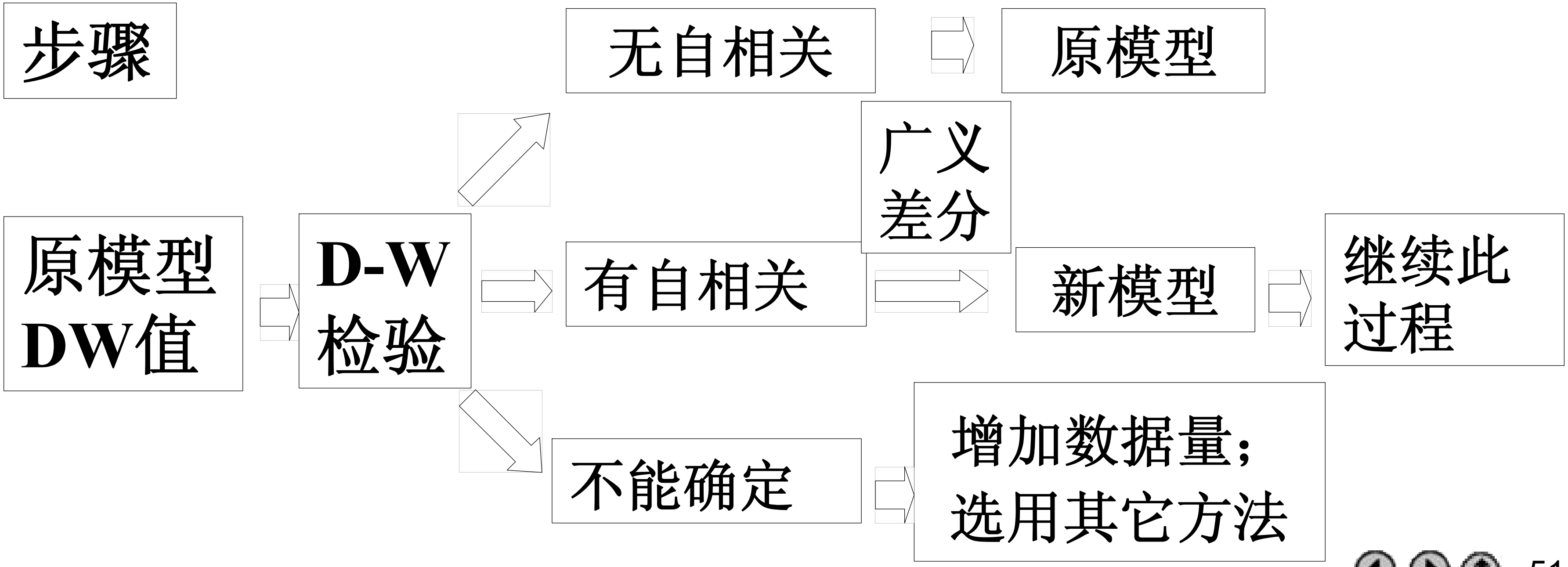
原模型 $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$

变换 $y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}, \; x_{it}^* = x_{it} - \rho x_{i,t-1}, \quad i = 1,2$

新模型 $y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 x_{1t}^* + \beta_2 x_{2t}^* + u_t \quad \beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$

以β^*_0, β_1, β_2 为回归系数的普通回归模型

步骤



原模型
DW值

D-W
检验

无自相关

原模型

有自相关

广义
差分

新模型

继续此
过程

不能确定

增加数据量；
选用其它方法

投资额新模型的建立

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}$$

原模型残差e_t　　DW_{old}= 0.8754

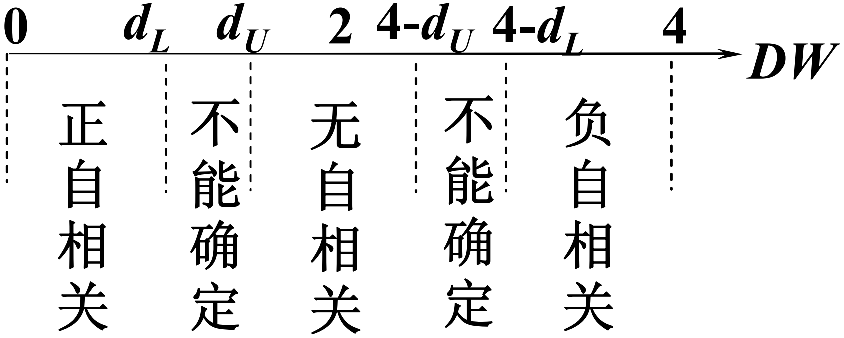
样本容量n=20，回归变量数目k=3，α=0.05

查表 ⇩

临界值d_L=1.10, d_U=1.54

$DW_{old} < d_L$ ⇨ 原模型有正自相关

$$\hat{\rho} = 1 - DW / 2 = 0.5623$$



作变换

$$y_t^* = y_t - 0.5623 y_{t-1}$$

$$x_{it}^* = x_{it} - 0.5623 x_{i,t-1}, \quad i = 1,2$$

投资额新模型的建立

$$y_t^* = y_t - 0.5623 y_{t-1} \qquad x_{it}^* = x_{it} - 0.5623 x_{i,t-1}, \quad i = 1,2$$

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 x_{1t}^* + \beta_2 x_{2t}^* + u_t$$

由数据 $y_t^*, x_{1t}^*, x_{2t}^*$ 估计系数 β_0^*，β_1，β_2

参数	参数估计值	置信区间
β^*_0	**163.4905**	**[1265.4592 2005.2178]**
β_1	**0.6990**	**[0.5751 0.8247]**
β_2	**-1009.0333**	**[-1235.9392 -782.1274]**
R^2= 0.9772 F=342.8988 p=0.0000		

总体效果良好

剩余标准差

$s_{new} = 9.8277 < s_{old} = 12.7164$

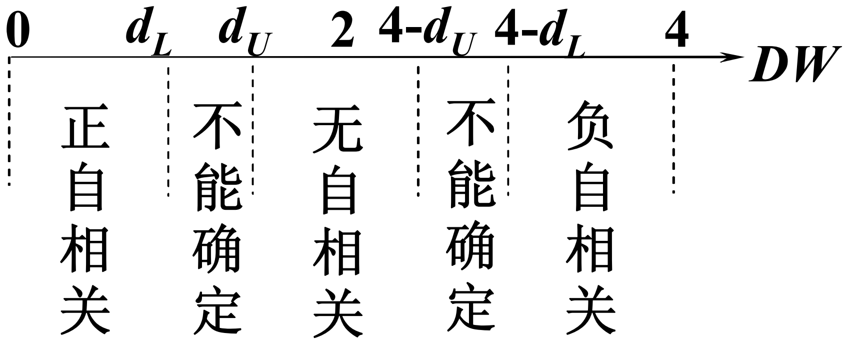
新模型的自相关性检验

新模型残差e_t ⇨ DW_{new}= 1.5751

样本容量n=19，回归变量数目k=3，α=0.05

查表 ⇩

临界值d_L=1.08, d_U=1.53



0　d_L　d_U　2　4-d_U　4-d_L　4　DW

正自相关　不能确定　无自相关　不能确定　负自相关

$d_U < DW_{new} < 4\text{-}d_U$

⇩

新模型无自相关性

新模型 $$\hat{y}_t^* = 163.4905 + 0.699\, x_{1t}^* - 1009.033\, x_{2t}^*$$

还原为原始变量 $$\hat{y}_t = 163.4905 + 0.5623\, y_{t-1} + 0.699\, x_{1,t} - 0.3930\, x_{1,t-1} - 1009.0333\, x_{2,t} + 567.3794\, x_{2,t-1}$$

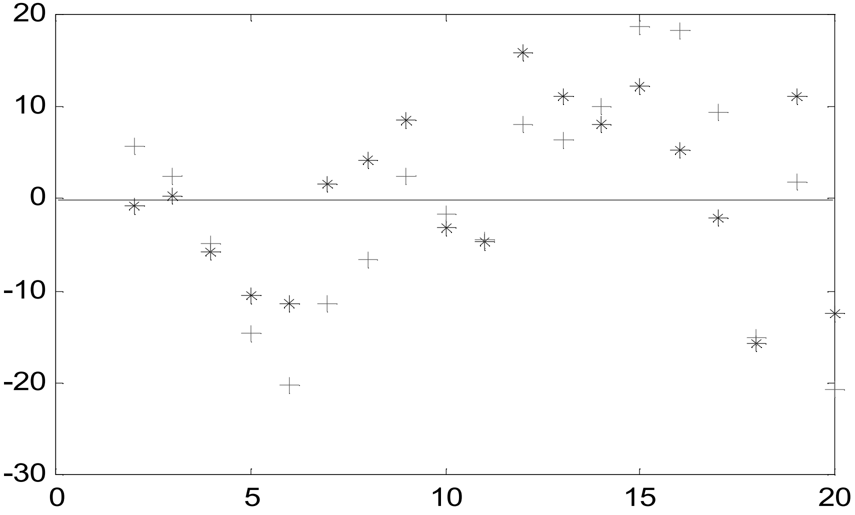
一阶自回归模型

模型结果比较

基本回归模型 $\hat{y}_t = 322.725 + 0.6185x_{1t} - 859.479x_{2t}$

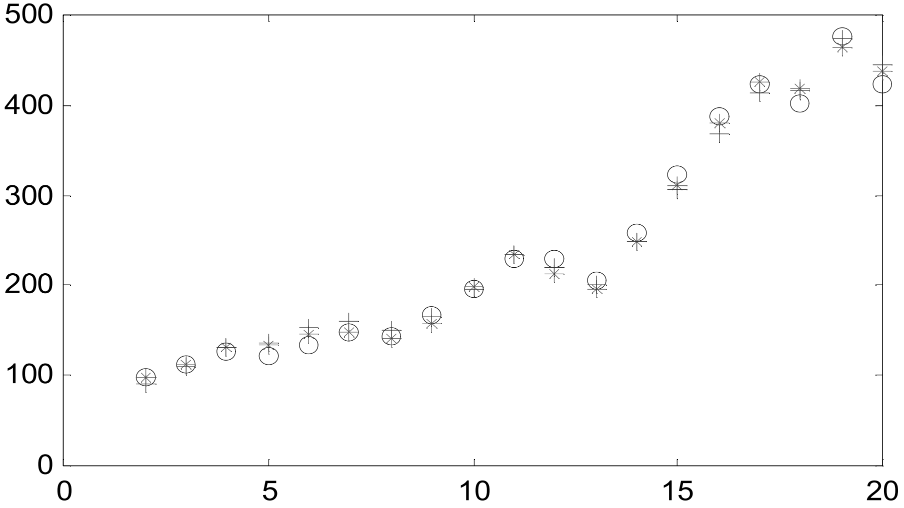
一阶自回归模型 $$\hat{y}_t = 163.4905 + 0.5623y_{t-1} + 0.699x_{1,t} - 0.3930x_{1,t-1} - 1009.0333x_{2,t} + 567.3794x_{2,t-1}$$

残差图比较



新模型 e_t~ *，原模型 e_t~ +

拟合图比较



新模型 $\hat{y}_t$ ~ *，新模型 $\hat{y}_t$ ~ +

一阶自回归模型残差e_t比基本回归模型要小

投资额预测

对未来投资额y_t作预测，需先估计出未来的国民生产总值x_{1t}和物价指数 x_{2t}

年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数	年份序号	投资额	国民生产总值	物价指数
1	90.9	596.7	0.7167	18	401.9	2631.7	1.7842
2	97.4	637.7	0.7277	19	474.9	2954.7	1.9514
3	113.5	691.1	0.7436	20	424.5	3073.0	2.0688

设已知 $t=21$时， $x_{1t}=3312$，$x_{2t}=2.1938$

基本回归模型 $\hat{y}_t = 485.6720$

一阶自回归模型 $\hat{y}_t = 469.7638$

$\hat{y}_t$ 较小是由于$y_{t-1}=424.5$过小所致

第十一章　马氏链模型

马氏链模型

描述一类重要的随机动态系统（过程）的模型

- 系统在每个时期所处的状态是随机的
- 从一时期到下时期的状态按一定概率转移
- 下时期状态只取决于本时期状态和转移概率
  已知现在，将来与过去无关（无后效性）

马氏链 (Markov Chain)

——时间、状态均为离散的随机转移过程

11.1 健康与疾病

通过有实际背景的例子介绍马氏链的基本概念和性质

人的健康状态随着时间的推移会随机地发生转变

保险公司要对投保人未来的健康状态作出估计, 以制订保险金和理赔金的数额

例1. 人的健康状况分为健康和疾病两种状态，设对特定年龄段的人，今年健康、明年保持健康状态的概率为0.8, 而今年患病、明年转为健康状态的概率为0.7,

若某人投保时健康, 问10年后他仍处于健康状态的概率

状态与状态转移

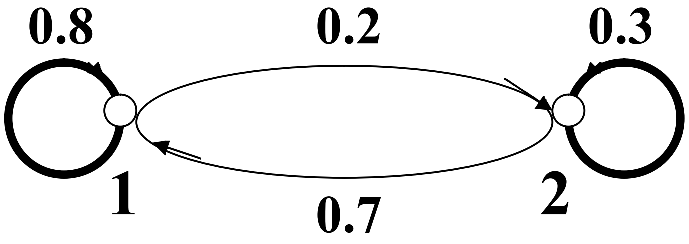
$$\text{状态}X_n=\begin{cases}1, & \text{第}n\text{年健康}\\2, & \text{第}n\text{年疾病}\end{cases}$$

状态概率 $a_i(n)=P(X_n=i)$,
$i=1,2,\ n=0,1,\cdots$

转移概率 $p_{ij}=P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i),\ i,j=1,2,\ \ n=0,1,\cdots$

$p_{11}=0.8\quad p_{12}=1-p_{11}=0.2$

$p_{21}=0.7\quad p_{22}=1-p_{21}=0.3$



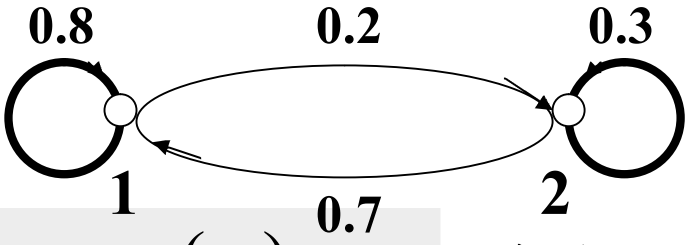
X_{n+1}只取决于X_n和p_{ij}, 与X_{n-1}, …无关

状态转移具有无后效性

$$a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}$$

$$a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}$$

状态与状态转移



$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21} \\ a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22} \end{cases}$$

给定**$a(0)$**，预测**$a(n)$, $n=1,2\ldots$**

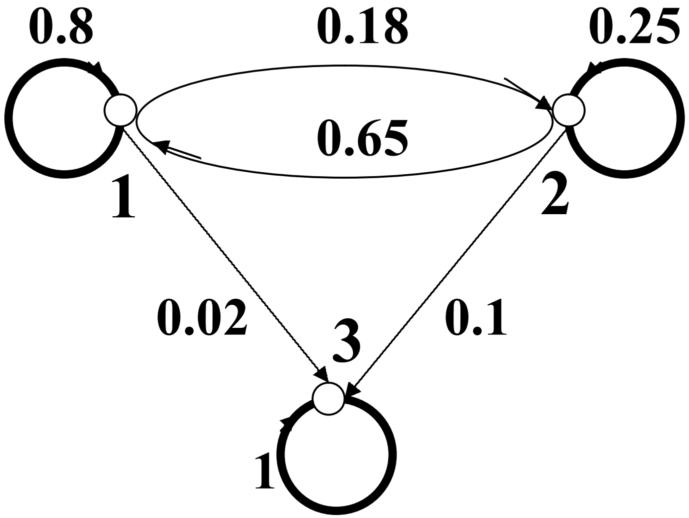
	n	0	1	2	3	…	∞
设投保时健康	$a_1(n)$	1	0.8	0.78	0.778	…	7/9
	$a_2(n)$	0	0.2	0.22	0.222	…	2/9
设投保时疾病	$a_1(n)$	0	0.7	0.77	0.777	…	7/9
	$a_2(n)$	1	0.3	0.33	0.333	…	2/9

$n\to\infty$时状态概率趋于稳定值，稳定值与初始状态无关

健康与疾病

例2. 健康和疾病状态同上，$X_n=1$~ 健康, $X_n=2$~ 疾病

死亡为第3种状态，记$X_n=3$



$p_{11}=0.8,\ p_{12}=0.18,\ p_{13}=0.02$

$p_{21}=0.65,\ p_{22}=0.25,\ p_{23}=0.1$

$p_{31}=0,\ p_{32}=0,\ p_{33}=1$

$$a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}+a_3(n)p_{31}$$

$$a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}+a_3(n)p_{32}$$

$$a_3(n+1)=a_1(n)p_{13}+a_2(n)p_{23}+a_3(n)p_{33}$$

状态与状态转移

设投保时处于健康状态，预测 $a(n)$, $n=1,2\ldots$

n	0	1	2	3	…	50	…	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.757	0.7285	…	0.1293	…	0
$a_2(n)$	0	0.18	0.189	0.1835	…	0.0326	…	0
$a_3(n)$	0	0.02	0.054	0.0880	…	0.8381	…	1

- 不论初始状态如何，最终都要转到状态3；
- 一旦$a_1(k)= a_2(k)=0$, $a_3(k)=1$, 则对于$n>k$, $a_1(n)=0$，$a_2(n)=0$, $a_3(n)=1$, 即从状态3不会转移到其它状态。

马氏链的基本方程

状态 $X_n = 1,2,\cdots k \quad (n=0,1,\cdots)$

状态概率 $a_i(n) = P(X_n = i),$
$i = 1,2,\cdots,k,\ n = 0,1,\cdots$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(n) = 1$$

转移概率 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

$$p_{ij} \ge 0, \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, i = 1,2,\cdots,k$$

基本方程

$$a_i(n+1) = \sum_{j=1}^{k} a_j(n) p_{ji}, \quad i = 1,2,\cdots,k$$

$a(n) = (a_1(n), a_2(n), \cdots, a_k(n))$

~状态概率向量

$P = \{p_{ij}\}_{k \times k}$ ~转移概率矩阵

（非负，行和为1）

$$a(n+1) = a(n)P$$

⇓

$$a(n) = a(0)P^n$$

马氏链的两个重要类型

$$a(n+1)=a(n)P$$

1. 正则链～从任一状态出发经有限次转移能以正概率到达另外任一状态（如例1）。

正则链 $\Leftrightarrow \exists N, P^{N}>0$

正则链 $\Rightarrow \exists w, a(n)\to w(n\to\infty)$ **w～稳态概率**

w满足 $wP=w$

例1. $P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}0.8w_1+0.7w_2=w_1\\ 0.2w_1+0.3w_2=w_2\end{cases} \Rightarrow 0.2w_1=0.7w_2$$

$$\Downarrow$$

w满足 $\sum_{i=1}^{k} w_i=1$

$$w_1+w_2=1 \Rightarrow w=(7/9,2/9)$$

马氏链的两个重要类型

2. 吸收链～存在吸收状态（一旦到达就不会离开的状态*i*, $p_{ii}=1$）,且从任一非吸收状态出发经有限次转移能以正概率到达吸收状态（如例**2**）。

有*r*个吸收状态的吸收链的转移概率阵标准形式

$$P=\begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$$

R有非零元素

$$M=(I-Q)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}Q^{s}$$

$$y=(y_1,y_2,\cdots y_{k-r})=Me$$

$$e=(1,1,\cdots,1)^T$$

y_i～从第 *i* 个非吸收状态出发，被某个吸收状态吸收前的平均转移次数。

11.2 钢琴销售的存贮策略

背景与问题

钢琴销售量很小，商店的库存量不大以免积压资金

一家商店根据经验估计，平均每周的钢琴需求为1架

存贮策略：每周末检查库存量，仅当库存量为零时，才订购3架供下周销售；否则，不订购。

估计在这种策略下失去销售机会的可能性有多大，以及每周的平均销售量是多少。

问题分析

顾客的到来相互独立，需求量近似服从波松分布，其参数由需求均值为每周1架确定，由此计算需求概率

存贮策略是周末库存量为零时订购3架 →周末的库存量可能是0, 1, 2, 3，周初的库存量可能是1, 2, 3。

用马氏链描述不同需求导致的周初库存状态的变化。

动态过程中每周销售量不同，失去销售机会（需求超过库存）的概率不同。

可按稳态情况（时间充分长以后）计算失去销售机会的概率和每周的平均销售量。

模型假设

钢琴每周需求量服从波松分布，均值为每周1架

存贮策略：当周末库存量为零时，订购3架，周初到货；否则，不订购。

以每周初的库存量作为状态变量，状态转移具有无后效性。

在稳态情况下计算该存贮策略失去销售机会的概率，和每周的平均销售量。

模型建立

D_n~第n周需求量，均值为1的波松分布

$$P(D_n = k) = e^{-1} / k! \quad (k = 0,1,2\cdots)$$

D_n	0	1	2	3	>3
P	**0.368**	**0.368**	**0.184**	**0.061**	**0.019**

S_n~第n周初库存量(状态变量)

$S_n \in \{1,2,3\}$

状态转移规律

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n - D_n, & D_n < S_n \\ 3, & D_n \geq S_n \end{cases}$$

$$p_{11} = P(S_{n+1} = 1 | S_n = 1) = P(D_n = 0) = 0.368$$

$$p_{12} = P(S_{n+1} = 2 | S_n = 1) = 0$$

$$p_{13} = P(S_{n+1} = 3 | S_n = 1) = P(D_n \geq 1) = 0.632$$

… …

$$p_{33} = P(S_{n+1} = 3 | S_n = 3) = P(D_n = 0) + P(D_n \geq 3) = 0.448$$

状态转移阵

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix}$$

模型建立　　状态概率 $a_i(n) = P(S_n = i), i = 1,2,3$

马氏链的基本方程　　$a(n+1) = a(n)P$

$$P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix}$$

已知初始状态，可预测第 n 周初库存量 $S_n=i$ 的概率

正则链 $\Leftrightarrow \exists N, P^N > 0$　　$P^2 > 0$ ⇨ **正则链**

⇨ 稳态概率分布 w 满足 $wP=w$

$$w = (w_1, w_2, w_3) = (0.285,0.263,0.452)$$

$n\to\infty$, 状态概率 $a(n) = (0.285,0.263,0.452)$

模型求解

1. 估计在这种策略下失去销售机会的可能性

第*n*周失去销售机会的概率

$$P(D_n > S_n) = \sum_{i=1}^{3} P(D_n > i | S_n = i) P(S_n = i)$$

*n*充分大时 $P(S_n = i) = w_i$

$$= P(D > 1)w_1 + P(D > 2)w_2 + P(D > 3)w_3$$

D	**0**	**1**	**2**	**3**	**>3**
P	**0.368**	**0.368**	**0.184**	**0.061**	**0.019**

$$w = (0.285, 0.263, 0.452)$$

$$= 0.264 \times 0.285 + 0.080 \times 0.263 + 0.019 \times 0.452 = 0.105$$

从长期看，失去销售机会的可能性大约 **10%**。

模型求解

2. 估计这种策略下每周的平均销售量

第*n*周平均售量

$$R_n = \sum_{i=1}^{3} [\sum_{j=1}^{i} jP(D_n = j, S_n = i) + iP(D_n > i, S_n = i) \ ]$$

需求不超过存量,销售需求　　需求超过存量,销售存量

$$= \sum_{i=1}^{3} [\sum_{j=1}^{i} jP(D_n = j | S_n = i) + iP(D_n > i | S_n = i)] P(S_n = i)$$

***n*充分大时** $P(S_n = i) = w_i$

$$= 0.632 \times 0.285 + 0.896 \times 0.263 + 0.977 \times 0.452 = 0.857$$

从长期看，每周的平均销售量为 **0.857(架)**

思考：为什么这个数值略小于每周平均需求量**1(架)** ?

敏感性分析

当平均需求在每周1 (架) 附近波动时，最终结果有多大变化。

设D_n服从均值为λ的波松分布

$$P(D_n = k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!,\ (k = 0,1,2\cdots)$$

状态转移阵

$$P = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 1 - e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda} \\ \lambda^2 e^{-\lambda}/2 & \lambda e^{-\lambda} & 1 - (\lambda + \lambda^2/2)e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

第n周(n充分大)失去销售机会的概率 $P = P(D_n > S_n)$

λ	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
P	0.073	0.089	0.105	0.122	0.139

当平均需求增长（或减少）10%时，失去销售机会的概率将增长（或减少）约12% 。

11.3　基因遗传

背景

- 生物的外部表征由内部相应的基因决定。
- 基因分优势基因d 和劣势基因r 两种。

完全优势基因遗传

- 每种外部表征由两个基因决定，每个基因可以是d, r 中的任一个。形成3种基因类型：$dd \sim$ 优种D, $dr \sim$ 混种H, $rr \sim$ 劣种R。
- 基因类型为优种和混种, 外部表征呈优势；基因类型为劣种, 外部表征呈劣势。
- 生物繁殖时后代随机地（等概率地）继承父、母的各一个基因，形成它的两个基因。父母的基因类型决定后代基因类型的概率

完全优势基因遗传

3种基因类型：*dd*~优种*D*, *dr*~混种*H*, *rr*~劣种*R*

父母基因类型决定后代各种基因类型的概率

父母基因类型组合		*DD*	*RR*	*DH*	*DR*	*HH*	*HR*
后代各种基因类型的概率	*D*	1	0	1 / 2	0	1 / 4	0
	H	0	0	1 / 2	1	1 / 2	1 / 2
	R	0	1	0	0	1 / 4	1 / 2

$$P(D \mid DH) = P(dd \mid dd, dr) = P(d \mid dd) P(d \mid dr) \ = 1 \times 1/2 = 1/2$$

$$P(R \mid HH) = P(rr \mid dr, dr) = P(r \mid dr) P(r \mid dr) \ = 1/2 \times 1/2 = 1/4$$

随机繁殖

讨论基因类型的演变情况

假设

- 设群体中雄性、雌性的比例相等，基因类型的分布相同（记作$D:H:R$）
- 每一雄性个体以$D:H:R$的概率与一雌性个体交配，其后代随机地继承它们的各一个基因
- 设初始一代基因类型比例$D:H:R=a:2b:c$（$a+2b+c=1$), 记$p=a+b$, $q=b+c$, 则群体中优势基因和劣势基因比例 $d:r=p:q$ ($p+q=1$)。

建模

状态$X_n=1,2,3$ ~ 第n代的一个体属于D, H, R

状态概率 $a_i(n)$ ~ 第n代的一个体属于状态$i(=1,2,3)$的概率。

随机繁殖

状态转移概率

基因比例 *d:r=p:q*

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j(\text{后代基因类型})|X_n = i(\text{父基因类型}))$$

$$p_{11} = P(X_{n+1} = 1(\text{后代为}\, dd)|X_n = 1(\text{父为}\, dd)) = p$$

$$p_{12} = P(X_{n+1} = 2(\text{后代为}\, dr)|X_n = 1(\text{父为}\, dd)) = q$$

$$p_{13} = P(X_{n+1} = 3(\text{后代为}\, rr)|X_n = 1(\text{父为}\, dd)) = 0$$

$$p_{21} = P(X_{n+1} = 1(\text{后代为}dd)|X_n = 2(\text{父为}dr)) = 1/2 \cdot p = p/2$$

$$p_{22} = P(X_{n+1} = 2(\text{后代为}dr)$$

$$|X_n = 2(\text{父为}dr))$$

$$= 1/2 \cdot p + 1/2 \cdot q = 1/2$$

转移概率矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p/2 & 1/2 & q/2 \\ 0 & p & q \end{bmatrix}$$

随机繁殖　**马氏链模型**　$a(n+1)=a(n)P,\ n=0,1,\cdots$

$$P=\begin{bmatrix} p & q & 0 \\ p/2 & 1/2 & q/2 \\ 0 & p & q \end{bmatrix}$$

$$a(0)=(a,2b,c)$$

$$a(1)=a(0)P=(p^2,2pq,q^2)$$

$$a(2)=a(1)P=(p^2,2pq,q^2)$$

……

$$p=a+b,\ q=b+c$$

$$a+2b+c=1$$

$a(0)$任意，稳态分布$w=wP=(p^2,2pq,q^2)$

自然界中通常$p=q=1/2$　　稳态分布$D:H:R=1/4:1/2:1/4$

解释“豆科植物的茎，绿色:黄色=3:1”

$(D+H):R=3:1$

基因类型为D和H, 优势表征——绿色，

基因类型为R, 劣势表征——黄色。

近亲繁殖

在一对父母的大量后代中，雄雌随机配对繁殖，讨论一系列后代的基因类型的演变过程。

马氏链模型

状态定义为配对的基因类型组合

$X_n=1,2,3,4,5,6$~配对基因组合为DD,RR,DH,DR,HH,HR

状态转移概率

$$p_{11}=P(X_{n+1}='DD'\,|X_n='DD')=1$$

$$p_{31}=P(X_{n+1}='DD'\,|X_n='DH')$$

$$=1/2\cdot 1/2=1/4$$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

近亲繁殖

$$P=\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\;\boldsymbol{I} & 1 & 0 & 0\;\boldsymbol{0} & 0 & 0 \\ \hline 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0\;\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0\;\boldsymbol{Q} & 1 & 0 \\ 1/16 & 1/16 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right]$$

状态1(*DD*), 2(*RR*)是吸收态，马氏链是吸收链——不论初始如何，经若干代近亲繁殖，将全变为优种或劣种.

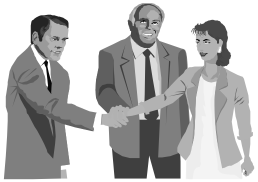
$$M=(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix} 8/3 & 1/6 & 4/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 & 8/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 & 8/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/6 & 4/3 & 8/3 \end{bmatrix}$$

计算从任一非吸收态出发，平均经过几代被吸收态吸收。

$$y=Me=\left(4\frac{5}{6},6\frac{2}{3},5\frac{2}{3},4\frac{5}{6}\right)^T$$

纯种(优种和劣种)的某些品质不如混种，近亲繁殖下大约5~6代就需重新选种.

11.4 等级结构



社会系统中的等级结构，适当、稳定结构的意义

描述等级结构的演变过程，预测未来的结构；

确定为达到某个理想结构应采取的策略。

引起等级结构变化的因素：

- 系统内部等级间的转移：提升和降级；
- 系统内外的交流：调入和退出(退休、调离等).

用马氏链模型描述确定性转移问题 ——转移比例视为概率

基本模型

等级 $i=1,2,\ldots k$（如助教、讲师、教授）

数量分布 $n(t)=(n_1(t), n_2(t), \ldots n_k(t))$

$$N(t)=\sum_{i=1}^{k} n_i(t)$$

$n_i(t) \sim t$ 年属于等级i 的人数， $t=0,1,\ldots$

t年总人数

比例分布 $a(t)=(a_1(t), a_2(t), \ldots a_k(t))$

$$a_i(t)=\frac{n_i(t)}{N(t)}$$

$a(t)$~等级结构

$$a_i(t)\ge 0, \quad \sum_{i=1}^{k} a_i(t)=1$$

转移矩阵 $Q=\{p_{ij}\}_{k\times k}$, p_{ij} 是每年从i 转至j 的比例

基本模型

退出比例 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_k)$, w_i ~ 每年从i退出的比例

$$W(t)=\sum_{i=1}^{k} w_i n_i(t)=n(t)w^T$$ ~ t年退出总人数

调入比例 $r=(r_1,r_2,\cdots r_k)$, r_i ~ 每年调入 i的比例

$R(t)$ ~ t年调入总人数， $r_iR(t)$ ~ t年调入 i的人数

$$p_{ij}, w_i, r_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} + w_i = 1, \ i=1,\cdots k$$

基本模型

分布 $n(t)$

总人数 $N(t)$

转移 $Q=\{p_{ij}\}$

退出 $w, W(t)$

调入 $r, R(t)$

总人数 $N(t+1)=N(t)+R(t)-W(t)$

等级j人数 $n_j(t+1)=\sum_{i=1}^{k} p_{ij} n_i(t)+r_j R(t)$

$$-\xcancel{w_j n_j}(t)$$

$$n(t+1)=n(t)Q+R(t)r$$

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} + w_i = 1$$

总人数增量 $M(t)=N(t+1)-N(t)$

$$R(t)=W(t)+M(t)=n(t)w^T+M(t)$$

$$n(t+1)=n(t)(Q+w^T r)+M(t)r$$

~基本模型

已知 $Q, w, r, M(t), n(0)$, 可预测 $n(t)$

基本模型 $n(t+1)=n(t)(Q+w^T r)+M(t)r$

$P=Q+w^T r$ $n(t+1)=n(t)P+M(t)r$

$Q=\{p_{ij}\},\sum_{j=1}^{k} p_{ij}+w_i=1,\sum_{i=1}^{k} r_i=1$ ⇨ P的行和为1（随机矩阵）

若总人数不变 $M(t)=N(t+1)-N(t)=0$

等级结构 $a(t+1)=a(t)P=a(t)(Q+w^T r)$

与马氏链基本方程 $a(n+1)=a(n)P$ 一致

等级结构*a*(*t*) ~状态概率 **P~转移概率矩阵**

用调入比例进行稳定控制

$$a(t+1)=a(t)P$$

问题：给定Q, 哪些等级结构可以用合适的调入比例保持不变

$$P=Q+w^T r$$

$$Q=\{p_{ij}\},\sum_{j=1}^{k}p_{ij}+w_i=1$$

若存在r使 $a=a(Q+w^T r)$,
称$a=(a_1,\cdots a_k)$为稳定结构.

r应满足$r_i\geq 0,\sum_{i=1}^{k}r_i=1$

$$a=a(Q+w^T r)\ \Rightarrow\ r=\frac{a-aQ}{aw^T}$$

可验证$\sum_{i=1}^{k}r_i=1$

$a\geq aQ\Rightarrow r\geq 0$ $\Rightarrow$ **a为稳定结构**

用调入比例进行稳定控制

$a \geq aQ \Rightarrow a$为稳定结构

例 大学教师(助教、讲师、教授)
等级 ***i*=1,2,3**，已知每年转移比例

$$Q=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

求稳定结构 $\boldsymbol{a=(a_1,a_2,a_3)}$ $\boldsymbol{(a_1+a_2+a_3=1)}$

可行域A

$$a \geq aQ \Rightarrow \begin{cases} a_1 \geq 0.5a_1 \\ a_2 \geq 0.4a_1+0.6a_2 \\ a_3 \geq 0.3a_2+0.8a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 \geq a_1 \\ a_3 \geq 1.5a_2 \end{cases}$$

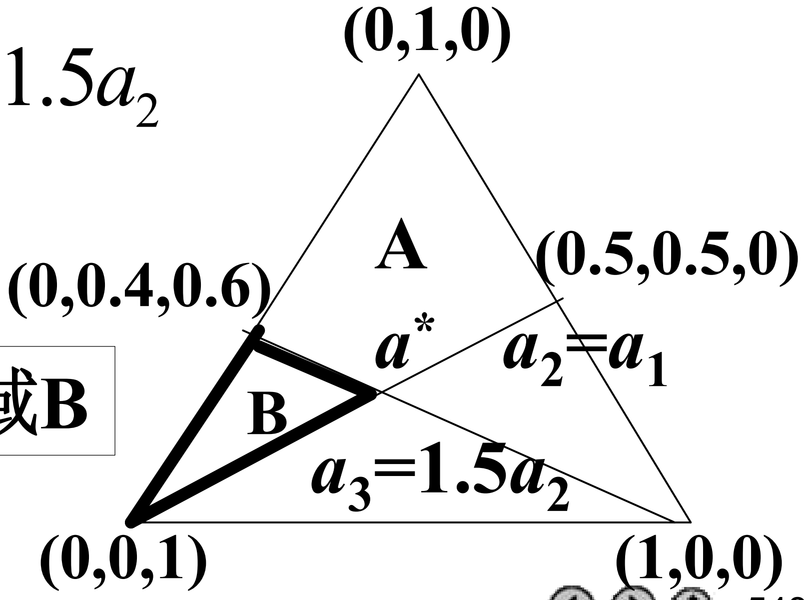
$a_2=a_1$与$a_3=1.5a_2$交点：

$a_1:a_2:a_3=\underline{1}:1:1.5$

$\Downarrow$

$$a^*=(0.286,0.286,0.428)$$

稳定域B



用调入比例进行稳定控制

$a \ge aQ \Rightarrow a$为稳定结构

研究稳定域B的结构 ⇨ **寻求$a\ge aQ$ 的另一种形式**

$$a=a(Q+w^Tr)$$

⇨

$$r=\frac{a-aQ}{aw^T}$$

⇨

$$a=(aw^T)rM$$

$$M=(I-Q)^{-1}$$

记 $r=\sum_{i=1}^{k} r_ie_i$

记M的第 i行 $m_i=(m_{i1},m_{i2},\cdots,m_{ik})$

$e_i=(0,\cdots 1,\cdots 0)$

记M的第 i行元素和 $\mu_i=\sum_{j=1}^{k} m_{ij}$

$$rM=\sum_{i=1}^{k} r_ie_iM=\sum_{i=1}^{k} r_im_i$$

$a=(aw^T)rM$

对行求和

⇨

$$aw^T=\left(\sum_{i=1}^{k} r_i\mu_i\right)^{-1}$$

⇨

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{k} r_im_i}{\sum_{i=1}^{k} r_i\mu_i}$$

用调入比例进行稳定控制

研究稳定域B的结构

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} r_i \mu_i} \Longrightarrow a=\sum_{i=1}^{k} b_i s_i$$

$$b_i=\frac{r_i\mu_i}{\sum_{j=1}^{k} r_j\mu_j} \qquad s_i=\frac{m_i}{\mu_i}$$

$r_i \ge 0 \Leftrightarrow b_i \ge 0$ 当a能表为以b_i为系数的s_i的线性组合，

可验证 $\sum_{i=1}^{k} b_i = 1$ 且$b_i \ge 0, \sum_{i=1}^{k} b_i = 1$时$a$是稳定结构.

稳定域是k维空间中以 s_i 为顶点的凸多面体

用调入比例进行稳定控制

例

$$Q=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0\\ 0 & 0.6 & 0.3\\ 0 & 0 & 0.8\end{bmatrix}$$

$$M=(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 2.5 & 3.75\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

M的第i行$m_i=(m_{i1},m_{i2},m_{i3})$

i行和$\mu_i=\sum_{j=1}^{3} m_{ij}$, $s_i=m_i/\mu_i$

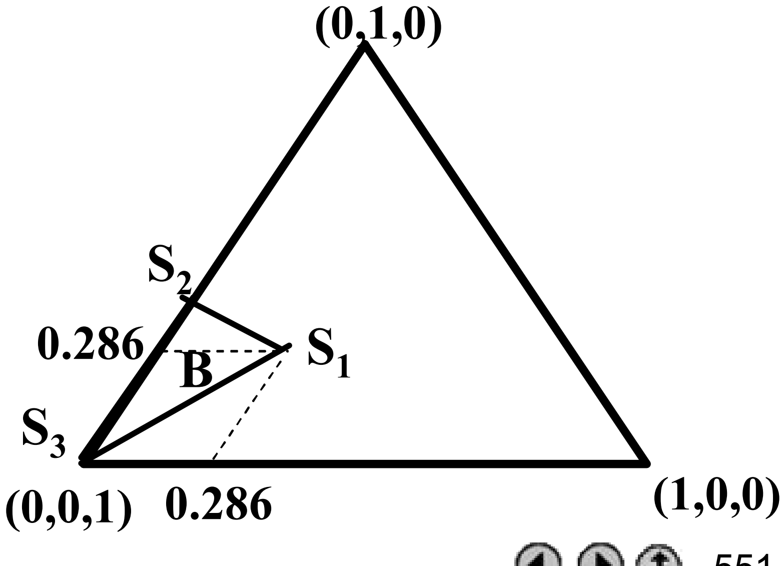
$$\mu_1=7, \mu_2=6.25, \mu_3=5$$

$$s_1=(0.286,0.286,0.428)$$

$$s_2=(0,0.4,0.6), s_3=(0,0,1)$$

$$a=b_1 s_1+b_2 s_2+b_3 s_3,$$

$$b_i \geq 0, \ \sum b_i=1$$



稳定域**B**是以s_i为顶点的三角形

用调入比例进行动态调节

问题：给定*Q*和初始结构 ***a*(0)**, 求一系列的调入比例 ***r***, 使尽快达到或接近理想结构 $a^* \in B$

逐步法：对于*Q*和 ***a*(0)**, 求 ***r***使 ***a*(1)**尽量接近 ***a****, 再将 ***a*(1)**作为新的***a*(0)**, 继续下去。

定义两个结构 $a^{(1)}=(a_1^{(1)},\cdots a_k^{(1)}), a^{(2)}=(a_1^{(2)},\cdots a_k^{(2)})$间的距离

$$D(a^{(1)},a^{(2)})=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(a_i^{(1)}-a_i^{(2)})^2,\ \lambda_i \sim \text{等级}i\text{的权重}$$

模型

$$\min_r \quad D(a(1),a^*)$$

$$s.t.\ a(1)=a(0)(Q+w^T r),$$

$$r_i \ge 0, \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

用调入比例进行动态调节

例 $$Q=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

设 $a(0)=(0,0,1)$,

$$a^{*}=(0.286,0.286,0.428)$$

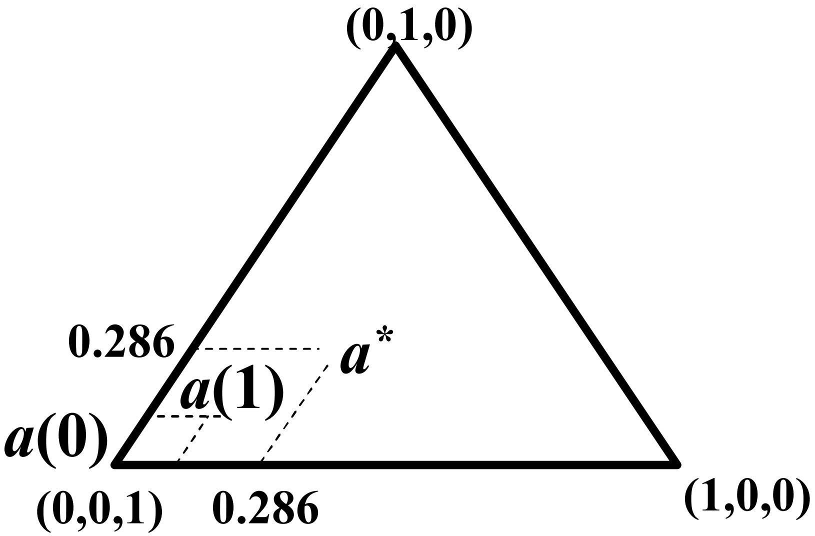
求 $\boldsymbol{r}$ 使 $\boldsymbol{a}(1)$ 尽量接近 $\boldsymbol{a}^{*}$

$$\min_{r} \quad D(a(1), a^{*})$$

$$s.t.\ a(1)=a(0)(Q+w^{T}r),$$

$$r_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} r_i = 1$$

设权重 $\lambda_i = 1$



⇨

$$r=(0.5,0.5,0)$$

$$a(1)=(0.1,0.1,0.8)$$

用调入比例进行动态调节

设 $a(0)=(0,0,1)$,

$r(t)$, $a(t)$ 的计算结果

$a^*=(0.286,0.286,0.428)$

t	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$r(t)$	**0.5**	**0.639**	**0.747**	**0.827**	**0.883**	**0.922**	**0.949**
	0.5	**0.361**	**0.253**	**0.173**	**0.117**	**0.078**	**0.051**
	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
$a(t)$	**0.1**	**0.165**	**0.207**	**0.235**	**0.253**	**0.264**	**0.272**
	0.1	**0.165**	**0.207**	**0.235**	**0.253**	**0.264**	**0.272**
	0.8	**0.670**	**0.586**	**0.531**	**0.495**	**0.472**	**0.457**

$a(7)$已接近a^*

观察$r(t)$的特点